# การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสอง
# ของสมการเบอร์เกอร์

# A SECOND-ORDER ACCURATE NUMERICAL APPROACH
# FOR BURGER'S EQUATION


กิติยา อาลีมีน

ธมลวรรณ กลิ่นทับ

อภิชญา ไชยสิทธิ์


ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2561

# A SECOND-ORDER ACCURATE NUMERICAL APPROACH FOR BURGER'S EQUATION

KITIYA ARLEEMEEN

THAMONWAN KLINTUB

APICHAYA CHAIYASIT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT
FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

| | |
|---|---|
| **หัวข้อโครงงานพิเศษ** | การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสอง ของสมการเบอร์เกอร์<br>A Second-Order Accurate Numerical Approach for Burger's Equation |
| **ชื่อนักศึกษา** | นางสาว กิติยา อาลีมีน รหัสนักศึกษา 58050017<br>นางสาว ธมลวรรณ กลิ่นทับ รหัสนักศึกษา 58050075<br>นางสาว อภิชญา ไชยสิทธิ์ รหัสนักศึกษา 58050187 |
| **ปริญญา** | วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์ |
| **ปีการศึกษา** | 2561 |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี |
| **อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม** | ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ |

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

| คณะกรรมการสอบ | ลายมือชื่อ |
|---|---|
| อ.พรชัย ชัยสนิท<br>ประธานกรรมการ | |
| ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง<br>กรรมการ | ภูษณิศา ล้อมทอง |
| ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี<br>กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | |
| ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ<br>กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | |

| | |
|---|---|
| **หัวข้อโครงงานพิเศษ** | การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสอง ของสมการเบอร์เกอร์ |
| | A Second-Order Accurate Numerical Approach for Burger's Equation |
| **ชื่อนักศึกษา** | นางสาว กิติยา อาลีมีน รหัสนักศึกษา 58050017 |
| | นางสาว ธมลวรรณ กลิ่นทับ รหัสนักศึกษา 58050075 |
| | นางสาว อภิชญา ไชยสิทธิ์ รหัสนักศึกษา 58050187 |
| **ปริญญา** | วิทยาศาสตรบัณฑิต ( คณิตศาสตร์ประยุกต์ ) |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์ |
| **คณะ** | วิทยาศาสตร์ |
| **มหาวิทยาลัย** | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) |
| **ปีการศึกษา** | 2561 |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี |
| **อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม** | ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ |


## บทคัดย่อ

ปัญหาการไหลบางอย่าง เช่น กลศาสตร์ของไหล และการจราจร สามารถคาดการณ์ได้ โดยการใช้สมการเบอร์เกอร์ในการหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เช่น ความเร็ว ในงานวิจัยนี้เราหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ 1 มิติ โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง วิธีผลต่างอันตะกลาง และวิธีนิวตันราฟสัน เพื่อคำนวณหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่หาได้จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง เมื่อจำนวนจุดเพิ่มขึ้น



**คำสำคัญ:** สมการเบอร์เกอร์; วิธีรุงเง-คุตตา; วิธีผลต่างอันตะ; วิธีนิวตัน-ราฟสัน

| | |
|---|---|
| **Title** | A Second-Order accurate Numerical Approach for Burger's Equation |
| **Students** | Miss Kitiya Arleemeen Student ID 58050017 |
| | Miss Thamonwan Klintub Student ID 58050075 |
| | Miss Apichaya Chaiyasit Student ID 58050187 |
| **Degree** | Bachelor of Science (Appliend Mathematics) |
| **Department** | Mathematics |
| **Faculty** | Science |
| **University** | King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL) |
| **Academic Year** | 2018 |
| **Advisor** | Asst.Prof.Dr.Kanognude Wuttanachamsri |
| **Co-advisor** | Dr.Wannaporn Sanprasert |


## ABSTRACT

Some flow problems such as fluid dynamics and traffic flow can be predicted by using the Burger's equation to seek for the unknown variables such as velocities. In this research, we find the numerical solution of the one-dimensionnal Burger's equation by using the second-order Runge-Kutta method, the central finite difference method and Newton-Raphson method to calculate the solution of the nonlinear equation. The numerical results are compared with the exact solution. It is shown that the approximation converges to the exact solution when the number of grid points increases.


**Keywords:** Burger's Equation; Runge-Kutta Method; Finite Difference Method; Newton-Raphson Method

# กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการทำปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองของสมการเบอร์เกอร์ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษเป็นอย่างที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆรวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อ.พรชัย ชัยสนิท และ ดร.ภูษณิศา ล้อมทอง ที่ให้ความกรุณาและเสียสละเวลามาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในปัญหาพิเศษครั้งนี้ อีกทั้งยังให้ความรู้และให้คำแนะนำเพื่อให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติและขอขอบคุณเจ้าหน้าที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องคอมพิวเตอร์ในการทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดามารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านกำลังใจจนการทำปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีรวมทั้งเพื่อนๆทุกคนที่มีส่วนช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

กิติยา อาลีมีน

ธมลวรรณ กลิ่นทับ

อภิชญา ไชยสิทธิ์

# สารบัญ

**หน้า**

# สารบัญ(ต่อ)

# สารบัญตาราง

**ตารางที่** **หน้า**

# สารบัญรูป

**รูปภาพที่** **หน้า**

# บทที่ 1
# บทนำ

## 1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics : CFD) คือ สาขาหนึ่งในกลศาสตร์ของไหลที่ใช้กระบวนการเชิงตัวเลขและขั้นตอนวิธี (Algorithm) ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการไหลของของไหล โดยการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลต่างๆ การถ่ายเทความร้อน การแพร่กระจายของอนุภาค รวมถึงการเกิดปฏิกิริยาเคมีต่างๆ โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยหาผลเฉลยและจำลองพฤติกรรมที่เกิดขึ้น หรือกล่าวโดยสั้นก็คือวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการไหล พื้นฐานของ CFD คือการแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งเป็นสมการควบคุมการไหล ในช่วงทศวรรษ 1930 ได้มีการพัฒนาการจำลองการไหลรอบทรงกระบอกสองมิติไปจนถึงการไหลผ่านปีกเครื่องบิน เนื่องด้วยพัฒนาการของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าขึ้นจึงได้พัฒนาสู่การจำลองแบบสามมิติ โดยบริษัทและองค์กรด้านการบินต่างๆ อาทิ โบอิง, ล็อกฮีด, แมคดอนเนลล์ดักลาส และนาซา เป็นต้น ซึ่งทุกวันนี้ CFD ถูกนำไปใช้ในการพัฒนาเรือดำน้ำ, ผิวเรือ, อากาศยาน, รถยนต์, เฮลิคอปเตอร์, การจำลองรถไฟความเร็วสูง, เรือยอร์ชสำหรับแข่งขันและอื่นๆอีกมากมาย

สมการเบอร์เกอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานทางด้านฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น การจำลองแบบในเรื่องพลศาสตร์ของแก๊สกลศาสตร์ของไหล และงานที่เกี่ยวข้องกับกระแสจราจรในด้านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมานักวิจัยได้ให้ความสนใจศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ด้วยวิธีการที่แตกต่างกันหลากหลายรูปแบบ ทั้งระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Methods) [5] และระเบียบวิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite Element Methods) [6,7,8] วิธีผลต่างอันตะชี้กำลังแบบชัดแจ้ง (Explicit Exponential Finite Difference) [6] วิธีสมาชิกจำกัดพหุนามเสมือนจริงรูปร่างระฆังกำลังสองน้อยสุด (Least-Squares Quadratic B-Spline Finite Element Method) [9] เช่น เชงและแวง (P.G. Zhang และ J.P. Wang) [10] ใช้วิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับ (Compact finite difference method) ที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสี่ และระเบียบวิธีแมคคอร์แมค (MacCormack method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง สุปรียา ไพรัตน์, นุชนันทร์ เอื้อวงศาโรจน์ และณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักร์ [3] ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะชนิดกระชับอันดับที่หกกับสมการเบอร์เกอร์ในการประมาณค่าอนุพันธ์เชิงในปริภูมิ และ

ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีแมคคอร์แมคสำหรับประมาณค่าอนุพันธ์ในเวลา และนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีความถูกต้องและลดต้นทุนในการคำนวณ

ซึ่งในงานวิจัยนี้เราจะใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ โดยใช้วิธีผลต่างอันตะที่มีความถูกต้องอันดับสอง, วิธีรุงเง-คุตตาที่มีความถูกต้องอันดับสอง และวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยในหัวข้อที่ 2 จะนำเสนอเอกสารที่เกี่ยวข้อง ในหัวข้อที่ 3 เราจะแสดงวิธีการแบ่งโดเมนทั้งในปริภูมิและในเวลา และเราจะประยุกต์ใช้วิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตา ในการหาผลเฉลยในหัวข้อที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ และในหัวข้อที่ 3.3 เราประยุกต์ใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันกับสมการที่ได้ในหัวข้อที่ 3.2 ในหัวข้อที่ 4 เราใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลข และค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ และในหัวข้อที่ 5 สรุปผลที่ได้

## 1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาสมการเบอร์เกอร์เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ
2. เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตาของสมการเบอร์เกอร์

## 1.3 ขอบเขตของปัญหา

1. ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ
2. หาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์โดยใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตาที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสอง

## 1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิธีการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์
2. ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์
3. ศึกษาขั้นตอนของวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตาของสมการเบอร์เกอร์
4. ออกแบบการเขียนโปรแกรมของวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองของสมการเบอร์เกอร์
5. พัฒนาและทดสอบโปรแกรม
6. ประเมินผลและสรุปผลที่ได้จากการศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตาที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองของสมการเบอร์เกอร์
7. นำเสนอผลงานต่อคณะกรรมการ

8. จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถประยุกต์ใช้วิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์ได้
2. สามารถใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์ได้

**ตารางที่ 1.1** แสดงขั้นตอนการดำเนินงาน

| ขั้นตอนการดำเนินงาน | ระยะเวลาในการดำเนินงาน (ปี 2561-2562) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ส.ค. | ก.ย. | ต.ค. | พ.ย. | ธ.ค. | ม.ค. | ก.พ. | มี.ค. | เม.ย. | พ.ค. |
| 1.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิธีการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ | ↔ | | | | | | | | | |
| 2.ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข | ↔ | ↔ | | | | | | | | |
| 3.ศึกษาขั้นตอนของวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลข | | ↔ | | | | | | | | |
| 4.ออกแบบการเขียนโปรแกรมของวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข | | | ↔ | ↔ | | | | | | |
| 5.พัฒนาและทดสอบโปรแกรม | | | | | ↔ | ↔ | | | | |
| 6.ประเมินผลและสรุปผลที่ได้จากการศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข | | | | | | ↔ | ↔ | | | |
| 7.นำเสนอผลงานต่อคณะกรรมการ | | | | | | | | ↔ | ↔ | ↔ |
| 8.จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ | | | | | | | | ↔ | ↔ | ↔ |

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองของสมการเบอร์เกอร์ ซึ่งได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิธีการของกลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics), สมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equation), วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง (Second-Order Runge-Kutta Method), วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton–Raphson Method), วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method), สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations:PDEs), ความคลาดเคลื่อน (Errors) และสุดท้ายเป็นเรื่องเกี่ยวกับพื้นฐานโปรแกรมทางคณิตศาสตร์

## 2.1 กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics)

วิชากลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของของไหลที่สภาวะต่าง ๆ แรงที่ของไหลกระทำต่อสิ่งแวดล้อม รวมถึงอิทธิผลของสิ่งต่าง ๆ ที่มีผลต่อของไหลทั้งที่อยู่นิ่งและเคลื่อนที่ ซึ่งการศึกษาพฤติกรรมของของไหลที่อยู่นิ่งเรียกว่า สถิตศาสตร์ของไหล (Fluid Statics) และพฤติกรรมของของไหลที่กำลังเคลื่อนที่เรียกว่า พลศาสตร์ของของไหล (Fluid Dynamics) ในการศึกษาวิชากลศาสตร์ของของไหลจำเป็นต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจหลักการ และคุณสมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับของไหลไม่ว่าจะอยู่ในสถานะของเหลว หรือก๊าซ

กลศาสตร์ของไหล แบ่งได้เป็น

1) สถิตศาสตร์ของไหล (Fluid Statics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง ได้แก่ การศึกษาความดันในของไหล หลักของพาสคาล หลักของอาร์คีมีดิส ความตึงผิว
2) พลศาสตร์ของของไหล (Fluid Dynamics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล ได้แก่ การศึกษาสมการต่อเนื่อง สมการของแบร์นูลลี ความหนืด การศึกษาทางด้านนี้สามารถประยุกต์ใช้ในการออกแบบ และแก้ไขปัญหาต่าง ๆ

## 2.2 สมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equation )

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการเบอร์เกอร์ใน 1 มิติ ที่ขึ้นอยู่กับเวลา ซึ่งเป็นสมการไม่เชิงเส้นพร้อมทั้งเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ สมการเบอร์เกอร์บนโดเมน $(a,b)$ คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; a<x<b \tag{2.1}$$

เงื่อนไขขอบคือ

$$u(a,t)=f_1(t) \quad ; 0<t\le T \tag{2.2}$$

และ

$$u(b,t)=f_2(t) \quad ; 0<t\le T \tag{2.3}$$

เมื่อ $\upsilon$ และ $T$ เป็นค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์ $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาและ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $x$ และมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$u(x,0)=g(x) \quad ; a<x<b \tag{2.4}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> พิจารณาสมการ Burger ใน 1 มิติ [11] จากสมการที่ (2.1) โดยวิธี Lax-Friendrichs เมื่อให้เงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; 0<x<2\pi\ ,\ t>1$$

เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$u(0,\mathrm{t})=0$$

และ

$$u(2\pi,\mathrm{t})=0$$

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$u(x,0)=\sin x \quad ; 0<x<2\pi$$

หาอนุพันธ์ของ $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ด้วยวิธี Finite Difference โดยกำหนดให้

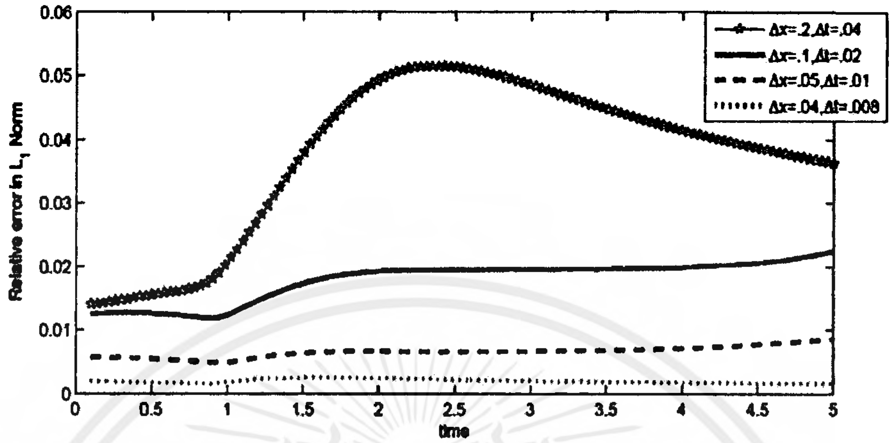
$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{l} \quad \text{; โดยวิธีผลต่างจากหน้า}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{U_{m+1}^n-U_{m-1}^n}{2h} \quad \text{; โดยวิธีผลต่างจากกลางอันดับหนึ่ง}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n}{h^2} \quad \text{; โดยวิธีผลต่างจากกลางอันดับสอง}$$

จะได้ $$\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{l}+u\left(\frac{U_{m+1}^n-U_{m-1}^n}{2h}\right)=\upsilon\left(\frac{U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n}{h^2}\right)$$

กำหนดให้ $v = 0.1, h = \Delta x = 0.1, l = \Delta t = 0.001$ และ $T = 5$ โดยใช้วิธี Lax-Friedrichs ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข และแสดงผลลัพธ์ค่าคลาดเคลื่อน ดังนี้




**รูปภาพที่ 2.1** แสดงค่าคลาดเคลื่อนที่ $\Delta x$ และ $\Delta t$

จาก รูปภาพที่ 2.1 แสดงค่าคลาดเคลื่อนของ $\Delta x = 0.2,\ \Delta t = 0.04$, $\Delta x = 0.1,\ \Delta t = 0.02$, $\Delta x = 0.05,\ \Delta t = 0.01$และ $\Delta x = 0.04,\ \Delta t = 0.008$

## 2.3 วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง (Second-Order Runge–Kutta Method)

วิธีรุงเง-คุตตาเป็นวิธีที่ได้รับความนิยม และนำไปใช้กันอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง แนวความคิดที่ใช้ในการคิดค้นวิธีรุงเง-คุตตา คือการหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูง เพื่อทำให้ได้ค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงตามมา ซึ่งวิธีรุงเง-คุตตามีความแม่นยำอันดับ $n$ หรือ $O\left(h^n\right)$ เมื่อ $n$ บอกถึงอันดับของวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งในที่นี้เราสนใจวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองหรือ (RK2) จากสมการเริ่มต้น คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t,u\right) \quad ;u\left(t_0\right) = u_0$$

จะได้รูปสมการรุงเงคุตตา ดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}\right)F + \left(\frac{1}{2}\right)G \tag{2.5}$$

