วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาปัวส์ซอง

TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR SOLVING POISSON PROBLEM

กนกกาญจน์ สงวนสิน

วทัญญู วนาสินชัย

เสาวณีย์ จิตต์ประเสริฐ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

TWO-DIMENSIONAL DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD FOR SOLVING POISSON PROBLEM

KANOKKAN SANGUANSIN
WATHANYU WANASINCHAI
SAOWANEE JITPRASERT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาปัวส์ซอง
Two-dimensional Differential Transform Method for Solving Poisson Problem

ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกกาญจน์ สงวนสิน รหัสนักศึกษา 58050001

นายวทัญญู วนาสินชัย รหัสนักศึกษา 58050143

นางสาวเสาวณีย์ จิตต์ประเสริฐ รหัสนักศึกษา 58050184

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ดร.พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาปัวส์ซอง
ชื่อนักศึกษา นางสาวกนกกาญจน์ สงวนสิน รหัสนักศึกษา 58050001
นายวทัญญู วนาสินชัย รหัสนักศึกษา 58050143
นางสาวเสาวณีย์ จิตต์ประเสริฐ รหัสนักศึกษา 58050184
ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
คณะ วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา 2561
อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ได้ทำการศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาปัวส์ซองภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบที่กำหนด ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ โดยเริ่มจากการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เพื่อแปลงสมการปัวส์ซองให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดและนำความสัมพันธ์ดังกล่าวมาเขียนโปรแกรม เพื่อใช้หาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลย

คำสำคัญ: การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ ปัญหาปัวส์ซอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Two-dimensional Differential Transform Method for Solving Poisson Problem	
Students	Miss Kanokkan Sanguansin	Student ID 58050001
	Mr.Wathanyu Wanasinchai	Student ID 58050143
	Miss Saowanee Jitprasert	Student ID 58050184
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Faculty	Science	
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)	
Academic Year	2018	
Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan	

Abstract

The purpose of this study is to apply two-dimensional differential transform method to solve the Poisson equation with under initial and boundary conditions which the obtained solution is in the form of Taylor series. The Poisson equation is transformed by the differential transformation method (DTM) to obtain the recurrence formulas and these formulas will be used to find coefficients of power series solution.

Keywords: Two-dimensional Differential Transform, Poisson Problem

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาปัวส์ซอง (Two-dimensional Differential Transform Method for Solving Poisson Problem) สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษเป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษาและแนวทางในการดำเนินงาน ตลอดจนการตรวจสอบและการแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ แก่คณะผู้จัดทำเป็นอย่างดี ทำให้ปัญหาพิเศษนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อ.พรชัย ชัยสนิท และ ดร.พุทธพร วานิชกร กรรมการผู้คุมสอบปัญหาพิเศษนี้ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อแก้ไข และให้แนวคิดต่างๆ ที่เกิดประโยชน์ในการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งภาคทฤษฎีและปฏิบัติ ทำให้การดำเนินงานเป็นไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดามารดาและครอบครัวของคณะผู้จัดทำ ที่คอยให้กำลังใจให้ความช่วยเหลือ และสนับสนุนการศึกษาด้วยดีเสมอมา

กนกกาญจน์ สงวนสิน
วทัญญู วนาสินชัย
เสาวณีย์ จิตต์ประเสริฐ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....ข
กิตติกรรมประกาศ.....ค
สารบัญ.....ง
สารบัญตาราง.....จ
สารบัญรูป.....ฉ
บทที่ 1 บทนำ
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหา.....1
1.3 ขอบเขตของปัญหา.....2
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ.....2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....2
1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน.....3
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน
2.1 สมการลาปลาซ (Laplace Equation) 4
2.2 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง.....10
2.3 ศูนย์ยกกำลังศูนย์.....23
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย
3.1 การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional Transform Method).....25
3.2 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse transform).....25
3.3 อนุกรมเทเลอร์สองตัวแปร (Taylor's series of two variables).....25
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล
4.1 การใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติเพื่อแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....45
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ
5.1 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....74
5.2 ข้อเสนอแนะ.....76
เอกสารอ้างอิง.....77

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1.1 ตารางแสดงระยะเวลาในการดำเนินงาน....3
2.1 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในหนึ่งมิติ....22
2.2 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ....22
2.3 การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น....23
2.4 ฟังก์ชันที่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทเลอร์....23
5.1 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ....74
5.2 ตารางแสดงสมการและเงื่อนไขขอบของตัวอย่างที่ 4.1....75
5.3 ตารางแสดงสมการและอนุกรมเทเลอร์ของตัวอย่างที่ 4.2-4.4....75

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

2.1 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ....6
3.1 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ....29
3.2 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ....33
3.3 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ....37
3.4 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ....41
4.1 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.10) ของสมการที่ (4.1) ภายใต้เงื่อนไข (4.2) และ (4.3) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ....49
4.2 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.28) ของสมการที่ (4.11) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์....56
4.3 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.54) ของสมการที่ (4.29) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติเปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์....65
4.4 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.81) ของสมการที่ (4.55) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์....73

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในหนึ่งมิติ (Differential Transform Method : DTM) ถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Zhou[1] ได้นำไปใช้ในการแก้ปัญหาเริ่มต้น ทั้งที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้านอกจากนี้ยังนำไปใช้ในการแก้ปัญหาแบบอนุกรมอีกด้วยและวิธีเดียวกันนั้น ในปี 1999 Chen และ Ho [2] เสนอวิธีการในการแก้ปัญหาค่าลักษณะเฉพาะโดยใช้เทคนิคการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) คือการหาผลเฉลยในรูปแบบปิดหรือวิธีการแก้ปัญหาโดยการประมาณ ซึ่งได้แนวคิดมาจากอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) ซึ่งวิธีนี้ใช้เวลาในการประมวลผลที่ค่อนข้างช้า Chen และ Ho จึงได้มีการพัฒนาการแปลงเชิงอนุพันธ์ (DTM) ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์

การแปลงเชิงอนุพันธ์ในในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) $u(x,y)$ เป็นการแปลงของฟังก์ชัน ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันเดิม (Original Function) ไปเป็น $U(m,n)$ ฟังก์ชันใหม่ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการแปลง (Transform Function) การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของ $u(x,y)$ กำหนดโดย

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

และการแปลงเชิงอนุพันธ์ผกผันของ $U(m,n)$ ซึ่ง $u(x,y)$ อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ นิยามได้โดย

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U(m,n)x^m y^n$$

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}x^m y^n$$

ในการทำปัญหาพิเศษนี้เราจะศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) เพื่อหาผลเฉลยสมการปัวส์ซองโดยสร้างสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อนำมาใช้หาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยของสมการดังกล่าว

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหา

1) เพื่อศึกษาวิธีการ บทนิยาม ทฤษฎี และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM)

2) พัฒนาและปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) ที่เหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาสมการปัวส์ซอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) เพื่อหาผลเฉลยของสมการปัวส์ซองด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM)

4) เพื่อเขียนโปรแกรมสำหรับการหาผลเฉลยปัวส์ซอง

1.3 ขอบเขตของปัญหา

การแก้ปัญหาของปัวส์ซองที่ศึกษาในปัญหาพิเศษนี้จะศึกษาเมื่อโดเมนเป็นสี่เหลี่ยมและขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันของ x

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1) ศึกษาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการลาปลาซและสมการปัวส์ซอง

2) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) ที่เกี่ยวข้องกับนิยาม ทฤษฎี และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไป

3) พัฒนาและปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาของสมการปัวส์ซอง

4) สร้างสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อนำไปหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลย

5) เขียนโปรแกรมสำหรับการหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยสำหรับการแก้ปัญหาสมการปัวส์ซอง

6) จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและเตรียมนำเสนอ

7) นำเสนอปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รับความรู้ในการศึกษาวิธีการ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Two-Dimensional DTM) ในสองมิติ

2) ได้รับความรู้ในการหาผลเฉลยของสมการปัวส์ซองด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM)

3) ได้โปรแกรมสำหรับการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional DTM) ในฟังก์ชันต่าง ๆของสมการปัวส์ซอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

การดำเนินงาน	ระยะเวลาดำเนินงาน									
	2561					2562				
	สิงหาคม	กันยายน	ตุลาคม	พฤศจิกายน	ธันวาคม	มกราคม	กุมภาพันธ์	มีนาคม	เมษายน	พฤษภาคม
1) ศึกษาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการลาปลาซและสมการปัวส์ซอง										
2) ศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ ที่เกี่ยวข้องกับนิยาม ทฤษฎี และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไป										
3) พัฒนาและปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาของสมการปัวส์ซอง										
4) สร้างสูตรการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อนำไปหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลย										
5) เขียนโปรแกรมสำหรับการหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยสำหรับการแก้ปัญหาสมการปัวส์ซอง										
6) จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษและเตรียมนำเสนอ										
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่2
ความรู้พื้นฐาน

2.1 สมการลาปลาซ (Laplace Equation)

สมการลาปลาซเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่ภาวะคงที่ (Steady-state หรือ Stationary-state) กล่าวคือภาวะที่ระบบไม่เปลี่ยนไปตามเวลา ฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซจะเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic function)

$$u_{yy} + c^2 u_{xx} = 0$$

$$u_{yy} = -c^2 u_{xx}$$

จากสมการลาปลาซ $u_{yy} = -c^2 u_{xx}$

โดยใช้วิธีแยกตัวแปร จะกำหนดให้ $u(x,y) = X(x)Y(y)$

จะได้ว่า $X(x)Y''(y) = -c^2 X''(x)Y(y)$ (2.1)

นั่นคือ $c^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$ (2.2)

1. กรณีที่ $\lambda^2 > 0$

จากสมการที่ (2.2)

จะได้ว่า $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{\lambda^2}{c^2}$

นั่นคือ $X''(x) - \dfrac{\lambda^2}{c^2} X(x) = 0$

$$r^2 - \frac{\lambda^2}{c^2} = 0$$

$$r^2 = \frac{\lambda^2}{c^2}$$

$$\therefore r = \pm\frac{\lambda}{c}$$

ดังนั้น $X(x) = c_1 \cosh\dfrac{\lambda}{c}x + c_2 \sinh\dfrac{\lambda}{c}x$ (2.3)

และ $-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$

นั่นคือ $-Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = -\lambda^2$$

$$\therefore r = \pm\lambda i$$

ดังนั้น $Y(y) = c_3 \cos\lambda y + c_4 \sin\lambda y$ (2.4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cosh\frac{\lambda}{c}x + c_2 \sinh\frac{\lambda}{c}x)(c_3 \cos\lambda y + c_4 \sin\lambda y)$ (2.5)

2. กรณี $\lambda^2 = 0$

จากสมการที่ (2.2)

จะได้ว่า $$\frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

$$X''(x) = 0$$

ดังนั้น $X(x) = c_5 x + c_6$ (2.6)

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

นั่นคือ $$-Y''(y) = 0$$

$$Y''(y) = 0$$

ดังนั้น $Y(y) = c_7 y + c_8$ (2.7)

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_5 x + c_6)(c_7 y + c_8)$ (2.8)

3. กรณีที่ $-\lambda^2 < 0$

จากสมการที่ (2.2)

จะได้ว่า $$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\lambda^2}{c^2}$$

นั่นคือ $$X''(x) + \frac{\lambda^2}{c^2}X(x) = 0$$

$$r^2 + \frac{\lambda^2}{c^2} = 0$$

$$r^2 = -\frac{\lambda^2}{c^2}$$

$$\therefore r = \pm\frac{\lambda i}{c}$$

ดังนั้น $X(x) = c_9 \cos\frac{\lambda}{c}x + c_{10} \sin\frac{\lambda}{c}x$ (2.9)

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

นั่นคือ $$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

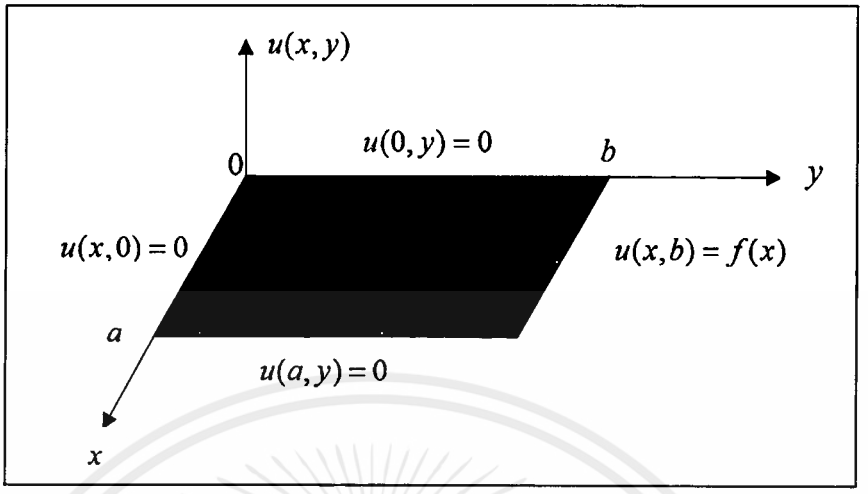
$$r^2 = \lambda^2$$

$$\therefore r = \pm\lambda$$

ดังนั้น $Y(y) = c_{11} \cosh\lambda y + c_{12} \sinh\lambda y$ (2.10)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_9 \cos\frac{\lambda}{c}x + c_{10}\sin\frac{\lambda}{c}x)(c_{11}\cosh\lambda y + c_{12}\sinh\lambda y)$ (2.11)



รูปที่ 2.1 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x,y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ

จากสมการที่ (2.1) เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบ

$B.C.$ $u(x,b) = f(x)$

$B.C.$ $u(a,y) = 0$

$B.C.$ $u(0,y) = 0$

$B.C.$ $u(x,0) = 0$

1. กรณีที่ $\lambda^2 > 0$

จากสมการที่ (2.5) พิจารณาที่ $c = 1$

จะได้ว่า $u(x,y) = (c_1\cosh\lambda x + c_2\sinh\lambda x)(c_3\cos\lambda y + c_4\sin\lambda y)$ (2.12)

จาก $B.C.\ u(x,0) = 0$

$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0$

จะได้ว่า $X(x) = 0$ หรือ $Y(0) = 0$

ถ้า $X(x) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = f(x)$

ดังนั้น $Y(0) = 0$

จากสมการที่ (2.4)

จะได้ว่า $Y(0) = c_3\cos\lambda(0) + c_4\sin\lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_3 = 0$ และ $c_4 \neq 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $Y(y) = c_4 \sin \lambda y$

จาก $\boxed{B.C.\ u(0,y) = 0}$

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(0) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(y) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = f(x)$

ดังนั้น $X(0) = 0$

จากสมการที่ (2.3)

จะได้ว่า $X(0) = c_1 \cosh \lambda(0) + c_2 \sinh \lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_1 = 0$ และ $c_2 \neq 0$ (จากเงื่อนไข $u(0,y) = 0$ จะได้ว่า $c_3 = 0$)

นั่นคือ $X(x) = c_2 \sinh \lambda x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(a,y) = 0}$

$$u(a,y) = X(a)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(a) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(y) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = f(x)$

ดังนั้น $X(a) = 0$

จาก $X(x) = c_2 \sinh \lambda x$

จะได้ว่า $X(a) = c_2 \sinh \lambda(a)$

เนื่องจาก $c_2 \neq 0$

$\therefore\ \sinh \lambda(a) = 0$

$\lambda(a) = 0$ (จากเงื่อนไข $u(a,y) = 0$ จะได้ว่า $\lambda(a) = 0$)

ดังนั้น $X(x) = c_2 \sinh(0)$

$= 0$

$\therefore\ u(x,y) = 0$

ดังนั้น เงื่อนไขที่กำหนดให้ไม่สอดคล้องกับผลเฉลยกรณีที่ $\lambda^2 > 0$

2. $\boxed{\text{กรณีที่ } \lambda^2 = 0}$

จากสมการที่ (2.8)

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,0) = 0}$

$$X(x)Y(0) = 0$$

จะได้ว่า $X(x) = 0$ หรือ $Y(0) = 0$

ถ้า $X(x) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = f(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $Y(0)=0$

จาก $Y(y)=c_7y+c_8$

จะได้ว่า $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$

$\therefore\ c_7\neq 0$ และ $c_8=0$ (จากเงื่อนไข $u(x,b)=f(x)$ จะได้ว่า $c_8=0$)

$\therefore\ u(x,y)=c_7y$

ดังนั้นเงื่อนไขที่กำหนดยังสรุปไม่ได้ต้องแทนเงื่อนไขต่อไป

3. กรณีที่ $-\lambda^2<0$

จากสมการที่ (2.11)

จาก $B.C.\ u(x,0)=0$

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=0$$

จะได้ว่า $X(x)=0$ หรือ $Y(0)=0$

ถ้า $X(x)=0$ แล้ว $u(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b)=f(x)$

ดังนั้น $Y(0)=0$

จากสมการที่ (2.10)

จะได้ว่า $Y(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=0$

$\therefore\ c_{11}=0$ และ $c_{12}\neq 0$ (จากเงื่อนไข $u(x,0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$)

นั่นคือ $Y(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

จาก $B.C.\ u(0,y)=0$

$$u(0,y)=X(0)Y(y)=0$$

จะได้ว่า $X(0)=0$ หรือ $Y(y)=0$

ถ้า $Y(0)=0$ แล้ว $u(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b)=f(x)$

ดังนั้น $X(0)=0$

จากสมการที่ (2.9)

จะได้ว่า $X(0)=c_9\cos\lambda(0)+c_{10}\sin\lambda(0)=0$

$\therefore\ c_9=0$ และ $c_{10}\neq 0$ (จากเงื่อนไข $u(0,y)=0$ จะได้ว่า $c_9=0$)

