จำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d

ACHROMATIC NUMBERS OF CYCLE POWER GRAPH C_n^d

นันทภพ ชำนาญแพทย์
สราวุฒิ สิทธิกรณ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

ACHROMATIC NUMBERS OF CYCLE POWER GRAPH C_n^d

NANTHAPHOP CHAMNANPHAET

SARAWOOT SITTHIKRON

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	จำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d
	Achromatic Numbers of Cycle Power Graph C_n^d
ชื่อนักศึกษา	นายนันทภพ ชำนาญแพทย์ รหัสนักศึกษา 58050095
	นายสราวุฒิ สิทธิกรณ์ รหัสนักศึกษา 58050162
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.เดชา สมนะ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก ประธานกรรมการ	เทิดฯ ข.
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	
ผศ.ดร. เดชา สมนะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ จำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d

ชื่อนักศึกษา นายนันทภพ ชำนาญแพทย์ รหัสนักศึกษา 58050095

นายสราวุฒิ สิทธิกรณ์ รหัสนักศึกษา 58050162

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.เดชา สมนะ

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

บทคัดย่อ

จำนวนอโครมาติกของกราฟ G แทนด้วยสัญลักษณ์ $\Psi(G)$ คือจำนวนสีที่มากที่สุดในการระบายสีสมบูรณ์ของจุดยอดของกราฟ G ซึ่งการหาจำนวนอโครมาติก และขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟต่างๆนั้นค่อนข้างหาได้ยาก

ในปัญหาพิเศษนี้เราจึงได้ศึกษาการระบายสี การระบายสีสมบูรณ์ และหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d เมื่อ $d = 2, 4$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากการศึกษาคณะผู้จัดทำได้หาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2 โดยใช้ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลัง C_n^d และยังได้ออกแบบขั้นตอนวิธีการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d และกราฟปกติ $-r$

คำสำคัญ : กราฟเชิงเดียว กราฟปกติ $-r$ กราฟวงกำลัง การระบายสีสมบูรณ์ จำนวนอโครมาติก

Title	Achromatic Numbers of Cycle Power Graph C_n^d
Students	Mr. Nantahphop Chamnanphaet Student ID 58050095
	Mr. Srawoot Sitthikorn Student ID 58050162
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Assist.Prof.Dr.Decha Samana
Co-Advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert

Abstract

The achromatic number of graph G denoted by $\Psi(G)$ is the largest number such that complete coloring of graph G. That is difficult to find the achromatic number of graphs and upper bound of achromatic number of graph.

On this special problems, we studied coloring ,complete coloring and upper bound of achromatic number of cycle power graph C_n^d when $d = 2, 4$ and n is a positive integer. From the study we find the upper bound of achromatic number of cycle power graph C_n^2 by using the eigenvalues of adjacency matrix of cycle power graph C_n^d and design step to find upper bound of achromatic number of cycle power graph C_n^d and $r-$regular graph.

Keywords :simple graph, $r-$regular graph , cycle power graph C_n^d, complete coloring, achromatic number

กิตติกรรมประกาศ

กิตติกรรมประกาศในปัญหาพิเศษ เรื่อง จำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลังสามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.เดชา สมนะ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษและ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษร่วมฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของ ปัญหาพิเศษฉบับนี้

กราบขอบพระคุณ ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก และ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ประธานกรรมการและกรรมการสอบปัญหาพิเศษครั้งนี้ที่ให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และขอขอบคุณสถานที่ที่อำนวยความสะดวกในการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้

หากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีประโยชน์และคุณค่าทางการศึกษาต่อผู้อื่น คณะผู้ศึกษาขอยกความดีทั้งหมดแด่อาจารย์ ผศ.ดร.เดชา สมนะ และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ซึ่งหากปัญหาพิเศษฉบับนี้มีความบกพร่องประการใด คณะผู้ศึกษาขอน้อมรับความผิดพลาดไว้แต่เพียงผู้เดียว

นันทภพ ชำนาญแพทย์
สราวุฒิ สิทธิกรณ์

สารบัญ

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันได้มีการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟอย่างแพร่หลาย และนำไปประยุกต์ในด้านต่าง ๆ เช่น ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร ปัญหาการเล่มเกม ปัญหาการแบ่งของเหลวจากถังตวง การหาเส้นทางสั้นที่สุด และการประยุกต์ใช้กราฟควบคุมโครงการ เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1852 Francis Guthrie ได้ตั้งปัญหาสี่สี (Four color problem) เพื่อหาความเป็นไปได้ที่ใช้สีเพียง 4 สีระบายแผนที่โดยประเทศที่มีชายแดนติดกันจะต้อง มีสีที่ต่างกัน จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1976 ปัญหานี้ได้พบคำตอบโดย Appel และ Haken ซึ่งทั้งสองได้แสดงว่า สามารถระบายสีแผนที่ทุก ๆแผนได้โดยใช้เพียง 4 สีจริง ปัญหานี้พวกเขาได้แบ่งปัญหาออกเป็นเกือบ 2,000 กรณี ซึ่งแบ่งตามจำนวนของการจัดเรียงประเทศในแผนที่ และในการหาวิธีที่เป็นไปได้ของการระบายสีของการจัดเรียงหลายๆแบบนั้น พวกเขาได้ใช้คอมพิวเตอร์เข้าช่วยและหลังจากที่คอมพิวเตอร์ใช้เวลาคำนวณกว่า 1,200 ชั่วโมง แล้วพวกเขาจึงสรุปว่าคำตอบนี้เป็นจริง ถึงแม้ว่าจะได้คำตอบของปัญหาการระบายสี เพียง 4 สีแล้วก็ตาม แต่ก็มีนักคณิตศาสตร์หลายคนที่ไม่เป็นที่ยอมรับและยังมีข้อสงสัยในวิธีการพิสูจน์ ดังนั้นปัญหาใหม่จึงเกิดขึ้นว่า จะมีการพิสูจน์แบบคณิตศาสตร์อย่างเดียว โดยไม่ใช้คอมพิวเตอร์ได้หรือไม่ และด้วยเหตุนี้ทำให้มีการสร้างนิยามของรงคเลข (chromatic number) ซึ่งคือจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่สามารถระบายบนจุดยอดนั้น ๆของกราฟได้ G แล้วใช้สัญลักษณ์ $\chi(G)$

ต่อมาในปีค.ศ.1968 Frank Harary ได้ให้คำนิยามเกี่ยวกับการระบายสีสมบูรณ์ (Complete n-Coloring) [4] และได้นิยามเกี่ยวกับกำหนดจำนวนสีสูงสุดที่สามารถระบายลงในกราฟได้ คือจำนวนอโครมาติกโดยใช้สัญลักษณ์ $\Psi(G)$ ซึ่งเป็นแนวคิดที่มาจากจำนวนรงคเลข และมีความสัมพันธ์เป็น $\chi(G)+\Psi(\bar{G})\le p+1$ โดย p คือจุดยอดของกราฟ และในภายหลังได้มีการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟต่าง ๆดังนี้

ในปี ค.ศ.1992 Nam-Pro Chiang และ Hung-Lin Fu ได้หาจำนวนอโครมาติกของผลคูณคาร์ทีเชียนของกราฟ G_1 และ G_2 [8] ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

(i) $\max_1 < t < m \min\{\left\lfloor \frac{mn}{t} \right\rfloor, t(m+n-1)-t^2+1\}$

$$\ge \Psi(K_m \times K_n)$$

$$\ge \begin{cases} m+n-1 & n>m=2, m=n>2 \\ 2n-\left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor & n>m>2 \end{cases}$$

นอกจากนี้สำหรับ $m=2,3$ ที่ให้ค่าขอบเขตแน่นอนของจำนวนอโครมาติก $\Psi(K_m \times K_n)$ มีทั้ง m และ n เท่ากับ 2

(ii) $\Psi(G_1 \times G_2) \geq \Psi(K_m \times K_n)$ ถ้า $\Psi(G_1)=m$ และ $\Psi(G_2)=n$

(iii) $\Psi(P_l \times K_m) \leq (\frac{m(m+1)}{2})^{\frac{1}{2}}(\Psi(P_l)+3)+1$ และ

$\Psi(C_l \times K_m) \leq (\frac{m(m+1)}{2})^{\frac{1}{2}}(\Psi(C_l)+3)+1$

ที่ P_n, C_n และ K_n เป็นวิถี กราฟวงและกราฟแบบบริบูรณ์ของอันดับ n ตามลำดับ

ในปี ค.ศ.2000 ต่อมา G. MacGillivraya, A. Rodriguezb ได้หาค่าจำนวนอโครมาติกของกราฟวิถีทั้งหมด[5] โดยให้ยูเนียนของกราฟวิถีมีความยาว $a_1, a_2, a_3 ... a_k$ แสดงว่ามีจำนวนเต็ม n ที่มากที่สุดที่ทำให้

$$a_1 + a_2 + a_3 ... + a_k \geq \binom{n}{2} + f(k,n)$$

โดยที่ $f(k,n)=0$ ถ้า n เป็นคี่หรือ n เป็นคู่และ $k \geq \frac{n}{2}$

และ $f(k,n)=\frac{n}{2}-k$ ถ้า k เป็นคู่และ $k < \frac{n}{2}$

ในปี ค.ศ.2018 Aparna K M,Henila Coreya และ Manjusha P ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนอโครมาติกของ Tadpole graph ,Spider graph และ Double Triangular Snake graph โดยใช้สัญลักษณ์ $(T_{m,n}), S_n$ และ $D[T_n]$ ตามลำดับ[2]