เมื่อ $F = hf\left(x_i, y_i\right)$

$G = hf\left(x_i + h, y_i + F\right)$

<u>**ตัวอย่าง**</u> $IVP: y' = \left(\sin x\right)y - x \quad ; 0 \le x \le 1$

$IC: y\left(0\right) = 1$

จงหาผลเฉลยโดยประมาณ โดยใช้วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง เมื่อ $h = 0.25$

ดังนั้น $f(x,y) = (\sin x)y - x$

เมื่อ $i = 0$ ; $F = 0.25f(0,1) = 0$

$G = 0.25f(0.25,1) = -0.0614$

$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)0 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.0614) = 0.9693$

$i = 1$ ; $F = 0.25f(0.25,0.9693) = -0.0615$

$G = 0.25f(0.25,0.9078) = -0.1230$

$y_2 = 0.9693 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.0615) + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.1230) = 0.8771$

$i = 2$ ; $F = 0.25f(0.5,0.8771) = -0.1231$

$G = 0.25f(0.75,0.7540) = -0.1850$

$y_3 = 0.8771 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.1231) + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.1850) = 0.7231$

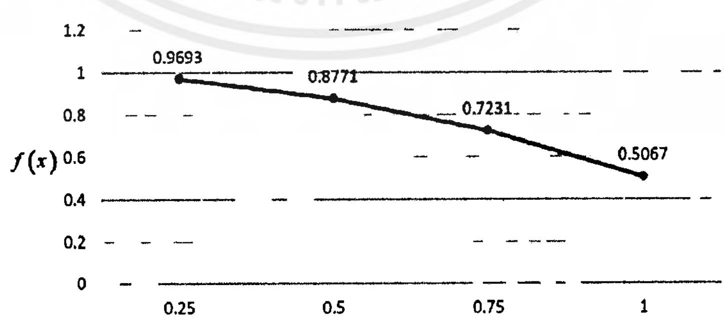
$i = 3$ ; $F = 0.25f(0.75,0.7231) = -0.1851$

$G = 0.25f(1,0.5380) = -0.2477$

$y_4 = 0.7231 + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.1851) + \left(\frac{1}{2}\right)(-0.2477) = 0.5067$

**ตารางที่ 2.1** ผลเฉลยโดยประมาณเมื่อ $h = 0.25$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 |
| $y_i$ | 1 | 0.9693 | 0.8771 | 0.7231 | 0.5067 |




**รูปภาพที่ 2.2** แสดงผลเฉลยโดยประมาณเมื่อ $h = 0.25$

## 2.4 วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton–Raphson Method)

สมมติ $x_0$ เป็นค่าประมาณของรากเริ่มต้นของสมการ $f(x)=0$ และอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ณ จุด $x_0$ ซึ่งแทนด้วย $f'(x)$ ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสกราฟ $y$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ คือ

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \tag{2.6}$$

ดังนั้น ประมาณค่า $x_1$ จากสมการ (2.6) ได้ดังนี้

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{โดยที่} \quad f'(x_0)\neq 0$$

ค่า $x$ ตัวถัดไปหาได้จากค่าประมาณก่อนหน้า โดยที่สมการในการหาพจน์ที่ $m+1$ คือ

$$x_{m+1}=x_m-\frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงใช้วิธี Newton – Raphson หาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$x^3-6x^2+9x=4$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $x^{(0)}=6$

<u>วิธีทำ</u> $f(x)=x^3-6x^2+9x-4=0$

$$\frac{df(x)}{dx}=3x^2-12x+9$$

หาค่า $\Delta c^{(0)}$ จาก $\Delta c^{(0)}=c-f\left(x^{(0)}\right)$ (ทำซ้ำรอบที่ 1)

$$\begin{aligned}&=c-\left[\left(x^{(0)}\right)^3-6\left(x^{(0)}\right)^2+9x^{(0)}-4\right]\\&=0-\left[(6)^3-6(6)^2+9(6)-4\right]\\&=-50\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)}&=3\left(x^{(0)}\right)^2-12x^{(0)}+9\\&=3(6)^2-12(6)+9\\&=45\end{aligned}$$

สามารถหาค่า $\Delta x^{(0)}$ ได้จาก

$$\begin{aligned}\Delta x^{(0)}&=\frac{\Delta c^{(0)}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^{(0)}}\\&=\frac{-50}{45}=-1.1111\end{aligned}$$

คำตอบสมการจากการ (ทำซ้ำรอบที่ 1) เท่ากับ

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} + \Delta x^{(0)} \\ &= 6 - 1.1111 \\ &= 4.8889 \end{aligned}$$

หาค่า $\Delta c^{(0)}$ จาก $\Delta c^{(1)} = c - f\left(x^{(1)}\right)$ (ทำซ้ำรอบที่ 2)

$$\begin{aligned} &= c - \left[\left(x^{(1)}\right)^3 - 6\left(x^{(1)}\right)^2 + 9x^{(1)} - 4\right] \\ &= 0 - \left[(4.8889)^3 - 6(4.8889)^2 + 9(4.8889) - 4\right] \\ &= -13.4431 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}\right)^{(1)} &= 3\left(x^{(1)}\right)^2 - 12x^{(1)} + 9 \\ &= 3(4.8889)^2 - 12(4.8889) + 9 \\ &= 22.037 \end{aligned}$$

หาค่า $\Delta x^{(1)}$ ได้จาก $\Delta x^{(1)} = \dfrac{\Delta c^{(1)}}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^{(1)}}$

$$= \frac{-13.4431}{22.037} = -0.6100$$

คำตอบสมการจากการ (ทำซ้ำรอบที่ 2) เท่ากับ

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} + \Delta x^{(1)} \\ &= 4.8889 - 0.60100 \\ &= 4.2789 \end{aligned}$$

ทำการทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนคำตอบของสมการเปลี่ยนแปลงในระดับที่ยอมรับได้หรือค่า $tol < \varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon$ มีค่าเป็นบวกที่น้อยมากๆ

(ทำซ้ำรอบที่ 3) ; $x^{(3)} = x^{(2)} + \Delta x^{(2)}$

$$= 4.2789 - \frac{2.9981}{12.5797} = 4.0405$$

(ทำซ้ำรอบที่ 4) ; $x^{(4)} = x^{(3)} + \Delta x^{(3)}$

$$= 4.0405 - \frac{0.3748}{9.4914} = 4.0011$$

(ทำซ้ำรอบที่ 5) ; $x^{(5)} = x^{(4)} + \Delta x^{(4)}$

$$= 4.0011 - \frac{0.0095}{9.0126} = 4.0000$$

## 2.5 วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method: FDM)

ในหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีการเชิงตัวเลขที่เรียกว่า วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method: FDM) มาช่วยในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDEs) ในทางคณิตศาสตร์วิธีการผลต่างอันตะเป็นวิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้สมการผลต่างอันตะในการประมาณค่าอนุพันธ์ โดยเราจะทำการสมมติค่าอนุพันธ์ที่จะทำการประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

### 2.5.1 การประมาณค่าผลเฉลยจะอาศัยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์

พิจารณา $u = u(x,t)$

จะได้
$$u = u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots \qquad (2.7)$$

$$u = u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \ldots \qquad (2.8)$$

**การประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง**

จาก (2.7) เราประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดย**วิธีผลต่างจากหน้า** (Forward Difference Method) ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h) \qquad (2.9)$$

โดยที่ $O(h)$ ซึ่งแทนค่าความคลาดเคลื่อนอันดับหนึ่ง

จาก (2.8) เราประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดย**วิธีผลต่างจากหลัง** (Backward Difference Method) ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} + O(h) \qquad (2.10)$$

โดยที่ $O(h)$ ซึ่งแทนค่าความคลาดเคลื่อนอันดับหนึ่ง

เมื่อนำ (2.7) - (2.8) และจัดรูปใหม่

เราจะประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดย**วิธีผลต่างจากกลาง** (Central Difference Method) ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \qquad (2.11)$$

โดยที่ $O(h^2)$ ซึ่งแทนค่าความคลาดเคลื่อนอันดับสอง

<u>**หมายเหตุ**</u> จากการพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดย อาศัยอนุกรมเทย์เลอร์จะพบว่า การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากกลางจะมีคลาดเคลื่อนน้อยกว่า วิธีผลต่างจากหน้าและผลต่างจากหลัง

**การประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง**

จาก (2.7) + (2.8) และจัดรูปใหม่

เราจะประมาณค่าของ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ โดย**วิธีผลต่างจากกลาง (Central Difference Method)** ในรูป

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+O(h^2) \tag{2.12}$$

โดยที่ $O(h^2)$ ซึ่งแทนค่าความคลาดเคลื่อนอันดับสอง

เราจะได้สูตรในการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ $t$ ในรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}+O(l) \quad \text{Forward Finite Difference Method} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u(x,t-l)-u(x,t)}{l}+O(l) \quad \text{Backward Finite Difference Method} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u(x,t+l)-u(x,t-l)}{2l}+O(l^2) \quad \text{Central Finite Difference Method} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{u(x,t+l)-2u(x,t)+u(x,t-l)}{l^2}+O(l^2) \quad \text{Central Finite Difference Method} \tag{2.16}$$

**<u>ตัวอย่าง</u>** กำหนด $u(x,y)=ye^x$ จงประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด $(1.3,1)$ โดยใช้วิธีผลต่างจากหน้า ผลต่างจากหลัง และผลต่างจากกลาง โดยใช้ $\Delta x = h = 0.1$ และ $\Delta x = h = 0.05$

<u>วิธีทำ</u> สำหรับ $h=0.1$ เราสามารถประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด $(1.3,1)$ โดยอาศัยสมการ (2.9), (2.10) และ (2.11) ได้ดังนี้

1. Forward: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(1.3+h,1)-u(1.3,1)}{h}=\frac{u(1.4,1)-u(1.3,1)}{0.1}=\frac{e^{1.4}-e^{1.3}}{0.1}=3.8590$

2. Backward: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(1.3,1)-u(1.3-h,1)}{h}=\frac{u(1.3,1)-u(1.2,1)}{0.1}=\frac{e^{1.3}-e^{1.2}}{0.1}=3.4918$

3. Central: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u(1.3+h,1)-u(1.3-h,1)}{2h}=\frac{u(1.4,1)-u(1.2,1)}{0.2}=\frac{e^{1.4}-e^{1.2}}{0.2}=3.6754$

สำหรับ $h=0.05$ เราสามารถประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด $(1.3,1)$ โดยอาศัยสมการ (2.9), (2.10) และ (2.11) ได้ในทำนองเดียวกัน โดยสรุปผลการคำนวณในตารางต่อไปนี้

**ตารางที่ 2.2** ผลสรุปการคำนวณเมื่อ $h = 0.1$ และ $h = 0.05$

| Type | $h = 0.1$ | | $h = 0.05$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\partial u}{\partial x}(1.3,1)$ | Error | $\frac{\partial u}{\partial x}(1.3,1)$ | Error |
| Forward | 3.859 | 0.189 | 3.762 | 0.093 |
| Backward | 3.491 | 0.177 | 3.579 | 0.090 |
| Central | 3.678 | 0.006 | 3.670 | 0.001 |

จากตารางเห็นได้ชัดว่าค่า $h = 0.05$ มีค่าน้อยกว่า $h = 0.1$ และเมื่อเปรียบเทียบวิธีในการประมาณค่าจะเห็นว่าวิธีผลต่างจากกลางจะให้ค่าที่แม่นยำกว่า

## 2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations: PDEs)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย หมายถึงสมการที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตาม (Dependent variable) ที่มีตัวแปรอิสระ (Independent variable) มากกว่า 1 ตัวแปรขึ้นไป เช่น

**ตัวอย่าง**

(a) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 4y$$

(b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(c) $$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

**หมายเหตุ** : สมการเชิงอนุพันธ์ในข้อ (a) - (b) เป็นสมการที่มี $x$ และ $y$ เป็นตัวแปรอิสระและมี $u$ เป็นตัวแปรตาม ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ในข้อ (c) มี $x$ และ $y$ เป็นตัวแปรอิสระและมี $u$ และ $\upsilon$ เป็นตัวแปรตาม

**สมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น (Linear Partial Differential Equation)** ถ้ามีสมบัติต่อไปนี้

1. สำหรับทุกๆ ตัวแปรตาม และอนุพันธ์ของตัวแปรตามที่อยู่ในสมการมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เท่านั้น
2. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปของผลคูณของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรือฟังก์ชันอดิสัยของอนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

**สมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (Non-Linear Partial Differential Equation)** หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้น

**ตารางที่ 2.3** ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

| ตัวอย่าง | สมการ | ตัวอย่างการใช้งาน |
|---|---|---|
| Laplace's equation | $\nabla^2 u = 0$ | สนามศักย์ (potential field) |
| Poisson's equation | $\nabla^2 u = f(x,y,z)$ | สนามศักย์ในระบบที่มีประจุเกี่ยวข้อง |
| Diffusion equation | $\nabla^2 u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}$ | การนำความร้อน การแพร่ |
| Wave equation | $\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ | การแผ่ของคลื่นชนิดต่าง ๆ |

ตัวอย่างเหล่านี้ล้วนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง สมการชนิดนี้มีรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น คือ

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \tag{2.17}$$

สัมประสิทธิ์ต่าง ๆ อาจจะเป็นค่าคงตัวหรือฟังก์ชันของตัวแปรต้น $x$ และ $y$ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.17) สามารถแบ่งออกเป็น 3 ประเภท ตามค่าของสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

**ตารางที่ 2.4** แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $A, B$ และ $C$

| Discriminant Value | Character of Equation | ตัวอย่าง |
|---|---|---|
| $(B^2-4AC)>0$ | Hyperbolic | Wave Equation |
| $(B^2-4AC)<0$ | Elliptic | Helmholtz Differential Equation |
| $(B^2-4AC)=0$ | Parabolic | Diffusion Equation |

**เงื่อนไขขอบเขตและเริ่มต้น**

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นเราจำเป็นต้องทราบเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition, BC) และ เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition, IC) ของปัญหาก่อนซึ่งคล้ายคลึงกับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation, ODE) ซึ่งต้องการเงื่อนไขเพื่อคำนวณหาค่าคงที่ของการอินทิเกรท

## 2.7 ความคลาดเคลื่อน (Errors)

การวัดทุกรูปแบบจะมีความคลาดเคลื่อนหรือความไม่แน่นอนเกิดขึ้นเสมอ การทดลองที่ได้ผลซึ่งความคลาดเคลื่อนเกิดจากสาเหตุ ดังนี้

1) **ความคลาดเคลื่อนเชิงบุคคล (Personal Errors)** คือ เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความบกพร่องของผู้วัดหรือผู้ทดลอง

2) **ความคลาดเคลื่อนเชิงระบบ (Symantic's Errors)** คือ เป็นความคลาดเคลื่อนเกิดจากเครื่องมือที่ใช้ทดลอง โดยมีสิ่งควรคำนึงถึง ดังนี้

2.1) ความแม่นยำ (Precision) หมายถึง เครื่องมือนั้นวัดได้ค่าเดิมแม้จะวัดหลายๆครั้ง

2.2) ความถูกต้อง (Accuracy) หมายถึง เครื่องมือนั้นวัดได้ค่าเท่ากับค่ามาตรฐานหรือใกล้เคียงกับค่ามาตรฐาน

2.3) ความไว (Sensitivity) หมายถึง เครื่องมือนั้นสามารถวัดค่าได้ แม้ว่าสิ่งนั้นหรือปริมาณฟิสิกส์ ปริมาณนั้นจะมีค่าน้อยมาก ๆ

3) **ความคลาดเคลื่อนเชิงสถิติ (Statistical Errors)** เรียกอีกอย่างว่า ความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม (Random Errors) เป็นความคลาดเคลื่อนในลักษณะที่ข้อมูลหรือตัวเลขที่วัดได้ มีค่าต่างๆกันกระจายออกไปจากค่าตัวเลขที่เป็นไปได้มากสุดค่าหนึ่ง ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลตัวเลขนั้น

4) **การถ่ายทอดความคลาดเคลื่อน (Propagation of Errors)** เมื่อจะคำนวณข้อมูลหรือตัวเลขหรือปริมาณฟิสิกส์ที่มีความคลาดเคลื่อนอยู่ด้วย จะใช้วิธีการทำนองเดียวกับการคำนวณเลขนัยสำคัญ

5) **เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน (Percentage Error)** ความถูกต้องและความเชื่อถือของการทดลองพิจารณาได้จากเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน ทั้งนี้ต้องมีปริมาณที่เป็นจริงและถูกต้องไว้เปรียบเทียบด้วย

<u>นิยามค่าของความคลาดเคลื่อนประเภทต่าง ๆ ดังนี้</u>

ให้ $u$ เป็นค่าจริง และ $\tilde{u}$ เป็นค่าประมาณของ $u$ ค่าความคลาดเคลื่อน $e=\tilde{u}-u$

**1. ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error)** $|e|=|\tilde{u}-u|$

ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $\varepsilon$ คือความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด นั่นคือ $|\tilde{u}-u|\le\varepsilon$

**2. ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)** คือ เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนที่ได้จากค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เปรียบเทียบกับค่าจริง นั่นคือ $\left|\frac{\tilde{u}-u}{u}\right|\times 100$

### 2.7.1 นอร์ม (Norm)

นอร์ม (Norm) ที่นิยมใช้แบ่งออกเป็น 3 ชนิด สามารถนิยามได้ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

