ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

ON PARTICULAR SOLUTION OF CONSTANT COEFFICIENTS FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ขจรศักดิ์ พยัคฆวงศ์

เจษฎา ใจร้าย

ณัฐพงศ์ รัตนะ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

ON PARTICULAR SOLUTION OF CONSTANT COEFFICIENTS FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

KAJOHNSUK PAYAKAWONG

JESSADA JAIRAI

NATHAPONG RATANA

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2018

ชื่อหัวข้อ	ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่
	ON PARTICULAR SOLUTION OF CONSTANT COEFFICIENTS FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
ชื่อนักศึกษา	นายขจรศักดิ์ พยัคฆวงศ์ รหัสนักศึกษา 58050020
	นายเจษฎา ใจร้าย รหัสนักศึกษา 58050030
	นายณัฐพงศ์ รัตนะ รหัสนักศึกษา 58050056
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

คณะกรรมการสอบ	**ลายมือชื่อ**
ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง ประธานกรรมการ	ภูษณิศา ล้อมทอง
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	พรชัย ชัยสนิท
ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ชื่อหัวข้อ ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่
ON PARTICULAR SOLUTION OF CONSTANT COEFFICIENTS FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ชื่อนักศึกษา นายขจรศักดิ์ พยัคฆวงศ์ รหัสนักศึกษา 58050020
นายเจษฎา ใจร้าย รหัสนักศึกษา 58050030
นายณัฐพงศ์ รัตนะ รหัสนักศึกษา 58050056

ภาควิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ศึกษาการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามดีกรี l, k ตามลำดับและ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

คำสำคัญ : สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 4 สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

Title ON PARTICULAR SOLUTION OF CONSTANT COEFFICIENTS FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Students Mr. KAJOHNSUK PAYAKAWONG Student ID 58050020

Mr. JESSADA JAIRAI Student ID 58050030

Mr. NATHAPONG RATANA Student ID 58050056

Degree Bachelor of Science (Applied Mathematics)

Department Applied Mathematics

Faculty Science

University King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)

Academic Year 2018

Advisor Asst.Prof.Kanognudge Wuttanachamsri

Abstract

This special problem investigates an particular solution of constant coefficients ordinary differential equations when the right-hand function is in the form of $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ where α is a real number and a root of $\pm\alpha i$ are not root of the differential equation and $f(x)$ and $g(x)$ are polynomials degrees l, k, respectively.

Keyword : LINEAR FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS , CONSTANT COEFFICIENTS

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความร่วมมือ และความสามัคคีของทุกๆท่าน รวมไปถึงได้รับคำปรึกษาและคำแนะนำที่ดีจาก ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง และอ.พรชัย ชัยสนิท ที่ให้ความช่วยเหลือ แก้ไขข้อผิดพลาดต่างๆที่เกิดจนสามารถทำให้ปัญหาพิเศษสำเร็จไปได้ด้วยดี ท้ายสุดนี้ขอขอบคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ให้ความช่วยเหลือและความ สะดวกในการศึกษางานวิจัยและถ่ายทอดวิชาความรู้อันเป็นประโยชน์ในการศึกษางานวิจัยและประยุกต์ใช้งานต่อไป

ขจรศักดิ์ พยัคฆวงศ์
เจษฎา ใจร้าย
ณัฐพงศ์ รัตนะ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	จ
สารบัญรูปภาพ	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	2
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	4
2.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	6
2.2.1 ผลเฉลยทั่วไป และผลเฉลยเฉพาะ	6
2.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง	7
2.2.2.1 สมการแบบแยกตัวแปลได้	7
2.2.2.2 สมการเอกพันธุ์	8
2.2.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่	9
2.2.4 วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์	11
2.3 เมทริกซ์	13
2.3.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์	13
2.3.2 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	13
2.3.3 เมทริกซ์สามเหลียม	14
2.3.4 เมทริกซ์โทพลิทซ์	15

หน้า

2.3.5 เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน 15

2.3.6 เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมล่าง 16

2.3.7 อินเวอร์สของเมทริกซ์ 26

บทที่ 3 การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบพหุนามดีกรี m 20

บทที่ 4 การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และ ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ 28

บทที่ 5 การคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ ด้วยโปรแกรม Visual Basic 50

5.1 การเขียนโปรแกรมคำนวณการหาผลเฉลยเฉพาะ 51

5.1.1 การสร้างหน้าต่างโปรแกรม 51

5.1.2 การเขียน Code คำนวณโปรแกรม 51

5.1.3 การเขียน Code ล้างหน้าต่างโปรแกรม 55

5.1.4 การเขียน Code ปิดโปรแกรม 55

บทที่ 6 สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ 58

เอกสารอ้างอิง 60

Appendix 61

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1 ระยะเวลาการดำเนินงาน	3

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

5.1 หน้าต่างโปรแกรม 51

5.2 ตัวอย่าง 5.1 56

5.3 ตัวอย่าง 5.2 57

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นได้มีการประยุกต์ใช้ในหลายปัญหา เช่น การคำนวณการเพิ่มขึ้นของจำนวนเชื้อราหรือแบคทีเรีย คำนวณราคาหุ้นในอนาคตหรือด้านประกันภัย ฯลฯ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้น ผลเฉลยสามารถหาได้ไม่ยาก ทั้งวิธีการหาผลเฉลยจริงและวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ $n, n > 1$ สามารถหาผลเฉลยได้ค่อนข้างยากโดยเฉพาะ n มีค่ามากๆ ดั้งนั้นในโครงงานวิจัยที่เราจะแสดงถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ซึ่งอยู่ในรูปแบบของพหุนามที่มีค่าสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือเขียนอยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ ดังนี้

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x \tag{1.1}$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i; \qquad (l = 0,1,2, \dots) \tag{1.2}$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i; \qquad (k = 0,1,2, \dots) \tag{1.3}$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และสมการช่วยของสมการ (1.1) ไม่มีรากเป็น $\pm\alpha i$

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือเป็นพหุนามดีกรี m โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

2. เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปของสมการ (1.2) และ (1.3) โดยที่ l และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. ประยุกต์ใช้เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือคือพหุนามดีกรี m โดยประยุกต์ใช้เมทริกซ์โพพลิทซ์สามเหลียมบน

2. ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ในรูปแบบสมการ (1.1) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ทำการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์และหาผลเฉลยทั่วไป

2. ทำการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์และหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อฟังก์ชันทางขวามือเป็นพหุนามดีกรี m โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

3. หาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันขวามือเขียนอยู่ในรูป $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามดีกรี l และ k ตามลำดับและ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา โดยที่ l และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

4. สรุปผลที่ได้

5. จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. สามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

3. สามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เมื่อฟังก์ชันทางขวามือเป็นพหุนามดีกรี m โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

4. สามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ที่ฟังก์ชันทางขวามือคือ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามดีกรี l และ k ตามลำดับและ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา โดยที่ l และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ หรือศูนย์

ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาดำเนินการ

กิจกรรมการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี2561					ปี2562				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ล.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และหาผลเฉลยทั่วไป	↔	↔								
หาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ที่มีสัมประสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือเขียนอยู่ในรูป $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$		↔	↔	↔	↔	↔				
สรุปผลที่ได้							↔	↔		
จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษพร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ								↔	↔	
นำเสนอปัญหาพิเศษ										↔

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานและบทนิยามที่สำคัญซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษดังนี้

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations)
2. ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
3. เมทริกซ์ (matrix)

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และจะกล่าวถึงนิยามของอันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และรวมถึงบทนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ต่อไปเราจะให้บทนิยามต่างๆดังนี้ [1]

บทนิยาม เราเรียกสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ(หนึ่งตัวแปร) และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation)**

<u>**ตัวอย่าง 2.1.1**</u> สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = \log x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = 3x$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 - y^2$

y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

บทนิยาม เราเรียกอันดับของอนุพันธ์ที่สูงสุดซึ่งปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **อันดับ (order)** ของสมการเชิงอนุพันธ์และเราเรียกเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับที่สูงสุดซึ่งปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **ระดับขั้น (degree)**

<u>ตัวอย่าง 2.1.2</u> อันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์

1. $\frac{dy}{dx} = 3y$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับ 1 ระดับขั้น 1
2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับ 1 ระดับขั้น 2
3. $2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 3$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับ 2 ระดับขั้น 1

บทนิยามต่อไปนี้จะอธิบายสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น [1] ดังนี้

บทนิยาม สมการเชิงอนุพันธ์เป็น **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ถ้า

1. ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)**

<u>ตัวอย่าง 2.1.3</u>

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^3y + \cos x$ **สมการเชิงเส้น**
2. $\frac{dy}{dx} = xy$ **สมการเชิงเส้น**
3. $\sqrt{\frac{dy}{dx}} = xy$ **สมการไม่เชิงเส้น**
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$ **สมการไม่เชิงเส้น**

ต่อไปจะนิยามสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ สมการเอกพันธุ์ และสมการไม่เอกพันธุ์ นิยามต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ [1]

บทนิยาม เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (constant coefficient ordinary differential equation of order n)** ถ้าสามารถจัด สมการให้อยู่ในรูป

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{2.1}$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงที่ และ $a_n \neq 0$

ถ้า $f(x) \neq 0$ เรียกสมการ (2.1) ว่า**สมการไม่เอกพันธุ์(nonhomogeneous equation)**

ถ้า $f(x) = 0$ เรียกสมการ (2.1) ว่า**สมการเอกพันธุ์(homogeneous equation)**

<u>ตัวอย่าง 2.1.4</u>

1. $2y'' + 3y' + 4y = \sin x$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 และเป็นสมการไม่เอกพันธุ์
2. $5y' + 3y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 และเป็นสมการเอกพันธุ์

2.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ในหัวข้อนี้จะอธิบายเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (y)ซึ่งประกอบไปด้วยผลเฉลยทั่วไป (y_c) กับ ผลเฉลยเฉพาะ (y_p) การหาผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่ง และการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

2.2.1 ผลเฉลยทั่วไป และผลเฉลยเฉพาะ (general and particular solutions)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งสามารถหาผลเฉลยได้ไม่ยากนัก ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างที่แสดงถึงผลเฉลยทั่วไป และผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เป็นอันดับที่หนึ่ง ดังนี้

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u> หาผลเฉลยทั่วไป

สมการช่วย $P(\lambda) = \lambda = 0$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยทั่วไป $y_c = c$

หาผลเฉลยเฉพาะ

$$y_p = \int \frac{2x}{(x-1)} dx$$

ให้ $u = x - 1$

$$y_p = 2u + 2\ln|u|$$

เนื่องจากผลเฉลยคือ $y = y_c + y_p$

ดังนั้น $y = 2u + 2\ln|u| + c$

$y = 2x + 2\ln|x-1| - 2 + c$

2.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง (First-order ODEs)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลย และแนวคิดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

วิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีมากมายแต่ละวิธีจะมีความเหมาะสมกับสมการแต่ละแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งหัวข้อนี้จะขอยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมา 2 แบบ คือ แบบแยกตัวแปรได้ และแบบเอกพันธุ์ ดังต่อไปนี้

2.2.2.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Variables Equations)

หัวข้อนี้เราจะศึกษาว่าจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ โดยบทนิยามต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้

บทนิยาม เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ (separable differential equations)** หรือเรียกสั้นๆว่า **สมการแบบแยกตัวแปรได้ (separable equations)** ถ้าสมการสามารถเขียนได้ในรูป [1]

$$Mdx + N\,dy = 0$$

โดยที่ $M(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $N(y)$เป็นฟังก์ชันของ y ซึ่งจะหาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตจะได้ผลเฉลยในรูป

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

<u>**ตัวอย่าง 2.2.2**</u> จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(y+1)^2}$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(y+1)^2}$$

จัดสมการใหม่ได้เป็น $(y+1)^2dy - x^3dx = 0$

นั่นคือ $(y+1)^2dy = x^3dx$

จะได้ $\int (y+1)^2dy = \int x^3dx$

ดังนั้น $\frac{(y+1)^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c_1$ หรือ $4(y+1)^3 = 3x^4 + c_2$ เมื่อ $c_2 = \frac{4}{3}c_1$

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง ที่ได้กล่าวมาจะเห็นว่าเราสามารถหาผลเฉลยได้โดยต้องทราบว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นแบบใด แล้วจึงจะใช้ขั้นตอนวิธีการที่เหมาะกับแบบของสมการนั้น ๆ และหัวข้อต่อถัดไปจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบสมการเอกพันธุ์ดังนี้

2.2.2.2 สมการเอกพันธุ์ (Homogeneous Equations)

เพื่อความเข้าใจในการพิจารณาสมการเอกพันธุ์ ขอแนะนำบทนิยามฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นที่ n ที่เป็นหลักในการพิจารณาสมการเสียก่อน แล้วจึงจะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

บทนิยาม เราเรียกฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า **ฟังก์ชันเอกพันธุ์ ระดับขั้นที่ n** (homogeneous functions of degree n) ก็ต่อเมื่อ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆที่ไม่ใช่ 0 [2]

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> จงแสดงว่า $f(x,y) = x^4 - x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 4

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า
$$f(kx,ky) = (kx)^4 - (kx)^3(ky) = k^4x^4 - k^4x^3y$$
$$= k^4(x^4 - x^3y) = k^4 f(x,y)$$

$f(x,y)$ จะเรียกว่า **ฟังก์ชันเอกพันธุ์** ระดับขั้น 4

บทนิยาม เราจะเรียกฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า **สมการเอกพันธุ์** ถ้าสามารถจัดอยู่ในรูป
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$
โดย $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $2xy\,dy = (x^2 - y^2)\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

เพราะว่า
$$f(kx,ky) = ((kx)^2 - (ky)^2) - 2(kx)(ky)$$
$$= (k^2x^2 - k^2y^2) - 2(k^2xy)$$
$$= k^2(x^2 - y^2) - 2k^2(xy)$$
$$= k^2[(x^2 - y^2) - 2(xy)]$$
$$= k^2 f(x,y)$$

ให้ $M(x,y) = (x^2 - y^2)$ และ $N(x,y) = -2xy$ และ $v = \frac{y}{x}$ นั่นคือ $y = xv$ และ $dy = xdv + vdx$ จะได้

$$(x^2 - x^2v^2)dx - 2x^2v(x\,dv + v\,dx) = 0$$
$$-2x^3v\,dv - 2x^2v^2\,dx + x^2\,dx - x^2v^2\,dx = 0$$
$$-2x^3v\,dv - (3x^2v^2 - x^2)dx = 0$$

คูณ -1 ทั้งสมการ $$2x^3v\,dv + x^2(3v^2-1)dx = 0$$

คูณ $\frac{1}{x^3(3v^2-1)}$ ทั้งสมการ $$\frac{2v}{(3v^2-1)}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

อินทิเกรดทั้งสมการ $$\frac{1}{3}\ln(3v^2-1) + \ln x = c$$

$$x(3v^2-1)^{\frac{1}{3}} = c$$

แทน $v = \frac{y}{x}$ ทำให้ได้ว่า

$$x^{\frac{1}{3}}(3y^2-x^2)^{\frac{1}{3}} = c$$

ต่อไปจะกล่าวถึงผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ [3]

2.2.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่ (y) คือ ผลรวมของผลเฉลยทั่วไป (y_c) กับผลเฉลยเฉพาะ (y_p) นั่นคือ $y = y_c + y_p$ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไปนี้

ผลเฉลยทั่วไป (y_c)

ในการหาผลเฉลยทั่วไปจะหาได้จากสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่ ดังนั้นเราจะนำ**สมการช่วย**หรือ**สมการลักษณะเฉพาะ** $P(\lambda)$ เข้ามาช่วยในการหาผลเฉลยทั่วไปโดยจะมี 4 กรณี คือ มีรากเป็นจำนวนจริง มีรากเป็นจำนวนจริงรากซ้ำ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน และมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนรากซ้ำ

สมการช่วย

จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n แบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูป**สมการช่วย**หรือ**สมการลักษณะเฉพาะ** คือ

$$P(\lambda) = 0$$

เมื่อ $$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

เนื่องจาก $P(\lambda)$ ในสมการช่วยหรือสมการลักษณะเฉพาะ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n ทำให้สมการช่วยมีได้ n ราก ซึ่งอาจจะเป็นรากที่เป็นจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน หรืออาจจะมีรากบางรากมีค่าซ้ำกันก็ได้ ซึ่งจะพิจารณาได้ดังนี้

-การหาผลเฉลยทั่วไปที่มีรากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน

กรณีที่ λ เป็นรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกันนั่นจะเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n อยู่ในรูปแบบ

$$y_c = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x} + \cdots + c_ne^{\lambda_n x}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.5</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 5y' - 6y = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$

$$(\lambda + 6)(\lambda - 1) = 0$$

จะได้ $\lambda = -6,1$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y_c = c_1e^{-6x} + c_2e^{1x}$

-การหาผลเฉลยทั่วไปที่มีรากเป็นจำนวนจริงรากซ้ำ

กรณีที่ λ เป็นรากซ้ำกัน n รากนั้นจะเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n อยู่ในรูปแบบ

$$y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1})e^{\lambda x}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.6</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 4y' + 4y = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$$

จะได้ $\lambda = 2,2$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y_c = (c_1 + c_2x)e^{2x}$

-การหาผลเฉลยทั่วไปที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ซ้ำกัน

กรณีที่ λ เป็นรากจำนวนเชิงซ้อนนั้นจะเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n อยู่ในรูปแบบ

$$y_c = e^{a_1x}(c_1\cos(b_1x) + d_1\sin(b_1x)) + e^{a_2x}(c_2\cos(b_2x) + d_2\sin(b_2x)) + \cdots + e^{a_nx}(c_n\cos(b_nx) + d_n\sin(b_nx))$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.7</u> จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' + 4y = 0$

<u>วิธีทำ</u> สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

จะได้ $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}i$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y_c = e^{-x}(c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x))$

-การหาผลเฉลยทั่วไปที่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนรากซ้ำ

กรณีที่ λ เป็นรากจำนวนเชิงซ้อนซ้ำกัน n รากนั้นจะเขียนผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูปแบบ

$$y_c = e^{ax}((c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1})\cos(bx) + (d_1 + d_2x + d_3x^2 + \cdots + d_nx^{n-1})\sin(bx))$$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0$

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 2)^2 = 0$$

จะได้ $\lambda^2 = -2, -2$

ดังนั้น

$$\lambda = \pm\sqrt{2}\,i, \pm\sqrt{2}i$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y_c = (c_1 + c_2x)\cos(\sqrt{2}x) + (d_1 + d_2x)\sin(\sqrt{2}x)$

ผลเฉลยเฉพาะ (y_p)

ในการหาผลเฉลยเฉพาะจะมีวิธีการหาได้หลายวิธี ซึ่งเราจะยกตัวอย่างการหาผลเฉลยเฉพาะมาหนึ่งวิธี นั่นคือวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ [5] ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นของสมการอันดับ 2 ที่ฟังก์ชันทางขวามือเป็นพหุนาม

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

เมื่อ a_2, a_1, a_0 เป็นค่าคงที่ดังนั้นผลเฉลยดังกล่าวเขียนได้ในรูปแบบ $y = y_c + y_p$ เมื่อ y_c เป็นผลเฉลยทั่วไป และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

2.2.4 วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นของสมการอันดับ 2 ที่ฟังก์ชันทางขวามือเป็นพหุนามจะมีวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะในกรณีต่างๆดังนี้

- ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น m แล้ว y_p อยู่ในรูป $x^w(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)$ เมื่อ w เป็นจำนวนรากของ 0 ซึ่งเป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 2y' = x^2 - 1 \qquad (2.2.1)$$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0$ มีรากคือ $\lambda = 0{,}2$