นั่นคือ $X(x)=c_{10}\sin\lambda x$

จาก $B.C.\ u(a,y)=0$

$$u(a,y)=X(a)Y(y)=0$$

จะได้ว่า $X(a)=0$ หรือ $Y(y)=0$

ถ้า $Y(y)=0$ แล้ว $u(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b)=f(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $X(a)=0$

จาก $X(x)=c_{10}\sin\lambda x$

จะได้ว่า $X(a)=c_{10}\sin\lambda a=0$

เนื่องจาก $c_{10}\neq 0$

$$\therefore \sin\lambda a=0$$

$$\lambda(a)=n\pi$$

$$\lambda=\frac{n\pi}{a} \qquad ;n=1,2,3,...$$

ดังนั้น $X(x)=c_{10}\sin\frac{n\pi}{a}x$ และ $Y(y)=c_{12}\sinh\frac{n\pi}{a}y$

นั่นคือ $u(x,y)=X(x)Y(y)$

$$=c_{10}\sin\frac{n\pi}{a}xc_{12}\sinh\frac{n\pi}{a}y \qquad ;n=1,2,3,...$$

$$=A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y \qquad ;n=1,2,3,...$$

หลักการซ้อนทับ (Superposition principle)

ผลเฉลยทั่วไปคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,b)=f(x)}$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}b=f(x)$

หรือ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sinh(\frac{n\pi}{a}b)\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$ ซึ่งคือ Fourier Sine series

จะได้ว่า $A_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx$

$$A_n=\frac{2}{a\sin\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

นิยามที่ 1 การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional Transform Method) [1] ของฟังก์ชัน $U(m,n)$ กำหนดโดย

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

การแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นการแปลงฟังก์ชัน $u(x,y)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเดิม (Original Function) ไปเป็นฟังก์ชันใหม่ $U(m,n)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแปลง (Transform Function)

เราจะพิจารณา $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สองตัวแปร (Analytical Function of two variables) ภายในโดเมน Ω ฟังก์ชัน $u(x,y)$ สามารถถูกแทนด้วยอนุกรม รอบจุด $(x_0,y_0)\in\Omega$ โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

นิยามที่ 2 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse transform) ของ $U(m,n)$ ในสมการที่ (2.1) ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U(m,n)x^m y^n$$

จะได้ $$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}x^m y^n$$

กำหนดให้ U,V,W,F เป็น Transform Function ของ u,v,w,f ตามลำดับ

ทฤษฎีหลักมูลฐานของการแปลงค่า 2 มิติ

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ถ้า $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$ แล้ว $U(m,n)=V(m,n)\pm W(m,n)$ [1]

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$

จะได้ว่า $$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}(v(x,y)\pm w(x,y))}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}v(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}\pm\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}w(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=V(m,n)\pm W(m,n)$$

ดังนั้น $U(m,n)=V(m,n)\pm W(m,n)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ถ้า $u(x,y)=av(x,y)$ แล้ว $U(m,n)=aV(m,n)$ ให้ a เป็นค่าคงที่ [1]

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=av(x,y)$

จะได้ว่า $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}av(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่

$$=a\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}v(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=aV(m,n)$$

ดังนั้น $U(m,n)=aV(m,n)$

บทแทรก 1 ถ้า $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ แล้ว $U(m,n)=(m+1)F(m+1,n)$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\frac{\partial^n}{\partial y^n}f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{(m+1)}{m!n!(m+1)}\left[\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\frac{\partial^n}{\partial y^n}f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{(m+1)}{(m+1)!n!}\left[\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\frac{\partial^n}{\partial y^n}f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$=(m+1)F(m+1,n)$$

ดังนั้น $U(m,n)=(m+1)F(m+1,n)$

บทแทรก 2 ถ้า $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ แล้ว $U(m,n)=(n+1)F(m,n+1)$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x=0,y=0}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{(n+1)}{m!n!(n+1)}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{n+1}{m!(n+1)!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= (n+1)F(m,n+1)$$

ดังนั้น $U(m,n) = (n+1)F(m,n+1)$

บทแทรก 3 ถ้า $u(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ แล้ว $U(m,n) = (m+2)(m+1)F(m+2,n)$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n) = \dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$

จะได้ว่า $U(m,n) = \dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m y^n}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right]_{x=0,y=0}$

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+2}}{\partial x^{m+2}}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{(m+2)(m+1)}{(m+2)(m+1)}\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+2}}{\partial x^{m+2}}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y)\right]_{x=o,y=0}$$

$$= (m+2)(m+1)\frac{1}{(m+2)!n!}\left[\frac{\partial^{m+2}}{\partial x^{m+2}}\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= (m+2)(m+1)F(m+2,n)$$

ดังนั้น $U(m,n) = (m+2)(m+1)F(m+2,n)$

บทแทรก 4 ถ้า $u(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ แล้ว $U(m,n) = (n+2)(n+1)F(m,n+2)$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n) = \dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$

จะได้ว่า $U(m,n) = \dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]_{x=0,y=0}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+2}}{\partial y^{n+2}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)}\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+2}}{\partial y^{n+2}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

$$= (n+2)(n+1)\frac{1}{m!(n+2)!}\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^{n+2}}{\partial y^{n+2}} f(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

ดังนั้น $U(m,n) = (n+2)(n+1)F(m,n+2)$

บทแทรก 5 สูตรของไลน์นิตซ์สำหรับการหาอนุพันธ์เทียบ 2 ตัวแปรสำหรับทุกจำนวนเต็ม [3]

$$D^{(m,n)}vw$$

$$= \binom{m}{0}\binom{n}{0}v^{(0,n-0)}w^{(m-0,0)} + \binom{m}{0}\binom{n}{1}v^{(0,n-1)}w^{(m-0,1)} + \ldots + \binom{m}{0}\binom{n}{l}v^{(0,n-l)}w^{(m-0,l)}$$

$$+ \binom{m}{1}\binom{n}{0}v^{(1,n-0)}w^{(m-1,0)} + \binom{m}{1}\binom{n}{1}v^{(1,n-1)}w^{(m-1,1)} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{l}v^{(1,n-l)}w^{(m-1,l)}$$

$$+ \binom{m}{2}\binom{n}{0}v^{(2,n-0)}w^{(m-2,0)} + \binom{m}{2}\binom{n}{1}v^{(2,n-1)}w^{(m-2,1)} + \ldots + \binom{m}{2}\binom{n}{0}v^{(2,n-l)}m^{(m-2,l)}$$

$$+ \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}v^{(k,n-0)}w^{(m-k,0)} + \binom{m}{k}\binom{n}{1}v^{(k,n-1)}w^{(m-k,1)} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}$$

<u>พิสูจน์</u> โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $P(m,n)$ แทนสมการข้างต้น

จะได้ $P(1,1)$ คือ

$$= \binom{1}{0}\binom{1}{0}v^{(0,1)}w^{(1,0)} + \binom{1}{0}\binom{1}{1}v^{(0,0)}w^{(1,1)} + \binom{1}{1}\binom{1}{0}v^{(1,1)}w^{(0,0)} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}v^{(1,0)}w^{(0,1)}$$

$$= \frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^1}{\partial y^1}v(x,y)\frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^0}{\partial y^0}w(x,y) + \frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^0}{\partial y^0}v(x,y)\frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^1}{\partial y^1}w(x,y)$$

$$+ \frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^1}{\partial y^1}v(x,y)\frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^0}{\partial y^0}w(x,y) + \frac{\partial^1}{\partial x^1}\frac{\partial^0}{\partial y^0}v(x,y)\frac{\partial^0}{\partial x^0}\frac{\partial^1}{\partial y^1}w(x,y) \quad \text{เป็นจริง}$$

จะแสดงว่าถ้า $P(m,n)$ เป็นจริงแล้ว $P(m+1,n+1)$ เป็นจริงด้วย

ให้ $P(m,n)$ เป็นจริง

$$D^{(m,n)}(vw) = \binom{m}{0}\binom{n}{0}v^{(0,n-0)}w^{(m-0,0)} + \binom{m}{0}\binom{n}{1}v^{(0,n-1)}w^{(m-0,1)} + \ldots + \binom{m}{0}\binom{n}{l}v^{(0,n-l)}w^{(m-0,l)}$$

$$+ \binom{m}{1}\binom{n}{0}v^{(1,n-0)}w^{(m-1,0)} + \binom{m}{1}\binom{n}{1}v^{(1,n-1)}w^{(m-1,1)} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{l}v^{(1,n-l)}w^{(m-1,l)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}v^{(k,n-0)}w^{(m-k,0)}+\binom{m}{k}\binom{n}{1}v^{(k,n-1)}w^{(m-k,1)}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}$$

จะแสดงว่า $P(m+1,n+1)$ เป็นจริง

$$D(D^{(m,n)}(vw))$$
$$=D\left[\binom{m}{0}\binom{n}{0}v^{(0,n-0)}w^{(m-0,0)}+\binom{m}{0}\binom{n}{1}v^{(0,n-1)}w^{(m-0,1)}+\ldots+\binom{m}{0}\binom{n}{l}v^{(0,n-l)}w^{(m-0,l)}\right.$$
$$+\binom{m}{1}\binom{n}{0}v^{(1,n-0)}w^{(m-1,l)}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}v^{(1,n-1)}w^{(m-1,1)}+\ldots+\binom{m}{1}\binom{n}{l}v^{(1,n-l)}w^{(m-1,l)}$$
$$\left.+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}v^{(k,n-0)}w^{(m-k,0)}+\binom{m}{k}\binom{n}{1}v^{(k,n-1)}w^{(m-k,1)}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}\right]$$

$$D^{(m+1,n+1)}(vw)$$
$$=\binom{m+1}{0}\binom{n+1}{0}v^{(0,n+1)}w^{(m+1,0)}+\binom{m+1}{0}\binom{n+1}{1}v^{(0,n)}w^{(m+1,1)}+\ldots+\binom{m+1}{0}\binom{n+1}{l}v^{(0,n+1-l)}w^{(m+1,l)}$$
$$+\binom{m+1}{1}\binom{n+1}{0}v^{(1,n+1)}w^{(m,0)}+\binom{m+1}{1}\binom{n+1}{1}v^{(1,n)}w^{(m,1)}+\ldots+\binom{m+1}{1}\binom{n+1}{l}v^{(1,n+1-l)}w^{(m,l)}+\ldots+$$
$$\binom{m+1}{k}\binom{n+1}{0}v^{(k,n+1)}w^{(m+1-k,0)}+\binom{m+1}{k}\binom{n+1}{1}v^{(k,n)}w^{(m+1-k,1)}+\ldots+\binom{m+1}{k}\binom{n+1}{l}v^{(k,n+1-l)}w^{(m+1-k,l)}$$
$$=\sum_{k=0}^{m+1}\sum_{l=0}^{n+1}\binom{m+1}{k}\binom{n+1}{l}v^{(k,n+1-l)}w^{(m+1-k,l)}$$

นั่นคือ $P(m+1,n+1)$ เป็นจริงเมื่อ $P(m,n)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(m,n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า $u(x,y)=v(x,y)w(x,y)$ แล้ว $U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$ [1]

พิสูจน์ ถ้า $u(x,y)=v(x,y)w(x,y)$

แล้ว $U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$

โดยที่ $V(k,n-l)=\frac{1}{k!(n-l)!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^{(n-l)}}{\partial y^{(n-l)}}v(x,y)$

และ $W(m-k,l)=\frac{1}{(m-k)!l!}\frac{\partial^{(m-k)}}{\partial x^{(m-k)}}\frac{\partial^l}{\partial y^l}w(x,y)$

จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=v(x,y)w(x,y)$

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}v(x,y)w(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากบทแทรก 5

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{n!}{l!(n-l)!}v^{(k,n-l)}w^{(m-k,l)}\right]_{x=0\,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{k!(m-k)!}\frac{1}{l!(n-l)!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^{(n-l)}}{\partial y^{(n-l)}}v(x,y)\frac{\partial^{(m-k)}}{\partial x^{(m-k)}}\frac{\partial^l}{\partial y^l}w(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$$

ดังนั้น $U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$

บทแทรก 6 ถ้า $u(x,y)=\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial x}$ แล้ว

$$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)W(m-k+1,l)V(k,n-l)$$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=v(w)\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial x}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{(m+1)+n}}{\partial x^{m+1}\partial y^n}v(w)w(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

จากบทแทรก 5

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(k,n-l)}w^{(m-k+1,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{n!}{l!(n-l)!}v^{(k,n-l)}w^{(m-k+1,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left[\frac{(m-k+1)}{(m-k+1)}\frac{1}{l!(m-k)!}\frac{1}{k!(n-l)!}v^{(k,n-l)}w^{(m-k+1,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left[(m-k+1)\frac{1}{l!(m-k+1)!}\frac{1}{k!(n-l)!}v^{(k,n-l)}w^{(m-k+1,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)W(m-k+1,l)V(k,n-l)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)W(m-k+1,l)V(k,n-l)$

บทแทรก 7 ถ้า $u(x,y)=\dfrac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial y}$ แล้ว

$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)W(k,n-l+1)V(m-k,l)$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=\dfrac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial y}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\dfrac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial y}\right]_{x=0,y=0}$

$=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+(n+1)}}{\partial x^m\partial y^{n+1}}v(w)w(x,y)\right]_{x=0,y=0}$

จาก**บทแทรก 5**

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}v^{(m-k,l)}w^{(k,n-l+1)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{n!}{l!(n-l)!}v^{(m-k,l)}w^{(k,n-l+1)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left[\frac{(n-l+1)}{(n-l+1)}\frac{1}{k!(n-l)!}\frac{1}{l!(m-k)!}v^{(m-k,l)}w^{(k,n-l+1)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left[(n-l+1)\frac{1}{k!(n-l+1)!}w^{(k,n-l+1)}\frac{1}{l!(m-k)!}v^{(m-k,l)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left[(n-l+1)W(k,n-l+1)V(m-k,l)\right]$$

ดังนั้น $U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)W(k,n-l+1)V(m-k,l)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 4</u> ถ้า $u(x,y)=\dfrac{\partial^{r+s}v(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$ แล้ว $U(m,n)=\dfrac{(m+r)!}{m!}\dfrac{(n+s)!}{n!}V(m+r,n+s)$ [1]

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=\dfrac{\partial^{r+s}v(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}\partial^{r+s}v(x,y)}{\partial x^m\partial y^n\partial x^r\partial y^s}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+r}\partial^{n+s}v(x,y)}{\partial x^{m+r}\partial x^{n+s}}\right]_{x=0,y=0}$$

เนื่องจาก $V(m+r,n+s)=\dfrac{1}{(m+r)!(n+s)!}\left[\dfrac{\partial^{(m+r)+(n+s)}v(x,y)}{\partial x^{m+r}\partial x^{n+s}}\right]_{x=0,y=0}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}(m+r)!(n+s)!V(m+r,n+s)$

$$=\frac{(m+r)!}{m!}\frac{(n+s)!}{n!}V(m+r,n+s)$$

ดังนั้น $U(m,n)=\dfrac{(m+r)!}{m!}\dfrac{(m+s)!}{n!}V(m+r,n+s)$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5</u> ถ้า $u(x,y)=e^{av(x,y)}$ แล้ว

$$U(m,m)=\begin{cases} e^{aV(0,0)} & ;m=0,n=0 \\ a\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n}\frac{m-k}{m}V(m-k,l)U(k,n-l) & ;m\geq 1 \\ a\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n-l}{n}V(k,n-l)U(m-k,l) & ;n\geq 1 \end{cases} \quad [1]$$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

พิจารณา $m=0,n=0$

จะได้ $U(0,0)=\dfrac{1}{0!0!}\left[\dfrac{\partial^0 u(x,y)}{\partial x^0\partial y^0}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\left[u(v(x,y))\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\left[e^{av(x,y)}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=e^{aV(0,0)}$$

ดังนั้น $U(0,0)=e^{aV(0,0)}$

พิจารณา $m\geq 1,n\geq 1$

จะได้ $\dfrac{\partial u(v)}{\partial x}=au(v)\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ (2.13)

$\dfrac{\partial u(v)}{\partial y}=au(v)\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ (2.14)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาสมการที่ (2.13)

จาก**บทแทรก 1** จะได้ $\frac{\partial u(v)}{\partial x} = (m+1)U(m+1,n)$

จาก**บทแทรก 6** จะได้ $au(v)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)V(m-k+1,l)U(k,n-l)$

พิจารณาสมการที่ (2.14)

จาก**บทแทรก 2** จะได้ $\frac{\partial u(v)}{\partial y} = (n+1)U(m,n+1)$

จาก**บทแทรก 7** จะได้ $au(v)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)V(k,n-l+1)U(m-k,l)$

จากสมการที่ (2.13) และ (2.14) จะได้

$$(m+1)U(m+1,n) = a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)V(m-k+1,l)U(k,n-l) \qquad (2.15)$$

$$(n+1)U(m,n+1) = a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)V(k,n-l+1)U(m-k,l) \qquad (2.16)$$

จากสมการที่ (2.15) และ (2.16) จะได้

$$U(m,n) = a\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n}\frac{(m-k)}{m}V(m-k,l)U(k,n-l);m\geq 1$$

$$U(m,n) = a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-l)}{n}V(k,n-l)U(m-k,l);n\geq 1$$

ดังนั้น $$U(m,m) = \begin{cases} e^{aV(0,0)} & ;m=0,n=0 \\ a\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n}\frac{m-k}{m}V(m-k,l)U(k,n-l);m\geq 1 \\ a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n-l}{n}V(k,n-l)U(m-k,l);n\geq 1 \end{cases}$$ เป็นจริง