ดังนั้นปัญหาพิเศษนี้เราจะศึกษาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d นอกจากนี้เรายังได้หาเงื่อนไขในการไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟปกติ $-r$

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับจำนวนอโครมาติก
2. เพื่อศึกษาบทนิยามและทฤษฎีของจำนวนอโครมาติก
3. เพื่อศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d
4. เพื่อศึกษานิยามของกราฟวงกำลัง C_n^d
5. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม C_n^d
6. เพื่อศึกษาจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาขอบเขตของจำนวนอโคราติกของกราฟวงกำลัง C_n^d และหาจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d เมื่อ $d = 2,4$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับจำนวนอโครมาติก
2. ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุดยอด จำนวนเส้นเชื่อม C_n^d
3. ได้จำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาลักษณะความสัมพันธ์ของจุดยอด และเส้นเชื่อมบนกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4
2. ศึกษาวิธีการหาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4
3. ศึกษาวิธีการวิธีการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4
4. ศึกษาการพิสูจน์เพื่อหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4
5. หาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4
6. วิเคราะห์สรุปผลที่ได้
7. จัดทำรูปเล่มและนำเสนอ

1.6 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน

การดำเนินงาน	ระยะเวลาการดำเนินงาน									
	2561					2562				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ศึกษาลักษณะความสัมพันธ์ของจุดยอด และเส้นเชื่อมบนกราฟวงกำลัง C_n^d										
ศึกษาวิธีการหาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4										
ศึกษาวิธีการวิธีการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4										
ศึกษาการพิสูจน์เพื่อหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4										
หาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2, C_n^4										
วิเคราะห์สรุปผลที่ได้										
จัดทำรูปเล่มและนำเสนอ										

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนิยามและทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทและบทนิยามในเรื่องเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ[1] เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการทำปัญหาพิเศษเรื่องนี้

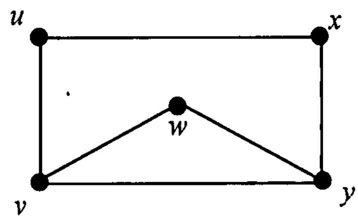
บทนิยาม 2.1 **กราฟ(graph)** G ประกอบด้วยเซตจำกัด $V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซต $E(G)$ ซึ่งเป็นเซตของคู่ไม่เป็นอันดับ(unordered pair) ของสมาชิกที่แตกต่างกันใน $V(G)$ โดยที่เซต $E(G)$ อาจเป็นเซตว่างก็ได้

- สมาชิกของเซต $V(G)$ เรียกว่า **จุดยอด(vertex)** ในปัญหาพิเศษเรื่องนี้ขอใช้คำว่า จุด
- สมาชิกของเซต $E(G)$ เรียกว่า **เส้นเชื่อม(edge)** ในปัญหาพิเศษเรื่องนี้ขอใช้คำว่า เส้น
- ถ้า $|V(G)|=n$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มี**อันดับ(order)** n นั่นคือกราฟ G มีจุดยอดเป็นจำนวน n จุด
- ถ้า $|E(G)|=m$ แล้วกราฟ G เป็นกราฟที่มี**ขนาด(size)** m นั่นคือกราฟ G มีเส้นเป็นจำนวน m เส้น

หมายเหตุ

1. ปัญหาพิเศษนี้เรียกกราฟตามบทนิยาม 1.1 ว่า **กราฟเชิงเดียว(simple graph)**
2. ถ้า $\{u,v\}$ เป็นเส้นของกราฟแล้ว โดยบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า $u \neq v$ และ $\{u,v\}$ เป็นคู่ไม่เป็นอันดับ นั่นคือ $\{u,v\}=\{v,u\}$ ดังนั้น เพื่อความสะดวก เส้นของกราฟสามารถเขียนแทนด้วย uv หรือ vu
3. เนื่องจากเซตของจุดในกราฟไม่เป็นเซตว่าง ดังนั้น อันดับของกราฟมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 และสำหรับกราฟที่มีอันดับ 1 (นั่นคือ กราฟที่มีจุดเพียง 1 จุด) จะเรียกว่า **กราฟชัด (trivial graph)** และเรียกกราฟที่มีอันดับมากกว่า 1 ว่า **กราฟไม่ชัด(nontrivial graph)**

ตัวอย่าง 2.1



$G:$

รูปที่ 2.1 : กราฟเชิงเดียว G

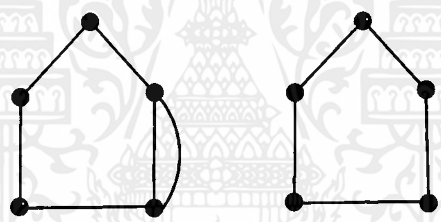
จงหาอันดับและขนาดของกราฟ ซึ่งประกอบด้วย

$V(G)=\{u,v,w,x,y\}$ และ $E(G)=\{uv,vw,ux,vy,wy,xy\}$

$|V(G)|=5$ และ $|E(G)|=6$ ดังนั้นกราฟ G มีอันดับ 5 และขนาด 6

บทนิยาม 2.2 **กราฟหลายเชิง (multigraph)** คือกราฟที่ยอมให้มีเส้นมากกว่า 1 เส้น เชื่อมระหว่างจุด 2 จุดที่แตกต่างกัน ส่วนบทนิยามและทฤษฎีบทอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับกราฟหลายเชิงจะเหมือนกับกราฟในบทนิยาม 2.1

ตัวอย่าง 2.2 กราฟ J เป็นกราฟเชิงเดียว แต่ H เป็นกราฟหลายเชิง



$H:$ $J:$

รูปที่ 2.2 : กราฟหลายเชิงและกราฟเชิงเดียว

เนื่องจากกราฟ H ยอมให้มีเส้นมากกว่า 1 เส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดที่แตกต่างกัน

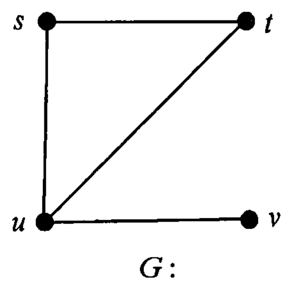
บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ $e=uv$ เป็นเส้นในกราฟ G จะกล่าวว่า

- จุด u **ประชิด(adjacent)** กับจุด v
- เส้น e **กระทบ(incident)** กับจุด u หรือกล่าวว่าจุด u **กระทบ**กับเส้น e
- ในทำนองเดียวกัน เส้น e **กระทบ**กับจุด v หรือกล่าวว่า จุด v **กระทบ**กับเส้น e
- เส้น e **เชื่อม(join)** จุด u และจุด v

กำหนดให้ e,f เป็นเส้นในกราฟ G โดยที่ $e\neq f$

- ถ้าเส้น e และ f กระทบกับจุดเดียวกันในกราฟ G แล้วจะกล่าวว่าเส้น e **ประชิด**กับเส้น f

ตัวอย่าง 2.3



รูปที่ 2.3 : กราฟ

s และ t เป็นจุดประชิดกัน เพราะมีเส้น st และ st กระทบ กับ s และ t

s และ u เป็นจุดประชิดกัน เพราะมีเส้น su และ su กระทบ กับ u และ s

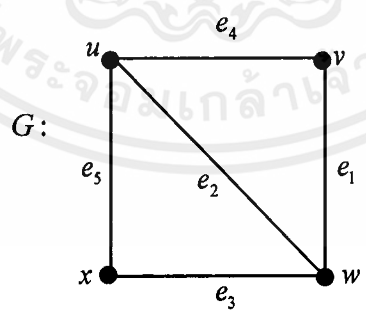
u และ v เป็นจุดประชิดกัน เพราะมีเส้น uv และ uv กระทบ กับ u และ v

u และ t เป็นจุดประชิดกัน เพราะมีเส้น ut และ ut กระทบ กับ u และ t

บทนิยาม 2.4 **ดีกรี(degree)** ของจุด v ในกราฟ G คือจำนวนเส้นที่กระทบกับจุด v ในกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\deg v$ หรือ $\deg_G v$ โดยเรียกจุด v ว่า

- **จุดคู่ (even vertex)** ถ้าดีกรีของจุด v เป็นจำนวนเต็มคู่
- **จุดคี่ (odd vertex)** ถ้าดีกรีของจุด v เป็นจำนวนเต็มคี่
- **จุดเอกเทศ (isolated vertex)** ถ้าดีกรีของจุด v เท่ากับ 0
- **จุดปลาย (end vertex)** ถ้าดีกรีของจุด v เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 2.4



รูปที่ 2.4 : กราฟอันดับ 4 และขนาด 5

จากรูปที่ 2.4 $\deg v = 2$ เพราะมีเส้น e_1 และ e_4 เชื่อมจุด v

$\deg x = 2$ เพราะมีเส้น e_3 และ e_5 เชื่อมจุด x

$\deg w = 3$ เพราะมีเส้น e_1, e_2 และ e_3 เชื่อมจุด w

$\deg u = 3$ เพราะมีเส้น e_2, e_4 และ e_5 เชื่อมจุด u

บทนิยาม 2.5 **ดีกรีต่ำสุด(minimum degree)**ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\delta(G)$ คือดีกรีที่ต่ำที่สุดของจุดเมื่อเปรียบเทียบกับดีกรีของจุดทุกจุดในกราฟ G นั่นคือ

$$\delta(G) = \min\{\deg v \mid v \in V(G)\}$$

ดีกรีสูงสุด(maximum degree)ของกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $\Delta(G)$ คือดีกรีที่สูงที่สุดของจุดเมื่อเปรียบเทียบกับดีกรีของจุดทุกจุดในกราฟ G นั่นคือ

$$\Delta(G) = \max\{\deg v \mid v \in V(G)\}$$

ตัวอย่าง 2.5 จากรูปที่2.4 จะได้ดีกรีต่ำสุดและดีกรีสูงสุด $\delta(G) = 2$ และ $\Delta(G) = 3$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท2.1 [1]ทฤษฎีบทแรกของทฤษฎีกราฟกำหนดให้ G เป็นกราฟที่มีขนาดจะได้ว่า m จะได้ว่า