มีจำนวนรากของ 0 คือ 1 จึงได้ $w = 1$ และ $f(x) = x^2 - 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น 2 จะได้

$$y_p \text{ อยู่ในรูปแบบ } x(A_0 + A_1x + A_2x^2)$$

แทน y_p ในสมการ (2.2.1)

$$(xA_0 + A_1x^2 + A_2x^3)'' - 2(xA_0 + A_1x^2 + A_2x^3)' = x^2 - 1$$

หรือ $$2A_1 + 6A_2x - 2A_0 - 4A_1x - 6A_2x^2 = x^2 - 1$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x

$$x^0 : \; 2A_1 - 2A_0 = -1$$
$$x : \; 6A_2 - 4A_1 = 0$$
$$x^2 : \; -6A_2 = 1$$

จะได้ $A_2 = -\frac{1}{6}, A_1 = -\frac{1}{4}, A_0 = \frac{1}{4}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y_p = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$

-ถ้า $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$ เมื่อ $p(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น m แล้ว y_p อยู่ในรูป $x^w(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x}$ เมื่อ w เป็นภาวะรากซ้ำของ α ซึ่งเป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ

<u>ตัวอย่าง 2.2.10</u> จงหารูปแบบของ y_p ถ้า

$$y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x} \qquad (2.2.2)$$

สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ มีรากคือ $\lambda = 2,2$

มีรากคือ 2 และภาวะรากซ้ำเป็น 2 และ $p(x) = 3x$ เป็นพหุนามระดับขั้น 1 และ $\alpha = 2$

ดังนั้นรูปแบบของ $y_p = (A_0x^2 + A_1x^3)e^{2x}$

ซึ่งเราจะสามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 2.2.9 ทำให้ได้ว่า

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_p = (\frac{1}{2}x^3)e^{2x}$

-ถ้า $f(x) = p(x)\sin\alpha x + q(x)\cos\alpha x$ เมื่อ $p(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น m และ $q(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น k แล้วมีผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูปแบบ $x^w(A_0 + A_1x + \cdots + A_sx^s)\cos\alpha x + x^w(B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s)\sin\alpha x$ เมื่อ w เป็นภาวะรากซ้ำของ α_i ซึ่งเป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ และ s คือค่าที่มากที่สุดของ m, k

<u>ตัวอย่าง 2.2.11</u> จงหารูปแบบของ y_p ถ้า

$$y'' + 9y = \sin 3x \qquad (2.2.3)$$

สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0$ มีรากคือ $\lambda = \pm 3i$

มีภาวะรากซ้ำเป็น 1 เมื่อ $p(x) = 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น 0 และ $q(x) = 0$ เป็นพหุนามระดับขั้น 0 และ $\alpha = 3$ ดังนั้นรูปแบบของ

$$y_p = x(A_0 \sin 3x + B_0 \cos 3x)$$

แทน y_p ในสมการ (2.2.3)

$$(A_0 \sin 3x + B_0 \cos 3x)'' + 9(A_0 \sin 3x + B_0 \cos 3x) = \sin 3x$$
$$(-9A_0 x \sin 3x + 3A_0 \cos 3x + 3A_0 \cos 3x - 9B_0 x \cos 3x - 3B_0 x \sin 3x - 3B_0 x \sin 3x)$$
$$+9(A_0 x \sin 3x + B_0 x \cos 3x) = \sin 3x$$
$$(3A_0 + 3A_0)\cos 3x + (-3B_0 - 3B_0)\sin 3x = \sin 3x$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x

$$\sin 3x : -3B_0 - 3B_0 = 1$$
$$\cos 3x : 3A_0 + 3A_0 \quad = 0$$

จะได้ $A_0 = 0\,,\ B_0 = -\frac{1}{6}$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_p = -\frac{1}{6} x \cos 3x$

2.3 เมทริกซ์ (Matrix)

เมทริกซ์ คือกลุ่มของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนมาจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นแถวตามแนวนอนและ แนวตั้ง โดยทั่วไปนิยมใช้ในรูปต่อไปนี้ [3]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ใช้สัญลักษณ์ เป็น $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ หรือ $A_{m\times n}$

2.3.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 ทั้งหมด ใช้สัญลักษณ์ I หรือ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

<u>**ตัวอย่าง 2.3.1**</u>

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transposed Matrix)

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A คือ $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ [3]

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix}_{4\times 3} \Longrightarrow A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43}\end{bmatrix}_{3\times 4}$$

ซึ่งเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA)^T = kA^T$ สำหรับ k เป็นจำนวนจริง
4. $(AB)^T = B^T A^T$

ตัวอย่าง 2.3.2

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & -6 & 9\\ 0 & 7 & 8\end{bmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -6 & 9\\ 3 & -1 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

2.3.3 เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยม แบ่งเป็น 2 แบบ ดังนี้

1. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด [3]

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

2.เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด [3]

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.3.3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน}$$

2.3.4 เมทริกซ์โทพลิทซ์ (Toeplitz matrix)

เมทริกซ์โทพลิทซ์ คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกัน และแนวขนานเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกันในแต่ละแนว [4]

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a & b & f & g \\ c & a & b & f \\ e & c & a & b \\ h & e & c & a \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n \times n$ ใดๆ จะเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์ก็ต่อเมื่อ

$$A_{i,j} = A_{i+1,j+1} \quad ; \, i,j = 1,2,3,\dots,n$$

ตัวอย่าง 2.3.4

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 & 5 \\ -1 & 9 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงเมทริกซ์โทพลิทซ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน

2.3.5 เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular Toeplitz matrix)

เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมดและมีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกันและแนวขนานเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกันในแต่ละแนว [4]

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.5</u> จงยกตัวอย่างเมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะกล่าวถึงเมทริกซ์โทพลิทซ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมล่าง

2.3.6 เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower triangular Toeplitz matrix)

เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมล่าง คือ เมทริกซ์จัตุรัสใดๆที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมดและมีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกันและแนวขนานเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าเดียวกันในแต่ละแนว [4]

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 \\ e & b & c & a \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.6</u> จงยกตัวอย่างเมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมล่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3.7 อินเวอร์สของเมทริกซ์ (Inverse Matrix)

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตรัสใดๆและ เมทริกซ์ B เป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ถ้า $AB = BA = I$ [3]

คุณสมบัติอินเวอร์สของเมทริกซ์ มีดังนี้

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ สำหรับจำนวนจริง k ที่ไม่เท่ากับศูนย์

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ในการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์มีดังนี้ [3]

- การหาอินเวอร์สของเมทริกซ์โดยใช้เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

เป็นการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์จัตุรัส A เมื่อขนาด $n \geq 2$ ซึ่งสามารถใช้สูตรต่อไปนี้ [3]

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} AdjA$$

เมื่อ $det\,(A) \neq 0$ และ แอดจอยด์ของเมทริกซ์ A (Adjoint Matrix) คือ

$$AdjA = [Cof\ A]^T$$

ซึ่ง $Cof\ A$ คือ โคแฟคเตอร์ของเมทริกซ์จัตุรัส A ซึ่งก็คือ

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

เมื่อ M_{ij} คือ ไมเนอร์ของเมทริกซ์จัตุรัส A

โดยที่ ไมเนอร์ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยของเมทริกซ์ A ซึ่งตัดแถวที่ i และ คอลัมม์ที่ j ออก โดยใช้สัญลักษณ์ M_{ij} แทน ไมเนอร์ของ a_{ij} [3]

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

การหาค่า M_{13} ต้องตัดแถวที่1 และ คอลัมม์ที่3 ออก

จะได้

$$M_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (a_{21})(a_{32}) - (a_{22})(a_{31})$$

ดังนั้น

$$M_{13} = (a_{21})(a_{32}) - (a_{22})(a_{31})$$

<u>**ตัวอย่าง 2.3.7**</u> จงหาอินเวอร์สของ A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{(2)(-10) - (-4)(4)} \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{bmatrix}-10 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5/2 & 1\\ -1 & -1/2\end{bmatrix}$$

__ตัวอย่าง 2.3.8__ จงหา A^{-1} เมื่อ $det(A) = -14$ และ

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

หา $AdjA = [Cof\ A]^T$

นั่นคือ

$$AdjA = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{bmatrix}$$

ดังนั้น ต้องการหา $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}$ และ c_{33}

ในที่นี้เราจะแสดงการหาค่าของ c_{11}, c_{12} ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

เนื่องจาก

$$M_{11} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}4 & 6\\ 3 & 8\end{vmatrix} = (4)(8) - (3)(6) = 14$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 6\\ 5 & 3 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}9 & 6\\ 5 & 8\end{vmatrix} = (9)(8) - (5)(6) = 42$$

ดังนั้น

$c_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1(14) = 14$
$c_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1(42) = -42$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา c_{ij}ตัวอื่นๆได้

ดังนั้น

$$AdjA = \begin{bmatrix}14 & -8 & 6\\ -42 & 16 & -12\\ 7 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} AdjA$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} 14 & -8 & 6 \\ -42 & 16 & -12 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 8/14 & -6/14 \\ 3 & -16/14 & 12/14 \\ -1/2 & 1/14 & 1/14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

บทที่3

การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปของพหุนามดีกรี m

เนื่องจากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่จะเขียนอยู่ในรูปแบบ $y = y_c + y_p$ โดยที่ y_c คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และ y_p คือ ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เนื่องจาก y_c สามารถหาได้โดยใช้วิธีการที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 เพราะฉะนั้นในบทนี้การหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือคือฟังก์ชันพหุนาม $f(\mathrm{x})$ ดีกรี m

ในที่นี้การหาผลเฉลยเฉพาะเราจะนำเสนอการประยุกต์ใช้เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนเพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ที่อยู่ในแบบต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{r} a_i y^{(i)} = f(x) \qquad (3.1)$$

เมื่อ $a_0 = 1$ และ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \qquad (3.2)$$

ก่อนที่เราจะหาผลเฉลย เราจะกล่าวถึงทฤษฎีต่อไปนี้ที่จะช่วยในการหาผลเฉลย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่า เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนมีผกผันเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนด้วย

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ เป็นแถวแรกของ เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบน T ขนาด $r \times r$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_r \\ & t_1 & t_2 & \cdots & t_{r-1} \\ & & t_1 & \cdots & t_{r-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & t_1 \end{bmatrix}$$

สำหรับจำนวนจริง $t_i, i = 1,2, \dots, r$ ให้ $(s_1, s_2, \dots, s_r)$ เป็นแถวแรกของ T^{-1} ดังนั้นผกผันเมทริกซ์ของ T คือ

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_r \\ & s_1 & s_2 & \cdots & s_{r-1} \\ & & s_1 & \cdots & s_{r-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & s_1 \end{bmatrix}$$

สำหรับจำนวนจริง s_i , $i = 1,2,\ldots,r$

โดยที่

$$s_1 = \frac{1}{t_1}$$

$$s_i = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{i-2} t_{i-j}s_{j+1} \tag{3.3}$$

สำหรับ $i = 2,3,\ldots,r$

<u>พิสูจน์</u>

เนื่องจาก $[T][T^{-1}]$

$$= \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_r \\ & t_1 & t_2 & \cdots & t_{r-1} \\ & & t_1 & \cdots & t_{r-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & t_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_r \\ & s_1 & s_2 & \cdots & s_{r-1} \\ & & s_1 & \cdots & s_{r-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & s_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_1s_1 & (t_1s_2+t_2s_1) & (t_1s_3+t_2s_2+t_3s_1) & \cdots & (t_1s_r+t_2s_{r-1}+\cdots+t_rs_1) \\ & t_1s_1 & (t_1s_2+t_2s_1) & \cdots & (t_1s_{r-1}+t_2s_{r-2}+t_{r-1}s_1) \\ & & t_1s_1 & \cdots & (t_1s_{r-2}+t_2s_{r-3}+\cdots+t_{r-2}s_1) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & t_1s_1 \end{bmatrix}$$

ต้องการพิสูจน์ว่า

$$s_1 = \frac{1}{t_1}$$

$$s_i = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{i-2} t_{i-j}s_{j+1}, i = 2,3,\ldots,r$$

เนื่องจาก $TT^{-1} = I$ ดังนั้น

$$t_1s_1 = 1$$

จะได้ว่า

$$s_1 = \frac{1}{t_1}$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ให้ $P(k)$ คือ

$$s_k = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{k-2} t_{k-j}s_{j+1}\,, k = 2,3,\dots,r$$

<u>ขั้นพื้นฐาน</u> $P(2)$

เนื่องจาก

$$t_1s_2 + t_2s_1 = 0$$

ดังนั้น

$$s_2 = -\frac{1}{t_1}t_2s_1$$

จะได้

$$s_2 = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{2-2} t_{2-j}s_{j+1}$$

<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติ $P(k)$ เป็นจริง ต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น

$$s_k = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{k-2} t_{k-j}s_{j+1}$$

เนื่องจาก

$$t_1s_{k+1} + t_2s_k + t_3s_{k-1} + \cdots + t_{k+1}s_1 = 0$$

จะได้ว่า

$$s_{k+1} = -\frac{1}{t_1}(t_2s_k + t_3s_{k-1} + \cdots + t_{k+1}s_1)$$

ดังนั้น

$$s_{k+1} = -\frac{1}{t_1}\sum_{j=0}^{k-1} t_{k+1-j}s_{j+1}, k = 2,3,\dots,r$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า เมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนมีผกผันเป็นเมทริกซ์โทพลิทซ์สามเหลี่ยมบนด้วย

ต่อไป เราจะแสดงวิธีการหาผลเฉลยของสมการ (3.1) โดยเราจะแสดงให้เห็นก่อนว่า

$$f^{(m)}(x) = m!\,b_m \tag{3.4}$$

จากสมการ (3.2)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$$

ดังนั้น

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots + b_mx^m$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + \cdots + mb_mx^{m-1} \\ f''(x) &= 2b_2 + 6b_3x + 12b_4x^2 + \cdots + m(m-1)x^{m-2} \\ f'''(x) &= 6b_3 + 12b_4x + \cdots + m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f^{(m)}(x) &= m!\, b_m \end{aligned} \tag{3.5}$$

ทำให้ได้ว่า $f^{(m)}(x) = m!\, b_m$ และจะได้ว่า

$$f^{(m+p)}(x) = 0 \text{ เมื่อ } p = 1,2,3,\ldots \tag{3.6}$$

และจากสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0y + a_1y' + a_2y'' + \cdots + a_my^{(m)} \\ f'(x) &= a_0y' + a_1y'' + a_2y''' + \cdots + a_{m-1}y^{(m)} + a_my^{(m+1)} \\ f''^{(x)} &= a_0y'' + a_1y''' + a_2y^{(4)} + \cdots + a_{m-2}y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m+1)} + a_my^{(m+2)} \\ f'''^{(x)} &= a_0y''' + a_1y^{(4)} + \cdots + a_{m-3}y^{(m)} + a_{m-2}y^{(m+1)} + a_{m-1}y^{(m+1)} + a_my^{(m+2)} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f^{(m-1)}(x) &= a_0y^{(m-1)} + a_1y^{(m)} + a_2y^{(m+1)} + \cdots + a_my^{(m+(m-1))} \\ f^{(m)}(x) &= a_0y^{(m)} + a_1y^{(m+1)} + \cdots + a_my^{(m+m)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

จาก สมการ (3.6) จะได้ว่า

$$f^{(m)}(x) = a_0y^{(m)}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=j}^{m} a_{i-j}y^{(i)} = f^{(j)}(x)\,, j = 1,2,\ldots,m \tag{3.8}$$

สมการ (3.8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังต่อไปนี้

ให้

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix} \text{ และ } y = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix},\ f = \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(m)}(x) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

เนื่องจาก $a_0 = 1$ จะได้ว่า $Ty = f$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(m)}(x) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

จากสมการ (3.10) เราคูณ T^{-1} เข้าไปทั้ง 2 ข้าง จะได้ว่า $y = T^{-1}f$ และให้

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_m \\ & d & d_2 & \cdots & d_{m-1} \\ & & d_1 & \cdots & d_{m-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_m \\ & d & d_2 & \cdots & d_{m-1} \\ & & d_1 & \cdots & d_{m-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(m)}(x) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

ในทฤษฎีบทต่อไป เราจะแสดงผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของสมการ (3.1) ที่มาจากสมการ (3.11)

ทฤษฎีบท 3.2 ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของสมการ (3.1) อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$y = \sum_{i=0}^{m} d_i f^{(i)}(x) \tag{3.12}$$

เมื่อ

$$d_0 = 1$$
$$d_i = -\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} d_j, \tag{3.13}$$

สำหรับ $i = 1,2,\dots,m$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $T = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ และ $T^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_m \\ & d & d_2 & \cdots & d_{m-1} \\ & & d_1 & \cdots & d_{m-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $[T][T^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_m \\ & d & d_2 & \cdots & d_{m-1} \\ & & d_1 & \cdots & d_{m-2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_0 & (d_1+a_1d_0) & (d_2+a_1d_1+a_2d_0) & \cdots & (d_m+a_1d_{m-1}+a_2d_m+\cdots+a_md_0) \\ & d_0 & (d_1+a_1d_0) & \cdots & (d_{m-1}+a_1d_{m-2}+\ldots+a_{m-1}d_0) \\ & & d_0 & \cdots & (d_{m-2}+a_1a_{m-3}+\cdots+a_{m-2}d_0) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d_0 \end{bmatrix}$$

ต้องการพิสูจน์ว่า

$$d_0 = 1$$

$$d_i = -\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j}d_j, \text{ สำหรับ } i = 1,2,\ldots,m$$

เนื่องจาก $TT^{-1} = I$ ดังนั้น

$$d_0 = 1$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ให้ $P(k)$ คือ

$$d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j}d_j \text{ สำหรับ } k = 1,2,\ldots,m$$

<u>ขั้นพื้นฐาน</u> $P(1)$

เนื่องจาก

$$d_0a_1 + d_1 = 0$$

ดังนั้น

$$d_1 = -d_0a_1$$

จะได้

$$d_1 = -\sum_{j=0}^{1-1} a_{1-0}d_0$$

<u>ขั้นอุปนัย</u> สมมติ $P(k)$ เป็นจริง ต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $$d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j}d_j$$

เนื่องจาก

$$d_{k+1} + a_1 d_k + \cdots + a_k d_1 + a_{k+1} d_0 = 0$$

จะได้ว่า

$$d_{k+1} = -(a_1 d_k + \cdots + a_k d_1 + a_{k+1} d_0)$$

ดังนั้น

$$d_{k+1} = -\sum_{j=0}^{k} a_{k+1-j} d_j \ , k = 1,2,\dots,r$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

จากทฤษฎีบท 3.2 เราสามารถสรุปได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ เขียนอยู่ในรูปแบบของสมการ (3.12) และ d_i เมื่อ $i = 0,1,2,\dots,m$ ถูกกำหนดโดยสมการ (3.12)

ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ $f(x)$ เป็นพหุนาม โดยใช้ทฤษฎีที่ 3.2 เพื่อความเข้าใจมากยิ่งขึ้นดังนี้

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''' + y'' - 4y' + 2y = 4x \tag{3.14}$$

วิธีทำ

นำ 2 มาหารทั้งสมการเพื่อให้ $a_0 = 1$จะได้

$$\frac{1}{2}y''' + \frac{1}{2}y'' - 2y' + y = 2x \tag{3.15}$$

เนื่องจากสมการอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{i=0}^{r} a_i y^{(i)} = f(x)$$

จะได้สมการช่วย คือ

$$P(\lambda) = \frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda + 1$$

และ

$$f(x) = 2x$$

จาก **ทฤษฎีบท 3.2** เราจะได้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูปแบบของ

$$y = \sum_{i=0}^{m} d_i f^{(i)}(x) \tag{3.16}$$

เมื่อ

$$d_0 = 1$$

$$d_i = -\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} d_j, \quad \text{สำหรับ } i = 1,2,\dots,m$$

เมื่อ m คืออันดับของฟังก์ชันพหุนามฟังก์ชันทางขวามือ และเนื่องจากฝั่งขวาของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $2x$ มีอันดับ $m = 1$