1. $L_1 - norm$ หรือ Taxicab Norm

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

2. $L_2 - norm$ หรือ The Euclidean Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาจุด $x = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} \quad = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4}$$

$$= \sqrt{30}$$

3. $L_\infty - norm$ หรือ Infinity Norm

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

**ทฤษฎีบท** ถ้า $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ และ $a \in \mathbb{R}$ เมื่อ

(a) $\|x\| \geq 0$

(b) $\|ax\| = |a| \; \|x\|$

(c) $\|x\|^2 = x \cdot x$

## 2.8 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ปัจจุบันโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีมากมายหลายโปรแกรม เช่น MATLAB, Mathematica, Mathcad หรือ Maple ซึ่งในแต่ละโปรแกรมก็จะมีลักษณะการใช้ที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับโปรแกรม แต่ทุก ๆ โปรแกรมนั้นเป็นการแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์

MATLAB มีจุดกำเนิดในช่วงปลายทศวรรษ 1970 Cleve Moler เป็นผู้เขียนซอฟต์แวร์ให้ง่ายต่อการเรียกใช้ไลบรารีฟังก์ชันเหล่านี้ เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งในยุคเริ่มต้นนั้น MATLAB เป็นเพียงส่วนติดต่อของภาษา Fortran เพื่อให้ใช้งานได้กับ LINPACK ( ไลบรารีที่ใช้ในการคำนวณพีชคณิต) และ EISPACK (ไลบรารีที่ใช้ในการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) ) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigen Vector) เพื่อให้ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องเรียนรู้การใช้งานภาษา Fortran หลังจากนั้นในปี ค.ศ.1984 Cleve Moler และลูกศิษย์ Jack Little ได้ทำการต่อยอดซอฟต์แวร์ MATLAB ขึ้นมาเพื่อการค้า โดยตั้งชื่อบริษัทว่า MathWorks MATLAB ได้ถูกพัฒนาและถูกเขียนขึ้นใหม่ด้วยภาษา C พร้อมไลบรารี ปัจจุบัน MATLAB สามารถตอบสนองได้ทั้งแวดวงการศึกษาวิศวกรรมและอุตสาหกรรมเกี่ยวกับการพัฒนาทางด้านเทคโนโลยี

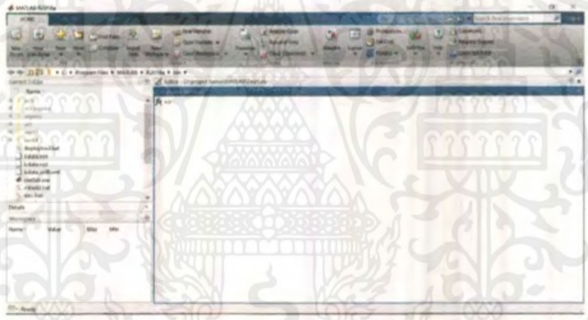
MATLAB เป็นคำย่อมาจาก Matrix Laboratory โดยใช้ตัวอักษรแรก 3 ตัว ของทั้ง 2 คำ คือ Matrix และ Laboratory ซึ่งหมายถึงห้องปฏิบัติการทางเมทริกซ์

MATLAB คือ โปรแกรมสำเร็จรูปชนิดหนึ่งที่นำมาใช้ประโยชน์ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีสิ่งแวดล้อมในการคำนวณของตัวเอง (Numerical Computing Environment) และมีภาษาเฉพาะตัวในการเขียนโปรแกรม

MATLAB จะสามารถใช้งานได้เด่นชัดในการคำนวณหากอยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น การสร้างแบบจำลองและการทดสอบแบบจำลอง การคำนวณทั่วไป การวิเคราะห์ข้อมูลต่างๆ เป็นต้น

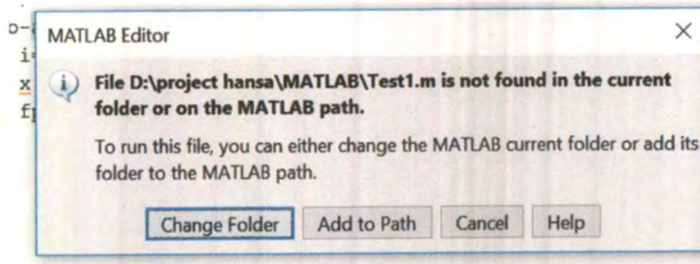
**2.8.1 MATLAB Desktop**

เมื่อผู้ใช้เริ่มเปิดโปรแกรม MATLAB สิ่งแรกที่จะพบคือ MATLAB Desktop ที่ประกอบด้วยหน้าต่างและเครื่องมือที่ช่วยให้ผู้ใช้ได้จัดการเกี่ยวกับ ตัวแปร แฟ้มข้อมูล เป็นต้น โดย MATLAB Desktop มีลักษณะดังรูปต่อไปนี้



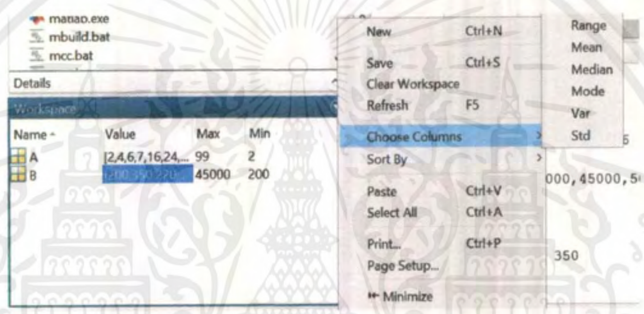
**รูปภาพที่ 2.3** หน้าต่างแสดงรูปของ MATLAB Desktop (Default)

- **Command Window** เป็นส่วนที่ผู้ใช้ป้อนคำสั่งเพื่อให้ MATLAB ทำงานตามคำสั่งและจะแสดงผลลัพธ์ในหน้าต่างนี้
- **Current Folder** คำสั่งที่แสดงว่าผู้ใช้ทราบว่าโปรแกรม MATLAB ทำงานอยู่ที่ใด MATLAB จะไม่มีการค้นหา file นอกพื้นที่ ดังนั้น คำสั่งต่างๆ หรือ M-file จะต้องอยู่ใน Current Folder เมื่อผู้ใช้ run M-file จะพบว่ามีหน้าแสดงว่า Path ของ M-file ไม่ได้อยู่ใน Current folder ผู้ใช้ก็กดเลือก Change Folder หรือ Add to Path เพื่อทำงานเกี่ยวกับ M-file



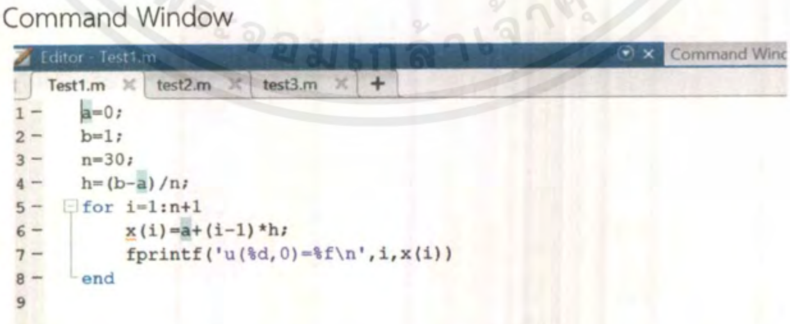

**รูปภาพที่ 2.4** หน้าต่างแสดงรูปของ Path ไม่พบข้อมูลใน Current Folder

- **Workspace** เป็นส่วนที่แสดงตัวแปรต่างๆว่าในขณะนั้นมีตัวแปรอะไรบ้างและมีค่าเป็นอะไร นอกจากนี้ยังแสดงถึงค่าต่ำสุด, สูงสุดและค่าอื่นๆของแต่ละตัวแปรด้วย เช่น




**รูปภาพที่ 2.5** หน้าต่างแสดงรูปของ Workspace และตัวแปร

- **Editor** การเขียนโปรแกรมใน MATLAB หรือที่เรียกว่า M-file (Script File) สามารถเขียน Text ที่ใดก็ได้ เช่น Notepad, Wordpad หรือ Ms-word เป็นต้น เพราะ M-file จะใช้ตัวอักษรในลักษณะ ASCII Code ธรรมดา แต่มีข้อยกเว้น คือ เวลา Save file ข้อมูล ให้ Save เป็นนามสกุล .m หากข้อมูลมีข้อข้อผิดพลาด (Errors) จะมีการแสดงข้อความที่ควรแก้ไขไว้ในหน้าจอของ Command Window




**รูปภาพที่ 2.6** หน้าต่างแสดง Editor

### 2.8.2 คำสั่งเบื้องต้นที่ควรทราบ

**ตารางที่ 2.5** คำสั่งพื้นฐานเบื้องต้น

| คำสั่ง | คำอธิบาย |
|---|---|
| Quit หรือ exit | เลิกการทำงานของ MATLAB |
| Clc | ลบข้อความที่อยู่ใน Command Window แต่ตัวแปรยังอยู่ |
| Clf | ลบรูปภาพที่อยู่ใน Graphic Window |
| clear | ลบตัวแปรทุกตัวออกจากหน่วยความจำ |
| save | เป็นการบันทึกค่าตัวแปรที่มีอยู่ในขณะนั้นลง Disk |

- Variables

1) คำที่ห้ามนำมาตั้งเปนชื่อตัวแปร คือ for, end, if, while, function, return, elseif, case, otherwise, switch, continue, else, try, catch, global, persistent, break
2) ไมควรนำชื่อฟงกชั่น และ ตัวแปรพิเศษของ MATLAB มาตั้งเปนชื่อตัวแปร โดยตัวแปรพิเศษของ MATLAB มีดังนี้ ans, beep, pi, eps, inf, NaN, nan, i, j, nargin, nargout, realmin, realmax, bitmax, varargin, varargout

### 2.8.3 ลำดับและเครื่องหมายที่ใช้คำนวณ

**ตารางที่** 2.6 แสดงลำดับและตัวดำเนินการ

| ลำดับ | ตัวดำเนินการ |
|---|---|
| 1 | ^ (ยกกำลัง) หรือ power(x,y) หมายถึง $x^y$ |
| 2 | * (คูณ) / (หาร) |
| 3 | + (บวก) - (ลบ) |
| 4 | & (และ) \|\| (หรือ) |
| 5 | = (เท่ากับ), > (มากกว่า), < (น้อยกว่า), ~= (ไม่เท่ากับ), <= (น้อยกว่าหรือเท่ากับ), >= (มากกว่าหรือเท่ากับ) |

**หมายเหตุ** กรณีที่ตัวดำเนินการมีลำดับความสำคัญเท่ากัน ให้เรียงจากซ้ายไปขวา

### 2.8.4 การกำหนดค่าและสร้างตัวแปรใน MATLAB

เราสามารถกำหนดค่าตัวแปรได้ หากค่าตัวแปรเป็นตัวเดียว อาจกำหนดเป็นตัวเลขหรือตัวอักษรก็ได้ (การเก็บค่าของตัวแปรมีขนาด 1x1 เสมอ)

**<u>ตัวอย่าง</u>**

| กำหนดเป็นตัวเลข (Scalars) | กำหนดเป็นข้อความ (String) |
|---|---|
| >> C = 8<br>C =<br>8 | >> B = 'test'<br>B =<br>test |

### 2.8.5 การสร้างอาเรย์แบบลำดับเลขคณิต

เราจะใช้เครื่องหมาย : ในการสร้างอาเรย์ สามารถกำหนด Step ของตัวแปรได้ โดยอยู่ในรูปแบบของ initial : step size : end (หากเราไม่กำหนด Step size จะเท่ากับ 1)

**<u>ตัวอย่าง</u>**

| | |
|---|---|
| >> x = 0:5 %Step size =1<br>x =<br>0 1 2 3 4 5 | >> y = 0:0.5:2 %Step size =0.5<br>y =<br>0.5 1 1.5 2 |

### 2.8.6 การใช้คำสั่ง input/output ใน Script file

#### 2.8.6.1 การใช้คำสั่ง input

การใช้คำสั่ง input หรือคำสั่งเพื่อรับข้อมูลเข้าทางหน้าจอคอมพิวเตอร์ (Command window) ซึ่งโดยทั่วไปสามารถป้อนค่าได้เป็น 2 ประเภท คือ กรณีที่เป็นตัวเลขและตัวอักษร

- **กรณีที่เป็นตัวเลข** จะมีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้

```
Variable_name = input('ข้อความ')
```

- **กรณีที่เป็นตัวอักษร** จะมีรูปแบบคำสั่ง ดังนี้

```
Variable_name = input('ข้อความ')
```

#### 2.8.6.2 การใช้คำสั่ง output

โปรแกรม MATLAB สามารถกำหนดได้ว่าจะแสดงผลลัพธ์ใน Command Window หรือไม่แสดงก็ได้โดยมีคำสั่ง ดังนี้

- **แสดงผลลัพธ์ใน Command Window**
    - ตอนท้ายคำสั่งเป็น Space หรือ ,
- **ไม่แสดงผลลัพธ์ใน Command Window**
    - ตอนท้ายคำสั่งเป็น ;

**ตารางที่ 2.7** แสดงรายละเอียดและชนิดตัวอักษรต่างๆที่ไว้ก่อนและหลัง

| สัญลักษณ์ | อธิบายความหมาย |
|---|---|
| % | ใส่หน้าข้อความเพื่ออธิบายความหมาย หรือ จดโน้ต |
| \f | ขึ้นหน้าใหม่ |
| \n | ขึ้นบรรทัดใหม่ |
| %f | เป็นทศนิยม |
| %d | เป็นจำนวนเต็ม |

**2.8.7 การควบคุมทิศทางของโปรแกรม (Flow Control)**

การควบคุมทิศทางของโปรแกรม ทำได้โดย 2 ลักษณะ ได้แก่

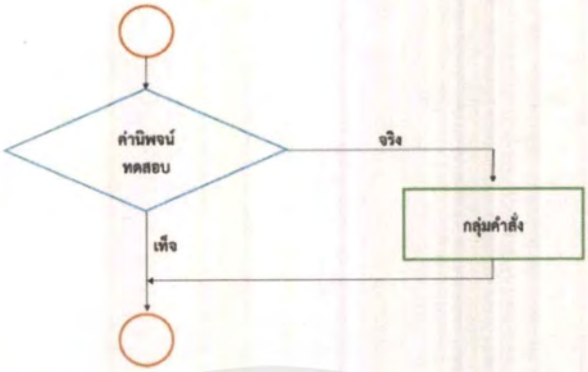
1. การเลือก (Selection) ใช้ควบคุมให้ทำชุดคำสั่งเพียงครั้งเดียว ในกรณีเงื่อนไขเป็นจริงคำสั่งในกลุ่มนี้ประกอบด้วยเงื่อนไข if และ Switch
2. การวนซ้ำ (Repetition) ใช้ควบคุมให้ทำชุดคำสั่งของโปรแกรมซ้ำหลายๆรอบตามเงื่อนไขที่เรากำหนด คำสั่งในกลุ่มนี้ประกอบด้วยวงวน for และ while

**2.8.7.1 คำสั่ง if**

เป็นคำสั่งที่ใช้เลือกทำงานตามเงื่อนไข สามารถแบ่งการทำงานได้ 3 แบบ คือ

1) คำสั่ง if แบบทางเดียว (if)

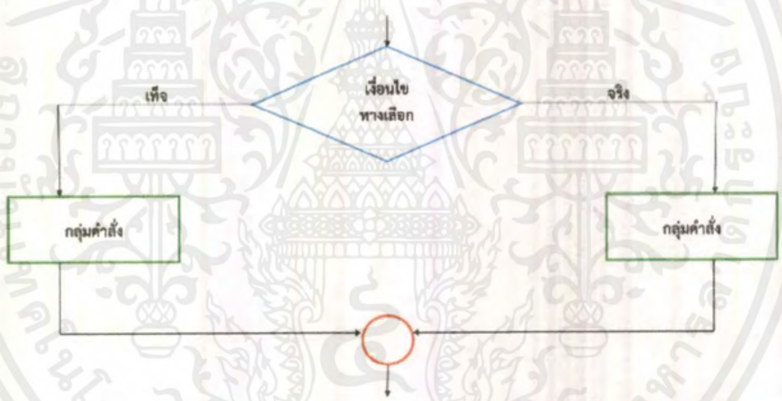
รูปแบบ if จะมีทางเลือกเพียงทางเดียว หากเงื่อนไข if เป็นจริงจะทำคำสั่งที่ตามมาเพียงครั้งเดียว หากเงื่อนไขเป็นเท็จก็จะหลุดออกจากประโยคควบคุม if




**รูปภาพที่ 2.7** ตัวอย่างการเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข If

2) คำสั่ง if แบบสองทาง (if-else)

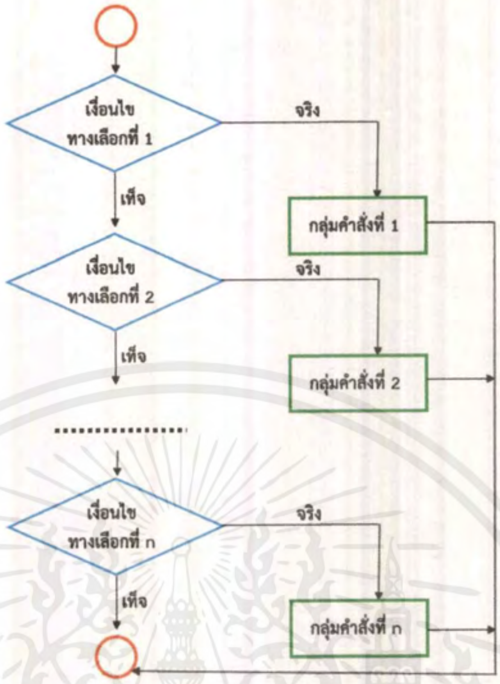
รูปแบบของ if-else จะคล้ายกับ if แบบปกติ แต่จะกำหนดส่วนของคำสั่งที่ต้องทำในกรณีที่เงื่อนไขที่ตรวจสอบเป็นเท็จด้วย