<u>ทฤษฎีบทที่ 6</u> ถ้า $u(x,y)=x^k y^h$ แล้ว $U(m,n)=\delta(m-k,n-h)$

$$=\begin{cases}1;m=k,n=h\\0;otherwise\end{cases}$$ [1]

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=x^k y^h$

จะได้ว่า $U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}x^k y^h}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณี $m=k, n=h;$

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}[m!n!]$$

$$=1$$

กรณี $m\neq k, n\neq h$ แบ่งเป็น 8 กรณีย่อยคือ

กรณีที่ 1 $m=k, n>h; U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^m y^n}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m \partial x^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^n}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}[m!\cdot(0)]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 2 $m=k, n<h; U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^m y^n}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^n}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[m!\left(h\cdot(h-1)\cdot\ldots\cdot(h-n)\cdot(0)^{h-n-1}\right)\right]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 3 $m>k, n=h; U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^m y^n}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^n}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!n!}[(0)\cdot n!]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 4 $m<k, n=h; U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^m y^n}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^n}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\left(k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m)\cdot(0)^{k-m-1}\right)\cdot n!\right]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 5 $m<k, n<h; U(m,n) = \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^k y^h}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$= \frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\right]_{x=0,y=0} \cdot \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!}\left[k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m)\cdot x^{k-m-1}\right]_{x=0,y=0} \cdot \frac{1}{n!}\left[h\cdot(h-1)\cdot\ldots\cdot(h-n)\cdot y^{h-n-1}\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!}\left[k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m)\cdot(0)^{k-m-1}\right]\cdot\frac{1}{n!}\left[h\cdot(h-1)\cdot\ldots\cdot(h-n)\cdot(0)^{h-n-1}\right]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 6 $m<k, n>h; U(m,n) = \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^k y^h}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$= \frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\right]_{x=0,y=0} \cdot \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!}\left[k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m)\cdot x^{k-m-1}\right]_{x=0,y=0} \cdot \frac{1}{n!}\left[0\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!}\left[k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m)\cdot(0)^{k-m-1}\right]\cdot\frac{1}{n!}\left[0\right]$$

$$U(m,n)=0$$

กรณีที่ 7 $m>k, n>h; U(m,n) = \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n} x^k y^h}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$= \frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$= \frac{1}{m!n!}\left[0\cdot 0\right]$$

$$U(m,n)=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 8 $m>k, n<h; U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}x^k y^h}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\right]_{x=0,y=0}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n y^h}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!}[0]\cdot\frac{1}{n!}\left[h\cdot(h-1)\cdot\ldots\cdot(h-n)\cdot y^{h-n-1}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!}[0]\cdot\frac{1}{n!}\left[h\cdot(h-1)\cdot\ldots\cdot(h-n)\cdot(0)^{k-n-1}\right]$$

$$U(m,n)=0$$

ดังนั้น $U(m,n)=\delta(m-k,n-h)=\begin{cases}1\,;m=k,n=h\\0\,;m\neq k,n\neq h\end{cases}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 7</u> ถ้า $u(x,y)=x^k e^{ay}$ แล้ว $U(m,n)=\delta(m-k)\dfrac{a^n}{n!}$ [1]

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

แทนค่า $u(x,y)=x^k e^{ay}$

จะได้ว่า $U(m,n)=\dfrac{1}{m!n!}\left[\dfrac{\partial^{m+n}x^k e^{ay}}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$

$$=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\frac{\partial^n e^{ay}}{\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}$$

$$=\frac{1}{m!}\left[\frac{\partial^m x^k}{\partial x^m}\right]_{x=0}\cdot\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n e^{ay}}{\partial y^n}\right]_{y=0}$$

$$=\delta(m-k)\frac{a^n}{n!}$$

ดังนั้น $U(m,n)=\delta(m-k)\dfrac{a^n}{n!}$

หมายเหตุ $\dfrac{\partial e^{ay}}{\partial y}=ae^{ay}$

$$\frac{\partial^2 e^{ay}}{\partial y^2}=a^2e^{ay}$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{\partial^n e^{ay}}{\partial y^n}\right]_{y=0}=a^n\left[e^{ay}\right]_{y=0}$$

$$=a^n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในหนึ่งมิติ [4]

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(1) $u(x)=\alpha u(x)\pm\beta v(x)$	$U(m)=\alpha U(m)\pm\beta V(m)$
(2) $u(x)=\frac{d^k}{dx^k}u(x)$	$U(m)=\frac{(m+k)!}{m!}U(m+k)$
(3) $u(x)=u(x)v(x)$	$U(m)=\sum_{n=0}^{m}U(n)V(m-n)$
(4) $u(x)=x^k;\ k=0,1,2,\ldots$	$U(m)=\delta(m-k)=\begin{cases}1;m=k\\0;m\neq k\end{cases}$

ตารางที่ 2.2 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ [1]

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(1) $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$	$U(m,n)=V(m,n)\pm W(m,n)$
(2) $u(x,y)=av(x,y)$	$U(m,n)=aV(m,n)$
(3) $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	$U(m,n)=(m+1)F(m+1,n)$
(4) $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	$U(m,n)=(n+1)F(m,n+1)$
(5) $u(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$	$U(m,n)=(m+2)(m+1)F(m+2;n)$
(6) $u(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$	$U(m,n)=(n+2)(n+1)F(m,n+2)$
(7) $u(x,y)=v(x,y)w(x,y)$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$
(8) $u(x,y)=\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial x}$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)W(m-k+1,l)V(k,n-l)$
(9) $u(x,y)=\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial y}$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)W(k,n-l+1)V(m-k,l)$
(10) $u(x,y)=\frac{\partial^{r+s}v(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$	$U(m,n)=\frac{(m+r)!}{m!}\frac{(n+s)!}{n!}V(m+r,n+s)$
(11) $u(x,y)=e^{av(x,y)}$	$U(m,m)=\begin{cases}e^{aV(0,0)} & ;m=0,n=0\\ a\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n}\frac{m-k}{m}V(m-k,l)U(k,n-l);m\geq 1\\ a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n-l}{n}V(k,n-l)U(m-k,l);n\geq 1\end{cases}$
(12) $u(x,y)=x^k y^h$	$U(m,n)=\delta(m-k,n-h)=\begin{cases}1;m=k,n=h\\0;otherwise\end{cases}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.2 (ต่อ) ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(13) $u(x,y)=x^k e^{ay}$	$U(m,n)=\delta(m-k)\frac{a^n}{n!}$

ตารางที่ 2.3 การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น [5]

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(1) $f(y)=e^{y(x)}$	$F(m)=\begin{cases} e^{Y(0)} & ;m=0 \\ \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(l+1)}{m}Y(l+1)F(m-1-l) & ;m\geq 1 \end{cases}$
(2) $f(y)=\sin y(x)$	$F(m)=\begin{cases} \sin Y(0) & ;m=0 \\ \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(m-l)}{m}G(l)Y(m-l) & ;m\geq 1 \end{cases}$
(3) $f(y)=\cos y(x)$	$F(m)=\begin{cases} \cos Y(0) & ;m=0 \\ -\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(m-l)}{m}F(l)Y(m-l) & ;m\geq 1 \end{cases}$

ตารางที่ 2.4 ฟังก์ชันที่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทเลอร์ [6]

ฟังก์ชันเดิม	อนุกรมเทเลอร์
(1) $e^{y(x)}$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};x\in\mathbb{R}$
(2) $\sin y(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};x\in\mathbb{R}$
(3) $\cos y(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};x\in\mathbb{R}$

2.3 ศูนย์ยกกำลังศูนย์ [8]

ในการกำหนดที่ไม่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องของเลขชี้กำลังการตีความว่า 0^0 คือ 1 ช่วยให้สูตรต่าง ๆ ง่ายขึ้นและไม่จำเป็นต้องนำเอาทฤษฎีบทอื่นมาอธิบายเป็นกรณีพิเศษ เช่น

1. การพิจารณา a^0 ให้เป็นผลคูณว่างซึ่งมีค่าเป็น 1 แม้ว่า a จะเท่ากับ 0

2. การตีความทางคณิตศาสตร์เชิงการจัดถือว่า 0^0 คือจำนวนของศูนย์สิ่งอันดับของสมาชิกจากเซตว่าง ดังนั้นจึงมีศูนย์สิ่งอันดับหนึ่งตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. การตีความทางทฤษฎีเซตของ 0^0 คือจำนวนฟังก์ชันจากเซตว่างไปยังเซตว่าง ซึ่งมีเพียงหนึ่งฟังก์ชันเท่านั้นนั่นคือฟังก์ชันว่าง (Empty function)

4. สัญกรณ์ $\sum a_n x^n$ สำหรับพหุนามและอนุกรมกำลังขึ้นอยู่กับการนิยามให้ $0^0 = 1$ เอกลักษณ์อย่างเช่น $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ และ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ และทฤษฎีบททวินาม $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ จะใช้งานไม่ได้เมื่อ $x = 0$ ถ้าไม่กำหนดให้ $0^0 = 1$

5. ในแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์กฎการยกกำลัง $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ จะใช้ไม่ได้สำหรับ $n = 1$ ที่ $x = 0$ ถ้าไม่กำหนดให้ $0^0 = 1$

ในทางตรงข้าม เมื่อ 0^0 เกิดจากลิมิตในรูปแบบ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ ซึ่งเป็นการกำหนดที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องจะถูกพิจารณาให้เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate form)

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการเชิงพีชคณิต มักจะสามารถประเมินค่าได้ด้วยการแทนที่นิพจน์ย่อยด้วยลิมิตของมัน ถ้านิพจน์ที่เป็นผลลัพธ์ไม่สามารถกำหนดลิมิตดั้งเดิมได้นิพจน์นั้นจะเรียกว่าเป็นรูปแบบยังไม่กำหนด หาก $f(t)$ และ $g(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงมีค่าเข้าใกล้ 0 ทั้งคู่ (เมื่อ t มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่งหรือ $\pm\infty$) โดยที่ $f(t) > 0$ แล้วฟังก์ชัน $f(t)^{g(t)}$ ไม่จำเป็นต้องมีค่าเข้าใกล้ 1 เสมอไปลิมิตของ $f(t)^{g(t)}$ อาจให้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบหรือ $\pm\infty$ หรืออาจไม่นิยามขึ้นอยู่กับ f และ g ว่านิยามไว้อย่างไร ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันด้านล่างนี้อยู่ในรูปแบบ $f(t)^{g(t)}$ ซึ่ง $f(t), g(t) \to 0$ เมื่อ $t \to 0^+$ แต่ลิมิตของมันมีค่าต่างกันดังนี้ $\lim_{t\to 0^+} t^t = 1, \lim_{t\to 0^+} (e^{-1/t^2})^t = 0, \lim_{t\to 0^+} (e^{-1/t^2})^{-t} = +\infty, \lim_{t\to 0^+} (e^{-1/t})^{at} = e^{-a}$

ดังนั้น 0^0 จึงเป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิดหนึ่งพฤติกรรมนี้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันสองตัวแปร x^y แม้ว่าจะต่อเนื่องบนเซต $\{(x,y) : x > 0\}$ ไม่สามารถขยายเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตใด ๆ ที่รวม $(0,0)$ อยู่ด้วย ไม่ว่า 0^0 จะถูกนิยามขึ้นอย่างไร

อย่างไรก็ตาม ภายใต้เงื่อนไขเฉพาะ เช่นเมื่อ f กับ g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ทั้งคู่และ f ไม่เป็นลบลิมิตทางด้านขวาจะเท่ากับ 1 เสมอ

ในโดเมนเชิงซ้อนฟังก์ชัน z^w ถูกนิยามขึ้นสำหรับ $z \neq 0$ โดยเลือกกรณีหนึ่งของ $\log z$ และกำหนดให้ $z^w := e^{w \log z}$ แต่ไม่มีกรณีของ $\log z$ ที่นิยามไว้สำหรับ z เท่ากับศูนย์จึงไม่มีนิยาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional Transform Method)

การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ (Two-Dimensional Transform Method) ของฟังก์ชัน $U(m,n)$ [1] กำหนดโดย

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0} \tag{3.1}$$

การแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นการแปลงฟังก์ชัน $u(x,y)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเดิม (Original Function) ไปเป็นฟังก์ชันใหม่ $U(m,n)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแปลง (Transform Function)

เราจะพิจารณา $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สองตัวแปร (Analytical Function of two variables) ภายในโดเมน Ω ฟังก์ชั่น $u(x,y)$ สามารถถูกแทนด้วยอนุกรม รอบจุด $(x_0,y_0)\in\Omega$ โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

3.2 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse transform)

การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse transform) ของ $U(m,n)$ [1] ใน สมการที่ (3.1) ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U(m,n)x^m y^n \tag{3.2}$$

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=0,y=0}x^m y^n \tag{3.3}$$

กำหนดให้ U,V,W,F เป็น Transform Function ของ u,v,w,f ตามลำดับ

3.3 อนุกรมเทเลอร์สองตัวแปร (Taylor's series of two variables) [7]

ถ้า f มีค่าอนุพันธ์ทุกอันดับที่ a เรานิยาม อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบ $(x,y)=(a,b)$ สำหรับทุกจุด (x,y)

เมื่อ $a\le x\le a+h$ (3.4)

และ $b\le y\le b+k$ (3.5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3.4) และ (3.5) จะได้ว่า

$$a+h=x \therefore h=x-a$$

และ $$b+k=y \therefore k=y-b$$

ให้เป็นอนุกรมต่อไปนี้

$$u(a+h,b+k)=u(a,b)+(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2u$$

$$+\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3u+\frac{1}{4!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^4u+...$$

$$u(x,y)=u(a,b)+\left[(x-a)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2u}{\partial xdy}+(y-b)^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+3(x-a)^2(y-b)\frac{\partial^3u}{\partial x^2dy}+3(x-a)(y-b)^2\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}+(y-b)^3\frac{\partial^3u}{\partial y^3}\right]$$

$$+\frac{1}{4!}\left[(x-a)^4\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+4(x-a)^3(y-b)\frac{\partial^4u}{\partial x^3\partial y}+6(x-a)^2(y-b)^2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}\right.$$

$$\left.+4(x-a)(y-b)^3\frac{\partial^4u}{\partial x\partial y^3}+(y-b)^4\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\right]$$

$$+\frac{1}{5!}\left[(x-a)^5\frac{\partial^5u}{\partial x^5}+5(x-a)^4(y-b)\frac{\partial^5u}{\partial x^4\partial y}+10(x-a)^3(y-b)^2\frac{\partial^5u}{\partial x^3\partial y^2}\right.$$

$$\left.+10(x-a)^2(y-b)^3\frac{\partial^5u}{\partial x^2\partial y^3}+5(x-a)(y-b)^4\frac{\partial^5u}{\partial x\partial y^4}+(y-b)^5\frac{\partial^5u}{\partial y^5}\right]$$

$$+\frac{1}{6!}\left[(x-a)^6\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+6(x-a)^5(y-b)\frac{\partial^6u}{\partial x^5\partial y}+15(x-a)^4(y-b)^2\frac{\partial^6u}{\partial x^4\partial y^2}\right.$$

$$+20(x-a)^3(y-b)^3\frac{\partial^6u}{\partial x^3\partial y^3}+15(x-a)^2(y-b)^4\frac{\partial^6u}{\partial x^2\partial y^4}$$

$$\left.+6(x-a)(y-b)^5\frac{\partial^6u}{\partial x\partial y^5}+(y-b)^6\frac{\partial^6u}{\partial y^6}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\frac{1}{7!}\Bigg[(x-a)^7\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}+7(x-a)^6(y-b)\frac{\partial^7 u}{\partial x^6\partial y}+21(x-a)^5(y-b)^2\frac{\partial^7 u}{\partial x^5\partial y^2}$$

$$+35(x-a)^4(y-b)^3\frac{\partial^7 u}{\partial x^4\partial y^3}+35(x-a)^3(y-b)^4\frac{\partial^7 u}{\partial x^3\partial y^4}$$

$$+21(x-a)^2(y-b)^5\frac{\partial^7 u}{\partial x^2\partial y^5}+7(x-a)(y-b)^6\frac{\partial^7 u}{\partial x\partial y^6}+(y-b)^7\frac{\partial^7 u}{\partial y^7}\Bigg]$$

$$+\frac{1}{8!}\Bigg[(x-a)^8\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+8(x-a)^7(y-b)\frac{\partial^8 u}{\partial x^7\partial y}+28(x-a)^6(y-b)^2\frac{\partial^8 u}{\partial x^6\partial y^2}$$

$$+56(x-a)^5(y-b)^3\frac{\partial^8 u}{\partial x^5\partial y^3}+70(x-a)^4(y-b)^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}+56(x-a)^3(y-b)^5\frac{\partial^8 u}{\partial x^3\partial y^5}$$

$$+28(x-a)^2(y-b)^6\frac{\partial^8 u}{\partial x^2\partial y^6}+8(x-a)(y-b)^7\frac{\partial^8 u}{\partial x\partial y^7}+(y-b)^8\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\Bigg]$$

$$+\frac{1}{9!}\Bigg[(x-a)^9\frac{\partial^9 u}{\partial x^9}+9(x-a)^8(y-b)\frac{\partial^9 u}{\partial x^8\partial y}+36(x-a)^7(y-b)^2\frac{\partial^9 u}{\partial x^7\partial y^2}$$

$$+84(x-a)^6(y-b)^3\frac{\partial^9 u}{\partial x^6\partial y^3}+126(x-a)^5(y-b)^4\frac{\partial^9 u}{\partial x^5\partial y^4}$$

$$+126(x-a)^4(y-b)^5\frac{\partial^9 u}{\partial x^4\partial y^5}+84(x-a)^3(y-b)^6\frac{\partial^9 u}{\partial x^3\partial y^6}$$

$$+36(x-a)^2(y-b)^7\frac{\partial^9 u}{\partial x^2\partial y^7}+9(x-a)(y-b)^8\frac{\partial^9 u}{\partial x\partial y^8}+(y-b)^9\frac{\partial^9 u}{\partial y^9}\Bigg]$$

$$+\frac{1}{10!}\Bigg[(x-a)^{10}\frac{\partial^{10} u}{\partial x^{10}}+10(x-a)^9(y-b)\frac{\partial^{10} u}{\partial x^9\partial y}+45(x-a)^8(y-b)^2\frac{\partial^{10} u}{\partial x^8\partial y^2}$$

$$+120(x-a)^7(y-b)^3\frac{\partial^{10} u}{\partial x^7\partial y^3}+210(x-a)^6(y-b)^4\frac{\partial^{10} u}{\partial x^6\partial y^4}$$

$$+252(x-a)^5(y-b)^5\frac{\partial^{10} u}{\partial x^5\partial y^5}+210(x-a)^4(y-b)^6\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4\partial y^6}$$

$$+120(x-a)^3(y-b)^7\frac{\partial^{10} u}{\partial x^3\partial y^7}+45(x-a)^2(y-b)^8\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2\partial y^8}$$

$$+10(x-a)(y-b)^9\frac{\partial^{10} u}{\partial x\partial y^9}+(y-b)^{10}\frac{\partial^{10} u}{\partial y^{10}}\Bigg]+\ldots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^m u \quad \text{เมื่อ} \quad m = 0,1,2,... \tag{3.6}$$