จากสมการ (3.12) และ (3.15) ดังนั้น

$$y = \sum_{i=0}^{1} d_i f^{(i)}(x)$$

และ

$$a_0 = 1\,, a_1 = -2\,, a_2 = \frac{1}{2}\,, a_3 = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$d_0 = 1$$
$$d_1 = -a_1 d_0 = 2$$

และ

$$f'(x) = 2$$

ดังนั้นสมการ (3.14) จะได้ผลเฉลยเฉพาะคือ $y_p = d_0 f(x) + d_1 f'(x) = 2x + 4$

บทที่ 4

การหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $\boldsymbol{f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x}$

เนื่องจากบทที่ 3 ได้แสดงการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือคือฟังก์ชันพหุนามดีกรี m และในบทนี้จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ ที่อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x \tag{4.1}$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i; \qquad (l = 0,1,2,\dots) \tag{4.2}$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i; \qquad (k = 0,1,2,\dots) \tag{4.3}$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และสมการช่วยของสมการ (4.1) ไม่มีรากเป็น $\pm\alpha i$

ต่อไปเราจะทำการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.1) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้

$$y = \sum_{i=0}^{n} C_i x^i \sin\alpha x + \sum_{i=0}^{n} D_i x^i \cos\alpha x \tag{4.4}$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.1)

เมื่อ

$$C_i = \frac{\begin{pmatrix} P_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{i+1} \\ +3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} + 4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3} \\ -(i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{i+1} - (i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2} \\ -(i+1)(i+2)(i+3)a_3 C_{i+3} - (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4 C_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

เมื่อ $i = 0,1,2,\dots,(n-4)$

$$C_{n-3}=\frac{\begin{pmatrix} P_{n-3}+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)D_{n-3}+(n-2)(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)D_{n-2} \\ +3(n-1)(n-2)(a_3\alpha)D_{n-1}+4n(n-1)(n-2)(a_4\alpha)D_n \\ -(n-2)(a_1-3a_3\alpha^3)C_{n-2}-(n-1)(n-2)(a_2-6a_4\alpha^4)C_{n-1} \\ -n(n-1)(n-2)(a_3)C_n \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)}$$

$$C_{n-2}=$$
$$\frac{\begin{pmatrix} P_{n-2}+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)D_{n-2}+(n-1)(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)D_{n-1}+3n(n-1)(a_3\alpha)D_n \\ -(n-1)(a_1-3a_3\alpha^3)C_{n-1}-n(n-1)(a_2-6a_4\alpha^4)C_n \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)}$$

$$C_{n-1}=\frac{P_{n-1}+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)D_{n-1}+n(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)D_n-(n)(a_1-3a_3\alpha^3)C_n}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)}$$

$$C_n=\frac{P_n+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)D_n}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)}$$

และ

$$D_i=$$
$$\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_i-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_i+(i+1)[(a_1-3a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_{i+1}+[((i+2)(i+1)a_2 \\ -6(i+2)(i+1)a_4\alpha^4))(a_1\alpha-a_3\alpha^3) \\ -3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_{i+2} \\ +[(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3) \\ -4a_4\alpha(i+3)(i+2)(i+1)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_{i+3} \\ +(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_{i+4} \\ -(i+1)[(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(a_1-3a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_{i+1} \\ -[3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3) \\ +((i+1)(i+2)a_2\alpha-6(i+1)(i+2)a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_{i+2} \\ -[4(i+3)(i+2)(i+1)a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3) \\ +(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_{i+3} \\ -(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)\,D_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

เมื่อ $i=0,1,2,\ldots,(n-4)$

$$D_{n-3} = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-3} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-3} \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-2} \\ +[((n-1)(n-2)a_2 - 6(n-1)(n-2)a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +[n(n-1)(n-2)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -4n(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n-2)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-2} \\ -[3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((n-1)(n-2)a_2\alpha \\ -6(n-1)(n-2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[4(n)(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +n(n-1)(n-2)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_{n-2} = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-2} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-2} \\ +(n-1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +[(n)(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 3n(n-1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n-1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[3n(n-1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (n(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_{n-1} = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-1} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-1} \\ +(n)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_n = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_n - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

และ n คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดระหว่าง (l, k) หรือ $n = \max(l, k)$

โดยที่

ถ้า $l < n$ แล้ว $n - l = h_1$ จะได้ว่า $P_{l+j} = 0$ เมื่อ $j = 1,2,3, \dots, h_1$

ถ้า $k < n$ แล้ว $n - k = h_2$ จะได้ว่า $Q_{k+j} = 0$ เมื่อ $j = 1,2,3, \dots, h_2$

$+x^n[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_n + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_n]$

และ

$g(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4 + 120a_4D_5$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_4 + 60a_3D_5$
$+360a_4D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3\alpha C_4 + 240a_4\alpha C_5]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)D_5$
$+120a_3D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4 + 60a_3\alpha C_5 + 480a_4\alpha C_6]$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$+x^{n-4}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-4} + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_{n-3} + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_{n-2} + 60a_3D_{n-1}$
$+360a_4D_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-4} + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_{n-3} + 36a_3\alpha C_{n-2}$
$+240a_4\alpha C_{n-1}]$
$+x^{n-3}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-3} + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_{n-2} + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)D_{n-1}$
$+120a_3D_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-3} + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_{n-2} + 60a_3\alpha C_{n-1} + 480a_4\alpha C_n]$
$+x^{n-2}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-2} + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_{n-1} + (30a_2 - 180a_4\alpha^2)D_n$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-2} + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)C_{n-1} + 90a_3\alpha C_n]$
$+x^{n-1}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-1} + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)D_n$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-1} + (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)C_n]$
$+x^n[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_n]$

เนื่องจาก

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i$$

ดังนั้น

$P_i = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_i + (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)C_{i+1} + (i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2}$
$+(i+1)(i+2)(i+3)a_3C_{i+3} + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4C_{i+4} + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_i$
$+(i+1)(4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_{i+1} - 3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} - 4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3}$

โดยที่ $i = 0,1,2,\ldots,(n-4)$

$P_{n-3} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-3} + (n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^2)C_{n-2}$
$+(n-2)(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{n-1} + (n-2)(n-1)na_3C_n$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-3} + (n-2)(4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_{n-2}$
$-3(n-2)(n-1)a_3\alpha D_{n-1} - 4(n-2)(n-1)na_4\alpha D_n$
$P_{n-2} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-2} + (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)C_{n-1} + (n-1)n(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_n$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-2} + (n-1)(4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_{n-1} - 3(n-1)na_3\alpha D_n$
$P_{n-1} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-1} + n(a_1 - 3a_3\alpha^2)C_n$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-1} + n(4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_n$
$P_n = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_n + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_n$

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = a_0(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x$$
$+a_0(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x + a_1\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\cos\alpha x$
$+a_1(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\sin\alpha x - a_1\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\sin\alpha x$
$+a_1(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\cos\alpha x - a_2\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x$
$+2a_2\alpha(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\cos\alpha x + a_2(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\sin\alpha x$
$-a_2\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x - 2a_2\alpha(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\sin\alpha x$
$+a_2(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\cos\alpha x - a_3\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\cos\alpha x$
$-3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\sin\alpha x + 3a_3\alpha(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\cos\alpha x$
$+a_3(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})\sin\alpha x$
$+a_3\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\sin\alpha x - 3a_3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\cos\alpha x$
$-3a_3\alpha(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\sin\alpha x$
$+a_3(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})\cos\alpha x + \alpha^4a_4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x$
$-4\alpha^3a_4(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\cos\alpha x - 6\alpha^2a_4(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\sin\alpha x$
$+4\alpha a_4(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})\cos\alpha x$
$+a_4(24C_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)C_nx^{n-4})\sin\alpha x$
$+\alpha^4a_4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x + 4\alpha^3a_4(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\sin\alpha x$
$-6\alpha^2a_4(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\cos\alpha x$
$-4\alpha a_4(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})\sin\alpha x$
$+a_4(24D_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)D_nx^{n-4})\cos\alpha x$

ทำการรวมเทอมที่มี $\sin\alpha x$ เข้าด้วยกัน และ เทอมที่มี $\cos\alpha x$ เข้าด้วยกัน ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)}$$
$= [a_0(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) + a_1(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})$
$-a_1\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - a_2\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$
$+a_2(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2}) - 2a_2\alpha(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})$
$-3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})a_3(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})$
$+a_3\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - 3a_3\alpha(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$+\alpha^4a_4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) - 6\alpha^2a_4(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})$
$+a_4(24C_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)C_nx^{n-4}) + 4\alpha^3a_4(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})$
$-4\alpha a_4(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})]\sin\alpha x$
$+[a_0(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) + a_1\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$
$+a_1(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1}) + a_22\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4)$
$-a_2\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) + a_2(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$-a_3\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) + 3a_3\alpha(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})$
$-3a_3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1}) + a_3(6D_3 + 24D_4x + 60D_5x^2)$
$-4\alpha^3a_4(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1}) + 4\alpha a_4(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})$
$+\alpha^4a_4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - 6\alpha^2a_4(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$+a_4(24D_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)D_nx^{n-4})]\cos\alpha x$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$f(x) = [a_0(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) + a_1(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})$
$-a_1\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - a_2\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$
$+a_2(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2}) - 2a_2\alpha(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})$
$-3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1}) + a_3(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})$
$+a_3\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - 3a_3\alpha(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$+\alpha^4a_4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) - 6\alpha^2a_4(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})$
$+a_4(24C_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)C_nx^{n-4}) + 4\alpha^3a_4(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})$
$-4\alpha a_4(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})$

และ

$g(x) = a_0(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) + a_1\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)$
$+a_1(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1}) + a_2 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4)$
$-a_2\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) + a_2(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$-a_3\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n) + 3a_3\alpha(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})$
$-3a_3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1}) + a_3(6D_3 + 24D_4x + 60D_5x^2)$
$-4\alpha^3a_4(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1}) + 4\alpha a_4(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})$
$+\alpha^4a_4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n) - 6\alpha^2a_4(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})$
$+a_4(24D_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)D_nx^{n-4})$

จะได้ว่า

$f(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2$
$+6a_3C_3 + 24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4 + 120a_4C_5$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 + 60a_3C_5$
$+360a_4C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4 - 240a_4\alpha D_5]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^4)C_5$
$+120a_3C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4 - 60a_3\alpha D_5 - 480a_4\alpha D_6]$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
$+x^{n-4}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-4} + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_{n-3} + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_{n-2} + 60a_3C_{n-1}$
$+360a_4C_n + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-4} + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_{n-3} - 36a_3\alpha D_{n-2} - 240a_4\alpha D_{n-1}]$
$+x^{n-3}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-3} + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_{n-2} + (20a_2 - 120a_4\alpha^4)C_{n-1}$
$+120a_3C_n + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-3} + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_{n-2} - 60a_3\alpha D_{n-1}$
$-480a_4\alpha D_n]$
$+x^{n-2}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-2} + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_{n-1} + (30a_2 - 180a_4\alpha^4)C_n$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-2} + (20a_4\alpha^3 - 10a_2\alpha)D_{n-1} - 90a_3\alpha D_n]$
$+x^{n-1}[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_{n-1} + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_n$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_{n-1} + (24a_4\alpha^3 - 12a_2\alpha)D_n]$

พิสูจน์

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' + a_4 y^{(4)} \tag{4.5}$$

และจากสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}
y &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x \\
&\quad +(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x \\
&\text{ดังนั้น} \\
y' &= \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\cos\alpha x \\
&\quad +(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\sin\alpha x \\
&\quad -\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\sin\alpha x \\
&\quad +(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\cos\alpha x \\
y'' &= -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x \\
&\quad +2\alpha(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\cos\alpha x \\
&\quad +(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\sin\alpha x \\
&\quad -\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x \\
&\quad -2\alpha(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\sin\alpha x \\
&\quad +(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\cos\alpha x \\
y''' &= -\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\cos\alpha x \\
&\quad -3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\sin\alpha x \\
&\quad +3\alpha(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\cos\alpha x \\
&\quad +(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})\sin\alpha x \\
&\quad +\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\sin\alpha x \\
&\quad -3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\cos\alpha x \\
&\quad -3\alpha(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\sin\alpha x \\
&\quad +(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})\cos\alpha x \\
y^{(4)} &= \alpha^4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n)\sin\alpha x \\
&\quad -4\alpha^3(C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})\cos\alpha x \\
&\quad -6\alpha^2(2C_2 + 6C_3x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2})\sin\alpha x \\
&\quad +4\alpha(6C_3 + 24C_4x + \cdots + n(n-1)n-2)C_nx^{n-3})\cos\alpha x \\
&\quad +(24C_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)C_nx^{n-4})\sin\alpha x \\
&\quad +\alpha^4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + \cdots + D_nx^n)\cos\alpha x \\
&\quad +4\alpha^3(D_1 + 2D_2x + \cdots + nD_nx^{n-1})\sin\alpha x \\
&\quad -6\alpha^2(2D_2 + 6D_3x + \cdots + n(n-1)D_nx^{n-2})\cos\alpha x \\
&\quad -4\alpha(6D_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)D_nx^{n-3})\sin\alpha x \\
&\quad +(24D_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)D_nx^{n-4})\cos\alpha x
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

นำสมการ (4.6) เข้าไปแทนในสมการ (4.5) ดังนั้น

เนื่องจาก

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
Q_i = {} & (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_i + (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{i+1} \\
& +(i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^2)D_{i+2} \\
& +(i+1)(i+2)(i+3)a_3D_{i+3} + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4D_{i+4} \\
& +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_{i+1} + 3(i+1)(i+2)a_3\alpha C_{i+2} \\
& +4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha C_{i+3}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

โดยที่ $i = 0,1,2,\dots,(n-4)$

$$\begin{aligned}
Q_{n-3} = {} & (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-3} + (n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{n-2} \\
& +(n-2)(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^2)D_{n-1} + (n-2)(n-1)na_3D_n \\
& +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-3} + (n-2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_{n-2} \\
& +3(n-2)(n-1)a_3\alpha C_{n-1} + 4(n-2)(n-1)na_4\alpha C_n
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n-2} = {} & (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-2} + (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{n-1} \\
& +(n-1)n(a_2 - 6a_4\alpha^2)D_n \\
& +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-2} + (n-1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_{n-1} + 3(n-1)na_3\alpha C_n
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n-1} = {} & (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-1} + n(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_n \\
& +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{n-1} + n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_n
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$Q_n = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_n \tag{4.11}$$

ดังนั้น

$$C_i = \frac{\begin{pmatrix} P_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{i+1} \\ +3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} \\ +4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3} - (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{i+1} \\ -(i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2} \\ -(i+1)(i+2)(i+3)a_3C_{i+3} - (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4C_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \tag{4.12}$$

โดยที่ $i = 0,1,2,\dots,(n-4)$

$$C_{n-3} = \frac{\begin{pmatrix} P_{n-3} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-3} + (n-2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-2} \\ +3(n-1)(n-2)(a_3\alpha)D_{n-1} \\ +4n(n-1)(n-2)(a_4\alpha)D_n - (n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-2} \\ -(n-1)(n-2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{n-1} - n(n-1)(n-2)(a_3)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \tag{4.13}$$

$$C_{n-2} = \frac{\begin{pmatrix} P_{n-2} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-2} + (n-1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-1} \\ +3n(n-1)(a_3\alpha)D_n - (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-1} \\ -n(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \tag{4.14}$$

$$C_{n-1} = \frac{\begin{pmatrix} P_{n-1} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-1} + n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_n \\ -(n)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \tag{4.15}$$

$$C_n = \frac{P_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \tag{4.16}$$

นำสมการที่ (4.12) แทนในสมการ (4.7)

$$\begin{aligned} Q_i &= (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_i + (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{i+1} + (i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^2)D_{i+2} \\ &+ (i+1)(i+2)(i+3)a_3D_{i+3} + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4D_{i+4} \\ &+ (a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{i+1} \\ +3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} + 4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3} \\ -(i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{i+1} - (i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2} \\ -(i+1)(i+2)(i+3)a_3C_{i+3} \\ -(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4C_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)} \\ &+ (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_{i+1} + 3(i+1)(i+2)a_3\alpha C_{i+2} + 4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha C_{i+3} \end{aligned}$$

$$D_i = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_i - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_i + (i+1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+1} + [((i+2)(i+1)a_2 \\ -6(i+2)(i+1)a_4\alpha^4))(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+2} \\ +[(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -4a_4\alpha(i+3)(i+2)(i+1)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+3} \\ +(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{i+4} \\ -(i+1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+1} \\ -[3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +((i+1)(i+2)a_2\alpha - 6(i+1)(i+2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+2} \\ -[4(i+3)(i+2)(i+1)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+3} \\ -(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

โดยที่ $i = 0,1,2,\ldots,(n-4)$

นำสมการที่ (4.13) แทนในสมการ (4.8)

$$Q_{n-3} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-3} + (n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{n-2}$$
$$+(n-2)(n-1)(a_2-6a_4\alpha^2)D_{n-1} + (n-2)(n-1)na_3D_n + (n-2)(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)C_{n-2}$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_{n-3} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-3} + (n-2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-2} \\ +3(n-1)(n-2)(a_3\alpha)D_{n-1} + 4n(n-1)(n-2)(a_4\alpha)D_n \\ -(n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-2} - (n-1)(n-2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{n-1} \\ -n(n-1)(n-2)(a_3)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$
$$+3(n-2)(n-1)a_3\alpha C_{n-1} + 4(n-2)(n-1)na_4\alpha C_n$$

$$D_{n-3} = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-3} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-3} \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-2} \\ +\big[\big((n-1)(n-2)a_2 - 6(n-1)(n-2)a_4\alpha^4\big)(a_1\alpha - a_3\alpha^3\big) \\ -3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +[n(n-1)(n-2)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -4n(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n-2)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-2} \\ -[3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((n-1)(n-2)a_2\alpha \\ -6(n-1)(n-2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[4(n)(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +n(n-1)(n-2)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นำสมการที่ (4.14) แทนในสมการ (4.9)

$$Q_{n-2} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-2} + (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_{n-1} + (n-1)n(a_2-6a_4\alpha^2)D_n$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_{n-2} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-2} + (n-1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-1} \\ +3n(n-1)(a_3\alpha)D_n - (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-1} \\ -n(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$
$$+(n-1)(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)C_{n-1} + 3(n-1)na_3\alpha C_n$$

$$D_{n-2} = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-2} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-2} \\ +(n-1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +\big[(n)(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 3n(n-1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)\big]C_n \\ -(n-1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[3n(n-1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (n(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นำสมการที่ (4.15) แทนในสมการ (4.10)

$$Q_{n-1} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{n-1} + n(a_1 - 3a_3\alpha^2)D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{(P_{n-1} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-1} + n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_n - (n)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_n)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$
$$+n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_n$$

$$D_{n-1} = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-1} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-1} \\ +(n)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นำสมการที่ (4.16) แทนในสมการ (4.11)

$$Q_n = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{(P_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_n)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_n = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_n - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i,\ g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i$$

โดยที่ α จำนวนจริงใดๆ และสมการช่วยของสมการ (1.1) ไม่มีรากเป็น $\pm\alpha i$

อยู่ในรูปแบบของ

$$y = \sum_{i=0}^{n} C_i\, x^i \sin\alpha x + \sum_{i=0}^{n} D_i x^i \cos\alpha x$$

เมื่อ

$$C_i = \frac{\begin{pmatrix} P_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{i+1} + 3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} \\ +4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3} - (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{i+1} \\ -(i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2} \\ -(i+1)(i+2)(i+3)a_3 C_{i+3} - (i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4 C_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

เมื่อ $i = 0,1,2,\dots,(n-4)$

$$C_{n-3} = \frac{\begin{pmatrix} P_{n-3} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-3} + (n-2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-2} \\ +3(n-1)(n-2)(a_3\alpha)D_{n-1} \\ +4n(n-1)(n-2)(a_4\alpha)D_n - (n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-2} \\ -(n-1)(n-2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{n-1} - n(n-1)(n-2)(a_3)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_{n-2} = \frac{\begin{pmatrix} P_{n-2} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-2} + (n-1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-1} + 3n(n-1)(a_3\alpha)D_n \\ -(n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-1} - n(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_n \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_{n-1} = \frac{P_{n-1} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-1} + n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_n - (n)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_n = \frac{P_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