**รูปภาพที่ 2.8** ตัวอย่างการเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else

3) คำสั่ง if แบบหลายทาง (if else if)

รูปแบบของ if else if จะทำในเงื่อนไขที่พบว่า จะใช้ในกรณีที่ทางเลือกมีมากกว่า 2 ทาง เช่น เป็นจริงในเงื่อนไขเดียวที่พบเป็นเงื่อนไขแรก ถ้าเงื่อนไขเป็นเท็จก็จะตรวจสอบเงื่อนไขถัดไป และหากเงื่อนไขถัดไปเป็นเท็จอีก ก็จะตรวจสอบเงื่อนไขต่อไปตามลำดับ ถ้าเป็นเท็จทุกเงื่อนไขจะทำชุดคำสั่งหลัง else




**รูปภาพที่ 2.9** ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else-if

**2.8.7.2 วงวน for**

การวนซ้ำเพื่อทำชุดคำสั่งภายในวงวน for ซ้ำตามเวกเตอร์ดัชนีที่กำหนดขึ้น ซึ่ง MATLAB นั้นมีการเรียกใช้งานวงวน for ที่ค่อนข้างต่างจากภาษาอื่น โดยวงวนจะดำเนินการดัชนีที่เก็บอยู่ในเวกเตอร์หนึ่ง โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้นเงื่อนไขและการปรับค่าที่หลังคำสั่ง for จึงทำให้สะดวกและอิสระมากกว่า

### 2.8.8 กราฟิกและการวาดกราฟ

ใน MATLAB เราสามารถแบ่งงานทางกราฟิกออกได้เป็นหัวข้อสำคัญ ดังนี้ คือ การวาดกราฟจากข้อมูลดิบ การวาดกราฟ 2 มิติ/3 มิติ และ การวาดกราฟในลักษณะพิเศษเฉพาะ ไม่ว่าจะเป็นกราฟแบบใดก็จะมีคำสั่งที่สามารถใช้เป็นทางเลือก (Option) ที่สามารถใช้ร่วมกับทุกๆกราฟ

**ตารางที่ 2.8** คำสั่งการกำหนดรูปแบบของเส้น จุดและสี

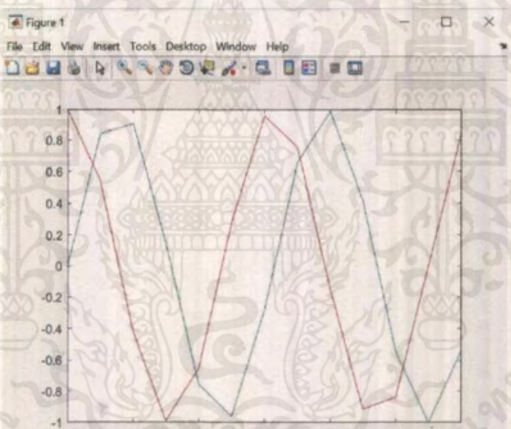
| เส้น(Line) | | จุด(Marker) | | สี(Color) | |
|---|---|---|---|---|---|
| **สัญลักษณ์** | **ความหมาย** | **สัญลักษณ์** | **ความหมาย** | **สัญลักษณ์** | **ความหมาย** |
| - | เส้นทึบ | + | บวก | r | แดง |
| -- | เส้นประ | O | วงกลม | g | เขียว |
| : | จุดประ | * | ดอกจันทร์ | b | น้ำเงิน |
| -. | เส้นประสมจุด | . | จุก | c | ฟ้าอมเขียว |
| | | X | กากบาท | m | ม่วงอมแดง |
| | | S | สี่เหลี่ยม | y | เหลือง |
| | | D | ข้าวหลามตัด | K | ดำ |
| | | ^ | สามเหลี่ยมบน | w | ขาว |
| | | V | สามเหลี่ยมหงาย | | |
| | | > | สามเหลี่ยมขวา | | |
| | | < | สามเหลี่ยมซ้าย | | |
| | | P | ดาวห้าแฉก | | |
| | | N | ดาวหกแฉก | | |

**การกำหนดแกนและแสดงช่องสเกลต่างๆ ของแกน**

- **axis([Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, Zmin, Zmax])**
  คือ การกำหนดขอบเขตของค่าต่ำสุดและสูงสุดของแต่ละแกน Zmin, Zmax จะอยู่ใน 3 มิติ
- **axis** คือ Lock scaling ไม่ให้ค่าบนแกนเปลี่ยนแปลง
- **grid on** คือ ให้แสดงช่องสเกลบนกราฟ
- **grid off** คือ ไม่ต้องแสดงช่องสเกลบนกราฟ
- **hold on** คือ คำสั่งวาดกราฟลงไปในกราฟล่าสุดที่ทำไว้
- **hold off** คือ ยกเลิก hold on

**<u>ตัวอย่างเช่น</u>**

```
x = 0:1:4 * pi;
y1=sin(2x);
y2=cos(x);
plot(x,y1)
hold on
plot(x,y2, 'r')
x=0:.1:4*pi;
hold off
```




**รูปภาพที่ 2.10** ตัวอย่างการวาดกราฟ 2 มิติแบบหลายเส้นบนแกนเดียวกัน

**การวาดกราฟ 2 มิติ**

การวาดกราฟใน MATLAB นั้นสามารถทำได้ 3 คำสั่งนั้นคือ ezplot, fplot และ plot โดยแต่ละคำสั่งมีความแตกต่างในการใช้คำสั่ง ซึ่งสามารถป้อนค่าได้ 2 ประเภท คือค่าพิกัดและสมการ โดยฟังก์ชันแต่ละฟังก์ชันจะมีรูปแบบ ดังนี้แรกที่ควรรู้จักในการวาดกราฟ คือ plot ซึ่งสามารถสร้างกราฟในลักษณะเส้นหรือจุด โดยมีวิธีการใช้งานแบบง่ายๆ

```
>> Plot (X, Y, LineSpec)
```

โดยที่

X คือ อาร์เรย์ของพิกัด x ของคู่อันดับ (x, y) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

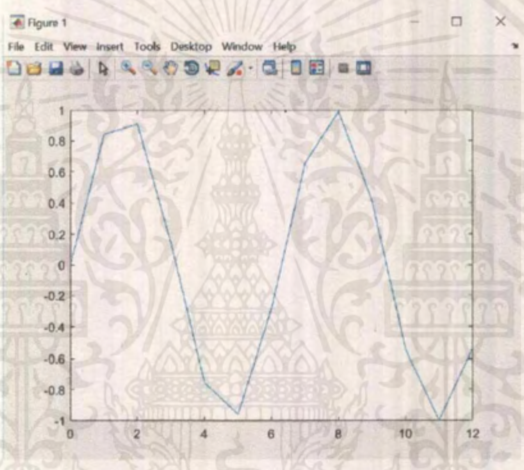
Y คือ อาร์เรย์ของพิกัด y ของคู่อันดับ (x, y) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

LineSpec คือ การกำหนดรูปแบบของเส้นที่ต้องการให้ปรากฏ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ชนิด ได้แก่ รูปแบบเส้น, เครื่องหมาย (Maker) และสีโดยมีรายละเอียดดังนี้

โดย LineSpec จะกำหนดเป็นสตริง 1 สตริง ซึ่งสามารถใส่สัญลักษณ์ลงไปพร้อมกันได้ทั้งเส้น เครื่องหมายและสี

**<u>ตัวอย่างเช่น</u>**

```
x=0:1:4*pi;
y=sin(x)
plot(x,y)
```

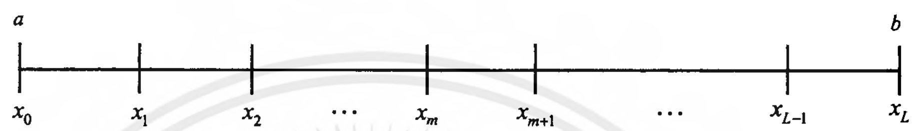



**รูปภาพที่ 2.11** ตัวอย่างการวาดกราฟ 2 มิติ

# บทที่ 3

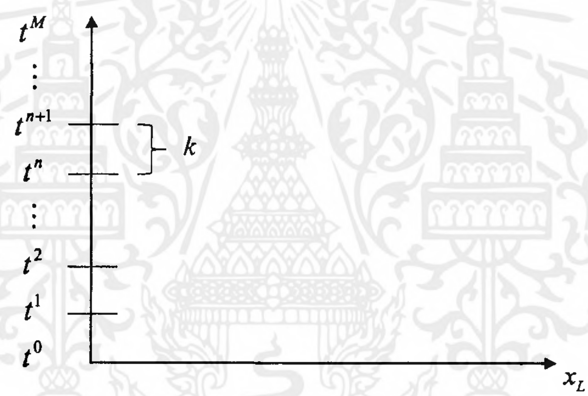
# วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ ในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์ใช้วิธีผลต่างอันตะอันดับสอง และวิธีรุงเง-คุตตากับสมการเบอร์เกอร์ โดยเราจะทำการแบ่งโดเมนออกเป็น $L$ ช่วงย่อย ดังนี้




โดยที่ $h=\dfrac{b-a}{L}$ เมื่อ $L\in N$

แบ่งช่วงของเวลาเป็น $M$ ช่วงย่อย ดังนี้




โดยที่ $k=t^{n+1}-t^n$ เมื่อ $M\in N$ ต่อไปเราจะประยุกต์ใช้วิธีผลต่างอันตะและวิธีรุงเง-คุตตา ในหัวข้อที่ 3.1. และ 3.2 ตามลำดับ

## 3.1 วิธีผลต่างอันตะที่ความถูกต้องอันดับสอง (Second-Order Finite Difference Method)

สำหรับพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสอง ที่ไม่ใช่อนุพันธ์เทียบเวลาในสมการเบอร์เกอร์ เราจะประยุกต์ใช้วิธีการผลต่างอันตะกลางกับพจน์ดังกล่าว ดังนี้

จากสมการเบอร์เกอร์

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; a<x<b \tag{3.1}$$

โดยประยุกต์ใช้วิธีผลต่างกลางกับพจน์ $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ในสมการเบอร์เกอร์ จะได้ว่า

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_m + \mathrm{U}_m(t)\left[\frac{\mathrm{U}_{m+1}(t)-\mathrm{U}_{m-1}(t)}{2h}\right] = \upsilon\left[\frac{\mathrm{U}_{m+1}(t)-2\mathrm{U}_m(t)+\mathrm{U}_{m-1}(t)}{h^2}\right] \tag{3.2}$$

เมื่อ $\mathrm{U}_m(t)=u(x_m,t)$ , $\mathrm{m}=1,2,\ldots,\mathrm{L}-1$ และ $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_m$ คือ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ที่จุด $x=x_m$ ณ เวลา $t$ ใด ๆ

ทำการจัดรูปสมการ (3.2) ทำให้ได้ว่า

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_m = \frac{\upsilon}{h^2}\left[\mathrm{U}_{m+1}(t)-2\mathrm{U}_m(t)+\mathrm{U}_{m-1}(t)\right]-\frac{\mathrm{U}_m(t)}{2h}\left[\mathrm{U}_{m+1}(t)-\mathrm{U}_{m-1}(t)\right] \tag{3.3}$$

## 3.2 วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง (Second-Order Runge–Kutta Method)

สำหรับพจน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาในสมการเบอร์เกอร์เราจะประยุกต์ใช้วิธีรุงเง-คุตตาที่มีความถูกต้องอันดับสองกับพจน์ดังกล่าวโดยกำหนดให้

$$f(t,\mathrm{U}_m(t)) = \frac{\upsilon}{h^2}\left[\mathrm{U}_{m+1}(t)-2\mathrm{U}_m(t)+\mathrm{U}_{m-1}(t)\right]-\frac{\mathrm{U}_m(t)}{2h}\left[\mathrm{U}_{m+1}(t)-\mathrm{U}_{m-1}(t)\right] \tag{3.4}$$

ดังนั้น สมการ (3.3) สมการเขียนใหม่ได้ว่า

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_m = f(t,\mathrm{U}_m(t)) \tag{3.5}$$

กำหนดให้

$$F = kf\left(t^n,\mathrm{U}_m^n\right) \text{ และ}$$

$$G = kf\left(t^{n+1},\mathrm{U}_m^n+F\right)$$

เมื่อ $\mathrm{U}_m^n=\mathrm{U}_m\left(t^n\right)$ , $n=1,2,\ldots,\mathrm{M}$ และ $m=1,2,\ldots,L$ โดยการประยุกต์ใช้วิธีรุงเง-คุตตาที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองกับสมการ (3.5) ทำให้ได้ว่า

$$\mathrm{U}_m^{n+1} = \mathrm{U}_m^n + \frac{F}{2} + \frac{G}{2}$$

จะได้ว่า

$$\mathrm{U}_m^{n+1} = \mathrm{U}_m^n + \frac{k}{2}f\left(t^n,\mathrm{U}_m^n\right) + \frac{k}{2}f\left(t^{n+1},\mathrm{U}_m^n+F\right)$$

ดังนั้น

$$\mathrm{U}_m^{n+1} = \mathrm{U}_m^n + \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[\mathrm{U}_{m+1}^n-2\mathrm{U}_m^n+\mathrm{U}_{m-1}^n\right]-\frac{\mathrm{U}_m^n}{2h}\left[\mathrm{U}_{m+1}^n-\mathrm{U}_{m-1}^n\right]\right\}$$

$$+\frac{k}{2}f\left(t^{n+1},\mathrm{U}_m^{n+1}+k\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[\mathrm{U}_{m+1}^{n+1}-2\mathrm{U}_m^{n+1}+\mathrm{U}_{m-1}^{n+1}\right]-\frac{\mathrm{U}_m^n}{2h}\left[\mathrm{U}_{m+1}^{n+1}-\mathrm{U}_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right)$$

กำหนดให้

$$B = U_m^{n+1} + k\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}$$

จะได้ว่า

$$f\left(t^{n+1}, B\right) = \frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{B}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]$$

นั่นคือ

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n\right]\right\}$$
$$+ \frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{B}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right)$$

หรือ

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n\right]\right\} + \frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\left[U_m^{n+1} + k\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{U_m^{n+1}}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right) \quad (3.6)$$

โดยแทนค่า $U_m^n$ ใน $G$ ที่อยู่ในพจน์ที่ทำให้สมการเบอร์เกอร์เป็นสมการไม่เชิงเส้นด้วย $U_m^n + F$ ทำการจัดรูปสมการ (3.6) ทำให้ได้ว่า

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n\right]\right\} + \frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right]\right.$$
$$\left. - \left[\frac{U_m^{n+1}}{2h} + \frac{k}{2h}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{U_m^{n+1}}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right)$$

หรือ

$$U_m^{n+1} - U_m^n - \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n\right]\right\} - \frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right]\right.$$
$$\left. - \left[\frac{U_m^{n+1}}{2h} + \frac{k}{2h}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{U_m^{n+1}}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right) = 0 \quad (3.7)$$

เมื่อ $m = 1, 2, \ldots, L-1$ สังเกตว่าแต่สมการ (3.7) เป็นสมการไม่เชิงเส้น ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของสมการ (3.7) โดยวิธีนิวตัน-ราฟสันในหัวข้อถัดไป

## 3.3 วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method)

เนื่องจากสมการ (3.7) เป็นสมการไม่เชิงเส้น ในหัวข้อนี้เราจะใช้วิธีการนิวตัน-ราฟสันในการหาผลเฉลยของสมการ (3.7) สังเกตว่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในสมการ (3.7) คือ $U_m^{n+1}$ , $m = 1, 2, \ldots, L-1$ กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
&F_m\left(U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, U_3^{n+1}, \ldots, U_{L-1}^{n+1}\right) \\
&= U_m^{n+1} - U_m^n - \frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n\right] - \frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n - U_{m-1}^n\right]\right\} - \frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right]\right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{U_m^{n+1}}{2h} + \frac{k}{2h}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}\right] - \frac{U_m^{n+1}}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]\left[U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right]\right) \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
F_m\left(U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, U_3^{n+1}, \ldots, U_{L-1}^{n+1}\right) = 0 \qquad (3.9)
$$

โดยการประยุกต์ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ $L-1$ มิติและวิธีนิวตัน-ราฟสันกับสมการ (3.8) และเขียนระบบสมการที่ได้ในรูปของเมทริกซ์ ทำให้ได้ระบบสมการ

