ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

KRONECKER PRODUCTS OF FUZZY MATRICES

นายกฤษฎา สายสงวน

นายกิตติธัช อร่ามศรี

นางสาวสิริวิมล อ่อนน้อมดี

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

KRONECKER PRODUCTS OF FUZZY MATRICES

KRITSADA SAISANGUAN

KITTITACH ARAMSRI

SIRIVIMOL ONNOMDEE

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

Kronecker Products of Fuzzy Matrices

ชื่อนักศึกษา นายกฤษฎา สายสงวน รหัสนักศึกษา 58050006

นายกิตติธัช อร่ามศรี รหัสนักศึกษา 58050015

นางสาวสิริวิมล อ่อนน้อมดี รหัสนักศึกษา 58050169

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เดชา สมนะ ประธานกรรมการ	
ดร.พุทธา สักกะพลางกูร กรรมการ	พุทธา สักกะพลางกูร
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย
ชื่อนักศึกษา	นายกฤษฎา สายสงวน รหัสนักศึกษา 58050006
	นายกิตติธัช อร่ามศรี รหัสนักศึกษา 58050015
	นางสาวสิริวิมล อ่อนน้อมดี รหัสนักศึกษา 58050169
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยนิยามผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์และผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย และทำการตรวจสอบสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว เราได้พบว่าผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยมีสมบัติดังต่อไปนี้ คือ การเปลี่ยนกลุ่ม การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการดำเนินการบวกแบบวิภัชนัย การเข้ากันได้กับการคูณแบบน้อยด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน การคูณแบบน้อยวิภัชนัย ผลบวกตรง และรอยเมริกซ์ นอกจากนี้ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของและผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์มีความเกี่ยวข้องกันตามกฎของเดอมอร์แกน

คำสำคัญ : เมทริกซ์วิภัชนัย การดำเนินการวิภัชนัย ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์

Title	Kronecker Products of Fuzzy Matrices
Students	Mr. Kritsada Saisangun Student ID 58050006
	Mr. Kittitach Aramsri Student ID 58050015
	Miss Sirivimol Onnomdee Student ID 58050169
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2561
Advisor	Asst.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam

Abstract

In this paper, we define the Kronecker min-product and the Kronecker max-product of fuzzy matrices, and investigate their algebraic properties. It turns out that the Kronecker min-product is associative, left/right distributive over the fuzzy addition, and compatible with the scalar min-product, the transposition, the fuzzy min-multiplication, the direct sum, and trace. Moreover, the Kronecker min-product and the Kronecker max-product are related by De Morgan's law.

Keywords : Fuzzy Matrix, Fuzzy Operation, Kronecker Min-Product, Kronecker Max-Product

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เนื่องด้วยได้รับความกรุณาเป็นอย่างสูงจาก ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในการทำปัญหาพิเศษ คอยให้คำปรึกษาและคำแนะนำในการแก้ไขปัญหาต่างๆ ตลอดจนเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษด้วยความ เอาใจใส่อย่างดี คณะผู้จัดทำตระหนักถึงความทุ่มเทและตั้งใจจริงของอาจารย์ และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี่

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.เดชา สมนะ และ ดร.พุทธา สักกะพลางกูร ประธานและคณะกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ประสิทธิ์ประสาท ให้ความรู้ คำแนะนำ ข้อคิดต่างๆอันก่อให้เกิดประโยชน์ต่อการศึกษาค้นคว้า และเป็นแนวทางในการแก้ไขข้อบกพร่องเพื่อให้ปัญหาพิเศษนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

คณะผู้จัดทำหวังว่าปัญหาพิเศษนี้จะมีประโยชน์และคุณค่าอยู่ไม่น้อย จึงขอมอบแก่คณาจารย์ และขอมอบความกตัญญูกตเวทีแก่บิดามารดา และผู้มีพระคุณทุกท่านด้วยความเคารพยิ่ง สำหรับข้อบกพร่องที่อาจจะเกิดขึ้น คณะผู้จัดทำขอน้อมรับผิดแต่เพียงผู้เดียวและยินดีที่จะรับฟังคำชี้แนะเพื่อปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาให้ดีขึ้น

กฤษฎา สายสงวน
กิตติธัช อร่ามศรี
สิริวิมล อ่อนน้อมดี

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1

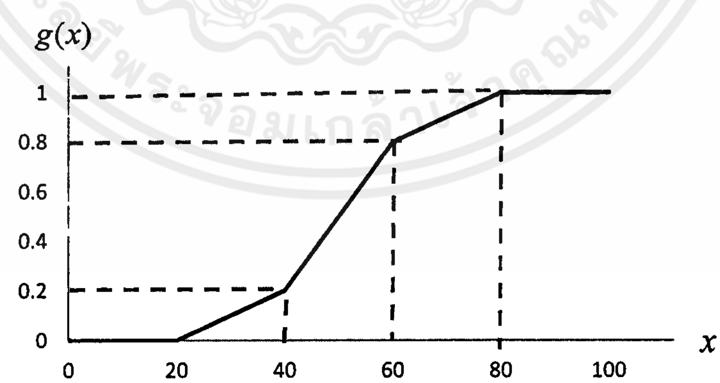
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โดยทั่วไปเราได้เรียนรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้นที่มีค่าความจริงเพียง 2 ค่า คือค่าความจริงเป็นจริง (T) หรือค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ซึ่งค่าความจริงสามารถเขียนแทนเป็น 1 ได้ ถ้าค่าความจริงเป็นจริง และเป็น 0 ถ้ามีค่าความจริงเป็นเท็จ มีตัวดำเนินการ ได้แก่ และ ($\wedge$) หรือ ($\vee$) นิเสธ ($\neg$) เป็นต้น แต่ยังมีตรรกศาสตร์อีกรูปแบบที่ไม่ได้มีค่าความจริงเพียง 2 ค่า กล่าวคือ มีค่าความจริงหลายระดับ ที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ เขียนแทนด้วย

$$\mathscr{Q}_k=\left\{T=1,\frac{k-2}{k-1},\frac{k-3}{k-1},\ldots,\frac{1}{k-1},F=0\right\} \text{ โดยที่ } k>2$$

ซึ่งแต่ละช่วงจะมีระยะห่างเท่ากันตลอดทั้งช่วง เราจะเรียกว่า ตรรกศาสตร์หลายค่า (Multi-valued logic) มีตัวดำเนินการคล้ายคลึงกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น แต่จะมีการดำเนินการแตกต่างกัน เช่น $a\wedge b$ จะเป็นการหาค่าน้อยสุดระหว่าง a กับ b $a\vee b$ จะเป็นการหาค่ามากสุดระหว่าง a กับ b และ $\neg a$ จะเป็นการหาค่าของ $1-a$ เป็นต้น สำหรับตรรกศาสตร์ที่มีค่าความจริงของประพจน์อยู่ในช่วง $\mathscr{F}=[0,1]$ เรียก $\mathscr{F}$ ว่า ตรรกศาสตร์วิภัชนัย (Fuzzy logic) มีการดำเนินการต่างๆคล้ายคลึงกับตรรกศาสตร์หลายค่า ตรรกศาสตร์วิภัชนัยใช้ในการคำนวณมากมาย ได้แก่ ช่วงอายุของคน ที่ไม่ได้มีเพียงแก่หรือไม่แก่ แต่มีค่าความจริงหลายระดับ ดังรูป



รูปที่ 1.1 กราฟแสดงความแก่ของคน

เราสามารถนำตรรกศาสตร์หลายค่าไปประยุกต์กับเมทริกซ์ได้ ถ้าสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์อยู่ใน $\mathscr{D}_k$ จะเรียกว่า เมทริกซ์บูลีนที่มี k ค่า เขียนแทนด้วย $M_{m,n}(\mathscr{B}^k)$ (k-valued Boolean matrix) ถ้าสมาชิกทุกตัวอยู่ใน $\mathscr{F}$ จะเรียกว่า เมทริกซ์วิภัชนัย เขียนแทนด้วย $M_{m,n}(\mathscr{F})$ (Fuzzy matrix) เราจะนำเมทริกซ์วิภัชนัยไปต่อยอดสู่ผลคูณโครเนคเคอร์

ในทฤษฎีเมทริกซ์ผลคูณโครเนคเคอร์ปกติ เป็นผลคูณเมทริกซ์ในรูปแบบหนึ่ง ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ ⊗ ได้มาจากชื่อ Leopold Kronecker นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยสำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง $A=[a_{ij}]$ มิติ $m\times n$ และ B มิติ $p\times q$ เรานิยาม

$$A\otimes B=[a_{ij}B]$$

นั่นคือ $A\otimes B$ เป็นการคูณกันแบบบล็อกที่แต่ละตำแหน่ง i,j ผลคูณโครเนคเคอร์ได้ประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในทฤษฎีระบบ แคลคูลัสเมทริกซ์ ฟิสิกส์ สถิติ วิทยาการคอมพิวเตอร์ และรายงานเฉพาะด้านอื่นๆ

ในปัญหาพิเศษนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย โดยให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$A\otimes_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix} a_{11}\times_{\mathscr{F}} B & a_{12}\times_{\mathscr{F}} B & \cdots & a_{1n}\times_{\mathscr{F}} B \\ a_{21}\times_{\mathscr{F}} B & a_{22}\times_{\mathscr{F}} B & \cdots & a_{2n}\times_{\mathscr{F}} B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}\times_{\mathscr{F}} B & a_{m2}\times_{\mathscr{F}} B & \cdots & a_{mn}\times_{\mathscr{F}} B \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathscr{F})$$

เราจะศึกษาสมบัติต่างๆของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย ว่ามีสมบัติเหมือนโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริงหรือไม่

ในบทต่อไปนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐาน ได้แก่ บทนิยาม สมบัติ การดำเนินการ และตัวอย่างต่างๆที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษนี้ จากนั้นจะกล่าวถึง เมทริกซ์วิภัชนัย การดำเนินการของเมทริกซ์วิภัชนัย และผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาสมบัติของการดำเนินการเชิงพีชคณิตต่างๆของเมทริกซ์วิภัชนัย
2. เพื่อให้บทนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์วิภัยนัยและศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตต่างๆของผลคูณดังกล่าว

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยที่จะพิจารณาประกอบด้วย การเปลี่ยนกลุ่ม การแจกแจงทางซ้ายเหนือการบวก การแจกแจงทางขวาเหนือการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณแบบปกติ การดูดกลืน นิเสธ และรอยเมทริกซ์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. พัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์เหนือเมทริกซ์วิภัชนัย
2. เป็นพื้นฐานในการทำวิจัยและศึกษาต่อในระบบที่สูงขึ้น
3. ได้ฝึกฝนทักษะและกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาตรรกศาสตร์แบบต่างๆ ได้แก่ ตรรกศาสตร์บูลีน ตรรกศาสตร์หลายค่า ตรรกศาสตร์วิภัชนัย
2. ศึกษาการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์บูลีนที่มี k ค่า
3. ศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง
4. ศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์บนเมทริกซ์บูลีนที่มี k ค่า
5. ศึกษาสมบัติของการดำเนินการเชิงพีชคณิตต่างๆสำหรับเมทริกซ์วิภัชนัย
6. ให้บทนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์วิภัชนัย
7. ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตต่างๆของผลคูณโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์วิภัชนัย
8. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ

ตารางที่ 1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี พ.ศ.2561					ปี พ.ศ.2562				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.ศึกษาตรรกศาสตร์แบบต่างๆ ได้แก่ ตรรกศาสตร์บูลีน ตรรกศาสตร์หลายค่า ตรรกศาสตร์วิภัชนัย										
2.ศึกษาการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์บูลีนที่มี k ค่า										
3.ศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์จริง										
4.ศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์บนเมทริกซ์บูลีนที่มี k ค่า										
5.ให้บทนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์วิภัชนัย										
6.จัดทำเอกสาร										
7.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับตรรกศาสตร์ การดำเนินการและสมบัติ โดยเริ่มจากตรรกศาสตร์บูลีน ตรรกศาสตร์หลายค่า และตรรกศาสตร์วิภัชนัย รวมถึงศึกษาผลคูณโครเนคเคอร์ของทฤษฎีเมทริกซ์จริง

2.1 ตรรกศาสตร์บูลีน

ตรรกศาสตร์บูลีน เป็นตรรกศาสตร์ที่มีค่าความจริงเพียง 2 ค่า คือค่าความจริงเป็นจริง (T) หรือ ค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

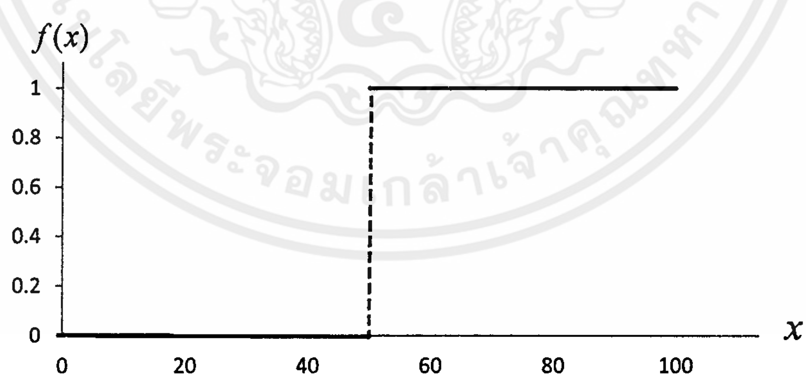
บทนิยาม 2.1.1 ตรรกศาสตร์บูลีนที่ค่าความจริงเป็นจริง (T) เขียนแทนด้วย 1 และค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เขียนแทนด้วย 0

ตัวอย่าง 2.1.2 กราฟของตรรกศาสตร์บูลีน

เราจะกำหนดฟังก์ชัน เพื่อจะอธิบายกราฟของตรรกศาสตร์บูลีน ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<50 \quad \text{สอบตก}\\ 1; & x\geq 50 \quad \text{สอบผ่าน}\end{cases}$$

เราจะทำการเขียนกราฟของการสอบโดยแบ่งเป็น 2 ช่วง ดังรูป



รูปที่ 2.1 กราฟของตรรกศาสตร์บูลีน

ให้ x แทนคะแนนสอบ และ $f(x)$ แทนระดับการสอบ

จากกราฟ จะเห็นว่าการสอบมี 2 ระดับ คือ สอบตกและสอบผ่าน ซึ่งจะเหมือนกับตรรกศาสตร์บูลีนที่มีเพียง 2 ค่า คือค่าความจริงเป็นจริงกับค่าความจริงเป็นเท็จนั่นเอง

ต่อมาเราจะกล่าวถึงพีชคณิตบูลีนที่เป็นสาขาหนึ่งของพีชคณิต ซึ่งค่าของตัวแปรเป็นค่าความจริง จริงกับเท็จ มักเขียนแทนด้วย 1 และ 0 ตามลำดับ

บทนิยาม 2.1.3 การดำเนินการพื้นฐานในพีชคณิตบูลีน ได้แก่ การดำเนินการทวิภาค ซึ่งเป็นการดำเนินการของค่า 2 ค่า ไปยังผลลัพธ์เพียง 1 ค่า

1. การดำเนินการทวิภาค “และ” เขียนแทนด้วย $\wedge$ นิยามดังตารางค่าความจริงดังนี้

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1. การดำเนินการทวิภาค “หรือ” เขียนแทนด้วย $\vee$ นิยามดังตารางค่าความจริงดังนี้

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. การดำเนินการเอกภาค “นิเสธ” เขียนแทนด้วย $\neg$ นิยามดังตารางค่าความจริงดังนี้

x	$\neg x$
0	1
1	0

สมบัติพีชคณิตบูลีน ให้ x, y, z เป็นตรรกศาสตร์บูลีน

1) $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$

2) $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$

3) $x \wedge 1 = x$; $x \vee 0 = x$

4) $x \vee 1 = 1$; $x \wedge 0 = 0$

5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

6) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

7) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$; $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

8) $x \wedge (x \vee y) = x$; $x \vee (x \wedge y) = x$

2.2 ตรรกศาสตร์หลายค่า

ตรรกศาสตร์หลายค่า เป็นตรรกศาสตร์ที่มีค่าความจริงหลายระดับ และเป็นช่วงแต่ละระดับเท่ากัน เช่น ระดับค่าความแก่ของคนที่ไม่มีแค่ 2 ช่วง คือแก่กับไม่แก่ แต่จะมีหลายช่วง เช่น วัยเด็ก วัยรุ่น วัยกลางคน วัยชรา โดยเราจะนิยามตรรกศาสตร์หลายค่า ได้ดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 โดเมนของตรรกศาสตร์ ที่มีค่าความจริง k ค่า

$$\mathscr{D}_k = \left\{ T = 1, \frac{k-2}{k-1}, \frac{k-3}{k-1}, \ldots, \frac{1}{k-1}, F = 0 \right\} \text{ โดยที่ } k > 2$$