และ

$$D_i = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_i - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_i + (i+1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+1} + [((i+2)(i+1)a_2 \\ -6(i+2)(i+1)a_4\alpha^4))(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+2} \\ +[(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -4a_4\alpha(i+3)(i+2)(i+1)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+3} \\ +(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{i+4} \\ -(i+1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+1} \\ -[3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +((i+1)(i+2)a_2\alpha - 6(i+1)(i+2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+2} \\ -[4(i+3)(i+2)(i+1)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+3} \\ -(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)\,D_{i+4} \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,(n-4)$

$$D_{n-3} = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-3} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-3} \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-2} \\ +\big[\big((n-1)(n-2)a_2 - 6(n-1)(n-2)a_4\alpha^4\big)(a_1\alpha - a_3\alpha^3\big) \\ -3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +[n(n-1)(n-2)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -4n(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n-2)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-2} \\ -[3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((n-1)(n-2)a_2\alpha \\ -6(n-1)(n-2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[4(n)(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ +n(n-1)(n-2)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_{n-2} = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-2} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-2} \\ +(n-1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) \\ -(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1} \\ +\big[(n)(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 3n(n-1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)\big]C_n \\ -(n-1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1} \\ -[3n(n-1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (n(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_{n-1} = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_{n-1} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_{n-1} \\ +(n)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n \\ -(n)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_n = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_n - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_n}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

เมื่อ $n = \max(l, k)$

<u>ตัวอย่าง 4.1</u>

$$9y'' - 1y = x\sin x \qquad (4.12)$$

<u>วิธีที่1</u> แทนสูตร

ให้ $a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 9, P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 0, Q_1 = 0, \alpha = 1, n = 1$

<u>ขั้นแรก</u> เช็คว่าใช้สูตรได้หรือไม่

สมการช่วยคือ $P(\lambda) = 9\lambda^2 - 1 = 0$

$(3\lambda - 1)(3\lambda + 1) = 0$

จะได้ $\lambda = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$

ดังนั้น ไม่มีรากของสมการช่วยที่เป็น $\pm 1i$

ขั้นสอง แทนสูตร

จากสมการ (4.4)

$$y = (\sum_{i=0}^{n} C_i\, x^i)\sin\alpha x + (\sum_{i=0}^{n} D_i\, x^i)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$y = (C_0 + C_1 x)\sin x + (D_0 + D_1 x)\cos x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{P_0 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 - (a_1 - 3a_3\alpha^3)C_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_1 = \frac{P_1 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +(1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_1 \\ -(1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_1 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นั่นคือ

$$D_1 = \frac{(-1 - 0(1)^2 + 0(1)^4)0 - (0(1) - 0(1)^3)1}{(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4)^2 + (0(1) - 0(1)^3)^2} = 0$$

$$C_1 = \frac{1 + ((0)(1) - (0)(1)^3)0}{(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4)} = -\frac{1}{10}$$

$$D_0 = \frac{\begin{matrix} ((-1) - 9(1)^2 + 0(1)^4)0 - (0(1) - 0(1)^3)0 \\ +(1)[(0 - 3(0)(1)^2)(0(1) - 0(1)^3) - (2(9)1 - 4(0)(1)^3)(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4](-\frac{1}{10}) \\ -(1)[(2(9)(1) - 4(0)(1)^3)(0(1) - 0(1)^3) + (0 - 3(0)(1)^2)(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4)]0 \end{matrix}}{(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4)^2 + (0(1) - 0(1)^3)^2}$$

$$= -\frac{9}{50}$$

$$C_0 = \frac{0 + ((0)(1) - (0)(1)^3)D_0 + (2(9)(1) - 4(0)(1)^3)0 - (0 - 3(0)(1)^3)(-\frac{1}{10})}{(-1 - 9(1)^2 + 0(1)^4)} = 0$$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.12) คือ

$$y = -\frac{1}{10}x\sin\alpha x - \frac{9}{50}\cos\alpha x \qquad (4.13)$$

<u>วิธีที่2</u> การเทียบสัมประสิทธิ์

ตั้งให้ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = (A_0 + A_1x)\sin x + (B_0 + B_1x)\cos x$

$$y = (A_0 + A_1x)\sin x + (B_0 + B_1x)\cos x$$
$$y' = (A_0 + A_1x)\cos x + A_1\sin x - (B_0 + B_1x)\sin x + B_1\cos x$$
$$y'' = -(A_0 + A_1x)\sin x + A_1\cos x + A_1\cos x - (B_0 + B_1x)\cos x - B_1\sin x - B_1\sin x$$
$$= -(A_0 + A_1x)\sin x + 2A_1\cos x - (B_0 + B_1x)\cos x - 2B_1\sin x$$

นำ y, y'' ไปแทนสมการ (4.12) จะได้ว่า

$$9[-(A_0 + A_1x)\sin x + 2A_1\cos x - (B_0 + B_1x)\cos x - 2B_1\sin x]$$
$$-[(A_0 + A_1x)\sin x + (B_0 + B_1x)\cos x] = x\sin x$$
$$(-10A_0 - 18B_1)\sin x - 10A_1x\sin x + (-10B_0 + 18A_1)\cos x - 10B_1x\cos x = x\sin x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x

$$\begin{aligned} -10A_0 - 18B_1 &= 0 \\ -10A_1 &= 1 \\ -10B_0 + 18A_1 &= 0 \\ -10B_1 &= 0 \end{aligned}$$

จะได้

$$B_1 = 0,\ A_1 = -\frac{1}{10},\ B_0 = -\frac{9}{50},\ A_0 = 0$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.12) คือ

$$y = -\frac{1}{10}x\sin x - \frac{9}{50}\cos x \qquad (4.14)$$

จะเห็นว่าผลเฉลยเฉพาะ (4.13) และ (4.14) เท่ากัน ต่อไปเราจะใช้ตัวอย่างกการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับมากขึ้น และเพิ่มฟังก์ชัน $\cos\alpha x$ เข้าไปทางขวามือของสมการดังนี้

<u>ตัวอย่าง 4.2</u>

$$y^{(4)} - 13y'' + 36y = x\sin x + \cos x \qquad (4.15)$$

จะได้

$$a_0 = 36, a_1 = 0, a_2 = -13, a_3 = 0, a_4 = 1, P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 1, Q_1 = 0, \alpha = 1, n = 1$$

<u>ขั้นแรก</u> เช็คว่าใช้สูตรได้หรือไม่

สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9) = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

จะได้ $\lambda = \pm 2, \pm 3$

ดังนั้น ไม่มีรากของสมการช่วยที่เป็น $\pm 1i$

<u>ขั้นสอง</u> แทนสูตร

จากสมการ (4.4)

$$y = (\sum_{i=0}^{n} C_i\, x^i)\sin\alpha x + (\sum_{i=0}^{n} D_i\, x^i)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$y = (C_0 + C_1 x)\sin x + (D_0 + D_1 x)\cos x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{P_0 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 - (a_1 - 3a_3\alpha^3)C_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_1 = \frac{P_1 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +(1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_1 \\ -(1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_1 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นั่นคือ

$$D_1 = \frac{(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)0 - ((0)1 - (0)(1)^3)1}{(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)^2 + (0(1) - 0(1)^3)^2} = 0$$

$$C_1 = \frac{1 + ((0)1 - (0)(1)^3)0}{(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)} = \frac{1}{50}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)1 - ((0)(1) - (0)(1)^3)0 \\ +(1)[((0) - 3(0)(1)^2)((0)(1) - (0)(1)^3) - (2(-13)(1) \\ -4(1)(1)^3)(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)]\frac{1}{50} \\ -(1)[(2(-13) - 4(1)(1)^3)((0)(1) - (0)(1)^3) + ((0) \\ -3(0)(1)^2)(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)]0 \end{pmatrix}}{(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)^2 + (0(1) - 0(1)^3)^2} = \frac{8}{250}$$

$$C_0 = \frac{0 + (0(1) - (0)(1)^3)\frac{8}{250} + 1(2(-13)1 - 4(1)1^3)0 - (1)(0 - 3(0)(1)^3)\frac{1}{50}}{(36 - (-13)(1)^2 + (1)(1)^4)}$$

$$= 0$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ(4.15) คือ

$$y = \frac{1}{50}x\sin x + \frac{8}{250}\cos x \qquad (4.16)$$

ตรวจคำตอบ

จากสมการ (4.16) จะได้

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{50}x\sin x + \frac{8}{250}\cos x \\ y' &= \frac{1}{50}(x\cos x + \sin x) - \frac{8}{250}\sin x \\ y'' &= \frac{1}{50}(-x\sin x + 2\cos x) - \frac{8}{250}\cos x \\ y''' &= \frac{1}{50}(-x\cos x - 3\sin x) + \frac{8}{250}\sin x \\ y^{(4)} &= \frac{1}{50}(x\sin x - 4\cos x) + \frac{8}{250}\cos x \end{aligned}\right\} \quad (4.17)$$

นำสมการ (4.17) แทนใน (4.15) นั่นคือ

$$y^{(4)} - 13y'' + 36y$$

$$= \frac{1}{50}(x\sin x - 4\cos x) + \frac{8}{250}\cos x - 13\left(\frac{1}{50}(-x\sin x + 2\cos x) - \frac{8}{250}\cos x\right)$$

$$+36\left(\frac{1}{50}x\sin x + \frac{4}{125}\cos x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{50} + \frac{13}{50} + \frac{36}{50}\right)x\sin x + \left(-\frac{4}{50} + \frac{8}{250} - \frac{26}{50} + \frac{104}{250} + \frac{288}{250}\right)\cos x$$

$$= (1)x\sin x + (1)\cos x$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{50}x\sin x + \frac{8}{250}\cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.15)

ตัวอย่าง 4.3

$$y^{(4)} - 3y''' - 12y'' + 52y' - 48y = (2x^2 + x^3 - 2x^5)\sin x \quad (4.18)$$

$a_0 = -48, a_1 = 52, a_2 = -12, a_3 = -3, a_4 = 1, P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 2, P_3 = 1,$
$P_4 = 0, P_5 = -2, Q_0 = 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0, Q_4 = 0, Q_5 = 0, n = 5$

ขั้นแรก เช็คว่าใช้สูตรได้หรือไม่

สมการช่วยคือ $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - 12\lambda^2 + 52\lambda - 48 = 0$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)(\lambda + 4) = 0$$

จะได้ $\lambda = 2, 2, 3, -4$

ดังนั้น ไม่มีรากของสมการช่วยที่เป็น $\pm 1i$

ขั้นสอง แทนสูตร

จากสมการ (4.4)

$$y = \left(\sum_{i=0}^{n} C_i x^i\right)\sin\alpha x + \left(\sum_{i=0}^{n} D_i x^i\right)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5)\sin x$$
$$+(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5)\cos x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} P_0 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + (1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 + 3(1)(2)a_3\alpha D_2 + 4(1)(2)(3)a_4\alpha D_3 \\ -(1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_1 - (1)(2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_2 - (1)(2)(3)a_3C_3 - (1)(2)(3)(4)a_4C_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} P_1 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + (2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_2 + 3(2)(3)a_3\alpha D_3 + 4(2)(3)(4)a_4\alpha D_4 \\ -(2)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_2 - (2)(3)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_3 - (2)(3)(4)a_3C_4 - (2)(3)(4)(5)a_4C_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} P_2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + (3)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_3 + 3(4)(3)(a_3\alpha)D_4 + 4(5)(4)(3)(a_4\alpha)D_5 \\ -(3)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_3 - (4)(3)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_4 - 5(4)(3)(a_3)C_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_3 = \frac{\begin{pmatrix} P_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + (4)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_4 + 3(5)(4)(a_3\alpha)D_5 \\ -(4)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_4 - 5(4)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_4 = \frac{P_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + 5(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_5 - (5)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_5}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_5 = \frac{P_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +(1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_1 \\ +[((2)(1)a_2 - 6(2)(1)a_4\alpha^4))(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 3(2)(1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[(3)(2)(1)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4(3)(2)(1)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +(4)(3)(2)(1)a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 \\ -(1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_1 \\ -[3(2)(1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((1)(2)a_2 - 6(1)(2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[4(3)(2)(1)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3)(2)(1)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -(4)(3)(2)(1)a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +(2)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[((3)(2)a_2 - 6(3)(2)a_4\alpha^4))(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 3(3)(2)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[(4)(3)(2)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4(4)(3)(2)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ +(5)(4)(3)(2)a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 \\ -(2)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[3(3)(2)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((2)(3)a_2 - 6(2)(3)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[4(4)(3)(2)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (4)(3)(2)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 \\ -(5)(4)(3)(2)a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)\,D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_2 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +(3)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +\left[((4)(3)a_2 - 6(4)(3)a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3\right) - 3(4)(3)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ +[5(4)(3)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4(5)(4)(3)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_5 \\ -(3)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[3(4)(3)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((4)(3)a_2 - 6(4)(3)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[4(5)(4)(3)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 5(4)(3)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_3 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3 \\ +(4)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ +\left[\left((5)(4)a_2 - 6(5)(4)(a_4\alpha^2))(a_1\alpha - a_3\alpha^3\right) - 3(5)(4)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)\right] C_5 \\ -(4)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[3(5)(4)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (5(4)a_2 - 6(5)(4)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_4 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_4 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_4 \\ +(5)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_5 \\ -(5)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_5 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_5 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_5}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

นั่นคือ

$$D_5 = \frac{(-35)0 - (55)(-2)}{(-35)^2 + (55)^2} = 0.0259$$

$$C_5 = \frac{-2 + (55)0.0259}{(-35)} = 0.0164$$

$$D_4 = \frac{\begin{pmatrix} (-35)0-(55)0 \\ (5)[(61)(55)-(-28)(-35)]0.0164 \\ -(5)[(-28)(55)+(61)(-35)]0.0259 \end{pmatrix}}{(-35)^2+(55)^2} = 0.1578$$

$$C_4 = \frac{0+(55)0.1578+5(-28)0.0259-(5)(61)0.0164}{(-48-(-12)(1)^2+1(1)^4)} = -0.0015$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix} (-35)0-(55)1 \\ +(4)[(61)(55)-(-28)(-35)](-0.0015) \\ +[-360(55)+180(-35)]0.0164 \\ -(4)[(-28)(55)+(61)(-35)]0.1578 \\ -[-180(55)+(-360)(-35)]0.0259 \end{pmatrix}}{(-35)^2+(55)^2} = 0.4123$$

$$C_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1+(55)0.4123+(4)(-28)0.1578+(-180)0.0259 \\ -(4)(61)(-0.0015)-(-360)0.0164 \end{pmatrix}}{(-48-(-12)(1)^2+1(1)^4)} = -0.2175$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} (-35)0-(55)2 \\ +(3)[(61)(55)-(-28)(-35)](-0.2175) \\ +[(-216)(55)-(-108)(-35)](-0.0015) \\ +[-180(55)-240(-35)]0.0164 \\ -(3)[(-28)(55)+(61)(-35)]0.4123 \\ -[-108(55)+(-216)(-35)]0.1578 \\ -[240(55)-180(-35)]0.0259 \end{pmatrix}}{(-35)^2+(55)^2} = 0.4998$$

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} 2+(55)(-0.5026)+(3)(-28)0.4123+(-108)0.1578 \\ +(240)0.0259-(3)(61)(-0.2175)-(-216)(-0.0015) \\ -(-180)0.0164 \end{pmatrix}}{(-48-(-12)(1)^2+1(1)^4)} = -0.756$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} (-35)0\ -(55)0 \\ +(2)[(61)(55)-(-28)(-35)](-0.756) \\ +[(-108)(55)+54(-35)](-0.2175) \\ +[-72(55)-96(-35)](-0.0015) \\ +120(55)0.0164 \\ -(2)[(-28)(55)+(61)(-35)](0.4998) \\ -[-54(55)+(-108)(-35)]0.4123 \\ -[96(55)-72(-35)]0.1578 \\ -120(-35)\ 0.0259 \end{pmatrix}}{(-35)^2+(55)^2} = 0.1032$$

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} 0+(55)0.1032+(2)(-28)(0.4998)-54(0.4123) \\ +96(0.1578)-(2)(61)(-0.756)-(6)(-18)(-0.2175)+72(-0.0015) \\ -120(0.0164) \end{pmatrix}}{(-48-(-12)(1)^2+1(1)^4)}$$
$$= -1.0639$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (-35)0 - (55)0 \\ +(1)[(61)(55) - (-28)(-35)](-1.0639) \\ +[(-36)55) + 18(-35)](-0.756) \\ +[-18(55) - 24(-35)](-0.2175) \\ +24(55)(-0.0015) \\ -(1)[(-28)(55) + (61)(-35)]0.1032 \\ -[-18(55) + (-36)(-35)]0.4998 \\ -[24(55) - 18(-35)]0.4123 \\ -24(-35)\ 0.1578 \end{pmatrix}}{(-35)^2 + (55)^2} = -0.2235$$

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} 0 + (55)(-0.2235) + (1)(-28)0.1302 - 18(0.4998) \\ +24(0.4123) - (1)(61)(-1.0639) - (-36)(-0.756) - (-18)(-0.2175) \\ -24(-0.0015) \end{pmatrix}}{(-48 - (-12)(1)^2 + 1(1)^4)}$$

$$= -0.5577$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.18) คือ

$$y = (-0.5577 - 1.0639x - 0.756x^2 - 0.2175x^3 - 0.0015x^4 + 0.0164x^5)\sin x$$
$$+(-0.2235 + 0.1032x + 0.4998x^2 + 0.4123x^3 + 0.1578x^4 + 0.0259x^5)\cos x \quad (4.19)$$

ตรวจคำตอบ

จากสมการ (4.19) จะได้

$$\left.\begin{aligned}
y &= (-0.5577 - 1.0639x - 0.7560x^2 - 0.2175x^3 - 0.0015x^4 + 0.0164x^5)\sin x \\
&+(-0.2235 + 0.1032x + 0.4998x^2 + 0.4123x^3 + 0.1578x^4 + 0.0259x^5)\cos x \\
y' &= (-0.8404 - 1.6152x - 1.1523x^2 - 0.4183x^3 - 0.0758x^4 - 0.0259x^5)\sin x \\
&+(-0.4545 - 0.0643x + 0.4809x^2 + 0.4137x^3 + 0.128x^4 + 0.0164x^5)\cos x \\
y'' &= (-1.1607 - 2.2403x - 1.7358x^2 - 0.7169x^3 - 0.2575x^4 - 0.0164x^5)\sin x \\
&+(-0.9047 - 0.6534x + 0.0888x^2 + 0.09375x^3 + 0.0062x^4 - 0.0259x^5)\cos x \\
y''' &= (-1.3356 - 2.8182x - 2.2395x^2 - 1.1237x^3 - 0.0882x^4 + 0.0259x^5)\sin x \\
&+(-1.8141 - 2.0627x - 1.4547x^2 - 0.6921x^3 - 0.387x^4 - 0.0164x^5)\cos x \\
y^{(4)} &= (-1.0041 - 2.4163x - 1.9164x^2 + 0.3393x^3 + 0.5165x^4 + 0.0164x^5)\sin x \\
&+(-3.3983 - 5.7276x - 4.3158x^2 - 2.6717x^3 - 0.1702x^4 + 0.0259x^5)\cos x
\end{aligned}\right\} \quad (4.20)$$