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_1^n} & \frac{\partial F_1\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_2^n} & \frac{\partial F_1\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_1\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_{L-1}^n} \\
\frac{\partial F_2\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_1^n} & \frac{\partial F_2\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_2^n} & \frac{\partial F_2\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_2\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_{L-1}^n} \\
\frac{\partial F_3\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_1^n} & \frac{\partial F_3\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_2^n} & \frac{\partial F_3\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_3\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_{L-1}^n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial F_{m-1}\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_1^n} & \frac{\partial F_{m-1}\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_2^n} & \frac{\partial F_{m-1}\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}\left(U^{(P)}\right)}{\partial U_{L-1}^n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Delta U_1^n \\ \Delta U_2^n \\ \Delta U_3^n \\ \vdots \\ \Delta U_{L-1}^n \end{bmatrix}^{(P)}
= -\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{L-1} \end{bmatrix} \qquad (3.10)
$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการ

$$
A\left(U^{(P)}\right)S^{(P)} = -H\left(U^{(P)}\right) \qquad (3.11)
$$

เมื่อ

$$A\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_1^n} & \frac{\partial F_1\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_2^n} & \frac{\partial F_1\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_1\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_{L-1}^n} \\ \frac{\partial F_2\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_1^n} & \frac{\partial F_2\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_2^n} & \frac{\partial F_2\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_2\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_{L-1}^n} \\ \frac{\partial F_3\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_1^n} & \frac{\partial F_3\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_2^n} & \frac{\partial F_3\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_3\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_{L-1}^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_1^n} & \frac{\partial F_{m-1}\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_2^n} & \frac{\partial F_{m-1}\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_3^n} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)}{\partial \mathrm{U}_{L-1}^n} \end{bmatrix}$$

$$S^{(P)}=\begin{bmatrix} \Delta \mathrm{U}_1^n \\ \Delta \mathrm{U}_2^n \\ \Delta \mathrm{U}_3^n \\ \vdots \\ \Delta \mathrm{U}_{L-1}^n \end{bmatrix}^{(P)}, \quad H\left(\mathrm{U}^{(P)}\right)=-\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{L-1} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\mathrm{U}^{(P)}=\left(\mathrm{U}_1^n,\mathrm{U}_2^n,\mathrm{U}_3^n,\ldots,\mathrm{U}_{L-1}^n\right)^{(P)}$ เมื่อ $\left(\mathrm{U}_1^n,\mathrm{U}_2^n,\mathrm{U}_3^n,\ldots,\mathrm{U}_{L-1}^n\right)^{(P)}$ คือ $\left(\mathrm{U}_1^n,\mathrm{U}_2^n,\mathrm{U}_3^n,\ldots,\mathrm{U}_{L-1}^n\right)$ ที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ $P$ ณ เวลา $t=t^n, n=1,2,\ldots,M$ , $P=0,1,2,\ldots$ และ $\left(\Delta \mathrm{U}_m^n\right)^{(P)}=\left(\mathrm{U}_m^n\right)^{(P+1)}-\left(\mathrm{U}_m^n\right)^{(P)}, m=1,2,\ldots,L-1$

จากวิธีการนิวตัน-ราฟสัน เราจะทำการกำหนดค่าเริ่มต้น $\mathrm{U}^{(0)}$ และทำการทำซ้ำจนกว่าผลเฉลยจะลู่เข้าหรือ $\left\|\left[\Delta \mathrm{U}_m^n\right]^{(P)}\right\|_\infty \le tol$ เมื่อ $tol$ มีค่าเป็นบวกที่น้อยมาก เช่น $10^{-3}$ และ $\|\square\|_\infty$ คือ นอร์มอนันต์

($L_\infty - norm$) จึงได้ $\mathrm{U}^{(P+1)}=\mathrm{U}^{(P)}+S^{(P)}$ เป็นผลเฉลยที่ได้ในแต่ละรอบ $P$

**<u>ตัวอย่าง</u>** จากระบบสมการ (3.10) ที่ได้ในหัวข้อที่ 3 นั้น เราจะทำการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ และแสดงผลเฉลยที่ได้ในหัวข้อนี้พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง โดยเซงและแวง (P.G. Zhang และ J.P. Wang) [10] ได้หาผลเฉลยจริงของสมการเบอร์เกอร์ใน 1 มิติได้ดังนี้

กำหนดให้ เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $$u(x,0)=\frac{2\upsilon\pi\sin(\pi x)}{2+\cos(\pi x)} \tag{3.12}$$

เงื่อนไขขอบ คือ $$\left.\begin{matrix} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{matrix}\right\} t>0 \tag{3.13}$$

ผลเฉลยแม่นตรง คือ $$u(x,t)=\frac{2\upsilon\pi e^{-\pi^2\upsilon t}\sin(\pi x)}{2+e^{-\pi^2\upsilon t}\cos(\pi x)} \tag{3.14}$$

โดยที่ $\upsilon=0.01,\ \Delta x=h=0.2,\ \Delta t=k=0.1, M=10$

จากสมการที่ (3.7)

$$U_m^{n+1}-U_m^n-\frac{k}{2}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right]-\frac{U_m^n}{2h}\left[U_{m+1}^n-U_{m-1}^n\right]\right\}-\frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{U_m^{n+1}}{2h}+\frac{k}{2h}\left\{\frac{\upsilon}{h^2}\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]-\frac{U_m^{n+1}}{2h}\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]\right)=0$$

แทนค่า $\upsilon=0.01,\ \Delta x=h=0.2,\ \Delta t=k=0.1, M=10$ ไปในสมการที่ (3.7) จะได้

$$U_m^{n+1}-U_m^n-\frac{0.1}{2}\left\{\frac{0.01}{(0.2)^2}\left[U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right]-\frac{U_m^n}{2(0.2)}\left[U_{m+1}^n-U_{m-1}^n\right]\right\}-\frac{0.1}{2}\left(\frac{0.01}{(0.2)^2}\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]\right.$$
$$\left.-\left[\frac{U_m^{n+1}}{2(0.2)}+\frac{0.1}{2(0.2)}\left\{\frac{0.01}{(0.2)^2}\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]-\frac{U_m^{n+1}}{2(0.2)}\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]\right\}\right]\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]\right)=0$$

หรือ

$$U_m^{n+1}-U_m^n-0.0125\left[U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right]+0.125U_m^n\left[U_{m+1}^n-U_{m-1}^n\right]-0.0125\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]$$
$$+\left[0.125U_m^{n+1}+0.003125\left[U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}\right]-0.03125U_m^{n+1}\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]\right]\left[U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}\right]=0$$

**หาผลเฉลยเราจะประยุกต์ใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน**

- ที่ $n=0,\ m=1$ จะได้ $F_1\left(U_1^1,U_2^1,U_3^1,U_4^1\right)=0$

$$U_1^1-U_1^0-0.0125\left[U_2^0-2U_1^0+U_0^0\right]+0.125U_1^0\left[U_2^0-U_0^0\right]-0.0125\left[U_2^1-2U_1^1+U_0^1\right]$$
$$+\left[0.125U_1^1+0.003125\left[U_2^1-2U_1^1+U_0^1\right]-0.03125U_1^1\left[U_2^1-U_0^1\right]\right]\left[U_2^1-U_0^1\right]=0$$

$$F_1=U_1^1-U_1^0-0.0125\left[U_2^0-2U_1^0\right]+0.125U_1^0\left[U_2^0\right]-0.0125\left[U_2^1-2U_1^1\right]$$
$$+\left[0.125U_1^1+0.003125\left[U_2^1-2U_1^1\right]-0.03125U_1^1\left[U_2^1\right]\right]\left[U_2^1\right]$$

$$F_1=0.000002740$$

หาอนุพันธ์ของ $\frac{\partial F_1}{\partial U_1^1},\frac{\partial F_1}{\partial U_2^1},\frac{\partial F_1}{\partial U_3^1},\frac{\partial F_1}{\partial U_4^1}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial F_1}{\partial U_1^1}=1+0.025+0.11875U_2^1-0.03125U_2^1\left(U_2^1\right)$$
$$=1.028026461\ ,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial U_2^1} = -0.0125 + 0.125U_1^1 + 0.00625U_2^1 - 0.00625U_1^1 - 0.0625U_1^1U_2^1$$
$$= -0.010810246\ ,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial U_3^1} = 0\ ,\ \frac{\partial F_1}{\partial U_4^1} = 0$$

- ที่ $n = 0, m = 2$ จะได้ $F_2\left(U_1^1, U_2^1, U_3^1, U_4^1\right) = 0$

$$U_2^1 - U_2^0 - 0.0125\left[U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0\right] + 0.125U_2^0\left[U_3^0 - U_1^0\right] - 0.0125\left[U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1\right]$$
$$+\left[0.125U_2^1 + 0.003125\left[U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1\right] - 0.03125U_2^1\left[U_3^1 - U_1^1\right]\right]\left[U_3^1 - U_1^1\right] = 0$$
$$F_2 = U_2^1 - U_2^0 - 0.0125\left[U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0\right] + 0.125U_2^0\left[U_3^0 - U_1^0\right] - 0.0125\left[U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1\right]$$
$$+\left[0.125U_2^1 + 0.003125\left[U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1\right] - 0.03125U_2^1\left[U_3^1 - U_1^1\right]\right]\left[U_3^1 - U_1^1\right] = 0$$
$$F_2 = 0.000003490$$

หาอนุพันธ์ของ $\frac{\partial F_2}{\partial U_1^1}, \frac{\partial F_2}{\partial U_2^1}, \frac{\partial F_2}{\partial U_3^1}, \frac{\partial F_2}{\partial U_4^1}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial F_2}{\partial U_1^1} = -0.0125 + 0.0625U_1^1U_2^1 - 0.11875U_1^1\ ,$$
$$= -0.015593553$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial U_2^1} = 1.025 + 0.11875U_3^1 - 0.03125U_3^1U_3^1 + 0.0625U_1^1U_3^1 - 0.11875U_1^1 - 0.03125U_1^1U_1^1\ ,$$
$$= 1.027582506\ ,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial U_3^1} = -0.0125 + 0.11875U_2^1 + 0.00625U_3^1 - 0.0625U_2^1U_3^1 + 0.625U_1^1U_2^1\ ,$$
$$= -0.009269738\ ,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial U_4^1} = 0$$

- ที่ $n = 0, m = 3$ จะได้ $F_3\left(U_1^1, U_2^1, U_3^1, U_4^1\right) = 0$

$$U_3^1 - U_3^0 - 0.0125\left[U_4^0 - 2U_3^0 + U_2^0\right] + 0.125U_3^0\left[U_4^0 - U_2^0\right] - 0.0125\left[U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1\right]$$
$$+\left[0.125U_3^1 + 0.003125\left[U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1\right] - 0.03125U_3^1\left[U_4^1 - U_2^1\right]\right]\left[U_4^1 - U_2^1\right] = 0$$
$$F_3 = U_3^1 - U_3^0 - 0.0125\left[U_4^0 - 2U_3^0 + U_2^0\right] + 0.125U_3^0\left[U_4^0 - U_2^0\right] - 0.0125\left[U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1\right]$$
$$+\left[0.125U_3^1 + 0.003125\left[U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1\right] - 0.03125U_3^1\left[U_4^1 - U_2^1\right]\right]\left[U_4^1 - U_2^1\right] = 0$$
$$F_3 = -0.000022625$$

หาอนุพันธ์ของ $\dfrac{\partial F_3}{\partial U_1^1}, \dfrac{\partial F_3}{\partial U_2^1}, \dfrac{\partial F_3}{\partial U_3^1}, \dfrac{\partial F_3}{\partial U_4^1}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_1^1} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_2^1} = -0.0125 + 0.0625 U_2^1 U_3^1 - 0.11875 U_2^1 - 0.0125 + 0.0625 U_3^1 U_4^1 - 0.11875 U_3^1$$

$$= -0.016797578 \ ,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_3^1} = 1.025 + 0.11875 U_4^1 - 0.03125 U_4^1 U_4^1 + 0.0625 U_2^1 U_4^1 - 0.11875 U_2^1 - 0.03125 U_2^1 U_2^1$$

$$= 1.025574266 \ ,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial U_4^1} = -0.0125 + 0.11875 U_3^1 + 0.00625 U_4^1 - 0.0625 U_3^1 U_4^1 + 0.625 U_2^1 U_3^1$$

$$= -0.008172159$$

- ที่ $n = 0, m = 4$ จะได้ $F_4\left(U_1^1, U_2^1, U_3^1, U_4^1\right) = 0$

$$U_4^1 - U_4^0 - 0.0125\left[U_5^0 - 2U_4^0 + U_3^0\right] + 0.125 U_4^0\left[U_5^0 - U_3^0\right] - 0.0125\left[U_5^1 - 2U_4^1 + U_3^1\right]$$

$$+\left[0.125 U_4^1 + 0.003125\left[U_5^1 - 2U_4^1 + U_3^1\right] - 0.03125 U_4^1\left[U_5^1 - U_3^1\right]\right]\left[U_5^1 - U_3^1\right] = 0$$

$$F_4 = U_4^1 - U_4^0 - 0.0125\left[-2U_4^0 + U_3^0\right] + 0.125 U_4^0\left[-U_3^0\right] - 0.0125\left[-2U_4^1 + U_3^1\right]$$

$$+\left[0.125 U_4^1 + 0.003125\left[-2U_4^1 + U_3^1\right] - 0.03125 U_4^1\left[-U_3^1\right]\right]\left[-U_3^1\right] = 0$$

$$F_4 = -0.000117065$$

หาอนุพันธ์ของ $\dfrac{\partial F_4}{\partial U_1^1}, \dfrac{\partial F_4}{\partial U_2^1}, \dfrac{\partial F_4}{\partial U_3^1}, \dfrac{\partial F_4}{\partial U_4^1}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial F_4}{\partial U_1^1} = 0 \ , \frac{\partial F_4}{\partial U_2^1} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial U_3^1} = -0.0125 + 0.0625 U_3^1 U_4^1 - 0.11875 U_3^1 - 0.0125 - 0.11875 U_4^1$$

$$= -0.016797578 \ ,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial U_4^1} = 1.025 - 0.11875 U_3^1 - 0.03125 U_3^1 U_3^1$$

$$= 1.025574266$$

<u>เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์</u>

$$\begin{pmatrix} 1.028026461 & -0.010810246 & 0 & 0 \\ -0.015593553 & -1.027582506 & -0.009269738 & 0 \\ 0 & -0.016797578 & 1.025574266 & -0.008172159 \\ 0 & 0 & -0.016797578 & 1.025574266 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_1^1 \\ \Delta U_2^1 \\ \Delta U_3^1 \\ \Delta U_4^1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.000002740 \\ 0.000003490 \\ -0.000022625 \\ -0.000117065 \end{pmatrix}$$

จะได้ $$\begin{pmatrix} \Delta U_1^1 \\ \Delta U_2^1 \\ \Delta U_3^1 \\ \Delta U_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000002700 \\ -0.000003231 \\ 0.000022921 \\ 0.000114521 \end{pmatrix}$$

สามารถหาคำตอบสมการโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยหา

$$U_m^{n+1(P+1)} = U_m^{n+1(P)} + \Delta U_m^{n+1(P)}$$

จะได้

$$U_1^{1(1)} = U_1^{1(0)} + \Delta U_1^{1(0)} = 0.013055335 + (-0.000002700) = 0.013052635$$
$$U_2^{1(1)} = U_2^{1(0)} + \Delta U_2^{1(0)} = 0.025659249 + (-0.000003231) = 0.025656018$$
$$U_3^{1(1)} = U_3^{1(0)} + \Delta U_3^{1(0)} = 0.034928657 + (0.000022921) = 0.034951578$$
$$U_4^{1(1)} = U_4^{1(0)} + \Delta U_4^{1(0)} = 0.030501345 + (0.000114521) = 0.030615866$$

จากวิธีการนิวตัน-ราฟสัน เราจะทำการกำหนดค่าเริ่มต้น $U_1^{1(0)}, U_2^{1(0)}, U_3^{1(0)}, U_4^{1(0)}$ ด้วยค่าจริง และทำการเขียนโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ให้วนซ้ำจนกว่าผลเฉลยจะลู่เข้าหรือ $\Delta U_1^{1(1)}, \Delta U_2^{1(1)}, \Delta U_3^{1(1)}$, $\Delta U_4^{1(1)} \le tol$ เมื่อ $tol$ มีค่าเป็นบวกที่น้อยมาก เช่น $10^{-5}$

# บทที่ 4

# ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการหาผลเฉลยโดยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างหัวข้อที่ 3.3 จะได้ผลลัพธ์ดังตารางโดยที่ $t=0.1$ จะแสดงดังตารางที่ 4.1,4.2,4.3,4.4 และ 4.5, ที่ $t=1$ จะแสดงดังตารางที่ 4.6,4.7,4.8,4.9 และ 4.10 โดยแสดง ค่าจริง, $\Delta U$, ผลเฉลยเชิงตัวเลข $(U)$, ค่าความคลาดเคลื่อน ตามลำดับ