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

ตัวอย่าง 2.6 จากรูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่า $\deg v = 2$, $\deg x = 2$, $\deg w = 3$, $\deg u = 3$

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$$

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = \deg v + \deg x + \deg w + \deg u = 10 = 2m$$

$$m = 5$$

ดังนั้นจำนวนเส้นของ G เป็น 5 เส้น

บทนิยาม 2.6 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G โดยที่จุด u และ v ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่แตกต่างกัน **แนวเดิน** $u-v$ ($u-v$ walk) ในกราฟ G คือลำดับของจุดและเส้นโดยที่

แนวเดิน $u-v: u=u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, ..., u_{k-1}, e_k, u_k = v$

ซึ่งเส้น $e_i = u_{i-1}u_i \in E(G)$ สำหรับแต่ละ i โดยที่ $i \in \{1,2,3,...,k\}$

ความยาว(length)ของแนวเดิน $u-v$ คือจำนวนเส้นในแนวเดิน $u-v$ โดยทั่วไปแนวเดิน $u-v$ นิยมเขียนเป็นลำดับของจุดเท่านั้น นั่นคือ

แนวเดิน $u-v: u=u_0, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k = v$

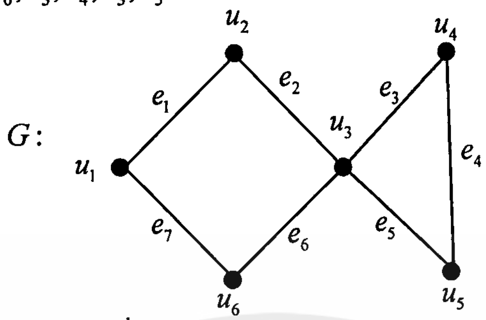
สำหรับแต่ละ i โดยที่ $i \in \{1,2,3,...,k\}$ จะได้ว่าเส้น $u_{i-1}u_i \in E(G)$ และกล่าวว่า

- เส้น $u_{i-1}u_i$ อยู่ในแนวเดิน $u-v$ นี้ หรือกล่าวว่าแนวเดิน $u-v$ บรรจุเส้น $u_{i-1}u_i$
- แนวเดิน $u-v$ นี้มีความยาวเป็น k
- กราฟ G บรรจุแนวเดิน $u-v$ หรือกล่าวว่ามีแนวเดิน $u-v$ อยู่ในกราฟ G
- จุด u เรียกว่า **จุดเริ่มต้น(beginning vertex)** และจุด v เรียกว่า **จุดสุดท้าย(ending vertex)** ของแนวเดิน $u-v$

หมายเหตุ

1. จุดทั้งหมดในแนวเดิน $u-v: u=u_0, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, u_k = v$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่แตกต่างกันในกราฟ G แต่อย่างไรก็ตาม เนื่องจากเส้น $u_{i-1}u_i \in E(G)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ i โดยที่ $i \in \{1,2,3,...,k\}$ จะได้ว่าจุด $u_{i-1} \neq u_i$
2. ถ้าจุดเริ่มต้น u และจุดสุดท้าย v เป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ $u=v$ แล้วแนวเดิน $u-u$ เรียกว่า **แนวเดินปิด(closed walk)** แต่ถ้า $u \neq v$ แล้วแนวเดิน $u-v$ เรียกว่า **แนวเดินเปิด(open walk)**

ตัวอย่าง 2.7 จากกราฟในรูปที่ 2.5 ลำดับ $u_1,e_7,u_6,e_6,u_3,e_3,u_4,e_3,u_3,e_5,u_5$ เป็นแนวเดิน u_1-u_5 ซึ่งมีความยาวเท่ากับ 5 เราเขียนแนวเดิน u_1-u_5 ได้ด้วย u_1,u_6,u_3,u_4,u_3,u_5



รูปที่ 2.5 : กราฟ G อันดับ 6 ขนาด 7

จากรูปที่ 2.5 u_1,u_2,u_3,u_6,u_1 เป็นแนวเดินปิด และ

u_1,u_2,u_3,u_6,u_5 เป็นแนวเดินเปิด

บทนิยาม 2.7 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G

รอยเดิน $u-v$ ($u-v$ trail) ในกราฟ G คือแนวเดิน $u-v$ ในกราฟ G ซึ่งไม่มีเส้นในแนวเดินซ้ำกัน

วิถี $u-v$ ($u-v$ path) ในกราฟ G คือแนวเดิน ในกราฟ G ซึ่งทุกๆ จุดในแนวเดิน $u-v$ ต้องแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 2.8 จากรูปที่ 2.5 $u_1,u_2,u_3,u_5,u_4,u_3,u_6$ เป็นแนวเดิน u_1-u_6 และเป็นรอยเดิน

u_1,u_2,u_3,u_6 เป็นแนวเดิน u_1-u_6 และเป็นวิถี

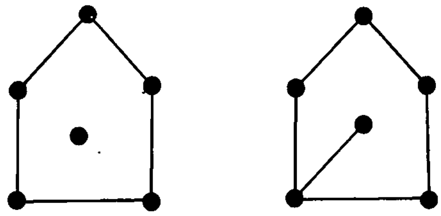
บทนิยาม 2.8 **ระยะทาง(distance)** ระยะระหว่างจุด u กับจุด v ในกราฟ G คือความยาวที่สั้นสุดของวิถี $u-v$ เมื่อเทียบกับความยาวของวิถี $u-v$ ทั้งหมดในกราฟ G ซึ่งเขียนแทนด้วย $d(u,v)$ หรือ $d_G(u,v)$

ตัวอย่าง 2.9 จากรูปที่ 2.5 ระยะทาง $d(u_1,u_6)=1$

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ u และ v เป็นจุดใดๆของกราฟ G จะได้ว่า

- ถ้ามีวิถี $u-v$ ในกราฟ G แล้วกล่าวว่า จุด u **เชื่อมโยง(connect)** กับจุด v หรือกล่าวว่าจุด u และจุด v **เชื่อมโยงกัน**
- ถ้าทุกๆสองจุดในกราฟ G เชื่อมโยงกันแล้ว กราฟ G เรียกว่า **กราฟเชื่อมโยง(connected graph)**

ตัวอย่าง 2.10 กราฟ G เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง เพราะมีจุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อมกับจุดยอดอื่นๆ กราฟ H เป็นกราฟเชื่อมโยง เพราะมีจุดยอดเชื่อมกันทุกจุดยอด



รูปที่ 2.6 : แสดงกราฟเชื่อมโยงและกราฟไม่เชื่อมโยง

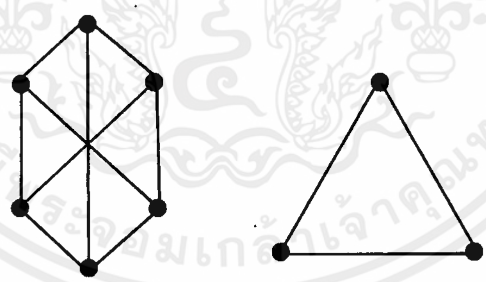
2.2.1 กราฟชนิดต่าง ๆ

บทนิยาม 2.10 กราฟ G เรียกว่า **กราฟปกติ(regular graph)** ถ้ากราฟ G มีดีกรีต่ำสุดเท่ากับดีกรีสูงสุดนั่นคือ $\delta(G)=\Delta(G)$

ถ้ากราฟปกติ G มี $\delta(G)=\Delta(G)=r$ แล้ว

กราฟปกติ เรียกอีกแบบว่า **กราฟปกติ-r** ($r-$regular graph)

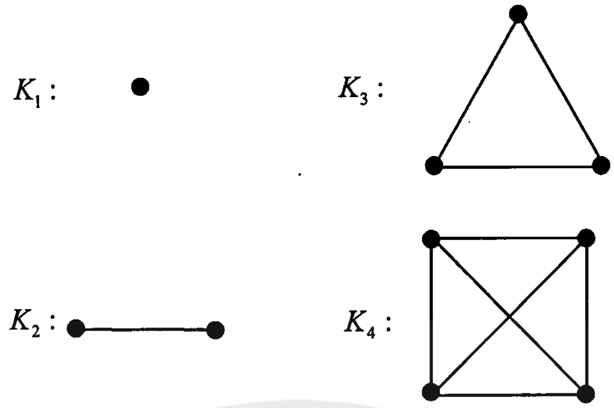
ตัวอย่าง 2.11 จากรูปที่ 2.7 จะเห็นได้ว่ากราฟ G มีทุกจุดดีกรีเป็น 3 และกราฟ F มีทุกจุดดีกรีเป็น 2



รูปที่ 2.7 : กราฟที่ทุกจุดกราฟนั้นมีดีกรีของจุดเท่ากัน

บทนิยาม 2.11 **กราฟแบบบริบูรณ์(complete graph)** ซึ่งเขียนแทนด้วย K_n คือกราฟที่มีอันดับ n โดยที่ทุกๆสองจุดแตกต่างกัน จะประชิดกัน