แทนสมการ (4.20) ใน (4.18)

$$y^{(4)} - 3y''' - 12y'' + 52y' - 48y$$
$$= (-1.0041 - 2.4163x - 1.9164x^2 + 0.3393x^3 + 0.5165x^4 + 0.0164x^5)\sin x$$
$$+(-3.3983 - 5.7276x - 4.3158x^2 - 2.6717x^3 - 0.1702x^4 + 0.0259x^5)\cos x$$
$$-3[(-1.3356 - 2.8182x - 2.2395x^2 - 1.1237x^3 - 0.0882x^4 + 0.0259x^5)\sin x$$
$$+(-1.8141 - 2.0627x - 1.4547x^2 - 0.6921x^3 - 0.387x^4 - 0.0164x^5)\cos x]$$
$$-12[(-1.1607 - 2.2403x - 1.7358x^2 - 0.7169x^3 - 0.2575x^4 - 0.0164x^5)\sin x$$
$$+(-0.9047 - 0.6534x + 0.0888x^2 + 0.09375x^3 + 0.0062x^4 - 0.0259x^5)\cos x]$$
$$+52[(-0.8404 - 1.6152x - 1.1523x^2 - 0.4183x^3 - 0.0758x^4 - 0.0259x^5)\sin x$$
$$+(-0.4545 - 0.0643x + 0.4809x^2 + 0.4137x^3 + 0.128x^4 + 0.0164x^5)\cos x]$$
$$-48[(-0.5577 - 1.0639x - 0.7560x^2 - 0.2175x^3 - 0.0015x^4 + 0.0164x^5)\sin x$$

$$+(-0.2235 + 0.1032x + 0.4998x^2 + 0.4123x^3 + 0.1578x^4 + 0.0259x^5)\cos x]$$
$$= (-0.0001 - 0.0013x + 2.0001x^2 + 1.0016x^3 + 0.0015x^4 - 1.9985x^5)\sin x$$
$$+(-0.0056 + 0.0041x - 0.0009x^2 + 0.0022x^3 - 0.002x^4 - 0.0045x^5)\cos x$$

นั่นคือ

$$= (2x^2 + x^3 - 2x^5)\sin x$$

ดังนั้น

$$y = (-0.5577 - 1.0639x - 0.756x^2 - 0.2175x^3 - 0.0015x^4 + 0.0164x^5)\sin x$$
$$+(-0.2235 + 0.1032x + 0.4998x^2 + 0.4123x^3 + 0.1578x^4 + 0.0259x^5)\cos x$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.18)

บทที่ 5

การคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ ด้วยโปรแกรม Visual Basic

เนื่องจากบทที่ 4 ได้แสดงการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ ซึ่งใช้เวลาในการคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะค่อนข้างมากถ้าพหุนามดีกรีสูงๆ ดังนั้นในบทนี้จะทำการเขียนโปรแกรมการคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะขึ้นมาเพื่อช่วยให้การคำนวณหาผลเฉลยเฉพาะมีความแม่นยำและรวดเร็วยิ่งขึ้น เมื่อสมการอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x \tag{5.1}$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i; \qquad (l = 0,1,2,\dots,5) \tag{5.2}$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i; \qquad (k = 0,1,2,\dots,5) \tag{5.3}$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และสมการช่วยของสมการ (5.1) ไม่มีรากเป็น $\pm\alpha i$

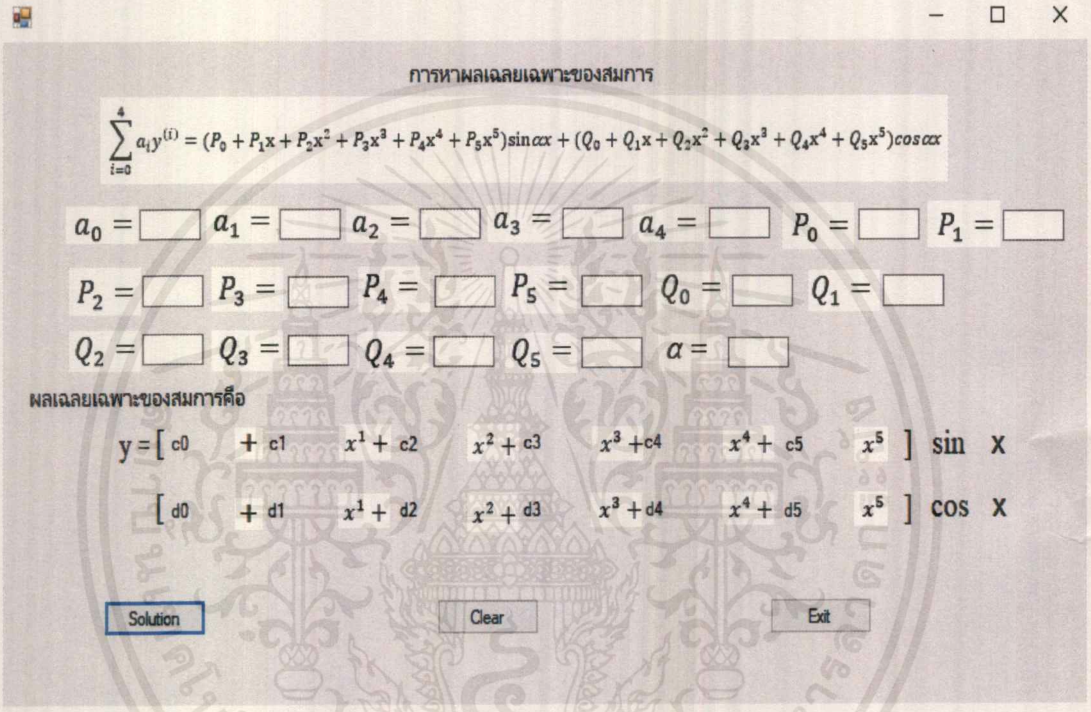
ต่อไปจะทำการเขียนโปรแกรมการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (5.1) ดังต่อไปนี้

5.1 การเขียนโปรแกรมคำนวณการหาผลเฉลยเฉพาะด้วยโปรแกรม Visual Basic

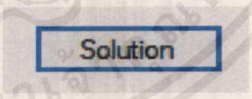
ในหัวข้อนี้จะอธิบายขั้นตอนการเขียนโปรแกรมคำนวณการหาผลเฉลยเฉพาะ

5.1.1 การสร้างหน้าต่างโปรแกรม

สร้างหน้าต่างโปรแกรมขึ้นมาดังต่อไปนี้



รูปภาพที่ 5.1

5.1.2 การเขียน Code คำนวณโปรแกรม 

Code คำสั่งป้องกันการไม่กรอกค่าตัวแปร

```
If a0.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า a0", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf a1.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า a1", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf a2.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า a2", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf a3.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า a3", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf a4.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า a4", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf P0.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P0", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf P1.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P1", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
```

```
ElseIf P2.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P2", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf P3.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P3", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf P4.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P4", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf P5.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า P5", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q0.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q0", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q1.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q1", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q2.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q2", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q3.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q3", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q4.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q4", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf Q5.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Q5", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
ElseIf LPh.Text = "" Then
    MessageBox.Show("กรุณาใส่ค่า Alpha", "คำเตือน", MessageBoxButtons.OK, MessageBoxIcon.Error)
    Exit Sub
End If
```

ประกาศตัวแปร

```
Dim b0 As Double            b0 = a0.Text
Dim b1 As Double            b1 = a1.Text
Dim b2 As Double            b2 = a2.Text
Dim b3 As Double            b3 = a3.Text
Dim b4 As Double            b4 = a4.Text
Dim b5 As Double            b5 = P0.Text
Dim b6 As Double            b6 = P1.Text
Dim b7 As Double            b7 = P2.Text
Dim b8 As Double            b8 = P3.Text
Dim b9 As Double            b9 = P4.Text
Dim b10 As Double           b10 = P5.Text
Dim b13 As Double           b13 = Q0.Text
Dim b14 As Double           b14 = Q1.Text
Dim b15 As Double           b15 = Q2.Text
Dim b16 As Double           b16 = Q3.Text
Dim b17 As Double           b17 = Q4.Text
Dim b18 As Double           b18 = Q5.Text
Dim b21 As Double           b21 = LPh.Text
```

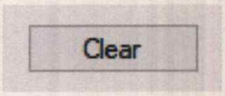
Code คำสั่งการหาผลเฉลยเฉพาะ

```
D5.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b18 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b10)
/ ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b26 As Double
b26 = D5.Text
C5.Text = FormatNumber((b10 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b26) / (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
Dim b27 As Double
b27 = C5.Text
D4.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b17 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b9
+ 5 * b27 * ((b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) - (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) *
(b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) - 5 * b26 * ((2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) *
(b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)))
/ ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b28 As Double
b28 = D4.Text
C4.Text = FormatNumber((b9 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b28 + 5 * (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
 * b26 - 5 * (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 3) * b27) / (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
Dim b29 As Double
b29 = C4.Text
D3.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b16 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b8
+ 4 * b29 * ((b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) - (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) *
(b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) + b27 * ((20 * b2 - 120 * b4 * b21 ^ 4) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
 - 60 * b3 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) - 4 * b28 * ((2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) *
(b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) -
 b26 * (60 * b3 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (20 * b2 - 120 * b4 * b21 ^ 2) *
(b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4))) / ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b30 As Double
b30 = D3.Text
C3.Text = FormatNumber((b8 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b30 + 4 * b28 * (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
+ 60 * b3 * b21 * b26 - 4 * (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 3) * b29 - 20 * (b2 - 6 * b4 * b21 ^ 4) * b27)
 / (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
Dim b31 As Double
b31 = C3.Text
D2.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b15 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b7
+ 3 * b31 * ((b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) - (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
* (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) + b29 * ((12 * b2 - 72 * b4 * b21 ^ 4) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 36 * b3 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + b27 * (60 * b3 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 240 * b4 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) - 3 * b30 * ((2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) *
(b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4))
- b28 * (36 * b3 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (12 * b2 * b21 - 72 * b4 * b21 ^ 2) *
(b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) - b26 * (240 * b4 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
+ 60 * b3 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)))
```

```
/ ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b32 As Double
b32 = D2.Text
C2.Text = FormatNumber((b7 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b32 + 3 * b30 * (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
+ 36 * b3 * b21 * b28 + 240 * b4 * b21 * b26 - 3 * (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 3) * b31
- 12 * (b2 - 6 * b4 * b21 ^ 4) * b29 - 60 * b3 * b27) / (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
Dim b33 As Double
b33 = C2.Text
D1.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b14 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b6
+ 2 * b33 * ((b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) - (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
* (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + b31 * ((6 * b2 - 36 * b4 * b21 ^ 4) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 18 * b3 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + b29 * (24 * b3 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 96 * b4 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + 120 * b4 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b27
- 2 * b32 * ((2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (b1 - 3 * b3 * b21 ^
* (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) - b30 * (18 * b3 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
+ (6 * b2 - 36 * b4 * b21 ^ 2) * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4))
- b28 * (96 * b4 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + 24 * b3 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4))
- 120 * b4 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) * b26)
/ ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b34 As Double
b34 = D1.Text
C1.Text = FormatNumber((b6 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b34 + 2 * b32 * (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
+ 18 * b3 * b21 * b30 + 96 * b4 * b21 * b28 - 2 * (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 3) * b33
- 6 * (b2 - 6 * b4 * b21 ^ 4) * b31 - 24 * b3 * b29 - 120 * b4 * b27) / (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
Dim b35 As Double
b35 = C1.Text
D0.Text = FormatNumber(((b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4) * b13 - (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b5
+ b35 * ((b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) - (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
* (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) + b33 * ((2 * b2 - 12 * b4 * b21 ^ 4) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 6 * b3 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + b31 * (6 * b3 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
- 24 * b4 * b21 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4)) + 24 * b4 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b29
- b34 * ((2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3) * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 2)
* (b0 - (b2 * b21 ^ 2) + b4 * b21 ^ 4)) - b32 * (6 * b3 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3)
+ (2 * b2 - 12 * b4 * b21 ^ 2) * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4))
- b30 * (24 * b4 * b21 * (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) + 6 * b3 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4))
- 24 * b4 * (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) * b28)
/ ((b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4) ^ 2 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) ^ 2), 4)
Dim b36 As Double
b36 = D0.Text
C0.Text = FormatNumber((b5 + (b1 * b21 - b3 * b21 ^ 3) * b36 + b34 * (2 * b2 * b21 - 4 * b4 * b21 ^ 3)
+ 6 * b3 * b21 * b32 + 24 * b4 * b21 * b30 - (b1 - 3 * b3 * b21 ^ 3) * b35
- 2 * (b2 - 6 * b4 * b21 ^ 4) * b33 - 6 * b3 * b31 - 24 * b4 * b29)
/ (b0 - b2 * b21 ^ 2 + b4 * b21 ^ 4), 4)
```

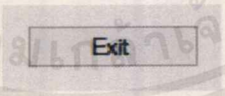
```
Dim b37 As Double
b37 = LPh.Text
L1.Text = b37
L2.Text = b37
```

5.1.3 การเขียน Code ล้างหน้าต่างโปรแกรม




```
a0.Text = ""
a1.Text = ""
a2.Text = ""
a3.Text = ""
a4.Text = ""
P0.Text = ""
P1.Text = ""
P2.Text = ""
P3.Text = ""
P4.Text = ""
P5.Text = ""
Q0.Text = ""
Q1.Text = ""
Q2.Text = ""
Q3.Text = ""
Q4.Text = ""
Q5.Text = ""
C0.Text = ""
D0.Text = ""
D1.Text = ""
D2.Text = ""
D3.Text = ""
D4.Text = ""
D5.Text = ""
L1.Text = ""
L2.Text = ""
LPh.Text = ""
```

5.1.4 การเขียน Code ปิดโปรแกรม




```
Me.Close()
```

<u>ตัวอย่าง 5.1</u>

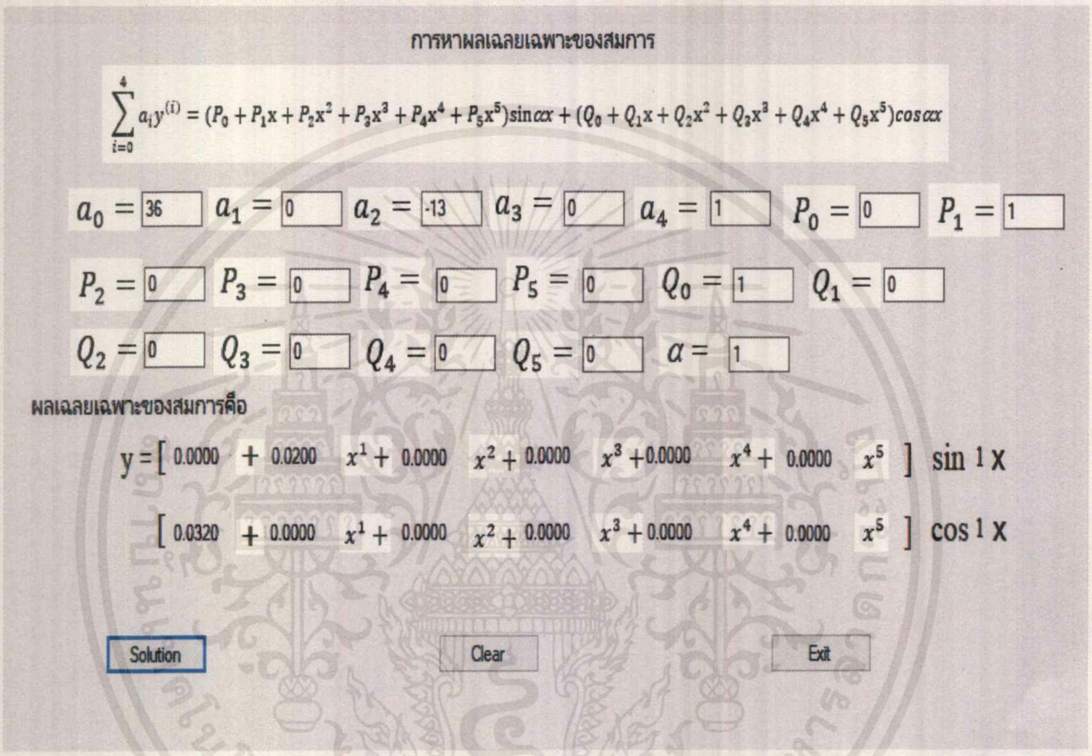
จากตัวอย่าง 4.2

$$y^{(4)} - 13y'' + 36y = x\sin x + \cos x$$

จะได้

$a_0 = 36, a_1 = 0, a_2 = -13, a_3 = 0, a_4 = 1, P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 1, Q_1 = 0, \alpha = 1, n = 1$

นำสัมประสิทธิ์ไปแทนในโปรแกรม



รูปภาพที่ 5.2

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยเฉพาะ $y = 0.02x\sin x + 0.032\cos x$ ซึ่งเท่ากับคำตอบของตัวอย่าง 4.2

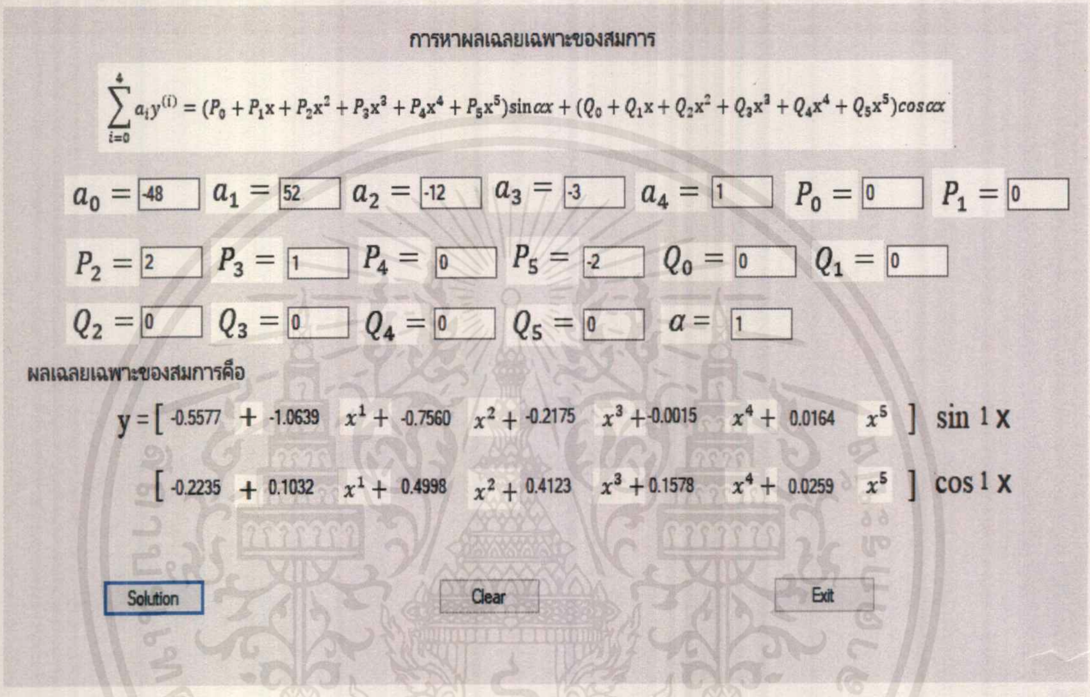
<u>ตัวอย่าง 5.2</u>

จากตัวอย่าง 4.3

$$y^{(4)} - 3y''' - 12y'' + 52y' - 48y = (2x^2 + x^3 - 2x^5)\sin x$$

$a_0 = -48, a_1 = 52, a_2 = -12, a_3 = -3, a_4 = 1, P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 2, P_3 = 1,$
$P_4 = 0, P_5 = -2, Q_0 = 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0, Q_4 = 0, Q_5 = 0, n = 5$

นำสัมประสิทธิ์ไปแทนในโปรแกรม



รูปภาพที่ 5.3

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยเฉพาะ

$$y = (-0.5577 - 1.0639x - 0.756x^2 - 0.2175x^3 - 0.0015x^4 + 0.0164x^5)\text{sinx}$$
$$+(-0.2235 + 0.1032x + 0.4998x^2 + 0.4123x^3 + 0.1578x^4 + 0.0259x^5)\text{cosx}$$

ซึ่งเท่ากับคำตอบของตัวอย่าง 4.3

บทที่ 6

สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการดำเนินงานและข้อเสนอแนะของปัญหาพิเศษนี้ แบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ สรุปผลการดำเนินงาน ข้อเสนอแนะ และแนวทางการพัฒนา ซึ่งมีดังต่อไปนี้

6.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ได้สูตรการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

6.1.1ได้โปรแกรมการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณาเมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i; (l = 0,1,2,\dots,5), g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i; (k = 0,1,2,\dots,5)$$

6.2 ข้อเสนอแนะ

6.2.1 ควรศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ด้วยวิธีอื่นๆมาก่อน

6.2.2 สำหรับผู้ใช้สูตรการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ควรศึกษาและทำความเข้าใจสูตรก่อนใช้เสมอ

6.3 แนวทางการพัฒนา

6.3.1 พัฒนาสูตรการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่จากอันดับ 4 ไปจนถึงอันดับ n โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

6.3.2 พัฒนาโปรแกรมการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่จากอันดับ 4 ไปจนถึงอันดับ n โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

6.3.3 พัฒนาสูตรการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่โดยที่ฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $e^{\beta}(\sin\alpha x + \cos\alpha x)$ ที่อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = e^{\beta}(\sin\alpha x + \cos\alpha x)$$

เมื่อ α, β คือค่าคงที่

เอกสารอ้างอิง

[1] **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** สืบค้นเมื่อ 8 พฤศจิกายน 2561, จาก http://pioneer.netserv .chula .ac.th/~tdumrong/2301312/file_ sheet_2555_2nd/312ch01_2555_2nd.pdf

[2] **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง.** สืบค้นเมื่อ 9 พฤศจิกายน 2561, จาก http://158.10822.9 /suchai/417267/order1.pdf

[3] **เมทริกซ์.** สืบค้นเมื่อ 11 พฤศจิกายน 2561, จาก https://staff.informatics.buu.ac.th/~bencha /886204/Ch1Matrix.pdf

[4] **matrix Toeplitz.** สืบค้นเมื่อ 11 พฤศจิกายน 2561, จาก https://en.wikipedia.org/ wiki/ Toeplitz_matrix

[5] พัชรินทร์ เหมโชติ. (2555). **การเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการอันดับ 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: มีนเซอร์วิส ซัพพลาย.