เนื่องจากต้องการให้ทางขวามือของสมการในตัวอย่างคือ $\sin xy$ ดังนั้นหาอนุกรมเทเลอร์ของ $\sin xy$

อนุกรมเทเลอร์ของ $\sin xy$ คือ

แทนค่า $a = 0, b = 0$ และ $u(x,y) = \sin xy$ ในสมการที่ (3.6)

$$\sin xy = 0 + (xy\cos xy + xy\cos xy)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[-x^2y^2\sin xy + 2(-x^2y^2\sin xy + xy\cos xy) - x^2y^2\sin xy\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[-x^3y^3\cos xy + 3(-x^3y^3\cos xy - 2x^2y^2\sin xy + \right.$$

$$\left. 3(-x^3y^3\cos xy - 2x^2y^2\sin xy) - x^3y^3\cos xy\right]$$

$$+\frac{1}{4!}\left[x^4y^4\sin xy + 4(x^4y^4\sin xy - 2x^3y^3\cos xy - x^3y^3\cos xy) + \right.$$

$$6(x^4y^4\sin xy - 2x^3y^3\cos xy - 2x^3y^3\cos xy - 2x^2y^2\sin xy) +$$

$$\left. 4(x^4y^4\sin xy - 3x^3y^3\cos xy) + x^4y^4\sin xy)\right]$$

$$+\frac{1}{5!}\left[x^5y^5\cos xy + 5(x^5y^5\cos xy + 2x^4y^4\sin xy + \right.$$

$$10(x^5y^5\cos xy + 2x^4y^4\sin xy + 4x^4y^4\sin xy - 4x^3y^3\cos xy - x^3y^3\cos xy) +$$

$$10(x^5y^5\cos xy + 3x^4y^4\sin xy + 3x^4y^4\sin xy - 6x^3y^3\cos xy) +$$

$$\left. 5(x^5y^5\cos xy + 4x^4y^4\sin xy) + x^5y^5\cos xy\right]$$

$$+\frac{1}{6!}\left[-x^6y^6\sin xy + 6(-x^6y^6\sin xy + 3x^5y^5\cos xy + x^5y^5\cos xy) + \right.$$

$$15(-x^6y^6\sin xy + 4x^5y^5\cos xy + 8x^4y^4\sin xy + 4x^5y^5\cos xy) +$$

$$20(-x^6y^6\sin xy + 9x^5y^5\cos xy + 18x^4y^4\sin xy - 6x^3y^3\cos xy) +$$

$$15(-x^6y^6\sin xy + 8x^5y^5\cos xy + 12x^4y^4\sin xy) +$$

$$\left. 6(-x^6y^6\sin xy + 5x^5y^5\cos xy) - x^6y^6\sin xy\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\frac{1}{7!}\Big[-x^7y^7\cos xy+5(-x^7y^7\cos xy-2x^6y^6\sin xy)+$$

$$21(-x^7y^7\cos xy-10x^6y^6\sin xy+9x^5y^5\cos xy)+$$

$$35(-x^7y^7\cos xy-12x^6y^6\sin xy+36x^5y^5\cos xy+19x^4y^4\sin xy)+$$

$$35(-x^7y^7\cos xy-12x^6y^6\sin xy+36x^5y^5\cos xy+24x^4y^4\sin xy)+$$

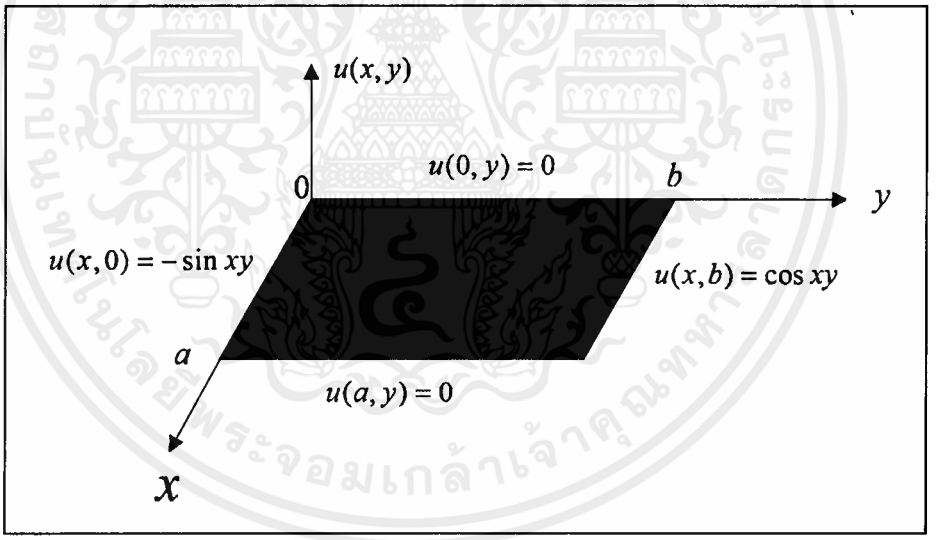
$$21(-x^7y^7\cos xy-10x^6y^6\sin xy+20x^5y^5\cos xy)+$$

$$7(-x^7y^7\cos xy-6x^6y^6\sin xy)-x^7y^7\cos xy\Big]+\ldots$$

เนื่องจากเราต้องการหาผลเฉลยจริง (ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์) ไว้ใช้เพื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยประมาณค่าจึงได้คิดสมการลาปลาซโดยวิธีแยกตัวแปรดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างสมการลาปลาซโดยใช้วิธีการแยกตัวแปร

ตัวอย่างที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x,y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ

จากสมการที่ (2.1) ในบทที่ 2 เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบ

B.C. $u(x,b)=\cos xy$

B.C. $u(a,y)=0$

B.C. $u(0,y)=0$

B.C. $u(x,0)=-\sin xy$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $-\lambda^2 < 0$

จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 < 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

นั่นคือ $$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = -\lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda i$$

ดังนั้น $$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x \qquad (3.7)$$

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

นั่นคือ $$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = \lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda$$

ดังนั้น $$Y(y) = c_3 \cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y \qquad (3.8)$$

จะได้ว่า $$u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x)(c_3 \cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y) \qquad (3.9)$$

จาก $B.C.\ u(0,y) = 0$

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(0) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(0) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = \cos xy$

ดังนั้น $X(0) = 0$

จากสมการที่ (3.7)

จะได้ว่า $X(0) = c_1 \cos\lambda(0) + c_2 \sin\lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_1 = 0$

นั่นคือ $X(x) = c_2 \sin\lambda x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\boxed{B.C.\ u(a,y)=0}$

$$u(a,y)=X(a)Y(y)=0$$

จะได้ว่า $X(a)=0$ หรือ $Y(y)=0$

ถ้า $Y(y)=0$ แล้ว $u(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b)=\cos xy$

ดังนั้น $X(a)=0$

จาก $X(x)=c_2\sin\lambda x$

จะได้ว่า $X(a)=c_2\sin\lambda a=0$

เนื่องจาก $c_2\neq 0$

$$\therefore\ \sin\lambda a=0$$

$$\lambda(a)=n\pi$$

$$\lambda=\frac{n\pi}{a}\qquad n=1,2,3,4,\ldots$$

ดังนั้น $X(x)=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,0)=-\sin xy}$

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=-\sin xy$$

จะได้ว่า $\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)y(0)=-\sin xy$

ดังนั้น $$Y(0)=-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.8)

จะได้ว่า $Y(0)=c_3\cosh\lambda(0)+c_4\sinh\lambda(0)=-\dfrac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}$

$$\therefore c_3=-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}$$

นั่นคือ $$Y(y)=-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y+c_4\sinh\lambda y \qquad (3.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,b)=\cos xy}$

$$u(x,b)=X(x)Y(b)=\cos xy$$

จะได้ว่า $\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)Y(b)=\cos xy$

ดังนั้น $$Y(b)=\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.10)

จะได้ว่า $$Y(b)=-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y+c_4\sinh\lambda y=\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}$$

$$\therefore c_4=\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}+\frac{\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)$$

นั่นคือ

$$Y(y)=-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}+\frac{\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)\sinh\lambda y$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $U_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)Y(y)=u_1+u_2+u_3+\ldots$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}+\frac{\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy+\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

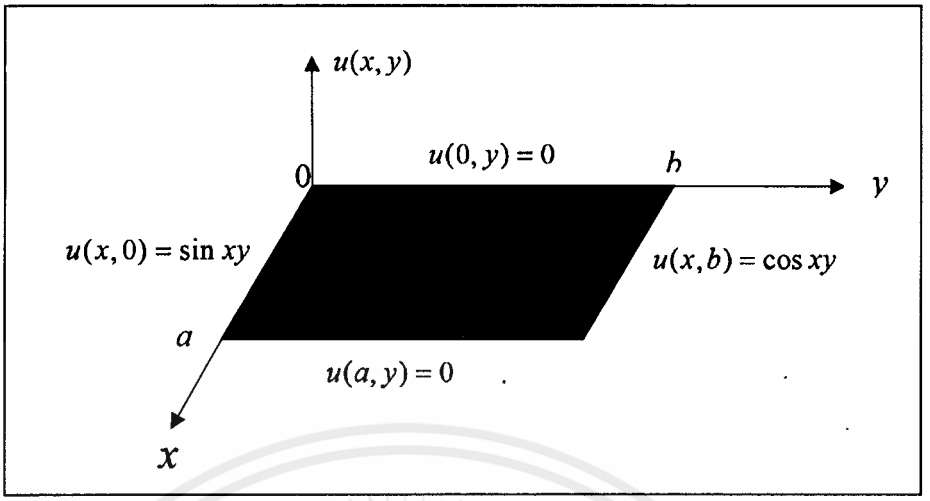
$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos xy+\sin xb}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(-\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)+c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\cos xy+\sin xb}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

$$=(-\sin xy)(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos xy+\sin xb}{\sinh\lambda b}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x, y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ

จากสมการที่ (2.1) ในบทที่ 2 เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบ

$B.C.$ $u(x,b) = \cos xy$

$B.C.$ $u(a,y) = 0$

$B.C.$ $u(0,y) = 0$

$B.C.$ $u(x,0) = \sin xy$

กรณีที่ $-\lambda^2 < 0$

จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

นั่นคือ $$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = -\lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda i$$

ดังนั้น $$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad (3.11)$$

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = \lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda$$

ดังนั้น $Y(y) = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y$ (3.12)

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y)$ (3.13)

จาก $\boxed{B.C.\ u(0,y) = 0}$

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(0) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(0) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = \cos xy$

ดังนั้น $X(0) = 0$

จากสมการที่ (3.11)

จะได้ว่า $X(0) = c_1 \cos \lambda(0) + c_2 \sin \lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_1 = 0$

นั่นคือ $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(a,y) = 0}$

$$u(a,y) = X(a)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(a) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(y) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = \cos xy$

ดังนั้น $X(a) = 0$

จาก $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จะได้ว่า $X(a) = c_2 \sin \lambda a = 0$

เนื่องจาก $c_2 \neq 0$

$$\therefore\ \sin \lambda a = 0$$

$$\lambda(a) = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \qquad n = 1,2,3,4,\ldots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $X(x) = c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,0) = \sin xy}$

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = \sin xy$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x\right)y(0) = \sin xy$

ดังนั้น $$Y(0) = \frac{\sin xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.12)

จะได้ว่า $Y(0) = c_3 \cosh\lambda(0) + c_4 \sinh\lambda(0) = \frac{\sin xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$

$$\therefore c_3 = \frac{\sin xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

นั่นคือ $$Y(y) = \frac{\sin xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y \qquad (3.14)$$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,b) = \cos xy}$

$$u(x,b) = X(x)Y(b) = \cos xy$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x\right)Y(b) = \cos xy$

ดังนั้น $$Y(b) = \frac{\cos xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.14)

จะได้ว่า $Y(b) = \frac{\sin xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y = \frac{\cos xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$

$$\therefore c_4 = \frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x} - \frac{\sin xb}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ

$$Y(y)=\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}-\frac{\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)\sinh\lambda y$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $U_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)Y(y)=u_1+u_2+u_3+\ldots$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}-\frac{\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos xy-\sin xb}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

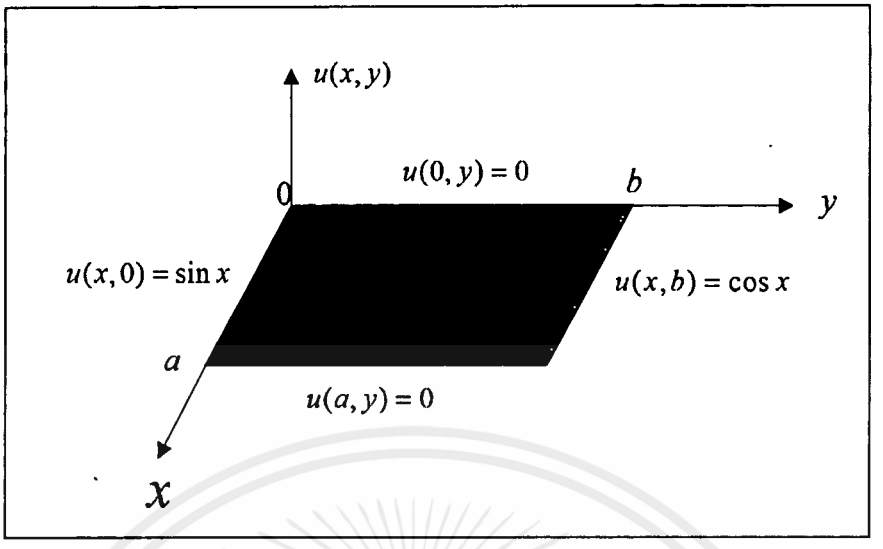
$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos xy-\sin xb}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\sin xy}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)+c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\cos xy-\sin xb}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

$$=(\sin xy)(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos xy-\sin xb}{\sinh\lambda b}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x,y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ

จากสมการที่ (2.1) ในบทที่ 2 เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบ

$B.C.$ $u(x,b) = \cos x$

$B.C.$ $u(a,y) = 0$

$B.C.$ $u(0,y) = 0$

$B.C.$ $u(x,0) = \sin x$

กรณีที่ $-\lambda^2 = 0$

จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

นั่นคือ $$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = -\lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda i$$

ดังนั้น $$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x \qquad (3.15)$$

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = \lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda$$

ดังนั้น $Y(y) = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y$ (3.16)

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y)$ (3.17)

จาก $\boxed{B.C.\ u(0,y) = 0}$

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(0) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(0) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = \cos xy$

ดังนั้น $X(0) = 0$

จากสมการที่ (3.15)

จะได้ว่า $X(0) = c_1 \cos \lambda(0) + c_2 \sin \lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_1 = 0$

นั่นคือ $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(a,y) = 0}$

$$u(a,y) = X(a)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(a) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(y) = 0$ แล้ว $u(x,y) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,b) = \cos xy$

ดังนั้น $X(a) = 0$

จาก $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จะได้ว่า $X(a) = c_2 \sin \lambda a = 0$

เนื่องจาก $c_2 \neq 0$

$$\therefore\ \sin \lambda a = 0$$

$$\lambda(a) = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \qquad n = 1,2,3,4,\ldots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $X(x) = c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,0) = \sin x}$

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = \sin x$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x\right)y(0) = \sin x$

ดังนั้น $$Y(0) = \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.16)

จะได้ว่า $Y(0) = c_3 \cosh\lambda(0) + c_4 \sinh\lambda(0) = \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$

$$\therefore\ c_3 = \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

นั่นคือ $$Y(y) = \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y \qquad (3.18)$$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,b) = \cos x}$

$$u(x,b) = X(x)Y(b) = \cos x$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x\right)Y(b) = \cos x$

ดังนั้น $$Y(b) = \frac{\cos x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$$

จากสมการที่ (3.18)