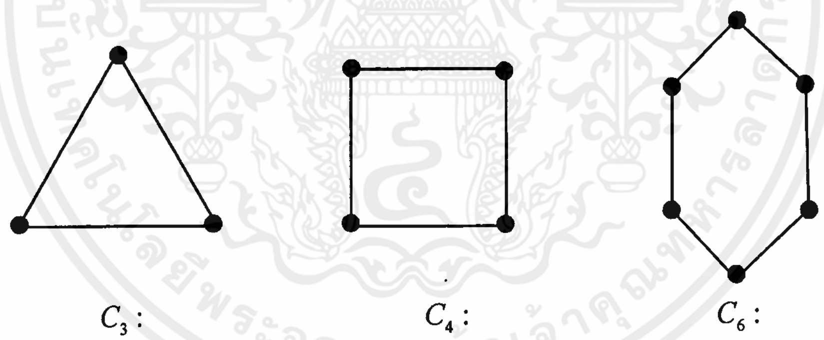
ตัวอย่าง 2.12



รูปที่ 2.8 : กราฟแบบบริบูรณ์ K_n เมื่อ $n=1,2,3,4$

บทนิยาม 2.12 **กราฟวง(cycle)** โดยเขียนแทนด้วย C_n เมื่อ $n \geq 3$ คือกราฟที่มีอันดับ n และขนาด n ซึ่งถ้ากำหนดชื่อจุดของกราฟวง C_n เป็น $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ แล้วจะได้ว่า เส้นของกราฟวง C_n คือ $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n$ และ v_nv_1

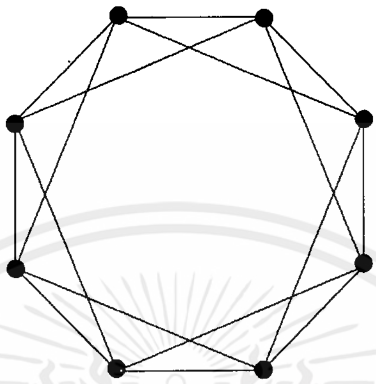
ตัวอย่าง 2.13 กราฟที่กำหนดให้ใน รูปที่ 2.9 แสดงกราฟ C_n เมื่อ $n=3,4,6$



รูปที่ 2.9 : กราฟวง C_n เมื่อ $n=3,4,6$

บทนิยาม 2.13 [6]**กราฟวงกำลัง (Cycle-Power Graph)** ใช้สัญลักษณ์ C_n^d เป็นกราฟที่มีจุด n จุดและ 2 จุดใดๆ u และ v ประชิดกันก็ต่อเมื่อระยะทางจุด u และ v ไม่เกิน d

ตัวอย่าง 2.14



C_8^2 :

รูปที่ 2.10 : กราฟวงกำลัง C_8^2

บทนิยาม 2.14 [7] **ฟังก์ชันพื้น (floor function)** ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ค่าของฟังก์ชันพื้นของ x เขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$

ฟังก์ชันเพดาน (ceiling function) ของจำนวนจริง x คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x ค่าของฟังก์ชันเพดานของ x เขียนแทนด้วย $\lceil x \rceil$

ตัวอย่าง 2.15 $\lfloor 3.4 \rfloor = 3$

$\lfloor 10 \rfloor = 10$

$\lceil 7.9 \rceil = 8$

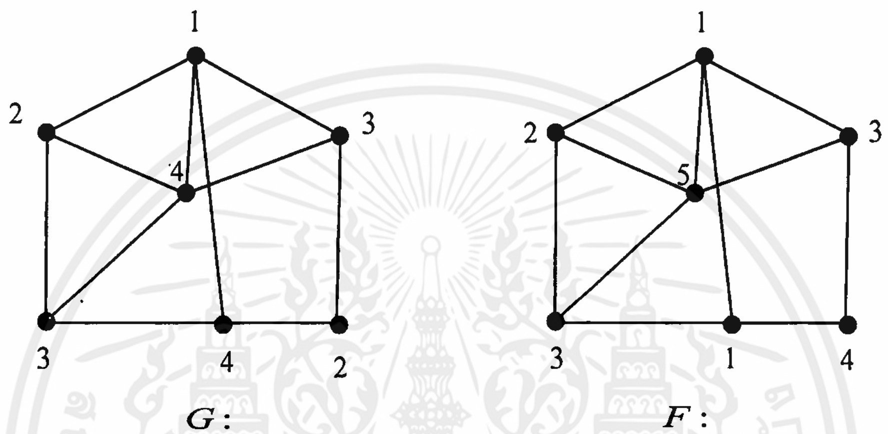
$\lceil 8.1 \rceil = 9$

2.2 การระบายสีและจำนวนอโครมาติก

บทนิยาม 2.15 [4] **การระบายสีจุดของกราฟ(a vertex coloring of a graph)** คือการกำหนดสีให้กับจุดของกราฟ โดยถ้าจุดสองจุดประชิดกัน จุดทั้งสองจะต้องมีสีต่างกัน

หมายเหตุ ในการกำหนดสีเราจะใช้ตัวเลขแทนสีต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

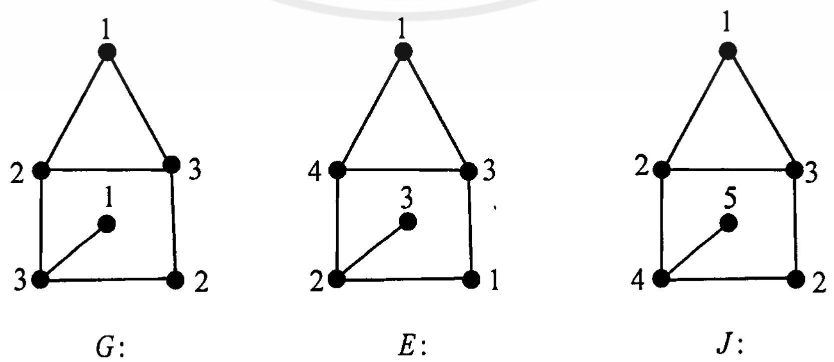
ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้ตัวเลข 1,2,3,4,5 คือสีของจุดนั้นๆ โดยที่กราฟ G สมสัณฐานกับกราฟ F แต่สามารถให้สีในจำนวนที่แตกต่างกันดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 : การระบายสีจุดให้กับกราฟ G และ F

บทนิยาม 2.16 [4]**การระบายสีสมบูรณ์(complete coloring)** คือการระบายสีให้กับจุดของกราฟ โดยสำหรับสองสี i และ j ใดๆจะมีคู่ของจุดที่ประชิดกันในกราฟที่จุดหนึ่งถูกระบายสี i และอีกจุดหนึ่งถูกระบายสี j

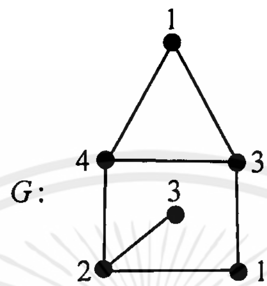
ตัวอย่าง 2.17 จากรูปที่ 2.12 จะเห็นได้ว่ากราฟ J มีจุดที่ระบายสีที่ 5 ที่ไม่ประชิดกับจุดที่ระบายสีที่ 1,2,3 ทำให้ไม่เป็นการระบายสีสมบูรณ์ แต่กราฟ G, E เป็นการระบายสีสมบูรณ์ เพราะว่าทุกสีมีเส้นถึงกัน



รูปที่ 2.12 : การระบายสีสมบูรณ์

บทนิยาม 2.17 [4]**จำนวนอโครมาติกของกราฟ** G (achromatic number of graph G) คือ จำนวนนับ k ที่มากที่สุดที่เราสามารถใช้สี k สีระบายสีสมบูรณ์ให้กับกราฟ G ได้ โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\Psi(G)$

ตัวอย่าง 2.18 จากรูปที่ 2.13 เราไม่สามารถระบายสีมากกว่า 4 สีให้กับกราฟ G ดังนั้น $\Psi(G) = 4$



รูปที่ 2.13 : กราฟ G ที่มีจำนวนอโครมาติกเป็น 4

ในการหาจำนวนอโครมาติกของกราฟได้มีผู้ศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3 [9]ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$\Psi\left(C_n^d\right) \le \sqrt{2|d|n} + 1$$

ทฤษฎีบท 2.4 [8]ให้ K_2, K_3 และ K_n เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ แล้ว

- $\Psi\left(K_2 \times K_n\right) = n+1$ เมื่อ $n \ge 3$
- $\Psi\left(K_3 \times K_n\right) = \begin{cases} 5 & ,n=3 \\ \left\lfloor \dfrac{3n}{2} \right\rfloor & ,n>3 \end{cases}$

ทฤษฎีบท 2.5 [8]ให้ K_h และ K_n เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ $h \ge 4$ แล้ว

$$\Psi\left(K_h \times K_n\right) \ge \begin{cases} h+n-1 & ,h=n \\ 2n - \left\lceil \dfrac{n}{h-1} \right\rceil & ,h \ne n \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.6 [8]ให้ $\Psi(G_1) = h$ และ $\Psi(G_2) = n$ แล้ว $\Psi(G_1 \times G_2) \ge \Psi(K_h \times K_n)$

ทฤษฎีบท 2.7 [8]สำหรับกราฟเชิงเดียว G และกราฟแบบบริบูรณ์ K_n โดยที่ $n \ge 2$ แล้ว

$$\Psi(G \times K_n) \ge \left\lceil \frac{n}{\Psi(G)} \right\rceil \cdot \Psi(G)$$

ทฤษฎีบท 2.8 [5]สำหรับกราฟ Central ของกราฟ Tadpole แล้ว

$$\Psi\left(C\left(\left(T_{m,n}\right)\right)\right)=\begin{cases}n+m & ,m\in N,n\leq 2\\ n+m-1 & ,m\in N,n>2\end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.9 [5]จำนวนอโครมาติกของกราฟ middle ของ $(T_{4,n})$ โดยที่ $n=1,2,\ldots$ จะได้ว่า

$$\Psi\left(M\left(\left(T_{4,n}\right)\right)\right)=\left\lfloor\frac{4+n}{3}\right\rfloor+4$$

