สมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ๊อคซ์
สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน
ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE BOX MEET
FOR MATRICES OVER A BOOLEAN ALGEBRA

ธีระชัย ใจเรือง

นัฏฐิณี สิทธิจินดา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE BOX MEET FOR MATRICES OVER A BOOLEAN ALGEBRA

THIRACHAI CHAIRUANG
NATTINEE SITTIJINDA

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ็อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน Algebraic Properties of the Box Meet for Matrices over a Boolean Algebra
ชื่อนักศึกษา	นายธีระชัย ใจเรือง รหัสนักศึกษา 58050079 นางสาวนัฏฐิณี สิทธิจินดา รหัสนักศึกษา 58050091
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร (ประธานกรรมการ)	ธวัชชัย
ดร.พุทธพร วานิชกร (กรรมการ)	พุทธพร วานิชกร
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม (คณะกรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา)	[illegible]
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ (คณะกรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม)	[illegible]

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน
ชื่อนักศึกษา	นายธีระชัย ใจเรือง รหัสนักศึกษา 58050079
	นางสาวนัฏฐิณี สิทธิจินดา รหัสนักศึกษา 58050091
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาการดำเนินการพีชคณิตต่าง ๆ สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ เรานิยมผลมีทบ๊อคซ์ของเมทริกซ์ดังกล่าวและพิจารณาตรวจสอบความสัมพันธ์ของผลมีทกับการดำเนินการแบบอื่นสำหรับเมทริกซ์การดำเนินการนี้ครอบคลุมการมีทและการมีทฮาดามาร์ดเป็นกรณีเฉพาะผลมีทบ๊อคซ์มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการเช่น การเปลี่ยนกลุ่ม การมีเอกลักษณ์ และการแจกแจงทางซ้าย และทางขวาเหนือการจอยน์ฮาดามาร์ด นอกจากนี้ผลมีทบ๊อคซ์เข้ากันได้กับ การมีทด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน และผลมีทโครเนคเคอร์ ยิ่งกว่านั้นผู้วิจัยสามารถแปลงผลมีทบ๊อคซ์ของเมทริกซ์เป็นผลมีทของเมทริกซ์ที่สอดคล้องภายใต้การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

คำสำคัญ : การดำเนินการบูลีน การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน ผลมีทบ๊อคซ์ พีชคณิตบูลีน

Title	Algebraic Properties of the Box Meet for Matrices over a Boolean Algebra
Students	Mr. Thirachai Chairuang Stuednt ID 58050079
	Miss Nattinee Sittijinda Stuednt ID 58050091
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Academic Year	2018
Advisor	Asst.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam
Co - Advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert

Abstract

In this paper, we study algebraic operation for matrices over an arbitrary Boolean algebra. We define the box meet for these matrices and investigate its connectios with another matrix operation. This operation includes the meet and the Hadamard meet as special cases. The box meet has a number of attractive properties such as associativity, possessing the identity, and left/ right distributivity over the Hadamard join. In addition, the box meet is compatible with the scalar meet, the transposition, and the Kronecker meet. Moreover, we can transform the box meet of matrices to the meet of associated matrices under Johnson-Nylen transformation.

Keywords : Boolean Algebra, Boolean Operator, Box Meet, Johnson-Nylen transformation

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี จากการให้ความช่วยเหลือและคำแนะนำของ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยมและดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ให้ความรู้ ข้อคิดเห็นต่าง ๆ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นระหว่างดำเนินงานมาโดยตลอด ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ที่กรุณาให้เกียรติเป็นประธาน โดยมี ดร.พุทธพร วานิชกร เป็นกรรมการในการสอบปัญหาพิเศษ ซึ่งได้กรุณาตรวจสอบแก้ไขปัญหาพิเศษเล่มนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ท้ายนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดา มารดาและครอบครัว ซึ่งเปิดโอกาสให้ได้รับการศึกษาเข้าเรียน ตลอดจนคอยช่วยเหลือและให้กำลังใจผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา

นายธีระชัย ใจเรือง

นางสาวนัฏฐิณี สิทธิจินดา

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

จากความรู้พื้นฐานที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เมทริกซ์มีบทบาทสำคัญอย่างมากในการศึกษาเกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นและในแขนงอื่น ๆ มีการนำเอาเมทริกซ์ไปประยุกต์ใช้ในการพัฒนางานวิจัยต่าง ๆ ซึ่งที่ปรากฏเห็นอย่างชัดเจนคืองานวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาผลคูณเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากโครงสร้างเชิงพีชคณิต เช่น กึ่งริง(semiring) และกึ่งริงสลับที่(commutative semiring) เป็นต้น และมีการขยายแนวคิดไปสู่ผลคูณอื่น ๆ เช่น การคูณเมทริกซ์แบบโครเนคเคอร์ การคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ด เป็นต้น ในแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้นได้เกิดองค์ความรู้ใหม่จนนักวิจัยสามารถคิดค้นผลคูณแบบบ๊อคซ์ขึ้นมา