จะได้ว่า $Y(b) = \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}\cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y = \frac{\cos x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}$

$$\therefore c_4 = \frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x} - \frac{\sin x}{c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ

$$Y(y)=\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}-\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)\sinh\lambda y$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $U_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X(x)Y(y)=u_1+u_2+u_3+\ldots$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}-\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda b}\left(\frac{\cos x-\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

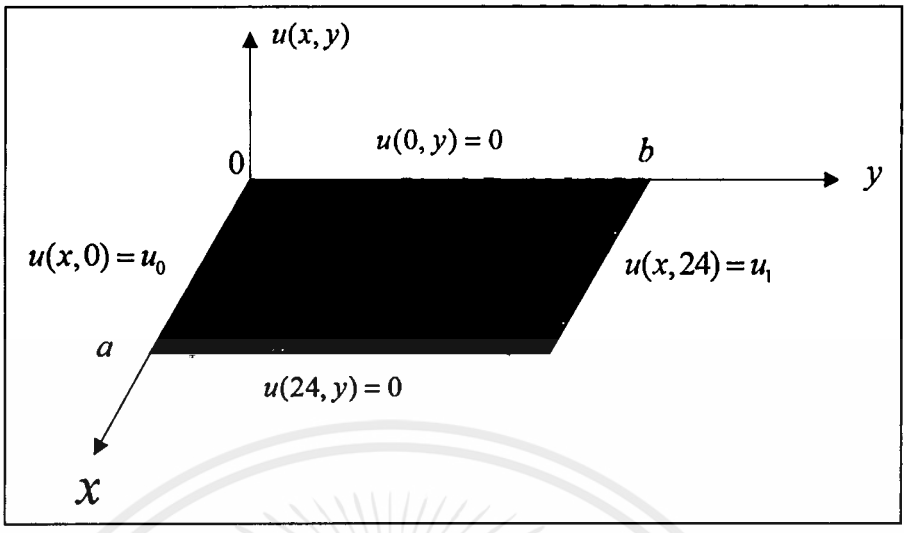
$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left[\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos x-\sin x}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\sin x}{c_2\sin\frac{n\pi}{a}x}(\cosh\lambda y)\right)+c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\left(\frac{\cos x-\sin x}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{a}x\right)(\sinh\lambda b)}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

$$=(\sin x)(\cosh\lambda y)+\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sinh\lambda b}(\cosh\lambda b)\right)\sinh\lambda y$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ ซึ่งมีฉนวนหุ้มกันความร้อนออกโดยมีอุณหภูมิที่จุด (x,y) เมื่อ x และ y เป็นตำแหน่งใดๆบนพื้นผิววัสดุ

จากสมการที่ (2.1) ในบทที่ 2 เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบ

$B.C.\quad u(0,y)=0$

$B.C.\quad u(24,y)=0$

$B.C.\quad u(x,0)=u_0$

$B.C.\quad u(x,24)=u_1$

กรณีที่ $-\lambda^2<0$

จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

นั่นคือ $$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$$

$$r^2+\lambda^2=0$$

$$r^2=-\lambda^2$$

$$\therefore\ r=\pm\lambda i$$

ดังนั้น $$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x \qquad (3.19)$$

และ $$-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

$$r^2 = \lambda^2$$

$$\therefore\ r = \pm\lambda$$

ดังนั้น $Y(y) = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y$ (3.20)

จะได้ว่า $u(x,y) = X(x)Y(y) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y)$ (3.21)

จาก $\boxed{B.C.\ u(0,y) = 0}$

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

จะได้ว่า $X(0) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(0) = 0$ แล้ว $u(0,0) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,0) = u_0$

ดังนั้น $X(0) = 0$

จากสมการที่ (3.19)

จะได้ว่า $X(0) = c_1 \cos \lambda(0) + c_2 \sin \lambda(0) = 0$

$\therefore\ c_1 = 0$

นั่นคือ $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(24,0) = 0}$

$$u(24,0) = X(24)Y(0) = 0$$

จะได้ว่า $X(24) = 0$ หรือ $Y(y) = 0$

ถ้า $Y(y) = 0$ แล้ว $u(24,0) = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B.C.\ u(x,0) = u_0$

ดังนั้น $X(24) = 0$

จาก $X(x) = c_2 \sin \lambda x$

จะได้ว่า $X(24) = c_2 \sin \lambda(24) = 0$

เนื่องจาก $c_2 \neq 0$

$$\therefore\ \sin \lambda(24) = 0$$

$$\lambda(24) = n\pi$$

$$\therefore \lambda = \frac{n\pi}{24} \text{ หรือ } \frac{n\pi}{a}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $X(x) = c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x$ หรือ $c_2 \sin\frac{n\pi}{a}x$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,0) = u_0}$

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = u_0$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x\right)y(0) = u_0$

ดังนั้น $$Y(0) = \frac{u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}$$

จากสมการที่ (3.20)

จะได้ว่า $Y(0) = c_3 \cosh\lambda(0) + c_4 \sinh\lambda(0) = \frac{u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}$

$$\therefore c_3 = \frac{u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}$$

นั่นคือ $$Y(y) = \frac{\sin u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}\cosh\lambda y + c_4 \sinh\lambda y \qquad (3.22)$$

จาก $\boxed{B.C.\ u(x,24) = u_1}$

$$u(x,24) = X(x)Y(24) = u_1$$

จะได้ว่า $\left(c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x\right)Y(24) = u_1$

ดังนั้น $$Y(24) = \frac{u_1}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}$$

จากสมการที่ (3.22)

จะได้ว่า $Y(24) = \frac{u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}\cosh\lambda(24) + c_4 \sinh\lambda(24) = \frac{u_1}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}$

$$\therefore c_4 = \frac{1}{\sinh\lambda(24)}\left(\frac{u_1}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x} - \frac{u_0}{c_2 \sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\lambda(24))\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ

$$Y(y)=\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\lambda y)+\frac{1}{\sinh\lambda(24)}\left(\frac{u_1}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}-\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\lambda(24))\right)\sinh\lambda y$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $U(x,y)=X(x)Y(y)$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\left[\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\frac{n\pi}{24}y)+\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{24}(24)}\left(\frac{u_1}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}-\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\frac{n\pi}{24}(24))\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\left[\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\frac{n\pi}{24}y)+\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{24}(24)}\left(\frac{u_1}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}-\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}}(\cosh\frac{n\pi}{24}(24))\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\left[\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\frac{n\pi}{24}y)+\frac{1}{\sinh\frac{n\pi}{24}(24)}\left(\frac{u_1-u_0}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\right)}(\cosh\frac{n\pi}{24}(24))\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y\right]$$

$$=c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\left(\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}x}(\cosh\frac{n\pi}{24}y)\right)+\left(\frac{u_1-u_0}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\right)\left(\sinh\frac{n\pi}{24}(24)\right)}\left(\cosh\frac{n\pi}{24}(24)\right)\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y$$

$$=\left(c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\right)\left(\frac{u_0}{c_2\sin\frac{n\pi}{24}}\cosh\frac{n\pi}{24}\right)+\left(c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\right)\left(\frac{u_1-u_0}{\left(c_2\sin\frac{n\pi}{24}x\right)\left(\sinh\frac{n\pi}{24}(24)\right)}\cosh\frac{n\pi}{24}\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y$$

$$=u_0\cosh\frac{n\pi}{24}y+\left(\frac{u_1-u_0\cosh\frac{n\pi}{24}}{\sinh n\pi}\right)\sinh\frac{n\pi}{24}y$$

แต่เนื่องจากเราไม่ได้ใช้สมการที่ทางขวามือเป็นดังตัวอย่างข้างต้นเพราะไม่สามารถหาค่าประมาณได้โดยวิธี DTM อีกทั้งถ้าทางขวามือเป็นฟังก์ชันสองตัวแปรจะยากเกินไปเราจึงได้จัดทำตัวอย่างที่ทางขวามือเป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรเพื่อเป็นแนวทาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

4.1 การใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติเพื่อแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่างที่ 4.1 $$u_{yy}+u_{xx}=0 \tag{4.1}$$

$$B.C. \qquad u(x,0)=x^3 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=x \tag{4.3}$$

จัดรูปสมการที่ (4.1) จะได้ว่า $u_{xx}=-u_{yy}$ (4.4)

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์กับสมการที่ (4.4) โดยใช้สมการที่ (5) และสมการที่ (6) ในตารางที่ 2.2 ในบทที่ 2

จะได้ว่า $(m+2)(m+1)U(m+2,n)=-(n+2)(n+1)U(m,n+2)$ (4.5)

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หาค่าของ $U(m,0)$ เมื่อ $m=1,2,3,4,\ldots$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (3.2) ในบทที่ 3 จะได้ว่า

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U(m,n)x^m y^n$$

จากเงื่อนไขขอบ $u(x,0)=x^3$ (ตามสมการที่ (4.2))

และเนื่องจาก $u(x,0)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}U(m,n)x^m 0^n$ [8]

$$\begin{aligned}
&=[U(0,0)x^0 0^0+\cancel{U(0,1)}^{0}x^0 0^1+\cancel{U(0,2)}^{0}x^0 0^2+\ldots]\\
&+[U(1,0)x^1 0^0+\cancel{U(1,1)}^{0}x^1 0^1+\cancel{U(1,2)}^{0}x^1 0^2+\ldots]\\
&+[U(2,0)x^2 0^0+\cancel{U(2,1)}^{0}x^2 0^1+\cancel{U(2,2)}^{0}x^2 0^2+\ldots]\\
&+[U(3,0)x^3 0^0+\cancel{U(3,1)}^{0}x^3 0^1+\cancel{U(3,2)}^{0}x^3 0^2+\ldots]\\
&\vdots\\
&+[U(m,0)x^m 0^0+\cancel{U(m,1)}^{0}x^m 0^1+\cancel{U(m,2)}^{0}x^m 0^2+\ldots]
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $U(0,0)x^0 0^0 + U(1,0)x^1 0^0 + U(2,0)x^2 0^0 + U(3,0)x^3 0^0 + \ldots + U(m,0)x^m 0^0 = x^3$

(4.6)

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (4.6)

จะได้ว่า $U(m,0) = \begin{cases} 1; m = 3 \\ 0; m \neq 3 \end{cases}$ (4.7) (4.8)

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาค่า $U(m,1)$ เมื่อ $m = 1,2,3,4,\ldots$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (3.2) ในบทที่ 3

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} nU(m,n)x^m y^{n-1}$$

และจากเงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = x$ (ตามสมการที่ (4.3))

และ $$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} nU(m,n)x^m 0^{n-1}$$

$$= [(1)U(0,1)x^0 0^0 + (2)U(0,2)x^0 0^1 + (3)U(0,3)x^0 0^2 + \ldots]$$
$$+[(1)U(1,1)x^1 0^0 + (2)U(1,2)x^1 0^1 + (3)U(1,3)x^1 0^2 + \ldots]$$
$$+[(1)U(2,1)x^2 0^0 + (2)U(2,2)x^2 0^1 + (2)U(2,3)x^2 0^2 + \ldots]$$
$$+[(1)U(3,1)x^2 0^0 + (2)U(3,2)x^3 0^1 + (3)U(3,3)x^3 0^2 + \ldots]$$
$$\vdots$$
$$+[(1)U(m,1)x^m 0^0 + (2)U(m,2)x^m 0^1 + (3)U(m,3)x^m 0^2 + \ldots]$$

จะได้ว่า

$$(1)U(0,1)x^0 0^0 + (1)U(1,1)x^1 0^0 + (1)U(2,1)x^2 0^0 + (1)U(3,1)x^3 0^0 + \ldots + (1)U(m,1)x^m 0^0 = x$$

(4.9)

จากการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

จะได้ว่า $U(m,1) = \begin{cases} 1; m = 1 \\ 0; m \neq 1 \end{cases}$ (4.10) (4.11)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 4 หาค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์อื่นๆโดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4.5) ในขั้นตอนที่ 1

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n) = -(n+2)(n+1)U(m,n+2)$$

นำค่า $U(m,0)$ ในขั้นตอนที่ 2 และ $U(m,1)$ ในขั้นตอนที่ 3 มาหาค่า $U(m,n)$ โดยการแทนลงในสมการที่ (4.5) จะได้ว่า

เมื่อ $\boxed{m=0,n=0;}$ $(2)(1)U(2,0) = -(2)(1)U(0,2)$

$$2U(2,0) = -2U(0,2)$$

จากขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า $U(2,0) = 0$

ดังนั้น $$U(0,2) = 0 \qquad (4.12)$$

$\boxed{m=0,n=1;}$ $(2)(1)U(2,1) = -(3)(2)U(0,3)$

$$2U(2,1) = -6U(0,3)$$

จากขั้นตอนที่ 3 จะได้ว่า $U(2,1) = 0$

ดังนั้น $$U(0,3) = 0 \qquad (4.13)$$

$\boxed{m=1,n=0;}$ $(3)(2)U(3,0) = -(2)(1)U(1,2)$

$$6U(3,0) = -2U(1,2)$$

จากขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า $U(3,0) = 1$

ดังนั้น $$U(1,2) = -3 \qquad (4.14)$$

$\boxed{m=1,n=1;}$ $(3)(2)U(3,1) = -(3)(2)U(1,3)$

$$6U(3,1) = -6U(1,3)$$

จากขั้นตอนที่ 3 จะได้ว่า $U(3,1) = 0$

ดังนั้น $$U(1,3) = 0 \qquad (4.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\boxed{m=2,n=0;}$ $(4)(3)U(4,0)=-(2)(1)U(2,2)$

$$12U(4,0)=-2U(2,2)$$

จาก<u>ขั้นตอนที่ 2</u> จะได้ว่า $U(4,0)=0$

ดังนั้น $$U(2,2)=0 \tag{4.16}$$

$\boxed{m=2,n=1;}$ $(4)(3)U(4,1)=-(3)(2)U(2,3)$

$$12U(4,1)=(-6)U(2,3)$$

จาก<u>ขั้นตอนที่ 3</u> จะได้ว่า $U(4,1)=0$

ดังนั้น $$U(2,3)=0 \tag{4.17}$$

$\boxed{m=3,n=0;}$ $(5)(4)U(5,0)=-(2)(1)U(3,2)$

$$20U(5,0)=-2U(3,2)$$

จาก<u>ขั้นตอนที่ 2</u> จะได้ว่า $U(5,0)=0$

ดังนั้น $$U(3,2)=0 \tag{4.18}$$

$\boxed{m=3,n=1;}$ $(5)(4)U(5,1)=-(3)(3)U(3,3)$

$$20U(5,1)=-6U(3,3)$$

จาก<u>ขั้นตอนที่ 3</u> จะได้ว่า $U(5,1)=0$

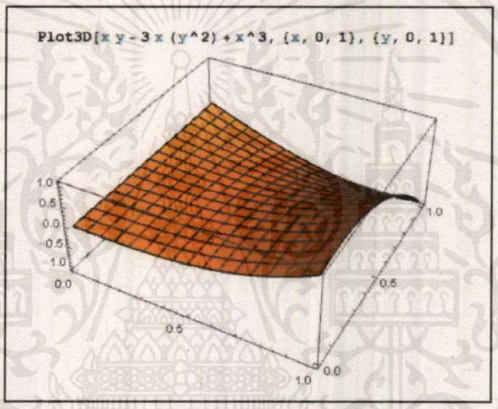
ดังนั้น $$U(3,3)=0 \tag{4.19}$$

จากสมการที่ (4.6) ถึงสมการที่ (4.19) จะได้ว่า $U(3,0)=1$, $U(1,1)=1$ และ $U(2,1)=-3$ โดยสัมประสิทธิ์พจน์อื่นๆมีค่าเท่ากับ 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลเฉลยของปัญหาคือ

$$\begin{aligned}u(x,y) &= [\cancel{U(0,0)}^{0}x^0y^0 + \cancel{U(0,1)}^{0}x^0y^1 + \cancel{U(0,2)}^{0}x^0y^2 + \ldots] \\ &+[\cancel{U(1,0)}^{0}x^1y^0 + \cancel{U(1,1)}^{1}x^1y^1 + \cancel{U(1,2)}^{0}x^1y^2 + \ldots] \\ &+[\cancel{U(2,0)}^{0}x^2y^0 + \cancel{U(2,1)}^{-3}x^2y^1 + \cancel{U(2,2)}^{0}x^2y^2 + \ldots] \\ &+[\cancel{U(3,0)}^{1}x^3y^0 + \cancel{U(3,1)}^{0}x^3y^1 + \cancel{U(3,2)}^{0}x^3y^2 + \ldots] \\ &\vdots \\ &+[\cancel{U(m,0)}^{0}x^my^0 + \cancel{U(m,1)}^{0}x^my^1 + \cancel{U(m,2)}^{0}x^my^2 + \ldots] \\ &\simeq xy - 3xy^2 + x^3 \end{aligned} \tag{4.20}$$



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.20) ของสมการที่ (4.1) ภายใต้เงื่อนไข (4.2) และ (4.3) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

ตัวอย่างที่ 4.2

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{y(x)} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(x) = x \tag{4.21}$$

$$B.C. \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = 0 \tag{4.22}$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์กับสมการที่ (4.22) โดยใช้สมการที่ (5) และสมการที่ (6) ในตารางที่ 2.2 ในบทที่ 2 และ สมการที่ (1) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

จะได้ว่า $(m+2)(m+1)U(m+2,n) + (n+2)(n+1)U(m,n+2)$

$$= \begin{cases} e^{Y(0)} & ;m=0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{k+1}{m}\right)Y(k+1)F(m-1-l) & ;m \geq 1 \end{cases} \tag{4.23}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หาค่า $Y(m)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4) ในตารางที่ 2.1 ในบทที่ 2 และ $y(x)=x$

จะได้ว่า $Y(m)=\delta(m-1)=\begin{cases}1 & ;m=1 \\ 0 & ;m\neq 1\end{cases}$ (4.24)