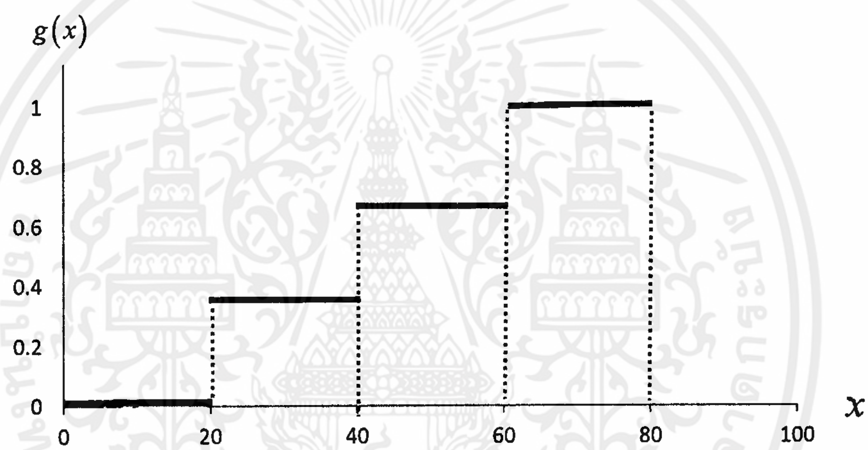
ซึ่งแต่ละช่วงจะมีระยะห่างเท่ากันตลอดทั้งช่วง เราจะเรียกว่า ตรรกศาสตร์หลายค่า (Multi-valued logic) มีตัวดำเนินการคล้ายคลึงกับตรรกศาสตร์บูลีน แต่จะมีการดำเนินการแตกต่างกัน เช่น $a \wedge b$ จะเป็นการหาค่าน้อยสุดระหว่าง a กับ b $a \vee b$ จะเป็นการหาค่ามากสุดระหว่าง a กับ b และ $\neg a$ จะเป็นการหาค่าของ $1-a$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.2.2 กราฟของตรรกศาสตร์หลายค่า

เราจะกำหนดฟังก์ชัน เพื่อจะอธิบายกราฟของตรรกศาสตร์หลายค่า ดังนี้

$$g(x)=\begin{cases} 0; & x \le 20 & \text{วัยเด็ก} \\ 0.33; & 20 < x \le 40 & \text{วัยรุ่น} \\ 0.67; & 40 < x \le 60 & \text{วัยกลางคน} \\ 1; & x > 60 & \text{วัยชรา} \end{cases}$$

เราจะทำการเขียนกราฟความแก่ของคนโดยแบ่งระดับค่าความแก่ของคนเป็น 4 ช่วง ดังรูป



รูปที่ 2.2 กราฟของตรรกศาสตร์หลายค่า

ให้ x แทนช่วงอายุของคน(ปี) และ $g(x)$ แทนระดับค่าความแก่ของคน

จากกราฟ ความแก่ของคนมีระดับความแก่เป็น 4 ช่วง คือ วัยเด็ก วัยรุ่น วัยกลางคน และวัยชรา โดยแต่ละช่วงจะห่างเท่ากันซึ่งเป็นตรรกศาสตร์หลายค่า จะเห็นว่าตรรกศาสตร์หลายค่านั้นสามารถแบ่งได้แม่นยำกว่าตรรกศาสตร์บูลีนที่มีระดับค่าความแก่เป็น 2 ช่วง คือแก่กับไม่แก่ แต่ถ้าระดับค่าความแก่ซับซ้อนมากขึ้น กล่าวคือ ถ้าค่าความจริงมีระยะห่างที่ไม่เท่ากันเป็นช่วงต่อเนื่องอยู่ระหว่าง [0,1] เราจะใช้ตรรกศาสตร์อีกรูปแบบ คือ ตรรกศาสตร์วิภัชนัย (Fuzzy Logic) ซึ่งเราจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

2.3 ตรรกศาสตร์วิภัชนัย

ตรรกศาสตร์วิภัชนัย เป็นตรรกศาสตร์ที่มีค่าความจริงหลายระดับ คล้ายคลึงกับตรรกศาสตร์หลายค่า แต่จะแตกต่างกันโดยมีระยะห่างไม่เท่ากัน หรือก็คือ มีค่าอยู่ในช่วง [0,1]

ตรรกศาสตร์วิภัชนัยที่เห็นได้ชัดเจน คือ การแบ่งระดับค่าความแก่ของคนที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ที่ไม่ได้มีเพียงวัยเด็ก วัยรุ่น วัยกลางคน และวัยชรา แต่จะเป็นการแบ่งที่ละเอียดมากขึ้น

บทนิยาม 2.3.1 ให้ $\mathscr{F}$ แทนโดเมนของตรรกศาสตร์วิภัช นิยามโดย

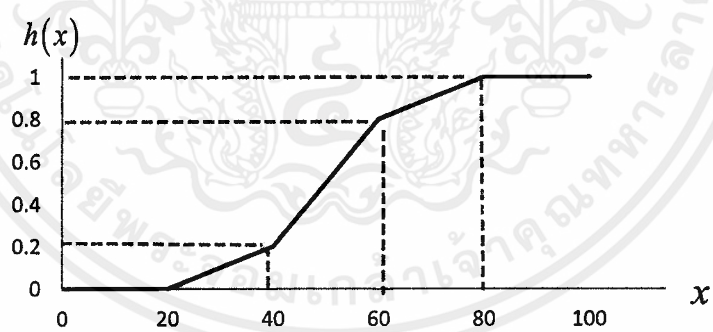
$$\mathscr{F} = [0,1]$$

ตัวอย่าง 2.3.2 กราฟของตรรกศาสตร์วิภัชนัย

เราจะกำหนดฟังก์ชัน เพื่อจะอธิบายกราฟของตรรกศาสตร์วิภัชนัย ดังนี้

$$h(x) = \begin{cases} 0; & x \le 20 \\ 0.01(x-40); & 20 \le x \le 40 \\ 0.2 + 0.04(x-40); & 40 \le x \le 60 \\ 0.8 + 0.01(x-60); & 60 \le x \le 80 \\ 1; & x > 80 \end{cases}$$

เราจะทำการเขียนกราฟความแก่ของคนโดยแบ่งระดับค่าความแก่ของคน ดังรูป



รูปที่ 2.3 กราฟของตรรกศาสตร์วิภัชนัย

ให้ x แทนช่วงอายุของคน(ปี) และ $h(x)$ แทนระดับค่าความแก่ของคน

จากกราฟ จะเห็นว่าความแก่ของคนมีระดับค่าความแก่ที่ต่อเนื่องกันบน [0,1] และระยะห่างไม่เท่ากัน สามารถแบ่งได้แม่นยำกว่าตรรกศาสตร์บูลีนและตรรกศาสตร์หลายค่า

บทนิยาม 2.3.3 ให้ $\alpha,\beta \in \mathscr{F}$ เรานิยาม

$$\neg\alpha = 1-\alpha$$

$$\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha,\beta\}$$

$$\alpha \vee \beta = \max\{\alpha,\beta\}$$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $\alpha = 0.66$, $\beta = 0.75$ โดยที่ $\alpha,\beta \in \mathscr{F}$

$$\neg\alpha = 1-0.66 = 0.34$$

$$\alpha \wedge \beta = \min\{0.66,0.75\} = 0.66$$

$$\alpha \vee \beta = \max\{0.66,0.75\} = 0.75$$

2.4 ผลคูณโครเนคเคอร์

ในทฤษฎีเมทริกซ์ มีนักคณิตศาสตร์ ชาวเยอรมันชื่อ Leopold kronecker ได้คิดค้นผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) ซึ่งเป็นผลคูณรูปแบบหนึ่งโดยจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ (O-Time) สำหรับทุกเมทริกซ์จริง

สำหรับแต่ละจำนวนนับ m และ n ให้ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์จริงที่มีมิติ $m \times n$ และให้ $M_n(\mathbb{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์จริงที่มีมิติ $n \times n$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[b_{ij}] \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

เรานิยามผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์ A และ B โดย $A \otimes B = [a_{ij}B] \in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

นั่นคือ $A \otimes B$ เป็นการคูณกันแบบบล็อก โดยนำ a_{ij} แต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ A มาคูณแบบบล็อกกับเมทริกซ์ B โดยมีมิติเป็น $mp \times nq$

ตัวอย่าง 2.4.2 กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

ผลคูณโครเนคเคอร์ A และ B คือ

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -5\end{bmatrix} & -3\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -3\end{bmatrix}\\ 2\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -3\end{bmatrix} & 0\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 6\\ 5 & 1 & -5 & 0\\ 4 & -2 & 6 & -3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -4 & -6\\ -5 & -1 & 5 & 0\\ -4 & 2 & -6 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & -6 & -12 & -18\\ -15 & -3 & 15 & 0\\ -12 & 6 & -18 & 9\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & 4 & 8 & 12\\ 10 & 2 & -10 & 0\\ 8 & -4 & 12 & -6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4 & -6 & 3 & -6 & -12 & -18\\ -5 & -1 & 5 & 0 & -15 & 3 & 15 & 0\\ -4 & 2 & -6 & 3 & -12 & 6 & -18 & 9\\ -2 & 4 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 10 & 2 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 8 & -4 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ผลคูณโครเนคเคอร์ B และ A คือ

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 6 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 6 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & -3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -6 & -4 & -12 & -6 & -18 \\ -2 & 0 & 4 & 8 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ -5 & -15 & -1 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & -10 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -12 & 2 & -6 & -6 & -18 & 3 & 9 \\ 8 & 0 & -4 & 12 & 12 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าผลคูณโครเนคเคอร์สลับที่การคูณไม่ได้ นั่นคือ $A \otimes B \neq B \otimes A$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ แล้ว

1) $(\alpha A)\otimes B = \alpha(A\otimes B) = A\otimes(\alpha B)$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

2) $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

3) $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ และ $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

4) $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ และ $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

5) $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$ สำหรับ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

6) $A\otimes 0_{p,q} = 0_{p,q}\otimes A = 0_{mp,nq}$

7) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$

บทแทรก 2.4.4 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ แล้ว $A\otimes B = 0_{mp,nq}$ ก็ต่อเมื่อ $A = 0_{m,n}$ หรือ $B = 0_{p,q}$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ และ $D \in M_{q,r}(\mathbb{R})$ แล้ว $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$

บทแทรก 2.4.6 จากทฤษฎีบท 2.4.5 สามารถจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ 2 แบบ

1) $(A_1\otimes A_2\otimes\ldots\otimes A_k)(B_1\otimes B_2\otimes\ldots\otimes B_k) = A_1B_1\otimes A_2B_2\otimes\ldots\otimes A_kB_k$

2) $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)\ldots(A_k\otimes B_k) = (A_1A_2\ldots A_k)\otimes(B_1B_2\ldots B_k)$

บทที่ 3
เมทริกซ์วิภัชนัย

3.1 เมทริกซ์วิภัชนัย

บทนิยาม 3.1.1 สำหรับแต่ละ $m,n \in \mathbb{N}$ ให้ $M_{m,n}(\mathscr{F})$ แทนเซตของเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และให้ $M_m(\mathscr{F})$ แทนเซตของเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times m$ ทั้งหมดที่มีแต่ละสมาชิกอยู่ใน $\mathscr{F}$ จะเรียกเมทริกซ์นี้ว่า เมทริกซ์วิภัชนัย

เรากำหนดสัญลักษณ์ใหม่ได้ดังนี้

1) $1_{m,n} : 1_{m,n} \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เป็นเมทริกซ์ที่แต่ละสมาชิกเป็น $1 \in \mathscr{F}$ มีมิติเป็น $m \times n$
2) $0_{m,n} : 0_{m,n} \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เป็นเมทริกซ์ที่แต่ละสมาชิกเป็น $0 \in \mathscr{F}$ มีมิติเป็น $m \times n$
3) $J_m : J_m \in M_m(\mathscr{F})$ เป็นเมทริกซ์ที่เขียนแทนด้วย

$$J_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_m$$

ต่อไปเป็นการดำเนินการพื้นฐานบนเมทริกซ์วิภัชนัย

บทนิยาม 3.1.2 ให้ $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$\neg A = [\neg a_{ij}] = [1-a_{ij}]$$

$$A \wedge B = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [\min\{a_{ij}, b_{ij}\}]$$

$$A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [\max\{a_{ij}, b_{ij}\}]$$

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$A \le B \leftrightarrow a_{ij} \le b_{ij} \quad ; \quad \forall_{i,j}$$

นั่นคือ แต่ละสมาชิกในเมทริกซ์ A ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับแต่ละสมาชิกในเมทริกซ์ B โดยตำแหน่งเดียวกันเปรียบเทียบกัน

บทนิยาม 3.1.4 ให้ $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $A=[a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$\alpha A = [\alpha \wedge a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathscr{F})$$

ตัวอย่าง 3.1.5

$$A=\begin{bmatrix}0.25 & 0.56\\ 1 & 0.76\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0.42 & 0.65\\ 0.81 & 0\end{bmatrix}$$

จะได้

$$\neg A=\begin{bmatrix}1-0.25 & 1-0.56\\ 1-1 & 1-0.76\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75 & 0.44\\ 0 & 0.24\end{bmatrix}$$

$$A\wedge B=\begin{bmatrix}0.25\wedge 0.42 & 0.56\wedge 0.65\\ 1\wedge 0.31 & 0.76\wedge 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.56\\ 0.81 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\vee B=\begin{bmatrix}0.25\vee 0.42 & 0.56\vee 0.65\\ 1\vee 0.31 & 0.76\vee 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.42 & 0.65\\ 1 & 0.76\end{bmatrix}$$

$$A\wedge 1_2=\begin{bmatrix}0.25\wedge 1 & 0.56\wedge 1\\ 1\wedge 1 & 0.76\wedge 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.56\\ 1 & 0.76\end{bmatrix}=A$$

$$B\vee 0_2=\begin{bmatrix}0.42\vee 0 & 0.65\vee 0\\ 0.81\vee 0 & 0\vee 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.42 & 0.65\\ 0.81 & 0\end{bmatrix}=B$$

ตัวอย่าง 3.1.6

$$A=\begin{bmatrix}0.25 & 0.57\\ 0.27 & 0.48\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0.26 & 0.65\\ 0.38 & 0.52\end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $a_{ij}\le b_{ij}$ ทุก i,j จากนิยาม จะได้ว่า $A\le B$

บทตั้ง 3.1.7 ให้ $w,x,y,z\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า

(1) $\min\{\min\{x,y\},z\}=\min\{x,\min\{y,z\}\}$;
$\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,\max\{y,z\}\}$

(2) $\max\{\min\{x,y\},z\}=\min\{\max\{x,z\},\max\{y,z\}\}$;
$\min\{\max\{x,y\},z\}=\max\{\min\{x,z\},\min\{y,z\}\}$

(3) $\max\{\min\{x,y\},x\}=x$; $\min\{\max\{x,y\},x\}=x$

(4) $1-\min\{x,y\}=\max\{1-x,1-y\}$; $1-\max\{x,y\}=\min\{1-x,1-y\}$

(5) สมมติ $w\le x$ และ $y\le z$
จะได้ว่า $\min\{w,y\}\le\min\{x,z\}$; $\max\{w,y\}\le\max\{x,z\}$

บทพิสูจน์

(1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\min\{\min\{x,y\},z\}=\min\{x,\min\{y,z\}\}$

จะได้ว่า $\min\{\min\{x,y\},z\}=\min\{x,y,z\}$

$$\min\{x,\min\{y,z\}\}=\min\{x,y,z\}$$

ดังนั้น $\min\{\min\{x,y\},z\}=\min\{x,\min\{y,z\}\}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,\max\{y,z\}\}$

จะได้ว่า $\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,y,z\}$

$$\max\{x,\max\{y,z\}\}=\max\{x,y,z\}$$

ดังนั้น $\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,\max\{y,z\}\}$

(2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\max\{\min\{x,y\},z\} = \min\{\max\{x,z\},\max\{y,z\}\}$

กรณีที่ $x\le y$

$$\begin{aligned}\max\{\min\{x,y\},z\} &= \max\{x,z\}\\ \min\{\max\{x,z\},\max\{y,z\}\} &= \max\{x,z\}\\ &= \max\{\min\{x,y\},z\}\end{aligned}$$

กรณีที่ $x>y$

$$\begin{aligned}\max\{\min\{x,y\},z\} &= \max\{y,z\}\\ \min\{\max\{x,z\},\max\{y,z\}\} &= \max\{y,z\}\\ &= \max\{\min\{x,y\},z\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\max\{\min\{x,y\},z\} = \min\{\max\{x,z\},\max\{y,z\}\}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\min\{\max\{x,y\},z\} = \max\{\min\{x,z\},\min\{y,z\}\}$

กรณีที่ $x\le y$

$$\begin{aligned}\min\{\max\{x,y\},z\} &= \min\{y,z\}\\ \max\{\min\{x,z\},\min\{y,z\}\} &= \min\{y,z\}\\ &= \min\{\max\{x,y\},z\}\end{aligned}$$

กรณีที่ $x > y$

$$\min\{\max\{x,y\},z\} = \min\{x,z\}$$

$$\max\{\min\{x,z\},\min\{y,z\}\} = \min\{x,z\} = \min\{\max\{x,y\},z\}$$

ดังนั้น $\min\{\max\{x,y\},z\} = \max\{\min\{x,z\},\min\{y,z\}\}$

(3) ต้องการพิสูจน์ว่า $\max\{\min\{x,y\},x\} = x$

กรณีที่ $x \le y$

$$\max\{\min\{x,y\},x\} = \max\{x,x\} = x$$

กรณีที่ $x > y$

$$\max\{\min\{x,y\},x\} = \max\{y,x\} = x$$

ดังนั้น $\max\{\min\{x,y\},x\} = x$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\min\{\max\{x,y\},x\} = x$

กรณีที่ $x \le y$

$$\min\{\max\{x,y\},x\} = \min\{y,x\} = x$$

กรณีที่ $x > y$

$$\min\{\max\{x,y\},x\} = \min\{x,x\} = x$$

ดังนั้น $\min\{\max\{x,y\},x\} = x$

(4) ต้องการพิสูจน์ว่า $1-\min\{x,y\} = \max\{1-x,1-y\}$

กรณีที่ $x \le y$

$$\begin{aligned} 1-\min\{x,y\} &= 1-x \\ \max\{1-x,1-y\} &= 1-x \\ &= 1-\min\{x,y\} \end{aligned}$$