ทฤษฎีบท 2.10 [5]จำนวนอโครมาติกของกราฟ Central ของกราฟ spider S_n โดยที่

$\forall n=2,3,\ldots$ จะได้ว่า $\Psi\left(C\left(S_n\right)\right)=2n+1$

นอกจากนี้ได้มีการศึกษาขอบเขตของจำนวนอโครมาติกของกราฟไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.11 [3]สำหรับกราฟเชิงเดียว G ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด และจำนวนเส้น m เส้นแล้ว

$$\Psi(G)\leq 2m/\sqrt{s^{+}}\leq 2m/\mu\leq 2R(G)$$

โดยที่ $\mu=\mu_1\geq\ldots\geq\mu_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G และ π เป็นช่วงที่ค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวกซึ่ง $s^{+}=\sum_{i=1}^{\pi}\mu_i^2$

และ $R(G)=\sum_{uv\in E(G)}\frac{1}{\sqrt{(\deg u)(\deg v)}}$

ทฤษฎีบท 2.12 [6]ให้กราฟวงกำลัง C_n^2 โดยที่มีจำนวน n จุด $1\leq k\leq n$ และ $k\in\mathbb{Z}^{+}$

$$A(C_n^2)=4(\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n})$$

บทที่ 3

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

3.1 การหาขอบเขตบนของอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2 โดยใช้ค่าลักษณะเฉพาะ

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนอโครติก โดยศึกษาจากงานวิจัย ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติก[3] ซึ่งค่าขอบเขตบนของงานวิจัยนี้จะต้องใช้ค่าลักษณะเฉพาะของกราฟ[6] เพื่อหาค่าขอบเขตบนจำนวนอโครมาติก

จากทฤษฎีบท 2.11 ได้กล่าวไว้ว่า

สำหรับกราฟเชิงเดียว G ที่มีจำนวนจุดยอด n จุด และจำนวนเส้น m เส้น แล้ว G

$$\Psi(G) \le 2m/\sqrt{s^+} \le 2m/\mu \le 2R(G)$$

โดยที่ $\mu = \mu_1 \ge \ldots \ge \mu_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G และ π เป็นช่วงที่ค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวกซึ่ง $s^+ = \sum_{i=1}^{\pi} \mu_i^2$

และ $R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{(\deg u)(\deg v)}}$

เราจะใช้อสมการ $\Psi(G) \le 2m/\sqrt{s^+}$ เนื่องจากว่าเป็นค่าขอบเขตบนที่ดีที่สุด

โดยที่เราจะสามารถหาค่าลักษณะเฉพาะได้จากทฤษฎีบท 2.12 [6]นั้นคือ

$$A(C_n^2) = 4(\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}) \text{ , } 1 \le k \le n \text{ และ } k \in \mathbb{Z}^+$$

จากต้องการหาตำแหน่ง k ที่ทำให้ค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นบวกของกราฟวงกำลัง C_n^2

พิจารณาอสมการ $E(C_n^2;k) > 0$

$$4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} > 0$$

$$\left(\cos\frac{4k\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n}\right) > 0$$

$$2\left(2\cos^2\frac{2k\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right) > 0$$

$$\left(2\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) > 0$$

พิจารณาค่าของ $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ ในช่วง $(-\infty,-1),\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ และ $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$

โดยเลือกค่า $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ ที่อยู่ในช่วงดังกล่าว

ช่วง	$\cos\dfrac{2k\pi}{n}$	$\left(2\cos\dfrac{2k\pi}{n}-1\right)\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}+1\right)$	ค่าของ $\left(2\cos\dfrac{2k\pi}{n}-1\right)\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}+1\right)$
$(-\infty,-1)$	-2	$(-5)(-1)=5$	+
$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$	0	$(-1)(1)=-1$	–
$\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$	1	$(1)(2)=2$	+

และเมื่อเลือกค่า ในช่วงดังกล่าวเพิ่มจะพบว่า $\left(2\cos\dfrac{2k\pi}{n}-1\right)\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}+1\right)$ มีค่าเป็นบวกเมื่อ $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ อยู่ในช่วง $(-\infty,-1)$ และ $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ แสดงคำตอบโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้

เราจะแบ่งเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ มีค่าอยู่ในช่วง $(-\infty,-1)$ แต่ $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ มีเรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์อยู่ในช่วง $[-1,1]$ ทำให้ได้ว่า ไม่มีค่า k ที่สอดคล้องกับอสมการนี้

กรณีที่ 2 $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ มีค่าอยู่ในช่วง $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ ซึ่ง $\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ มีเรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์อยู่ในช่วง $[-1,1]$ ทำให้ได้ว่า มีค่า k ที่สอดคล้องกับอสมการนี้

ทำให้ได้ว่า
$$-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+2\pi n_1\right)<\frac{2k\pi}{n}<\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}+2\pi n_1\right)$$
$$2\pi n_1-\frac{\pi}{3}<\frac{2k\pi}{n}<2\pi n_1+\frac{\pi}{3}$$
$$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)n< k <\left(n_1+\frac{1}{6}\right)n \text{ ---------------------------------(1)}$$

โดยที่ n_1 เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มศูนย์

เนื่องจากผลคูณของ n และ $\left(n_1-\frac{1}{6}\right)$ แล้วต้องได้ค่าที่สอดคล้องกับ k มีได้หลายกรณี เราจึงพิจารณากรณีย่อยทั้งหมดได้ 6 กรณี

<u>กรณีที่ 2.1</u> พิจารณา $n \equiv 1 \bmod 6$ จะได้ว่า $n = 7,13,19,\ldots,6q+1$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^+$

ทำให้อสมการที่ (1) ได้ $\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+1) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+1)$

พิจารณา $n_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+1) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+1)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q+1) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q+1)$$

$$-q-\frac{1}{6} < k < q+\frac{1}{6}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k < q+\frac{1}{6}$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k \le \left\lfloor q+\frac{1}{6} \right\rfloor$

$$1 \le k \le q$$

พิจารณา $n_1 = 1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+1) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+1)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q+1) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q+1)$$

$$5q+\frac{5}{6} < k < 7q+\frac{7}{6}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $5q+\frac{5}{6} < k \le 6q+1$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 5q+\frac{5}{6} \right\rceil \le k \le 6q+1$

$$5q+1 \le k \le 6q+1$$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+1) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+1)$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q+1) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q+1)$$

$$11q + \frac{11}{6} < k < 13q + \frac{13}{6}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$\left\lceil 11q + \frac{11}{6} \right\rceil \le k \le \left\lfloor 13q + \frac{13}{6} \right\rfloor$$

$$11q + 2 \le k \le 13q + 2$$

เนื่องจาก $n = 6q+1$ ทำให้ได้ว่า $$11\left(\frac{n-1}{2}\right) + 2 \le k$$

$$\frac{11n}{6} + \frac{1}{6} \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1 = 2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q$ และ $5q+1 \le k \le 6q+1$

ดังนั้นค่า $s^+ = \sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+1}^{6q+1} \mu_i^2$

<u>กรณีที่ 2.2</u> พิจารณา $n \equiv 2 \bmod 6$ จะได้ว่า $n = 8, 14, 20, \ldots, 6q+2$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^+$

ทำให้อสมการ (1) ได้ $$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+2) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+2)$$

พิจารณา $n_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+2) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+2)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q+2) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q+2)$$

$$-q - \frac{1}{3} < k < q + \frac{1}{3}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k < q + \frac{1}{3}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k \le \left\lfloor q + \frac{1}{3} \right\rfloor$$

$$1 \le k \le q$$

พิจารณา $n_1 = 1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+2) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+2)$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q+2) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q+2)$$
$$5q + \frac{5}{3} < k < 7q + \frac{7}{3}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $5q + \frac{5}{3} < k \le 6q+2$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 5q + \frac{5}{3} \right\rceil \le k \le 6q+2$

$$5q + 2 \le k \le 6q+2$$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+2) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+2)$$
$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q+2) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q+2)$$
$$11q + \frac{11}{3} < k < 13q + \frac{13}{3}$$
$$11q + \frac{11}{3} < k < 13q + \frac{13}{3}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 11q + \frac{11}{3} \right\rceil \le k \le \left\lfloor 13q + \frac{13}{3} \right\rfloor$

$$11q + 4 \le k \le 13q + 4$$

เนื่องจาก $n = 6q+2$ ทำให้ได้ว่า $11\left(\frac{n-2}{6}\right) + 4 \le k$

$$\frac{11n}{6} + \frac{1}{3} \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1 = 2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q$ และ $5q + 2 \le k \le 6q + 2$

ดังนั้นค่า $s^+ = \sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+2}^{6q+2} \mu_i^2$

<u>กรณีที่ 2.3</u> พิจารณา $n \equiv 3 \bmod 6$ จะได้ว่า $n = 9, 15, 21, \ldots, 6q+3$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^+$

ทำให้อสามการ (1) ได้ $\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+3) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+3)$

พิจารณา $n_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+3) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+3)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q+3) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q+3)$$

$$-q - \frac{1}{2} < k < q + \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k < q + \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k \le \left\lfloor q + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$1 \le k \le q$$