ผู้วิจัยจึงเกิดแนวคิดใหม่ที่ได้จากการศึกษาผลคูณแบบบ๊อคซ์ดังกล่าวมาพัฒนากับโครงสร้างเชิงพีชคณิตแบบอื่น ๆ นั่นคือโครงสร้างเชิงพีชคณิตแบบบูลีน โดยสนใจเกี่ยวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตต่าง ๆ ของเมทริกซ์ อันประกอบไปด้วย การมีทเมทริกซ์ โดยในงานวิจัย(Johnson and Nylen, 1991) ที่เราเคยศึกษามานั่นคือได้กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $mp\times nr$ และ $mq\times nr$ ตามลำดับ โดยรูปแบบการแบ่งบล็อกแบบเดียวกันและ A มีแต่ละเมทริกซ์ย่อยเป็น A_{ij} ขนาด $p\times q$ และ B มีแต่ละเมทริกซ์ย่อยเป็น B_{ij} ขนาด $p\times r$ ผลคูณบ๊อคซ์ของ A และ B นิยามเป็นเมทริกซ์ที่มีบล็อกย่อยที่ (i,j) เป็น $A_{ij}\wedge B_{ij}$ ผู้วิจัยจึงนำเอาบทนิยามที่เคยศึกษามา มาขยายแนวคิดให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น และในกรณีเฉพาะที่ $m=n=1$ และเมทริกซ์ A และ B มีเพียงบล็อกเดียว จะได้ว่าผลมีทบ๊อคซ์จะกลายเป็นผลมีทเมทริกซ์แบบปกติ ส่วนในกรณี $p=q=r=1$ จะได้ว่าผลมีทบ๊อคซ์ลดรูปเป็นผลมีทฮาดามาร์ด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Diamond$ และพิสูจน์สมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของการดำเนินการข้างต้น จึงเป็นที่มาของการจัดทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้

1.2 วัตถุประสงค์

1. ให้นิยามของการดำเนินการพื้นฐานทางพีชคณิตของเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ และพิสูจน์สมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของการดำเนินการข้างต้น

2. ขยายแนวคิดของผลมีทแบบปกติไปสู่ผลมีทบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ และพิสูจน์สมบัติของผลมีทดังกล่าวที่สัมพันธ์กับการดำเนินการพีชคณิตในข้อ1.

1.3 ขอบเขตของปัญหา

พิจารณาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ๊อคซ์ของเมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ อันได้แก่ การสลับที่ (commutativity) การเปลี่ยนกลุ่ม (associativity) การมีเอกลักษณ์ (Identity) การสลับเปลี่ยน (Transpose) การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาเหนือการจอยน์และความสัมพันธ์ผลมีทดังกล่าวกับการมีทด้วยสเกลาร์ นิเสธ การสลับเปลี่ยนและรอยเมทริกซ์เป็นต้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. รู้และเข้าใจโครงสร้างเกี่ยวกับพีชคณิตบูลีน
2. เกิดการวิเคราะห์แก้ปัญหากระบวนการทางคณิตศาสตร์
3. เป็นองค์ความรู้ที่สามารถนำไปต่อยอดในการทำวิจัยในระดับขั้นสูง

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. เลือกหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ
2. ค้นคว้ารวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ
3. ศึกษาความรู้ในพีชคณิตเกี่ยวกับโครงสร้างทางพีชคณิตบูลีน
4. ศึกษาสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์
5. ศึกษาสมบัติของผลมีทบ๊อคซ์เมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ
6. รวบรวมตัวอย่างการมีทแบบต่าง ๆ ของผลมีทบ๊อคซ์
7. จัดทำเล่มรายงานและนำเสนอปัญหาพิเศษ

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาขั้นตอนการดำเนินการ

ขั้นตอนในการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2561					ปี 2562			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย
1. เลือกหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ									
2. ค้นคว้ารวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ									
3. ศึกษาความรู้ในพีชคณิตเกี่ยวกับโครงสร้างทาพีชคณิตบูลีน									
4. ศึกษาสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์									
5. ศึกษาสมบัติของผลมีทบ๊อคซ์เมทริกซ์ที่สมาชิกมาจากพีชคณิตบูลีนใด ๆ									
6. รวบรวมตัวอย่างการมีทแบบต่าง ๆ ของผลมีทบ๊อคซ์									
7. จัดทำเล่มรายงานและนำเสนอปัญหาพิเศษ									

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานในพีชคณิตบูลีน

2.1 การดำเนินการเอกภาค (unary operation) และการดำเนินการทวิภาค (binary operation)

บทนิยามที่ 2.1.1

ให้ A เป็นเซตใด ๆ เราเรียกฟังก์ชันจาก A ไปยัง A ว่าการดำเนินการเอกภาค (unary operation)

ตัวอย่างที่ 2.1.2 ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นการดำเนินการเอกภาค (unary operation)

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+5$
3. $f:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),\ f(A)=A^T$
4. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=n!$
5. $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=\sqrt{x}$
6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$

บทนิยามที่ 2.1.3

กำหนดให้ A เป็นเซตโดยที่ $A\neq\varnothing$ และ $A\times A=\{(a,b)|a,b\in A\}$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A เราเรียกฟังก์ชัน $*:A\times A\to A$ ว่าการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บนเซต A

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.4**</u> ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation)

1. $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(a,b)=a+b$

2. $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ +(a,b)=a+b$

3. $\times:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \times(a,b)=a\times b$

4. $-:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ -(a,b)=a-b$

5. $\div:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \div(a,b)=a\div b$

6. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f\ (a,b)=\gcd(a,b)$

7. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f\ (a,b)=\operatorname{lcm}(a,b)$

8. $f:P(X)\times P(X)\to P(X),\ f(A,B)=A\cap B$

9. $g:P(X)\times P(X)\to P(X),\ g(A,B)=A\cup B$

10. $\max:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \max(a,b)=$ ค่าสูงสุดระหว่าง a กับ b

11. $\min:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \min(a,b)=$ ค่าต่ำสุดระหว่าง a กับ b

2.2 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับโครงสร้างเชิงพีชคณิตของแลตทิซ