**ตารางที่ 4.1.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=5$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.013055335 | -0.000000000000570 | 0.013052636 | 0.000002700 |
| 0.4 | 0.025659249 | 0.000000000042945 | 0.025656018 | 0.000003231 |
| 0.6 | 0.034928657 | 0.000000003831069 | 0.034951581 | 0.000022924 |
| 0.8 | 0.030501345 | 0.000000523182061 | 0.030616389 | 0.000115044 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.2.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=10$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.006535445 | -0.000000000000023 | 0.006535226 | 0.000000218 |
| 0.2 | 0.013055335 | -0.000000000000039 | 0.013054894 | 0.000000441 |
| 0.3 | 0.019493636 | 0.0000000000000002 | 0.019493029 | 0.000000606 |
| 0.4 | 0.025659249 | 0.000000000000016 | 0.025658819 | 0.000000430 |
| 0.5 | 0.031107389 | -0.000000000002513 | 0.031108343 | 0.000000954 |
| 0.6 | 0.034928657 | -0.000000000023975 | 0.034934220 | 0.000005563 |
| 0.7 | 0.035495951 | -0.000000000096255 | 0.035512085 | 0.000016134 |
| 0.8 | 0.030501345 | -0.000000000115884 | 0.030531616 | 0.000030271 |
| 0.9 | 0.018166604 | -0.000000000483003 | 0.018196571 | 0.000029968 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.3.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t = 0.1$ และ $L = 20$

| $x$ | ค่าจริง | ΔU | U | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.05 | 0.003268158 | 0.000000026248063 | 0.003268184 | 0.000000026 |
| 0.10 | 0.006535445 | 0.000000053211991 | 0.006535498 | 0.000000053 |
| 0.15 | 0.009799587 | 0.000000081871044 | 0.009799669 | 0.000000082 |
| 0.20 | 0.013055335 | 0.000000113812328 | 0.013055449 | 0.000000114 |
| 0.25 | 0.016292536 | 0.000000151755816 | 0.016292688 | 0.000000152 |
| 0.30 | 0.019493636 | 0.000000200395879 | 0.019493836 | 0.000000200 |
| 0.35 | 0.022630354 | 0.000000267743768 | 0.022630622 | 0.000000268 |
| 0.40 | 0.025659249 | 0.000000367190126 | 0.025659616 | 0.000000367 |
| 0.45 | 0.028515877 | 0.000000520447847 | 0.028516398 | 0.000000520 |
| 0.50 | 0.031107389 | 0.000000761183415 | 0.031108150 | 0.000000761 |
| 0.55 | 0.033303749 | 0.000001138078447 | 0.033304887 | 0.000001138 |
| 0.60 | 0.034928657 | 0.000001713597831 | 0.034930371 | 0.000001714 |
| 0.65 | 0.035752925 | 0.000002550321868 | 0.035755476 | 0.000002550 |
| 0.70 | 0.035495951 | 0.000003671689040 | 0.035499623 | 0.000003672 |
| 0.75 | 0.033844602 | 0.000004985911394 | 0.033849588 | 0.000004986 |
| 0.80 | 0.030501345 | 0.000006188185497 | 0.030507533 | 0.000006188 |
| 0.85 | 0.025269575 | 0.000006722026593 | 0.025276297 | 0.000006722 |
| 0.90 | 0.018166604 | 0.000005944871204 | 0.018172549 | 0.000005945 |
| 0.95 | 0.009522919 | 0.000003563398852 | 0.009526482 | 0.000003563 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.4.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=50$

| $x$ | **ค่าจริง** | $\Delta U$ | $U$ | **ค่าความคลาดเคลื่อน** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0.02** | 0.001307297 | 0.000000025361407 | 0.001307323 | 0.000000025 |
| **0.04** | 0.002614557 | 0.000000050817102 | 0.002614608 | 0.000000051 |
| **0.06** | 0.003921728 | 0.000000076460716 | 0.003921805 | 0.000000076 |
| **0.08** | 0.005228732 | 0.000000102384512 | 0.005228834 | 0.000000102 |
| **0.10** | 0.006535445 | 0.000000128678543 | 0.006535574 | 0.000000129 |
| **0.12** | 0.007841688 | 0.000000155429613 | 0.007841843 | 0.000000155 |
| **0.14** | 0.009147205 | 0.000000182719980 | 0.009147388 | 0.000000183 |
| **0.16** | 0.010451649 | 0.000000210625687 | 0.010451859 | 0.000000211 |
| **0.18** | 0.011754557 | 0.000000239214442 | 0.011754797 | 0.000000239 |
| **0.20** | 0.013055335 | 0.000000268542920 | 0.013055604 | 0.000000269 |
| **0.22** | 0.014353227 | 0.000000298653356 | 0.014353526 | 0.000000299 |
| **0.24** | 0.015647292 | 0.000000329569265 | 0.015647622 | 0.000000330 |
| **0.26** | 0.016936370 | 0.000000361290114 | 0.016936732 | 0.000000361 |
| **0.28** | 0.018219052 | 0.000000393784742 | 0.018219446 | 0.000000394 |
| **0.30** | 0.019493636 | 0.000000426983297 | 0.019494063 | 0.000000427 |
| **0.32** | 0.020758086 | 0.000000460767461 | 0.020758547 | 0.000000461 |
| **0.34** | 0.022009985 | 0.000000494958705 | 0.022010480 | 0.000000495 |
| **0.36** | 0.023246477 | 0.000000529304361 | 0.023247006 | 0.000000529 |
| **0.38** | 0.024464205 | 0.000000563461319 | 0.024464768 | 0.000000563 |
| **0.40** | 0.025659249 | 0.000000596977267 | 0.025659846 | 0.000000597 |
| **0.42** | 0.026827047 | 0.000000629269556 | 0.026827676 | 0.000000629 |
| **0.44** | 0.027962313 | 0.000000659602041 | 0.027962973 | 0.000000660 |
| **0.46** | 0.029058956 | 0.000000687060633 | 0.029059643 | 0.000000687 |
| **0.48** | 0.030109979 | 0.000000710528888 | 0.030110689 | 0.000000711 |
| **0.50** | 0.031107389 | 0.000000728665756 | 0.031108118 | 0.000000729 |

**ตารางที่ 4.4.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=50$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0.52 | 0.032042096 | 0.000000739888665 | 0.032042836 | 0.000000740 |
| 0.54 | 0.032903818 | 0.000000742366476 | 0.032904560 | 0.000000742 |
| 0.56 | 0.033680995 | 0.000000734028457 | 0.033681729 | 0.000000734 |
| 0.58 | 0.034360713 | 0.000000712597259 | 0.034361425 | 0.000000713 |
| 0.60 | 0.034928657 | 0.000000675655667 | 0.034929333 | 0.000000676 |
| 0.62 | 0.035369099 | 0.000000620758367 | 0.035369720 | 0.000000621 |
| 0.64 | 0.035664934 | 0.000000545600402 | 0.035665479 | 0.000000546 |
| 0.66 | 0.035797784 | 0.000000448252640 | 0.035798232 | 0.000000448 |
| 0.68 | 0.035748198 | 0.000000327470192 | 0.035748525 | 0.000000327 |
| 0.70 | 0.035495951 | 0.000000183071114 | 0.035496134 | 0.000000183 |
| 0.72 | 0.035020487 | 0.000000016368706 | 0.035020503 | 0.000000016 |
| 0.74 | 0.034301504 | -0.000000169379203 | 0.034301335 | 0.000000169 |
| 0.76 | 0.033319714 | -0.000000368565329 | 0.033319346 | 0.000000369 |
| 0.78 | 0.032057769 | -0.000000572960058 | 0.032057196 | 0.000000573 |
| 0.80 | 0.030501345 | -0.000000771679633 | 0.030500573 | 0.000000772 |
| 0.82 | 0.028640351 | -0.000000951511198 | 0.028639399 | 0.000000952 |
| 0.84 | 0.026470201 | -0.000001097691180 | 0.026469104 | 0.000001098 |
| 0.86 | 0.023993062 | -0.000001195178521 | 0.023991867 | 0.000001195 |
| 0.88 | 0.021218959 | -0.000001230370724 | 0.021217728 | 0.000001230 |
| 0.90 | 0.018166604 | -0.000001193088879 | 0.018165411 | 0.000001193 |
| 0.92 | 0.014863820 | -0.000001078534174 | 0.014862741 | 0.000001079 |
| 0.94 | 0.011347423 | -0.000000888833774 | 0.011346534 | 0.000000889 |
| 0.96 | 0.007662498 | -0.000000633792591 | 0.007661864 | 0.000000634 |
| 0.98 | 0.003861035 | -0.000000330581237 | 0.003860704 | 0.000000331 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.5**. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=100$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | U | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.01 | 0.000653651 | 0.000000013736304 | 0.000653665 | 0.000000014 |
| 0.02 | 0.001307297 | 0.000000027485354 | 0.001307325 | 0.000000027 |
| 0.03 | 0.001960934 | 0.000000041259863 | 0.001960976 | 0.000000041 |
| 0.04 | 0.002614557 | 0.000000055072475 | 0.002614612 | 0.000000055 |
| 0.05 | 0.003268158 | 0.000000068935731 | 0.003268227 | 0.000000069 |
| 0.06 | 0.003921728 | 0.000000082862031 | 0.003921811 | 0.000000083 |
| 0.07 | 0.004575257 | 0.000000096863595 | 0.004575354 | 0.000000097 |
| 0.08 | 0.005228732 | 0.000000110952416 | 0.005228842 | 0.000000111 |
| 0.09 | 0.005882134 | 0.000000125140214 | 0.005882259 | 0.000000125 |
| 0.10 | 0.006535445 | 0.000000139438383 | 0.006535584 | 0.000000139 |
| 0.11 | 0.007188639 | 0.000000153857929 | 0.007188793 | 0.000000154 |
| 0.12 | 0.007841688 | 0.000000168409408 | 0.007841856 | 0.000000168 |
| 0.13 | 0.008494557 | 0.000000183102848 | 0.008494740 | 0.000000183 |
| 0.14 | 0.009147205 | 0.000000197947671 | 0.009147403 | 0.000000198 |
| 0.15 | 0.009799587 | 0.000000212952592 | 0.009799800 | 0.000000213 |
| 0.16 | 0.010451649 | 0.000000228125524 | 0.010451877 | 0.000000228 |
| 0.17 | 0.011103329 | 0.000000243473452 | 0.011103572 | 0.000000243 |
| 0.18 | 0.011754557 | 0.000000259002309 | 0.011754816 | 0.000000259 |
| 0.19 | 0.012405256 | 0.000000274716823 | 0.012405531 | 0.000000275 |
| 0.20 | 0.013055335 | 0.000000290620357 | 0.013055626 | 0.000000291 |
| 0.21 | 0.013704696 | 0.000000306714724 | 0.013705003 | 0.000000307 |
| 0.22 | 0.014353227 | 0.000000322999981 | 0.014353550 | 0.000000323 |
| 0.23 | 0.015000805 | 0.000000339474204 | 0.015001144 | 0.000000339 |
| 0.24 | 0.015647292 | 0.000000356133232 | 0.015647648 | 0.000000356 |
| 0.25 | 0.016292536 | 0.000000372970390 | 0.016292909 | 0.000000373 |

**ตารางที่ 4.5**. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=100$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.26** | 0.016936370 | 0.000000389976175 | 0.016936760 | 0.000000390 |
| **0.27** | 0.017578610 | 0.000000407137914 | 0.017579017 | 0.000000407 |
| **0.28** | 0.018219052 | 0.000000424439386 | 0.018219476 | 0.000000424 |
| **0.29** | 0.018857475 | 0.000000441860407 | 0.018857917 | 0.000000442 |
| **0.30** | 0.019493636 | 0.000000459376370 | 0.019494095 | 0.000000459 |
| **0.31** | 0.020127269 | 0.000000476957749 | 0.020127746 | 0.000000477 |
| **0.32** | 0.020758086 | 0.000000494569552 | 0.020758581 | 0.000000495 |
| **0.33** | 0.021385772 | 0.000000512170727 | 0.021386284 | 0.000000512 |
| **0.34** | 0.022009985 | 0.000000529713519 | 0.022010515 | 0.000000530 |
| **0.35** | 0.022630354 | 0.000000547142772 | 0.022630901 | 0.000000547 |
| **0.36** | 0.023246477 | 0.000000564395186 | 0.023247041 | 0.000000564 |
| **0.37** | 0.023857917 | 0.000000581398507 | 0.023858499 | 0.000000581 |
| **0.38** | 0.024464205 | 0.000000598070678 | 0.024464803 | 0.000000598 |
| **0.39** | 0.025064832 | 0.000000614318927 | 0.025065446 | 0.000000614 |
| **0.40** | 0.025659249 | 0.000000630038814 | 0.025659879 | 0.000000645 |
| **0.41** | 0.026246866 | 0.000000645113232 | 0.026247511 | 0.000000659 |
| **0.42** | 0.026827047 | 0.000000659411372 | 0.026827706 | 0.000000673 |
| **0.43** | 0.027399107 | 0.000000672787664 | 0.027399780 | 0.000000685 |
| **0.44** | 0.027962313 | 0.000000685080699 | 0.027962998 | 0.000000645 |
| **0.45** | 0.028515877 | 0.000000696112166 | 0.028516574 | 0.000000696 |
| **0.46** | 0.029058956 | 0.000000705685807 | 0.029059661 | 0.000000706 |
| **0.47** | 0.029590645 | 0.000000713586429 | 0.029591358 | 0.000000714 |
| **0.48** | 0.030109979 | 0.000000719579003 | 0.030110698 | 0.000000720 |
| **0.49** | 0.030615927 | 0.000000723407891 | 0.030616650 | 0.000000723 |
| **0.50** | 0.031107389 | 0.000000724796246 | 0.031108114 | 0.000000725 |

**ตารางที่ 4.5.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=100$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.51** | 0.031583194 | 0.000000723445653 | 0.03158391 | 0.000000723 |
| **0.52** | 0.032042096 | 0.000000719036058 | 0.03204281 | 0.000000719 |
| **0.53** | 0.032482772 | 0.000000711226080 | 0.03248348 | 0.000000711 |
| **0.54** | 0.032903818 | 0.000000699653795 | 0.03290451 | 0.000000700 |
| **0.55** | 0.033303749 | 0.000000683938069 | 0.03330443 | 0.000000684 |
| **0.56** | 0.033680995 | 0.000000663680579 | 0.03368165 | 0.000000664 |
| **0.57** | 0.034033897 | 0.000000638468624 | 0.03403453 | 0.000000638 |
| **0.58** | 0.034360713 | 0.000000607878868 | 0.03436132 | 0.000000608 |
| **0.59** | 0.034659607 | 0.000000571482140 | 0.03466017 | 0.000000571 |
| **0.60** | 0.034928657 | 0.000000528849448 | 0.03492918 | 0.000000529 |
| **0.61** | 0.035165854 | 0.000000479559344 | 0.03516633 | 0.000000480 |
| **0.62** | 0.035369099 | 0.000000423206764 | 0.03536952 | 0.000000423 |
| **0.63** | 0.035536213 | 0.000000359413484 | 0.03553657 | 0.000000359 |
| **0.64** | 0.035664934 | 0.000000287840274 | 0.03566522 | 0.000000288 |
| **0.65** | 0.035752925 | 0.000000208200821 | 0.03575313 | 0.000000208 |
| **0.66** | 0.035797784 | 0.000000120277432 | 0.03579790 | 0.000000120 |
| **0.67** | 0.035797046 | 0.000000023938453 | 0.03579707 | 0.000000024 |
| **0.68** | 0.035748198 | -0.000000080842706 | 0.03574811 | 0.000000081 |
| **0.69** | 0.035648690 | -0.000000193967203 | 0.03564849 | 0.000000194 |
| **0.70** | 0.035495951 | -0.000000315189404 | 0.03549563 | 0.000000315 |
| **0.71** | 0.035287404 | -0.000000444095018 | 0.03528696 | 0.000000444 |
| **0.72** | 0.035020487 | -0.000000580079399 | 0.03501990 | 0.000000580 |
| **0.73** | 0.034692675 | -0.000000722326818 | 0.03469195 | 0.000000722 |
| **0.74** | 0.034301504 | -0.000000869791703 | 0.03430063 | 0.000000870 |
| **0.75** | 0.033844602 | -0.000001021183015 | 0.03384358 | 0.000001021 |

**ตารางที่ 4.5**. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=0.1$ และ $L=100$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.76** | 0.033319714 | -0.000001174953037 | 0.03331853 | 0.000001175 |
| **0.77** | 0.032724741 | -0.000001329292030 | 0.03272341 | 0.000001329 |
| **0.78** | 0.032057769 | -0.000001482130214 | 0.03205628 | 0.000001482 |
| **0.79** | 0.031317111 | -0.000001631148564 | 0.03131548 | 0.000001631 |
| **0.80** | 0.030501345 | -0.000001773799812 | 0.03049957 | 0.000001774 |
| **0.81** | 0.029609350 | -0.000001907340818 | 0.02960744 | 0.000001907 |
| **0.82** | 0.028640351 | -0.000002028877174 | 0.02863832 | 0.000002029 |
| **0.83** | 0.027593957 | -0.000002135420436 | 0.02759182 | 0.000002135 |
| **0.84** | 0.026470201 | -0.000002223957792 | 0.02646797 | 0.000002224 |
| **0.85** | 0.025269575 | -0.000002291533258 | 0.02526728 | 0.000002292 |
| **0.86** | 0.023993062 | -0.000002335338721 | 0.02399072 | 0.000002335 |
| **0.87** | 0.022642173 | -0.000002352812258 | 0.02263982 | 0.000002353 |
| **0.88** | 0.021218959 | -0.000002341740365 | 0.02121661 | 0.000002342 |
| **0.89** | 0.019726039 | -0.000002300359913 | 0.01972373 | 0.000002300 |
| **0.90** | 0.018166604 | -0.000002227455042 | 0.01816437 | 0.000002227 |
| **0.91** | 0.016544420 | -0.000002122443813 | 0.01654229 | 0.000002122 |
| **0.92** | 0.014863820 | -0.000001985449325 | 0.01486183 | 0.000001985 |
| **0.93** | 0.013129686 | -0.000001817350253 | 0.01312786 | 0.000001817 |
| **0.94** | 0.011347423 | -0.000001619806426 | 0.01134580 | 0.000001620 |
| **0.95** | 0.009522919 | -0.00000139525606 | 0.00952152 | 0.000001395 |
| **0.96** | 0.007662498 | -0.000001146882674 | 0.00766135 | 0.000001147 |
| **0.97** | 0.005772864 | -0.000000878551353 | 0.00577198 | 0.000000879 |
| **0.98** | 0.003861035 | -0.000000594715897 | 0.00386044 | 0.000000595 |
| **0.99** | 0.001934272 | -0.000000300300274 | 0.00193397 | 0.000000300 |
| **1** | 0 | .0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.1-4.5 แสดงถึงค่าจริง, $\Delta U$, ผลเฉลยเชิงตัวเลข $(U)$ และค่าความคลาดเคลื่อน โดยได้ทำการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง เมื่อ $L=5,10,20,50$ และ 100 ณ เวลา $t=0.1$ สังเกตได้ว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงและ เมื่อ $L=5,10,20,50$ และ 100 ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยลงเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น