พิจารณา $n_1 = 1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+3) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+3)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q+3) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q+3)$$

$$5q + \frac{5}{2} < k < 7q + \frac{7}{2}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $$5q + \frac{5}{2} < k \le 6q+3$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$\left\lceil 5q + \frac{5}{2} \right\rceil \le k \le 6q+3$$

$$5q+3 \le k \le 6q+3$$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+3) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+3)$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q+3) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q+3)$$

$$11q + \frac{11}{2} < k < 13q + \frac{13}{2}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$\left\lceil 11q+\frac{11}{2}\right\rceil \le k \le \left\lfloor 13q+\frac{13}{2}\right\rfloor$$

$$11q+6 \le k \le 13q+6$$

เนื่องจาก $n=6q+3$ ทำให้ได้ว่า $$11\left(\frac{n-3}{6}\right)+6 \le k$$

$$\frac{11n}{6}+\frac{1}{2} \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1=2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q$ และ $5q+3 \le k \le 6q+3$

ดังนั้นค่า $s^+ = \sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+3}^{6q+3} \mu_i^2$

<u>กรณีที่ 2.4</u> พิจารณา $n \equiv 4 \bmod 6$ จะได้ว่า $n=10,16,22,\ldots,6q+4$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^+$

ทำให้อสมการ (1) ได้ $$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+4) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+4)$$

พิจารณา $n_1=0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+4) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+4)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q+4) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q+4)$$

$$-q-\frac{2}{3} < k < q+\frac{2}{3}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k < q+\frac{2}{3}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $$1 \le k \le \left\lfloor q+\frac{2}{3}\right\rfloor$$

$$1 \le k \le q$$

พิจารณา $n_1=1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1-\frac{1}{6}\right)(6q+4) < k < \left(n_1+\frac{1}{6}\right)(6q+4)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q+4) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q+4)$$

$$5q+\frac{10}{3} < k < 7q+\frac{10}{3}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $5q + \frac{10}{3} < k \le 6q + 4$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^{+}$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 5q + \frac{10}{3} \right\rceil \le k \le 6q + 4$

$$q + 4 \le k \le 6q + 4$$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+4) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+4)$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q+4) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q+4)$$

$$11q + \frac{22}{3} < k < 13q + \frac{26}{3}$$

เนื่องจากค่า $k \in \mathbb{Z}^{+}$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 11q + \frac{22}{3} \right\rceil \le k \le \left\lfloor 13q + \frac{26}{3} \right\rfloor$

$$11q + 8 \le k \le 13q + 8$$

เนื่องจาก $n = 6q + 4$ ทำให้ได้ว่า $11\left(\frac{n-4}{6}\right) + 8 \le k$

$$\frac{11n}{6} + \frac{2}{3} \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1 = 2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q$ และ $5q + 4 \le k \le 6q + 4$

ดังนั้นค่า $s^{+} = \sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+4}^{6q+4} \mu_i^2$

<u>กรณีที่ 2.5</u> พิจารณา $n \equiv 5 \bmod 6$ จะได้ว่า $n = 5, 11, 17, 23, \ldots, 6q+5$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^{0,+}$

ทำให้อสมการ (1) ได้ $\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+5) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+5)$

พิจารณา $n_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+5) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+5)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q+5) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q+5)$$

$$-q - \frac{5}{6} < k < q + \frac{5}{6}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k < q + \frac{5}{6}$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k \le \left\lfloor q + \frac{5}{6} \right\rfloor$

$$1 \le k \le q$$

พิจารณา $n_1 = 1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+5) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+5)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q+5) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q+5)$$

$$5q + \frac{25}{6} < k < 7q + \frac{35}{6}$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $5q + \frac{25}{6} < k \le 6q+5$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 5q + \frac{25}{6} \right\rceil \le k \le 6q+5$

$$5q+5 \le k \le 6q+5$$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q+5) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q+5)$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q+5) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q+5)$$

$$11q + \frac{55}{6} < k < 13q + \frac{65}{6}$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\left\lceil 11q + \frac{55}{6} \right\rceil \le k \le \left\lfloor 13q + \frac{65}{6} \right\rfloor$

$$11q+10 \le k \le 13q+10$$

เนื่องจาก $n = 6q+5$ ทำให้ได้ว่า $11\left(\frac{n-5}{6}\right) + 10 \le k$

$$\frac{11n}{6} + \frac{5}{6} \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1 = 2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q$ และ $5q+5 \le k \le 6q+5$

ดังนั้นค่า $s^+ = \sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+5}^{6q+5} \mu_i^2$ ในกรณีที่ $q = 0$ จะได้ $\sum_{i=1}^{q} \mu_i^2 = 0$

<u>กรณีที่ 2.6</u> พิจารณา $n \equiv 0 \bmod 6$ จะได้ว่า $n = 6, 12, 18, ..., 6q$ เมื่อ $q \in \mathbb{Z}^+$

ทำให้อสมการ (1) ได้ $\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q)$

พิจารณา $n_1 = 0$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q)$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)(6q) < k < \left(\frac{1}{6}\right)(6q)$$

$$-q < k < q$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k < q$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $1 \le k \le q-1$

พิจารณา $n_1 = 1$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)(6q) < k < \left(\frac{7}{6}\right)(6q)$$

$$5q < k < 7q$$

เนื่องจาก $1 \le k \le n$ ทำใหได้ว่า $5q < k \le 6q$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $5q + 1 \le k \le 6q$

พิจารณา $n_1 = 2$ จะได้ว่า

$$\left(n_1 - \frac{1}{6}\right)(6q) < k < \left(n_1 + \frac{1}{6}\right)(6q)$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)(6q) < k < \left(\frac{13}{6}\right)(6q)$$

$$11q < k < 13q$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $11q + 1 \le k \le 13q - 1$

เนื่องจาก $n = 6q$ ทำให้ได้ว่า $11\left(\frac{n}{6}\right) + 1 \le k$

$$\frac{11n}{6} + 1 \le k$$

แต่ $1 \le k \le n$ ทำให้ได้ว่าไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้นกรณี $n_1 = 2$ ไม่เป็นจริง

ทำให้ได้ว่า ค่าตำแหน่ง k มีค่าเป็นไปได้ 2 กรณี คือ $1 \le k \le q-1$ และ $5q+1 \le k \le 6q$

ดังนั้นค่า $s^+ = \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i^2 + \sum_{i=5q+1}^{6q} \mu_i^2$ ในกรณีที่ $q=1$ จะได้ $\sum_{i=1}^{q-1} \mu_i^2 = 0$

ดังนั้นจะได้ค่า s^+ จากสมการต่อไปนี้

$$s^+ = \begin{cases} \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+1}^{6q+1}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q \in \mathbb{Z}^+, n = 6q+1 \\ \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+2}^{6q+2}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q \in \mathbb{Z}^+, n = 6q+2 \\ \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+3}^{6q+3}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q \in \mathbb{Z}^+, n = 6q+3 \\ \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+4}^{6q+4}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q \in \mathbb{Z}^+, n = 6q+4 \\ \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+5}^{6q+5}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{Z}^{0,+}, n = 6q+5 \\ \sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+1}^{6q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q \in \mathbb{Z}^+, n = 6q \end{cases}$$

และแทนค่าในอสมการ $\Psi(C_n^2) \le 2m/\sqrt{s^+}$

ค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของจะเห็นได้ว่าหาได้ยาก เนื่องจาก s^+ ขึ้นอยู่กับค่า n

และจากทฤษฎีบท 2.3 ทำให้เราต้องการศึกษาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d ที่มีค่าที่ดีกว่า จึงได้ศึกษาในหัวข้อถัดไป

3.2 เงื่อนไขของการระบายสีสมบูรณ์กราฟปกติ $-r$

ในหัวข้อนี้เราศึกษา เงื่อนไขที่จำเป็นของการระบายสีสมบูรณ์ของกราฟปกติ $-r$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ $-r$ ที่มีจุด n จุดและ ระบายสีจุดด้วย k สี

ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil > n$ แล้วไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ k สี ให้กับกราฟ G

พิสูจน์

กำหนดให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ $-r$ ที่ระบายสีสมบูรณ์ด้วย k สี

และ A แทนด้วยเซตของสีโดยที่ $A=\{1,2,3,\ldots,k\}$ ให้ $u_{i,j}$ เป็นจุดที่ระบายสีที่ i ครั้งที่ j โดยที่ $i \in A$ $j=1,2,3,\ldots,n_{i,j}$ และ $n_{i,j}$ เป็นจำนวนจุดที่ระบายสี i

ฉะนั้น จะต้องมีจุดที่ระบายด้วยสีครบทุกสีในเซต A อย่างน้อย 1 จุด และประชิดกับจุดอย่างน้อย $k-1$ จุดโดยใช้สีที่แตกต่างกัน $k-1$ สี

ทำให้ได้ว่า $\sum_j \deg(u_{i,j}) \geq k-1$ สำหรับทุกๆจุดที่ระบายสี i

เนื่องจาก $\deg(u_{i,j}) = r$ นั้นคือ $\sum_j \deg(u_{i,j}) = r\,n_{i,j}$

จะได้ว่า $r\,n_{i,j} \geq k-1$

$$n_{i,j} \geq \frac{k-1}{r}$$

เนื่องจาก $n_{i,j}$ เป็นจำนวนเต็ม

ทำให้ได้ว่า $n_{i,j} \geq \left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil$

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_{i,j} = n_{1,j} + n_{2,j} + \ldots + n_{k,j} \geq k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil$$

ดังนั้น ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ $-r$ ที่มีจุดยอด n จุดและ ระบายสีจุดยอดด้วย k สี

ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil > n$ แล้วไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ k สี ให้กับกราฟ G

บทแทรก 3.1 ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ$-r$ ที่มีจุด n จุดเมื่อ ระบายสีจุดด้วย k สี ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$ และ k มากสุด แล้ว $\Psi(G) \leq k$

กำหนดให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ$-r$ ที่มีจุด n จุด ที่ระบายสีด้วย k สี