[6] On particular solution of ordinary differential equation with constant coefficients,จาก https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0096300313000210

Appendix

- วิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือมีออยู่ในรูปแบบของ $\boldsymbol{f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x}$

<u>ตัวอย่าง 1</u>

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{2} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha\mathrm{i}$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

<u>วิธีทำ</u> ให้

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
y &= (C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x \\
y' &= \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x)\sin\alpha x \\
&\quad -\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x)\cos\alpha x \\
y'' &= -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x)\cos\alpha x \\
&\quad +(2C_2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x \\
&\quad -2\alpha(D_1 + 2D_2x)\sin\alpha x + (2D_2)\cos\alpha x
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)} &= a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x] + D_2x)\cos\alpha x] \\
&+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x)\sin\alpha x \ - \alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2)\sin\alpha x \\
&+(D_1 + 2D_2x)\cos\alpha x] + a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x)\cos\alpha x \\
&+(2C_2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x - 2\alpha(D_1 + 2D_2x)\sin\alpha x + (2D_2)\cos\alpha x]
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)} &= [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 - a_1\alpha D_2]]\sin\alpha x \\
&+[(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + a_1\alpha C_2]]\cos\alpha x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$f(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 - a_1\alpha D_2]$$
$$g(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + a_1\alpha C_2]$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2$$
$$= [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 - a_1\alpha D_2]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1 = P_0 \qquad (1)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2 = P_1 \qquad (2)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 - a_1\alpha D_2 = P_2 \qquad (3)$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{P_2 + a_1\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{P_1 - 2a_1C_2 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{P_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{2} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2$$
$$= [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2] + x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + a_1\alpha C_2]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1 = Q_0 \qquad (4)$$

$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2 = Q_1$ (5)

$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + a_1\alpha C_2 = Q_2$ (6)

แทน C_2 ใน (6) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (a_1\alpha)\frac{P_2 + a_1\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_2$$

$$D_2 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2)Q - (a_1\alpha)P_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_1 ใน (5) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 4a_2\alpha C_2 + (a_1\alpha)\frac{P_1 - 2a_1C_2 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_1$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_1 - (a_1\alpha)P_1 + [2a_1(a_1\alpha) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha) + 2a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_0 ใน (4) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + 2a_2\alpha C_1$$
$$+(a_1\alpha)C_0\frac{(P_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1)}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_0$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_0 - (a_1\alpha)P_0 + [2a_1(a_1\alpha) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 + 2a_2(a_1\alpha)C_2 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha) + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 - 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} P_ix^i$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{2} Q_ix^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา อยู่ในรูปแบบ

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{B_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$
$$C_1 = \frac{B_1 - 2a_1C_2 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_2 = \frac{B_2 + a_1\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_0 - (a_1\alpha)B_0 + [2a_1(a_1\alpha) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 + 2a_2(a_1\alpha)C_2 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha) + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 - 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_1 - (a_1\alpha)B_1 + [2a_1(a_1\alpha) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha) + 2a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_2 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2)E_2 - (a_1\alpha)B_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2</u>

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

<u>วิธีทำ</u> ให้

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

เนื่องจาก

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$

y'

$= \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$

$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\cos\alpha x$

$y'' = -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$

$+(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$

$-2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x + (2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x$

ดังนั้น

$$\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)}$$

$= a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3$

$+D_4x^4)\cos\alpha x]$

$+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$

$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\cos\alpha x]$
$+a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$
$+(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$
$-2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x + (2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x]$
จะได้

$\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)} = \big[[(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 + 6a_2C_3 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + 3a_1C_3 + 12a_2C_4 - a_1\alpha D_2 - 6a_2\alpha D_3]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + 4a_1C_4 - a_1\alpha D_3 - 8a_2\alpha D_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 - a_1\alpha D_4]\big]\sin\alpha x$
$+[(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 6a_2D_3 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + 3a_1D_3 + 12a_2D_4 + a_1\alpha C_2 + 6a_2\alpha C_3]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + 4a_1D_4 + a_1\alpha C_3 + 8a_2\alpha C_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + a_1\alpha C_4]\big]\cos\alpha x$
เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{2} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$f(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 + 6a_2C_3 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + 3a_1C_3 + 12a_2C_4 - a_1\alpha D_2 - 6a_2\alpha D_3]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + 4a_1C_4 - a_1\alpha D_3 - 8a_2\alpha D_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 - a_1\alpha D_4]$
$g(x) = [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 6a_2D_3 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + 3a_1D_3 + 12a_2D_4 + a_1\alpha C_2 + 6a_2\alpha C_3]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + 4a_1D_4 + a_1\alpha C_3 + 8a_2\alpha C_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + a_1\alpha C_4]$
จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4$$

$= [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 + 6a_2C_3 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + 3a_1C_3 + 12a_2C_4 - a_1\alpha D_2 - 6a_2\alpha D_3]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + 4a_1C_4 - a_1\alpha D_3 - 8a_2\alpha D_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 - a_1\alpha D_4]$
จะได้ว่า

$(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + a_1C_1 + 2a_2C_2 - a_1\alpha D_0 - 2a_2\alpha D_1 = P_0$ (1)

$(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + 2a_1C_2 + 6a_2C_3 - a_1\alpha D_1 - 4a_2\alpha D_2 = P_1$ (2)

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + 3a_1C_3 + 12a_2C_4 - a_1\alpha D_2 - 6a_2\alpha D_3 = P_2 \quad (3)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + 4a_1C_4 - a_1\alpha D_3 - 8a_2\alpha D_4 = P_3 \quad (4)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 - a_1\alpha D_4 = P_4 \quad (5)$$

จาก (5) จะได้

$$C_4 = \frac{P_4 + a_1\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (4) จะได้

$$C_3 = \frac{P_3 - 4a_1C_4 + a_1\alpha D_3 + 8a_2\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{P_2 - 3a_1C_3 - 12a_2C_4 + a_1\alpha D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{P_1 - 2a_1C_2 - 6a_2C_3 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{P_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4$$
$$= [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 6a_2D_3 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2]$$
$$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + 3a_1D_3 + 12a_2D_4 + a_1\alpha C_2 + 6a_2\alpha C_3]$$
$$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + 4a_1D_4 + a_1\alpha C_3 + 8a_2\alpha C_4] + x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + a_1\alpha C_4]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + a_1\alpha C_0 + 2a_2\alpha C_1 = Q_0 \quad (6)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 6a_2D_3 + a_1\alpha C_1 + 4a_2\alpha C_2 = Q_1 \quad (7)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + 3a_1D_3 + 12a_2D_4 + a_1\alpha C_2 + 6a_2\alpha C_3 = Q_2 \quad (8)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + 4a_1D_4 + a_1\alpha C_3 + 8a_2\alpha C_4 = Q_3 \quad (9)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + a_1\alpha C_4 = Q_4 \quad (10)$$

แทน C_4 ใน (10) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (a_1\alpha)\frac{P_4 + a_1\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_4$$

$$D_4 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2)Q_4 - (a_1\alpha)P_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_3 ใน (9) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + 4a_1D_4 + 8a_2\alpha C_4 + (a_1\alpha)\frac{P_3 - 4a_1C_4 + a_1\alpha D_3 + 8a_2\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_3$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_3 - (a_1\alpha)P_4 + [4a_1(a_1\alpha) - 8a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 \\ -[8a_2\alpha(a_1\alpha) + 4a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_2 ใน (8) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + 3a_1D_3 + 12a_2D_4 + 6a_2\alpha C_3$$
$$+(a_1\alpha)\frac{P_2 - 3a_1C_3 - 12a_2C_4 + a_1\alpha D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_2$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_2 - (a_1\alpha)P_2 + [3a_1(a_1\alpha) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 + 12a_2(a_1\alpha)C_4 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha) + 3a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 - 12a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_4\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_1 ใน (7) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + 2a_1D_2 + 6a_2D_3 + 4a_2\alpha C_2$$
$$+(a_1\alpha)\frac{P_1 - 2a_1C_2 - 6a_2C_3 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_1$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_1 - (a_1\alpha)P_1 + [2a_1(a_1\alpha) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_2(a_1\alpha)C_3 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha) + 2a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_3\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

แทน C_0 ใน (6) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + a_1D_1 + 2a_2D_2 + 2a_2\alpha C_1$$
$$+(a_1\alpha)\frac{P_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_0$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)Q_0 - (a_1\alpha)P_0 + [a_1(a_1\alpha) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 + 2a_2(a_1\alpha)C_2 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha) + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 - 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_ix^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา อยู่ในรูปแบบ

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{B_0 - a_1C_1 - 2a_2C_2 + a_1\alpha D_0 + 2a_2\alpha D_1}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_1 = \frac{B_1 - 2a_1C_2 - 6a_2C_3 + a_1\alpha D_1 + 4a_2\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_2 = \frac{B_2 - 3a_1C_3 - 12a_2C_4 + a_1\alpha D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_3 = \frac{B_3 - 4a_1C_4 + a_1\alpha D_3 + 8a_2\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_4 = \frac{B_4 + a_1\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_0 - (a_1\alpha)B_0 + [a_1(a_1\alpha) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 + 2a_2(a_1\alpha)C_2 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha) + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 - 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_2\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_1 - (a_1\alpha)B_1 + [2a_1(a_1\alpha) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_2(a_1\alpha)C_3 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha) + 2a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_3\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_2 - (a_1\alpha)B_2 + [3a_1(a_1\alpha) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 + 12a_2(a_1\alpha)C_4 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha) + 3a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 - 12a_2(a_0 - a_2\alpha^2)D_4\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix}(a_0 - a_2\alpha^2)E_3 - (a_1\alpha)B_4 + [4a_1(a_1\alpha) - 8a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 \\ -[8a_2\alpha(a_1\alpha) + 4a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4\end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

$$D_4 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2)E_4 - (a_1\alpha)B_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}$$

จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 สามารถสรุปได้ว่าการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

เมื่อ $n = \max(l, k)$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ อยู่ในรูปแบบ

$$y = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-2} C_i + C_{n-1} + C_n\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2)}\sin\alpha x + \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-2} D_i + D_{n-1} + D_n\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha)^2}\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
C_i &= B_i + a_1\alpha D_i + 2(i+1)a_2\alpha D_{i+1} - (i+1)a_1 C_{i+1} - (i+1)(i+2)a_2 C_{i+2} \\
C_{n-1} &= B_{n-1} + a_1\alpha D_{n-1} + 2na_2\alpha D_n - na_1 C_n \\
C_n &= B_n + a_1\alpha D_n \\
D_i &= (a_0 - a_2\alpha^2)E_i - a_1\alpha B_i + (i+1)[{a_1}^2\alpha - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_{i+1} \\
&\quad -(i+1)[2a_1a_2\alpha^2 + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_{i+1} + (i+1)(i+2)[a_1a_2\alpha]C_{i+2} \\
&\quad -(i+1)(i+2)[a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_{i+2} \\
D_{n-1} &= (a_0 - a_2\alpha^2)E_{n-1} - a_1\alpha B_{n-1} + (n-1)[{a_1}^2\alpha - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_{n-1} \\
&\quad -(n-1)[2a_1a_2\alpha^2 + a_1(a_0 - a_2\alpha^2)]D_{n-1} \\
D_n &= (a_0 - a_2\alpha^2)E_n - a_1\alpha B_n
\end{aligned}$$

- วิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 3 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือมืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$

<u>ตัวอย่าง 3</u>

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} P_i x^i$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

วิธีทำ ให้

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\cos\alpha x$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
y &= (C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\cos\alpha x\\
y' &= \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\sin\alpha x\\
&\quad -\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\cos\alpha x\\
y'' &= -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\cos\alpha x\\
&\quad + (2C_2+6C_3x)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\cos\alpha x\\
&\quad -2\alpha(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\sin\alpha x + (2D_2+6D_3x)\cos\alpha x\\
y''' &= -\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\sin\alpha x\\
&\quad +3\alpha(2C_2+6C_3x)\cos\alpha x + (6C_3)\sin\alpha x\\
&\quad +\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\sin\alpha x - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\cos\alpha x\\
&\quad -3\alpha(2D_2+6D_3x)\sin\alpha x + (6D_3)\cos\alpha x
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3} a_iy^{(i)} &= a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\cos\alpha x]\\
&+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\sin\alpha x\\
&-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\cos\alpha x]\\
&+a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\cos\alpha x\\
&+ (2C_2+6C_3x)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\cos\alpha x\\
&-2\alpha(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\sin\alpha x + (2D_2+6D_3x)\cos\alpha x]\\
&+a_3[-\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2)\sin\alpha x\\
&+3\alpha(2C_2+6C_3x)\cos\alpha x + (6C_3)\sin\alpha x + \alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3)\sin\alpha x\\
&-3\alpha^2(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2)\cos\alpha x - 3\alpha(2D_2+6D_3x)\sin\alpha x + (6D_3)\cos\alpha x]
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3} a_iy^{(i)} &= \big[[(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3\\
&+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2\\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3]\\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3]\\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3]\big]\sin\alpha x\\
&+\big[[(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3\\
&+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2]\\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2\\
&+18a_3\alpha C_3]\\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3]\\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3]\big]\cos\alpha x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{3} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x) &= [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 \\
&+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2] \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 \\
&+18a_3\alpha D_3] \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3] \\
g(x) &= [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 \\
&+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2] \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2 \\
&+18a_3\alpha C_3] \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3]
\end{aligned}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{3} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 \\
&= [(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 \\
&+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2] \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 \\
&+18a_3\alpha D_3] \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 \\ -2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2 = P_0 \tag{1}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 \\ -4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3 = P_1 \tag{2}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3 = P_2 \tag{3}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 = P_3 \tag{4}$$

จาก (4) จะได้

$$C_3 = \frac{P_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + 4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3$$

$$= [(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2]$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2$$
$$+18a_3\alpha C_3]$$
$$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3]$$
$$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0$$
$$+2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2 = Q_0 \tag{5}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1$$
$$+4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3 = Q_1 \tag{6}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3 = Q_2 \tag{7}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 = Q_3 \tag{8}$$

แทน C_3 แทนใน (8) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{P_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_3$$

$$D_3 = \frac{Q_3(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_2 แทนใน (7) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 6a_2\alpha C_3$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_2$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_2 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_1 แทนใน (6) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3$$

$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 \\ +4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_1$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ +[6a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_0 แทนใน (5) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2$$

$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 \\ +2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_0$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 \\ +[2a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} B_ix^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{3} E_ix^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา อยู่ในรูปแบบ

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_1 = \frac{P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + 4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_2 = \frac{P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_3 = \frac{P_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 \\ +[2a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ +[6a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2)Q_2 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_3 = \frac{Q_3(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 4</u>

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{5} B_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{5} E_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

<u>วิธีทำ</u> ให้

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\cos\alpha x$
เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

เนื่องจาก

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\cos\alpha x$
$y' = \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\sin\alpha x$
$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4)\cos\alpha x$
$y'' = -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\cos\alpha x$
$+(2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\cos\alpha x$
$-2\alpha(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4)\sin\alpha x + (2D_2+6D_3x+12D_4x^2+20D_5x^3)\cos\alpha x$
$y''' = -\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\sin\alpha x$
$+3\alpha(2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3)\cos\alpha x + (6C_3+24C_4x+60C_5x^2)\sin\alpha x$
$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\sin\alpha x - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x+3D_32+4D_4x^3+5D_5x^4)\cos\alpha x$
$-3\alpha(2D_2+6D_3x+12D_4x^2+20D_5x^3)\sin\alpha x + (6D_3+24D_4x+60D_5x^2)\cos\alpha x$

ดังนั้น

$\sum_{i=0}^{3} a_i y^{(i)} = a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\sin\alpha x$
$+(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\cos\alpha x]$
$+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\sin\alpha x$
$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4)\cos\alpha x]$
$+a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\cos\alpha x$
$+(2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\cos\alpha x$
$-2\alpha(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4)\sin\alpha x + (2D_2+6D_3x+12D_4x^2+20D_5x^3)\cos\alpha x]$
$+a_3[-\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4)\sin\alpha x$
$+3\alpha(2C_2+6C_3x+12C_4x^2+20C_5x^3)\cos\alpha x + (6C_3+24C_4x+60C_5x^2)\sin\alpha x$
$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5)\sin\alpha x - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4)\cos\alpha x$
$-3\alpha(2D_2+6D_3x+12D_4x^2+20D_5x^3)\sin\alpha x + (6D_3+24D_4x+60D_5x^2)\cos\alpha x]$

จะได้

$$\sum_{i=0}^{3} a_i y^{(i)} = [[(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3$$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + 24a_3C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + 12a_2C_4 + 60a_3C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3 - 36a_3\alpha D_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + 20a_2C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 - 8a_2\alpha D_4 - 60a_3\alpha D_5]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 - 10a_2\alpha D_5]$
$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5]]\sin\alpha x$
$+[[(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 24a_3D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 12a_2D_4 + 60a_3D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3 + 36a_3\alpha C_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + 20a_2D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + 8a_2\alpha C_4 + 60a_3\alpha C_5]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + 10a_2\alpha C_5]$
$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)C_5]]\cos\alpha x$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{3} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(x) &= (a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 \\
&+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + 24a_3C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3 \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + 12a_2C_4 + 60a_3C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3 - 36a_3\alpha D_4] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + 20a_2C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 - 8a_2\alpha D_4 - 60a_3\alpha D_5] \\
&+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 - 10a_2\alpha D_5] \\
&+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5] \\
g(x) &= (a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 \\
&+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 24a_3D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3] \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 12a_2D_4 + 60a_3D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3 + 36a_3\alpha C_4] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + 20a_2D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + 8a_2\alpha C_4 + 60a_3\alpha C_5] \\
&+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + 10a_2\alpha C_5] \\
&+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)C_5]
\end{aligned}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{5} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + P_5x^5 =$$

$$\begin{aligned}
&(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 - 2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + 24a_3C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 - 4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3 \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + 12a_2C_4 + 60a_3C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 - 6a_2\alpha D_3 - 36a_3\alpha D_4] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + 20a_2C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 - 8a_2\alpha D_4 - 60a_3\alpha D_5] \\
&+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 - 10a_2\alpha D_5] \\
&+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + 2a_2C_2 + 6a_3C_3 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 \\ -2a_2\alpha D_1 - 6a_3\alpha D_2 = P_0 \tag{1}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + 6a_2C_3 + 24a_3C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 \\ -4a_2\alpha D_2 - 18a_3\alpha D_3 = P_1 \tag{2}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + 12a_2C_4 + 60a_3C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 \\ -6a_2\alpha D_3 - 36a_3\alpha D_4 = P_2 \tag{3}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + 20a_2C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 \\ -8a_2\alpha D_4 - 60a_3\alpha D_5 = P_3 \tag{4}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 - 10a_2\alpha D_5 = P_4 \tag{5}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5 = P_5 \tag{6}$$