กรณีที่ $x > y$

$$\begin{aligned} 1-\min\{x,y\} &= 1-y \\ \max\{1-x,1-y\} &= 1-y \\ &= 1-\min\{x,y\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $1-\min\{x,y\} = \max\{1-x,1-y\}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $1-\max\{x,y\} = \min\{1-x,1-y\}$

กรณีที่ $x \le y$

$$\begin{aligned} 1-\max\{x,y\} &= 1-y \\ \min\{1-x,1-y\} &= 1-y \\ &= 1-\max\{x,y\} \end{aligned}$$

กรณีที่ $x > y$

$$\begin{aligned} 1-\max\{x,y\} &= 1-x \\ \min\{1-x,1-y\} &= 1-x \\ &= 1-\max\{x,y\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $1-\max\{x,y\} = \min\{1-x,1-y\}$

(5) สมมติ $w \le x$ และ $y \le z$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\min\{w,y\} \le \min\{x,z\}$

เนื่องจาก $y \le z$ จะได้ว่า

$$\min\{x,y\} \le \min\{x,z\}$$

และเนื่องจาก $w \le x$ จะได้ว่า

$$\min\{w,y\} \le \min\{x,y\} \le \min\{x,z\}$$

ดังนั้น $\min\{w,y\} \le \min\{x,z\}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\max\{w,y\} \le \max\{x,z\}$

เนื่องจาก $y \le z$ จะได้ว่า

$$\max\{x,y\} \le \max\{x,z\}$$

และเนื่องจาก $w \le x$ จะได้ว่า

$$\max\{w,y\} \le \max\{x,y\} \le \max\{x,z\}$$

ดังนั้น $\max\{w,y\} \le \max\{x,z\}$

ต่อไปเป็นการดำเนินการของเมทริกซ์วิภัชนัยที่มีสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ $A,B,C,1,0 \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ โดยที่ $A=[a_{ij}]$; $B=[b_{ij}]$; $C=[c_{ij}]$

(1) $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$

(2) $A \wedge 0 = 0$; $A \vee 1 = 1$

(3) $A \vee 0 = A$; $A \wedge 1 = A$

(4) $A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee B = B \vee A$

(5) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

(6) $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$; $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(7) $(A \wedge B) \vee A = A$; $(A \vee B) \wedge A = A$

(8) $\neg(\neg A) = A$

(9) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$; $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

(10) สมมติ $A \ge B$ จะได้ว่า $A \wedge B = B$; $A \vee B = A$

(11) สมมติ $A \le B$ และ $C \le D$

จะได้ว่า $A \wedge C \le B \wedge D$; $A \vee C \le B \vee D$

(12) สมมติ $A \leq B$ จะได้ว่า $\neg A \geq \neg B$

บทพิสูจน์

(1) ต้องการพิสูจน์ว่า $A \wedge A = A$

จะได้ว่า $A \wedge A = \left[a_{ij} \wedge a_{ij}\right] = \left[\min\left\{a_{ij}, a_{ij}\right\}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \vee A = A$

จะได้ว่า $A \vee A = \left[a_{ij} \vee a_{ij}\right] = \left[\max\left\{a_{ij}, a_{ij}\right\}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$

ดังนั้น $A \wedge A = A; \quad A \vee A = A$

(2) ต้องการพิสูจน์ว่า $A \wedge 0 = 0$

จะได้ว่า $A \wedge 0 = \left[a_{ij} \wedge 0\right] = \left[\min\left\{a_{ij}, 0\right\}\right] = 0$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \vee 1 = 1$

จะได้ว่า $A \vee 1 = \left[a_{ij} \vee 1\right] = \left[\max\left\{a_{ij}, 1\right\}\right] = 1$

ดังนั้น $A \wedge 0 = 0; \quad A \vee 1 = 1$

(3) ต้องการพิสูจน์ว่า $A \vee 0 = A$

จะได้ว่า $A \vee 0 = \left[a_{ij} \vee 0\right] = \left[\max\left\{a_{ij}, 0\right\}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \wedge 1 = A$

จะได้ว่า $A \wedge 1 = \left[a_{ij} \wedge 1\right] = \left[\min\left\{a_{ij}, 1\right\}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$

ดังนั้น $A \vee 0 = A; \quad A \wedge 1 = A$

(4) ต้องการพิสูจน์ว่า $A \wedge B = B \wedge A$

จะได้ว่า $A \wedge B = \left[a_{ij} \wedge b_{ij}\right] = \left[\min\left\{a_{ij}, b_{ij}\right\}\right]$

$$= \left[\min\left\{b_{ij}, a_{ij}\right\}\right]$$

$$= \left[b_{ij} \wedge a_{ij}\right] = B \wedge A$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \vee B = B \vee A$

$$\text{จะได้ว่า} \quad A \vee B = \left[a_{ij} \vee b_{ij}\right] = \left[\max\left\{a_{ij}, b_{ij}\right\}\right]$$

$$= \left[\max\left\{b_{ij}, a_{ij}\right\}\right]$$

$$= \left[b_{ij} \vee a_{ij}\right] = B \vee A$$

ดังนั้น $A \wedge B = B \wedge A; \quad A \vee B = B \vee A$

(5) ต้องการพิสูจน์ว่า $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

$$\text{จะได้ว่า} \quad (A \wedge B) \wedge C = \left[\left(a_{ij} \wedge b_{ij}\right) \wedge c_{ij}\right]$$

$$= \left[\min\left\{\min\left\{a_{ij}, b_{ij}\right\}, c_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (1) ทำให้ได้ว่า

$$= \left[\min\left\{a_{ij}, \min\left\{b_{ij}, c_{ij}\right\}\right\}\right]$$

$$= \left[a_{ij} \wedge \left(b_{ij} \wedge c_{ij}\right)\right]$$

$$= A \wedge (B \wedge C)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

$$\text{จะได้ว่า} \quad (A \vee B) \vee C = \left[\left(a_{ij} \vee b_{ij}\right) \vee c_{ij}\right]$$

$$= \left[\max\left\{\max\left\{a_{ij}, b_{ij}\right\}, c_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (1) ทำให้ได้ว่า

$$= \left[\max\left\{a_{ij}, \max\left\{b_{ij}, c_{ij}\right\}\right\}\right]$$

$$= \left[a_{ij} \vee \left(b_{ij} \vee c_{ij}\right)\right]$$

$$= A \vee (B \vee C)$$

ดังนั้น $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C); \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

(6) ต้องการพิสูจน์ว่า $(A\wedge B)\vee C=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$

จะได้ว่า $(A\wedge B)\vee C=\left[\left(a_{ij}\wedge b_{ij}\right)\vee c_{ij}\right]$

$$=\left[\max\left\{\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\},c_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (2) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[\min\left\{\max\left\{a_{ij},c_{ij}\right\},\max\left\{b_{ij},c_{ij}\right\}\right\}\right]$$

$$=\left[\left(a_{ij}\vee c_{ij}\right)\wedge\left(b_{ij}\vee c_{ij}\right)\right]$$

$$=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $(A\vee B)\wedge C=(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$

จะได้ว่า $(A\vee B)\wedge C=\left[\left(a_{ij}\vee b_{ij}\right)\wedge c_{ij}\right]$

$$=\left[\min\left\{\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\},c_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (2) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[\max\left\{\min\left\{a_{ij},c_{ij}\right\},\min\left\{b_{ij},c_{ij}\right\}\right\}\right]$$

$$=\left[\left(a_{ij}\wedge c_{ij}\right)\vee\left(b_{ij}\wedge c_{ij}\right)\right]$$

$$=(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$$

ดังนั้น $(A\wedge B)\vee C=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$; $(A\vee B)\wedge C=(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$

(7) ต้องการพิสูจน์ว่า $(A\wedge B)\vee A=A$

จะได้ว่า $(A\wedge B)\vee A=\left[\left(a_{ij}\wedge b_{ij}\right)\vee a_{ij}\right]$

$$=\left[\left(\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right)\vee a_{ij}\right]$$

$$=\left[\max\left\{\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\},a_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (3) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[a_{ij}\right]=A$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $(A\vee B)\wedge A$

จะได้ว่า $(A\vee B)\wedge A=\left[\left(a_{ij}\vee b_{ij}\right)\wedge a_{ij}\right]$

$$=\left[\left(\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right)\wedge a_{ij}\right]$$

$$=\left[\min\left\{\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\},a_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (3) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[a_{ij}\right]=A$$

ดังนั้น $(A\wedge B)\vee A=A;\quad (A\vee B)\wedge A=A$

(8) ต้องการพิสูจน์ว่า $\neg(\neg A)=A$

จะได้ว่า $\neg(\neg A)=\neg\left[1-a_{ij}\right]$

$$=\left[1-\left(1-a_{ij}\right)\right]$$

$$=\left[a_{ij}\right]=A$$

ดังนั้น $\neg(\neg A)=A$

(9) ต้องการพิสูจน์ว่า $\neg(A\wedge B)=(\neg A)\vee(\neg B)$

จะได้ว่า $\neg(A\wedge B)=\neg\left[a_{ij}\wedge b_{ij}\right]$

$$=\neg\left[\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[1-\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (4) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[\max\left\{1-a_{ij},1-b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[1-a_{ij}\right]\vee\left[1-b_{ij}\right]$$

$$=(\neg A)\vee(\neg B)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\neg(A\vee B)=(\neg A)\wedge(\neg B)$

จะได้ว่า $\neg(A\vee B)=\neg\left[a_{ij}\vee b_{ij}\right]$

$$=\neg\left[\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[1-\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (4) ทำให้ได้ว่า

$$=\left[\min\left\{1-a_{ij},1-b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[1-a_{ij}\right]\wedge\left[1-b_{ij}\right]$$

$$=(\neg A)\wedge(\neg B)$$

ดังนั้น $\neg(A\wedge B)=(\neg A)\vee(\neg B);\quad \neg(A\vee B)=(\neg A)\wedge(\neg B)$

(10) ต้องการพิสูจน์ว่า สมมติ $A\geq B$ จะได้ว่า $A\wedge B=B;\quad A\vee B=A$

สมมติ ให้ $A\geq B$ นั่นคือ $a_{ij}\geq b_{ij},\ \forall_{i,j}$

จะได้ว่า $A\wedge B=\left[a_{ij}\wedge b_{ij}\right]$

$$=\left[\min\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[b_{ij}\right]=B$$

จะได้ว่า $A\vee B=\left[a_{ij}\vee b_{ij}\right]$

$$=\left[\max\left\{a_{ij},b_{ij}\right\}\right]$$

$$=\left[a_{ij}\right]=A$$

ดังนั้น สมมติ $A\geq B$ จะได้ว่า $A\wedge B=B;\quad A\vee B=A$

(11) ต้องการพิสูจน์ว่า ถ้า $A \leq B$ และ $C \leq D$

จะได้ว่า $A \wedge C \leq B \wedge D$; $A \vee C \leq B \vee D$

สมมติให้ $A \leq B$ และ $C \leq D$ จะได้ว่า $a_{ij} \leq b_{ij}$ และ $c_{ij} \leq d_{ij}$, $\forall_{i,j}$

จาก บทตั้ง 3.1.7 ข้อ (5) ทำให้ได้ว่า

$$\left[\min\left\{a_{ij}, c_{ij}\right\}\right] \leq \left[\min\left\{b_{ij}, d_{ij}\right\}\right]$$

$$\left[a_{ij} \wedge c_{ij}\right] \leq \left[b_{ij} \wedge d_{ij}\right]$$

$$A \wedge C \leq B \wedge D$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left[\max\left\{a_{ij}, c_{ij}\right\}\right] \leq \left[\max\left\{b_{ij}, d_{ij}\right\}\right]$$

$$\left[a_{ij} \vee c_{ij}\right] \leq \left[b_{ij} \vee d_{ij}\right]$$

$$A \vee C \leq B \vee D$$

ดังนั้น สมมติ $A \leq B$ และ $C \leq D$ จะได้ว่า $A \wedge C \leq B \wedge D$; $A \vee C \leq B \vee D$

(12) ต้องการพิสูจน์ว่า สมมติ $A \leq B$ จะได้ว่า $\neg A \geq \neg B$

กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$

ถ้า $x \leq y$ แล้ว $1 - x \geq 1 - y$

สมมติให้ $A \leq B$ นั่นคือ $a_{ij} \leq b_{ij}$, $\forall_{i,j}$

$$\left[a_{ij}\right] \leq \left[b_{ij}\right]$$

$$\left[1 - a_{ij}\right] \leq \left[1 - b_{ij}\right]$$

$$\neg A \geq \neg B$$

ดังนั้น $A \leq B$ แล้ว $\neg A \geq \neg B$

3.2 การดำเนินการวิภัชนัย

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\alpha,\beta\in\mathscr{F}$ เรากำหนดการตัวดำเนินการบน $\mathscr{F}$ ดังนี้

1) การบวก

$$\alpha +_{\mathscr{F}} \beta = \alpha\vee\beta = \max\{\alpha,\beta\}$$

2) การคูณ

$$\alpha \times_{\mathscr{F}} \beta = \alpha\wedge\beta = \min\{\alpha,\beta\}$$

เรากำหนดสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนการบวกหลายค่าและการคูณหลายค่าแบบวิภัชนัย ดังนี้

การบวก

$$\bigvee_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha_1 +_{\mathscr{F}} \alpha_2 +_{\mathscr{F}} \dots +_{\mathscr{F}} \alpha_n$$

การคูณ

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha_1 \times_{\mathscr{F}} \alpha_2 \times_{\mathscr{F}} \dots \times_{\mathscr{F}} \alpha_n$$

บทนิยาม 3.2.2 เรานิยามการบวกและการคูณของเมทริกซ์วิภัชนัย

1) ให้ $\alpha\in\mathscr{F}$ และ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$\alpha \times_{\mathscr{F}} A = \left[\alpha\wedge a_{ij}\right] = \left[\min\{\alpha,a_{ij}\}\right]$$

$$\alpha +_{\mathscr{F}} A = \left[\alpha\vee a_{ij}\right] = \left[\max\{\alpha,a_{ij}\}\right]$$

2) ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{n,p}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$A \times_{\mathscr{F}} B = C = [c_{ij}]\in M_{m,p}(\mathscr{F})$$

เมื่อ $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge b_{kj}\right) \quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,p$

3) ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$$A\vee B = C = [c_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$$

เมื่อ $c_{ij} = a_{ij}\vee b_{ij}$ สำหรับทุก i,j

4) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ เรานิยาม

$A^{1\mathscr{F}} = A$ และ $A^{(k+1)\mathscr{F}} = A^{k\mathscr{F}} \times_{\mathscr{F}} A$ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k

5) ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ นั่นคือ $A^T=[a_{ji}]\in M_{n,m}(\mathscr{F})$

ตัวอย่าง 3.2.3 กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$$

1. $$A\times_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix}\times_{\mathscr{F}}\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.2\wedge 0)\vee(0.4\wedge 0.6) & (0.2\wedge 0.2)\vee(0.4\wedge 0.8) & (0.2\wedge 0.4)\vee(0.4\wedge 1)\\ (0.6\wedge 0)\vee(0.8\wedge 0.6) & (0.6\wedge 0.2)\vee(0.8\wedge 0.8) & (0.6\wedge 0.4)\vee(0.8\wedge 1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\vee 0.4 & 0.2\vee 0.4 & 0.2\vee 0.4\\ 0\vee 0.6 & 0.2\vee 0.8 & 0.4\vee 0.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.6 & 0.8 & 0.8\end{bmatrix}$$

2. $$A^{2_{\mathscr{F}}}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix}\times_{\mathscr{F}}\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.2\wedge 0.2)\vee(0.4\wedge 0.6) & (0.2\wedge 0.4)\vee(0.4\wedge 0.8)\\ (0.6\wedge 0.2)\vee(0.8\wedge 0.6) & (0.6\wedge 0.4)\vee(0.8\wedge 0.8)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2\vee 0.4 & 0.2\vee 0.4\\ 0.2\vee 0.6 & 0.4\vee 0.8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4 & 0.4\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix}$$

การดำเนินการระหว่างสเกลาร์กับเมทริกซ์วิภัชนัย มีสมบัติสำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F}),B=[b_{ij}]\in M_{n,p}(\mathscr{F}),C=[c_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$, $1\in M_m(\mathscr{F})$ และ $\alpha,\beta\in\mathscr{F}$ จะได้ว่า

1) $(\alpha\times_{\mathscr{F}} A)\times_{\mathscr{F}} B=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)=A\times_{\mathscr{F}}(\alpha\times_{\mathscr{F}} B)$
2) $(\alpha\times_{\mathscr{F}}\beta)\times_{\mathscr{F}} A=\alpha\times_{\mathscr{F}}(\beta\times_{\mathscr{F}} A)$
3) $1_m\times_{\mathscr{F}} A=A$
4) $(\alpha\times_{\mathscr{F}} A)^T=\alpha\times_{\mathscr{F}} A^T$
5) $(\alpha+_{\mathscr{F}}\beta)\times_{\mathscr{F}} C=(\alpha\times_{\mathscr{F}} C)+_{\mathscr{F}}(\beta\times_{\mathscr{F}} C)$