<u>บทนิยามที่ 2.2.1</u>

แลตทิซ (Lattice) เป็นโครงสร้างเชิงพีชคณิตที่ประกอบด้วย 3 สิ่งอันดับคือเซต $\mathcal{L}$ กับการดำเนินการทวิภาค 2 อย่าง คือการคูณและการบวก โดยกำหนด $(\mathcal{L},\times,+)$ เป็นแลตทิซ (Lattice) ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุก $a,b,c\in\mathcal{L}$

สมบัติปิดการคูณ

สำหรับแต่ละคู่อันดับ $(a,b)\in\mathcal{L}\times\mathcal{L}$

จะได้ว่า $ab\in\mathcal{L}$ ด้วย

สมบัติปิดการบวก

สำหรับแต่ละคู่อันดับ $(a,b)\in\mathcal{L}\times\mathcal{L}$

จะได้ว่า $a+b\in\mathcal{L}$ ด้วย

สมบัติการสลับที่การคูณ

$ab=ba$

สมบัติการสลับที่การบวก

$a+b=b+a$

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ

$a(bc)=(ab)c$

สมบัติการดูดกลืน

$a(a+b)=a$

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก

$a+(b+c)=(a+b)+c$

สมบัติการดูดกลืน

$a+ab=a$

เราจะพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับแลตทิซ โดยใช้บทนิยามข้างต้น

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.2.2</u> ให้ $\mathcal{L}$ เป็นแลตทิซและ $ab \in \mathcal{L}$ จะได้ $aa=a$

<u>บทพิสูจน์</u> $aa=a(a+ab)$ (จากสมบัติการดูดกลืน)

$=a$ (จากสมบัติการดูดกลืน)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.2.3</u> ให้ $\mathcal{L}$ เป็นแลตทิซและ $ab \in \mathcal{L}$ จะได้ $a+a=a$

<u>บทพิสูจน์</u> $a+a=a+aa$ (จากทฤษฎีบท 2.2.2)

$=a$ (จากสมบัติการดูดกลืน)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.2.4</u> ให้ $\mathcal{L}$ เป็นแลตทิซและ $ab \in \mathcal{L}$ ถ้า $ab=a$ แล้ว $a+b=b$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $ab=a$

$a+b=ab+b$ (จากสมมติฐาน)

$=b+ab$ (จากสมบัติการสลับที่การบวก)

$=b+ba$ (จากสมบัติการสลับที่การคูณ)

$=b$ (จากสมบัติการดูดกลืน)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.2.5</u> ให้ $\mathcal{L}$ เป็นแลตทิซและ $ab \in \mathcal{L}$ ถ้า $a+b=b$ แล้ว $ab=a$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $a+b=b$

$ab = a(a+b)$ (จากสมมติฐาน)

$= a$ (จากสมบัติการดูดกลืน)

ตัวอย่างแลตทิซที่สอดคล้องตามสมบัติข้างต้น

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.6</u> พิจารณา $\{0,1\}$ กับการดำเนินการทวิภาค

เรานิยาม $ab = a \wedge b$; $a,b \in \{0,1\}$

และ $a+b = a \vee b$; $a,b \in \{0,1\}$

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \{0,1\}$

สมบัติปิด

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ and "$\wedge$"

กรณี $a=1$ และ $b=1$

จะได้ว่า $a \wedge b = 1 \wedge 1 = 1$

กรณี $a=1$ และ $b=0$

จะได้ว่า $a \wedge b = 1 \wedge 0 = 0$

กรณี $a=0$ และ $b=1$

จะได้ว่า $a \wedge b = 0 \wedge 1 = 0$

กรณี $a=0$ และ $b=0$

จะได้ว่า $a \wedge b = 0 \wedge 0 = 0$

ดังนั้น $a \wedge b \in \{0,1\}$

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ or "$\vee$"

กรณี $a=1$ และ $b=1$

จะได้ว่า $a \vee b = 1 \vee 1 = 1$

กรณี $a=1$ และ $b=0$

จะได้ว่า $a \vee b = 1 \vee 0 = 1$

กรณี $a=0$ และ $b=1$

จะได้ว่า $a \vee b = 0 \vee 1 = 1$

กรณี $a=0$ และ $b=0$

จะได้ว่า $a \vee b = 0 \vee 0 = 0$

ดังนั้น $a \vee b \in \{0,1\}$

สมบัติการสลับที่

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ and "$\wedge$"

$a \wedge b = b \wedge a$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ or "$\vee$"

$a \vee b = b \vee a$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ and "$\wedge$"

$(a \wedge b) \wedge c = b \wedge (a \wedge c)$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ or "$\vee$"

$(a \vee b) \vee c = b \vee (a \vee c)$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

สมบัติการดูดกลืน

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ and "$\wedge$"

$a \wedge (a \vee b) = a$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ or "$\vee$"

$a \vee (a \wedge b) = a$ (จากกฎตรรกศาสตร์)

สรุปว่า $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ เป็นแลตทิซ

<u>**ตัวอย่างที่ 2.2.7**</u> พิจารณา $[0,1]$ กับการดำเนินการทวิภาค

เรานิยาม $ab = \min\{a,b\}$; $a,b \in [0,1]$

และ $a+b = \max\{a,b\}$; $a,b \in [0,1]$

<u>**บทพิสูจน์**</u> สำหรับแต่ละ $a,b,c \in [0,1]$

สมบัติปิด

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ min

$$ab = \min\{a,b\} = a;\ a \le b$$

$$ab = \min\{a,b\} = b;\ a \ge b$$

ดังนั้น $ab \in [0,1]$

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการ max

$$a+b = \max\{a,b\} = a;\ a \ge b$$

$$a+b = \max\{a,b\} = b;\ a \le b$$

ดังนั้น $a+b \in [0,1]$

สมบัติการสลับที่

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ min

$$ab = \min\{a,b\} = \min\{b,a\} = ba$$

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ max

$$a+b = \max\{a,b\} = \max\{b,a\} = b+a$$

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ min

$$\begin{aligned}(ab)c &= \min\{\min\{a,b\},c\}\\ &= \min\{a,b,c\}\\ &= \min\{a,\min\{b,c\}\}\\ &= a(bc)\end{aligned}$$

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ max

$$(a+b)+c = \max\{\max\{a,b\},c\}$$
$$= \max\{a,b,c\}$$
$$= \max\{a,\max\{b,c\}\}$$
$$= a+(b+c)$$

สมบัติการดูดกลืน

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ min

$$a(a+b) = \min\{a,\max\{a,b\}\}$$
$$= a$$

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ max

$$a+ab = \max\{a,\min\{a,b\}\}$$
$$= a$$

สรุปว่า $([0,1],\max,\min)$ เป็นแลตทิซ

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.8</u> ให้ A เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $A \neq \varnothing$

พิจารณา $P(A)$ กับการดำเนินการทวิภาค

สำหรับแต่ละ $X,Y \in P(A)$

เรานิยาม $XY = X \cap Y$

และ $X+Y = X \cup Y$

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $X,Y,Z \in P(A)$

สมบัติปิด

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชั่น "$\cap$"

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq A$$

ดังนั้น $X \cap Y \in P(A)$

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการยูเนียน "$\cup$"

$$X \cup Y \subseteq A \cup A = A$$

ดังนั้น $X \cup Y \in P(A)$

สมบัติการสลับที่

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชั่น "$\cap$"

$X \cap Y = Y \cap X$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการยูเนียน "$\cup$"

$X \cup Y = Y \cup X$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชั่น "$\cap$"

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการยูเนียน "$\cup$"

$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

สมบัติการดูดกลืน

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชั่น "$\cap$"

จะได้ว่า $X \cap (X \cup Y) = X$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการยูเนียน "$\cup$"

จะได้ว่า $X \cup (X \cap Y) = X$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

สรุปว่า $(P(A), \cap, \cup)$ เป็นแลตทิซภายใต้การดำเนินการข้างต้น

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.9</u> พิจารณาจำนวนนับ $\mathbb{N}$ กับการดำเนินการทวิภาค

สำหรับแต่ละ $a,b \in \mathbb{N}$

เรานิยาม $ab = \gcd(a,b)$

และ $a+b = \operatorname{lcm}(a,b)$

จำนวนนับ d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d|a$ และ $d|b$
2. สำหรับแต่ละ $d' \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $d'|a$ และ $d'|b$ จะได้ว่า $d'|d$

ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $d = \gcd(a,b)$

จำนวนนับ k จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $a|k$ และ $b|k$
2. สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a|k'$ และ $b|k'$ จะได้ว่า $k|k'$

ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $k = \operatorname{lcm}(a,b)$

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $a,b,c \in \mathbb{N}$

สมบัติปิด

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการดำเนินการ gcd

$\gcd(a,b) \in \mathbb{N}$ (จากบทนิยามของ ห.ร.ม.)

- สมบัติปิดภายใต้การดำเนินการดำเนินการ lcm

$\operatorname{lcm}(a,b) \in \mathbb{N}$ (จากบทนิยามของ ค.ร.น.)

สมบัติการสลับที่

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ gcd

$\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

- สมบัติการสลับที่ภายใต้การดำเนินการ lcm

$\operatorname{lcm}(a,b) = \operatorname{lcm}(b,a)$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ gcd

จะแสดงว่า $\gcd(a,\gcd(b,c)) = \gcd(\gcd(a,b),c)$

กำหนดให้ $x = \gcd(b,c)$

$u = \gcd(a,b)$

$v = \gcd(u,c)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\gcd(a,x) = v$

จะแสดงว่า 1. $v|a$ และ $v|x$

2. สำหรับแต่ละ $v' \in \mathbb{N}$ ถ้า $v'|a$ และ $v'|x$ แล้ว $v'|v$

1. จาก $v = \gcd(u,c)$

จะได้ $v|u$ และ $v|c$

($v|a$ และ $v|b$) และ $v|c$

จาก $v|b$ และ $v|c$

จะได้ $v|x$

ดังนั้น $v|a$ และ $v|x$

2. กำหนดให้ $v'|a$ และ $v'|x$

จะได้ $v'|a$, $v'|b$ และ $v'|c$

เนื่องจาก $v'|a$ และ $v'|b$ จะได้ $v'|\gcd(a,b)$ นั่นคือ $v'|u$

เนื่องจาก $v'|u$ และ $v'|c$ จะได้ $v'|\gcd(u,c)$ นั่นคือ $v'|v$

ดังนั้น $\gcd(a,\gcd(b,c)) = \gcd(\gcd(a,b),c)$

- สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การดำเนินการ lcm

จะแสดงว่า $\mathrm{lcm}(a,\mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(a,b),c)$

กำหนดให้ $x = \mathrm{lcm}(b,c)$

$u = \mathrm{lcm}(a,b)$

$v = \mathrm{lcm}(u,c)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\mathrm{lcm}(a,x) = v$

จะแสดงว่า 1. $a|v$ และ $x|v$

2. สำหรับแต่ละ $v' \in \mathbb{N}$ ถ้า $a|v'$ และ $x|v'$ แล้ว $v|v'$

1. จาก $v = \operatorname{lcm}(u,c)$

จะได้ $u|v$ และ $c|v$

($a|v$ และ $b|v$) และ $c|v$

จาก $b|v$ และ $c|v$

จะได้ $x|v$

ดังนั้น $a|v$ และ $x|v$

2. กำหนดให้ $v' \in \mathbb{N}$ โดยที่ $a|v'$ และ $x|v'$

จะได้ $a|v'$, $b|v'$ และ $c|v'$

เนื่องจาก $a|v'$ และ $b|v'$ จะได้ $\operatorname{lcm}(a,b)\,|v'$ นั่นคือ $u|v'$

เนื่องจาก $u|v'$ และ $c\,|v'$ จะได้ $\operatorname{lcm}(u,c)|\,v'$ นั่นคือ $v\,|v'$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c)$

สมบัติการดูดกลืน

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ gcd

จะแสดงว่า $\gcd(a,\operatorname{lcm}(a,b)) = a$

1. $a|a$ และ $a|\operatorname{lcm}(a,b)$
2. ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k|a$ และ $k|\operatorname{lcm}(a,b)$ จะได้ว่า $k|a$

ดังนั้น $\gcd(a,\operatorname{lcm}(a,b)) = a$

- สมบัติการดูดกลืนภายใต้การดำเนินการ lcm

จะแสดงว่า $\operatorname{lcm}(a,\gcd(a,b)) = a$

1. $a|a$ และ $\gcd(a,b)|a$
2. ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a|k$ และ $\gcd(a,b)|k$ จะได้ว่า $a|k$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}(a,\gcd(a,b)) = a$

สรุปว่า $(\mathbb{N},\gcd,\operatorname{lcm})$ เป็นแลตทิซ

2.3 ความสัมพันธ์ (Relation) และเซตอันดับบางส่วน (Partially ordered set)

บทนิยามที่ 2.3.1

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์ (Relation) จาก A ไปยัง B หมายถึงสับเซตของผลคูณคาร์ทีเชียน $A \times B$

บทนิยามที่ 2.3.2

ให้ A เป็นเซตใด ๆ เรานิยามความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation) จาก A ไปยัง A (สับเซตของ) หรือเรียกโดยย่อว่าความสัมพันธ์ใน A

ตัวอย่างที่ 2.3.3 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$r = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

นั่นคือ $r \subseteq A \times A$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน A

ตัวอย่างที่ 2.3.4 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4\}$

$$r = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$$

จะได้ว่า $(a,b) \in r \leftrightarrow a|b$

นั่นคือ $r \subseteq A \times A$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน A

บทนิยามที่ 2.3.5

ให้ P เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $P \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์บน P จะกล่าวว่า r เป็นอันดับบางส่วน (Partially ordered set) บนเซต P ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติกาะสะท้อน (reflextive) ปฏิสมมาตร (antisymmetric) และถ่ายทอด (transitive) เราเรียก (P,r) ว่าเซตอันอับบางส่วน (Partially ordered set) หรือโพเซต (poset)

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.6</u> จงแสดงว่าความสัมพันธ์มากกว่าหรือเท่ากับ "≥" เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

<u>บทพิสูจน์</u>

กำหนดให้ $a,b,c \in \mathbb{R}$

1.เนื่องจาก $a \geq a$ สำหรับทุก ๆ จำนวน a ที่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น มากกว่าหรือเท่ากับ มีสมบัติสะท้อน

2.ถ้า $a \geq b$ และ $b \geq a$ จะได้ $a=b$

ดังนั้น มากกว่าหรือเท่ากับ มีสมบัติปฏิบัติการ

3.เนื่องจาก เมื่อ $a \geq b$ และ $b \leq c$ จะได้ว่า $a \geq c$

ดังนั้น มากกว่าหรือเท่ากับ มีสมบัติการถ่ายทอด

นั่นคือ มากกว่าหรือเท่ากับ เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซตจำนวนจริง สรุปว่า $(\mathbb{R},\geq)$ เป็นโพเซต (poset)

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.7</u> จงแสดงว่าความสัมพันธ์การหารลงตัว "|" เป็นตวามสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$

<u>บทพิสูจน์</u>

กำหนดให้ $a,b,c \in \mathbb{N}$

1. $a|a$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

ดังนั้น การหารลงตัว มีสมบัติสะท้อน

2. ถ้า $a|b$ และ $b|a$ แล้ว $a=b$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $a|b$ และ $b|a$

นั่นคือ $\exists m \in \mathbb{Z}, b=am$ และ $\exists n \in \mathbb{Z}, a=bn$

จะได้ว่า $b=(bn)m$

$b=b(nm)$

$1=nm$

เนื่องจาก $n|1$ นั่นคือ $n=1$

จะได้ว่า $a=b(1)$

ดังนั้น $a=b$

ดังนั้น การหารลงตัว มีสมบัติปฏิสมมาตร

3. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

<u>บทพิสูจน์</u> สมบัติ $a|b$ และ $b|c$

นั่นคือ $\exists m \in \mathbb{Z}, b=am$ และ $\exists n \in \mathbb{Z}, b=am$

จะได้ว่า $c=(am)n$

$c=a(mn)$

ดังนั้น $a|c$ เนื่องจาก $m,n \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น การหารลงตัว"|"มีสมบัติการถ่ายทอด

นั่นคือ การหารลงตัวเป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วน บนเซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$

สรุปว่า $(\mathbb{N},|)$ เป็นโพเซต (poset)

<u>ตัวอย่าง 2.3.8</u> ให้ A เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $A\neq\varnothing$ จงแสดงว่าความสัมพันธ์การเป็นสับเซต "$\subseteq$"เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบน $P(A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

กำหนดให้ $X,Y,Z \in P(A)$

1. $X\subseteq X$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)

ดังนั้น $\subseteq$ มีสมบัติสะท้อน

2. ถ้า $X\subseteq Y$ และ $Y\subseteq X$ แล้ว $X=Y$

<u>บทพิสูจน์</u> จากนิยามการเท่ากันของเซต คือ $Y=X \leftrightarrow X\subseteq Y$ และ $Y\subseteq X$

นั่นคือถ้า $X\subseteq Y$ และ $Y\subseteq X$ แล้ว $X=Y$

ดังนั้น $\subseteq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร

3. ถ้า $X\subseteq Y$ และ $Y\subseteq Z$ แล้ว $X\subseteq Z$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $X\subseteq Y$ และ $Y\subseteq Z$ ให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในเอกสัมพัทธ์

สมมติ $a\in X$ เนื่องจาก $X\subseteq Y$

จะได้ว่า $a\in Y$ และ $Y\in Z$

จะได้ว่า $a\in Z$

ดังนั้น $X\in Z$

ดังนั้น $\subseteq$ มีสมบัติการถ่ายทอด

นั่นคือ $\subseteq$ เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบนเซตของ $P(A)$

สรุปว่า $(P(A),\subseteq)$ เป็นโพเซต (poset)

<u>บทนิยามที่ 2.3.9</u>

เรานิยามความสัมพันธ์ R ระหว่างสมาชิก 2 สมาชิกของแลตทิซโดย aRb ก็ต่อเมื่อ $ab = b$ เมื่อพิจารณาทฤษฎีบท 2.2.4 และ 2.2.5 จะสมมูลกับ aRb ก็ต่อเมื่อ $a+b=b$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.10</u> aRa

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจาก $aa = a$ (จากทฤษฎีบท 2.2.2)

ดังนั้น aRa จากนิยาม 2.3.8

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.11</u> ถ้า aRb และ bRa แล้ว $a=b$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $ab = a$ และ $ba = b$ สำหรับทุก $a,b \in \mathcal{L}$

$a = ab$ (จากสมมติฐานแรก และ นิยาม 2.3.8)

$= ba$ (จากสมบัติการสลับที่การคูณ)

$= b$ (จากสมมติฐานที่สอง และนิยาม 2.3.8)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.12</u> ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $ab = a$ และ $bc = b$ สำหรับทุก $a,b \in \mathcal{L}$

$ac = (ab)c$ (จากสมมติฐานแรก และนิยาม 2.3.8)

$= a(bc)$ (จากสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ)

$= ab$ (จากสมมติฐานที่สอง และนิยาม2.3.8)

$= a$ (จากสมมติฐานแรก และนิยามเดียวกัน)

เพราะฉะนั้น aRc จากนิยามเดียวกัน

ดังนั้น R เป็นความสัมพันธ์จาก $\mathcal{L}$ ไปยัง $\mathcal{L}$ สมบัติสะท้อน(ทฤษฎีบท 2.3.10) สมบัติการปฏิสมมาตร (ทฤษฎีบท 2.3.11) และสมบัติถ่ายทอด (ทฤษฎีบท 2.3.12) เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์จะเป็นอันดับบางส่วนเราอาจเขียน $a \le b$ แทน aRb

<u>บทนิยามที่ 2.3.13</u>

แลตทิซเป็นเซตอันดับบางส่วนซึ่งทุกคู่ของ a,b มีขอบเขตล่างที่มากที่สุดหรือเรียกว่า "meet" แทนด้วย ab และขอบเขตบนที่น้อยที่สุดหรือเรียกว่า "join" แทนด้วย $a+b$ ภายในเซต $\mathcal{L}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.14</u> ให้ $(\mathcal{L},\leq)$ เป็นแลตทิซที่เป็นเซตจำกัดจะได้ว่า $\mathcal{L}$ มีสมาชิกที่เล็กที่สุดและสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

<u>บทพิสูจน์</u> กำหนดให้ $\mathcal{L}=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$

ให้ $a = x_1x_2x_3\cdots x_n \in\mathcal{L}$

$b = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \in\mathcal{L}$

โดยนิยามของ "meet" จะได้ว่า $a \leq x_i\ ;\forall i = 1,2,3,...,n$

นั่นคือ a เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $\mathcal{L}$

โดยนิยามของ "join" จะได้ว่า $b \geq x_i\ ;\forall i = 1,2,3,...,n$

นั่นคือ b เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ $\mathcal{L}$

แลตทิซที่สามารถแยกตัวประกอบได้ (Factorization lattices)

พิจารณาจำนวนนับ $(\mathbb{N})$ กับความสัมพันธ์ "หารลงตัว" ว่าเป็นเซตอันดับบางส่วน

1. $a|a$ (เห็นชัดอยู่แล้ว)
2. ถ้า $a|b$ และ $b|a$ แล้ว $a=b$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $a|b$ และ $b|a$

นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $b = am$

จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $a = bn$

จะได้ว่า $b = (bm)n$

$1 = mn$

จะได้ $m|1$ นั่นคือ $m=1$

แสดงว่า $n|1$ นั่นคือ $n=1$

จะได้ว่า $b = a(1)$

นั่นคือ $b = a$

3. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติ $a|b$ และ $b|c$

นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $b = am$

จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $c = bn$

จะได้ว่า $c = (am)n$

$c = a(mn)$

ดังนั้น $a|c$ เนื่องจาก $mn \in \mathbb{Z}$

ดังนั้นจำนวนนับ $(\mathbb{N})$ กับความสัมพันธ์ "หารลงตัว" เป็นเซตอันดับบางส่วน

จะแสดงว่าทุกคู่ของ a,b มีขอบล่างที่มากที่สุดและขอบบนที่น้อยที่สุดภายในเซต $\mathcal{L}$