จากทฤษฎีบทเราทราบว่า ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil > n$ แล้วไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ k สี ให้กับกราฟ G เนื่องจากค่า k ที่สอดคล้องกับอสมการนี้มีเยอะมาก ดังนั้นเราจึงพิจารณาค่า k ที่ไม่สอดคล้องกับอสมการ $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil > n$ ซึ่งจะได้ว่า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$

ดังนั้น ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$ และ k และ $k \geq \Psi(G)$

3.3 ขั้นตอนวิธีการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$

ในการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$ จะใช้ทฤษฎีบทและบทแทรกในหัวข้อ 3.2 โดยเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในการหารค่าขอบเขตบนที่ดีที่สุด
เนื่องจากเราไม่ทราบว่ากราฟปกติ $-r$ มีค่า k ที่สูงสุดที่เท่าไหร่เราจึงหาค่าโดยประมาณโดยใช้

อสมการ $\quad k\left(\dfrac{k-1}{r}\right)\le n$

ทำให้ได้ว่า $\quad k^2-k-rn\le 0$

จาก $\quad \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

จะได้ว่า $\quad \dfrac{1-\sqrt{1+4rn}}{2}\le k\le\dfrac{1+\sqrt{1+4rn}}{2}$

เนื่องจาก $k\in\mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\quad k\le\left\lfloor\dfrac{1+\sqrt{1+4rn}}{2}\right\rfloor$

การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0\le\left\lfloor\dfrac{1+\sqrt{1+4rn}}{2}\right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0=k$ แล้วแทนใน $k\left\lceil\dfrac{k-1}{r}\right\rceil\le n$

ขั้นตอนที่ 3. ถ้าเป็นจริงให้หยุด แล้วจะได้ค่าขอบเขตบนออกมา แต่ถ้าไม่เป็นจริง k_0-1 แล้ว

แทนค่าใหม่ลงใน $k\left\lceil\dfrac{k-1}{r}\right\rceil\le n$ จนกว่าจะเป็นจริง

เนื่องจากกราฟวงกำลัง C_n^d เป็นกราฟปกติ $-r$ โดยที่มีดีกรีเป็น $2d$ เราสามารถใช้ขั้นตอนวิธีในการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$ ดังมี มีขั้นตอนวิธีดังนี้

การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0\le\left\lfloor\dfrac{1+\sqrt{1+8dn}}{2}\right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0=k$ แล้วแทนใน $k\left\lceil\dfrac{k-1}{2d}\right\rceil\le n$

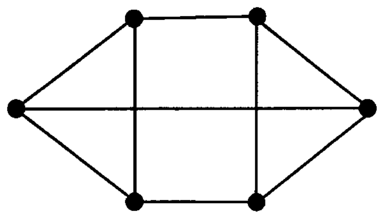
ขั้นตอนที่ 3. ถ้าเป็นจริงให้หยุด แล้วจะได้ค่าขอบเขตบนออกมา แต่ถ้าไม่เป็นจริง k_0-1 แล้ว

แทนค่าใหม่ลงใน $k\left\lceil\dfrac{k-1}{2d}\right\rceil\le n$ จนกว่าจะเป็นจริง

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่าง การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$ และกราฟวงกำลัง C_n^2 โดยที่ $n=9,14,16$ และกราฟวงกำลัง C_n^4 โดยที่ $n=9$

ตัวอย่าง 3.1 ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ-3 ดังรูปที่ 3.1

ในการหาค่าขอบเขตบนของอโครมาติกของกราฟ G มีขั้นตอนดังนี้



$G:$

รูปที่ 3.1 : กราฟ G เป็นกราฟปกติ-3

เนื่องจากกราฟ G เป็นกราฟปกติ-3 จะได้ว่า $r=3$ และ $n=6$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4rn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4(3)(6)}}{2} \right\rfloor = 4$

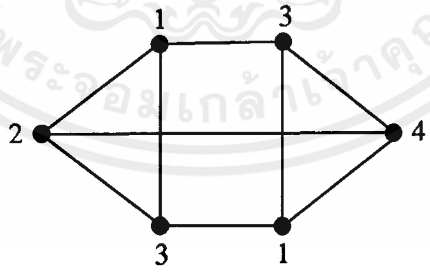
ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$

$4\left\lceil \frac{4-1}{3} \right\rceil \le 6$

$4 \le 6$ เป็นจริง

ทดสอบด้วยการระบายสี

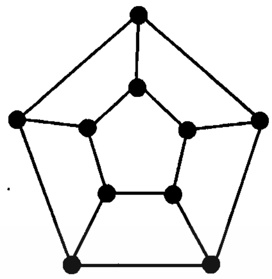


รูปที่ 3.2 :การระบายสีสมบูรณ์กราฟ G

ระบายได้ 4 สีจริง ทำให้ได้ว่า $\Psi(G)=4$

ตัวอย่าง 3.2 ให้กราฟ P เป็นกราฟปกติ -3 ดังรูปที่ 3.2

ในการหาค่าขอบเขตบนของอโครมาติกของกราฟ P มีขั้นตอนดังนี้



$P:$

รูปที่ 3.3 : กราฟ P เป็นกราฟปกติ -3

เนื่องจากกราฟ P เป็นกราฟปกติ -3 จะได้ว่า $r=3$ และ $n=10$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \leq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4rn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4(3)(10)}}{2} \right\rfloor = 6$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$

$6\left\lceil \frac{6-1}{3} \right\rceil \leq 10$

$12 \leq 10$ เป็นเท็จ

ขั้นตอนที่ 3. ให้ $k_0 - 1 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$

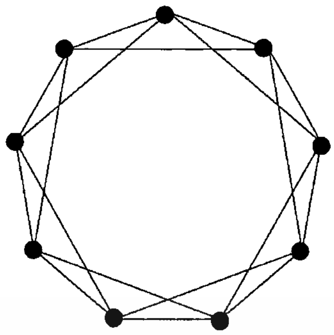
$5\left\lceil \frac{5-1}{3} \right\rceil \leq 10$

$10 \leq 10$ เป็นจริง

ไม่สามารถแสดงการระบายออกมาได้ ทำให้ได้ว่า $\Psi(P) \leq 5$

หมายเหตุ [1]กราฟ P ในรูปที่ 3.3 มีชื่อเฉพาะว่า**กราฟปิเตอร์เซน**(Petersen graph)

ตัวอย่าง 3.3 ในการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_9^2 มีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 3.4 : กราฟวงกำลัง C_9^2

เนื่องจากกราฟในรูปที่ 3.4 เป็นกราฟวงกำลัง C_9^2 จะได้ว่า $d=2, r=4$ และ $n=9$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \leq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8dn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4(4)9}}{2} \right\rfloor = 6$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$

$6\left\lceil \frac{6\text{-}1}{4} \right\rceil \leq 9$

$12 \leq 9$ เป็นเท็จ

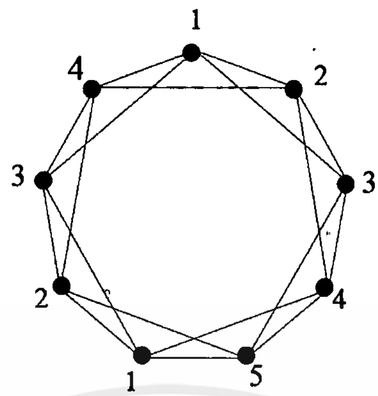
ขั้นตอนที่ 3. ให้ $k_0 - 1 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \leq n$

$5\left\lceil \frac{5-1}{4} \right\rceil \leq 9$

$5 \leq 9$ เป็นจริง

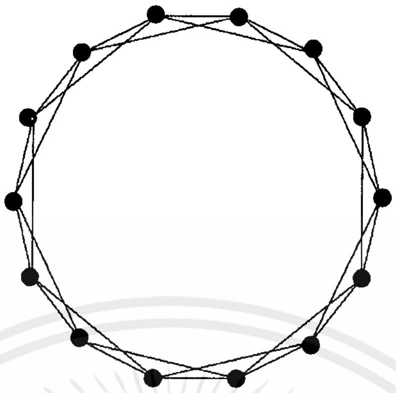
ทดสอบการระบายสี



รูปที่ 3.5 : การระบายสีสมบูรณ์กราฟวงกำลัง C_9^2

ระบายได้ 5 สีจริง ทำให้ได้ว่า $\Psi\left(C_9^2\right)=5$

ตัวอย่าง 3.4 ในการหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_{14}^2 มีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 3.6 : กราฟวงกำลัง C_{14}^2

เนื่องจากกราฟในรูปที่ 3.6 เป็นกราฟวงกำลัง C_{14}^2 จะได้ว่า $d = 2, r = 4$ และ $n = 14$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8dn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(2)(14)}}{2} \right\rfloor = 8$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