บทพิสูจน์

1) $(\alpha\times_{\mathscr{F}} A)\times_{\mathscr{F}} B=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)=A\times_{\mathscr{F}}(\alpha\times_{\mathscr{F}} B)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $(\alpha\times_{\mathscr{F}} A)\times_{\mathscr{F}} B=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(\alpha\times_{\mathscr{F}} A)\times_{\mathscr{F}} B&=\left[\alpha\wedge a_{ij}\right]\times_{\mathscr{F}} B\\&=\bigvee_{k=1}^{n}\left[(\alpha\wedge a_{ik})\wedge b_{kj}\right]\\&=\bigvee_{k=1}^{n}\left[\alpha\wedge\left(a_{ik}\wedge b_{kj}\right)\right]\\&=\alpha\wedge\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})\right]\\&=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)\end{aligned}$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\times_{\mathscr{F}}(\alpha\times_{\mathscr{F}} B)=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}A\times_{\mathscr{F}}(\alpha\times_{\mathscr{F}} B)&=A\times_{\mathscr{F}}\left[\alpha\times_{\mathscr{F}} b_{ij}\right]\\&=\bigvee_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\wedge(\alpha\wedge b_{ij})\right]\\&=\bigvee_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\wedge(b_{kj}\wedge\alpha)\right]\\&=\alpha\wedge\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})\right]\\&=\alpha\times_{\mathscr{F}}(A\times_{\mathscr{F}} B)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\alpha \times_{\mathcal{F}} A) \times_{\mathcal{F}} B = \alpha \times_{\mathcal{F}} (A \times_{\mathcal{F}} B) = A \times_{\mathcal{F}} (\alpha \times_{\mathcal{F}} B)$

2) $(\alpha \times_{\mathcal{F}} \beta) \times_{\mathcal{F}} A = \alpha \times_{\mathcal{F}} (\beta \times_{\mathcal{F}} A)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(\alpha \times_{\mathcal{F}} \beta) \times_{\mathcal{F}} A &= (\alpha \wedge \beta) \times_{\mathcal{F}} A \\ &= \left[(\alpha \wedge \beta) \wedge a_{ij}\right] \\ &= \left[\alpha \wedge \left(\beta \wedge a_{ij}\right)\right] \\ &= \alpha \times_{\mathcal{F}} \left[\beta \times_{\mathcal{F}} a_{ij}\right] \\ &= \alpha \times_{\mathcal{F}} (\beta \times_{\mathcal{F}} A)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\alpha \times_{\mathcal{F}} \beta) \times_{\mathcal{F}} A = \alpha \times_{\mathcal{F}} (\beta \times_{\mathcal{F}} A)$

3) จะพิสูจน์ว่า $1 \times_{\mathcal{F}} A = A$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}1 \times_{\mathcal{F}} A &= \left[1 \wedge a_{ij}\right] \\ &= \left[\min\{1, a_{ij}\}\right] \\ &= \left[a_{ij}\right] \\ &= A\end{aligned}$$

ดังนั้น $1 \times_{\mathcal{F}} A = A$

4) จะพิสูจน์ว่า $(\alpha \times_{\mathcal{F}} A)^T = \alpha \times_{\mathcal{F}} A^T$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(\alpha \times_{\mathcal{F}} A)^T &= \left[\alpha \wedge a_{ij}\right]^T \\ &= \left[\alpha \wedge a_{ji}\right] \\ &= \alpha \times_{\mathcal{F}} A^T\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\alpha \times_{\mathcal{F}} A)^T = \alpha \times_{\mathcal{F}} A^T$

5) จะพิสูจน์ว่า $(\alpha +_{\mathscr{F}} \beta)\times_{\mathscr{F}} C=(\alpha \times_{\mathscr{F}} C)+_{\mathscr{F}}(\beta \times_{\mathscr{F}} C)$

จะได้ว่า $(\alpha +_{\mathscr{F}} \beta)\times_{\mathscr{F}} C=\left[(\alpha \vee \beta)\wedge c_{ij}\right]$

$$=\left[\min\left\{\max\{\alpha,\beta\},c_{ij}\right\}\right]$$

จากบทตั้ง 3.1.7 ข้อ (2) จะได้ว่า

$$=\left[\max\left\{\min\{\alpha,c_{ij}\},\min\{\beta,c_{ij}\}\right\}\right]$$

$$=(\alpha \wedge C)\vee(\beta \wedge C)$$

$$=(\alpha \times_{\mathscr{F}} C)+_{\mathscr{F}}(\beta \times_{\mathscr{F}} C)$$

ดังนั้น $(\alpha +_{\mathscr{F}} \beta)\times_{\mathscr{F}} C=(\alpha \times_{\mathscr{F}} C)+_{\mathscr{F}}(\beta \times_{\mathscr{F}} C)$

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ $A,B,C,0\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ โดยที่ $A=[a_{ij}],B=[b_{ij}],C=[c_{ij}]$ และ $\alpha,\beta\in\mathscr{F}$ จะได้ว่า

1) $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)\vee B=\alpha +_{\mathscr{F}}(A\vee B)=A\vee(\alpha +_{\mathscr{F}} B)$
2) $(\alpha +_{\mathscr{F}} \beta)+_{\mathscr{F}} A=\alpha +_{\mathscr{F}}(\beta +_{\mathscr{F}} A)$
3) $0_{m,n}\vee A=A$
4) $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)^T=\alpha +_{\mathscr{F}} A^T$
5) $(\alpha \times_{\mathscr{F}} \beta)+_{\mathscr{F}} C=(\alpha +_{\mathscr{F}} C)\times_{\mathscr{F}}(\beta +_{\mathscr{F}} C)$

บทพิสูจน์

1) $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)\vee B=\alpha +_{\mathscr{F}}(A\vee B)=A\vee(\alpha +_{\mathscr{F}} B)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)\vee B=\alpha +_{\mathscr{F}}(A\vee B)$

จะได้ว่า $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)\vee B=\left[\alpha \vee a_{ij}\right]\vee B$

$$=\left[(\alpha \vee a_{ij})\vee b_{ij}\right]$$

$$=\left[\alpha \vee(a_{ij}\vee b_{ij})\right]$$

$$=\alpha \vee\left[(a_{ij}\vee b_{ij})\right]$$

$$=\alpha \vee(A\vee B)$$

$$=\alpha +_{\mathscr{F}}(A\vee B)$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A \vee (\alpha +_{\mathcal{F}} B) = \alpha +_{\mathcal{F}} (A \vee B)$

จะได้ว่า $A \vee (\alpha +_{\mathcal{F}} B) = A \vee \left[\alpha \vee b_{ij}\right]$

$= \left[a_{ij} \vee (\alpha \vee b_{ij})\right]$

$= \left[a_{ij} \vee (b_{ij} \vee \alpha)\right]$

$= \alpha \vee \left[(a_{ij} \vee b_{ij})\right]$

$= \alpha \vee (A \vee B)$

$= \alpha +_{\mathcal{F}} (A \vee B)$

ดังนั้น $(\alpha \times_{\mathcal{F}} A) \times_{\mathcal{F}} B = \alpha \times_{\mathcal{F}} (A \times_{\mathcal{F}} B) = A \times_{\mathcal{F}} (\alpha \times_{\mathcal{F}} B)$

2) $(\alpha +_{\mathcal{F}} \beta) +_{\mathcal{F}} A = \alpha +_{\mathcal{F}} (\beta +_{\mathcal{F}} A)$

จะได้ว่า $(\alpha +_{\mathcal{F}} \beta) +_{\mathcal{F}} A = (\alpha \vee \beta) +_{\mathcal{F}} A$

$= \left[(\alpha \vee \beta) \vee a_{ij}\right]$

$= \left[\alpha \vee (\beta \vee a_{ij})\right]$

$= \alpha \vee \left[\beta \vee a_{ij}\right]$

$= \alpha +_{\mathcal{F}} (\beta +_{\mathcal{F}} A)$

ดังนั้น $(\alpha +_{\mathcal{F}} \beta) +_{\mathcal{F}} A = \alpha +_{\mathcal{F}} (\beta +_{\mathcal{F}} A)$

3) จะพิสูจน์ว่า $0_{m,n} \vee A = A$

จะได้ว่า $0_{m,n} \vee A = \left[0 \vee a_{ij}\right]$

$= \left[\max\{0, a_{ij}\}\right]$

$= \left[a_{ij}\right]$

$= A$

ดังนั้น $0_{m,n} \vee A = A$

4) จะพิสูจน์ว่า $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)^T = \alpha +_{\mathscr{F}} A^T$

$$\text{จะได้ว่า} \quad (\alpha +_{\mathscr{F}} A)^T = \left[\alpha \vee a_{ij}\right]^T$$
$$= \left[\alpha \vee a_{ji}\right]$$
$$= \alpha +_{\mathscr{F}} A^T$$

ดังนั้น $(\alpha +_{\mathscr{F}} A)^T = \alpha +_{\mathscr{F}} A^T$

5) จะพิสูจน์ว่า $(\alpha \times_{\mathscr{F}} \beta) +_{\mathscr{F}} C = (\alpha +_{\mathscr{F}} C) \times_{\mathscr{F}} (\beta +_{\mathscr{F}} C)$

จะได้ว่า $(\alpha \times_{\mathscr{F}} \beta) +_{\mathscr{F}} C = \left[(\alpha \wedge \beta) \vee c_{ij}\right]$

$$= \left[\max\{\min\{\alpha, \beta\}, c_{ij}\}\right]$$

จากบทตั้ง 3.1.7 ข้อ (2) จะได้ว่า

$$= \left[\min\{\max\{\alpha, c_{ij}\}, \max\{\beta, c_{ij}\}\}\right]$$
$$= (\alpha \vee C) \wedge (\beta \vee C)$$
$$= (\alpha +_{\mathscr{F}} C) \times_{\mathscr{F}} (\beta +_{\mathscr{F}} C)$$

ดังนั้น $(\alpha \times_{\mathscr{F}} \beta) +_{\mathscr{F}} C = (\alpha +_{\mathscr{F}} C) \times_{\mathscr{F}} (\beta +_{\mathscr{F}} C)$

บทตั้ง 3.2.6 สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, k$ ให้ $A_i, B_i \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $a_i, b_i \in \mathscr{F}$

1) $\bigvee_{i=1}^{k} (A_i \wedge B_i) = \left(\bigvee_{i=1}^{k} A_i\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{k} B_i\right)$

2) $\bigvee_{i=1}^{k} (A_i \vee B_i) = \left(\bigvee_{i=1}^{k} A_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{k} B_i\right)$

3) $\left(\bigvee_{j=1}^{l} a_j\right) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{k} b_i\right) = \bigvee_{j=1}^{l} \bigvee_{i=1}^{k} \left(a_j \wedge b_i\right)$

4) $\left(\bigvee_{j=1}^{l} a_j\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{k} b_i\right) = \bigvee_{j=1}^{l} \bigvee_{i=1}^{k} \left(a_j \vee b_i\right)$

5) $\max\{\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, \ldots, \min\{x_k, y_k\}\} \le \max\{\min\{x_1, y_1'\}, \min\{x_2, y_2'\}, \ldots \min\{x_k, y_k'\}\}$
โดยที่ $y_i \le y_i'$ นั่นคือ $\min\{x_i, y_i\} \le \min\{x_i, y_i'\}$

เห็นได้ชัดโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท 3.2.7 ให้ $R,S,T,0$ เป็นเมทริกซ์วิภัชนัยที่มีมิติที่เหมาะสมกัน โดยที่หลักของของตัวตั้งเท่ากับแถวของตัวคูณตามนิยามการคูณในเมทริกซ์จริง นั่นคือ

1) $R\times_{\mathcal{F}} I = I\times_{\mathcal{F}} R = R$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

2) $R\times_{\mathcal{F}} 0 = 0\times_{\mathcal{F}} R = 0$

3) $R^{(m+n)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}}\times_{\mathcal{F}} R^{n_{\mathcal{F}}}$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนนับ

4) ให้ $S\le T$ นั่นคือ $R\times_{\mathcal{F}} S\le R\times_{\mathcal{F}} T$

5) $(R\times_{\mathcal{F}} S)\times_{\mathcal{F}} T = R\times_{\mathcal{F}} (S\times_{\mathcal{F}} T)$

6) การแจกแจง

6.1 $R\times_{\mathcal{F}} (S\vee T) = (R\times_{\mathcal{F}} S)\vee (R\times_{\mathcal{F}} T)$

6.2 $(S\vee T)\times_{\mathcal{F}} R = (S\times_{\mathcal{F}} R)\vee (T\times_{\mathcal{F}} R)$

6.3 $R\times_{\mathcal{F}} (S\wedge T) = (R\times_{\mathcal{F}} S)\wedge (R\times_{\mathcal{F}} T)$

6.4 $(S\wedge T)\times_{\mathcal{F}} R = (S\times_{\mathcal{F}} R)\wedge (T\times_{\mathcal{F}} R)$

บทพิสูจน์

1) ต้องการพิสูจน์ว่า $R\times_{\mathcal{F}} I = I\times_{\mathcal{F}} R = R$

ให้ $R=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ และ $I=\left[\delta_{ij}\right]_{n,n}$ เมื่อ $\delta_{ij}=\begin{cases}1; & i=j\\ 0; & i\ne j\end{cases}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $R\times_{\mathcal{F}} I = R$ จะได้ว่า

$$R\times_{\mathcal{F}} I=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge\delta_{kj}\right)\right]_{n,n}$$

กรณีที่ $k=j$ จะได้ว่า $a_{ij}\wedge\delta_{jj}=a_{ij}\wedge 1=a_{ij}$

กรณีที่ $k\ne j$ จะได้ว่า $a_{ik}\wedge 0=0$

$$=\left[(a_{i1}\wedge\delta_{1j})\vee\ldots\vee(a_{ij}\wedge\delta_{jj})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge\delta_{nj})\right]$$

$$=\left[0+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} a_{ij}+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} 0\right]$$

$$=\left[a_{ij}\right]_{m,n}=R$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $I\times_{\mathcal{F}} R=R$ จะได้ว่า

$$I\times_{\mathcal{F}} R=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(\delta_{kj}\wedge a_{ik}\right)\right]_{n,n}$$

$$=\left[(\delta_{1j}\wedge a_{i1})\vee\ldots\vee(\delta_{jj}\wedge a_{ij})\vee\ldots\vee(\delta_{nj}\wedge a_{in})\right]$$

$$=\left[0+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} a_{ij}+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} 0\right]$$

$$=\left[a_{ij}\right]_{m,n}=R$$

ดังนั้น $R\times_{\mathcal{F}} I=I\times_{\mathcal{F}} R=R$

2) ต้องการพิสูจน์ว่า $R\times_{\mathcal{F}} 0=0\times_{\mathcal{F}} R=0$

ให้ $R=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ และ $0=\left[0_{ij}\right]_{n,n}$

จะพิสูจน์ว่า $R\times_{\mathcal{F}} 0=0$ จะได้ว่า

$$R\times_{\mathcal{F}} 0=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge 0_{kj})\right]_{m,n}$$

$$=\left[(a_{i1}\wedge 0_{1j})\vee(a_{i2}\wedge 0_{2j})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge a_{nj})\right]$$

$$=\left[0+_{\mathcal{F}} 0+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} 0\right]$$

$$=\left[0\right]_{m,n}=0$$

จะพิสูจน์ว่า $0\times_{\mathcal{F}} R=0$ จะได้ว่า

$$0\times_{\mathcal{F}} R=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(0_{kj}\wedge a_{ik})\right]_{m,n}$$

$$=\left[(0_{1j}\wedge a_{i1})\vee(0_{2j}\wedge a_{i2})\vee\ldots\vee(0_{nj}\wedge a_{in})\right]$$

$$=[0+_{\mathcal{F}} 0+_{\mathcal{F}}\ldots+_{\mathcal{F}} 0]$$

$$=\left[0\right]_{m,n}=0$$

ดังนั้น $R\times_{\mathcal{F}} 0=0\times_{\mathcal{F}} R=0$

3) ต้องการพิสูจน์ $R^{(m+n)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{n_{\mathcal{F}}}$

ให้ $m \in \mathbb{N}$ เขียน $P(n)$ แทนประพจน์ $R^{(m+n)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{n_{\mathcal{F}}}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$

ขั้นฐาน ต้องแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

โดยบทนิยาม จะได้ว่า $R^{(m+1)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย เราจะแสดงว่าถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $R^{(m+n)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{k_{\mathcal{F}}}$

จะได้ว่า $R^{(m+k)_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R = (R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{k_{\mathcal{F}}}) \times_{\mathcal{F}} R$

$$= R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} (R^{k_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R)$$

$$= R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{(k+1)_{\mathcal{F}}}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $R^{(m+n)_{\mathcal{F}}} = R^{m_{\mathcal{F}}} \times_{\mathcal{F}} R^{n_{\mathcal{F}}}$ เป็นจริงสำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$

4) สมมติ $S \le T$ นั่นคือ $R \times_{\mathcal{F}} S \le R \times_{\mathcal{F}} T$

พิสูจน์ สมมติ $S \le T$ นั่นคือ $S_{jk} \le T_{jk}\,; \forall_{jk}$

ให้ $R = \left[r_{ij}\right]_{m,n}, S = \left[s_{jk}\right]_{n,p}$ และ $T = \left[t_{jk}\right]_{n,p}$

จะได้ว่า $$R \times_{\mathcal{F}} S = \left[\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge s_{jk})\right]_{m,p}$$

$$R \times_{\mathcal{F}} T = \left[\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge t_{jk})\right]_{m,p}$$

$\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge s_{jk}) \le \bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge t_{jk})$ จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 5)

$$R \times_{\mathcal{F}} S \le R \times_{\mathcal{F}} T$$

ดังนั้น สมมติ $S \le T$ นั่นคือ $R \times_{\mathcal{F}} S \le R \times_{\mathcal{F}} T$