**ตารางที่ 4.6.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=5$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.012243295 | -0.000000000015848 | 0.012221892 | 0.000021403 |
| 0.4 | 0.023746137 | 0.000000000110724 | 0.023739218 | 0.000006919 |
| 0.6 | 0.031476634 | 0.000000002885849 | 0.031710268 | 0.000233635 |
| 0.8 | 0.026409082 | 0.000003261308232 | 0.027253545 | 0.000844463 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.7.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=10$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.006147222 | -0.000000000001565 | 0.00614527 | 0.000001947 |
| 0.2 | 0.012243295 | -0.000000000001249 | 0.01223974 | 0.000003547 |
| 0.3 | 0.018185170 | 0.000000000002293 | 0.01818154 | 0.000003625 |
| 0.4 | 0.023746137 | -0.000000000024910 | 0.02374733 | 0.000001199 |
| 0.5 | 0.028463397 | -0.000000000351021 | 0.02848205 | 0.000018655 |
| 0.6 | 0.031476634 | -0.000000001893817 | 0.03153810 | 0.000061474 |
| 0.7 | 0.031384072 | -0.000000004960827 | 0.03152106 | 0.000136993 |
| 0.8 | 0.026409082 | -0.000000006532278 | 0.02662041 | 0.000211333 |
| 0.9 | 0.015453703 | -0.000000103432739 | 0.01563676 | 0.000183061 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**ตารางที่ 4.8.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=20$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0.05** | 0.003076246 | -0.000000000000064 | 0.003076491 | 0.000000244 |
| **0.10** | 0.006147222 | -0.000000000000142 | 0.006147722 | 0.000000501 |
| **0.15** | 0.009206183 | -0.000000000000259 | 0.009206968 | 0.000000785 |
| **0.20** | 0.012243295 | -0.000000000000459 | 0.012244414 | 0.000001119 |
| **0.25** | 0.015243708 | -0.000000000000842 | 0.015245250 | 0.000001541 |
| **0.30** | 0.018185170 | -0.000000000001621 | 0.018187278 | 0.000002109 |
| **0.35** | 0.021034980 | -0.000000000003258 | 0.021037893 | 0.000002912 |
| **0.40** | 0.023746137 | -0.000000000006730 | 0.023750224 | 0.000004087 |
| **0.45** | 0.026252546 | -0.000000000013984 | 0.026258372 | 0.000005826 |
| **0.50** | 0.028463397 | -0.000000000028517 | 0.028471778 | 0.000008381 |
| **0.55** | 0.030257177 | -0.000000000055538 | 0.030269220 | 0.000012043 |
| **0.60** | 0.031476634 | -0.000000000100086 | 0.031493699 | 0.000017065 |
| **0.65** | 0.031927297 | -0.000000000160448 | 0.031950801 | 0.000023504 |
| **0.70** | 0.031384072 | -0.000000000217243 | 0.031415028 | 0.000030955 |
| **0.75** | 0.029612216 | -0.000000000238910 | 0.029650457 | 0.000038241 |
| **0.80** | 0.026409082 | -0.000000000313138 | 0.026452312 | 0.000043230 |
| **0.85** | 0.021668089 | -0.000000001508915 | 0.021711236 | 0.000043147 |
| **0.90** | 0.015453703 | -0.000000011497392 | 0.015489342 | 0.000035638 |
| **0.95** | 0.008058111 | -0.000000082800863 | 0.008078465 | 0.000020354 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.9. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=50$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.02 | 0.001230778 | 0.000000235773090 | 0.001231014 | 0.000000236 |
| 0.04 | 0.002461238 | 0.000000472121120 | 0.002461710 | 0.000000472 |
| 0.06 | 0.003691048 | 0.000000709605720 | 0.003691757 | 0.000000710 |
| 0.08 | 0.004919845 | 0.000000948761288 | 0.004920793 | 0.000000949 |
| 0.10 | 0.006147222 | 0.000001190079824 | 0.006148412 | 0.000001190 |
| 0.12 | 0.007372711 | 0.000001433993873 | 0.007374145 | 0.000001434 |
| 0.14 | 0.008595765 | 0.000001680856908 | 0.008597446 | 0.000001681 |
| 0.16 | 0.009815743 | 0.000001930920434 | 0.009817674 | 0.000001931 |
| 0.18 | 0.011031885 | 0.000002184307093 | 0.011034069 | 0.000002184 |
| 0.20 | 0.012243295 | 0.000002440978985 | 0.012245736 | 0.000002441 |
| 0.22 | 0.013448915 | 0.000002700700462 | 0.013451616 | 0.000002701 |
| 0.24 | 0.014647501 | 0.000002962994641 | 0.014650464 | 0.000002963 |
| 0.26 | 0.015837591 | 0.000003227092987 | 0.015840818 | 0.000003227 |
| 0.28 | 0.017017477 | 0.000003491877480 | 0.017020969 | 0.000003492 |
| 0.30 | 0.018185170 | 0.000003755815114 | 0.018188925 | 0.000003756 |
| 0.32 | 0.019338357 | 0.000004016884941 | 0.019342374 | 0.000004017 |
| 0.34 | 0.020474365 | 0.000004272498431 | 0.020478637 | 0.000004272 |
| 0.36 | 0.021590111 | 0.000004519414833 | 0.021594630 | 0.000004519 |
| 0.38 | 0.022682053 | 0.000004753654345 | 0.022686807 | 0.000004754 |
| 0.40 | 0.023746137 | 0.000004970413459 | 0.023751107 | 0.000004970 |
| 0.42 | 0.024777737 | 0.000005163988820 | 0.024782901 | 0.000005164 |
| 0.44 | 0.025771599 | 0.000005327718317 | 0.025776926 | 0.000005328 |
| 0.46 | 0.026721770 | 0.000005453950995 | 0.026727224 | 0.000005454 |
| 0.48 | 0.027621545 | 0.000005534060626 | 0.027627079 | 0.000005534 |
| 0.50 | 0.028463397 | 0.000005558521154 | 0.028468955 | 0.000005559 |

**ตารางที่ 4.9.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=50$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.52** | 0.029238922 | 0.000005517065586 | 0.029244439 | 0.000005517 |
| **0.54** | 0.029938792 | 0.000005398952549 | 0.029944191 | 0.000005399 |
| **0.56** | 0.030552712 | 0.000005193366047 | 0.030557905 | 0.000005193 |
| **0.58** | 0.031069408 | 0.000004889972847 | 0.031074298 | 0.000004890 |
| **0.60** | 0.031476634 | 0.000004479657107 | 0.031481113 | 0.000004480 |
| **0.62** | 0.031761216 | 0.000003955441812 | 0.031765172 | 0.000003955 |
| **0.64** | 0.031909147 | 0.000003313589712 | 0.031912461 | 0.000003314 |
| **0.66** | 0.031905732 | 0.000002554851391 | 0.031908287 | 0.000002555 |
| **0.68** | 0.031735814 | 0.000001685794291 | 0.031737499 | 0.000001686 |
| **0.70** | 0.031384072 | 0.000000720104684 | 0.031384792 | 0.000000720 |
| **0.72** | 0.030835425 | -0.000000320292164 | 0.030835105 | 0.000000320 |
| **0.74** | 0.030075524 | -0.000001404493855 | 0.030074120 | 0.000001404 |
| **0.76** | 0.029091356 | -0.000002492499516 | 0.029088863 | 0.000002492 |
| **0.78** | 0.027871936 | -0.000003535950202 | 0.027868400 | 0.000003536 |
| **0.80** | 0.026409082 | -0.000004479946809 | 0.026404602 | 0.000004480 |
| **0.82** | 0.024698232 | -0.000005266078484 | 0.024692966 | 0.000005266 |
| **0.84** | 0.022739260 | -0.000005836650595 | 0.022733423 | 0.000005837 |
| **0.86** | 0.020537229 | -0.000006139900654 | 0.020531089 | 0.000006140 |
| **0.88** | 0.018103012 | -0.000006135755896 | 0.018096876 | 0.000006136 |
| **0.90** | 0.015453703 | -0.000005801459887 | 0.015447902 | 0.000005801 |
| **0.92** | 0.012612737 | -0.000005136235786 | 0.012607600 | 0.000005136 |
| **0.94** | 0.009609666 | -0.000004164122489 | 0.009605502 | 0.000004164 |
| **0.96** | 0.006479565 | -0.000002934265731 | 0.006476631 | 0.000002934 |
| **0.98** | 0.003262057 | -0.000001518257878 | 0.003260538 | 0.000001518 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.10. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=100$

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.01 | 0.000615409 | -0.000000000000081 | 0.000615537 | 0.000000128 |
| 0.02 | 0.001230778 | -0.000000000000162 | 0.001231034 | 0.000000256 |
| 0.03 | 0.001846068 | -0.000000000000243 | 0.001846452 | 0.000000384 |
| 0.04 | 0.002461238 | -0.000000000000325 | 0.002461750 | 0.000000512 |
| 0.05 | 0.003076246 | -0.000000000000407 | 0.003076886 | 0.000000640 |
| 0.06 | 0.003691048 | -0.000000000000491 | 0.003691817 | 0.000000769 |
| 0.07 | 0.004305597 | -0.000000000000575 | 0.004306495 | 0.000000898 |
| 0.08 | 0.004919845 | -0.000000000000660 | 0.004920872 | 0.000001028 |
| 0.09 | 0.005533738 | -0.000000000000746 | 0.005534896 | 0.000001158 |
| 0.10 | 0.006147222 | -0.000000000000833 | 0.006148510 | 0.000001289 |
| 0.11 | 0.006760234 | -0.000000000000921 | 0.006761654 | 0.000001420 |
| 0.12 | 0.007372711 | -0.000000000001011 | 0.007374262 | 0.000001552 |
| 0.13 | 0.007984580 | -0.000000000001101 | 0.007986264 | 0.000001684 |
| 0.14 | 0.008595765 | -0.000000000001193 | 0.008597583 | 0.000001818 |
| 0.15 | 0.009206183 | -0.000000000001286 | 0.009208135 | 0.000001952 |
| 0.16 | 0.009815743 | -0.000000000001379 | 0.009817829 | 0.000002086 |
| 0.17 | 0.010424346 | -0.000000000001473 | 0.010426567 | 0.000002221 |
| 0.18 | 0.011031885 | -0.000000000001567 | 0.011034242 | 0.000002357 |
| 0.19 | 0.011638244 | -0.000000000001662 | 0.011640737 | 0.000002493 |
| 0.20 | 0.012243295 | -0.000000000001755 | 0.012245925 | 0.000002630 |
| 0.21 | 0.012846902 | -0.000000000001848 | 0.012849670 | 0.000002768 |
| 0.22 | 0.013448915 | -0.000000000001938 | 0.013451820 | 0.000002905 |
| 0.23 | 0.014049173 | -0.000000000002027 | 0.014052216 | 0.000003043 |
| 0.24 | 0.014647501 | -0.000000000002111 | 0.014650681 | 0.000003180 |
| 0.25 | 0.015243708 | -0.000000000002192 | 0.015247026 | 0.000003318 |

**ตารางที่ 4.10.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=100$ (ต่อ)

| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| 0.26 | 0.015837591 | -0.000000000002267 | 0.015841046 | 0.000003455 |
| 0.27 | 0.016428927 | -0.000000000002334 | 0.016432518 | 0.000003591 |
| 0.28 | 0.017017477 | -0.000000000002394 | 0.017021204 | 0.000003726 |
| 0.29 | 0.017602984 | -0.000000000002444 | 0.017606845 | 0.000003860 |
| 0.30 | 0.018185170 | -0.000000000002482 | 0.018189162 | 0.000003993 |
| 0.31 | 0.018763734 | -0.000000000002506 | 0.018767857 | 0.000004123 |
| 0.32 | 0.019338357 | -0.000000000002515 | 0.019342607 | 0.000004250 |
| 0.33 | 0.019908691 | -0.000000000002506 | 0.019913065 | 0.000004375 |
| 0.34 | 0.020474365 | -0.000000000002477 | 0.020478860 | 0.000004495 |
| 0.35 | 0.021034980 | -0.000000000002425 | 0.021039592 | 0.000004612 |
| 0.36 | 0.021590111 | -0.000000000002349 | 0.021594833 | 0.000004723 |
| 0.37 | 0.022139298 | -0.000000000002245 | 0.022144126 | 0.000004828 |
| 0.38 | 0.022682053 | -0.000000000002111 | 0.022686979 | 0.000004927 |
| 0.39 | 0.023217852 | -0.000000000001944 | 0.023222869 | 0.000005017 |
| 0.40 | 0.023746137 | -0.000000000001744 | 0.023751236 | 0.000005099 |
| 0.41 | 0.024266311 | -0.000000000001508 | 0.024271482 | 0.000005172 |
| 0.42 | 0.024777737 | -0.000000000001234 | 0.024782970 | 0.000005233 |
| 0.43 | 0.025279740 | -0.000000000000922 | 0.025285022 | 0.000005282 |
| 0.44 | 0.025771599 | -0.000000000000573 | 0.025776916 | 0.000005317 |
| 0.45 | 0.026252546 | -0.000000000000187 | 0.026257884 | 0.000005338 |
| 0.46 | 0.026721770 | 0.000000000000234 | 0.026727111 | 0.000005341 |
| 0.47 | 0.027178408 | 0.000000000000685 | 0.027183734 | 0.000005327 |
| 0.48 | 0.027621545 | 0.000000000001163 | 0.027626837 | 0.000005292 |
| 0.49 | 0.028050215 | 0.000000000001659 | 0.028055452 | 0.000005237 |
| 0.50 | 0.028463397 | 0.000000000002165 | 0.028468554 | 0.000005157 |

**ตารางที่ 4.10.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=100$ (ต่อ)

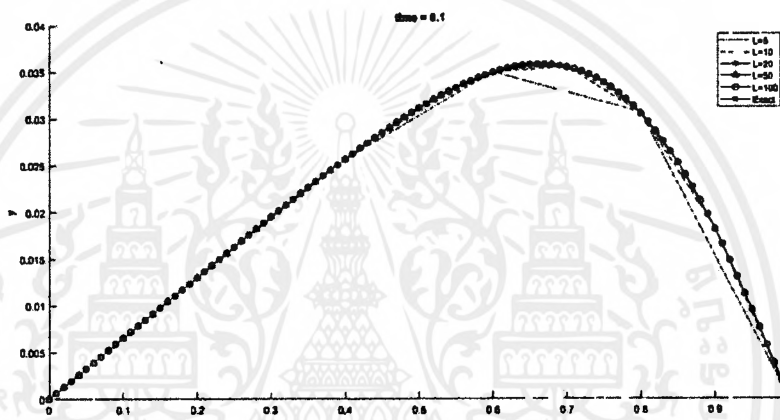
| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.51** | 0.028860011 | 0.000000000002669 | 0.028865064 | 0.000005053 |
| **0.52** | 0.029238922 | 0.000000000003159 | 0.029243843 | 0.000004921 |
| **0.53** | 0.029598934 | 0.000000000003617 | 0.029603695 | 0.000004760 |
| **0.54** | 0.029938792 | 0.000000000004026 | 0.029943361 | 0.000004569 |
| **0.55** | 0.030257177 | 0.000000000004363 | 0.030261522 | 0.000004345 |
| **0.56** | 0.030552712 | 0.000000000004606 | 0.030556798 | 0.000004086 |
| **0.57** | 0.030823956 | 0.000000000004729 | 0.030827747 | 0.000003791 |
| **0.58** | 0.031069408 | 0.000000000004705 | 0.031072867 | 0.000003459 |
| **0.59** | 0.031287507 | 0.000000000004506 | 0.031290594 | 0.000003087 |
| **0.60** | 0.031476634 | 0.000000000004105 | 0.031479309 | 0.000002676 |
| **0.61** | 0.031635113 | 0.000000000003475 | 0.031637336 | 0.000002223 |
| **0.62** | 0.031761216 | 0.000000000002593 | 0.031762945 | 0.000001729 |
| **0.63** | 0.031853168 | 0.000000000001440 | 0.031854361 | 0.000001193 |
| **0.64** | 0.031909147 | 0.000000000000001 | 0.031909763 | 0.000000616 |
| **0.65** | 0.031927297 | -0.000000000001727 | 0.031927296 | 0.000000001 |
| **0.66** | 0.031905732 | -0.000000000003741 | 0.031905075 | 0.000000657 |
| **0.67** | 0.031842544 | -0.000000000006023 | 0.031841193 | 0.000001351 |
| **0.68** | 0.031735814 | -0.000000000008541 | 0.031733736 | 0.000002078 |
| **0.69** | 0.031583624 | -0.000000000011251 | 0.031580789 | 0.000002836 |
| **0.70** | 0.031384072 | -0.000000000014088 | 0.031380453 | 0.000003620 |
| **0.71** | 0.031135282 | -0.000000000016972 | 0.031130858 | 0.000004424 |
| **0.72** | 0.030835425 | -0.000000000019806 | 0.030830181 | 0.000005244 |
| **0.73** | 0.030482734 | -0.000000000022479 | 0.030476663 | 0.000006071 |
| **0.74** | 0.030075524 | -0.000000000024867 | 0.030068626 | 0.000006898 |
| **0.75** | 0.029612216 | -0.000000000026836 | 0.029604500 | 0.000007716 |