(4.25)

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หา $F(m)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ $f(y(x))=e^{y(x)}$

จากนิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์สมการที่ (1) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

จะได้ว่า $F(m)=\begin{cases}e^{Y(0)} & ;m=0 \\ \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{k+1}{m}\right)Y(k+1)F(m-1-k) & ;m\geq 1\end{cases}$ (4.26)

นำค่า $Y(m)$ ที่ได้จากสมการที่ (4.24) และสมการที่ (4.25) ใน<u>ขั้นตอนที่ 2</u> มาหาค่า $F(m)$ โดยการแทนลงในสมการที่ (4.26) จะได้ว่า

เมื่อ $m=0;\ F(0) = e^{Y(0)}$

$$= e^{0}$$

$$= 1 \qquad (4.27)$$

$$m=1;\ F(1) = \left(\frac{1}{1}\right)Y(1)F(0)$$

$$= 1 \qquad (4.28)$$

$$m=2;\ F(2) = \sum_{k=0}^{1}\frac{(k+1)}{2}Y(k+1)F(2-1-k)$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)Y(1)F(1)\right]+\left[\left(\frac{2}{2}\right)Y(2)F(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \qquad (4.29)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$m=3;\ F(3) = \sum_{k=0}^{2}\frac{(k+1)}{3}Y(k+1)F(3-1-k)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{3}\right)Y(1)F(2)\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)Y(2)F(1)\right]+\left[\left(\frac{3}{3}\right)Y(3)F(0)\right]$$

$$=\frac{1}{6} \qquad (4.30)$$

$$m=4;\ F(4) = \sum_{k=0}^{3}\frac{(k+1)}{4}Y(k+1)F(4-1-k)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{4}\right)Y(1)F(3)\right]+\left[\left(\frac{2}{4}\right)Y(2)F(2)\right]+\left[\left(\frac{3}{4}\right)Y(3)F(1)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{4}{4}\right)Y(4)F(0)\right]$$

$$=\frac{1}{24} \qquad (4.31)$$

$$m=5;\ F(5) = \sum_{k=0}^{4}\frac{(k+1)}{5}Y(k+1)F(5-1-k)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{5}\right)Y(1)F(4)\right]+\left[\left(\frac{2}{5}\right)Y(2)F(3)\right]+\left[\left(\frac{3}{5}\right)Y(3)F(2)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{4}{5}\right)Y(4)F(1)\right]+\left[\left(\frac{5}{5}\right)Y(5)F(0)\right]$$

$$=\frac{1}{120} \qquad (4.32)$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> หาค่า $U(m,n)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จะได้ว่าจากสมการที่ (4.23) ใน<u>ขั้นตอนที่ 1</u>

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n)+(n+2)(n+1)U(m,n+2)=\begin{cases} e^{Y(0)} & ;m=0 \\ \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{k+1}{m}\right)Y(k+1)F(m-1-k) & ;m\geq 1 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการนำค่า $Y(m)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 และ $F(m)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 มาแทนลงในสมการที่ (4.23) และจากนิยามที่ 1 ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

จากเงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0$ (ตามสมการที่ (4.22))

ทำให้ได้ว่า $$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}nU(m,n)x^m y^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)U(m,n)x^m y^{n-2}$$

จากเงื่อนไข

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y)&=\left[(2)(1)U(0,2)0^0y^0+(3)(2)\cancel{U(0,3)}^{0}0^0y^1+(4)(3)\cancel{U(0,4)}^{0}0^0y^2+\ldots\right]\\&+\left[(2)(1)U(1,2)0^1y^0+(3)(2)\cancel{U(1,3)}^{0}0^1y^1+(4)(3)\cancel{U(1,4)}^{0}0^1y^2+\ldots\right]\\&+\left[(2)(1)U(2,2)0^2y^0+(3)(2)\cancel{U(2,3)}^{0}0^2y^1+(4)(3)\cancel{U(2,4)}^{0}0^2y^2+\ldots\right]\\&\vdots\\&+\left[(2)(1)U(m,2)0^my^0+(3)(2)\cancel{U(m,3)}^{0}0^my^1+(4)(3)\cancel{U(m,4)}^{0}0^my^2+\ldots\right]\\&=(2)(1)U(0,2)0^0y^0+(2)(1)U(1,2)0^1y^1\\&+(2)(1)U(2,2)0^2y^0+(2)(1)U(m,2)0^my^0+\ldots\\&=0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $U(m,2)=0$ เมื่อ $m=0,1,2,\ldots$ จะได้ว่า

เมื่อ $\boxed{m=0,n=0;}$ $(2)(1)U(2,0)+(2)(1)U(0,2)=e^{Y(0)}$

จาก $U(0,2)=0$ จะได้ว่า $2U(2,0)=e^0$

ดังนั้น $$U(2,0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!} \qquad (4.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\boxed{m=1,n=0;}$ $(3)(2)U(3,0)+(2)(1)U(1,2)=\left(\frac{1}{1}\right)Y(1)F(0)$

จาก $U(1,2)=0$ จะได้ว่า $6U(3,0)=1$

ดังนั้น $$U(3,0)=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!} \tag{4.34}$$

$\boxed{m=2,n=0;}$ $(4)(3)U(4,0)+(2)(1)U(2,2)=\sum_{k=0}^{1}\frac{(k+1)}{2}Y(k+1)F(2-1-k)$

จาก $U(2,2)=0$ จะได้ว่า $12U(4,0)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)Y(1)F(1)\right]+\left[\left(\frac{2}{2}\right)Y(2)F(0)\right]$

ดังนั้น $$U(4,0)=\frac{1}{24}=\frac{1}{4!} \tag{4.35}$$

$\boxed{m=3,n=0;}$ $(5)(4)U(5,0)+(2)(1)U(3,2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(k+1)}{3}Y(k+1)F(3-1-k)$

จาก $U(3,2)=0$ จะได้ว่า $20U(5,0)=\left[\left(\frac{1}{3}\right)Y(1)F(2)\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\right)Y(2)F(1)\right]$

$$+\left[\left(\frac{3}{3}\right)Y(3)F(0)\right]$$

ดังนั้น $$U(5,0)=\frac{1}{120}=\frac{1}{5!} \tag{4.36}$$

$\boxed{m=4,n=0;}$ $(6)(5)U(6,0)+(2)(1)U(4,2)=\sum_{k=0}^{3}\frac{(k+1)}{4}Y(k+1)F(4-1-k)$

จาก $U(4,2)=0$ จะได้ว่า $30U(6,0)=\left[\left(\frac{1}{4}\right)Y(1)F(3)\right]+\left[\left(\frac{2}{4}\right)Y(2)F(2)\right]$

$$+\left[\left(\frac{3}{4}\right)Y(3)F(1)\right]+\left[\left(\frac{4}{4}\right)Y(4)F(0)\right]$$

ดังนั้น $$U(6,0)=\frac{1}{720}=\frac{1}{6!} \tag{4.37}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\boxed{m=5,n=0;}$ $(7)(6)U(7,0)+(2)(1)U(5,2)=\sum_{k=0}^{4}\frac{(k+1)}{5}Y(k+1)F(5-1-k)$

จาก $U(5,2)=0$ จะได้ว่า $42U(7,0)=\left[\left(\frac{1}{5}\right)Y(1)F(4)\right]+\left[\left(\frac{2}{5}\right)Y(2)F(3)\right]$

$$+\left[\left(\frac{3}{5}\right)Y(3)F(2)\right]+\left[\left(\frac{4}{5}\right)Y(4)F(1)\right]$$

$$+\left[\left(\frac{5}{5}\right)Y(5)F(0)\right]$$

ดังนั้น $$U(7,0)=\frac{1}{5040}=\frac{1}{7!} \qquad (4.38)$$

จะได้ผลเฉลยของปัญหาคือ

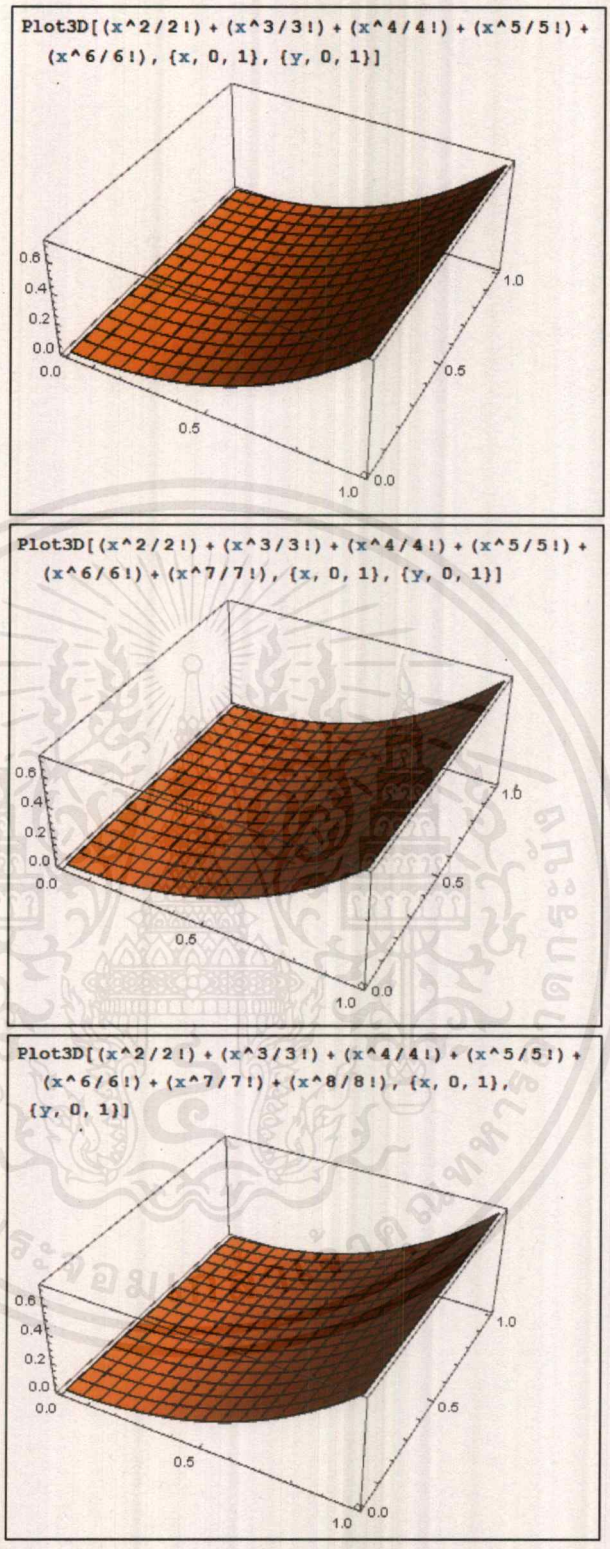
$$u(x,y)=[\cancel{U(0,0)}^{0}x^0y^0+\cancel{U(0,1)}^{0}x^0y^1+\cancel{U(0,2)}^{0}x^0y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(1,0)}^{0}x^1y^0+\cancel{U(1,1)}^{0}x^1y^1+\cancel{U(1,2)}^{0}x^1y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(2,0)}^{1/2}x^2y^0+\cancel{U(2,1)}^{0}x^2y^1+\cancel{U(2,2)}^{0}x^2y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(3,0)}^{1/6}x^3y^0+\cancel{U(3,1)}^{0}x^3y^1+\cancel{U(3,2)}^{0}x^3y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(4,0)}^{1/24}x^4y^0+\cancel{U(4,1)}^{0}x^4y^1+\cancel{U(4,2)}^{0}x^4y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(5,0)}^{1/120}x^5y^0+\cancel{U(5,1)}^{0}x^5y^1+\cancel{U(5,2)}^{0}x^5y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(6,0)}^{1/720}x^6y^0+\cancel{U(6,1)}^{0}x^6y^1+\cancel{U(6,2)}^{0}x^6y^2+\ldots]$$
$$+[\cancel{U(7,0)}^{1/5040}x^7y^0+\cancel{U(7,1)}^{0}x^7y^1+\cancel{U(7,2)}^{0}x^7y^2+\ldots]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากสมการที่ (4.33) ถึงสมการที่ (4.38) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (0)x^0y^0 + (0)x^0y^1 + (0)x^0y^2 + \ldots + (0)x^1y^0 + (0)x^1y^1 + (0)x^1y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)x^2y^0 + (0)x^2y^1 + (0)x^2y^2 + \ldots + \left(\frac{1}{6}\right)x^3y^0 + U(0)x^3y^1 + U(0)x^3y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{24}\right)x^4y^0 + (0)x^4y^1 + (0)x^4y^2 + \ldots + \left(\frac{1}{120}\right)x^5y^0 + (0)x^5y^1 + (0)x^5y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{720}\right)x^6y^0 + (0)x^6y^1 + (0)x^6y^2 + \ldots + \left(\frac{1}{5040}\right)x^7y^0 + (0)x^7y^1 + (0)x^7y^2 \\
&\simeq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 \\
&= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.39) ของสมการที่ (4.21) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.3 $u_{xx}+u_{yy}=\sin(y(x))$ เมื่อ $y(x)=x$ (4.40)

$$B.C. \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0 \tag{4.41}$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์กับสมการที่ (4.40) โดยใช้สมการที่ (5) และสมการที่ (6) ในตารางที่ 2.2 ในบทที่ 2 และสมการที่ (2) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n)+(n+2)(n+1)U(m,n+2)=\begin{cases}\sin Y(0) & ;m=0\\ \sum_{l=0}^{m-1}\frac{m-l}{m}G(l)Y(m-l); & m\geq 1\end{cases} \tag{4.42}$$

โดยที่ $G(l)$ คือการแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $g(y(x))$

เมื่อ $g(y(x))=\cos y(x);\quad y(x)=x$ (4.43)

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หาค่า $G(l)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (3) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

จะได้ว่า $G(l)=\begin{cases}\cos Y(0) & ;l=0\\ -\sum_{k=0}^{l-1}\frac{l-k}{l}F(k)Y(l-k) & ;l\geq 1\end{cases}$ (4.44)

โดยที่ $F(k)$ คือการแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $f(y(x))$

เมื่อ $f(y(x))=\sin y(x);\ y(x)=x$

จากสมการที่ (2) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

จะได้ว่า $F(k)=\begin{cases}\sin Y(0) & ;k=0\\ \sum_{h=0}^{k-1}\frac{k-h}{k}G(h)Y(k-h); & k\geq 1\end{cases}$ (4.45)

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาค่า $Y(m)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4) ในตารางที่ 2.1 ในบทที่ 2 และ $y(x)=x$

จะได้ว่า $Y(m)=\delta(m-1)=\begin{cases}1; & m=1\\ 0; & m\neq 1\end{cases}$ (4.46) (4.47)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $Y(m)$ ลงในสมการที่ (4.44) และสมการที่ (4.45) ในขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า

เมื่อ $l=0;\ G(0) = \cos Y(0)$

$$= \cos(0)$$

$$= 1 \qquad (4.48)$$

$$k=0;\ F(0) = \sin Y(0)$$

$$= \sin(0)$$

$$= 0 \qquad (4.49)$$

$$l=1;\ G(1) = -\left[\frac{1}{1}F(0)Y(1)\right]$$

$$= F(0)$$

$$= 0 \qquad (4.50)$$

$$k=1;\ F(1) = \frac{1}{1}G(0)Y(1)$$

$$= 1 \qquad (4.51)$$

$$l=2;\ G(2) = -\sum_{k=0}^{1}\frac{2-k}{2}F(k)Y(2-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(2)+\frac{1}{2}F(1)Y(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}F(1)$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad (4.52)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k=2;\quad F(2) = \sum_{l=0}^{1}\frac{2-l}{2}G(l)Y(2-l)$$

$$= 1G(0)Y(0)+\frac{1}{2}G(1)Y(1)$$

$$= 0 \tag{4.53}$$

$$l=3;\quad G(3) = -\sum_{k=0}^{2}\frac{3-k}{3}F(k)Y(3-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(3)+\frac{2}{3}F(1)Y(2)+\frac{1}{3}F(2)Y(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}F(2)$$

$$= 0 \tag{4.54}$$

$$k=3;\quad F(3) = \sum_{l=0}^{2}\frac{3-l}{3}G(l)Y(3-l)$$

$$= 1G(0)Y(3)+\frac{2}{3}G(1)Y(2)+\frac{1}{3}G(2)Y(1)$$

$$= -\frac{1}{6} \tag{4.55}$$

$$l=4;\quad G(4) = -\sum_{k=0}^{3}\frac{4-k}{4}F(k)Y(4-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(4)+\frac{3}{4}F(1)Y(3)+\frac{2}{4}F(2)Y(2)+\frac{1}{4}F(3)Y(1)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}F(3)$$

$$= \frac{1}{24} \tag{4.56}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k=4;\quad F(4) = \sum_{l=0}^{3}\frac{4-l}{4}G(l)Y(4-l)$$

$$= 1G(0)Y(4)+\frac{3}{4}G(1)Y(3)+\frac{2}{4}G(2)Y(2)+\frac{1}{4}G(3)Y(1)$$

$$= 0 \qquad (4.57)$$

$$l=5;\quad G(5) = -\sum_{k=0}^{4}\frac{5-k}{5}F(k)Y(5-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(5)+\frac{4}{5}F(1)Y(4)+\frac{3}{5}F(2)Y(3)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{5}F(3)Y(2)+\frac{1}{5}F(4)Y(1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}F(4)$$

$$= 0 \qquad (4.58)$$

$$k=5;\quad F(5) = \sum_{l=0}^{4}\frac{5-l}{5}G(l)Y(5-l)$$

$$= 1G(0)Y(5)+\frac{4}{5}G(1)Y(4)+\frac{3}{5}G(2)Y(3)+\frac{2}{5}G(3)Y(2)$$

$$+\frac{1}{5}G(4)Y(1)$$

$$= \frac{1}{120} \qquad (4.59)$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> หาค่า $U(m,n)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4.42) ใน<u>ขั้นตอนที่ 1</u> จะได้ว่า