5) จะพิสูจน์ว่า $(R\times_{\mathcal{F}} S)\times_{\mathcal{F}} T = R\times_{\mathcal{F}} (S\times_{\mathcal{F}} T)$

ให้ $R=\left[r_{ij}\right]_{m,n}$, $S=\left[s_{jk}\right]_{n,p}$ และ $T=\left[t_{kl}\right]_{p,q}$

จะได้ว่า $$R\times_{\mathcal{F}} S=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk})\right]_{m,p}$$

$$(R\times_{\mathcal{F}} S)\times_{\mathcal{F}} T=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk})\wedge\bigvee_{j=1}^{n}t_{kl}\right]_{m,q}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 3) จะได้ว่า

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk}\wedge t_{kl})\right]_{m,q} \quad ....(1)$$

จะได้ว่า $$S\times_{\mathcal{F}} T=\left[\bigvee_{j=1}^{n}(s_{jk}\wedge t_{kl})\right]_{n,q}$$

$$R\times_{\mathcal{F}} (S\times_{\mathcal{F}} T)=\left[\bigvee_{j=1}^{n}r_{ij}\wedge\bigvee_{k=1}^{n}(s_{jk}\wedge t_{kl})\right]_{m,q}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 3) จะได้ว่า

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk}\wedge t_{kl})\right]_{m,q}$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk}\wedge t_{kl})\right]_{m,q} \quad ....(2)$$

จะเห็นว่า (1) = (2)

ดังนั้น $(R\times_{\mathcal{F}} S)\times_{\mathcal{F}} T = R\times_{\mathcal{F}} (S\times_{\mathcal{F}} T)$

6) การแจกแจง

6.1 จะพิสูจน์ว่า $R\times_{\mathcal{F}}(S\vee T)=(R\times_{\mathcal{F}} S)\vee(R\times_{\mathcal{F}} T)$

ให้ $R=\left[r_{ij}\right]_{m,n}$, $S=\left[s_{jk}\right]_{n,p}$ และ $T=\left[t_{jk}\right]_{n,p}$

จะได้ว่า $R\times_{\mathcal{F}}(S\vee T)=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\left(r_{ij}\wedge(s_{jk}\vee t_{jk})\right)\right]_{m,p}$

จากทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (6) จะได้ว่า

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\left((r_{ij}\wedge s_{jk})\vee(r_{ij}\wedge t_{jk})\right)\right]_{m,p}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 2)

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk})\vee\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge t_{jk})\right]_{m,p}$$

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk})\right]_{m,p}\vee\left[\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge t_{jk})\right]_{m,p}$$

$$=(R\times_{\mathcal{F}} S)\vee(R\times_{\mathcal{F}} T)$$

ดังนั้น $R\times_{\mathcal{F}}(S\vee T)=(R\times_{\mathcal{F}} S)\vee(R\times_{\mathcal{F}} T)$

6.2 จะพิสูจน์ว่า $(S\vee T)\times_{\mathcal{F}} R=(S\times_{\mathcal{F}} R)\vee(T\times_{\mathcal{F}} R)$

ให้ $R=[r_{jk}]_{n,p}$, $S=[s_{ij}]_{m,n}$ และ $T=[t_{ij}]_{m,n}$

จะได้ว่า $(S\vee T)\times_{\mathcal{F}} R=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\left((s_{ij}\vee t_{ij})\wedge r_{jk}\right)\right]_{m,p}$

จากทฤษฎีบท3.1.8 ข้อ (6) จะได้ว่า

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\left((s_{ij}\wedge r_{jk})\vee(t_{ij}\wedge r_{jk})\right)\right]_{m,p}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 2)

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge s_{jk})\vee\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge t_{jk})\right]_{m,p}$$

$$=\left[\bigvee_{j=1}^{n}(s_{ij}\wedge r_{jk})\right]_{m,p}\vee\left[\bigvee_{j=1}^{n}(t_{ij}\wedge r_{jk})\right]_{m,p}$$

$$=(S\times_{\mathcal{F}} R)\vee(T\times_{\mathcal{F}} R)$$

ดังนั้น $(S\vee T)\times_{\mathcal{F}} R=(S\times_{\mathcal{F}} R)\vee(T\times_{\mathcal{F}} R)$

6.3 จะพิสูจน์ว่า $R \times_{\mathcal{F}} (S \wedge T) = (R \times_{\mathcal{F}} S) \wedge (R \times_{\mathcal{F}} T)$

ให้ $R = [r_{jk}]_{m,n}$, $S = [s_{ij}]_{n,p}$ และ $T = [t_{ij}]_{n,p}$

จะได้ว่า $R \times_{\mathcal{F}} (S \wedge T) = \left[\bigvee_{j=1}^{n} \left(r_{ij} \wedge (s_{jk} \wedge t_{jk}) \right) \right]_{m,p}$

จากทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (1) และ ข้อ (5) จะได้ว่า

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} \left((r_{ij} \wedge s_{jk}) \wedge (r_{ij} \wedge t_{jk}) \right) \right]_{m,p}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 1) จะได้ว่า

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge s_{jk}) \wedge \bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge t_{jk}) \right]_{m,p}$$

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge s_{jk}) \right]_{m,p} \wedge \left[\bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge t_{jk}) \right]_{m,p}$$

$$= (R \times_{\mathcal{F}} S) \wedge (R \times_{\mathcal{F}} T)$$

ดังนั้น $R \times_{\mathcal{F}} (S \wedge T) = (R \times_{\mathcal{F}} S) \wedge (R \times_{\mathcal{F}} T)$

6.4 จะพิสูจน์ว่า $(S \wedge T) \times_{\mathcal{F}} R = (S \times_{\mathcal{F}} R) \wedge (T \times_{\mathcal{F}} R)$

ให้ $R = [r_{jk}]_{n,p}$, $S = [s_{ij}]_{m,n}$ และ $T = [t_{ij}]_{m,n}$

จะได้ว่า $(S \wedge T) \times_{\mathcal{F}} R = \left[\bigvee_{j=1}^{n} \left((s_{ij} \wedge t_{ij}) \wedge r_{jk} \right) \right]_{m,p}$

จากทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (1) และ ข้อ (5) จะได้ว่า

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} \left((s_{ij} \wedge r_{jk}) \wedge (t_{ij} \wedge r_{jk}) \right) \right]_{m,p}$$

จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 1) จะได้ว่า

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} (s_{ij} \wedge r_{jk}) \wedge \bigvee_{j=1}^{n} (\mathrm{t}_{ij} \wedge r_{jk}) \right]_{m,p}$$

$$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} (s_{ij} \wedge r_{jk}) \right]_{m,p} \wedge \left[\bigvee_{j=1}^{n} (\mathrm{t}_{ij} \wedge r_{jk}) \right]_{m,p}$$

$$= (S \times_{\mathscr{F}} R) \wedge (T \times_{\mathscr{F}} R)$$

ดังนั้น $(S \wedge T) \times_{\mathscr{F}} R = (S \times_{\mathscr{F}} R) \wedge (T \times_{\mathscr{F}} R)$

3.3 รอยของเมทริกซ์วิภัชนัย

เราจะนิยามผลบวกแนวทแยงมุมหรือรอยของเมทริกซ์วิภัชนัย ดังนี้

บทนิยาม 3.3.1 รอยของเมทริกซ์วิภัชนัยของ $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathscr{F})$ คือผลบวกแบบวิภัชนัยในแนวทแยงมุมหลักของ A

นั่นคือ $$\mathrm{tr}(A) = \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

สมบัติของรอยเมทริกซ์วิภัชนัยที่สำคัญ มีดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.2 สำหรับแต่ละ $A, B \in M_n(\mathscr{F})$ และ $k \in \mathscr{F}$ จะได้

(1) $\mathrm{tr}(A \vee B) = \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B)$

(2) $\mathrm{tr}(A \wedge B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$

(3) $\mathrm{tr}(k \wedge A) = k \wedge \mathrm{tr}(A)$

(4) $\mathrm{tr}(A \times_{\mathscr{F}} B) = \mathrm{tr}(B \times_{\mathscr{F}} A)$

(5) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

บทพิสูจน์

(1) $\mathrm{tr}(A \vee B) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \vee b_{ii})$

$= \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \vee \bigvee_{i=1}^{n} b_{ii}$ จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 2)

$= \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B)$

ดังนั้น $\mathrm{tr}(A \vee B) = \mathrm{tr}(A) \vee \mathrm{tr}(B)$

(2) $\mathrm{tr}(A \wedge B) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \wedge b_{ii})$

$= \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \wedge \bigvee_{i=1}^{n} b_{ii}$ จากบทตั้ง 3.2.6 ข้อ 1)

$= \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(A \wedge B) = \operatorname{tr}(A) \wedge \operatorname{tr}(B)$

(3) $\operatorname{tr}(k \wedge A) = \bigvee_{i=1}^{n} (k \wedge a_{ii})$

$$= k \wedge \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= k \wedge \operatorname{tr}(A)$$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(k \wedge A) = k \wedge \operatorname{tr}(A)$

(4) $\operatorname{tr}(A \times_{\mathcal{F}} B) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii} \wedge b_{ii})$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} (b_{ii} \wedge a_{ii})$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} b_{ii} \wedge \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$= \operatorname{tr}(B) \times_{\mathcal{F}} \operatorname{tr}(A)$$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(A \times_{\mathcal{F}} B) = \operatorname{tr}(B \times_{\mathcal{F}} A)$

(5) เขียน

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า $\operatorname{tr}(A^T) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_{ii})^T$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(A)$$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$

บทตั้ง 3.3.3

1) $\bigvee_{i=1}^{n}(a_i \vee b_i) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \vee \bigvee_{i=1}^{n} b_i$

2) $\bigvee_{i=1}^{n}(a_i \wedge b_i) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \wedge \bigvee_{i=1}^{n} b_i$

3) $\bigvee_{i=1}^{n} ka_i = k\bigvee_{i=1}^{n} a_i$

เห็นได้ชัดโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3.4 ผลบวกตรง

บทนิยาม 3.4.1 ให้ $A \in M_m(\mathscr{F})$ และ $B \in M_n(\mathscr{F})$ เรานิยามผลบวกตรง 2 รูปแบบดังนี้

1) $A \oplus_0 B = \begin{bmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & B \end{bmatrix} \in M_{m+n}(\mathscr{F})$

2) $A \oplus_1 B = \begin{bmatrix} A & 1_{m,n} \\ 1_{n,m} & B \end{bmatrix} \in M_{m+n}(\mathscr{F})$

บทที่ 4

ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

4.1 ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ เรานิยามผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยของ A และ B โดย $A\otimes_{\mathscr{F}} B=[a_{ij}\wedge B]\in M_{mp,nq}(\mathscr{F})$

$$A\otimes_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix} a_{11}\wedge B & a_{12}\wedge B & \dots & a_{1n}\wedge B \\ a_{21}\wedge B & a_{22}\wedge B & \dots & a_{2n}\wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\wedge B & a_{m2}\wedge B & \dots & a_{mn}\wedge B \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathscr{F})$$

นั่นคือ นำ a_{ij} แต่ละตำแหน่งในเมทริกซ์ A มาคูณเมทริกซ์ B แบบบล็อก จากนั้นกระจาย a_{ij} ไปใน b_{ij} แต่ละตำแหน่ง และจากนิยาม 3.1.2 จะนำมาหาค่าต่ำสุดระหว่างกันโดยมีมิติเป็น $mp\times nq$ สำหรับแต่ละ m,n,p,q ที่เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง 4.1.2

ให้ $A=\begin{bmatrix}0.26 & 0.48\\ 0.64 & 0.89\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.88 & 1\end{bmatrix}$ นั่นคือ

$$A\otimes_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix}0.26 & 0.48\\ 0.64 & 0.89\end{bmatrix}\otimes_{\mathscr{F}}\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.84 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.26\wedge\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.84 & 1\end{bmatrix} & 0.48\wedge\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.84 & 1\end{bmatrix} \\ 0.64\wedge\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.84 & 1\end{bmatrix} & 0.89\wedge\begin{bmatrix}0 & 0.27 & 0.4\\ 0.65 & 0.84 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.26\wedge 0 & 0.26\wedge 0.27 & 0.26\wedge 0.4 & 0.48\wedge 0 & 0.48\wedge 0.27 & 0.48\wedge 0.4 \\ 0.26\wedge 0.65 & 0.26\wedge 0.89 & 0.26\wedge 1 & 0.48\wedge 0.65 & 0.48\wedge 0.84 & 0.48\wedge 1 \\ 0.64\wedge 0 & 0.64\wedge 0.29 & 0.64\wedge 0.4 & 0.89\wedge 0 & 0.89\wedge 0.27 & 0.89\wedge 0.4 \\ 0.64\wedge 0.65 & 0.64\wedge 0.84 & 0.64\wedge 1 & 0.89\wedge 0.65 & 0.89\wedge 0.84 & 0.89\wedge 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0.26 & 0.26 & 0 & 0.27 & 0.4 \\ 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \\ 0 & 0.27 & 0.4 & 0 & 0.27 & 0.4 \\ 0.64 & 0.64 & 0.64 & 0.65 & 0.84 & 0.89 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes_{\mathscr{F}} I_2 = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.48 \\ 0.64 & 0.89 \end{bmatrix} \otimes_{\mathscr{F}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.26 \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0.48 \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0.64 \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0.89 \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.26 \wedge 1 & 0.26 \wedge 0 & 0.48 \wedge 1 & 0.48 \wedge 0 \\ 0.26 \wedge 0 & 0.26 \wedge 1 & 0.48 \wedge 0 & 0.48 \wedge 1 \\ 0.64 \wedge 1 & 0.64 \wedge 0 & 0.84 \wedge 1 & 0.89 \wedge 0 \\ 0.64 \wedge 0 & 0.64 \wedge 1 & 0.84 \wedge 0 & 0.89 \wedge 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.26 & 0 & 0.48 & 0 \\ 0 & 0.26 & 0 & 0.48 \\ 0.64 & 0 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.64 & 0 & 0.89 \end{bmatrix}$$

4.2 สมบัติของผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

บทตั้ง 4.2.1

(1) ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $k \in \mathscr{F}$ จะได้ว่า ถ้า $k \wedge A = 0_{m,n}$ แล้ว $k=0$ หรือ $A=0_{m,n}$

(2) ถ้า $A=[A_{ij}]$ นั้นคือ A เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกซึ่งมีบล็อกที่ i, j เป็น A_{ij} นั่นคือ $A \otimes_{\mathscr{F}} B$ มีบล็อกที่ i, j เป็น $A_{ij} \otimes_{\mathscr{F}} B$

บทพิสูจน์

(1) สมมติให้ $k \wedge A = 0_{m,n}$ และ $k \neq 0$

จะได้ว่า $\left[k \wedge a_{ij}\right] = \left[\min\{k, a_{ij}\}\right] = 0_{m,n}$ สำหรับทุก i, j และ $k \neq 0$

ทำให้ได้ว่า $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก i, j นั่นคือ $A = 0_{m,n}$

ดังนั้น ถ้า $k \wedge A = 0_{m,n}$ แล้ว $k = 0$ หรือ $A = 0_{m,n}$

(2) ให้ $A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r,1} & \cdots & A_{r,s} \end{bmatrix}$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราแบ่งบล็อกของ A ดังนี้

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,s} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,s} & a_{r,s+1} & \cdots & a_{r,n} \\ \hline a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,s} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,s} & a_{m,s+1} & \cdots & a_{m,n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า
$$A \otimes_{\mathscr{F}} B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} \wedge B & \cdots & a_{1,s} \wedge B & a_{1,s+1} \wedge B & \cdots & a_{1,n} \wedge B \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} \wedge B & \cdots & a_{r,s} \wedge B & a_{r,s+1} \wedge B & \cdots & a_{r,n} \wedge B \\ \hline a_{r+1,1} \wedge B & \cdots & a_{r+1,s} \wedge B & a_{r+1,s+1} \wedge B & \cdots & a_{r+1,n} \wedge B \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} \wedge B & \cdots & a_{m,s} \wedge B & a_{m,s+1} \wedge B & \cdots & a_{m,n} \wedge B \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,s} \end{bmatrix} \wedge B & \begin{bmatrix} a_{1,s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,s+1} & \cdots & a_{r,n} \end{bmatrix} \wedge B \\ \hline \begin{bmatrix} a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,s} \end{bmatrix} \wedge B & \begin{bmatrix} a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,s+1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \wedge B \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \wedge B & A_{12} \wedge B \\ A_{21} \wedge B & A_{22} \wedge B \end{bmatrix}$$

$$= \left[A_{ij} \wedge B\right]$$

ดังนั้น ถ้า $A=\left[A_{ij}\right]$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์แบบบล็อกซึ่งมีบล็อกที่ i,j แล้ว $A\otimes_{\mathscr{F}} B=A_{ij}\otimes_{\mathscr{F}} B$

สมบัติของผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์วิภัชนัยที่สำคัญ มีดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ $A,B,C,0$ เป็นเมทริกซ์วิภัชนัยที่มีมิติที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย และ $\alpha\in\mathscr{F}$ สำหรับแต่ละ $m,n,p,q\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า

(1) $(\alpha\wedge A)\otimes_{\mathscr{F}} B=\alpha\wedge(A\otimes_{\mathscr{F}} B)=A\otimes_{\mathscr{F}}(\alpha\wedge B)$ (การเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์)

(2) $(A\otimes_{\mathscr{F}} B)^T=A^T\otimes_{\mathscr{F}} B^T$ (การเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน)

(3) $(A\otimes_{\mathscr{F}} B)\otimes_{\mathscr{F}} C=A\otimes_{\mathscr{F}}(B\otimes_{\mathscr{F}} C)$ (การเปลี่ยนกลุ่ม)

(4) $(A\vee B)\otimes_{\mathscr{F}} C=(A\otimes_{\mathscr{F}} C)\vee(B\otimes_{\mathscr{F}} C)$ (การแจกแจงทางขวาเหนือการดำเนินการหรือ)

(5) $A\otimes_{\mathscr{F}}(B\vee C)=(A\otimes_{\mathscr{F}} B)\vee(A\otimes_{\mathscr{F}} C)$ (การแจกแจงทางซ้ายเหนือการดำเนินการหรือ)

(6) $A\otimes_{\mathscr{F}} 0_{p,q}=0_{mp,nq}$ และ $0_{p,q}\otimes_{\mathscr{F}} A=0_{mp,nq}$

(7) $I_m\otimes_{\mathscr{F}} I_n=I_{mn}$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

บทพิสูจน์

(1) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge A)\otimes_{\mathscr{F}} B&=\left[(\alpha\wedge a_{ij})\wedge B\right]\\&=\left[\alpha\wedge(a_{ij}\wedge B)\right]\\&=\alpha\wedge(A\otimes_{\mathscr{F}} B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\otimes_{\mathscr{F}}(\alpha\wedge B)&=\left[a_{ij}\wedge(\alpha\wedge B)\right]\\&=\left[\alpha\wedge(a_{ij}\wedge B)\right]\\&=\alpha\wedge(A\otimes_{\mathscr{F}} B)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\alpha\wedge A)\otimes_{\mathscr{F}} B=\alpha\wedge(A\otimes_{\mathscr{F}} B)=A\otimes_{\mathscr{F}}(\alpha\wedge B)$

(2) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\otimes_{\mathscr{F}} B)^T&=\left[a_{ij}\wedge B\right]^T\\&=\left[(a_{ij}\wedge B)^T\right]\end{aligned}$$

$$= \left[a_{ji} \wedge B^{T} \right]$$

$$= A^{T} \otimes_{\mathscr{F}} B^{T}$$

ดังนั้น $\left(A \otimes_{\mathscr{F}} B\right)^{T} = A^{T} \otimes_{\mathscr{F}} B^{T}$

(3) ให้ $A \in M_{m,n}\left(\mathscr{F}\right)$, $B \in M_{p,q}\left(\mathscr{F}\right)$ และ $C \in M_{r,s}\left(\mathscr{F}\right)$ จะได้ว่า

$$\left(A \otimes_{\mathscr{F}} B\right) \otimes_{\mathscr{F}} C = \left[a_{ij} \wedge B \right] \otimes_{\mathscr{F}} C$$

$$= \left[\left(a_{ij} \wedge B\right) \otimes_{\mathscr{F}} C \right]$$

$$= \left[a_{ij} \wedge \left(B \otimes_{\mathscr{F}} C\right) \right]$$ จากทฤษฎีบท 4.2.2 ข้อ (1)

$$= A \otimes_{\mathscr{F}} \left(B \otimes_{\mathscr{F}} C\right)$$

ดังนั้น $\left(A \otimes_{\mathscr{F}} B\right) \otimes_{\mathscr{F}} C = A \otimes_{\mathscr{F}} \left(B \otimes_{\mathscr{F}} C\right)$

(4) ให้ $A, B \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $C \in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$\left(A \vee B\right) \otimes_{\mathscr{F}} C = \left[a_{ij} \vee b_{ij} \right] \otimes_{\mathscr{F}} C$$

$$= \left[(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge C \right]$$

$$= \left[\left(a_{ij} \wedge C\right) \vee \left(b_{ij} \wedge C\right) \right]$$ จากทฤษฎีบท 3.2.4 ข้อ 5)

$$= \left[a_{ij} \wedge C \right] \vee \left[b_{ij} \wedge C \right]$$

$$= \left(A \otimes_{\mathscr{F}} C\right) \vee \left(B \otimes_{\mathscr{F}} C\right)$$

ดังนั้น $\left(A \vee B\right) \otimes_{\mathscr{F}} C = \left(A \otimes_{\mathscr{F}} C\right) \vee \left(B \otimes_{\mathscr{F}} C\right)$

(5) ให้ $A \in M_{m,n}\left(\mathscr{F}\right)$ และ $B, C \in M_{p,q}\left(\mathscr{F}\right)$ จะได้ว่า

$$A \otimes_{\mathscr{F}} \left(B \vee C\right) = \left[a_{ij} \wedge \left(B \vee C\right) \right]$$

$$= \left[\left(a_{ij} \wedge B\right) \vee \left(a_{ij} \wedge C\right) \right]$$ จากทฤษฎีบท 3.2.4 ข้อ 5)

$$= \left[a_{ij} \wedge B \right] \vee \left[a_{ij} \wedge C \right]$$

$$=\left(A\otimes_{\mathscr{F}} B\right)\vee\left(A\otimes_{\mathscr{F}} C\right)$$

ดังนั้น $A\otimes_{\mathscr{F}}\left(B\vee C\right)=\left(A\otimes_{\mathscr{F}} B\right)\vee\left(A\otimes_{\mathscr{F}} C\right)$

(6) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $0\in M_{p,q}\left(\mathscr{F}\right)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A\otimes_{\mathscr{F}} 0_{p,q} &=\left[a_{ij}\wedge 0\right]_{mp,nq} \\ &=\left[0\right]_{mp,nq} = 0_{mp,nq} \\ 0_{p,q}\otimes_{\mathscr{F}} A &=\left[0\wedge A\right] \\ &=\left[0\right]_{mp,nq} = 0_{mp,nq} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A\otimes_{\mathscr{F}} 0=0$ และ $0\otimes_{\mathscr{F}} A=0$

(7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} I_m\otimes_{\mathscr{F}} I_n &=\begin{bmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{bmatrix}\otimes_{\mathscr{F}} I_n \\ &=\begin{bmatrix}1\wedge I_n&\cdots&0\wedge I_n\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0\wedge I_n&\cdots&1\wedge I_n\end{bmatrix}_{mn} \\ &=\begin{bmatrix}I_n&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&I_n\end{bmatrix}_{mn}=I_{mn} \end{aligned}$$

ดังนั้น $I_m\otimes_{\mathscr{F}} I_n=I_{mn}$

บทแทรกต่อไปนี้จะอธิบายเพิ่มจากทฤษฎีบท 4.2.2 ข้อ (6)

บทแทรก 4.2.3 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า $A\otimes_{\mathscr{F}} B=0_{mp,nq}$ ก็ต่อเมื่อ $A=0_{m,n}$ หรือ $B=0_{p,q}$

บทพิสูจน์

($\rightarrow$) ให้ $A\otimes_{\mathscr{F}} B=0_{mp,nq}$ จะได้ว่า $a_{ij}\wedge B=0_{p,q}$ สำหรับทุก i,j

จากบทตั้ง 4.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า $a_{ij}=0$ หรือ $B=0_{p,q}$ สำหรับทุก i,j

เนื่องจาก a_{ij} สำหรับแต่ละ i,j มีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น $A=0_{m,n}$ หรือ $B=0_{p,q}$

($\leftarrow$) ให้ $A=0_{m,n}$ หรือ $B=0_{p,q}$

กรณี $A=0_{m,n}$ จะได้ว่า $A\otimes_{\mathscr{F}} B=0_{m,n}\otimes_{\mathscr{F}} B$

จากทฤษฎีบท 4.2.2 ข้อ (5) จะได้ว่า $B\otimes_{\mathscr{F}} 0_{m,n}=0_{mp,nq}$

กรณี $B=0_{p,q}$ จะได้ว่า $A\otimes_{\mathscr{F}} B=A\otimes_{\mathscr{F}} 0_{p,q}$

จากทฤษฎีบท 4.2.2 ข้อ (5) จะได้ว่า $0_{p,q}\otimes_{\mathscr{F}} A=0_{mp,nq}$

ทำให้ได้ว่า $A\otimes_{\mathscr{F}} B=0_{mp,nq}$

ดังนั้น $A\otimes_{\mathscr{F}} B=0_{mp,nq}$ ก็ต่อเมื่อ $A=0_{m,n}$ หรือ $B=0_{p,q}$

บทแทรก 4.2.4 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ ถ้า $A\otimes_{\mathscr{F}} A=0_{mm,nn}$ แล้ว $A=0_{m,n}$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $A\otimes_{\mathscr{F}} A=0_{mm,nn}$ จะได้ว่า $a_{ij}\wedge A=0_{m,n}$ สำหรับทุก i,j

ดังนั้น $a_{ij}=0$ หรือ $A=0_{m,n}$ สำหรับทุก i,j

สรุปได้ว่า ถ้า $A\otimes_{\mathscr{F}} A=0_{mm,nn}$ แล้ว $A=0_{m,n}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณแบบน้อยวิภัชนัยกับผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 4.2.5 ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F}),B\in M_{p,q}(\mathscr{F}),C\in M_{n,k}(\mathscr{F})$ และ $D\in M_{q,r}(\mathscr{F})$

จะได้ว่า $\left(A\otimes_{\mathscr{F}} B\right)\times_{\mathscr{F}}\left(C\otimes_{\mathscr{F}} D\right)=\left(A\times_{\mathscr{F}} C\right)\otimes_{\mathscr{F}}\left(B\times_{\mathscr{F}} D\right)$

บทพิสูจน์ ให้ $A=[a_{ih}]$ และ $C=[c_{hj}]$ จะได้ว่า $A\otimes_{\mathscr{F}} B=\left[a_{ih}\wedge B\right]$ และ $C\otimes_{\mathscr{F}} D=\left[c_{hj}\wedge D\right]$

จะเห็นว่าบล็อคที่ i,j ของ $\left(A\otimes_{\mathscr{F}} B\right)\times_{\mathscr{F}}\left(C\otimes_{\mathscr{F}} B\right)$ คือ

$$\bigvee_{h=1}^{n}\left((a_{ih}\wedge B)\wedge(c_{hj}\wedge D)\right)=\bigvee_{h=1}^{n}\left((a_{ih}\wedge c_{hj})\wedge(B\times_{\mathscr{F}} D)\right)$$

$$=\left[\bigvee_{h=1}^{n}(a_{ih}\wedge c_{hj})\right]\wedge\left(B\times_{\mathscr{F}} D\right)$$

สังเกตว่า $\bigvee_{h=1}^{n}(a_{ih}\wedge c_{hj})$ เป็นแต่ละบล็อคที่ i,j ของ $A\times_{\mathscr{F}} C$

ดังนั้น $\left(A\otimes_{\mathscr{F}} B\right)\times_{\mathscr{F}}\left(C\otimes_{\mathscr{F}} B\right)=\left(A\times_{\mathscr{F}} C\right)\otimes_{\mathscr{F}}\left(B\times_{\mathscr{F}} D\right)$

บทแทรก 4.2.6 จากทฤษฎีบท 4.2.5 จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ 2 แบบ

ให้ $A_1,A_2,\ldots,A_k$ และ $B_1,B_2,\ldots,B_k$ เป็นเมทริกซ์วิภัชนัยซึ่งมีมิติที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

1. $(A_1\otimes_{\mathscr{F}} A_2\otimes_{\mathscr{F}}\ldots\otimes_{\mathscr{F}} A_k)\times_{\mathscr{F}}(B_1\otimes_{\mathscr{F}} B_2\otimes_{\mathscr{F}}\ldots\otimes_{\mathscr{F}} B_k)$

$$=(A_1\times_{\mathscr{F}} B_1)\otimes_{\mathscr{F}}(A_2\times_{\mathscr{F}} B_2)\otimes_{\mathscr{F}}\ldots\otimes_{\mathscr{F}}(A_k\times_{\mathscr{F}} B_k)$$

2. $(A_1\otimes_{\mathscr{F}} B_1)\times_{\mathscr{F}}(A_2\otimes_{\mathscr{F}} B_2)\times_{\mathscr{F}}\ldots\times_{\mathscr{F}}(A_k\otimes_{\mathscr{F}} B_k)$

$$=(A_1\times_{\mathscr{F}} A_2\times_{\mathscr{F}}\ldots\times_{\mathscr{F}} A_k)\otimes(B_1\times_{\mathscr{F}} B_2\times_{\mathscr{F}}\ldots\times_{\mathscr{F}} B_k)$$

บทพิสูจน์ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. ขั้นฐาน เมื่อ $k=1$ เห็นได้ชัดว่า $A_1\times_{\mathscr{F}} B_1=A_1\times_{\mathscr{F}} B_1$

ขั้นอุปนัย สมมติให้

$$(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} A_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} A_n) \times_{\mathcal{F}} (B_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} B_n)$$
$$= (A_1 \times_{\mathcal{F}} B_1) \otimes_{\mathcal{F}} (A_2 \times_{\mathcal{F}} B_2) \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} (A_n \times_{\mathcal{F}} B_n)$$

จะได้ว่า

$$(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} A_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} A_n \otimes A_{n+1}) \times_{\mathcal{F}} (B_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} B_n \otimes_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$
$$= [(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} A_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} A_n) \otimes_{\mathcal{F}} A_{n+1}] \times_{\mathcal{F}} [(B_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} B_n) \otimes_{\mathcal{F}} B_{n+1}]$$
$$= [(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} A_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} A_n) \times_{\mathcal{F}} (B_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_2 \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} B_n)] \otimes_{\mathcal{F}} [A_{n+1} \times_{\mathcal{F}} B_{n+1}]$$
$$= [(A_1 \times_{\mathcal{F}} B_1) \otimes_{\mathcal{F}} (A_2 \times_{\mathcal{F}} B_2) \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} (A_n \times_{\mathcal{F}} B_n)] \otimes_{\mathcal{F}} [A_{n+1} \times_{\mathcal{F}} B_{n+1}]$$
$$= (A_1 \times_{\mathcal{F}} B_1) \otimes_{\mathcal{F}} (A_2 \times_{\mathcal{F}} B_2) \otimes_{\mathcal{F}} \dots \otimes_{\mathcal{F}} (A_n \times_{\mathcal{F}} B_n) \otimes_{\mathcal{F}} (A_{n+1} \times_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$

2. ขั้นฐาน เมื่อ $k = 1$ เห็นได้ชัดว่า $A_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_1 = A_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_1$

ขั้นอุปนัย สมมติให้

$$(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_1) \times_{\mathcal{F}} (A_2 \otimes_{\mathcal{F}} B_2) \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} (A_n \otimes_{\mathcal{F}} B_n)$$
$$= (A_1 \times_{\mathcal{F}} A_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} A_n) \otimes (B_1 \times_{\mathcal{F}} B_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} B_n)$$

จะได้ว่า

$$(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_1) \times_{\mathcal{F}} (A_2 \otimes_{\mathcal{F}} B_2) \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} (A_n \otimes_{\mathcal{F}} B_n) \times_{\mathcal{F}} (A_{n+1} \otimes_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$
$$= [(A_1 \otimes_{\mathcal{F}} B_1) \times_{\mathcal{F}} (A_2 \otimes_{\mathcal{F}} B_2) \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} (A_n \otimes_{\mathcal{F}} B_n)] \times_{\mathcal{F}} (A_{n+1} \otimes_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$
$$= [(A_1 \times_{\mathcal{F}} A_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} A_n) \otimes_{\mathcal{F}} (B_1 \times_{\mathcal{F}} B_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} B_n)] \times_{\mathcal{F}} (A_{n+1} \otimes_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$
$$= [(A_1 \times_{\mathcal{F}} A_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} A_n) \times_{\mathcal{F}} A_{n+1}] \otimes_{\mathcal{F}} [(B_1 \times_{\mathcal{F}} B_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} B_n) \times_{\mathcal{F}} B_{n+1}]$$
$$= (A_1 \times_{\mathcal{F}} A_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} A_n \times_{\mathcal{F}} A_{n+1}) \otimes (B_1 \times_{\mathcal{F}} B_2 \times_{\mathcal{F}} \dots \times_{\mathcal{F}} B_n \times_{\mathcal{F}} B_{n+1})$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นการแสดงการแยกคูณกันได้ภายใต้รอยเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 4.2.7 ให้ $A \in M_n(\mathscr{F})$ และ $B \in M_m(\mathscr{F})$ จะได้ว่า $\mathrm{tr}(A \otimes_{\mathscr{F}} B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $A \otimes_{\mathscr{F}} B = \begin{bmatrix} a_{11} \wedge B & a_{12} \wedge B & \cdots & a_{1m} \wedge B \\ a_{21} \wedge B & a_{22} \wedge B & \cdots & a_{2m} \wedge B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \wedge B & a_{n2} \wedge B & \cdots & a_{nm} \wedge B \end{bmatrix}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A \otimes_{\mathscr{F}} B) &= \bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(a_{ii} \wedge B) \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} \big(a_{ii} \wedge \mathrm{tr}(B)\big) \\ &= \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_{ii} \right) \wedge \mathrm{tr}(B) \\ &= \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B) \end{aligned}$$
จากทฤษฎีบท 3.3.2 ข้อ (2)

ดังนั้น $\mathrm{tr}(A \otimes_{\mathscr{F}} B) = \mathrm{tr}(A) \wedge \mathrm{tr}(B)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการแจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรงภายใต้ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 4.2.8 ให้ $A \in M_m(\mathscr{F}), B \in M_n(\mathscr{F})$ และ $C \in M_p(\mathscr{F})$ จะได้ว่า
$$(A \oplus_0 B) \otimes_{\mathscr{F}} C = (A \otimes_{\mathscr{F}} C) \oplus_0 (B \otimes_{\mathscr{F}} C)$$