**ตารางที่ 4.10.** เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ $t=1$ และ $L=100$ (ต่อ)

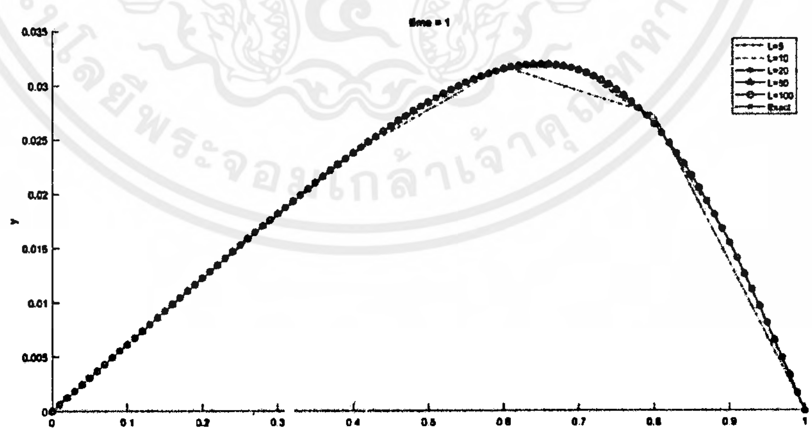
| $x$ | ค่าจริง | $\Delta U$ | $U$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |
|---|---|---|---|---|
| **0.76** | 0.029091356 | -0.000000000028250 | 0.029082840 | 0.000008516 |
| **0.77** | 0.028511639 | -0.000000000028977 | 0.028502352 | 0.000009287 |
| **0.78** | 0.027871936 | -0.000000000028892 | 0.027861917 | 0.000010019 |
| **0.79** | 0.027171318 | -0.000000000027890 | 0.027160619 | 0.000010699 |
| **0.80** | 0.026409082 | -0.000000000025889 | 0.026397766 | 0.000011317 |
| **0.81** | 0.025584778 | -0.000000000022836 | 0.025572918 | 0.000011860 |
| **0.82** | 0.024698232 | -0.000000000018714 | .024685916 | 0.000012316 |
| **0.83** | 0.023749575 | -0.000000000013532 | 0.023736899 | 0.000012676 |
| **0.84** | 0.022739260 | -0.000000000007326 | 0.022726333 | 0.000012927 |
| **0.85** | 0.021668089 | -0.000000000000133 | 0.021655029 | 0.000013060 |
| **0.86** | 0.020537229 | 0.000000000008035 | 0.020524161 | 0.000013068 |
| **0.87** | 0.019348224 | 0.000000000017249 | 0.019335283 | 0.000012941 |
| **0.88** | 0.018103012 | 0.000000000027737 | 0.018090336 | 0.000012677 |
| **0.89** | 0.016803928 | 0.000000000040014 | 0.016791657 | 0.000012270 |
| **0.90** | 0.015453703 | 0.000000000055061 | 0.015441981 | 0.000011722 |
| **0.91** | 0.014055468 | 0.000000000074606 | 0.014044436 | 0.000011033 |
| **0.92** | 0.012612737 | 0.000000000101544 | 0.012602530 | 0.000010207 |
| **0.93** | 0.011129392 | 0.000000000140577 | 0.011120140 | 0.000009251 |
| **0.94** | 0.009609666 | 0.000000000199188 | 0.009601490 | 0.000008175 |
| **0.95** | 0.008058111 | 0.000000000289137 | 0.008051120 | 0.000006991 |
| **0.96** | 0.006479565 | 0.000000000428760 | 0.006473854 | 0.000005712 |
| **0.97** | 0.004879117 | 0.000000000646507 | 0.004874762 | 0.000004355 |
| **0.98** | 0.003262057 | 0.000000000986398 | 0.003259119 | 0.000002937 |
| **0.99** | 0.001633833 | 0.000000001516435 | 0.001632354 | 0.000001479 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.6-4.10 แสดงถึงค่าจริง, $\Delta U$, ผลเฉลยเชิงตัวเลข $(U)$ และค่าความคลาดเคลื่อน โดยได้ทำการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง เมื่อ $L=5,10,20,50$ และ 100 ณ เวลา $t=1$ สังเกตได้ว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงและ เมื่อ $L=5,10,20,50$ และ 100 ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยลงเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น

รูปภาพที่ 4.1 และ 4.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์สำหรับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (3.12) และเงื่อนไขค่าขอบ (3.13) โดยกำหนดให้ $\upsilon = 0.01$, $k = 0.1$ และแบ่งช่วงของโดเมนออกเป็น $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.02$ และ $0.01$, $a=0$ และ $b=1$ ณ เวลา $t=0.1$ และ $t=1$ ตามลำดับ




**รูปภาพที่ 4.1**. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข
เมื่อ $t=0.1$, $L=5$, $L=10$, $L=20$, $L=50$ และ $L=100$




**รูปภาพที่ 4.2**. เปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข
เมื่อ $t=1$, $L=5$, $L=10$, $L=20$, $L=50$ และ $L=100$

จากภาพที่ 4.1 และ 4.2 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ $L$ มีค่าเยอะขึ้น ผลเฉลยเชิงตัวเลขก็จะเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้น

**ตารางที่ 4.11.** แสดงค่าเริ่มต้นในวิธีนิวตันราฟสันเมื่อ $L=5$

| | | จำนวนวนการทำซ้ำ |
|---|---|---|
| ค่าเริ่มต้นแบบที่ 1 | $U_1^{1(0)} = 0.01$ | 2 |
| | $U_2^{1(0)} = 0.02$ | |
| | $U_3^{1(0)} = 0.03$ | |
| | $U_4^{1(0)} = 0.03$ | |
| ค่าเริ่มต้นแบบที่ 2 | $U_1^{1(0)} = 1.01$ | 13 |
| | $U_2^{1(0)} = 2.02$ | |
| | $U_3^{1(0)} = 3.03$ | |
| | $U_4^{1(0)} = 3.03$ | |

จากตารางที่ 4.11 แสดงค่าเริ่มต้นในวิธีนิวตันราฟสัน แบบที่ 1 และ 2 ได้ผลลัพธ์ว่า แบบที่ 1 จำนวนวนการทำซ้ำ เมื่อ $tol \le 10^{-5}$ มีทั้งหมด 2 รอบ และแบบที่ 2 จำนวนวนการทำซ้ำ เมื่อ $tol \le 10^{-5}$ มีทั้งหมด 13 รอบ

**ตารางที่ 4.12.** เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $t=0.1$

| $x$ | $L=5$ | $L=10$ | $L=20$ | $L=50$ | $L=100$ | $L=200$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0.20** | 0.000002700 | 0.000000441 | 0.000000114 | 0.000000269 | 0.000000291 | 0.000000288 |
| **0.40** | 0.000003231 | 0.000000430 | 0.000000367 | 0.000000597 | 0.000000645 | 0.000000631 |
| **0.60** | 0.000022924 | 0.000005563 | 0.000001714 | 0.000000676 | 0.000000529 | 0.000000517 |
| **0.80** | 0.000115044 | 0.000030271 | 0.000006188 | 0.000000772 | 0.000001774 | 0.000002025 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.12 แสดงถึงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง สำหรับแต่ละจุด $x_i, i=1,2,\ldots,5$ โดยค่าคลาดเคลื่อนคำนวณจาก $\left|\tilde{u}(x_i)-u(x_i)\right|$, $i=1,2,\ldots,5$ เมื่อ $\tilde{u}$ คือผลเฉลยเชิงตัวเลข และ $u$ คือผลเฉลยจริง ณ เวลา $t=0.1$ สังเกตได้ว่า ที่ $x=0.60$ ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่า

น้อยลงเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น ที่ $x = 0.80$ เมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงจนถึง $L=50$ และค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ $L=100$ และ $L=200$

**ตารางที่ 4.13.** เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน เมื่อ $t=1$

| $x$ | $L=5$ | $L=10$ | $L=20$ | $L=50$ | $L=100$ | $L=200$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0.20** | 0.000021403 | 0.000003547 | 0.000001119 | 0. 000002441 | 0.000002630 | 0.000002678 |
| **0.40** | 0.000006919 | 0.000001199 | 0.000004087 | 0.000004970 | 0.000005099 | 0.000005132 |
| **0.60** | 0.000233635 | 0.000061474 | 0.000017065 | 0. 000043230 | 0.000002676 | 0.000002224 |
| **0.80** | 0.000844463 | 0.000211333 | 0.000043230 | 0. 000004480 | 0.000011317 | 0.000013026 |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ตารางที่ 4.13 แสดงถึงค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยเชิงตัวเลขกับผลเฉลยจริง สำหรับแต่ละจุด $x_i, i=1,2,...,5$ โดยค่าคลาดเคลื่อนคำนวณจาก $\left|\tilde{u}(x_i)-u(x_i)\right|, i=1,2,...,5$ เมื่อ $\tilde{u}$ คือผลเฉลยเชิงตัวเลข และ $u$ คือผลเฉลยจริง ณ เวลา $t=1$ สังเกตได้ว่า ที่ $x=0.60$ ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยลงเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น ที่ $x=0.80$ เมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงจนถึง $L=50$ และค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ $L=100$ และ $L=200$

**ตารางที่ 4.14.** ผลลัพธ์จาก Euclidian norm ที่ $t=0.1$ และ $t=1$

| $L$ | $L_2 - norm$ | |
|---|---|---|
| | $t=0.1$ | $t=1$ |
| **5** | 0.000117384 | 0.000876475 |
| **10** | 0.000045906 | 0.000317959 |
| **20** | 0.000013481 | 0.000094671 |
| **50** | 0.000004282 | 0.000027514 |
| **100** | 0.000009861 | 0.000060237 |
| **200** | 0.000015477 | 0.000094689 |

ตารางที่ 4.14 แสดงถึงค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการคำนวณค่ายูคลิเดียนนอร์ม (Euclidian norm) หรือ $L_2 - norm$ ของค่าความคลาดเคลื่อน $t=0.1$ และ $t=1$ ตามลำดับ สังเกตได้ว่า เมื่อ $L=50$ ค่าความคลาดเคลื่อนเคลื่อนที่ได้จากการคำนวณค่ายูคลิเดียนนอร์มมีค่าดีที่สุด

# บทที่ 5

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

## 5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง (Second-Order Runge-Kutta Method) วิธีผลต่างอันตะอันดับสอง (Second-Order Finite Difference Method) และวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ในการประมาณค่าผลเฉลย และนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง เพื่อวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนและตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำ ซึ่งผลจากการคำนวณดังกล่าวเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง จะเห็นได้ว่าเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น ผลเฉลยเชิงตัวเลขจะลู่เข้าหาผลเฉลยจริง และค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จะมีค่าน้อยลง ดังแสดงในตารางที่ 4.1,4.2,4.3,4.4,4.5,4.6,4.7,4.8,4.9 และ 4.10 ตารางที่ 4.11 แสดงค่าเริ่มต้นในวิธีนิวตันราฟสันเมื่อ $L=5$ ตารางที่ 4.12 และตารางที่ 4.13 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนรายจุด โดยที่ $x=0.60$ ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยลงเมื่อ $L$ มีค่ามากขึ้น และตารางที่ 4.14 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ยูคลิเดียนนอร์ม (Euclidian norm) ณ เวลา $t=0.1$ และ $t=1$ ตามลำดับ

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาปัญหาพิเศษครั้งนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้เห็นปัญหาหลายประการจึงได้มีข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจศึกษาและนำปัญหาพิเศษไปพัฒนาต่อไป

5.2.1 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์โดยใช้วิธีรุงเง-คุตตา ที่มีอันดับมากกว่าสอง ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้อาจจะมีความแม่นยำยิ่งขึ้น

5.2.2 ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไม่เหมาะแก่การคิดมือเพราะมีความยุ่งยากซับซ้อนควรใช้โปรแกรมในการคำนวณ

5.2.3 หากทำการแบ่งระยะห่างยิ่งมีช่วงแคบเท่าใด ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความแม่นยำยิ่งขึ้น

5.2.4 ควรที่จะศึกษาและทำความเข้าใจกระบวนการคำนวณในการเขียนโปรแกรม เพื่อที่ให้เหมาะแก่การเปลี่ยนเงื่อนไขและค่าต่างๆ

# เอกสารอ้างอิง

[1] กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics). (ม.ป.ป.)
จาก : http://irre.ku.ac.th/v5/pdf/books/thandon/FluidMechanics.pdf

[2] กลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics). (ม.ป.ป.)
จาก : https://studylib.net/doc/5724476/กลศาสตร์ของไหล

[3] สุปรียา ไพรัตน์, นุชนันทร์ เอื้อวงศาโรจน์, ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักร. การปรับปรุงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์. [ออนไลน์]. 2560 [เข้าถึงเมื่อ 29 ก.ย. 2561]. เข้าถึงได้จาก:http://amm2017.math.science.cmu.ac.th/proceedings/NUM-09.pdf

[4] ดร.มนตรี โพธิโสโนทัย. Introduction to MATLAB for Statistical Analysis. วิทยาลัยนานาชาติ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
จาก : http://www.ic.kmitl.ac.th/montri.ph/files/matlab-book-2nd-ed.pdf

[5] S.Kutluay, Bahadir A.R, Özdeş A. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. Journal of Computational and Applied Mathematics. 1999; 103(21): 251-261.

[6] A.Dogan, A Galierkin finite element approach to Burger's equation. Applied Mathmatics and Computation. 2004; 157(2): 331-346.

[7] C.Lu, O.Gao, C.Fu, H.Yang. Finite element method of BBM-Burgers equation with disspachive term based on adaptire moving mesh. Discrete Dynamics in Nature and Society. Hindawi; 2017.

[8] T.ö7is, A.ö7des. A finite element approach for solution of Burger's equation. Applied Mathmatrics and Computation. 2003;139(2-3): 417-428.

[9] B.Inan, A.R.Bahadir, An explicit exponential finite difference method for the Burgers'equation. European International Journal of Science and Technology, 2013;10: 61-69.

[10] Pei-Guang Zhang, Jian-Ping Wang. A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation. Applied Mathematics and Compuration. 2012;219: 892-898.

[11] M. A. Awal SHEIKH1, Laek Sazzad ANDALLAH2, M. Arefin KOWSER3.

[12] J.Douglas Faires, Richard Burden. Numerical Methods. Youngstown State University.

# เอกสารคำรับรองเล่มปัญหาพิเศษ

# Plagiarism Checking Report

*Created on May 21, 2019 at 12:24 PM*

*Submission Information*

| ID | SUBMISSION DATE | SUBMITTED BY | ORGANIZATION | FILENAME | STATUS | SIMILARITY INDEX |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1236143 | May 21, 2019 at 12:24 PM | 58050187@kmitl.ac.th | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง | กลุ่มที่ 26 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยาอันดับสอง.pdf | [illegible] | [illegible] |

*Match Overview*

| NO. | TITLE | AUTHOR(S) | SOURCE | SIMILARITY INDEX |
|---|---|---|---|---|
| 1 | การเพิ่มประสิทธิภาพในการเรียนวิชากลศาสตร์ของไหลโดยใช้นักเรียนพี่เลี้ยง,Efficiency Improvement in Studying Fluid Mechanics Using Student Mentors | ปรีชา ขันติโกมล | มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน | 0.31 % |
| 2 | แคลคูลัสกับพหุนาม | จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี | Wikipedia | 0.01 % |

งานทะเบียนคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
คำรับรองเล่มปัญหาพิเศษ

วันที่ 24 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2562

ข้าพเจ้า นางสาวกิติยา อาลีมีน รหัสประจำตัว 58050017
นางสาวธมลวรรณ กลิ่นทับ รหัสประจำตัว 58050075
นางสาวอภิชญา ไชยสิทธิ์ รหัสประจำตัว 58050187

นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชา คณิตศาสตร์
ขอรับรองว่าปัญหาพิเศษ เรื่อง
ชื่อภาษาไทย การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองของสมการเบอร์เกอร์
ชื่อภาษาอังกฤษ A Second-Order Accurate Numerical Approach for Burger's Equation
ปีการศึกษา 2561
เป็นผลงานวิจัยที่มิได้คัดลอกหรือละเมิดลิขสิทธิ์ของผู้อื่นและได้ผ่านการตรวจสอบความซ้ำซ้อนเรียบร้อยแล้ว และได้แนบเอกสารการตรวจสอบการลอกเลียนงานวรรณกรรมที่ตรวจสอบจากเล่มปัญหาพิเศษฉบับสมบูรณ์แล้ว
โปรแกรมอักขราวิสุทธิ์ 0.31 %

ลงชื่อ กิติยา อาลีมีน (นางสาวกิติยา อาลีมีน) นักศึกษา

ลงชื่อ ธมลวรรณ กลิ่นทับ (นางสาวธมลวรรณ กลิ่นทับ) นักศึกษา

ลงชื่อ อภิชญา ไชยสิทธิ์ (นางสาวอภิชญา ไชยสิทธิ์) นักศึกษา

ข้าพเจ้า ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี (อาจารย์ที่ปรึกษา) และ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ (อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม) ปัญหาพิเศษ ได้ตรวจสอบ ปัญหาพิเศษของนักศึกษาข้างต้นแล้ว ขอรับรองว่าเป็นผลงานวิจัยของนักศึกษาจริงและมีเนื้อหาสมบูรณ์ จึงลงชื่อไว้เป็นหลักฐาน

ลงชื่อ.............................................
(ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี)
อาจารย์ที่ปรึกษา

ลงชื่อ.............................................
(ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ)
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม