

ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับ
เมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย

KRONECKER CONVOLUTION PRODUCT FOR
DISCRETE-TIME SIGNAL MATRICES



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

KRONECKER CONVOLUTION PRODUCT
FOR DISCRETE-TIME SIGNAL MATRICES



A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย
Kronecker Convolution Product for Discrete-Time Signal Matrices

ชื่อนักศึกษา นางสาวนากานต์ ช่างวงศ์ รหัสนักศึกษา 58050036
นายณรงค์ ตริยสูตร รหัสนักศึกษา 58050051
นายทัตธนา พงษ์แขก รหัสนักศึกษา 58050065

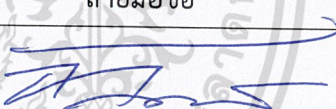
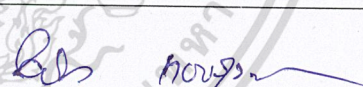
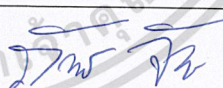
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทรารุจ จันท์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์
ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงค์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทรารุจ จันท์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย
ชื่อนักศึกษา	นางสาวชนากานต์ ช่างวงศ์ รหัสนักศึกษา 58050036
	นายณรงค์ ตริยสูตร รหัสนักศึกษา 58050051
	นายทัตธนา พงษ์แขก รหัสนักศึกษา 58050065
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทรารุช จันทรเสียม

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยแนะนำผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย และพิจารณาตรวจสอบสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์มีสมบัติ การเปลี่ยนกลุ่ม การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการบวกและความเข้ากันได้กับการคูณด้วยสเกลาร์ ผลคูณคอนโวลูชันกับฟังก์ชันค่าจริง การสลับเปลี่ยน และการยกกำลัง ยิ่งไปกว่านั้นผู้วิจัยได้ศึกษาการหา ผกผันของเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยในรูปของตัวกำหนด จะได้ว่าผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่หาผกผันได้จะหาผกผันได้เช่นกัน โดยมีตัวผกผันอยู่ในรูปแบบที่ ชัดแจ้ง

คำสำคัญ : เมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย, ผลคูณคอนโวลูชัน, ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Kronecker Convolution Product for Discrete-Time Signal Matrices		
Students	Miss Chanakan	Changwong	Student ID 58050036
	Mr. Narong	Triyasute	Student ID 58050051
	Mr. Tattana	Pongkaek	Student ID 58050065
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)		
Department	Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2018		
Advisor	Asst.Prof.Dr.Patrawut Chansangiam		

Abstract

In this paper, we introduce the Kronecker convolution product for discrete-time signal matrices and investigate its algebraic properties. It turns out that the Kronecker convolution product is associative, left/right distributive over the addition and compatible with the scalar multiplication, the Convolution product with real-valued functions, the transposition and the powers. Moreover, we study the invertibility of a discrete-time signal matrix in terms of its determinant. It follows that the Kronecker convolution product of invertible discrete-time signal matrices is also invertible with its inverse given in an explicit form.

Keywords : Discrete-time signal matrices, Convolution product, Kronecker convolution product

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษ ผลคุณคอนโวลูชันโคเรเนคเตอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ภัทรารุช จันทรเสงี่ยม เป็นอย่างสูง ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในการทำปัญหาพิเศษคอยให้คำแนะนำและคำปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆและยังเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ฉัฐไชย์ สีนาวงค์ และ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ คณะกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ที่ให้คำแนะนำในการแก้ไขข้อบกพร่องเพื่อให้ปัญหานี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ตลอดจนข้อคิดต่างๆอันก่อให้เกิดประโยชน์ต่อการศึกษาค้นคว้า และเป็นแนวทางในการจัดทำปัญหาพิเศษจนประสบความสำเร็จ

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ในการศึกษาตลอดมา จนทำให้การศึกษาปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆและพี่ๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ

คุณค่าและประโยชน์ใดๆที่เป็นผลจากปัญหาพิเศษฉบับนี้ คณะผู้จัดทำขอมอบแต่ บิดา มารดาและครู อาจารย์ทุกท่านด้วยความเคารพยิ่ง

ชนากานต์ ช้างวงศ์

ณรงค์ ตริยสุตร

ทัตธนา พงษ์แขก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญรูป	ฉ
สารบัญตาราง	ช
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ	2
1.3 ขอบเขตของปัญหา	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ	3
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสัญญาณเวลาเต็มหน่วย	
2.1 แนะนำสัญญาณเวลาเต็มหน่วย	5
2.2 การดำเนินการทางพีชคณิตสำหรับสัญญาณเวลาเต็มหน่วย	11
2.3 ระบบยีนยงเวลาเชิงเส้น	15
2.4 ผลตอบสนองของระบบยีนยงเวลาเชิงเส้นต่อสัญญาณรับเข้าใดๆ	19
2.5 สมบัติของคอนโวลูชัน	24

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน	
3.1 พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์	28
3.2 ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน	37
บทที่ 4 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย	
4.1 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์.....	44
4.2 สมบัติผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์.....	46
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	
5.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย	59
5.2 ข้อเสนอแนะ	60
เอกสารอ้างอิง	61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 กราฟแสดงสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete-Time Signals)	5
2.2 กราฟแสดงสัญญาณสุ่มหนึ่งหน่วย (the unit sample signal)	6
2.3 กราฟแสดงสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (the unit step signal)	7
2.4 กราฟแสดงสัญญาณทางลาดหนึ่งหน่วย (the unit ramp signal)	7
2.5 กราฟแสดงสัญญาณเลขชี้กำลัง (exponential signals)	8
2.6 กราฟแสดงการบวก	11
2.7 กราฟแสดงการคูณสัญญาณด้วยค่าคงที่	11
2.8 กราฟแสดงการคูณสัญญาณ	11
2.9 กราฟแสดงการหวนวงสัญญาณ	12
2.10 กราฟแสดงการล่องหน้าสัญญาณ	12
2.11 กราฟแสดงการหวนพันธ์ของสัญญาณ	12
2.12 กราฟแสดงการคูณสัญญาณด้วยเวลา	13
2.13 กราฟแสดงการพลิกกลับสัญญาณ	13
2.14 กราฟแสดงการเปลี่ยนเฟสสัญญาณ	13
2.15 แผนภาพแบบบล็อกของระบบ	14
2.16 การคำนวณของคอนโวลูชัน	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน	4



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในทางคณิตศาสตร์ เมทริกซ์เป็นสิ่งที่มีความสำคัญอย่างมาก โดยเฉพาะการดำเนินการการคูณเมทริกซ์ ที่เป็นสิ่งที่เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลายด้าน เช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการ เป็นต้น นอกจากการคูณเมทริกซ์แบบปรกติที่เรารู้จักกันดีแล้ว ยังมีการคูณเมทริกซ์ในรูปแบบอื่นๆอีกมากมาย เช่น การคูณแบบโครเนเคอร์ การคูณแบบฮาตอมาร์ต เป็นต้น ซึ่งแต่ละแบบก็มีการนำมาประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา เช่น ทฤษฎีระบบ ฟิสิกส์ เศรษฐศาสตร์ รวมไปถึงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์

นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ยังให้ความสนใจกับผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์คอนโวลูชัน เป็นสิ่งที่มีประโยชน์อย่างมากในวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ และได้นำมาประยุกต์ใช้กับเมทริกซ์ ซึ่งทำให้เกิดสมการเมทริกซ์ อสมการเมทริกซ์ และสมการเชิงอนุพันธ์ของเมทริกซ์ เป็นต้น ในปัจจุบันมีผู้ที่ศึกษาผลคูณคอนโวลูชัน ผลคูณฮาตอมาร์ตคอนโวลูชัน และผลคูณโครเนเคอร์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์เป็นจำนวนมาก และมีการประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่นอีกมากมาย

ในทฤษฎีเมทริกซ์ ผลคูณโครเนเคอร์เป็นผลคูณเมทริกซ์ในรูปแบบหนึ่งซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ \otimes ได้มาจากนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ Leopold Kronecker โดยสำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง $A = [a_{ij}]$ และ B เรานิยาม

$$A \otimes B = [a_{ij}B]$$

นั่นคือ $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i, j) เป็น $a_{ij}B$ ผลคูณโครเนเคอร์มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์เมทริกซ์แคลคูลัสของเมทริกซ์ สมการเมทริกซ์เชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์เมทริกซ์เชิงเส้น เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการประมวลผลสัญญาณ (signal processing) เราใช้การดำเนินการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ในการประมวลผลสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (discrete-time signals) เช่น การบวก การคูณด้วยค่าคงตัว การหวนเวลา การหาอนุพันธ์ การเปลี่ยนเฟส และคอนโวลูชัน ซึ่งสัญญาณเวลาเต็มหน่วยเป็นสัญญาณที่มีข้อมูลเป็นช่วงที่ไม่ต่อเนื่องกัน ได้มาจากการสุ่มสัญญาณอนาล็อกแล้วเปลี่ยนเป็นสัญญาณดิจิทัล โดยปัจจุบันมีผู้ให้ความสนใจกับสัญญาณเวลาเต็มหน่วยมากขึ้นเพราะมีประโยชน์อย่างมากในทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เราใช้การดำเนินการคอนโวลูชันในการหาผลตอบสนองของระบบยืนยงเวลาเชิงเส้นที่มีต่อสัญญาณรับเข้าใดๆ โดยคอนโวลูชันของสัญญาณเวลาเต็มหน่วย $x(n)$ และ $y(n)$ กำหนดโดย

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะนิยามผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยเป็นการขยายแนวความคิดผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์แบบปรกติ

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

1. เพื่อให้บทนิยามของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย
2. เพื่อศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์

1.3 ขอบเขตของปัญหา

เราสนใจสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ที่พิจารณา ได้แก่ สมบัติการสลับ เปลี่ยน สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการแจกแจง การมีเอกลักษณ์ และ สมบัติการคูณด้วยสเกลาร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สำหรับผู้จัดทำ

1. ได้เพิ่มพูนความรู้และความเข้าใจในเรื่องผลคูณโคเรเนคเคอร์ และสัญญาณเวลาเต็มหน่วย
2. ได้เพิ่มพูนทักษะกระบวนการคิดและวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์
3. ได้ทบทวนและเสริมสร้างความรู้พื้นฐานในการศึกษาต่อในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ หรือ สาขาอื่นที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผู้ใช้งาน

1. เป็นแนวทางในการศึกษา และพัฒนาต่อยอดการประยุกต์ใช้ผลคูณคอนโวลูชันโคเรเนคเคอร์ ในทางคณิตศาสตร์ หรือในสาขาต่างๆที่เกี่ยวข้อง
2. ได้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการประมวลผลสัญญาณเวลาเต็มหน่วยเพื่อหาผลตอบสนองต่อระบบเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานการประมวลผลสัญญาณเวลาเต็มหน่วย
2. ศึกษาสมบัติของผลคูณโคเรเนคเคอร์ของเมทริกซ์
3. ศึกษาการดำเนินงานพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย
4. ให้บทนิยามของผลคูณคอนโวลูชันโคเรเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย
5. ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโคเรเนคเคอร์
6. นำเสนอปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี พ.ศ.2561					ปี พ.ศ.2562				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสัญญาณเวลาดำเนินงาน										
2.ศึกษาสมบัติของผลคูณโคเรเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์ปรกติ										
3.ศึกษาฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และสมบัติของผลคูณเมทริกซ์คอนไวลูชัน										
4.ศึกษา และคิดค้นนิยามทฤษฎีบท และสมบัติต่างๆของผลคูณโคเรเนคเคอร์ และผลคูณคอนไวลูชันโคเรเนคเคอร์										
5.ศึกษา และนำผลคูณคอนไวลูชันโคเรเนคเคอร์ประยุกต์ใช้ในเมทริกซ์สัญญาณเวลาดำเนินงาน										
6.จัดทำเอกสาร										
7.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

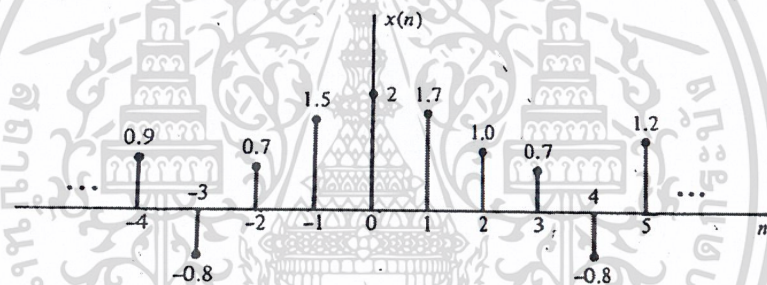
บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสัญญาณเวลาเต็มหน่วย

2.1 แนะนำสัญญาณเวลาเต็มหน่วย

สัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete-Time Signals)

สัญญาณเวลาเต็มหน่วย คือ ฟังก์ชันที่ส่งจาก \mathbb{Z} ไปยัง \mathbb{R} เช่น ฟังก์ชัน $x(n)$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$ ที่แสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 กราฟแสดงสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Discrete-Time Signals)

นอกจากการแสดงโดยใช้กราฟแล้วเราสามารถแสดงสัญญาณเวลาเต็มหน่วยหรือลำดับที่แสดงในกราฟรูปที่ 2.1 แล้วยังสามารถเขียนในรูปแบบอื่นได้ดังนี้

1. แสดงในรูปสูตรทางพีชคณิต เช่น

$$x(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1, 3 \\ 4 & ; n = 2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

2. แสดงในรูปตาราง เช่น

n	\dots	-2	-1	0	1	2	3	4	5	\dots
$x(n)$	\dots	0	0	0	1	4	1	0	0	\dots

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับควรใช้วงนเพื่อควรศึกษานเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. แสดงในรูปลำดับ

สัญญาณเวลาที่ไม่จำกัดโดยเวลาเริ่มต้น $n = 0$ แสดงโดยใช้สัญลักษณ์ \uparrow

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{c} \dots 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \\ \uparrow \end{array} \right\}$$

ลำดับ $x(n)$ เป็น 0 สำหรับ $n < 0$ จะแสดงโดย

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{c} 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \\ \uparrow \end{array} \right\}$$

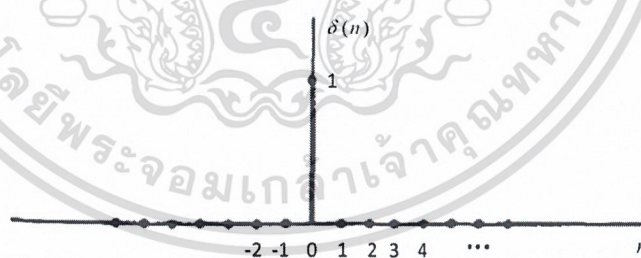
สัญญาณเวลาเต็มหน่วยพื้นฐาน (Some Elementary Discrete-Time Signals)

ในการศึกษาสัญญาณเวลาเต็มหน่วย สัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่พบบ่อยมีดังนี้

1. อิมพัลส์ (Unit impulse) แทนด้วย $\delta(n)$ และกำหนดให้

$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

อิมพัลส์เป็นสัญญาณที่เป็น 0 ทุกจุดยกเว้นที่ $n = 0$ ดังรูปที่ 2.2



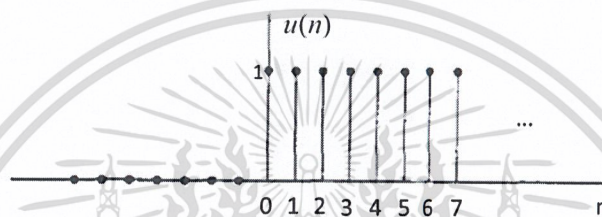
รูปที่ 2.2 กราฟแสดงสัญญาณสุ่มหนึ่งหน่วย (the unit sample signal)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. สัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (The unit step signal) เขียนแทนด้วย $u(n)$ และกำหนดให้

$$u(n) \equiv \begin{cases} 1 & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n < 0 \end{cases}$$

กราฟแสดง $u(n)$ ในรูปที่ 2.3

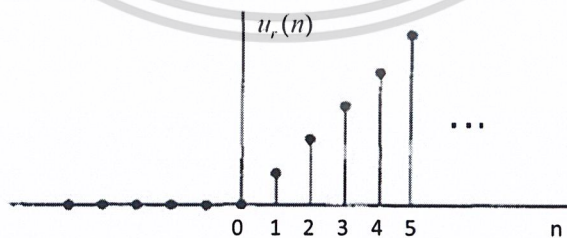


รูป 2.3 กราฟแสดงสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (the unit step signal)

3. สัญญาณทางลาดหนึ่งหน่วย (The unit ramp signal) เขียนแทนด้วย $u_r(n)$ และกำหนดให้

$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n < 0 \end{cases}$$

กราฟแสดง $u_r(n)$ อยู่ในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 กราฟแสดงสัญญาณทางลาดหนึ่งหน่วย (the unit ramp signal)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. สัญญาณเลขชี้กำลัง (The exponential) เป็นลำดับของ

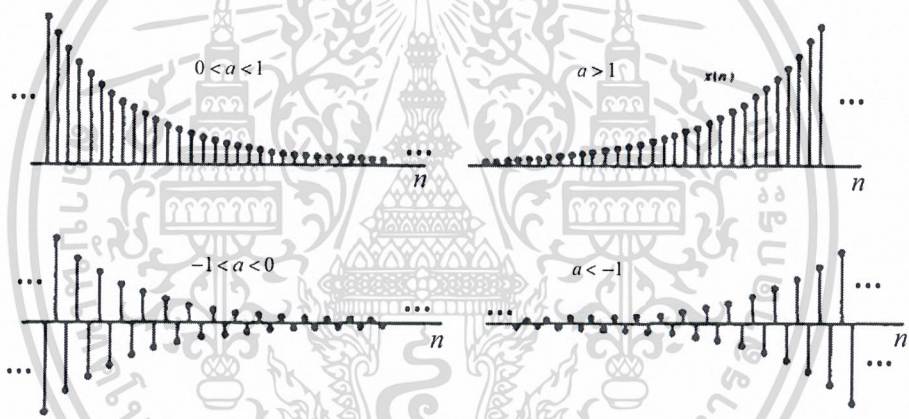
$$x(n) = a^n \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{Z}$$

ถ้าพารามิเตอร์ a เป็นจำนวนจริงแล้ว $x(n)$ เป็นสัญญาณจริงแสดงในรูปที่ 2.5 แสดงค่าแตกต่างของพารามิเตอร์ a เมื่อพารามิเตอร์ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน สามารถแสดงเป็น

$$a \equiv re^{j\theta}$$

ให้ r และ θ เป็นพารามิเตอร์ ดังนั้นอาจแสดง $x(n)$ เป็น

$$\begin{aligned} x(n) &= r^n e^{j\theta n} \\ &= r^n (\cos \theta n + j \sin \theta n) \end{aligned}$$



รูปที่ 2.5 กราฟแสดงสัญญาณเลขชี้กำลัง (exponential signals)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การจำแนกสัญญาณเวลาเต็มหน่วย (Classification of Discrete-Time Signals)

ในทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย ขึ้นอยู่กับลักษณะของสัญญาณใน ส่วนนี้จะแยกแยะสัญญาณเวลาเต็มหน่วยตามลักษณะต่างๆที่แตกต่างกัน

นิยาม 2.1.1 อนุกรมสองทาง (Double series) ให้ $x_n \in \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$

เรากล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ และ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_{-n}$ ลู่เข้า

นิยาม 2.1.2 สัญญาณพลังงาน (Energy Signals) พลังงาน E ของสัญญาณ $x(n)$ กำหนดให้เป็น

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

ถ้า E ลู่เข้า นั่นคือ $(0 \leq E < \infty)$ แล้ว $x(n)$ เรียกว่า สัญญาณพลังงาน

ตัวอย่าง 2.1.1 จงแสดงว่าสัญญาณที่กำหนดให้ เป็นสัญญาณพลังงาน

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 3^n & n < 0 \end{cases}$$

จาก $E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$ จะได้

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{(1.1)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n}}_{(1.2)} \quad (*) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(1.1) แทนค่า $n=0,1,2,\dots$ จะได้

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \quad (\text{อนุกรมเรขาคณิต})$$

$$\text{อัตราส่วนร่วม } r = \frac{1}{4}$$

$$\text{จะได้ } S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3(4^n)} \right)$$

$$\text{จาก } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3(4^n)} \right) = \frac{4}{3}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้ ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}$ ลู่เข้า

$$(1.2) \text{ จาก } \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n}$$

แทนค่า $n=0,1,2,\dots$ จะได้

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \dots \quad (\text{อนุกรมเรขาคณิต})$$

$$\text{อัตราส่วนร่วม } r = \frac{1}{9} \text{ จะได้ } S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1}$$

$$\text{จาก } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{8}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้ ดังนั้น $\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n}$ ลู่เข้า

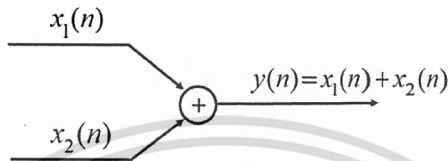
$$\text{นำค่าที่ได้จาก (1.1) และ (1.2) แทนใน (*) จะได้ } E = \frac{4}{3} + \frac{1}{8} = \frac{35}{24}$$

ดังนั้น ลำดับพลังงานจึงเป็นสัญญาณพลังงาน เนื่องจาก E ลู่เข้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 การดำเนินการทางพีชคณิตสำหรับสัญญาณเวลาเต็มหน่วย

1. การบวกสัญญาณ รูปที่ 2.6 เป็นรูปที่อธิบายระบบ โดยแสดงค่าบวกของสองลำดับสัญญาณไปเป็นผลรวมของลำดับ



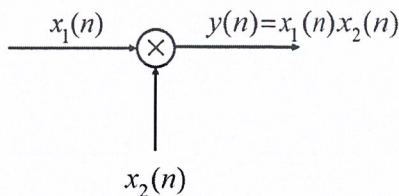
รูปที่ 2.6 กราฟแสดงการบวก

2. การคูณสัญญาณด้วยค่าคงตัว คือ การดำเนินการที่อธิบายโดยรูปที่ 2.7 และแสดงการประยุกต์รูปแบบอย่างง่ายของขนาดของแฟกเตอร์บนสัญญาณรับเข้า $x(n)$



รูปที่ 2.7 กราฟแสดงการคูณสัญญาณด้วยค่าคงที่

3. การคูณสัญญาณ สามารถอธิบายด้วยรูปที่ 2.8 เป็นการคูณกันของสองลำดับสัญญาณในรูปแบบของลำดับอื่นๆ



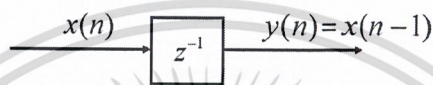
รูป 2.8 กราฟแสดงการคูณสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. การหน่วงสัญญาณด้วยเวลา 1 หน่วย คือ ระบบพิเศษ จะหน่วงสัญญาณที่ส่งผ่านไปหนึ่งหน่วย ดังรูปที่ 2.9 ถ้าสัญญาณรับเข้า คือ $x(n]$ สัญญาณส่งออกจะเป็น $x(n-1]$ ในความเป็นจริง $x(n-1]$ จะถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำที่เวลา $n-1$ และจะถูกเรียกมาใช้ที่เวลา n

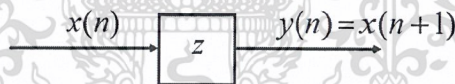
$$y(n) = x(n-1)$$

ดังนั้นการสร้างบล็อกนี้จำเป็นต้องมีหน่วยความจำ เราใช้สัญลักษณ์ z^{-1} แทนตัวหน่วงเวลาหนึ่งหน่วย



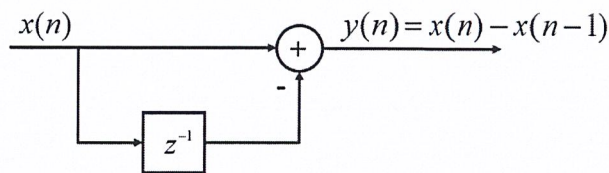
รูปที่ 2.9 กราฟแสดงการหน่วงสัญญาณ

5. การล่วงหน้าสัญญาณด้วยเวลา 1 หน่วย ตรงกันข้ามกับการหน่วงสัญญาณด้วยเวลา 1 หน่วย โดยจะย้ายสัญญาณรับเข้า $x(n]$ ไปข้างหน้าหนึ่งหน่วยเป็น $x(n+1]$ อธิบายได้โดยรูปที่ 2.10 ซึ่งเราจะให้ตัวดำเนินการ z แสดงถึงหน่วยล่วงหน้า



รูปที่ 2.10 กราฟแสดงการล่วงหน้าสัญญาณ

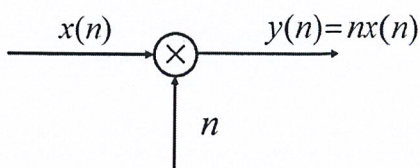
6. การหาอนุพันธ์ของสัญญาณ



รูปที่ 2.11 กราฟแสดงการหาอนุพันธ์ของสัญญาณ

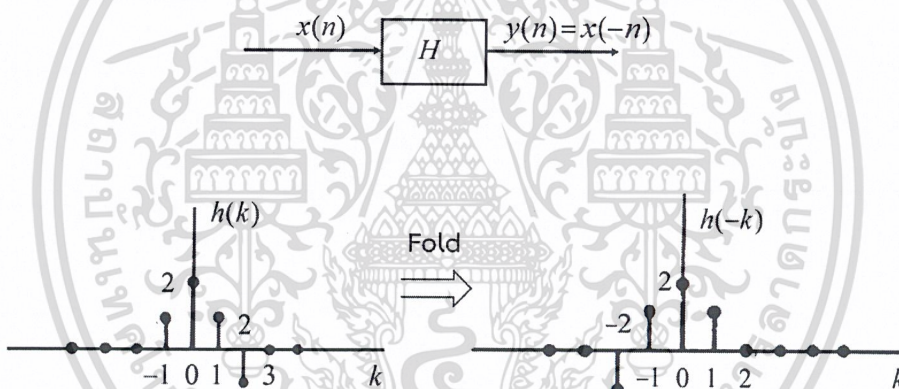
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. การคูณสัญญาณด้วยเวลา



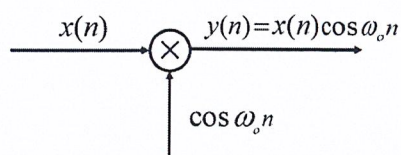
รูปที่ 2.12 กราฟแสดงการคูณสัญญาณด้วยเวลา

8. การพลิกกลับสัญญาณ



รูปที่ 2.13 กราฟแสดงการพลิกกลับสัญญาณ

9. การเปลี่ยนเฟสสัญญาณ



รูป 2.14 กราฟแสดงการเปลี่ยนเฟสสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.1 จงวาดแผนภาพแบบบล็อกของระบบเวลาเต็มหน่วยโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณรับเข้า – สัญญาณส่งออก

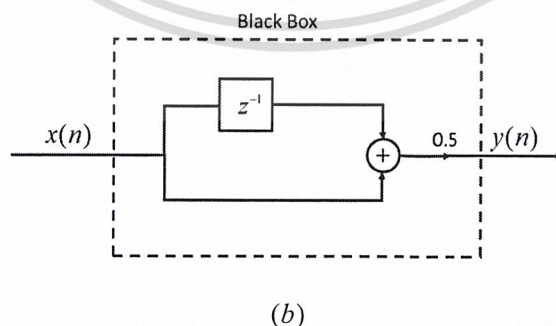
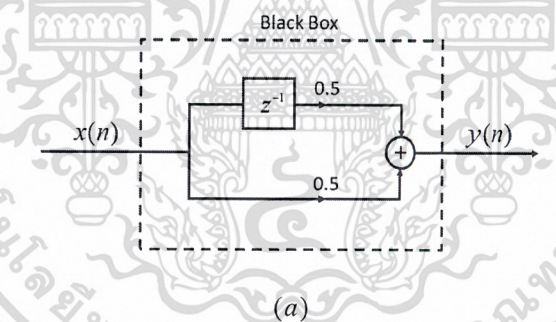
$$y(n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

โดยที่ $x(n)$ คือ สัญญาณรับเข้า และ $y(n)$ คือ สัญญาณส่งออก ของระบบ

จากสมการ $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$ สัญญาณส่งออก $y(n)$ เกิดจากการคูณ สัญญาณรับเข้า $x(n)$ ด้วย 0.5 และคูณ สัญญาณรับเข้า $x(n-1)$ ด้วย 0.5 แล้วนำสองผลคูณมาบวกกัน รูปที่ 2.15 (a) คือ แผนภาพของสมการ สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพแบบบล็อกได้เป็นรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 แผนภาพแบบบล็อกของระบบ $y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ระบบยีนยงเวลาเชิงเส้น

ระบบเชิงเส้น (Linear Systems)

สมมติว่ามีสองสัญญาณรับเข้า $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ และสร้างสัญญาณส่งออกภายใต้เงื่อนไขดังนี้

$$y_1(n) = H[x_1(n)]$$

$$y_2(n) = H[x_2(n)]$$

โดยที่สัญญาณนี้เป็นอิสระต่อกันและสมมติให้สัญญาณรับเข้า $x_3(n)$ คือ ผลรวมเชิงเส้นของ $x_1(n)$ กับ $x_2(n)$

$$x_3(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$$

โดยที่ a_1 และ a_2 เป็นจำนวนใดๆ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_3(n) &= H[x_3(n)] \\ &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)] \\ &= a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \end{aligned}$$

โดยที่ $y_3(n)$ เกิดจากการใช้หลักการซ้อนทับ (Principle of superposition)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.3.1 ระบบ H เป็นระบบเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ

$$H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)]$$

สำหรับทุก สัญญาณเวลาเต็มหน่วย $x_1(n), x_2(n)$ และค่าคงตัว $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 2.3.1 พิจารณาระบบ H ซึ่งกำหนดโดย $H[x(n)] = nx(n)$

$$y(n) = nx(n)$$

สำหรับสัญญาณรับเข้า $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปสัญญาณส่งออกได้ดังนี้

$$y_1(n) = nx_1(n)$$

$$y_2(n) = nx_2(n)$$

จาก

$$\begin{aligned} y_3(n) &= H[x_3(n)] \\ &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \end{aligned}$$

จะได้

$$= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

จาก

$$y_3(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

จะได้

$$= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

เนื่องจากผลรวมเชิงเส้นของสองสัญญาณส่งออกเท่ากัน ดังนั้น H จึงเป็นระบบเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบยีนยงเวลา (Time-Invariant System)

นิยาม 2.3.2 สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{Z}$ เรานิยาม $\tau_k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ โดย

$$\tau_k(n) = n - k$$

นิยาม 2.3.3 ระบบ H จะกล่าวว่าเป็นระบบยีนยงเวลา (Time-Invariant System)

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสัญญาณรับเข้า x จะได้ว่า

$$H(x \circ \tau_k) = H(x) \circ \tau_k$$

สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 2.3.2 กำหนดให้ $y(n) = x(n) - x(n-1)$

สมการสัญญาณรับเข้า - สัญญาณส่งออกของระบบนี้ คือ

$$y(n) = (H(x))(n) = H(x(n)) = x(n) - x(n-1)$$

ถ้าสัญญาณรับเข้า $x(n]$ ถูกหน่วงเวลาไป k หน่วย และถูกประมวลผลโดยระบบ H สัญญาณส่งออกจะได้

$$\begin{aligned} H(x \circ \tau_k)(n) &= H(x(n-k) - x(n-1-k)) \\ &= x(n-k) - x(n-k-1) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราประมวลผลโดยระบบ H แล้วหน่วงเวลาไป k หน่วย จะได้

$$\begin{aligned} (H(x) \circ \tau_k)(n) &= (x(n) - x(n-1)) \circ (n-k) \\ &= x(n-k) - x(n-k-1) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ทั้งสองสมการได้คำตอบตรงกันตามนิยาม $H(x \circ \tau_k) = (H(x) \circ \tau_k)$

ดังนั้น ระบบนี้เป็นระบบยีนยงเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3.3 กำหนดให้ $y(n)=x(-n)$

ระบบนี้เขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณรับเข้า - สัญญาณส่งออกได้ดังนี้

$$y(n)=(H(x))(n)=x(-n)$$

ถ้าสัญญาณรับเข้า $x(n)$ ถูกหน่วงเวลาไป k หน่วย และถูกประมวลผลโดยระบบ H สัญญาณส่งออกจะได้

$$H(x \circ \tau_k)(n)=H(-n-k)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราประมวลผลโดยระบบ H แล้วหน่วงเวลาไป k หน่วย จะได้

$$\begin{aligned} (H(x) \circ \tau_k)(n) &= (x(-n)) \circ (n-k) \\ &= x(-n+k) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $H(x \circ \tau_k) \neq (H(x) \circ \tau_k)$ ดังนั้นระบบนี้ไม่เป็นระบบย่นยงเวลา

ตัวอย่าง 2.3.4 กำหนด $H[x(n)]=y(n)$ พิจารณา $y(n)=x(n-1)+x(n)$ เป็นระบบย่นยงเวลาเชิงเส้นหรือไม่

สำหรับสัญญาณรับเข้า $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปสัญญาณส่งออกได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1(n-1) + x_1(n) \\ y_2(n) &= x_2(n-1) + x_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } y_3(n) &= H[x_3(n)] \\ &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1[x_1(n-1) + x_1(n)] + a_2[x_2(n-1) + x_2(n)] \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } = a_1x_1(n-1) + a_1x_1(n) + a_2x_2(n-1) + a_2x_2(n)$$

$$\text{จาก } y_3(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

$$\text{จะได้ } = a_1x_1(n-1) + a_1x_1(n) + a_2x_2(n-1) + a_2x_2(n)$$

เนื่องจากผลรวมเชิงเส้นของสองสัญญาณส่งออกเท่ากัน ดังนั้น จึงเป็นระบบเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการสัญญาณรับเข้า - สัญญาณส่งออกของระบบนี้ คือ

$$y(n) = (H(x))(n) = x(n-1) + x(n)$$

ถ้าสัญญาณรับเข้า $x(n)$ ถูกหน่วงเวลาไป k หน่วย และถูกประมวลผลโดยระบบ H สัญญาณส่งออกจะได้

$$\begin{aligned} H(x \circ \tau_k)(n) &= H(x(n-1-k) + x(n-k)) \\ &= x(n-k-1) + x(n-k) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราประมวลผลโดยระบบ H แล้วหน่วงเวลาไป k หน่วย จะได้

$$\begin{aligned} (H(x) \circ \tau_k)(n) &= (x(n-1) + x(n)) \circ (n-k) \\ &= x(n-k-1) + x(n-k) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ทั้งสองสมการได้คำตอบตรงกันตามนิยาม $H(x \circ \tau_k) = (H(x) \circ \tau_k)$

ดังนั้น ระบบนี้เป็นระบบยีนยงเวลา

จะได้ว่า $y(n) = (H(x))(n) = x(n-1) + x(n)$ เป็นระบบยีนยงเวลาเชิงเส้น

2.4 ผลตอบสนองของระบบยีนยงเวลาเชิงเส้นต่อสัญญาณรับเข้าใดๆ

การเขียนสัญญาณให้อยู่ในรูปผลรวมของสัญญาณอย่างง่าย

สัญญาณอิมพัลส์ (impulses) $\delta(n)$ เป็นสัญญาณพื้นฐานที่เราสามารถเขียนสัญญาณรับเข้า $x(n)$ ในรูปของสัญญาณอิมพัลส์ $\delta(n)$ ได้

สมมติว่าเรานำ 2 สัญญาณ $x(n)$ และ $\delta(n-k)$ มาคูณกันโดย $\delta(n-k)$ มีค่าเป็น 0 ทุกจุด ยกเว้นที่ $n=k$ จะมีค่าเป็น $x(k)$

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k)$$

จากนั้นหาค่า $x(k)$ ที่ไม่ใช่ 0 ออกมาถ้าเราทำซ้ำทุกๆค่า k ที่เป็นไปได้ ($-\infty < k < \infty$) ผลรวมของผลคูณที่ได้จะเท่ากับ $x(n)$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลรวมคอนโวลูชัน (Convolution sum)

กำหนดให้การตอบสนอง $y(n, k)$ ของระบบต่ออิมพัลส์ ที่ $n=k$ ด้วยสัญลักษณ์

$$y(n, k) \equiv h(n, k) = H[\delta(n-k)] \quad ; -\infty < k < \infty$$

ให้ H เป็นระบบย่นยงเวลาเชิงเส้น

$$\text{ให้ } y(n) = H[x(n)]$$

เนื่องจาก
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

จะได้ว่า
$$y(n) = H\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

และเนื่องจาก H เป็นระบบย่นยงเวลาเชิงเส้น และ H มีความต่อเนื่อง

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n, k) \end{aligned}$$

ให้ $h(n)$ เป็นผลตอบสนองของระบบนี้ต่ออิมพัลส์ $\delta(n)$ นั่นคือ

$$h(n) \equiv H[\delta(n)]$$

จาก สมบัติของระบบย่นยง

จะได้ว่า
$$h(n, k) = h(n-k) = H[\delta(n-k)]$$

จะได้ว่า
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

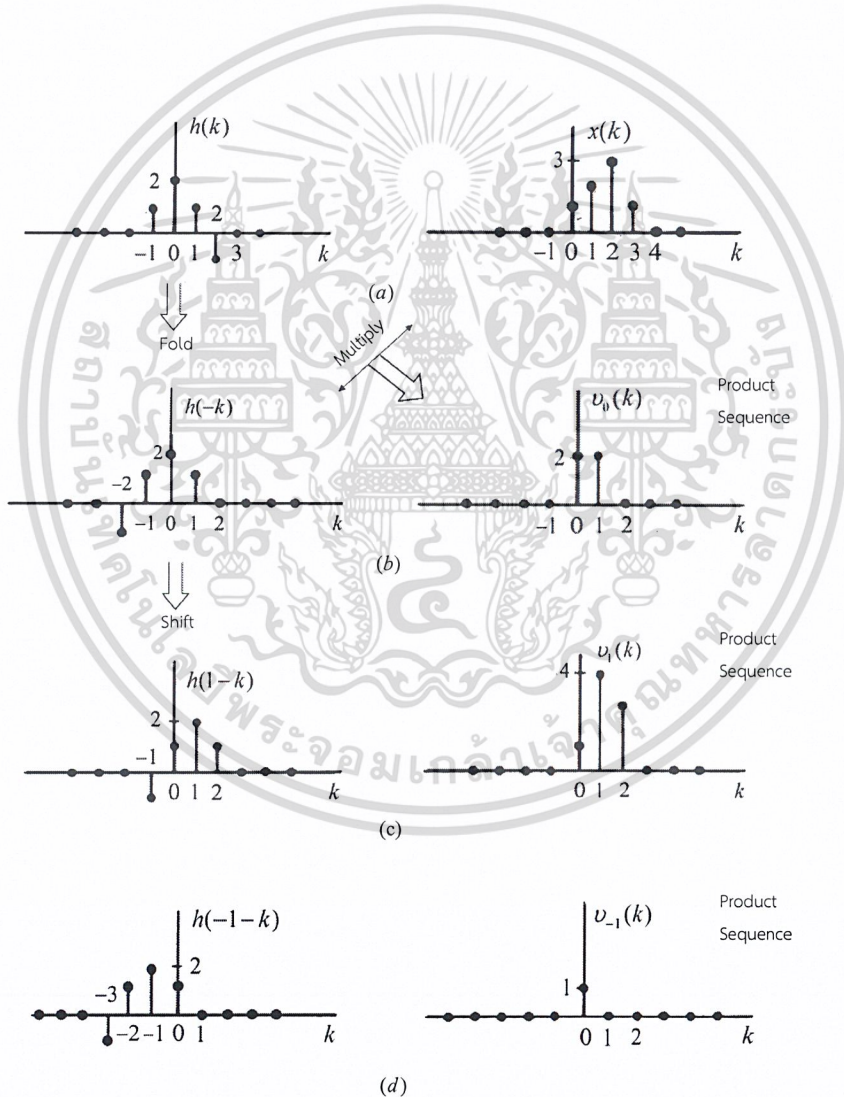
เราเรียก $y(n)$ ว่า ผลรวมคอนโวลูชันของ $x(n)$ กับ $h(n)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y(n) = x(n) * h(n)$

เราเรียกการดำเนินการดังกล่าวว่า คอนโวลูชัน

การแปลงค่าผลรวมของคอนโวลูชัน เป็นสัญญาณส่งออก $y(n)$

1. การพับสัญญาณ คือ พับ $h(k)$ เพื่อให้ได้ $h(-k)$
2. การเลื่อน คือ เลื่อน $h(-k)$ โดยเลื่อน n_0 ไปทางบวก หรือทางลบ จะได้ $h(n_0 - k)$
3. การคูณ คือ คูณ $x(k)$ ด้วย $h(n_0 - k)$ จะได้ ลำดับผลคูณ $v_{n_0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$
4. การบวก คือ บวกค่าทั้งหมดของ ผลคูณลำดับ $v_{n_0}(k)$ จะได้ ค่าของสัญญาณส่งออกที่เวลา $n = n_0$

$n = n_0$



รูปที่ 2.16 การคำนวณของคอนโวลูชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.4.1 ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบยืนยงเวลาเชิงเส้น คือ

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n=-1 \\ 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ -1 & n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

กำหนดให้สัญญาณรับเข้า คือ

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 3 & n=2 \\ 1 & n=3 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่า $y(n)$

โดยปกติจะคำนวณหาคอนโวลูชันจาก $x(n)*h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ แต่ในตัวอย่างนี้จะ

คำนวณโดยใช้กราฟในรูปที่ 2.16 คำนวณผลรวมคอนโวลูชันโดยการพลิกกลับสัญญาณ $h(k)$ ดังกราฟรูปที่ 2.16(b) ทำให้สามารถคำนวณผลตอบสนองที่ $n=0$ จะได้

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$$

เมื่อทำการเลื่อนกราฟไป $n=0$ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $h(-k)$ ดังเดิม

$$v_0 \equiv x(k)h(-k)$$

ผลรวมคอนโวลูชัน ที่ $n=0$ นั่นคือ

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k) = 2 + 2 = 4$$

คำนวณผลตอบสนองที่ $n=1$ จะได้

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $h(1-k)$ มาจากการพลิกกลับสัญญาณและการเลื่อนไปทางขวา 1 หน่วย จะได้

$$v_1(k) = x(k)h(1-k)$$

ผลรวมคอนโวลูชัน ที่ $n=1$ นั่นคือ

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) = 1+4+3=8$$

ในทำนองเดียวกัน $y(2)$ ได้มาจากการเลื่อน $h(-k)$ ไปทางขวา 2 หน่วย ซึ่ง $v_2(k) = x(k)h(2-k)$

จะได้ผลรวมคอนโวลูชัน $y(2)=8$ และเมื่อทำการเลื่อน $h(-k)$ ไปทางขวาเรื่อยๆ จะได้

$$y(3)=3, y(4)=-2, y(5)=-1 \text{ แต่เมื่อ } n > 5 \text{ พบว่า } y(n)=0$$

เมื่อคำนวณหาผลรวมคอนโวลูชันที่ $n < 0$ เริ่มที่ $n = -1$ จะได้

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$$

โดย $h(-1-k)$ มาจากการพลิกกลับสัญญาณ และการเลื่อนไปทางซ้าย 1 หน่วย จะได้

$$v_{-1}(k) = x(k)h(-1-k)$$

ผลรวมคอนโวลูชัน $y(-1)=1$

จากการสังเกตกราฟทำให้ได้ว่า $y(n)=0$ เมื่อ $n \leq -2$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$y(n) = \left\{ \dots, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \dots \right\}$$

↑

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 สมบัติของคอนโวลูชัน

2.5.1 สมบัติการสลับที่ (Commutative Law)

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

บทพิสูจน์

จาก
$$h(n) = x(n) * y(n) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k)$$

ให้
$$k' = n - k$$

$$k = n - k'$$

จะได้
$$\begin{aligned} x(n) * y(n) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(n-k') y(k') \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} y(k') x(n-k') \\ &= y(n) * x(n) \end{aligned}$$

2.5.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative Law)

$$[x(n) * y_1(n)] * y_2(n) = x(n) * [y_1(n) * y_2(n)]$$

บทพิสูจน์

ให้
$$h_1(n) = [x(n) * y_1(n)] * y_2(n)$$

และ
$$h_2(n) = x(n) * [y_1(n) * y_2(n)]$$

จะแสดงว่า
$$h_1(n) = h_2(n)$$

ให้
$$x'(n) = x(n) * y_1(n)$$

และ
$$y'(n) = y_1(n) * y_2(n)$$

จะได้
$$h_1(n) = x'(n) * y_2(n)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= y_2(n) * x'(n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_2(k)x'(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x'(n-k)y_2(k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(n-k) * y_1(n-k)]y_2(k)
\end{aligned}$$

จาก
$$h(n) = x(n) * y(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) * y_1(n-k-l) \right] y_2(k) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1(n-k-l) \right] y_2(k) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1(n-l-k)y_2(k) \right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_2(k)y_1(n-l-k) \right]
\end{aligned}$$

จาก
$$h(n) = y(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k)$$

จะได้
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)[y_2(n-l) * y_1(n-l)]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)[y_1(n-l) * y_2(n-l)]$$

ให้
$$a'(n-l) = y_1(n-l) * y_2(n-l)$$

จะได้
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)a'(n-l)$$

$$\begin{aligned}
&= x(n) * a'(n) \\
&= x(n) * [y_1(n) * y_2(n)] \\
&= h_2(n)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.3 สมบัติการแจกแจง (Distributive Law)

$$x(n) * [y_1(n) + y_2(n)] = x(n) * y_1(n) + x(n) * y_2(n)$$

บทพิสูจน์

จาก สมบัติการสลับที่ $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k) \end{aligned}$$

ทำให้ $x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y(k)$

ให้ $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$

พิจารณา $x(n) * y(n) = x(n) * [y_1(n) + y_2(n)]$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} x(n) * [y_1(n) + y_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)[y_1(n) + y_2(n)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y_1(k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)y_2(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1(k)x(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_2(k)x(n-k) \\ &= y_1(n) * x(n) + y_2(n) * x(n) \\ &= x(n) * y_1(n) + x(n) * y_2(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.4 การคูณด้วยสเกลาร์ (Multiplying by Scalar)

$$[ax(n)] * y(n) = a[x(n) * y(n)]$$

บทพิสูจน์

จาก
$$h(n) * y(n) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} h(k)y(n-k)$$

พิจารณา $h(n) = ax(n)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} ax(n) * y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ax(k)y(n-k) \\ &= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\ &= a[x(n) * y(n)] \end{aligned}$$

2.5.5 เอกลักษณ์ (Identity)

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

บทพิสูจน์

จาก
$$\begin{aligned} x(n) * \delta(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \\ &= x(n)\delta(n-n) \\ &= x(n)\delta(0) \\ &= x(n) \cdot (1) \\ &= x(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

3.1 พีชคณิตของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

นิยาม 3.1.1 เราเรียก $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ว่าฟังก์ชันเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย

โดยสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เราสามารถเขียน $A(n)$ ในรูป

$$A(n) = [a_{ij}(n)]_{p \times q} = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & \cdots & a_{1q}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(n) & a_{p2}(n) & \cdots & a_{pq}(n) \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 ค่าฟังก์ชันเมทริกซ์โดยกำหนด

$$\text{ให้ } g(n) = \begin{cases} 3 & ; n=1 \\ 5 & ; n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{bmatrix} \min \{g(n), g(n-1), g(n-2)\} & g(n) \\ 2g(n-1) & g(n) + g(n-1) \end{bmatrix}$$

$$T(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}g(n) & g(n-1) - g(n+1) & g(n) + 2 \\ g(n-2) & g(n) & 5 + g(n-1) \end{bmatrix}$$

$$U(n) = \begin{bmatrix} 2g(n) - g(n-1) \\ g(n) + 5 \\ g(n) + g(n+2) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.1.2 การบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A, B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย $A(n) = [a_{ij}(n)]$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)]$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เรานิยาม $A+B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย

$$(A+B)(n) = A(n) + B(n), n \in \mathbb{Z}$$

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $g(n) = \begin{cases} 3 & ; n=1 \\ 5 & : n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

$$S(n) = \begin{bmatrix} 5g(n) & g(n) & 2g(n-2) \\ g(n-1) + g(n) & g(n) + 3 & 3g(n-1) \end{bmatrix}$$

$$T(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}g(n) & g(n-1) - g(n+1) & g(n) + 2 \\ g(n-2) & g(n) & 5 + g(n-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S(n) + T(n) &= \begin{bmatrix} 5g(n) + (\frac{1}{2}g(n)) & g(n) + (g(n-1) - g(n+1)) & 2g(n-2) + (g(n) + 2) \\ g(n-1) + g(n) + (g(n-2)) & (g(n) + 3) + g(n) & 3g(n-1) + (5 + g(n-1)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{11}{2}g(n) & g(n-1) + g(n) + g(n+1) & 2g(n-2) + g(n+2) \\ g(n-2) + g(n-1) + g(n) & 2g(n) + 3 & 4g(n-1) + 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.1.3 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย $A(n) = [a_{ij}(n)]$ และ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เรานิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน $fA: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย

$$(fA)(n) = f(n)A(n)$$

ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $S(n) = \begin{bmatrix} 5g(n) & g(n) & 2g(n-2) \\ g(n-1) + g(n) & g(n) + 3 & 3g(n-1) \end{bmatrix}$

และ $f(n) = 3n$ เมื่อ $g(n) = \begin{cases} 3 & ; n=1 \\ 5 & ; n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

จะได้

$$\begin{aligned} f(n)S(n) &= \begin{bmatrix} 3n(5g(n)) & 3n(g(n)) & 3n(2g(n-2)) \\ 3n(g(n-1) + g(n)) & 3n(g(n) + 3) & 3n(3g(n-1)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15ng(n) & 3ng(n) & 6ng(n-2) \\ 3ng(n-1) + 3ng(n) & 3ng(n) + 9n & 9ng(n-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.1.1 สมบัติของการบวกและการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A, B, C: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $r, s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $A(n) + B(n) = B(n) + A(n)$
2. $[A(n) + B(n)] + C(n) = A(n) + [B(n) + C(n)]$
3. $A(n) + 0 = A(n)$ เมื่อ 0 เป็นเมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกมีค่าเป็น 0
4. $r(n)[A(n) + B(n)] = r(n)A(n) + r(n)B(n)$
5. $[r(n) + s(n)]A(n) = r(n)A(n) + s(n)A(n)$
6. $r(n)[s(n)A(n)] = [r(n)s(n)]A(n)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทพิสูจน์

ให้ $A(n)=[a_{ij}(n)]$, $B(n)=[b_{ij}(n)]$ และ $C(n)=[c_{ij}(n)]$

1. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} A(n) + B(n) &= [a_{ij}(n) + b_{ij}(n)] \\ &= [b_{ij}(n) + a_{ij}(n)] \\ &= B(n) + A(n) \end{aligned}$$

2. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} [A(n) + B(n)] + C(n) &= [(a_{ij}(n) + b_{ij}(n)) + c_{ij}(n)] \\ &= [a_{ij}(n) + (b_{ij}(n) + c_{ij}(n))] \\ &= A(n) + (B(n) + C(n)) \end{aligned}$$

3. โดยนิยามการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} A(n) + 0 &= [a_{ij}(n) + 0] \\ &= [a_{ij}(n)] = A(n) \end{aligned}$$

4. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} r(n)(A(n) + B(n)) &= r(n)[a_{ij}(n) + b_{ij}(n)] \\ &= [r(n)a_{ij}(n) + r(n)b_{ij}(n)] \\ &= r(n)A(n) + r(n)B(n) \end{aligned}$$

5. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} (r(n) + s(n))A(n) &= (r(n) + s(n))[a_{ij}(n)] \\ &= [r(n)a_{ij}(n) + s(n)a_{ij}(n)] \\ &= r(n)A(n) + s(n)A(n) \end{aligned}$$

6. โดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} r(n)(s(n)A(n)) &= r(n)[s(n)a_{ij}(n)] \\ &= [r(n)s(n)a_{ij}(n)] \\ &= (r(n)s(n))[a_{ij}(n)] \\ &= (r(n)s(n))A(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.1.4 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย $A(n) = [a_{ij}(n)]$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)]$

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เรานิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ $AB: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย

$$(AB)(n) = A(n)B(n) = \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)b_{kj}(n) \right]$$

ตัวอย่าง 3.1.4 กำหนดให้

$$A(n) = \begin{bmatrix} 3g(n) & g(n-1) \\ g(n^2) & \frac{1}{2}g(n) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B(n) = \begin{bmatrix} 2g(n)+1 & g(n) & 4 \\ -g(n) & 0 & g(n)+2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $g(n) = \begin{cases} |n| & ; -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

$$\begin{aligned} A(n)B(n) &= \begin{bmatrix} (3g(n) \cdot 2g(n)+1) + (g(n)-1 \cdot (-g(n))) & (3g(n) \cdot g(n)) + 0 & (3g(n) \cdot 4) + ((g(n)-1) \cdot (g(n)+2)) \\ (g(n^2) \cdot (2g(n)+1) + (\frac{1}{2}g(n) \cdot (-g(n))) & (g(n^2) \cdot g(n)) + 0 & 4g(n^2) + (\frac{1}{2}g(n) \cdot (g(n)+2)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5g(n^2) + 4g(n)^2 & 3g(n)^2 & g(n)^2 + 13g(n) - 2 \\ g(n^2)(2g(n)+1) - \frac{1}{2}g(n)^2 & g(n^2)g(n) & \frac{1}{2}g(n)^2 + 4g(n^2) + g(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.1.2 สมบัติของการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่นิยามบนเซต \mathbb{Z}

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $A(n), B(n), C(n)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $A(n)(B(n)C(n)) = (A(n)B(n))C(n)$
2. $A(n)(B(n) + C(n)) = (A(n)B(n)) + (A(n)C(n))$
3. $(B(n) + C(n))A(n) = (B(n)A(n)) + (C(n)A(n))$
4. $r(n)(A(n)B(n)) = (r(n)A(n))B(n) = A(n)(r(n)B(n))$ เมื่อ $r: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
5. $I_n A(n) = A(n) = A(n)I_n$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{q \times r}$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{r \times m}$

โดยนิยามการคูณของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned}
 A(n)[B(n)C(n)] &= A(n) \left[\sum_{k=1}^r b_{ik}(n)c_{kj}(n) \right] \\
 &= \left[\sum_{x=1}^q \sum_{k=1}^r a_{ix}(n)b_{xk}(n)c_{kj}(n) \right] \\
 &= \left[\sum_{k=1}^r \sum_{x=1}^q a_{ix}(n)b_{xk}(n)c_{kj}(n) \right] \\
 &= \left[\sum_{x=1}^q a_{ix}(n)b_{xk}(n) \right] C(n) \\
 &= [A(n)B(n)]C(n)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{q \times r}$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{q \times r}$

โดยนัยมาการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} A(n)[B(n) + C(n)] &= \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)(b_{kj}(n) + c_{kj}(n)) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)b_{kj}(n) + a_{ik}(n)c_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)b_{kj}(n) + \sum_{k=1}^q a_{ik}(n)c_{kj}(n) \right] \\ &= [A(n)B(n)] + [A(n)C(n)] \end{aligned}$$

3. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{q \times r}$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$

โดยนัยมาการคูณและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} [B(n) + C(n)]A(n) &= \left[\sum_{k=1}^q (b_{ik}(n) + c_{ik}(n))a_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^q b_{ik}(n)a_{kj}(n) + c_{ik}(n)a_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^q b_{ik}(n)a_{kj}(n) + \sum_{k=1}^q c_{ik}(n)a_{kj}(n) \right] \\ &= [B(n)A(n)] + [C(n)A(n)] \end{aligned}$$

4. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{q \times r}$ และ $r(n)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ

โดยนัยมาการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} r(A(n)B(n)) &= r(n) \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)b_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^q (r(n)a_{ik}(n))b_{kj}(n) \right] \\ &= (rA(n))B(n) \\ &= \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n)(r(n)b_{kj}(n)) \right] \\ &= A(n)(rB(n)) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ และ $I_p = [i_{ij}] \in M_p$ เมื่อ i_j มีค่าเป็น 0 เมื่อ $i \neq j$ และ มีค่าเป็น 1 เมื่อ $i = j$ และโดยนิยามการคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$I_p A(n) = \left[\sum_{k=1}^q i_{ik} a_{kj}(n) \right] = [a_{ij}(n)] = A(n)$$

$$A(n) I_q = \left[\sum_{k=1}^q a_{ik}(n) i_{kj} \right] = [a_{ij}(n)] = A(n)$$

ดังนั้น $I_p A(n) = A(n) = A(n) I_q$

นิยาม 3.1.5 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดย $A(n) = [a_{ij}(n)]$ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^T สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เรานิยาม $A^T: \mathbb{Z} \rightarrow M_{q \times p}(\mathbb{R})$ โดย

$$A^T(n) = [a_{ji}(n)]$$

ตัวอย่าง 3.1.5 กำหนดให้ $S(n) = \begin{bmatrix} 5g(n) & g(n) & 2g(n-2) \\ g(n-1) + g(n) & g(n) + 3 & 3g(n-1) \end{bmatrix}$

$$\text{เมื่อ } g(n) = \begin{cases} 3 & ; n=1 \\ 5 & ; n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$\text{จะได้ } S^T(n) = \begin{bmatrix} 5g(n) & g(n-1) + g(n) \\ g(n) & g(n) + 3 \\ 2g(n-2) & 3g(n-1) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.1.3 สมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ให้ A, B เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่นิยามบนเซต \mathbb{Z} ให้ $n \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $A(n), B(n)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $(A^T(n))^T = A(n)$
2. $(A(n) + B(n))^T = A^T(n) + B^T(n)$
3. $(r(n)A(n))^T = r(n)A^T(n)$ เมื่อ $r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ โดยนิยามของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$(A^T(n))^T = ([a_{ji}(n)])^T = [a_{ij}(n)] = A(n)$$
2. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ โดยนิยามการบวกและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$(A(n) + B(n))^T = [a_{ij}(n) + b_{ij}(n)]^T = [a_{ji}(n) + b_{ji}(n)] = A^T(n) + B^T(n)$$
3. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}$ และ $r(n)$ คือฟังก์ชันใดๆ โดยนิยามการบวกและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$(r(n)A(n))^T = [r(n)a_{ij}(n)]^T = [r(n)a_{ji}(n)] = r(n)A^T(n)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ผลคูณเมทริกซ์คอนโวลูชัน

นิยาม 3.2.1 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A : \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $A(n) = [a_{ij}(n)]$ และ $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเรานิยาม

$$(f * A)(n) = [f(n) * a_{ij}(n)] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) a_{ij}(n-k) \right]$$

เราอาจเขียนแทน $(f * A)(n)$ ด้วย $f(n) * A(n)$

ตัวอย่าง 3.2.1 กำหนดให้ $h(n) = \begin{bmatrix} g(n) & g(n+2) & g(n^2) \\ 2g(n) & g(n-1) & g(n)+1 \end{bmatrix}$

เมื่อ $g(n) = \begin{cases} 3 & ; n=1 \\ 5 & ; n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

และ $f(n) = \begin{cases} n & ; -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

$$f(n) * h(n) = \begin{bmatrix} f(n) * g(n) & f(n) * g(n+2) & f(n) * g(n^2) \\ f(n) * 2g(n) & f(n) * g(n-1) & f(n) * g(n)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n-k) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n-k+2) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n^2-k) \\ 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n-k) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n-k-1) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) g(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{ \dots, 0, -3, -5, 3, 5, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, 0, -3, -5, 3, 5, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, -5, -3, -5, 0, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \{ \dots, 0, -6, -10, 6, 10, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, -3, -5, 3, 5, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, -3, -5, 3, 5, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของการบวกและการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $A, B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $A(n) = [a_{ij}(n)]$, $B(n) = [b_{ij}(n)]$ และ $r, s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$1. r(n) * (A(n) + B(n)) = r(n) * A(n) + r(n) * B(n)$$

$$2. (r(n) + s(n)) * A(n) = r(n) * A(n) + s(n) * A(n)$$

บทพิสูจน์

1. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันค่าจริง และคุณสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน

$$\begin{aligned} r(n) * (A(n) + B(n)) &= r(n) * [a_{ij}(n) + b_{ij}(n)] \\ &= [r(n) * a_{ij}(n) + r(n) * b_{ij}(n)] \\ &= r(n) * A(n) + r(n) * B(n) \end{aligned}$$

2. โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันค่าจริง และคุณสมบัติการแจกแจงของคอนโวลูชัน

$$\begin{aligned} (r(n) + s(n)) * A(n) &= (r(n) + s(n)) * [a_{ij}(n)] \\ &= r(n) * a_{ij}(n) + s(n) * a_{ij}(n) \\ &= r(n) * A(n) + s(n) * A(n) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $A(n) = [a_{ij}(n)]$ และ $r, s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r(n) * (s(n) * A(n)) &= r(n) * [s(n) * a_{ij}(n)] \\ &= [r(n) * s(n) * a_{ij}(n)] \\ &= [(r(n) * s(n)) * a_{ij}(n)] \\ &= (r(n) * s(n)) * [a_{ij}(n)] \\ &= (r(n) * s(n)) * A(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 3.2.2 การคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{q \times r}(\mathbb{R})$ เรานิยามผลคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ $A * B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{p \times r}(\mathbb{R})$ โดย

$$(A * B)(n) = A(n) * B(n) = \left[\sum_{m=1}^q a_{im}(n) * b_{mj}(n) \right]$$

$$= \left[\sum_{m=1}^q \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{im}(n) b_{mj}(n-k) \right]$$

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} g(n) \\ g(n+1) \\ g(n+2) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} h(n-1) & h(n) \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} h(n+1) \\ h(n) \end{bmatrix}$

เมื่อ $g(n) = \begin{cases} 1 & ; n=1 \\ 3 & : n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$ และ $h(n) = \begin{cases} n & : 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

จะได้ $A(n) * B(n) = \begin{bmatrix} g(n) * h(n-1) & g(n) * h(n) \\ g(n+1) * h(n-1) & g(n+1) * h(n) \\ g(n+2) * h(n-1) & g(n+2) * h(n) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n) h(n-1-k) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n) h(n-k) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+1) h(n-1-k) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+1) h(n-k) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+2) h(n-1-k) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+2) h(n-k) \end{bmatrix}$$

แต่ $A(n) * C(n)$ ไม่สามารถนิยามได้เนื่องจากจำนวนหลักของ $A(n)$ ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ $C(n)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาค่าได้

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $A(n), B(n), C(n)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

$$1. A(n) * (B(n) + C(n)) = (A(n) * B(n)) + (A(n) * C(n))$$

$$2. (B(n) + C(n)) * A(n) = (B(n) * A(n)) + (C(n) * A(n))$$

3. $r(n) * (A(n) * B(n)) = (r(n) * A(n)) * B(n) = A(n) * (r(n) * B(n))$ เมื่อ $r: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้

$$4. \alpha (A(n) * B(n))$$

$$5. f(n) A(n) * B(n)$$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} A(n) * (B(n) + C(n)) &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * (b_{kj}(n) + c_{kj}(n)) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * b_{kj}(n) + a_{ik}(n) * c_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * b_{kj}(n) + \sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * c_{kj}(n) \right] \\ &= (A(n) * B(n)) + (A(n) * C(n)) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ให้ $A(n)=[a_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, $B(n)=[b_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $C(n)=[c_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและการบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} (B(n)+C(n))*A(n) &= \left[\sum_{k=1}^n (b_{ik}(n)+c_{ik}(n))*a_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n b_{ik}(n)*a_{kj}(n)+c_{ik}(n)*a_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n b_{ik}(n)*a_{kj}(n)+\sum_{k=1}^n c_{ik}(n)*a_{kj}(n) \right] \\ &= (B(n)*A(n))+(C(n)*A(n)) \end{aligned}$$

3. ให้ $A(n)=[a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n)=[b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ และ $r(n)$ คือฟังก์ชันใดๆที่หาค่าได้ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} r(n)*(A(n)*B(n)) &= r(n)*\left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n)*b_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (r(n)*a_{ik}(n))*b_{kj}(n) \right] \\ &= (r(n)*A(n))*B(n) \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n)*(r(n)*b_{kj}(n)) \right] \\ &= A(n)*(r(n)*B(n)) \end{aligned}$$

4. ให้ $A(n)=[a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n)=[b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ โดยที่ $n \in \mathbb{Z}$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณด้วยสเกลาร์

$$\begin{aligned} \alpha(A(n)*B(n)) &= \alpha \left[\sum_{k=1}^n (a_{ik}(n)*b_{kj}(n)) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \alpha(a_{ik}(n)*b_{kj}(n)) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \alpha a_{ik}(n)*b_{kj}(n) \right] \\ &= \alpha A(n)*B(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ และ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และการคูณด้วยฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} f(n)A(n) * B(n) &= \left[\sum_{k=1}^n (f(n)a_{ik}(n)) * b_{kj}(n) \right] \\ &= \left[f(n) \sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * b_{kj}(n) \right] \\ &= f(n)(A(n) * B(n)) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาค่าได้

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $A(n), B(n), C(n)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

$$A(n) * [B(n) * C(n)] = [A(n) * B(n)] * C(n)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

$$\begin{aligned} A(n) * [B(n) * C(n)] &= A(n) * \left[\sum_{k=1}^p b_{ik}(n) * c_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^p a_{iq}(n) * b_{qk}(n) * c_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^p \sum_{q=1}^n a_{iq}(n) * b_{qk}(n) * c_{kj}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{q=1}^n a_{iq}(n) * b_{qk}(n) \right] * C(n) \\ &= [A(n) * B(n)] * C(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนกับการคูณคอนโวลูชัน

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{m \times n}$ และ $r: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$(r(n) * A(n))^T = r(n) * A^T(n)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชันและฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\begin{aligned} (r(n) * A(n))^T &= [r(n) * a_{ij}(n)]^T \\ &= [r(n) * a_{ji}(n)] \\ &= r(n) * A^T(n) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{m \times n}$ และ $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{n \times p}(\mathbb{R})$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$(A(n) * B(n))^T = B^T(n) * A^T(n)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ โดยนิยามการคูณคอนโวลูชัน และฟังก์ชันค่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\begin{aligned} (A(n) * B(n))^T &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik}(n) * b_{kj}(n) \right]^T \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ki}(n) * b_{jk}(n) \right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^n b_{jk}(n) * a_{ki}(n) \right] \\ &= B^T(n) * A^T(n) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย

4.1 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์

นิยาม 4.1.1 ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ เรานิยามผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์ $A \otimes B: \mathbb{Z} \rightarrow M_{pm \times qn}(\mathbb{R})$ โดย

$$A(n) \otimes B(n) = [a_{ij}(n) * B(n)]$$

ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนดให้

$$A(n) = \begin{bmatrix} 2g(n) & g(n-1) \\ 1 & g(n+1) \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B(n) = \begin{bmatrix} h(n-2) \\ 0 \\ 3h(n) \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } g(n) = \begin{cases} 2 & ; n=2 \\ 4 & ; n=4 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases} \quad \text{และ} \quad h(n) = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ 2 & ; n=2 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$A(n) \otimes B(n) = \begin{bmatrix} 2g(n) * \begin{bmatrix} h(n-2) \\ 0 \\ 3h(n) \end{bmatrix} & g(n-1) * \begin{bmatrix} h(n-2) \\ 0 \\ 3h(n) \end{bmatrix} \\ 1 * \begin{bmatrix} h(n-2) \\ 0 \\ 3h(n) \end{bmatrix} & g(n+1) * \begin{bmatrix} h(n-2) \\ 0 \\ 3h(n) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 2g(n) * h(n-2) & g(n-1) * h(n-2) \\ 2g(n) * 0 & g(n-1) * 0 \\ 2g(n) * 3h(n) & g(n-1) * 3h(n) \\ 1 * h(n-2) & g(n+1) * h(n-2) \\ 1 * 0 & g(n+1) * 0 \\ 1 * 3h(n) & g(n+1) * 3h(n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)h(n-k-2) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k-1)h(n-k-2) \\ 0 & 0 \\ 6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)h(n-k) & 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k-1)h(n-k) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k-2) & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k+1)h(n-k-2) \\ 0 & 0 \\ 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) & 3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k+1)h(n-k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \{ \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 16, 0, 16, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 8, 0, 8, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow \\ 0 & 0 \\ \{ \dots, 0, 0, 0, 12, 0, 48, 0, 48, 0, \dots \} & \{ \dots, 0, 0, 0, 6, 0, 24, 0, 24, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow \\ \{ \dots, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots \} & \{ \dots, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 8, 0, 8, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow \\ 0 & 0 \\ \{ \dots, 9, 9, 9, 9, 9, 9, \dots \} & \{ \dots, 0, 0, 6, 0, 24, 0, 24, 0, \dots \} \\ \uparrow & \uparrow \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 สมบัติผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 4.2.1 สมบัติผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์

ให้ A, B, C เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

สมมติว่า A, B, C เป็นเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

1. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $C \otimes (A + B) = (C \otimes A) + (C \otimes B)$
4. $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B)$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $(f * A) \otimes B = f * (A \otimes B)$
6. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
7. $\Lambda_p \otimes \Lambda_q = \Lambda_{pq}$
8. $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$

บทพิสูจน์ ให้ $n \in \mathbb{Z}$

1. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{r \times s}(\mathbb{R})$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 ((A \otimes B) \otimes C)(n) &= [a_{ij}(n) * B(n)] \otimes C(n) \\
 &= [(a_{ij}(n) * b_{ij}(n)) * C(n)] \\
 &= [a_{ij}(n) * (b_{ij}(n) * C(n))] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.2} \\
 &= A(n) \otimes [b_{ij}(n) * C(n)] \\
 &= A(n) \otimes (B(n) \otimes C(n)) \\
 &= (A \otimes (B \otimes C))(n)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{r \times s}(\mathbb{R})$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 ((A+B) \otimes C)(n) &= (A(n) + B(n)) \otimes C(n) \\
 &= [a_{ij}(n) + b_{ij}(n)] \otimes C(n) \\
 &= [(a_{ij}(n) + b_{ij}(n)) * C(n)] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.1} \\
 &= [a_{ij}(n) * C(n) + b_{ij}(n) * C(n)] \\
 &= (A(n) \otimes C(n)) + (B(n) \otimes C(n)) \\
 &= ((A \otimes C) + (B \otimes C))(n)
 \end{aligned}$$

3. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $C(n) = [c_{ij}(n)] \in M_{r \times s}(\mathbb{R})$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (C \otimes (A+B))(n) &= C(n) \otimes (A(n) + B(n)) \\
 &= [c_{ij}(n) * (A(n) + B(n))] \\
 &= [c_{ij}(n) * A(n) + c_{ij}(n) * B(n)] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.1} \\
 &= (C(n) \otimes A(n)) + (C(n) \otimes B(n)) \\
 &= ((C \otimes A) + (C \otimes B))(n)
 \end{aligned}$$

4. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 ((\alpha A) \otimes B)(n) &= [(\alpha a_{ij})(n) * B(n)] \\
 &= [\alpha (a_{ij}(n) * B(n))] \\
 &= \alpha [a_{ij}(n) * B(n)] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.3} \\
 &= \alpha (A(n) \otimes B(n)) \\
 &= (\alpha (A \otimes B))(n)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
(\alpha(A \tilde{\otimes} B))(n) &= \alpha[a_{ij}(n) * B(n)] \\
&= \alpha[B(n) * a_{ij}(n)] \\
&= [\alpha B(n) * a_{ij}(n)] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.3} \\
&= [a_{ij}(n) * \alpha B(n)] \\
&= A(n) \tilde{\otimes} \alpha B(n) \\
&= (A \tilde{\otimes} \alpha B)(n)
\end{aligned}$$

5. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ และ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
((f * A) \tilde{\otimes} B)(n) &= (f(n) * A(n)) \tilde{\otimes} B(n) \\
&= (f(n) * a_{ij}(n)) * B(n) \\
&= f(n) * (a_{ij}(n) * B(n)) && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.2} \\
&= f(n) * (A(n) \tilde{\otimes} B(n))
\end{aligned}$$

6. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ และ $B(n) = [b_{ij}(n)] \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(A \tilde{\otimes} B)^T(n) &= [a_{ij}(n) * B(n)]^T \\
&= [a_{ij}(n) * B(n)]^T \\
&= [a_{ji}(n) * B(n)^T] && \text{โดยทฤษฎีบท 3.2.5} \\
&= A(n)^T \tilde{\otimes} B(n)^T \\
&= (A^T \tilde{\otimes} B^T)(n)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_p \tilde{\otimes} \Lambda_q)(n) &= \begin{bmatrix} \delta(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(n) \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \Lambda_q(n) \\
 &= \begin{bmatrix} \delta(n) * \Lambda_q(n) & 0 * \Lambda_q(n) & \cdots & 0 * \Lambda_q(n) \\ 0 * \Lambda_q(n) & \delta(n) * \Lambda_q(n) & \cdots & 0 * \Lambda_q(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 * \Lambda_q(n) & 0 * \Lambda_q(n) & \cdots & \delta(n) * \Lambda_q(n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Lambda_q(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_q(n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_q(n) \end{bmatrix} \\
 &= \Lambda_{pq}(n)
 \end{aligned}$$

9. ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (A \tilde{\otimes} 0)(n) &= A(n) \tilde{\otimes} 0(n) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} * 0(n) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} * 0(n) & \cdots & a_{1n} * 0(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * 0(n) & \cdots & a_{mn} * 0(n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
(0 \otimes A)(n) &= 0(n) \otimes A(n) \\
&= \begin{bmatrix} 0(n) & \cdots & 0(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0(n) & \cdots & 0(n) \end{bmatrix} * A(n) \\
&= \begin{bmatrix} 0(n) * A(n) & \cdots & 0(n) * A(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0(n) * A(n) & \cdots & 0(n) * A(n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ A, B, C, D เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาค่าได้

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $A(n), B(n), C(n), D(n)$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการต่อไปนี้ได้
จะได้ว่า

$$(A \otimes B) * (C \otimes D) = (A * C) \otimes (B * D)$$

บทพิสูจน์

ให้ $A(n) = [a_{ih}(n)]$ และ $C(n) = [c_{hj}(n)]$ โดยนิยามผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์
 $(A \otimes B)(n) = [a_{ih}(n) * B(n)]$ และ $(C \otimes D)(n) = [c_{hj}(n) * D(n)]$ บล็อกของแถวที่ i หลักที่ j
ของ $(A \otimes B)(n) * (C \otimes D)(n)$ คือ

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^n (a_{ih}(n) * B(n)) * (c_{hj}(n) * D(n)) &= \sum_{h=1}^n (a_{ih}(n) * c_{hj}(n)) * (B(n) * D(n)) \\
&= \left[\sum_{h=1}^n (a_{ih}(n) * c_{hj}(n)) \right] * (B(n) * D(n))
\end{aligned}$$

ตำแหน่งที่ i, j ของ $(A * C)(n)$ คือ $\sum_{h=1}^n a_{ih}(n) * c_{hj}(n)$

บล็อกที่ i, j ของ $(A \otimes C)(n) * (B \otimes D)(n)$ คือ $\left[\sum_{h=1}^n (a_{ih}(n) * c_{hj}(n)) \right] * (B(n) * D(n))$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทแทรก 4.2.1 ให้ A, B เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาค่าได้

ให้ $k \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า A, B เป็นเมทริกซ์สัญญานเวลาเต็มหน่วยที่มีขนาดที่ทำให้สามารถดำเนินการในแต่ ละข้อต่อไปนี้ได้ จะได้ว่า

$$1. (A_1 \tilde{\otimes} A_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k) * (B_1 \tilde{\otimes} B_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k) = (A_1 * B_1) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} (A_k * B_k)$$

$$2. (A_1 \tilde{\otimes} B_1) * (A_2 \tilde{\otimes} B_2) * \dots * (A_k \tilde{\otimes} B_k) = (A_1 * A_2 \dots * A_k) \tilde{\otimes} (B_1 * B_2 \dots * B_k)$$

บทพิสูจน์

1. พิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ P_k แทนข้อความ

$$((A_1 \tilde{\otimes} A_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k) * (B_1 \tilde{\otimes} B_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k))(n) = ((A_1 * B_1) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} (A_k * B_k))(n)$$

ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

จะเห็นว่า $((A_1 \tilde{\otimes} A_2) * (B_1 \tilde{\otimes} B_2))(n) = ((A_1 * B_1) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2))(n)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย สมมติว่า P_k เป็นจริง

จะแสดงว่า P_{k+1} เป็นจริง

$$\begin{aligned} & ((A_1 \tilde{\otimes} A_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k \tilde{\otimes} A_{k+1}) * (B_1 \tilde{\otimes} B_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k \tilde{\otimes} B_{k+1}))(n) \\ &= [(A_1(n) \tilde{\otimes} A_2(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k(n)) \tilde{\otimes} A_{k+1}(n)] * [(B_1(n) \tilde{\otimes} B_2(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k(n)) \tilde{\otimes} B_{k+1}(n)] \\ &= [(A_1(n) \tilde{\otimes} A_2(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k(n)) * (B_1(n) \tilde{\otimes} B_2(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k(n))] \tilde{\otimes} [A_{k+1} * B_{k+1}](n) \\ &= [(A_1 * B_1)(n) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2)(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} (A_k * B_k)(n)] \tilde{\otimes} [A_{k+1} * B_{k+1}](n) \\ &= (A_1 * B_1)(n) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2)(n) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} (A_k * B_k)(n) \tilde{\otimes} (A_{k+1} * B_{k+1})(n) \\ &= (A_1 * B_1 \tilde{\otimes} A_2 * B_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k * B_k \tilde{\otimes} A_{k+1} * B_{k+1})(n) \end{aligned}$$

$\therefore P_{k+1}$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $(A_1 \tilde{\otimes} A_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} A_k) * (B_1 \tilde{\otimes} B_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} B_k) = (A_1 * B_1) \tilde{\otimes} (A_2 * B_2) \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} (A_k * B_k)$

เป็นจริงสำหรับ $k \in \mathbb{Z}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. พิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ P_k แทนข้อความ

$$\left((A_1 \tilde{\otimes} B_1) * (A_2 \tilde{\otimes} B_2) * \dots * (A_k \tilde{\otimes} B_k) \right) (n) = \left((A_1 * A_2 \dots * A_k) \tilde{\otimes} (B_1 * B_2 \dots * B_k) \right) (n)$$

ขั้นฐาน สมมติว่า $P(2)$ เป็นจริง

$$\text{จะเห็นว่า } \left((A_1 \tilde{\otimes} B_1) * (A_2 \tilde{\otimes} B_2) \right) (n) = \left((A_1 * A_2) \tilde{\otimes} (B_1 * B_2) \right) (n) \text{ เป็นจริง}$$

ขั้นอุปนัย สมมติ P_k เป็นจริง

จะแสดงว่า P_{k+1} เป็นจริง

$$\begin{aligned} & \left((A_1 \tilde{\otimes} B_1) * (A_2 \tilde{\otimes} B_2) * \dots * (A_k \tilde{\otimes} B_k) * (A_{k+1} \tilde{\otimes} B_{k+1}) \right) (n) \\ &= \left[(A_1(n) \tilde{\otimes} B_1(n)) * (A_2(n) \tilde{\otimes} B_2(n)) * \dots * (A_k(n) \tilde{\otimes} B_k(n)) \right] * (A_{k+1}(n) \tilde{\otimes} B_{k+1}(n)) \\ &= \left[((A_1 * A_2)(n) * \dots * A_k(n)) \tilde{\otimes} ((B_1 * B_2)(n) * \dots * B_k(n)) \right] * (A_{k+1}(n) \tilde{\otimes} B_{k+1}(n)) \\ &= \left[(A_1 * A_2 * \dots * A_k)(n) * A_{k+1}(n) \right] \tilde{\otimes} \left[(B_1 * B_2 * \dots * B_k)(n) * B_{k+1}(n) \right] \\ &= \left((A_1 * A_2 * \dots * A_k * A_{k+1}) \tilde{\otimes} (B_1 * B_2 * \dots * B_k * B_{k+1}) \right) (n) \end{aligned}$$

$\therefore P_{k+1}$ เป็นจริง

$$\text{สรุปได้ว่า } (A_1 \tilde{\otimes} B_1) * (A_2 \tilde{\otimes} B_2) * \dots * (A_k \tilde{\otimes} B_k) = (A_1 * A_2 \dots * A_k) \tilde{\otimes} (B_1 * B_2 \dots * B_k)$$

เป็นจริงสำหรับ $k \in \mathbb{Z}$

บทแทรก 4.2.2 ให้ $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ และ $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$

จะได้ว่า $(A \tilde{\otimes} \Lambda)^k = A^k \tilde{\otimes} \Lambda$ และ $(\Lambda \tilde{\otimes} B)^k = \Lambda \tilde{\otimes} B^k$ สำหรับ $k=1,2,\dots$ และสำหรับพหุนาม $p(t)$ ใด $p(A \tilde{\otimes} \Lambda) = p(A) \tilde{\otimes} \Lambda$ และ $p(\Lambda \tilde{\otimes} B) = \Lambda \tilde{\otimes} p(B)$ เมื่อ $A^0 = B^0 = \Lambda$

บทพิสูจน์

จาก บทแทรก 4.2.1 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$(A \tilde{\otimes} \Lambda)^k = (A \tilde{\otimes} \Lambda) * (A \tilde{\otimes} \Lambda) * \dots * (A \tilde{\otimes} \Lambda) = (A * A * \dots * A) \tilde{\otimes} (\Lambda * \Lambda * \dots * \Lambda) = A^k \tilde{\otimes} \Lambda \text{ และ}$$

$$(\Lambda \tilde{\otimes} B)^k = (\Lambda \tilde{\otimes} B) * (\Lambda \tilde{\otimes} B) * \dots * (\Lambda \tilde{\otimes} B) = (\Lambda * \Lambda * \dots * \Lambda) \tilde{\otimes} (B * B * \dots * B) = \Lambda \tilde{\otimes} B^k$$

ให้ $p(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i$ เมื่อ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} p(A \tilde{\otimes} \Lambda)(n) &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * (A \tilde{\otimes} \Lambda)^i(n) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * (A^i(n) \tilde{\otimes} \Lambda(n)) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * A^i(n) \tilde{\otimes} \Lambda(n) \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i * A^i(n) \right) \tilde{\otimes} \Lambda(n) \\ &= p(A(n)) \tilde{\otimes} \Lambda(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } p(\Lambda \tilde{\otimes} B)(n) &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * (\Lambda \tilde{\otimes} B)^i(n) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * (\Lambda(n) \tilde{\otimes} B^i(n)) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i * \Lambda(n) \tilde{\otimes} B^i(n) \\ &= \Lambda(n) \tilde{\otimes} \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i * B^i(n) \right) \\ &= \Lambda(n) \tilde{\otimes} p(B(n)) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 4.2.1 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{R})$ หาผกผันได้ (invertible) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $B \in M_n(\mathbb{R})$ ที่ทำให้

$$AB = I = BA$$

เรียก B ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย A^{-1}

นิยาม 4.2.2 เมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ หาผกผันได้ (invertible) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ ที่ทำให้

$$A * B = \Lambda_n = B * A \quad \text{เมื่อ} \quad \Lambda_n = \begin{bmatrix} \delta(n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \delta(n) & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta(n) \end{bmatrix}$$

เรียก B ว่า เมทริกซ์สัญญาณผกผันของ A เขียนแทนด้วย $A^{(-1)}$

กรณี เมทริกซ์ขนาด 1×1 $\det A(n) = a_{11}(n)$

กรณี เมทริกซ์ขนาด 2×2 $\det A(n) = a_{11}(n) * a_{22}(n) - a_{21}(n) * a_{12}(n)$

กรณี เมทริกซ์ขนาด $(k+1) \times (k+1)$ $\det A(n)_{(k+1) \times (k+1)}$ เกิดจากสมาชิกตำแหน่งที่ i, j ของเมทริกซ์ $A(n)_{(k+1) \times (k+1)}$ คอนโวลูชันกับ $\det A(n)_{k \times k}$ ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i กับหลักที่ j ของ $A(n)_{(k+1) \times (k+1)}$

นิยาม 4.2.3 ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ตัวกำหนดของ $A(n)$

ถ้าเรานิยาม $\det A$ ขนาด $k \times k$ แล้วเรานิยาม $\det A$ ขนาด $(k+1) \times (k+1)$ โดย

$$\det A(n)_{(k+1) \times (k+1)} = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij}(n) * M_{ij}(n)_{k \times k}$$

เมื่อ $M_{ij}(n)_{k \times k}$ คือ $\det A(n)_{k \times k}$ ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i กับหลักที่ j ของ $A(n)_{(k+1) \times (k+1)}$

โดยเราเรียก $M_{ij}(n)$ ว่า ไมเนอร์

นิยาม 4.2.4 ให้ $A(n) = [a_{ij}(n)] \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ตัวผกผันของ $A(n)$

นิยามโดย

$$A^{(-1)}(n) = [q_{ij}(n)], q_{ij}(n) = (\det A(n))^{(-1)} * \text{adj } A(n)$$

นิยาม 4.2.5 ให้เมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_{m \times m}(\mathbb{R})$ จะได้ว่า

$$\text{adj}(A(n)) = [C_{ij}(A(n))]^T = [(-1)^{i+j} M_{ij}(n)]^T = [(-1)^{i+j} M_{ji}(n)]$$

ตัวอย่าง 4.2.1 การหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ 2×2

$$A(n) = \begin{bmatrix} 3g(n) & g(n-1) \\ g(n+1) & \frac{1}{2}g(n) \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } g(n) = \begin{cases} |n| & ; -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & ; \text{อื่น} \end{cases}$$

$$\det A(n) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij}(n) * M_{ij}(n)$$

$$\det A(n) = (3g(n) * \frac{1}{2}g(n)) - (g(n-1) * g(n+1))$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)g(n-k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k-1)g(n-k+1)$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \dots, 0, 4, 4, 1, 4, 10, 4, 1, 4, 4, 0, \dots \right\} - \left\{ \dots, 0, 4, 4, 1, 4, 10, 4, 1, 4, 4, 0, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, 0, 6, 6, \frac{3}{2}, 6, 15, 6, \frac{3}{2}, 6, 6, 0, \dots \right\} - \left\{ \dots, 0, 4, 4, 1, 4, 10, 4, 1, 4, 4, 0, \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots, 0, 2, 2, \frac{1}{2}, 2, 5, 2, \frac{1}{2}, 2, 2, 0, \dots \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.2.3 ถ้าเมทริกซ์ A หาผกผันได้แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์

สมมติ B_1 และ B_2 เป็นตัวผกผันของ A

นั่นคือ $A * B_1 = \Lambda_n = B_1 * A$ และ $A * B_2 = \Lambda_n = B_2 * A$

จะได้ $B_2 = B_2 * \Lambda_n$

$$= B_2 * (A * B_1)$$

$$= (B_2 * A) * B_1$$

$$= \Lambda_n * B_1$$

$$= B_1$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้า $A: \mathbb{Z} \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ และ $B: \mathbb{Z} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ หาผกผันได้แล้ว $A * B$

หาผกผันได้โดยที่

$$(A * B)^{\{-1\}} = B^{\{-1\}} * A^{\{-1\}}$$

บทพิสูจน์

$$(A(n) * B(n)) * (B^{\{-1\}}(n) * A^{\{-1\}}(n)) = A(n) * (B(n) * B^{\{-1\}}(n)) * A^{\{-1\}}(n)$$

$$= A(n) * \Lambda(n) * A^{\{-1\}}(n)$$

$$= A(n) * A^{\{-1\}}(n)$$

$$= \Lambda(n)$$

$$(B^{\{-1\}}(n) * A^{\{-1\}}(n)) * (A(n) * B(n)) = B^{\{-1\}}(n) * (A^{\{-1\}}(n) * A(n)) * B(n)$$

$$= B^{\{-1\}}(n) * \Lambda(n) * B(n)$$

$$= B^{\{-1\}}(n) * B(n)$$

$$= \Lambda(n)$$

สรุปว่า $A(n) * B(n)$ หาผกผันได้โดยที่ $(A(n) * B(n))^{\{-1\}} = B(n)^{\{-1\}} * A(n)^{\{-1\}}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.2.5 $\text{adj } A(n) * A(n) = \det(A(n)) * \Lambda(n) = A(n) * \text{adj } A(n)$

บทพิสูจน์

$$\text{ให้ } A(n) * \text{adj } A(n) = [u_{ij}(n)]$$

$$\text{จะแสดงว่า } u_{ij}(n) = \begin{cases} \det A & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{เราเขียน } A(n) = [a_{ij}(n)] \text{ และ } \text{adj } A(n) = [C_{ij}(A(n))]^T$$

จากนิยามการคูณเมทริกซ์ เราจะเขียน u_{ij} ให้อยู่ในรูปของแถวที่ i ของเมทริกซ์ A คูณกับหลักที่ j

ของ $\text{adj } A(n)$ โดยที่แถวที่ i ของ A คือ $[a_{i1}(n) a_{i2}(n) \dots a_{in}(n)]$ และหลักที่ j ของ $\text{adj } A(n)$

คือ $[C_{ij}(A(n))]^T$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_{ij}(n) &= [a_{i1}(n) a_{i2}(n) \dots a_{in}(n)] * \begin{bmatrix} C_{j1}(A(n)) \\ C_{j2}(A(n)) \\ \vdots \\ C_{jn}(A(n)) \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}(n) * C_{j1}(A(n)) + a_{i2}(n) * C_{j2}(A(n)) + \dots + a_{in}(n) * C_{jn}(A(n)) \end{aligned}$$

ถ้า $i = j$ จะได้ว่า

$$a_{i1}(n) * C_{j1}(A(n)) + \dots + a_{in}(n) * C_{jn}(A(n)) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} a_{ij}(n) * M_{1j} = \det A(n)$$

ถ้า $i \neq j$ ให้ $A'(n) = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}]$ และ $\text{adj } A'(n) = [C_{ik} A'(n)]^T$ โดยที่ $k = 1, 2, \dots, n$

$\therefore [u_{ij}(n)] = \det A'(n)$ แต่ $\det A'(n) = 0$ เพราะว่า $A'(n)$ มี 2 แถวที่เหมือนกัน

ดังนั้น $u_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

สรุปว่า $\text{adj } A(n) * A(n) = \det(A(n)) * \Lambda(n) = A(n) * \text{adj } A(n)$

ทฤษฎีบท 4.2.6 ถ้า $A, B: \mathbb{Z} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ หาผกผันได้แล้ว $A \otimes B$ หาผกผันได้โดยที่

$$(A \otimes B)^{(-1)} = A^{(-1)} \otimes B^{(-1)}$$

บทพิสูจน์

$$\begin{aligned} (A(n) \otimes B(n)) * (A^{(-1)}(n) \otimes B^{(-1)}(n)) &= (A(n) * A^{(-1)}(n)) \otimes (B(n) * B^{(-1)}(n)) \\ &= \Lambda(n) \otimes \Lambda(n) \\ &= \Lambda(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{(-1)}(n) \otimes B^{(-1)}(n)) * (A(n) \otimes B(n)) &= (A^{(-1)}(n) * A(n)) \otimes (B^{(-1)}(n) * B(n)) \\ &= \Lambda(n) \otimes \Lambda(n) \\ &= \Lambda(n) \end{aligned}$$

สรุปว่า $A(n) \otimes B(n)$ หาผกผันได้โดยที่ $(A \otimes B)^{(-1)} = A^{(-1)} \otimes B^{(-1)}$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ในการจัดทำปัญหาพิเศษหัวข้อ ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย สามารถสรุปผลการดำเนินการวิจัยได้ ดังนี้

5.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย

ในปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อขยายแนวความคิดผลคูณคอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์แบบปรกติ เราจึงได้ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย และพบว่าผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วยมีสมบัติดังนี้

- การเปลี่ยนกลุ่ม
- การแจกแจงทางซ้ายเหนือการบวก
- การแจกแจงทางขวาเหนือการบวก
- การคูณด้วยสเกลาร์
- ผลคูณคอนโวลูชันกับฟังก์ชันค่าจริง
- การสลับเปลี่ยน
- การมีเอกลักษณ์
- $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$
- การยกกำลัง
- การหาผกผันได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์สำหรับเมทริกซ์สัญญาณเวลาเต็มหน่วย มีสมบัติบางประการแตกต่างจากการคูณของเมทริกซ์แบบปรกติจึงเป็นคำถามต่อไปว่า ถ้าหากขยายแนวความคิดไปยังผลคูณแบบอื่นๆนอกเหนือจากนี้ เช่น ผลคูณฮาดามาร์ด คุณสมบัติบางประการยังเป็นจริงอยู่หรือไม่



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] John G.Proakis and Dimitris G.Manolakis. (1988).Introduction To Digital Signal Processing. (ThirdEdition).New York: Macmillan Publishing Company. And London: CollierMacmillan Publishin.pp-35-78
- [2] Zhang, H., and Ding, F. (2013). On the Kronecker Products and Their Applications. Journal of Applied Mathematics. vol. 2013
- [3] ขวัญจิรา ทาทิตย์, ทศพล คำไหล และอดิศร กิตติโสภากรณ์ (2559).ผลคูณบ็อกซ์คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์ได้,18-38

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้