จาก $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$

$8\left\lceil \frac{8-1}{4} \right\rceil \le 14$

$16 \le 14$ เป็นเท็จ

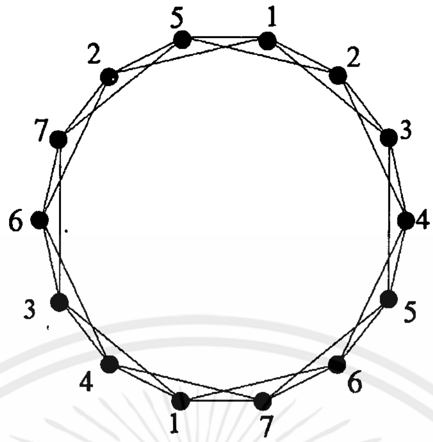
ขั้นตอนที่ 3. จาก $k_0 - 1 = k$

$k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$

$7\left\lceil \frac{7-1}{4} \right\rceil \le 14$

$14 \le 14$ เป็นจริง

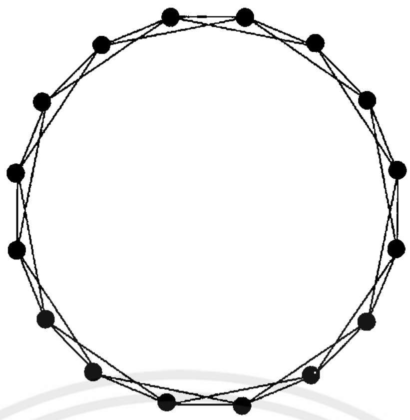
ทดสอบการระบายสี



รูปที่ 3.7 : การระบายสีสมบูรณ์กราฟวงกำลัง C_{14}^2

ระบายได้ 7 สีจริง ทำให้ได้ว่า $\Psi\left(C_{14}^2\right)=7$

ตัวอย่าง 3.5 ในการหาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_{16}^2 มีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 3.8 : กราฟวงกำลัง C_{16}^2

เนื่องจากกราฟในรูปที่ 3.8 เป็นกราฟวงกำลัง C_{16}^2 จะได้ว่า $d=2, r=4$ และ $n=16$

ขั้นตอนที่ 1. จาก $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8dn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(2)(16)}}{2} \right\rfloor = 8$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

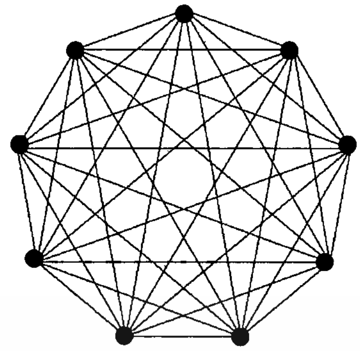
จาก $$k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$$

$$8\left\lceil \frac{8-1}{4} \right\rceil \le 16$$

$$16 \le 16$$ เป็นจริง

ไม่สามารถแสดงการระบายออกมาได้ ทำให้ได้ว่า $\Psi\left(C_{16}^2\right) \le 8$

ตัวอย่าง 3.6 ในการหาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_9^4 มีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 3.9 : กราฟวงกำลัง C_9^4

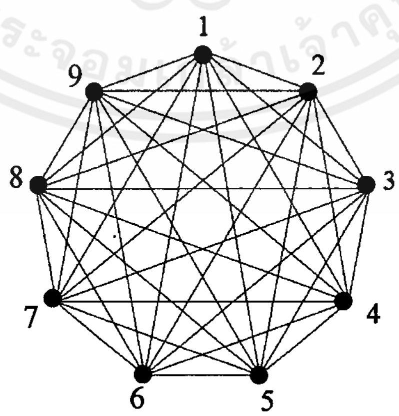
เนื่องจาก $C_9^4 \cong K_9$ เราสามารถตอบ $\Psi(C_9^4)=9$ แต่ก็สามารถหาค่าโดยขั้นตอนได้ดังนี้ เนื่องจากกราฟในรูปที่ 3.9 เป็นกราฟวงกำลัง C_9^4 จะได้ว่า $d=4, r=8$ และ $n=9$

ขั้นตอนที่ 1. จาก $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8dn}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8(4)(9)}}{2} \right\rfloor = 9$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$

จาก
$$k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$$
$$9\left\lceil \frac{9-1}{8} \right\rceil \le 9$$
$$9 \le 9$$ เป็นจริง

ทดสอบการระบายสี



รูปที่ 3.10 : การระบายสีสมบูรณ์กราฟวงกำลัง C_9^4

ระบายได้ 9 สีจริง ทำให้ได้ว่า $\Psi\left(C_9^4\right)=9$

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d เราจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนได้ดังนี้

ส่วนที่ 1 เนื่องจากค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลัง C_n^2 นั้นหาได้ยากเนื่องจากขึ้นอยู่กับ จำนวนจุดของกราฟวงกำลัง C_n^2 ยิ่งมีจำนวนจุดมากยิ่งทำให้เมทริกซ์ประชิดขนาดใหญ่ แต่เราสามารถหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลัง C_n^2 ได้จากทฤษฎีบท 2.12 ซึ่งอยู่ในฟังก์ชันโคไซน์ได้ และเนื่องจากค่า s^+ เป็นผลรวมกำลังสองของค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นจำนวนจริงบวก เราจึงหากรณีต่างๆของค่าลักษณะเฉพาะของกราฟวงกำลัง C_n^2 ที่เป็นจำนวนจริงบวกทำให้ เราสามารถหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^2 ได้จาก $\Psi(C_n^2) \le 2m/\sqrt{s^+}$ ซึ่งเราได้ค่า s^+ ดังนี้

$$
s^+ = \begin{cases}
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+1}^{6q+1}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q\in\mathbb{Z}^+, n=6q+1 \\
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+2}^{6q+2}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q\in\mathbb{Z}^+, n=6q+2 \\
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+3}^{6q+3}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q\in\mathbb{Z}^+, n=6q+3 \\
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+4}^{6q+4}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q\in\mathbb{Z}^+, n=6q+4 \\
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+5}^{6q+5}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k\in\mathbb{Z}^+, q\in\mathbb{Z}^{0,+}, n=6q+5 \\
\sum_{k=1}^{q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sum_{k=5q+1}^{6q}\left(4\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 & k,q\in\mathbb{Z}^+, n=6q
\end{cases}
$$

ค่าที่ได้เป็นค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติก C_n^2 ที่ไม่ดีเพราะทฤษฎีบท 2.11 เป็นขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกที่ไม่ดี เราจึงไม่ได้ใช้ทฤษฎีบท 2.11 ในการหาขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^4

ส่วนที่ 2 เราได้ศึกษาการระบายสีสมบูรณ์ของกราฟปกติ $-r$ ได้ทฤษฎีบท 3.1 และบทแทรก 3.1 โดยมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ $-r$ ที่มีจุด n จุดและ ระบายสีจุดด้วย k สี

ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil > n$ แล้วไม่สามารถระบายสีสมบูรณ์ k สี ให้กับกราฟ G

บทแทรก 3.1 ให้กราฟ G เป็นกราฟปกติ $-r$ ที่มีจุด n จุดเมื่อ ระบายสีจุดด้วย k สี

ถ้า $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$ และ k มากสุด แล้ว $\Psi(G) \le k$

เนื่องจากหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$ หาได้ไม่ดีเราจึงสร้างขั้นตอนวิธีในการหารขอบบนของจำนวนอโคมาติกของกราฟปกติ $-r$ ดังนี้

การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟปกติ $-r$

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4rn}}{2} \right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$ แล้วแทนใน $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$

ขั้นตอนที่ 3. ถ้าเป็นจริงให้หยุด แล้วจะได้ค่าขอบเขตบนออกมา แต่ถ้าไม่เป็นจริง $k_0 - 1$ แล้ว

แทนค่าใหม่ลงใน $k\left\lceil \frac{k-1}{r} \right\rceil \le n$ จนกว่าจะเป็นจริง

เนื่องจากกราฟวงกำลัง C_n^d เป็นกราฟปกติดีกรี $-r$ เราจึงสร้างขั้นตอนหาค่าขอบเขตบนของกราฟวงกำลัง C_n^d ได้ดังนี้

การหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d

ขั้นตอนที่ 1. หาค่า $k_0 \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+8dn}}{2} \right\rfloor$

ขั้นตอนที่ 2. ให้ $k_0 = k$ แล้วแทนใน $k\left\lceil \frac{k-1}{2d} \right\rceil \le n$

ขั้นตอนที่ 3. ถ้าเป็นจริงให้หยุด แล้วจะได้ค่าขอบเขตบนออกมา แต่ถ้าไม่เป็นจริง $k_0 - 1$ แล้ว

แทนค่าใหม่ลงใน $k\left\lceil \frac{k-1}{2d} \right\rceil \le n$ จนกว่าจะเป็นจริง

4.2 ข้อเสนอแนะ

เราหาค่าขอบเขตบนของจำนวนอโครมาติกของกราฟวงกำลัง C_n^d และกราฟปกติ $-r$ ตามที่ได้เสนอข้างต้นแต่ยังมีกราฟอื่นๆ ที่ยังไม่สามารถหาขอบบนของจำนวนอโครมาติก

เอกสารอ้างอิง

[1] วรานุช แขมมณี, **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น** ,1, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พ.ศ. 2559

[2] Aparna K M, Henila Correya and Manjusha P, **Achromatic Number of Some Graphs,** International Journal of Pure and Applied Mathematics, Amrita Vishwa Vidyapeetham, India, 2018

[3] Baoyindureng Wu and Clive Elphick, **Upper bounds for the achromatic and coloring numbers of a graph**,P.R. China, Xinjiang University

[4] Frnak Harary and Stephen Hedetniemi, **The achromatic number of a graph,** Received September 1, 1968

[5] G. MacGiltivraya, A. Rodriguezb, **The achromatic number of the union of paths,** British Columbia, Canada V8W 3P4, 2000

[6] Nititphoom Adsawatithisakul and Decha Samana, **Determinant of Adjacency Marix of Square Cycle Graph,** Bangkok, 2013

[7] Kenneth H. Rosen, Discrete **Mathematies and Its Applications** , McGraw-Hill Education, Laboratories, 2007

[8] Nam-Po Chiang and Hung-Lin Fu, **On The Achromatic Number of The Cartesian Product** $G_1 \times G_2$,Taiwan, 1992

[9] Michal Debski, Zbigniew Lonc and Pawel Rzazewski , **Achromatic and Harmoniosu Colorings of Circulant Graphs,** Poland,Published online in Wiley Onlind Library,2017