ให้ $\mathcal{L}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก $a,b \in \mathbb{N}$ จำนวนนับ d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d|a$ และ $d|b$
2. สำหรับแต่ละ $d' \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $d'|a$ และ $d'|b$ จะได้ว่า $d'|d$

ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $d = \gcd(a,b)$

จำนวนนับ k จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $a|k$ และ $b|k$
2. สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a|k'$ และ $b|k'$ จะได้ว่า $k|k'$

ในกรณีนี้เขียนแทนด้วย $k = \operatorname{lcm}(a,b)$

ดังนั้น d และ k เป็น ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a และ b บนเซต $\mathcal{L}$

สรุปว่า ห.ร.ม. เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดและ ค.ร.น.เป็นขอบบนน้อยที่สุด

2.4 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับพีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

บทนิยามที่ 2.4.1

พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) คือ 6 สิ่งอันดับที่ประกอบด้วยเซต $\mathcal{B}$ กับ

- การดำเนินการทวิภาค $\wedge$ (เรียกว่า meet หรือ and) บน $\mathcal{B}$
- การดำเนินการทวิภาค $\vee$ (เรียกว่า join หรือ or) บน $\mathcal{B}$
- การดำเนินการเอกภาค $\neg$ (เรียกว่า complement หรือ not) บน $\mathcal{B}$
- สมาชิก $0 \in \mathcal{B}$ เรียกว่าสมาชิกที่เล็กที่สุด (bottom / lead element)
- สมาชิก $1 \in \mathcal{B}$ เรียกว่าสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด (top / greatest element)

โดยกำหนด $(\mathcal{B},\wedge,\vee,\neg,0,1)$ เป็นพีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra) ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุก $a,b,c \in \mathcal{B}$

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงสมบัติของตัวดำเนินการมีทและตัวดำเนินการจอยน์เหนือพีชคณิตบูลีน

สมบัติของ $\vee$	สมบัติของ $\wedge$	ชื่อเรียก
$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$	$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$	การเปลี่ยนกลุ่ม(associativity)
$a\vee b=b\vee a$	$a\wedge b=b\wedge a$	การสลับที่ (commutativity)
$a\vee(a\wedge b)=a$	$a\wedge(a\vee b)=a$	การดูดกลืน (absorption)
$a\vee 0=a$	$a\wedge 1=a$	เอกลักษณ์ (identity)
$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$	$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$	การแจกแจง (distributivity)
$a\vee\neg a=1$	$a\wedge\neg a=0$	ส่วนเติมเต็ม(complement)

จากสมบัติข้างต้นสามารถนำมาพิจารณาทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้ โดยกำหนดให้ $a \in \mathscr{B}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.4.2</u> $a \vee a = a$

<u>บทพิสูจน์</u>

$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= (a \vee a) \wedge (a \vee \neg a)$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a \vee (a \wedge \neg a)$	(สมบัติการแจกแจง)
$= a \vee 0$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.4.3</u> $a \wedge a = a$

<u>บทพิสูจน์</u>

$a \wedge a = (a \wedge a) \vee 1$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= (a \wedge a) \vee (a \wedge \neg a)$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a \wedge (a \vee \neg a)$	(สมบัติการแจกแจง)
$= a \wedge 1$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)

<u>ทฤษฎีบท 2.4.4</u> $a \vee 1 = 1$

<u>บทพิสูจน์</u>

$a \vee 1 = (a \vee 1) \wedge 1$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= 1 \wedge (a \vee 1)$	(สมบัติการสลับที่)
$= (a \vee \neg a) \wedge (a \vee 1)$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a \vee (\neg a \wedge 1)$	(สมบัติการแจกแจง)
$= a \vee \neg a$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= 1$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)

<u>ทฤษฎีบท 2.4.5</u> $a \wedge 0 = 0$

<u>บทพิสูจน์</u>

$a \wedge 0 = (a \wedge 0) \vee 0$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= 0 \vee (a \wedge 0)$	(สมบัติการสลับที่)
$= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge 0)$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)
$= a \wedge (\neg a \vee 0)$	(สมบัติการแจกแจง)
$= a \wedge \neg a$	(สมบัติการมีเอกลักษณ์)
$= 0$	(สมบัติส่วนเติมเต็ม)

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.6</u> พิจารณา $\{0,1\}$ กับการดำเนินการทวิภาค

<u>บทพิสูจน์</u>

จากความรู้พื้นฐานเรื่องตรรกศาสตร์ที่ทราบมาแล้วว่า $\{0,1\}$ เป็นแลตทิซภายใต้การดำเนินการ or$(\vee)$ และ and$(\wedge)$นั่นคือจะมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่ สมบัติการดูดกลืน สมบัติการมีเอกลักษณ์ สมบัติแจกแจงและสมบัติส่วนเติมเต็ม

สรุปว่า $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg,0,1)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.7</u> ให้ A เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $A \neq \varnothing$

พิจารณา $P(A)$ กับการดำเนินการทวิภาค

สำหรับแต่ละ $X,Y \in P(A)$

เรานิยาม $X \wedge Y = X \cap Y$

$X \vee Y = X \cup Y$

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $X,Y,Z \in P(A)$

จากความรู้พื้นฐานที่ทราบมาแล้วว่า $P(A)$ เป็นแลตทิซภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชัน $(\cap)$และการยูเนียน $(\cup)$นั่นคือจะมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่และสมบัติการดูดกลืน