จาก (6) จะได้

$$C_5 = \frac{P_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (5) จะได้

$$C_4 = \frac{P_4 - (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + 10a_2\alpha D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (4) จะได้

$$C_3 = \frac{P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 - 20a_2C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + 8a_2\alpha D_4 + 60a_3\alpha D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - 12a_2C_4 - 60a_3C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3 + 36a_3\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 - 24a_3C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + 4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{5} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4 + Q_5x^5$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 \\
&+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2 \\
&+x[(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 24a_3D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3] \\
&+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 12a_2D_4 + 60a_3D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3 + 36a_3\alpha C_4] \\
&+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + 20a_2D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + 8a_2\alpha C_4 + 60a_3\alpha C_5] \\
&+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + 10a_2\alpha C_5] \\
&+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)C_5]
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2 = Q_0 \tag{7}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 24a_3D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3 = Q_1 \tag{8}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 12a_2D_4 + 60a_3D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + 6a_2\alpha C_3 + 36a_3\alpha C_4 = Q_2 \tag{9}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + 20a_2D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3$$
$$+8a_2\alpha C_4 + 60a_3\alpha C_5 = Q_3 \tag{10}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + 10a_2\alpha C_5 = Q_4 \tag{11}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)C_5 = Q_5 \tag{12}$$

แทน C_5 แทนใน (12) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{P_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_5$$

$$D_5 = \frac{Q_5(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_4 แทนใน (11) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + 10a_2\alpha C_5$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{P_4 - (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + 10a_2\alpha D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_4$$

$$D_4 = \frac{\begin{pmatrix} Q_4(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_4 \\ +[(5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 10a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_5 \\ -[10a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_3 แทนใน (10) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + 20a_2D_5 + 8a_2\alpha C_4 + 60a_3\alpha C_5$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 - 20a_2C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 \\ +8a_2\alpha D_4 + 60a_3\alpha D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_3$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix} Q_3(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3 \\ +[(4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 8a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 \\ +[20a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 60a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_5 \\ -[8a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4 \\ -[60a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 20a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_2 แทนใน (9) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + 12a_2D_4 + 60a_3D_5 + 6a_2\alpha C_3 + 36a_3\alpha C_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - 12a_2C_4 - 60a_3C_5 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3 + 36a_3\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_2$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} Q_2(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ +[12a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 36a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 + 60a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 12a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4 - 60a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_1 แทนใน (8) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + 6a_2D_3 + 24a_3D_4 + 4a_2\alpha C_2 + 18a_3\alpha C_3$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 - 24a_3C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 \\ +4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_1$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} Q_1(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ +[6a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 + 24a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 - 24a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_0 แทนใน (7) จะได้

$$(a_0 - a_2\alpha^2)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + 2a_2D_2 + 6a_3D_3 + 2a_2\alpha C_1 + 6a_3\alpha C_2$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)\frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 \\ +2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)} = Q_0$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} Q_0(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 \\ +[2a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{5} P_i x^i$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{5} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

อยู่ในรูปแบบ

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - 2a_2C_2 - 6a_3C_3 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + 2a_2\alpha D_1 + 6a_3\alpha D_2}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_1 = \frac{P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - 6a_2C_3 - 24a_3C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + 4a_2\alpha D_2 + 18a_3\alpha D_3}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_2 = \frac{P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - 12a_2C_4 - 60a_3C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + 6a_2\alpha D_3 + 36a_3\alpha D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_3 = \frac{P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 - 20a_2C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + 8a_2\alpha D_4 + 60a_3\alpha D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_4 = \frac{P_4 - (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + 10a_2\alpha D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$C_5 = \frac{P_5 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} Q_0(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_1 \\ +[2a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 + 6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 \\ -[2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 - 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{\begin{pmatrix} Q_1(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_2 \\ +[6a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 + 24a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 \\ -[4a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 - 24a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_2 = \frac{\begin{pmatrix} Q_2(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_3 \\ +[12a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 36a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 + 60a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 \\ -[6a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_3 \\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 12a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4 - 60a_3(a_0 - a_2\alpha^2)D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_3 = \frac{\begin{pmatrix} Q_3(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3 \\ +[(4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 8a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_4 \\ +[20a_2(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 60a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_5 \\ -[8a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_4 \\ -[60a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 20a_2(a_0 - a_2\alpha^2)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_4 = \frac{\begin{pmatrix} Q_4(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_4 \\ +[(5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 10a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_5 \\ -[10a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2)]D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_5 = \frac{Q_5(a_0 - a_2\alpha^2) - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_5}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

จากตัวอย่างที่ 3 และ 4 สามารถสรุปได้ว่าการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 3 ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

เมื่อ $n = \max(l, k)$

ดังนั้นจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูปทั่วไป อยู่ในรูปแบบ

$$y = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-3} C_i + C_{n-2} + C_{n-1} + C_n\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2)}\sin\alpha x + \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-3} D_i + D_{n-2} + D_{n-1} + D_n\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
C_i &= B_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + 2(i+1)a_2\alpha D_{i+1} + 3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} \\
&\quad +(i+1)(3a_3\alpha^3 - a_1)C_{i+1} - (i+1)(i+2)a_2 C_{i+2} \\
&\quad -(i+1)(i+2)(i+3)a_3 C_{i+3} \\
C_{n-2} &= B_{n-2} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-2} + (n-1)(3a_3\alpha^3 - a_1)C_{n-1} - (n-1)(n)a_2 C_n \\
&\quad +2(n-1)a_2\alpha D_{n-1} + 3(n-1)(n)a_3\alpha D_n \\
C_{n-1} &= B_{n-1} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-1} + 2na_2\alpha D_n + (n)(3a_3\alpha^3 - a_1)C_n \\
C_n &= B_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_n
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
D_i &= (a_0 - a_2\alpha^2)E_i - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_i \\
&\quad +(i+1)[(3a_3\alpha^2 - a_1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_{i+1} \\
&\quad +(i+2)[(i+1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3)a_2 - 3(i+1)(a_0 - a_2\alpha^2)a_3\alpha]C_{i+2} \\
&\quad +(i+1)(i+2)(i+3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3)a_3 C_{i+3} \\
&\quad -(i+1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2) + 2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)]D_{i+1} \\
&\quad +(i+2)[(i+1)a_2(a_0 - a_2\alpha^2) + 3(i+1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)]D_{i+2} \\
D_{n-2} &= (a_0 - a_2\alpha^2)E_{n-2} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_{n-2} \\
&\quad +(n-1)[(3a_3\alpha^2 - a_1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_{n-1}
\end{aligned}$$

$$+(n)[(n-1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3)a_2 - 3(n-1)(a_0 - a_2\alpha^2)a_3\alpha]C_n$$
$$+(n-1)(n)(n+1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3)a_3C_{n+1}$$
$$-(n-1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2) + 2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)]D_{n-1}$$
$$+(n)[(n-1)a_2(a_0 - a_2\alpha^2) + 3(n-1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)]D_n$$
$$D_{n-1} = (a_0 - a_2\alpha^2)E_{n-1} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_{n-1}$$
$$+(n)[(3a_3\alpha^2 - a_1)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 2a_2\alpha(a_0 - a_2\alpha^2)]C_n$$
$$-(n)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2) + 2a_2\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)]D_n$$
$$D_n = (a_0 - a_2\alpha^2)E_n - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)]B_n$$

- วิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามือมืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$

<u>ตัวอย่าง 5</u>

$$a_4y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

<u>วิธีทำ</u> ให้

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$$

เป็นผลเฉลยของสมการ

เนื่องจาก

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$$
$$y' = \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$$
$$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\cos\alpha x$$
$$y'' = -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$$
$$+(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$$
$$-2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x + (2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x$$
$$y''' = -\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$$
$$+3\alpha(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\cos\alpha x + (6C_3 + 24C_4x)\sin\alpha x$$
$$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\cos\alpha x$$
$$-3\alpha(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\sin\alpha x + (6D_3 + 24D_4x)\cos\alpha x$$
$$y^{(4)} = \alpha^4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x - 4\alpha^3(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$$
$$-6\alpha^2(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x + 4\alpha(6C_3 + 24C_4x)\cos\alpha x + 24C_4\sin\alpha x$$

$+\alpha^4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x\ + 4\alpha^3(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x$
$-6\alpha^2(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x\ - 4\alpha(6D_3 + 24D_4x)sin\alpha x + 24D_4\cos\alpha x$
ดังนั้น

$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x\,]$
$+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$
$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)cos\alpha x\,]$
$+a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$
$+(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x - \alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$
$-2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x + (2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x]$
$+a_3[-\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\cos\alpha x -\ 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\sin\alpha x$
$+3\alpha(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\cos\alpha x\ + (6C_3 + 24C_4x)\sin\alpha x$
$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\sin\alpha x\ - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\cos\alpha x$
$-3\alpha(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\sin\alpha x + (6D_3 + 24D_4x)\cos\alpha x]$
$+a_4[\alpha^4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x - 4\alpha^3(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3)\cos\alpha x$
$-\ 6\alpha^2(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2)\sin\alpha x + 4\alpha(6C_3 + 24C_4x)\cos\alpha x\ + 24C_4\sin\alpha x$
$+\alpha^4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x\ + 4\alpha^3(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3)\sin\alpha x$
$-6\alpha^2(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2)\cos\alpha x\ - 4\alpha(6D_3 + 24D_4x)\sin\alpha x + 24D_4\cos\alpha x\,]$
จะได้

$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = [[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 + 6a_3C_3$
$+24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4$
$-(a_1\alpha + a_3\alpha^2)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 -\ 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4]]\sin\alpha x$
$+[[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 + 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3]$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 + 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 + 72a_4\alpha^2)D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3C_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4]]\cos\alpha x$
เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$f(x) = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 + 6a_3C_3$
$+24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4]$

$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4$
$-(a_1\alpha + a_3\alpha^2)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4]$
$g(x) = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 + 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 + 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 + 72a_4\alpha^2)D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3C_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4]$
จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4$$

$= (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 + 6a_3C_3$
$+24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4$
$-(a_1\alpha + a_3\alpha^2)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4]$
จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 + 6a_3C_3 + 24a_4C_4$$
$$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3 = P_0 \quad (1)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4$$
$$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4 = P_1 \quad (2)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4$$
$$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4 = P_2 \quad (3)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3$$
$$+(16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4 = P_3 \quad (4)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 = P_4 \quad (5)$$

จาก (5) จะได้

$$C_4 = \frac{P_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (4) จะได้

$$C_3 = \frac{P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)D_3 \\ +36a_3\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 - 24a_3C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 \\ +(4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)D_2 + 18a_3\alpha D_3 + 96a_4\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 - 6a_3C_3 - 24a_4C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 \\ +(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 + 6a_3\alpha D_2 + 24a_4\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4$$
$$= (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 + 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3$$
$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 + 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$$
$$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 + 72a_4\alpha^2)D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3C_4]$$
$$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4]$$
$$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3$$
$$+24a_4D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3 = Q_0 \quad (6)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4 = Q_1 \quad (7)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3\alpha C_4 = Q_2 \quad (8)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3$$
$$+(8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4 = Q_3 \quad (9)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 = Q_4 \quad (10)$$

แทน C_4 ใน (10) จะได้

$$D_4=\frac{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_4-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_4}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_3 ใน (9) จะได้

$$D_3=\frac{\begin{pmatrix}(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_3-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_3\\ +[(4a_1-12a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(8a_2\alpha-16a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4\\ -[(8a_2\alpha-16a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(4a_1-12a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4\end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_2 ใน (8) จะได้

$$D_2=\frac{\begin{pmatrix}(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_2-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_2\\ +[(3a_1-9a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(6a_2\alpha-12a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3\\ +[(12a_2-72a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-36a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4\\ -[(6a_2\alpha-12a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(3a_1-9a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3\\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(12a_2-72a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4\end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_1 ใน (7) จะได้

$$D_1=\frac{\begin{pmatrix}(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_1-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_1\\ +[(2a_1-6a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(4a_2\alpha-8a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_2\\ +[(6a_2-36a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-18a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3\\ +[24a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-96a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4\\ -[(4a_2\alpha-8a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(2a_1-6a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_2\\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(6a_2-36a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3\\ -[96a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+24a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4\end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_0 ใน (6) จะได้

$$D_0=\frac{\begin{pmatrix}(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_0-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_0\\ +[(a_1-3a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_1\\ +[(2a_2-12a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-6a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_2\\ +[6a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-24a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3+24a_4(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_4\\ -[(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(a_1-3a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_1\\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(2a_2-12a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_2\\ -[24a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+6a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3-24a_4(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_4\end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_4y^{(4)}+a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)\sin\alpha x+g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{4} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

อยู่ในรูปแบบ

$$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 - 6a_3C_3 - 24a_4C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 \\ +(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 + 6a_3\alpha D_2 + 24a_4\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 - 24a_3C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 \\ +(4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)D_2 + 18a_3\alpha D_3 + 96a_4\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)D_3 \\ +36a_3\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_3 = \frac{P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_4 = \frac{P_4 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_0 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_1 \\ +[(2a_2 - 12a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 24a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 + 24a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 \\ -[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[24a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 - 24a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1 = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[(6a_2 - 36a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[24a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 96a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ -[(4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[96a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 24a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_2 = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_2 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[(12a_2 - 72a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 36a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ -[(6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_3 = \frac{\left(\begin{gathered}(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_3 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3 \\ +[(4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ -[(8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4\end{gathered}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_4 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_4 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_4}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 6</u>

$$a_4y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{6} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{6} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา

<u>วิธีทำ</u> ให้

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} y &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 \\ &\quad + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x \\ y' &= \alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\cos\alpha x + (C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 \\ &\quad + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\sin\alpha x - \alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 \end{aligned}$$

$+D_5x^5 + D_6x^6)\sin\alpha x + (D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\cos\alpha x$

$y'' = -\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x + 2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2$
$+4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\cos\alpha x + (2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3 + 30C_6x^4)\sin\alpha x$
$-\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x - 2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2$
$+4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\sin\alpha x + (2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 + 20D_5x^3 + 30D_6x^4)\cos\alpha x$

$y''' = -\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\cos\alpha x - 3\alpha^2(C_1 + 2C_2x$
$+3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\sin\alpha x + 3\alpha(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3$
$+30C_6x^4)\cos\alpha x\ (6C_3 + 24C_4x + 60C_5x^2 + 120C_6x^3)\sin\alpha x$
$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\sin\alpha x - 3\alpha^2(D_1 + 2D_2x$
$+3D_3x^2 + 4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\cos\alpha x - 3\alpha(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 + 20D_5x^3$
$+30D_6x^4)\sin\alpha x + (6D_3 + 24D_4x + 60D_5x^2 + 120D_6x^3)\cos\alpha x$

$y^{(4)} = \alpha^4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x - 4\alpha^3(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2$
$+4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\cos\alpha x - 6\alpha^2(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3$
$+30C_6x^4)\sin\alpha x + 4\alpha(6C_3 + 24C_4x + 60C_5x^2 + 120C_6x^3)\cos\alpha x$
$+(24C_4 + 120C_5x + 360C_6x^2)\sin\alpha x + \alpha^4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5$
$+D_6x^6)\cos\alpha x + 4\alpha^3(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\sin\alpha x$
$-6\alpha^2(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 + 20D_5x^3 + 30D_6x^4)\cos\alpha x - 4\alpha(6D_3 + 24D_4x +$
$60D_5x^2 + 120D_6x^3)\sin\alpha x + (24D_4 + 120D_5x + 360D_6x^2)\cos\alpha x$

ดังนั้น

$\sum_{i=0}^{4} a_i y^{(i)} = a_0[(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x$
$+(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x]$
$+a_1[\alpha(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\cos\alpha x$
$+(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\sin\alpha x$
$-\alpha(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\sin\alpha x$
$+(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\cos\alpha x\,]$
$+a_2[-\alpha^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x$
$+2\alpha(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\cos\alpha x$
$+(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3 + 30C_6x^4)\sin\alpha x$
$-\alpha^2(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x$
$-2\alpha(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\sin\alpha x$
$+(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 + 20D_5x^3 + 30D_6x^4)\cos\alpha x$
$+a_3[-\alpha^3(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\cos\alpha x$
$-3\alpha^2(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\sin\alpha x$
$+3\alpha(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3 + 30C_6x^4)\cos\alpha x$
$+(6C_3 + 24C_4x + 60C_5x^2 + 120C_6x^3)\sin\alpha x$
$+\alpha^3(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\sin\alpha x$
$-3\alpha^2(D_1 + 2D_2x + 3D_3x^2 + 4D_4x^3 + 5D_5x^4 + 6D_6x^5)\cos\alpha x$
$-3\alpha(2D_2 + 6D_3x + 12D_4x^2 + 20D_5x^3 + 30D_6x^4)\sin\alpha x$
$+(6D_3 + 24D_4x + 60D_5x^2 + 120D_6x^3)\cos\alpha x]$
$+a_4[\alpha^4(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6)\sin\alpha x$
$-4\alpha^3(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5)\cos\alpha x$
$-6\alpha^2(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3 + 30C_6x^4)\sin\alpha x$
$+4\alpha(6C_3 + 24C_4x + 60C_5x^2 + 120C_6x^3)\cos\alpha x + (24C_4 + 120C_5x + 360C_6x^2)\sin\alpha x$
$+\alpha^4(D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5 + D_6x^6)\cos\alpha x$

$+4\alpha^3(D_1+2D_2x+3D_3x^2+4D_4x^3+5D_5x^4+6D_6x^5)\sin\alpha x$
$-6\alpha^2(2D_2+6D_3x+12D_4x^2+20D_5x^3+30D_6x^4)\cos\alpha x\ -4\alpha(6D_3+24D_4x+60D_5x^2$
$+120D_6x^3)\sin\alpha x+(24D_4+120D_5x+360D_6x^2)\cos\alpha x\ ]$
จะได้