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n)+(n+2)(n+1)U(m,n+2) = \begin{cases} \sin Y(0) & ;m=0 \\ \sum_{l=0}^{m-1}\frac{m-l}{m}G(l)Y(m-l); & m\geq 1 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการแทนค่า $G(l)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 และ $Y(m)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 ลงในสมการที่ (4.42) และจากนิยามที่ 1 ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

จากเงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0$ (ตามสมการที่ (4.22))

ทำให้ได้ว่า $$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}nU(m,n)x^m y^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)U(m,n)x^m y^{n-2}$$

จากเงื่อนไข

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y)&=\left[(2)(1)U(0,2)0^0y^0+(3)(2)\cancelto{0}{U(0,3)}0^0y^1+(4)(3)\cancelto{0}{U(0,4)}0^0y^2+\ldots\right]\\&+\left[(2)(1)U(1,2)0^1y^0+(3)(2)\cancelto{0}{U(1,3)}0^1y^1+(4)(3)\cancelto{0}{U(1,4)}0^1y^2+\ldots\right]\\&+\left[(2)(1)U(2,2)0^2y^0+(3)(2)\cancelto{0}{U(2,3)}0^2y^1+(4)(3)\cancelto{0}{U(2,4)}0^2y^2+\ldots\right]\\&\vdots\\&+\left[(2)(1)U(m,2)0^my^0+(3)(2)\cancelto{0}{U(m,3)}0^my^1+(4)(3)\cancelto{0}{U(m,4)}0^my^2+\ldots\right]\\&=(2)(1)U(0,2)0^0y^0+(2)(1)U(1,2)0^1y^1\\&+(2)(1)U(2,2)0^2y^0+(2)(1)U(m,2)0^my^0+\ldots\\&=0\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $U(m,2)=0$ เมื่อ $m=0,1,2,\ldots$ จะได้ว่า

เมื่อ $\boxed{m=0,n=0;}$ $(2)(1)U(2,0)+(2)(1)U(0,2)=\sin Y(0)$

จาก $U(0,2)=0$ จะได้ว่า $2U(2,0)=\sin(0)$

ดังนั้น $$U(2,0)=0 \qquad (4.60)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\boxed{m=1,n=0;}$ $(3)(2)U(3,0)+(2)(1)U(1,2)=\frac{1}{1}G(0)Y(1)$

จาก $U(1,2)=0$ จะได้ว่า $6U(3,0)=1$

ดังนั้น $$U(3,0)=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!} \tag{4.61}$$

$\boxed{m=2,n=0;}$ $(4)(3)U(4,0)+(2)(1)U(2,2)=1G(0)Y(2)+\frac{1}{2}G(1)Y(1)$

จาก $U(2,2)=0$ จะได้ว่า $12U(4,0)=0$

ดังนั้น $$U(4,0)=0 \tag{4.62}$$

$\boxed{m=3,n=0;}$ $(5)(4)U(5,0)+(2)(1)U(3,2)=1G(0)Y(3)+\frac{2}{3}G(1)Y(2)+\frac{1}{3}G(2)Y(1)$

จาก $U(3,2)=0$ จะได้ว่า $20U(5,0)=-\frac{1}{6}$

ดังนั้น $$U(5,0)=-\frac{1}{120}=-\frac{1}{5!} \tag{4.63}$$

$\boxed{m=4,n=0;}$ $(6)(5)U(6,0)+(2)(1)U(4,2)=1G(0)Y(4)+\frac{3}{4}G(1)Y(3)+\frac{2}{4}G(2)Y(2)$

$$+\frac{1}{4}G(3)Y(1)$$

จาก $U(4,2)=0$ จะได้ว่า $30U(6,0)=0$

ดังนั้น $$U(6,0)=0 \tag{4.64}$$

$\boxed{m=5,n=0;}$ $(7)(6)U(7,0)+(2)(1)U(5,2)=1G(0)Y(5)+\frac{4}{5}G(1)Y(4)+\frac{3}{5}G(2)Y(3)$

$$+\frac{2}{5}G(3)Y(2)+\frac{1}{5}G(4)Y(1)$$

จาก $U(5,2)=0$ จะได้ว่า $42U(7,0)=\frac{1}{120}$

ดังนั้น $$U(7,0)=\frac{1}{5040}=\frac{1}{7!} \tag{4.65}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลเฉลยของปัญหาคือ

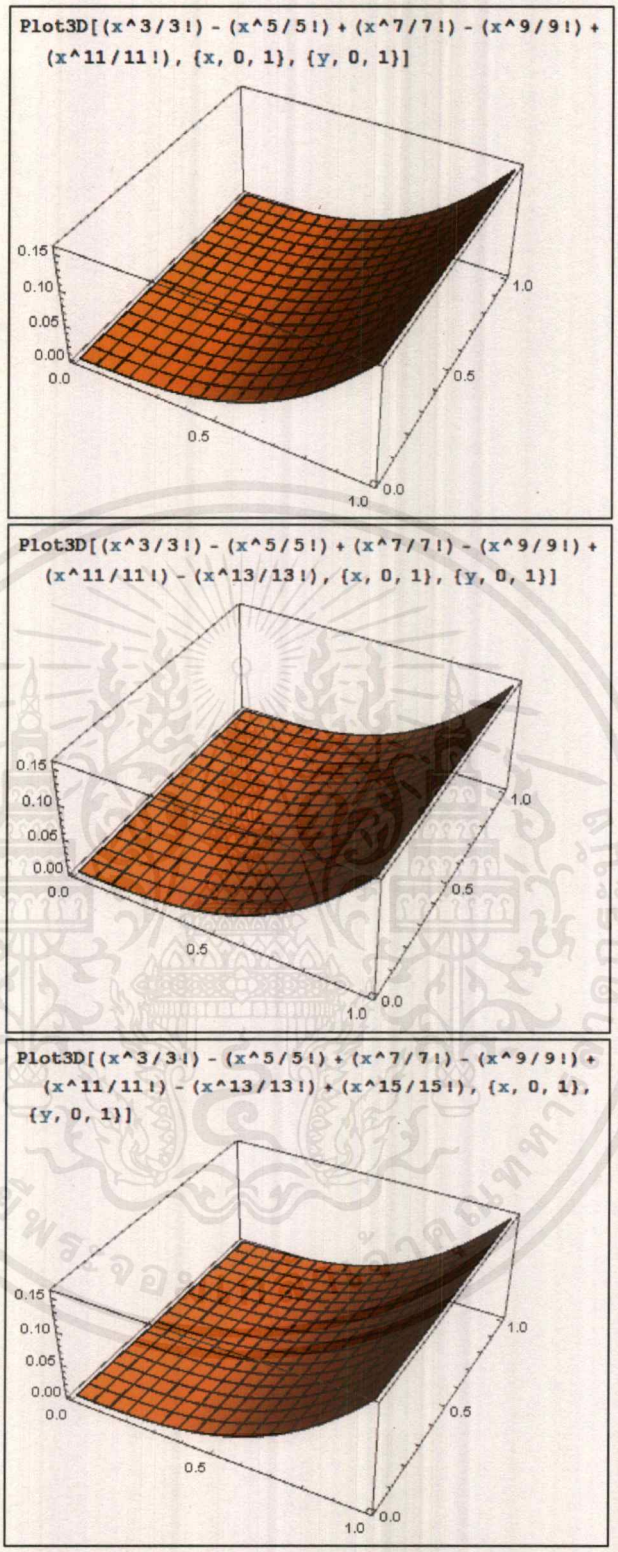
$$
\begin{aligned}
u(x,y) = {} & [\overset{0}{\cancel{U(0,0)}}x^0y^0 + \overset{0}{\cancel{U(0,1)}}x^0y^1 + \overset{0}{\cancel{U(0,2)}}x^0y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(1,0)}}x^1y^0 + \overset{0}{\cancel{U(1,1)}}x^1y^1 + \overset{0}{\cancel{U(1,2)}}x^1y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(2,0)}}x^2y^0 + \overset{0}{\cancel{U(2,1)}}x^2y^1 + \overset{0}{\cancel{U(2,2)}}x^2y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{1/6}{\cancel{U(3,0)}}x^3y^0 + \overset{0}{\cancel{U(3,1)}}x^3y^1 + \overset{0}{\cancel{U(3,2)}}x^3y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(4,0)}}x^4y^0 + \overset{0}{\cancel{U(4,1)}}x^4y^1 + \overset{0}{\cancel{U(4,2)}}x^4y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{-1/120}{\cancel{U(5,0)}}x^5y^0 + \overset{0}{\cancel{U(5,1)}}x^5y^1 + \overset{0}{\cancel{U(5,2)}}x^5y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(6,0)}}x^6y^0 + \overset{0}{\cancel{U(6,1)}}x^6y^1 + \overset{0}{\cancel{U(6,2)}}x^6y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{1/5040}{\cancel{U(7,0)}}x^7y^0 + \overset{0}{\cancel{U(7,1)}}x^7y^1 + \overset{0}{\cancel{U(7,2)}}x^7y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(8,0)}}x^8y^0 + \overset{0}{\cancel{U(8,1)}}x^8y^1 + \overset{0}{\cancel{U(8,2)}}x^8y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{-1/362880}{\cancel{U(9,0)}}x^9y^0 + \overset{0}{\cancel{U(9,1)}}x^9y^1 + \overset{0}{\cancel{U(9,2)}}x^9y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(10,0)}}x^{10}y^0 + \overset{0}{\cancel{U(10,1)}}x^{10}y^1 + \overset{0}{\cancel{U(10,2)}}x^{10}y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{1/39916800}{\cancel{U(11,0)}}x^{11}y^0 + \overset{0}{\cancel{U(11,1)}}x^{11}y^1 + \overset{0}{\cancel{U(11,2)}}x^{11}y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{0}{\cancel{U(12,0)}}x^{12}y^0 + \overset{0}{\cancel{U(12,1)}}x^{12}y^1 + \overset{0}{\cancel{U(12,2)}}x^{12}y^2 + \ldots] \\
& + [\overset{-1/6227020800}{\cancel{U(13,0)}}x^{13}y^0 + \overset{0}{\cancel{U(13,1)}}x^{13}y^1 + \overset{0}{\cancel{U(13,2)}}x^{13}y^2 + \ldots]
\end{aligned}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากสมการที่ (4.60) ถึง สมการที่ (4.65) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (0)x^0y^0+(0)x^0y^1+(0)x^0y^2+\ldots+(0)x^1y^0+(0)x^1y^1+(0)x^1y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^2y^0+(0)x^2y^1+(0)x^2y^2+\ldots+\left(\frac{1}{6}\right)x^3y^0+(0)x^3y^1+(0)x^3y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^4y^0+(0)x^4y^1+(0)x^4y^2+\ldots+\left(-\frac{1}{120}\right)x^5y^0+(0)x^5y^1+(0)x^5y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^6y^0+(0)x^6y^1+(0)x^6y^2+\ldots+\left(\frac{1}{5040}\right)x^7y^0+(0)x^7y^1+(0)x^7y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^8y^0+(0)x^8y^1+(0)x^8y^2+\ldots+\left(-\frac{1}{362880}\right)x^9y^0+(0)x^9y^1+(0)x^9y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^{10}y^0+(0)x^{10}y^1+(0)x^{10}y^2+\ldots+\left(\frac{1}{39916800}\right)x^{11}y^0+(0)x^{11}y^1+(0)x^{11}y^2+\ldots \\
&\quad +(0)x^{12}y^0+(0)x^{12}y^1+(0)x^{12}y^2+\ldots+\left(-\frac{1}{6227020800}\right)x^{13}y^0+(0)x^{13}y^1+(0)x^{13}y^2 \\
&\simeq \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{5040}x^7-\frac{1}{362880}x^9+\frac{1}{39916800}x^{11}-\frac{1}{6227020800}x^{13} \\
&= \frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{11}}{11!}-\frac{x^{13}}{13!}
\end{aligned}
\qquad (4.66)
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.66) ของสมการที่ (4.40) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติเปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.4 $u_{yy}+u_{xx}=\cos(y(x))$ เมื่อ $y(x)=x$ (4.67)

$$B.C. \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0 \tag{4.68}$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ทำการแปลงเชิงอนุพันธ์กับสมการที่ (4.67) โดยใช้สมการที่ (5) และสมการที่ (6) ในตารางที่ 2.2 ในบทที่ 2 และสมการที่ (3) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n)+(n+2)(n+1)U(m,m+2)=\begin{cases}\cos y(0) & ;m=0\\ -\sum_{l=0}^{m-1}\frac{m-l}{m}F(l)Y(m-l) & ;m\geq 1\end{cases} \tag{4.69}$$

โดยที่ $F(l)$ คือสมการแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $f(y(x))$ (4.70)

เมื่อ $f(y(x))=\sin y(x);\ y(x)=x$ (4.71)

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หาค่า $F(l)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (2) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

$$F(l)=\begin{cases}\sin Y(0) & ;l=0\\ \sum_{k=0}^{l-1}\frac{l-k}{l}G(k)Y(l-k) & ;l\geq 1\end{cases} \tag{4.72}$$

โดยที่ $G(k)$ คือการแปลงเชิงอนุพันธ์ของ $g(y(x))$

เมื่อ $g(y(x))=\cos y(x);\ y(x)=x$

จากสมการที่ (3) ในตารางที่ 2.3 ในบทที่ 2

$$G(k)=\begin{cases}\cos Y(0) & ;k=0\\ -\sum_{h=0}^{k-1}\frac{k-h}{k}F(h)Y(k-h) & ;k\geq 1\end{cases} \tag{4.73}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> หาค่า $Y(m)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4) ในตารางที่ 2.1 ในบทที่ 2 และ $y(x)=x$ จะได้ว่า

$$Y(m)=\delta(m-1)=\begin{cases}1;m=1\\ 0;m\neq 1\end{cases} \tag{4.74}$$
(4.75)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $Y(m)$ ลงในสมการที่ (4.72) และสมการที่ (4.73) ในขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า

เมื่อ $l=0;\ F(0) = \sin Y(0)$

$$= \sin(0)$$

$$= 0 \tag{4.76}$$

$$k=0;\ G(0) = \cos Y(0)$$

$$= \cos(0)$$

$$= 1 \tag{4.77}$$

$$l=1;\ F(1) = 1G(0)Y(1)$$

$$= G(0)$$

$$= 1 \tag{4.78}$$

$$k=1;\ G(1) = -\frac{1}{1}F(0)Y(1)$$

$$= 0 \tag{4.79}$$

$$l=2;\ F(2) = \sum_{l=0}^{1}\frac{2-l}{2}G(l)Y(2-l)$$

$$= 1G(0)Y(2)+\frac{1}{2}G(1)Y(1)$$

$$= 0 \tag{4.80}$$

$$k=2;\ G(2) = -\sum_{k=0}^{1}\frac{2-k}{2}F(k)Y(2-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(2)+\frac{1}{2}F(1)Y(1)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} \tag{4.81}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$l=3;\quad F(3) = \sum_{l=0}^{2}\frac{3-l}{3}G(l)Y(3-l)$$

$$= 1G(0)Y(3)+\frac{2}{3}G(1)F(2)+\frac{1}{3}G(2)Y(1)$$

$$= -\frac{1}{6} \tag{4.82}$$

$$k=3;\ G(3) = -\sum_{k=0}^{2}\frac{3-k}{3}F(k)Y(3-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(3)+\frac{2}{3}F(1)Y(2)+\frac{1}{3}F(2)Y(1)\right]$$

$$= 0 \tag{4.83}$$

$$l=4;\quad F(4) = \sum_{l=0}^{3}\frac{4-l}{4}G(l)Y(4-l)$$

$$= 1G(0)Y(4)+\frac{3}{4}G(1)Y(3)+\frac{2}{4}G(2)Y(2)+\frac{1}{4}G(3)Y(1)$$

$$= 0 \tag{4.84}$$

$$k=4;\ G(4) = -\sum_{k=0}^{3}\frac{4-k}{4}F(k)Y(4-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(4)+\frac{3}{4}F(1)Y(3)+\frac{2}{4}F(2)Y(2)+\frac{1}{4}F(3)Y(1)\right]$$

$$= \frac{1}{24} \tag{4.85}$$

$$l=5;\quad F(5) = \sum_{l=0}^{4}\frac{5-l}{5}G(l)Y(5-l)$$

$$= 1G(0)Y(5)+\frac{4}{5}G(1)Y(4)+\frac{3}{5}G(2)Y(3)+\frac{2}{5}G(3)Y(2)$$

$$+\frac{1}{5}G(4)Y(1)$$

$$= -\frac{1}{120} \tag{4.86}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k=5;\ G(5) = -\sum_{k=0}^{4}\frac{5-k}{5}F(k)Y(5-k)$$

$$= -\left[1F(0)Y(5)+\frac{4}{5}F(1)Y(4)+\frac{3}{5}F(2)Y(3)+\frac{2}{5}F(3)Y(2)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}F(4)Y(1)\right]$$

$$=0 \qquad (4.87)$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> หาค่า $U(m,n)$ โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (4.69) จะได้ว่า

$$(m+2)(m+1)U(m+2,n)+(n+2)(n+1)U(m,m+2)=\begin{cases}\cos y(0) & ;m=0\\ -\sum_{l=0}^{m-1}\frac{m-l}{m}F(l)Y(m-l) & ;m\geq 1\end{cases}$$