บทพิสูจน์

เนื่องจาก $A \oplus_0 B = \begin{bmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & B \end{bmatrix}_{m+n}$ และจากบทตั้ง 4.2.1 ข้อ (2)

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} (A \oplus_0 B) \otimes_{\mathscr{F}} C &= \begin{bmatrix} A \otimes_{\mathscr{F}} C & 0_{m,n} \otimes_{\mathscr{F}} C \\ 0_{n,m} \otimes_{\mathscr{F}} C & B \otimes_{\mathscr{F}} C \end{bmatrix}_{mp+np} \\ &= \begin{bmatrix} A \otimes_{\mathscr{F}} C & 0_{mp,np} \\ 0_{np,mp} & B \otimes_{\mathscr{F}} C \end{bmatrix}_{mp+np} \end{aligned}$$

$$=(A\otimes_{\mathcal{F}} C)\oplus_0 (B\otimes_{\mathcal{F}} C)$$

ดังนั้น $(A\oplus_0 B)\otimes_{\mathcal{F}} C=(A\otimes_{\mathcal{F}} C)\oplus_0 (B\otimes_{\mathcal{F}} C)$

ข้อสังเกต ในกรณีทั่วไป $A\otimes_{\mathcal{F}} (B\oplus_0 C)\neq(A\otimes_{\mathcal{F}} B)\oplus_0 (A\otimes_{\mathcal{F}} C)$ เช่น

ให้ $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.51 & 0.32\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0.37 & 0.1\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}0.12 & 0.25\\ 0.26 & 0.4\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A\otimes_{\mathcal{F}}\left(B\oplus_0 C\right)=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.51 & 0.32\end{bmatrix}\otimes_{\mathcal{F}}\begin{bmatrix}0.37 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.12 & 0.25\\ 0 & 0 & 0.26 & 0.4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.12 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2\\ 0.37 & 0.1 & 0 & 0 & 0.32 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0 & 0 & 0.32 & 0.3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.12 & 0.25 & 0 & 0 & 0.12 & 0.25\\ 0 & 0 & 0.26 & 0.4 & 0 & 0 & 0.26 & 0.32\end{bmatrix}$$

แต่ $(A\otimes_{\mathcal{F}} B)\oplus_0 (A\otimes_{\mathcal{F}} C)=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.37 & 0.1 & 0.32 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.32 & 0.3\end{bmatrix}\oplus_0\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.12 & 0.2\\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2\\ 0.12 & 0.25 & 0.12 & 0.25\\ 0.26 & 0.4 & 0.26 & 0.32\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.37 & 0.1 & 0.32 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0.32 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0.2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.25 & 0.12 & 0.25\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.26 & 0.4 & 0.26 & 0.32\end{bmatrix}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $A \otimes_{\mathcal{T}} (B \oplus_0 C) \neq (A \otimes_{\mathcal{T}} B) \oplus_0 (A \otimes_{\mathcal{T}} C)$

บทที่ 5

ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

5.1 ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ เรานิยามผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยของ A และ B โดย $A\oplus_{\mathscr{F}} B=[a_{ij}\vee B]\in M_{mp,nq}(\mathscr{F})$

$$A\oplus_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix} a_{11}\vee B & a_{12}\vee B & \dots & a_{1n}\vee B \\ a_{21}\vee B & a_{22}\vee B & \dots & a_{2n}\vee B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\vee B & a_{m2}\vee B & \dots & a_{mn}\vee B \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathscr{F})$$

นั่นคือ นำ a_{ij} แต่ละตำแหน่งในเมทริกซ์ A มาคูณเมทริกซ์ B แบบบล็อก จากนั้นกระจาย a_{ij} ไปใน b_{ij} แต่ละตำแหน่ง และจากนิยาม 3.1.2 จะนำมาหาค่ามากสุดระหว่างกันโดยมีมิติเป็น $mp\times nq$ สำหรับแต่ละ m,n,p,q ที่เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$A\oplus_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}\oplus_{\mathscr{F}}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0\vee\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} & 0.2\vee\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \\ 0.3\vee\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} & 0.1\vee\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}
$$

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์กับผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์

ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์กับผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์มีความสัมพันธ์กันในรูปแบบกฎของเดอร์มอแกน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.1 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$\neg(A \otimes_{\mathscr{F}} B) = \neg A \oplus_{\mathscr{F}} \neg B$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{kl}]$ จะได้ว่า

$$\neg(A \otimes_{\mathscr{F}} B) = \neg\left[a_{ij} \wedge B\right]_{ij}$$

$$= \neg\left[a_{ij} \wedge b_{kl}\right]_{ijkl}$$

$$= \left[\neg a_{ij} \vee \neg b_{kl}\right]_{ijkl}$$ จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (9)

$$= \left[\neg a_{ij} \vee \neg B\right]_{ij}$$

$$= \neg A \oplus_{\mathscr{F}} \neg B$$

สรุปได้ว่า $\neg(A \otimes_{\mathscr{F}} B) = \neg A \oplus_{\mathscr{F}} \neg B$

5.3 สมบัติของผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย

ทฤษฎีบท 5.3.1 ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์วิภัชนัยที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย และให้ $\alpha \in \mathscr{F}$ จะได้ว่า

1) $(\alpha \vee A) \oplus_{\mathscr{F}} B = \alpha \vee (A \oplus_{\mathscr{F}} B) = A \oplus_{\mathscr{F}} (\alpha \vee B)$ (การเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์)
2) $(A \oplus_{\mathscr{F}} B)^T = A^T \oplus_{\mathscr{F}} B^T$ สำหรับ $M_{p,q} \in \mathscr{F}$ (การเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน)
3) $(A \oplus_{\mathscr{F}} B) \oplus_{\mathscr{F}} C = A \oplus_{\mathscr{F}} (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$ (การเปลี่ยนกลุ่ม)
4) $(A \wedge B) \oplus_{\mathscr{F}} C = (A \oplus_{\mathscr{F}} C) \wedge (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$ (การแจกแจงทางขวาเหนือการดำเนินการและ)
5) $A \oplus_{\mathscr{F}} (B \wedge C) = (A \oplus_{\mathscr{F}} B) \wedge (A \oplus_{\mathscr{F}} C)$ (การแจกแจงทางซ้ายเหนือการดำเนินการและ)
6) $A \oplus_{\mathscr{F}} 1_{p,q} = 1_{mp,nq}$ และ $1_{p,q} \oplus_{\mathscr{F}} A = 1_{mp,nq}$
7) $J_m \oplus_{\mathscr{F}} J_n = J_{mn}$

บทพิสูจน์ พิสูจน์โดยใช้กฎของเดอร์มอแกน (ใช้ทฤษฎีบท 5.2.1)

1) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathscr{F})$

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee A) \oplus_{\mathscr{F}} B &= \neg(\neg((\alpha \vee A) \oplus_{\mathscr{F}} B)) && \text{จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)} \\
&= \neg((\neg\alpha \wedge \neg A) \otimes_{\mathscr{F}} \neg B) && \text{จากทฤษฎีบท 5.2.1} \\
&= \neg(\neg\alpha \wedge (\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B)) && \text{จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (1)} \\
&= \neg(\neg\alpha) \vee \neg(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B) \\
&= \alpha \vee (\neg(\neg A) \oplus_{\mathscr{F}} \neg(\neg B)) \\
&= \alpha \vee (A \oplus_{\mathscr{F}} B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \oplus_{\mathscr{F}} (\alpha \vee B) &= \neg(\neg(A \oplus_{\mathscr{F}} (\alpha \vee B))) && \text{จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)} \\
&= \neg(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg(\alpha \vee B)) && \text{จากทฤษฎีบท 5.2.1} \\
&= \neg(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} (\neg\alpha \wedge \neg B)) \\
&= \neg(\neg\alpha \wedge (\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B)) && \text{จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (1)} \\
&= \neg(\neg\alpha) \vee \neg(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B) \\
&= \alpha \vee (\neg(\neg A) \oplus_{\mathscr{F}} \neg(\neg B)) \\
&= \alpha \vee (A \oplus_{\mathscr{F}} B)
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $(\alpha \vee A) \oplus_{\mathscr{F}} B = \alpha \vee (A \oplus_{\mathscr{F}} B) = A \oplus_{\mathscr{F}} (\alpha \vee B)$

2) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathscr{F})$

$$(A \oplus_{\mathscr{F}} B)^T = \neg\left(\neg\left(A \oplus_{\mathscr{F}} B\right)^T\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)}$$

$$= \neg\left(\left(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B\right)^T\right)$$

$$= \neg\left(\neg A^T \otimes_{\mathscr{F}} \neg B^T\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (2)}$$

$$= \neg\left(\neg A^T\right) \oplus_{\mathscr{F}} \neg\left(\neg B^T\right)$$

$$= A^T \oplus_{\mathscr{F}} B^T$$

สรุปได้ว่า $(A \oplus_{\mathscr{F}} B)^T = A^T \oplus_{\mathscr{F}} B^T$

3) ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F})$, $B \in M_{p,q}(\mathscr{F})$ และ $C \in M_{r,s}(\mathscr{F})$

$$(A \oplus_{\mathscr{F}} B) \oplus_{\mathscr{F}} C = \neg\left(\neg\left((A \oplus_{\mathscr{F}} B) \oplus_{\mathscr{F}} C\right)\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)}$$

$$= \neg\left(\neg(A \oplus_{\mathscr{F}} B) \otimes_{\mathscr{F}} \neg C\right)$$

$$= \neg\left((\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B) \otimes_{\mathscr{F}} \neg C\right)$$

$$= \neg\left(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} (\neg B \otimes_{\mathscr{F}} \neg C)\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (3)}$$

$$= \neg(\neg A) \oplus_{\mathscr{F}} \neg(\neg B \otimes_{\mathscr{F}} \neg C)$$

$$= A \oplus_{\mathscr{F}} \left(\neg(\neg B) \oplus_{\mathscr{F}} \neg(\neg C)\right)$$

$$= A \oplus_{\mathscr{F}} (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$$

สรุปได้ว่า $(A \oplus_{\mathscr{F}} B) \oplus_{\mathscr{F}} C = A \oplus_{\mathscr{F}} (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$

4) ให้ $A, B \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $C \in M_{p,q}(\mathscr{F})$

$$(A \wedge B) \oplus_{\mathscr{F}} C = \neg\left(\neg\left((A \wedge B) \oplus_{\mathscr{F}} C\right)\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)}$$

$$= \neg\left(\neg(A \wedge B) \otimes_{\mathscr{F}} \neg C\right)$$

$$= \neg\left((\neg A \vee \neg B) \otimes_{\mathscr{F}} \neg C\right)$$

$$= \neg\left((\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg C) \vee (\neg B \otimes_{\mathscr{F}} \neg C)\right)$$

$$= \neg(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg C) \wedge \neg(\neg B \otimes_{\mathscr{F}} \neg C) \quad \text{จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (4)}$$

$$=\left(\neg(\neg A)\oplus_{\mathscr{F}}\neg(\neg C)\right)\wedge\left(\left(\neg(\neg B)\right)\oplus_{\mathscr{F}}\neg(\neg C)\right)$$

$$=\left(A\oplus_{\mathscr{F}} C\right)\wedge\left(B\oplus_{\mathscr{F}} C\right)$$

สรุปได้ว่า $(A\wedge B)\oplus_{\mathscr{F}} C=(A\oplus_{\mathscr{F}} C)\wedge(B\oplus_{\mathscr{F}} C)$

5) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B,C\in M_{p,q}(\mathscr{F})$

$A\oplus_{\mathscr{F}}(B\wedge C)=\neg\left(\neg\left(A\oplus_{\mathscr{F}}(B\wedge C)\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)

$$=\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}}\neg(B\wedge C)\right)$$

$=\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}}(\neg B\vee\neg C)\right)$ จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (5)

$$=\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}}\neg B\right)\wedge\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}}\neg C\right)$$

$$=\left(\neg(\neg A)\oplus_{\mathscr{F}}\neg(\neg B)\right)\wedge\left(\neg(\neg A)\oplus_{\mathscr{F}}\neg(\neg C)\right)$$

$$=\left(A\oplus_{\mathscr{F}} B\right)\wedge\left(A\oplus_{\mathscr{F}} C\right)$$

สรุปได้ว่า $A\oplus_{\mathscr{F}}(B\wedge C)=(A\oplus_{\mathscr{F}} B)\wedge(A\oplus_{\mathscr{F}} C)$

6) ให้ $A\in M_{m,n}(\mathscr{F})$

$A\oplus_{\mathscr{F}} 1_{p,q}=\neg\left(\neg\left(A\oplus_{\mathscr{F}} 1_{p,q}\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)

$$=\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}}\neg 1_{p,q}\right)$$

$$=\neg\left(\neg A\otimes_{\mathscr{F}} 0\right)$$

$=\neg 0_{mp,nq}$ จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (6)

$$=1_{mp,nq}$$

$1_{p,q}\oplus_{\mathscr{F}} A=\neg\left(\neg\left(1_{p,q}\oplus_{\mathscr{F}} A\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (8)

$$=\neg\left(\neg 1_{p,q}\otimes_{\mathscr{F}}\neg A\right)$$

$$=\neg\left(0_{p,q}\otimes_{\mathscr{F}}\neg A\right)$$

$=\neg 0_{mp,nq}$ จากทฤษฎีบท 4.2.1 ข้อ (6)

$$=1_{mp,nq}$$

สรุปได้ว่า $A\oplus_{\mathscr{F}} 1_{p,q}=1_{mp,nq}$ และ $1_{p,q}\oplus_{\mathscr{F}} A=1_{mp,nq}$

7) จากบทนิยาม 3.1.1 ข้อ 3)

กำหนด ให้ $$J_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_m$$

จะได้ว่า

$$J_m \oplus_{\mathscr{F}} J_n = \begin{bmatrix} 1 \vee J_n & \cdots & 0 \vee J_n \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 \vee J_n & \cdots & 1 \vee J_n \end{bmatrix}_{mn}$$
$$= \begin{bmatrix} 1_n & \cdots & J_n \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ J_n & \cdots & 1_n \end{bmatrix}_{mn}$$
$$= J_{mn}$$

สรุปได้ว่า $J_m \oplus_{\mathscr{F}} J_n = J_{mn}$

บทแทรกต่อไปนี้จะอธิบายเพิ่มจากทฤษฎีบท 5.3.1 ข้อ 6)

บทตั้ง 5.3.2 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $k \in \mathscr{F}$ จะได้ว่า ถ้า $k \vee A = 1_{m,n}$ แล้ว $k=1$ หรือ $A=1_{m,n}$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $k \vee A = 1_{m,n}$ และ $k \neq 1$

จะได้ว่า $\left[k \vee a_{ij}\right] = \left[\max\{k, a_{ij}\}\right] = 1_{m,n}$ สำหรับทุก i,j และ $k \neq 0$

ทำให้ได้ว่า $a_{ij} = 1$ สำหรับทุก i,j นั่นคือ $A = 1_{m,n}$

ดังนั้น ถ้า $k \vee A = 1_{m,n}$ แล้ว $k=1$ หรือ $A = 1_{m,n}$

บทแทรก 5.3.3 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{p,q}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า $A \oplus_{\mathscr{F}} B = 1_{mp,nq}$ ก็ต่อเมื่อ $A = 1_{m,n}$ หรือ $B = 1_{p,q}$

บทพิสูจน์ $(\rightarrow)$ สมมติ $A \oplus_{\mathscr{F}} B = 1_{mp,nq}$ จะเห็นว่า $a_{ij} \vee B = 1_{p,q}$ สำหรับทุก i,j

ทำให้ได้ว่า $a_{ij} = 1$ หรือ $B = 1_{p,q}$ สำหรับทุก i,j

ดังนั้น $A = 1_{m,n}$ หรือ $B = 1_{p,q}$

$(\leftarrow)$ สมมติ $A=1_{m,n}$ หรือ $B=1_{p,q}$ จากทฤษฎีบท 5.3.1 ข้อ 6)

จะเห็นว่า $A\oplus_{\mathscr{F}} B=1_{p,q}$

สรุปได้ว่า $A\oplus_{\mathscr{F}} B=1_{mp,nq}$ ก็ต่อเมื่อ $A=1_{m,n}$ หรือ $B=1_{p,q}$

บทแทรก 5.3.4 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า ถ้า $A\oplus_{\mathscr{F}} A=1_{mm,nn}$ แล้ว $A=1_{m,n}$

บทพิสูจน์ สมมติ $A\oplus_{\mathscr{F}} A=1_{mm,nn}$ จะเห็นว่า $a_{ij}\vee A=1_{m,n}$ สำหรับทุก i, j

ดังนั้น $a_{ij}=1$ หรือ $A=1_{m,n}$ สำหรับทุก i, j

สรุปได้ว่า ถ้า $A\oplus_{\mathscr{F}} A=1_{mm,nn}$ แล้ว $A=1_{m,n}$

5.4 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์กับการคูณแบบมากวิภัชนัย

บทนิยาม 5.4.1 ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B=[b_{ij}]\in M_{n,p}(\mathscr{F})$ เรานิยามการคูณแบบมากวิภัชนัยของ A และ B โดย $A+_{\mathscr{F}} B=\bigwedge_{i=1}^{n}(a_{ij}\vee b_{ij})\in M_{m,p}(\mathscr{F})$