$\sum_{i=0}^{4}a_iy^{(i)}=[[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_0+(a_1-3a_3\alpha^2)C_1+(2a_2-12a_4\alpha^4)C_2$
$+6a_3C_3+24a_4C_4+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_0+(4a_4\alpha^3-2a_2\alpha)D_1-6a_3\alpha D_2-24a_4\alpha D_3]$
$+x[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_1+(2a_1-6a_3\alpha^2)C_2+(6a_2-36a_4\alpha^4)C_3+24a_3C_4+120a_4C_5$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_1+(8a_4\alpha^3-4a_2\alpha)D_2-18a_3\alpha D_3-96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_2+(3a_1-9a_3\alpha^2)C_3+(12a_2-72a_4\alpha^4)C_4+60a_3C_5+360a_4C_6$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_2+(12a_4\alpha^3-6a_2\alpha)D_3-36a_3\alpha D_4-240a_4\alpha D_5]$
$+x^3[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_3+(4a_1-\ 12a_3\alpha^2)C_4+(20a_2-120a_4\alpha^4)C_5+120a_3C_6$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_3+(16a_4\alpha^3-8a_2\alpha)D_4-60a_3\alpha D_5-480a_4\alpha D_6]$
$+x^4[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_4+(5a_1-\ 15a_3\alpha^2)C_5+(30a_2-180a_4\alpha^4)C_6$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_4+(20a_4\alpha^3-10a_2\alpha)D_5-90a_3\alpha D_6]$
$+x^5[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_5+(6a_1-\ 18a_3\alpha^2)C_6+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_5+(24a_4\alpha^3$
$-12a_2\alpha)D_6]+x^6[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_6+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_6]]\sin\alpha x$
$+[[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_0+(a_1-3a_3\alpha^2)D_1+(2a_2-12a_4\alpha^2)D_2+6a_3D_3+24a_4D_4$
$+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_0+(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)C_1+6a_3\alpha C_2+24a_4\alpha C_3]$
$+x[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_1+(2a_1-6a_3\alpha^2)D_2+(6a_2-36a_4\alpha^2)D_3+24a_3D_4\ +120a_4D_5$
$+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_1+(4a_2\alpha-8a_4\alpha^3)C_2+18a_3\alpha C_3+96a_4\alpha C_4]$
$+x^2[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_2+(3a_1-9a_3\alpha^2)D_3+(12a_2-72a_4\alpha^2)D_4+60a_3D_5\ +360a_4D_6$
$+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_2+(6a_2\alpha-12a_4\alpha^3)C_3+36a_3\alpha C_4+240a_4\alpha C_5]$
$+x^3[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_3+(4a_1-12a_3\alpha^2)D_4+(20a_2-120a_4\alpha^2)D_5+120a_3D_6$
$+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_3+(8a_2\alpha-16a_4\alpha^3)C_4+60a_3\alpha C_5+480a_4\alpha C_6]$
$+x^4[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_4+(5a_1-15a_3\alpha^2)D_5+(30a_2-180a_4\alpha^2)D_6$
$+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_4+(10a_2\alpha-20a_4\alpha^3)C_5+90a_3\alpha C_6]$
$+x^5[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_5+(6a_1-18a_3\alpha^2)D_6+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_5+(12a_2\alpha-24a_4\alpha^3)C_6]$
$+x^6[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_6+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_6]]\cos\alpha x$
เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{4}a_iy^{(i)}=f(x)\sin\alpha x+g(x)\cos\alpha x$$

จะได้ว่า

$f(x)=(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_0+(a_1-3a_3\alpha^2)C_1+(2a_2-12a_4\alpha^4)C_2$
$+6a_3C_3+24a_4C_4+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_0+(4a_4\alpha^3-2a_2\alpha)D_1-6a_3\alpha D_2-24a_4\alpha D_3$
$+x[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_1+(2a_1-6a_3\alpha^2)C_2+(6a_2-36a_4\alpha^4)C_3+24a_3C_4+120a_4C_5$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_1+(8a_4\alpha^3-4a_2\alpha)D_2-18a_3\alpha D_3-96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_2+(3a_1-9a_3\alpha^2)C_3+(12a_2-72a_4\alpha^4)C_4+60a_3C_5+360a_4C_6$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_2+(12a_4\alpha^3-6a_2\alpha)D_3-36a_3\alpha D_4-240a_4\alpha D_5]$
$+x^3[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_3+(4a_1-\ 12a_3\alpha^2)C_4+(20a_2-120a_4\alpha^4)C_5+120a_3C_6$
$+(a_3\alpha^3-a_1\alpha)D_3+(16a_4\alpha^3-8a_2\alpha)D_4-60a_3\alpha D_5-480a_4\alpha D_6]$
$+x^4[(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)C_4+(5a_1-\ 15a_3\alpha^2)C_5+(30a_2-180a_4\alpha^4)C_6$

$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 + (20a_4\alpha^3 - 10a_2\alpha)D_5 - 90a_3\alpha D_6]$
$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5$
$+(24a_4\alpha^3 - 12a_2\alpha)D_6] + x^6[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_6]$
$g(x) = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4 + 120a_4D_5$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_4 + 60a_3D_5 + 360a_4D_6$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3\alpha C_4 + 240a_4\alpha C_5]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)D_5 + 120a_3D_6$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4 + 60a_3\alpha C_5 + 480a_4\alpha C_6]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (30a_2 - 180a_4\alpha^2)D_6$
$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)C_5 + 90a_3\alpha C_6]$
$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 + (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)C_6]$
$+x^6[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_6]$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{6} P_i x^i = P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + P_5x^5 + P_6x^6$$

$= (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2$
$+6a_3C_3 + 24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3$
$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4 + 120a_4C_5$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4]$
$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 + 60a_3C_5 + 360a_4C_6$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4 - 240a_4\alpha D_5]$
$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^4)C_5 + 120a_3C_6$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4 - 60a_3\alpha D_5 - 480a_4\alpha D_6]$
$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (30a_2 - 180a_4\alpha^4)C_6$
$+(a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 + (20a_4\alpha^3 - 10a_2\alpha)D_5 - 90a_3\alpha D_6]$
$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5$
$+(24a_4\alpha^3 - 12a_2\alpha)D_6] + x^6[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_6]$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 + 6a_3C_3 + 24a_4C_4 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_0 + (4a_4\alpha^3 - 2a_2\alpha)D_1 - 6a_3\alpha D_2 - 24a_4\alpha D_3 = P_0 \quad (1)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 + 24a_3C_4 + 120a_4C_5 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_1 + (8a_4\alpha^3 - 4a_2\alpha)D_2 - 18a_3\alpha D_3 - 96a_4\alpha D_4 = P_1 \quad (2)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 + 60a_3C_5 + 360a_4C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_2 + (12a_4\alpha^3 - 6a_2\alpha)D_3 - 36a_3\alpha D_4 - 240a_4\alpha D_5 = P_2 \quad (3)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^4)C_5 + 120a_3C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_3 + (16a_4\alpha^3 - 8a_2\alpha)D_4 - 60a_3\alpha D_5 - 480a_4\alpha D_6 = P_3 \quad (4)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 + (30a_2 - 180a_4\alpha^4)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_4 + (20a_4\alpha^3 - 10a_2\alpha)D_5 - 90a_3\alpha D_6 = P_4 \quad (5)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_5$$
$$+(24a_4\alpha^3 - 12a_2\alpha)D_6 = P_5 \quad (6)$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)C_6 + (a_3\alpha^3 - a_1\alpha)D_6 = P_6 \quad (7)$$

จาก (7) จะได้

$$C_6 = \frac{P_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (6) จะได้

$$C_5 = \frac{P_5 - (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5 + (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)D_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (5) จะได้

$$C_4 = \frac{\begin{pmatrix} P_4 - (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 - (30a_2 - 180a_4\alpha^4)C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)D_5 - 90a_3\alpha D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (4) จะได้

$$C_3 = \frac{\begin{pmatrix} P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 - (20a_2 - 120a_4\alpha^4)C_5 - 120a_3C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)D_4 + 60a_3\alpha D_5 + 480a_4\alpha D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (3) จะได้

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - (12a_2 - 72a_4\alpha^4)C_4 - 60a_3C_5 - 360a_4C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)D_3 + 36a_3\alpha D_4 + 240a_4\alpha D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (2) จะได้

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - (6a_2 - 36a_4\alpha^4)C_3 - 24a_3C_4 - 120a_4C_5 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)D_2 + 18a_3\alpha D_3 + 96a_4\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จาก (1) จะได้

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - (2a_2 - 12a_4\alpha^4)C_2 - 6a_3C_3 - 24a_4C_4 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 + 6a_3\alpha D_2 + 24a_4\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ เมื่อ

$$g(x) = \sum_{i=0}^{6} Q_i x^i = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4 + Q_5x^5 + Q_6x^6$$
$$= (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3$$

$$+x[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4 + 120a_4D_5$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4]$$
$$+x^2[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_4 + 60a_3D_5 + 360a_4D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3\alpha C_4 + 240a_4\alpha C_5]$$
$$+x^3[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)D_5 + 120a_3D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4 + 60a_3\alpha C_5 + 480a_4\alpha C_6]$$
$$+x^4[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (30a_2 - 180a_4\alpha^2)D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)C_5 + 90a_3\alpha C_6]$$
$$+x^5[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 + (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)C_6]$$
$$+x^6[(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_6]$$

จะได้ว่า

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_0 + (a_1 - 3a_3\alpha^2)D_1 + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)D_2 + 6a_3D_3 + 24a_4D_4$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)C_1 + 6a_3\alpha C_2 + 24a_4\alpha C_3 = Q_0 \tag{8}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_1 + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)D_2 + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)D_3 + 24a_3D_4 + 120a_4D_5$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)C_2 + 18a_3\alpha C_3 + 96a_4\alpha C_4 = Q_1 \tag{9}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_2 + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)D_3 + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)D_4 + 60a_3D_5 + 360a_4D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)C_3 + 36a_3\alpha C_4 + 240a_4\alpha C_5 = Q_2 \tag{10}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_3 + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)D_4 + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)D_5 + 120a_3D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)C_4 + 60a_3\alpha C_5 + 480a_4\alpha C_6 = Q_3 \tag{11}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)D_5 + (30a_2 - 180a_4\alpha^2)D_6$$
$$+(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)C_5 + 90a_3\alpha C_6 = Q_4 \tag{12}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_5 + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5$$
$$+(12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)C_6 = Q_5 \tag{13}$$

$$(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_6 = Q_6 \tag{14}$$

แทน C_6 ใน (14) จะได้

$$D_6 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_6 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_5 ใน (13) จะได้

$$D_5 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_5 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_5 \\ +[(6a_1 - 18a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(12a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_4 ใน (12) จะได้

$$D_4 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_4 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_4 \\ +[(5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (10a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_5 \\ +[(30a_2 - 180a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 90a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (5a_1 - 15a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_5 \\ -[90a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (30a_2 - 180a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_3 ใน (11) จะได้

$$D_3 = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_3 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_3 \\ +[(4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ +[(20a_2 - 120a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 60a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_5 \\ +[120a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 480a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (4a_1 - 12a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[60a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (20a_2 - 120a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_5 \\ -[480a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 1200a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_6 \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_2 ใน (10) จะได้

$$D_2 = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_2 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[(12a_2 - 72a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 36a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 \\ +[60a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 240a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_5 + 360a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_6 \\ -[(6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (3a_1 - 9a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (12a_2 - 72a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[240a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 60a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 - 360a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_6 \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_1 ใน (9) จะได้

$$D_1 = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_1 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[(6a_2 - 36a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 18a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[24a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 96a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_4 + 120a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_5 \\ -[(4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_1 - 6a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (6a_2 - 36a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[96a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 24a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_4 - 120a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_5 \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

แทน C_0 ใน (8) จะได้

$$D_0 = \frac{\left(\begin{array}{c} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_0 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_1 \\ +[(2a_2 - 12a_4\alpha^4)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 6a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[6a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 24a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_3 + 24a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_4 \\ -[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (2a_2 - 12a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[24a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + 6a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_3 - 24a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_4 \end{array}\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_4y^{(4)} + a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{6} P_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{6} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา อยู่ในรูปแบบ

$y = (C_0 + C_1x + C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+C_6x^6)\sin\alpha x + (D_0 + D_1x + D_2x^2+D_3x^3+D_4x^4+D_5x^5+D_6x^6)\cos\alpha x$

เมื่อ

$$C_0 = \frac{\begin{pmatrix} P_0 - (a_1 - 3a_3\alpha^2)C_1 - (2a_2-12a_4\alpha^4)C_2 - 6a_3C_3 - 24a_4C_4 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_0 + (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_1 + 6a_3\alpha D_2 + 24a_4\alpha D_3 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_1 = \frac{\begin{pmatrix} P_1 - (2a_1 - 6a_3\alpha^2)C_2 - (6a_2-36a_4\alpha^4)C_3 - 24a_3C_4 - 120a_4C_5 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_1 + (4a_2\alpha - 8a_4\alpha^3)D_2 + 18a_3\alpha D_3 + 96a_4\alpha D_4 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_2 = \frac{\begin{pmatrix} P_2 - (3a_1 - 9a_3\alpha^2)C_3 - (12a_2-72a_4\alpha^4)C_4 - 60a_3C_5 - 360a_4C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_2 + (6a_2\alpha - 12a_4\alpha^3)D_3 + 36a_3\alpha D_4 + 240a_4\alpha D_5 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_3 = \frac{\begin{pmatrix} P_3 - (4a_1 - 12a_3\alpha^2)C_4 - (20a_2-120a_4\alpha^4)C_5 - 120a_3C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_3 + (8a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)D_4 + 60a_3\alpha D_5 + 480a_4\alpha D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_4 = \frac{\begin{pmatrix} P_4 - (5a_1 - 15a_3\alpha^2)C_5 - (30a_2-180a_4\alpha^4)C_6 \\ +(a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_4 + (10a_2\alpha - 20a_4\alpha^3)D_5 - 90a_3\alpha D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_5 = \frac{P_5 - (6a_1 - 18a_3\alpha^2)C_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_5 + (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)D_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$C_6 = \frac{P_6 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}$$

$$D_0=\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_0-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_0 \\ +[(a_1-3a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_1 \\ +[(2a_2-12a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-6a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[6a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-24a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3+24a_4(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_4 \\ -[(2a_2\alpha-4a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(a_1-3a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_1 \\ -[6a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(2a_2-12a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[24a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+6a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3-24a_4(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_4 \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_1=$$

$$\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_1-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_1 \\ +[(2a_1-6a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(4a_2\alpha-8a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_2 \\ +[(6a_2-36a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-18a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[24a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-96a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4+120a_4(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_5 \\ -[(4a_2\alpha-8a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(2a_1-6a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_2 \\ -[18a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(6a_2-36a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[96a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+24a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4-120a_4(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_5 \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_2=$$

$$\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_2-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_2 \\ +[(3a_1-9a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(6a_2\alpha-12a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_3 \\ +[(12a_2-72a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-36a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4 \\ +[60a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-240a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_5+360a_4(a_1\alpha-a_3\alpha^3)C_6 \\ -[(6a_2\alpha-12a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(3a_1-9a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3 \\ -[36a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(12a_2-72a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[240a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+60a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_3-360a_4(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)D_6 \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_3=\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_3-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_3 \\ +[(4a_1-12a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(8a_2\alpha-16a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_4 \\ +[(20a_2-120a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-60a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_5 \\ +[120a_3(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-480a_4\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(8a_2\alpha-16a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(4a_1-12a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_4 \\ -[60a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(20a_2-120a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_5 \\ -[480a_4\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+1200a_3(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_6 \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_4=\frac{\begin{pmatrix} (a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)Q_4-(a_1\alpha-a_3\alpha^3)P_4 \\ +[(5a_1-15a_3\alpha^2)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-(10a_2\alpha-24a_4\alpha^3)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_5 \\ +[(30a_2-180a_4\alpha^4)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)-90a_3\alpha(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(10a_2\alpha-20a_4\alpha^3)(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(5a_1-15a_3\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_5 \\ -[90a_3\alpha(a_1\alpha-a_3\alpha^3)+(30a_2-180a_4\alpha^2)(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)]D_6 \end{pmatrix}}{(a_0-a_2\alpha^2+a_4\alpha^4)^2+(a_1\alpha-a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_5 = \frac{\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_5 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_5 \\ +[(6a_1 - 18a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (12a_2\alpha - 24a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_6 \\ -[(12a_2\alpha - 16a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (6a_1 - 18a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_6 \end{pmatrix}}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

$$D_6 = \frac{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)Q_6 - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)P_6}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}$$

จากตัวอย่างที่ 5 และ 6 สามารถสรุปได้ว่าการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันทางขวามืออยู่ในรูปแบบของ $f(x)\sin\alpha x + g(x)\cos\alpha x$ เมื่อ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^i$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} Q_i x^i$$

โดยที่ α เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\pm\alpha i$ ไม่ใช่รากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณา เมื่อ $n = \max(l, k)$

จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการในรูปทั่วไป อยู่ในรูปแบบ

$$y = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} C_i x^i\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)}\sin\alpha x + \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} D_i x^i\right)}{(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)^2 + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)^2}\cos\alpha x$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} C_i = {} & B_i + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_i + (i+1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{i+1} + 3(i+1)(i+2)a_3\alpha D_{i+2} \\ & +4(i+1)(i+2)(i+3)a_4\alpha D_{i+3} - (i+1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{i+1} \\ & -(i+1)(i+2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{i+2} - (i+1)(i+2)(i+3)a_3C_{i+3} \\ & -(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_4C_{i+4} \end{aligned}$$

เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,(n-4)$

$$\begin{aligned} C_{n-3} &= B_{n-3} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-3} + (n-2)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-2} \\ &\quad +3(n-1)(n-2)(a_3\alpha)D_{n-1} + 4n(n-1)(n-2)(a_4\alpha)D_n \\ &\quad -(n-2)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-2} - (n-1)(n-2)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_{n-1} \\ &\quad -n(n-1)(n-2)(a_3)C_n \\ C_{n-2} &= B_{n-2} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-2} + (n-1)(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_{n-1} \\ &\quad +3n(n-1)(a_3\alpha)D_n - (n-1)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_{n-1} - n(n-1)(a_2 - 6a_4\alpha^4)C_n \\ C_{n-1} &= B_{n-1} + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_{n-1} + n(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)D_n - (n)(a_1 - 3a_3\alpha^3)C_n \\ C_n &= B_n + (a_1\alpha - a_3\alpha^3)D_n \end{aligned}$$

และ

$$D_i = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)E_i - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_i$$
$$+(i+1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+1}$$
$$+[((i+2)(i+1)a_2 - 6(i+2)(i+1)a_4\alpha^4))(a_1\alpha - a_3\alpha^3)$$
$$-3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+2}$$
$$+[(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3)$$
$$-4(i+3)(i+2)(i+1)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{i+3}$$
$$+(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_1\alpha - a_3\alpha^3)C_{i+4}$$
$$-(i+1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+1}$$
$$-[3(i+2)(i+1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + ((i+1)(i+2)a_2\alpha$$
$$-6(i+1)(i+2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+2}$$
$$-[4(i+3)(i+2)(i+1)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)$$
$$+(i+3)(i+2)(i+1)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{i+3}$$
$$-(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)a_4(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)D_{i+4}$$

เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,(n-4)$

$$D_{n-3} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)E_{n-3} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_{n-3}$$
$$+(n-2)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-2}$$
$$+\big[\big((n-1)(n-2)a_2 - 6(n-1)(n-2)a_4\alpha^4\big)(a_1\alpha - a_3\alpha^3\big)$$
$$-3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1}$$
$$+[n(n-1)(n-2)a_3(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - 4n(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n$$
$$-(n-2)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-2}$$
$$-[3(n-1)(n-2)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3)$$
$$+((n-1)(n-2)a_2\alpha - 6(n-1)(n-2)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1}$$
$$-[4(n)(n-1)(n-2)a_4\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + n(n-1)(n-2)a_3(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n$$

$$D_{n-2} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)E_{n-2} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_{n-2}$$
$$+(n-1)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_{n-1}$$
$$+\big[\big((n)(n-1)a_2 - 6(n)(n-1)a_4\alpha^2\big)(a_1\alpha - a_3\alpha^3\big)$$
$$-3n(n-1)a_3\alpha(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n$$
$$-(n-1)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_{n-1}$$
$$-[3n(n-1)a_3\alpha(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (n(n-1)a_2$$
$$-6(n)(n-1)a_4\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n$$

$$D_{n-1} = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)E_{n-1} - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_{n-1}$$
$$+(n)[(a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) - (2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]C_n$$
$$-(n)[(2a_2\alpha - 4a_4\alpha^3)(a_1\alpha - a_3\alpha^3) + (a_1 - 3a_3\alpha^2)(a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)]D_n$$

$$D_n = (a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4)E_n - (a_1\alpha - a_3\alpha^3)B_n$$