โดยการนำค่า $F(l)$ ที่ได้ใน<u>ขั้นตอนที่ 2</u> และ $Y(m)$ ที่ได้ใน<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ลงในสมการที่ (4.69) และจากนิยามที่ 1 ในบทที่ 2 จะได้ว่า

$$U(m,n)=\frac{1}{m!n!}\left[\frac{\partial^{m+n}u(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

จากเงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0$ (ตามสมการที่ (4.22))

ทำให้ได้ว่า $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}nU(m,n)x^m y^{n-1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)U(m,n)x^m y^{n-2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากเงื่อนไข

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y) = \Big[(2)(1)U(0,2)0^0 y^0 + (3)(2)\cancel{U(0,3)}^{0}0^0 y^1 + (4)(3)\cancel{U(0,4)}^{0}0^0 y^2 + \ldots\Big]$$
$$+\Big[(2)(1)U(1,2)0^1 y^0 + (3)(2)\cancel{U(1,3)}^{0}0^1 y^1 + (4)(3)\cancel{U(1,4)}^{0}0^1 y^2 + \ldots\Big]$$
$$+\Big[(2)(1)U(2,2)0^2 y^0 + (3)(2)\cancel{U(2,3)}^{0}0^2 y^1 + (4)(3)\cancel{U(2,4)}^{0}0^2 y^2 + \ldots\Big]$$
$$\vdots$$
$$+\Big[(2)(1)U(m,2)0^m y^0 + (3)(2)\cancel{U(m,3)}^{0}0^m y^1 + (4)(3)\cancel{U(m,4)}^{0}0^m y^2 + \ldots\Big]$$
$$= (2)(1)U(0,2)0^0 y^0 + (2)(1)U(1,2)0^1 y^1$$
$$+(2)(1)U(2,2)0^2 y^0 + (2)(1)U(m,2)0^m y^0 + \ldots$$
$$= 0$$

ทำให้ได้ว่า $U(m,2)=0$ เมื่อ $m=0,1,2,\ldots$ จะได้ว่า

เมื่อ $\boxed{m=0,n=0;}$ $(2)(1)U(2,0)+(2)(1)U(0,2)=1$

จาก $U(0,2)=0$ จะได้ว่า $2U(2,0)=1$

ดังนั้น $$U(2,0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!} \qquad (4.88)$$

$\boxed{m=1,n=0;}$ $(3)(2)U(3,0)+(2)(1)U(1,2)=0$

จาก $U(1,2)=0$ จะได้ว่า $6U(3,0)=0$

ดังนั้น $$U(3,0)=0 \qquad (4.89)$$

$\boxed{m=2,n=0;}$ $(4)(3)U(4,0)+(2)(1)U(2,2)=-\frac{1}{2}$

จาก $U(2,2)=0$ จะได้ว่า $12U(4,0)=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $$U(4,0)=-\frac{1}{24}=-\frac{1}{4!} \qquad (4.90)$$

$\boxed{m=3,n=0;}$ $(5)(4)U(5,0)+(2)(1)U(3,2)=0$

จาก $U(3,2)=0$ จะได้ว่า $20U(5,0)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $$U(5,0)=0 \qquad (4.91)$$

$\boxed{m=4,n=0;}$ $(6)(5)U(6,0)+(2)(1)U(4,2)=\frac{1}{720}$

จาก $U(4,2)=0$ จะได้ว่า $30U(6,0)=\frac{1}{720}$

ดังนั้น $$U(6,0)=\frac{1}{720}=\frac{1}{6!} \qquad (4.92)$$

$\boxed{m=5,n=0;}$ $(7)(6)U(7,0)+(2)(1)U(5,2)=0$

จาก $U(5,2)=0$ จะได้ว่า $42U(7,0)=0$

ดังนั้น $$U(7,0)=0 \qquad (4.93)$$

จะได้ผลเฉลยของปัญหาคือ

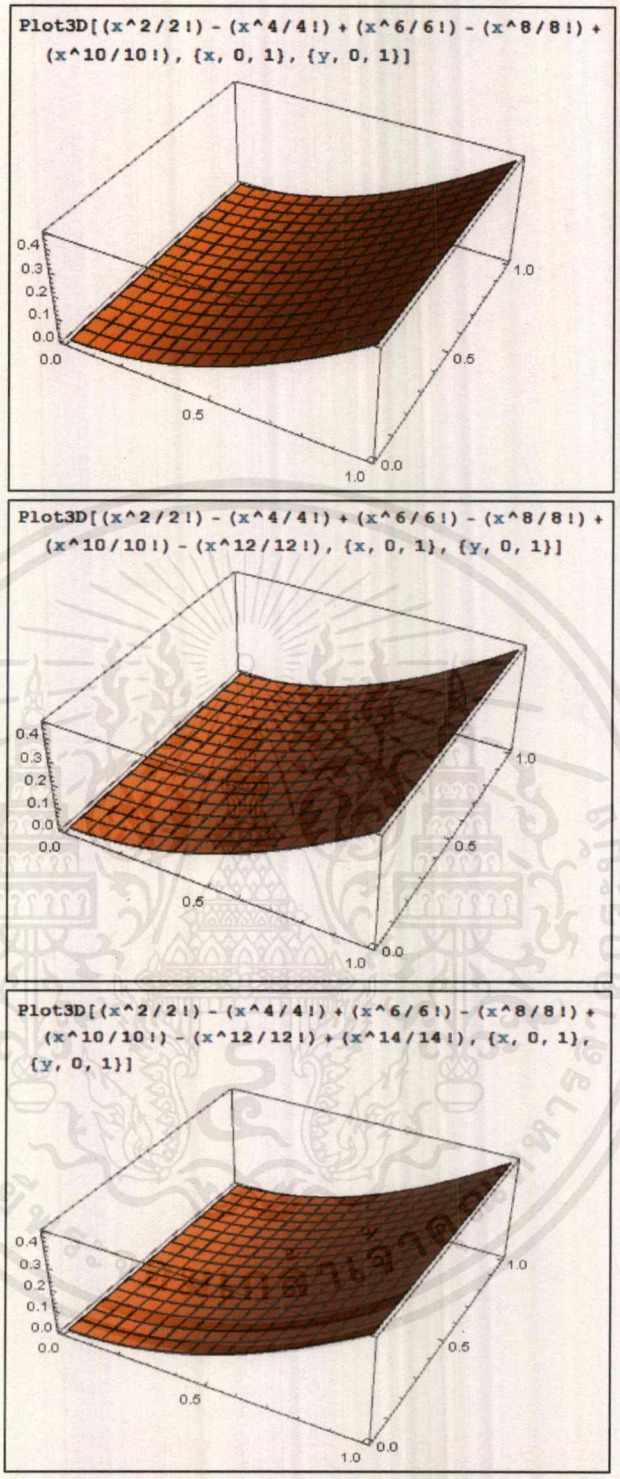
$$\begin{aligned}
u(x,y)=&[\overset{0}{\cancel{U(0,0)}}x^0y^0+\overset{0}{\cancel{U(0,1)}}x^0y^1+\overset{0}{\cancel{U(0,2)}}x^0y^2+\ldots]\\
&+[\overset{0}{\cancel{U(1,0)}}x^1y^0+\overset{0}{\cancel{U(1,1)}}x^1y^1+\overset{0}{\cancel{U(1,2)}}x^1y^2+\ldots]\\
&+[\overset{1/2}{\cancel{U(2,0)}}x^2y^0+\overset{0}{\cancel{U(2,1)}}x^2y^1+\overset{0}{\cancel{U(2,2)}}x^2y^2+\ldots]\\
&+[\overset{0}{\cancel{U(3,0)}}x^3y^0+\overset{0}{\cancel{U(3,1)}}x^3y^1+\overset{0}{\cancel{U(3,2)}}x^3y^2+\ldots]\\
&+[\overset{-1/24}{\cancel{U(4,0)}}x^4y^0+\overset{0}{\cancel{U(4,1)}}x^4y^1+\overset{0}{\cancel{U(4,2)}}x^4y^2+\ldots]\\
&+[\overset{0}{\cancel{U(5,0)}}x^5y^0+\overset{0}{\cancel{U(5,1)}}x^5y^1+\overset{0}{\cancel{U(5,2)}}x^5y^2+\ldots]\\
&+[\overset{1/720}{\cancel{U(6,0)}}x^6y^0+\overset{0}{\cancel{U(6,1)}}x^6y^1+\overset{0}{\cancel{U(6,2)}}x^6y^2+\ldots]\\
&+[\overset{0}{\cancel{U(7,0)}}x^7y^0+\overset{0}{\cancel{U(7,1)}}x^7y^1+\overset{0}{\cancel{U(7,2)}}x^7y^2+\ldots]\\
&+[\overset{-1/40320}{\cancel{U(8,0)}}x^8y^0+\overset{0}{\cancel{U(8,1)}}x^8y^1+\overset{0}{\cancel{U(8,2)}}x^8y^2+\ldots]\\
&+[\overset{0}{\cancel{U(9,0)}}x^9y^0+\overset{0}{\cancel{U(9,1)}}x^9y^1+\overset{0}{\cancel{U(9,2)}}x^9y^2+\ldots]
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากสมการที่ (4.88) ถึงสมการที่ (4.93) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (0)x^0y^0 + (0)x^0y^1 + (0)x^0y^2 + \ldots + (0)x^1y^0 + (0)x^1y^1 + (0)x^1y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)x^2y^0 + (0)x^2y^1 + (0)x^2y^2 + \ldots + (0)x^3y^0 + (0)x^3y^1 + (0)x^3y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(-\frac{1}{24}\right)x^4y^0 + (0)x^4y^1 + (0)x^4y^2 + \ldots + (0)x^5y^0 + (0)x^5y^1 + (0)x^5y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{720}\right)x^6y^0 + (0)x^6y^1 + (0)x^6y^2 + \ldots + (0)x^7y^0 + (0)x^7y^1 + (0)x^7y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(-\frac{1}{40320}\right)x^8y^0 + (0)x^8y^1 + (0)x^8y^2 + \ldots + (0)x^9y^0 + (0)x^9y^1 + (0)x^9y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{3628800}\right)x^{10}y^0 + (0)x^{10}y^1 + (0)x^{10}y^2 + \ldots + (0)x^{11}y^0 + (0)x^{11}y^1 + (0)x^{11}y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(-\frac{1}{491001600}\right)x^{12}y^0 + (0)x^{12}y^1 + (0)x^{12}y^2 + \ldots + (0)x^{13}y^0 + (0)x^{13}y^1 + (0)x^{13}y^2 \\
&\approx \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{3628800}x^{10} - \frac{1}{491001600}x^{12} \\
&= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!}
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงผลเฉลยตามสมการที่ (4.94) ของสมการที่ (4.67) ที่ได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เปรียบเทียบเมื่อเพิ่มขึ้นทีละพจน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ปัญหาพิเศษนี้ได้ทำการศึกษาวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติสำหรับการแก้ปัญหาป๊วส์ซอง ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบที่กำหนด ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ โดยเริ่มจากการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ เพื่อแปลงสมการป๊วส์ซองให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดและนำความสัมพันธ์ดังกล่าวมาเขียนโปรแกรม เพื่อใช้หาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลย

ตารางที่ 5.1 ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(1) $u(x,y)=v(x,y)\pm w(x,y)$	$U(m,n)=V(m,n)\pm W(m,n)$
(2) $u(x,y)=av(x,y)$	$U(m,n)=aV(m,n)$
(3) $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	$U(m,n)=(m+1)F(m+1,n)$
(4) $u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	$U(m,n)=(n+1)F(m,n+1)$
(5) $u(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$	$U(m,n)=(m+2)(m+1)F(m+2,n)$
(6) $u(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$	$U(m,n)=(n+2)(n+1)F(m,n+2)$
(7) $u(x,y)=v(x,y)w(x,y)$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}V(k,n-l)W(m-k,l)$
(8) $u(x,y)=\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial x}$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(m-k+1)W(m-k+1,l)V(k,n-l)$
(9) $u(x,y)=\frac{v(w)\partial w(x,y)}{\partial y}$	$U(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)W(k,n-l+1)V(m-k,l)$
(10) $u(x,y)=\frac{\partial^{r+s}v(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$	$U(m,n)=\frac{(m+r)!}{m!}\frac{(n+s)!}{n!}V(m+r,n+s)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.1(ต่อ) ตารางเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันเดิมและฟังก์ชันการแปลงเชิงอนุพันธ์ในสองมิติ

ฟังก์ชันเดิม	ฟังก์ชันการแปลง
(11) $u(x,y)=e^{av(x,y)}$	$U(m,m)=\begin{cases} e^{aV(0,0)} & ;m=0,n=0 \\ a\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n}\frac{m-k}{m}V(m-k,l)U(k,n-l); & m\geq 1 \\ a\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n-l}{n}V(k,n-l)U(m-k,l); & n\geq 1 \end{cases}$
(12) $u(x,y)=x^k y^h$	$U(m,n)=\delta(m-k,n-h)=\begin{cases}1;m=k,n=h\\0;otherwise\end{cases}$
(13) $u(x,y)=x^k e^{ay}$	$U(m,n)=\delta(m-k)\frac{a^n}{n!}$

ตารางที่ 5.2 ตารางแสดงสมการและเงื่อนไขขอบพร้อมผลเฉลยของตัวอย่างที่ 4.1

ตัวอย่างที่	สมการ	เงื่อนไขขอบ
4.1	$u_{yy}+u_{xx}=0$	$u(x,0)=x^3$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=x$
	ผลเฉลย : $u(x,y)=xy-3xy^2+x^3$	

จากตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นว่าเมื่อนำผลเฉลยของสมการไปหาอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบ y รวมกับอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบ x จะมีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งเท่ากับทางขวามือของสมการ

ตารางที่ 5.3 ตารางแสดงสมการและอนุกรมเทเลอร์พร้อมผลเฉลยของตัวอย่างที่ 4.2 ถึงตัวอย่างที่ 4.4 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบคือ $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0$

ตัวอย่างที่	สมการ	อนุกรมเทเลอร์
4.2	$u_{xx}+u_{yy}=e^{y(x)}$ เมื่อ $y(x)=x$	$e^{y(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};x\in\mathbb{R}$ $=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;x\in\mathbb{R}$
	ผลเฉลย : $u(x,y)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}$	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.3(ต่อ) แสดงสมการและอนุกรมเทเลอร์พร้อมผลเฉลยของตัวอย่างที่ 4.2 ถึงตัวอย่างที่ 4.4 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบคือ $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=0$

ตัวอย่างที่	สมการ	อนุกรมเทเลอร์
4.3	$u_{xx}+u_{yy}=\sin y(x)$ เมื่อ $y(x)=x$	$\sin y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};x\in\mathbb{R}$ $=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;x\in\mathbb{R}$
	ผลเฉลย : $u(x,y)=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{11}}{11!}-\frac{x^{13}}{13!}$	
4.4	$u_{yy}+u_{xx}=\cos y(x)$ เมื่อ $y(x)=x$	$\cos y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};x\in\mathbb{R}$ $=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots;x\in\mathbb{R}$
	ผลเฉลย : $u(x,y)=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{12}}{12!}$	

จากตัวอย่างที่ 4.2 ถึง 4.4 จะเห็นว่าเมื่อนำผลเฉลยของสมการไปหาอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบ y รวมกับอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบ x จะมีค่าเท่ากับอนุกรมเทเลอร์ของทางขวามือของตัวอย่างนั้นๆ

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราสามารถสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. ปัญหาปัวส์ซองภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบบางเงื่อนไขซึ่งสามารถใช้วิธีแยกตัวแปรได้อาจไม่สามารถใช้วิธี DTM ได้

2. ในปัญหาพิเศษนี้ใช้วิธี DTM แก้ปัญหาปัวส์ซอง เมื่อขวามือของสมการขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น เนื่องจากการแก้ปัญหาที่ขวามือของสมการขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นสองตัว มีความยากและต้องใช้เวลามากกว่านี้ อย่างไรก็ตามในปัญหาพิเศษนี้ได้ทำการศึกษาเบื้องต้นของปัญหาดังกล่าวไว้ในบทที่ 3 เพื่อให้ผู้ที่สนใจศึกษาเพิ่มเติมได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] H.Taghvafard and G. H. Erjiaee. **Two-dimensional Differential Transform Method for Solving Linear and Non-linear Goursat Problem.** 2010. International of Mathematical and Computational Sciences; 2010. p.432-435.

[2] Hoosein Jafari, Maryam Alipouy and Hale Tajadodi. **Two-dimensional Differential Transform Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equation.** University of Mazandaran, Babolsar; 2010. p.47-52.

[3] ดำรง ทิพย์โยธา. **คณิตศาสตร์ขั้นสูง.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย; 2538.

[4] Shaher Momani and Vedat Suat Erturk. **Solutions of non-linear oscillators by the modified differential transform method.** Computer and Mathematics with Application 55; p.833-842.

[5] Shih-Hsiang Chang,I-Ling Chang. **A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear function.** Applied mathematics and computation 195; 2008. p.799-808.

[6] **Taylor and Maclaurin Series.** [Online]. [03 มิถุนายน 2562]. Available form: https://www.math24.net/taylor-maclaurin-series/

[7] **Taylor Series Single Variable and Multi-Variable.** [Online]. [03 มิถุนายน 2562]. Available form: http://www.math.ucdenver.edu/~esulliva/Calculus3/Taylor.pdf

[8] **การยกกำลัง.** (ออนไลน์). [11 มิถุนายน 2562]. จาก: https://th.m.wikipedia.org/wiki/การยกกำลัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้