ตัวอย่าง 5.4.2 ให้

$$A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.45\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}0.25 & 0.32\\ 0.41 & 0.58\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า
$$A+_{\mathscr{F}} B=\begin{bmatrix}(0.1\vee 0.25)\wedge(0.2\vee 0.41) & (0.1\vee 0.32)\wedge(0.2\vee 0.58)\\ (0.3\vee 0.25)\wedge(0.45\vee 0.41) & (0.3\vee 0.32)\wedge(0.45\vee 0.58)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0.25 & 0.32\\ 0.3 & 0.32\end{bmatrix}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณแบบมากวิภชนัยกับผลคูณแบบน้อยวิภัชนัย แสดงให้เห็นในบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 5.4.3 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F})$ และ $B \in M_{n,p}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า $\neg(A \times_{\mathscr{F}} B) = \neg A +_{\mathscr{F}} \neg B$

บทพิสูจน์ จะได้ว่า $\neg(A \times_{\mathscr{F}} B) = \left[\neg\left(\bigvee_{h=1}^{n}(a_{ih} \wedge b_{hj})\right)\right]$ จากบทนิยาม 3.2.2

$$= \left[\bigwedge_{h=1}^{n}(\neg a_{ih} \vee \neg b_{hj})\right]$$

$$= \neg A +_{\mathscr{F}} \neg B \quad \text{จากบทนิยาม 5.4.1}$$

ดังนั้น $\neg(A \times_{\mathscr{F}} B) = \neg A +_{\mathscr{F}} \neg B$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณแบบมากวิภัชนัยกับผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 5.4.4 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathscr{F}), B \in M_{p,q}(\mathscr{F}), C \in M_{n,k}(\mathscr{F})$ และ $D \in M_{q,r}(\mathscr{F})$ จะได้ว่า $(A \oplus_{\mathscr{F}} B) +_{\mathscr{F}} (C \oplus_{\mathscr{F}} D) = (A +_{\mathscr{F}} C) \oplus_{\mathscr{F}} (B +_{\mathscr{F}} D)$

บทพิสูจน์

ให้ $A = [a_{ih}]$ และ $C = [c_{hj}]$ จะได้ว่า $A \oplus_{\mathscr{F}} B = [a_{ih} \vee B]$ และ $C \oplus_{\mathscr{F}} D = [c_{hj} \vee D]$

พิจารณาบล็อกที่ i, j ของ $(A \oplus_{\mathscr{F}} B) +_{\mathscr{F}} (C \oplus_{\mathscr{F}} D)$ จะได้ว่า บล็อกที่ i, j ดังกล่าวคือ

$$\bigwedge_{h=1}^{n}\left((a_{ih} \vee B) +_{\mathscr{F}} (c_{hj} \vee D)\right) = \neg\left(\neg\left(\bigwedge_{h=1}^{n}\left((a_{ih} \vee B) +_{\mathscr{F}} (c_{hj} \vee D)\right)\right)\right)$$

$$= \neg\left(\bigvee_{h=1}^{n}\left(\neg(a_{ih} \vee B) \times_{\mathscr{F}} \neg(c_{hj} \vee D)\right)\right)$$

$$= \neg\left(\bigvee_{h=1}^{n}\left((\neg a_{ih} \wedge \neg B) \times_{\mathscr{F}} (\neg c_{hj} \wedge \neg D)\right)\right)$$

$$= \neg\left(\bigvee_{h=1}^{n}\left((\neg a_{ih} \wedge \neg c_{hj}) \wedge (\neg B \times_{\mathscr{F}} \neg D)\right)\right)$$

$$= \neg\left(\left[\bigvee_{h=1}^{n}(\neg a_{ih} \wedge \neg c_{hj})\right] \wedge (\neg B \times_{\mathscr{F}} \neg D)\right) \quad \text{จากทฤษฎีบท 4.2.5}$$

$$= \left(\neg\left[\bigvee_{h=1}^{n}(\neg a_{ih} \wedge \neg c_{hj})\right] \vee \neg(\neg B \times_{\mathscr{F}} \neg D)\right)$$

$$=\left[\bigwedge_{h=1}^{n}(a_{ih}\vee c_{hj})\right]\vee(B+_{\mathcal{F}}D)$$ จากบทตั้ง 5.4.3

เนื่องจาก $A+_{\mathcal{F}}C=\left[\bigwedge_{h=1}^{n}(a_{ih}\vee c_{hj})\right]$ จะได้ว่าบล็อกที่ i, j ของ $(A+_{\mathcal{F}}C)\oplus_{\mathcal{F}}(B+_{\mathcal{F}}D)$

คือ $\left[\bigwedge_{h=1}^{n}(a_{ih}\vee c_{hj})\right]\vee(B+_{\mathcal{F}}D)$

ดังนั้น $(A\oplus_{\mathcal{F}}B)+_{\mathcal{F}}(C\oplus_{\mathcal{F}}D)=(A+_{\mathcal{F}}C)\oplus_{\mathcal{F}}(B+_{\mathcal{F}}D)$

บทแทรก 5.4.5 จากทฤษฎีบท 5.4.4 จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ 2 แบบ

ให้ $A_1, A_2,\dots,A_k$ และ $B_1,B_2,\dots,B_k$ เป็นเมทริกซ์วิภัชนัยซึ่งมีมิติที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

1. $(A_1\oplus_{\mathcal{F}}A_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}A_k)+_{\mathcal{F}}(B_1\oplus_{\mathcal{F}}B_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}B_k)$

$$=(A_1+_{\mathcal{F}}B_1)\oplus_{\mathcal{F}}(A_2+_{\mathcal{F}}B_2)\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}(A_k+_{\mathcal{F}}B_k)$$

2. $(A_1\oplus_{\mathcal{F}}B_1)+_{\mathcal{F}}(A_2\oplus_{\mathcal{F}}B_2)+_{\mathcal{F}}\dots+_{\mathcal{F}}(A_k\oplus_{\mathcal{F}}B_k)$

$$=(A_1+_{\mathcal{F}}A_2+_{\mathcal{F}}\dots+_{\mathcal{F}}A_k)\oplus_{\mathcal{F}}(B_1+_{\mathcal{F}}B_2+_{\mathcal{F}}\dots+_{\mathcal{F}}B_k)$$

บทพิสูจน์ พิสูจน์โดยใช้กฎของเดอร์มอแกน (ใช้ทฤษฎีบท 5.2.1)

1. $(A_1\oplus_{\mathcal{F}}A_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}A_k)+_{\mathcal{F}}(B_1\oplus_{\mathcal{F}}B_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}B_k)$

$$=\neg\big(\neg((A_1\oplus_{\mathcal{F}}A_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}A_k)+_{\mathcal{F}}(B_1\oplus_{\mathcal{F}}B_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}B_k))\big)$$ จากทบ. 3.1.9 (8)

$$=\neg\big(\neg(A_1\oplus_{\mathcal{F}}A_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}A_k)\times_{\mathcal{F}}\neg(B_1\oplus_{\mathcal{F}}B_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}B_k)\big)$$

$$=\neg\big((\neg A_1\otimes_{\mathcal{F}}\neg A_2\otimes_{\mathcal{F}}\dots\otimes_{\mathcal{F}}\neg A_k)\times_{\mathcal{F}}(\neg B_1\otimes_{\mathcal{F}}\neg B_2\otimes_{\mathcal{F}}\dots\otimes_{\mathcal{F}}\neg B_k)\big)$$

$$=\neg\big((\neg A_1\times_{\mathcal{F}}\neg B_1)\otimes_{\mathcal{F}}(\neg A_2\times_{\mathcal{F}}\neg B_2)\otimes_{\mathcal{F}}\dots\otimes_{\mathcal{F}}(\neg A_k\times_{\mathcal{F}}\neg B_k)\big)$$ จากบทแทรก 4.2.6

$$=\neg(\neg A_1\times_{\mathcal{F}}\neg B_1)\oplus_{\mathcal{F}}\neg(\neg A_2\times_{\mathcal{F}}\neg B_2)\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}\neg(\neg A_k\times_{\mathcal{F}}\neg B_k)$$

$$=\big(\neg(\neg A_1)+_{\mathcal{F}}\neg(\neg B_1)\big)\oplus_{\mathcal{F}}\big(\neg(\neg A_2)+_{\mathcal{F}}\neg(\neg B_2)\big)\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}\big(\neg(\neg A_k)+_{\mathcal{F}}\neg(\neg B_k)\big)$$

$$=(A_1+_{\mathcal{F}}B_1)\oplus_{\mathcal{F}}(A_2+_{\mathcal{F}}B_2)\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}(A_k+_{\mathcal{F}}B_k)$$

สรุปได้ว่า $(A_1\oplus_{\mathcal{F}}A_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}A_k)+_{\mathcal{F}}(B_1\oplus_{\mathcal{F}}B_2\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}B_k)$

$$=(A_1+_{\mathcal{F}}B_1)\oplus_{\mathcal{F}}(A_2+_{\mathcal{F}}B_2)\oplus_{\mathcal{F}}\dots\oplus_{\mathcal{F}}(A_k+_{\mathcal{F}}B_k)$$

2. $(A_1 \oplus_{\mathscr{F}} B_1) +_{\mathscr{F}} (A_2 \oplus_{\mathscr{F}} B_2) +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} (A_k \oplus_{\mathscr{F}} B_k)$

$= \neg\left(\neg\left((A_1 \oplus_{\mathscr{F}} B_1) +_{\mathscr{F}} (A_2 \oplus_{\mathscr{F}} B_2) +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} (A_k \oplus_{\mathscr{F}} B_k)\right)\right)$ จากทบ. 3.1.9 (8)

$= \neg\left(\neg(A_1 \oplus_{\mathscr{F}} B_1) \times_{\mathscr{F}} \neg(A_2 \oplus_{\mathscr{F}} B_2) \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} \neg(A_k \oplus_{\mathscr{F}} B_k)\right)$

$= \neg\left((\neg A_1 \otimes_{\mathscr{F}} \neg B_1) \times_{\mathscr{F}} (\neg A_2 \otimes_{\mathscr{F}} \neg B_2) \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} (\neg A_k \otimes_{\mathscr{F}} \neg B_k)\right)$

$= \neg\left((\neg A_1 \times_{\mathscr{F}} \neg A_2 \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} \neg A_k) \otimes_{\mathscr{F}} (\neg B_1 \times_{\mathscr{F}} \neg B_2 \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} \neg B_k)\right)$ จากบทแทรก 4.2.6

$= \left(\neg(\neg A_1 \times_{\mathscr{F}} \neg A_2 \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} \neg A_k) \oplus_{\mathscr{F}} \neg(\neg B_1 \times_{\mathscr{F}} \neg B_2 \times_{\mathscr{F}} \ldots \times_{\mathscr{F}} \neg B_k)\right)$

$= \left(\neg(\neg A_1) +_{\mathscr{F}} \neg(\neg A_2) +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} \neg(\neg A_k)\right) \oplus_{\mathscr{F}} \left(\neg(\neg B_1) +_{\mathscr{F}} \neg(\neg B_2) +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} \neg(\neg B_k)\right)$

$= (A_1 +_{\mathscr{F}} A_2 +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} A_k) \oplus_{\mathscr{F}} (B_1 +_{\mathscr{F}} B_2 +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} B_k)$

สรุปได้ว่า $(A_1 \oplus_{\mathscr{F}} B_1) +_{\mathscr{F}} (A_2 \oplus_{\mathscr{F}} B_2) +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} (A_k \oplus_{\mathscr{F}} B_k)$

$$= (A_1 +_{\mathscr{F}} A_2 +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} A_k) \oplus_{\mathscr{F}} (B_1 +_{\mathscr{F}} B_2 +_{\mathscr{F}} \ldots +_{\mathscr{F}} B_k)$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงการแยกบวกกันได้ภายใต้รอยเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 5.4.6 ให้ $A = M_n(\mathscr{F})$ และ $B = M_m(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$\operatorname{tr}(A \oplus_{\mathscr{F}} B) = \operatorname{tr}(A) \vee \operatorname{tr}(B)$$

บทพิสูจน์ จะได้ว่า $\operatorname{tr}(A \oplus_{\mathscr{F}} B) = \neg\left(\neg\left(\operatorname{tr}(A \oplus_{\mathscr{F}} B)\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 3.1.8 (8)

$= \neg\left(\operatorname{tr}(\neg A \otimes_{\mathscr{F}} \neg B)\right)$ จากทฤษฎีบท 5.2.1

$= \neg\left(\operatorname{tr}(\neg A) \wedge \operatorname{tr}(\neg B)\right)$ จากทฤษฎีบท 4.2.7

$= \left(\neg\left(\operatorname{tr}(\neg A)\right) \vee \neg\left(\operatorname{tr}(\neg B)\right)\right)$

$= \left(\operatorname{tr}\left(\neg(\neg A)\right) \vee \operatorname{tr}\left(\neg(\neg B)\right)\right)$

$= \operatorname{tr}(A) \vee \operatorname{tr}(B)$

ดังนั้น $\operatorname{tr}(A \oplus_{\mathscr{F}} B) = \operatorname{tr}(A) \vee \operatorname{tr}(B)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นการแสดงการแจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรงภายใต้ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 5.4.7 ให้ $A \in M_m(\mathscr{F}), B \in M_n(\mathscr{F})$ และ $C \in M_p(\mathscr{F})$ จะได้ว่า

$$(A \oplus_1 B) \oplus_{\mathscr{F}} C = (A \oplus_{\mathscr{F}} C) \oplus_1 (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $(A \oplus_1 B) = \begin{bmatrix} A & 1_{m,n} \\ 1_{n,m} & B \end{bmatrix}_{m+n}$

จะได้ว่า $(A \oplus_1 B) \oplus_{\mathscr{F}} C = \begin{bmatrix} A \oplus_{\mathscr{F}} C & 1_{m,n} \oplus_{\mathscr{F}} C \\ 1_{n,m} \oplus_{\mathscr{F}} C & B \oplus_{\mathscr{F}} C \end{bmatrix}_{mp+np}$

$$= \begin{bmatrix} A \oplus_{\mathscr{F}} C & 1_{mp,np} \\ 1_{np,mp} & B \oplus_{\mathscr{F}} C \end{bmatrix}_{mp+np}$$

$$= (A \oplus_{\mathscr{F}} C) \oplus_1 (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$$

ดังนั้น $(A \oplus_1 B) \oplus_{\mathscr{F}} C = (A \oplus_{\mathscr{F}} C) \oplus_1 (B \oplus_{\mathscr{F}} C)$

ข้อสังเกต ในกรณีทั่วไป $A \oplus_{\mathscr{F}} (B \oplus_1 C) \neq (A \oplus_{\mathscr{F}} B) \oplus_1 (A \oplus_{\mathscr{F}} C)$ เช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A \oplus_{\mathscr{F}} (B \oplus_1 C) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \oplus_{\mathscr{F}} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 1 & 1 & 0.6 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.7 & 1 & 1 & 0.2 & 0.7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.9 & 1 & 1 & 0.3 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.2 & 1 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 1 & 1 & 0.6 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 1 & 1 & 0.4 & 0.7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0.9 & 1 & 1 & 0.4 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.3 & 1 & 1 & 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

แต่ $(A \oplus_{\mathscr{Y}} B) \oplus_1 (A \oplus_{\mathscr{Y}} C) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \oplus_1 \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.3 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0.7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3 & 0.9 & 0.3 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.3 & 0.9 & 0.4 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $A \oplus_{\mathscr{Y}} (B \oplus_1 C) \neq (A \oplus_{\mathscr{Y}} B) \oplus_1 (A \oplus_{\mathscr{Y}} C)$

บทที่ 6
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 ผลสรุปงานวิจัย

ผู้วิจัยได้ให้บทนิยามของผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์และผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัย ผู้วิจัยได้พิจารณาตรวจสอบสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว พบว่า ผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยมีสมบัติดังนี้

- การเปลี่ยนกลุ่ม
- การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการดำเนินการหรือ
- การเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์
- การเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน
- การเข้ากันได้กับการคูณแบบน้อยวิภัชนัย
- การแจกแจงทางขวาเหนือผลบวกตรง
- การแยกคูณกันได้ภายใต้รอยเมทริกซ์

ผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยมีสมบัติดังนี้

- การเปลี่ยนกลุ่ม
- การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการดำเนินการและ
- การเข้ากันได้กับการบวกด้วยสเกลาร์
- การเข้ากันได้กับการสลับเปลี่ยน
- การเข้ากันได้กับการคูณแบบมากวิภัชนัย
- การแยกคูณกันได้ภายใต้รอยเมทริกซ์

นอกจากนี้ผู้วิจัยพบว่าผลคูณแบบน้อยโครเนคเคอร์และผลคูณแบบมากโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์วิภัชนัยมีความสัมพันธ์กันในรูปแบบกฎเดอร์มอแกน

6.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจในเมทริกซ์วิภัชนัยละผลคูณโครเนคเคอร์ สามารถพิจารณาศึกษาผลคูณอื่นๆ สำหรับเมทริกซ์วิภัชนัยได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Broxson, Bobbi Jo, **"The Kronecker Product"** (2006). *UNF Theses and Dissertation.* Peper 25. http://digitalcommons.unf.edu/etu/25

[2] Daizhan Cheng, Hongsheng Qi and Zhiqiang Li. **Analysis and Control of Boolean Networks.** (London: Springer, 2014)

[3] Raviwan Stangam, Pattrawut chansangiam. (2016). " Kronecker Product of Matrices Over Commutative Semiring,. **Thai Journal of Mathmatics.** (Special Issue on ICMSA 2015,), p. 21-38