การมีเอกลักษณ์

- การมีเอกลักษณ์ภายใต้การยูเนียน "$\cap$"

สำหรับแต่ละสมาชิกที่อยู่ใน $P(A)$

จะแสดงว่า $X \cap 1 = X$

เมื่อ 1 แทนเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชัน $(\cap)$

จะได้ว่า $X \cap A = X$ (เนื่องจาก $X \subseteq A$)

ดังนั้น เอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการอินเตอร์เซคชัน $(\cap)$ คือ A

- การมีเอกลักษณ์ภายใต้การยูเนียน "$\cup$"

สำหรับแต่ละสมาชิกที่อยู่ใน $P(A)$

จะแสดงว่า $X \cup 0 = X$

เมื่อ 0 แทนเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการยูเนียน $(\cup)$

จะได้ว่า $X \cup \varnothing = X$ (เนื่องจาก $\varnothing \subseteq X$)

ดังนั้น เอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการยูเนียน $(\cup)$คือ $\varnothing$

สมบัติการแจกแจง

- สมบัติการแจกแจงภายใต้การอินเตอร์เซคชั่น "$\cap$"

จะแสดงว่า $X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

นั่นคือ $X\cap(Y\cup Z) \subseteq (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

และ $(X\cap Y)\cup(X\cap Z) \subseteq X\cap(Y\cup Z)$

$(\subseteq)$ ให้ $a\in X\cap(Y\cup Z)$

นั่นคือ $a\in X$ และ $a\in(Y\cup Z)$

จะได้ว่า $a\in Y$ หรือ $a\in Z$

จะได้ว่า $a\in X$ และ $a\in Y$ หรือ $a\in X$ และ $a\in Z$

ดังนั้น $a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

$(\supseteq)$ ให้ $a\in(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

นั่นคือ $a\in(X\cap Y)$ จะได้ว่า $a\in X$ และ $a\in Y$

หรือ $a\in(X\cap Z)$ จะได้ว่า $a\in Y$ และ $a\in Z$

ดังนั้น $a\in X\cap(Y\cup Z)$

ดังนั้น $X\cap(Y\cup Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$

- สมบัติการแจกแจงภายใต้การยูเนียน "$\cup$"

จะแสดงว่า $X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

นั่นคือ $X\cup(Y\cap Z) \subseteq (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

และ $(X\cup Y)\cap(X\cup Z) \subseteq X\cup(Y\cap Z)$

$(\subseteq)$ ให้ $a\in X\cup(Y\cap Z)$

นั่นคือ $a\in X$ หรือ $a\in Y\cap Z$

จะได้ว่า $a\in Y$ และ $a\in Z$

จะได้ว่า $a\in X$ หรือ $a\in Y$ และ $a\in X$ หรือ $a\in Z$

ดังนั้น $a\in(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$

($\supseteq$) ให้ $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

นั่นคือ $a \in X \cup Y$ และ $a \in X \cup Z$

จะได้ว่า $a \in X$ หรือ $a \in Y$ และ $a \in X$ หรือ $a \in Z$

จะได้ว่า $a \in X$ หรือ $a \in Y$ และ $a \in Z$

ดังนั้น $a \in X \cup (Y \cap Z)$

ดังนั้น $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

การดำเนินการคอมพลิเมนท์เป็นการดำเนินการเอกภาคบน A

เนื่องจาก $X \cup (A - X) = A$

ดังนั้น $X^c = A - X$

เนื่องจาก $X \cap (A - X) = \varnothing$

ดังนั้น $X^c = A - X$

ดังนั้น คอมพลีเมนต์ของ X คือ $A - X$

สรุปว่า $(P(A), \cup, \cap, {}^c, \varnothing, A)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.8</u> ให้ S เป็นเซตใดๆ โดยที่ $S \neq \varnothing$

ให้ $X = \{A \subseteq S \mid A$ เป็น finiteset หรือ cofinite subset$\}$

เรานิยาม A เป็น cofinite subset $\leftrightarrow$ A^c เป็น finiteset

<u>บทพิสูจน์</u> สำหรับแต่ละ $A, B \in X$

จะแสดงว่า $A \cap B \in X$ และ $A \cup B \in X$

กรณีที่ 1

A และ B เป็น finiteset จะได้ว่า $A \cap B$ เป็น finiteset

ดังนั้น $A \cap B \in X$

A และ B เป็น finiteset จะได้ว่า $A \cup B$ เป็น finiteset

ดังนั้น $A \cup B \in X$

กรณีที่ 2

A เป็น finite set และ B เป็น cofinite subset ของ S

เนื่องจาก $A \cap B \subseteq A$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cap B \in X$

เนื่องจาก $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B) \subseteq S-B$

เนื่องจาก $S-B$ เป็น finite set

จะได้ว่า $S-(A \cup B)$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset

ดังนั้น $A \cup B \in X$

กรณีที่ 3

A เป็น cofinite subset และ B เป็น finite set ของ S

เนื่องจาก $A \cap B \subseteq B$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cap B \in X$

เนื่องจาก $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B) \subseteq S-B$

เนื่องจาก $S-A$ เป็น finite set

จะได้ว่า $S-(A \cup B)$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset

ดังนั้น $A \cup B \in X$

กรณีที่ 4

A และ B เป็น cofinite subset ของ S

จะได้ว่า $A \cap B=(S-A) \cup (S-B)$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cap B$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cap B \in X$

จะได้ว่า $S-(A \cup B)=(S-A) \cap (S-B)$ เป็น finite set

ดังนั้น $A \cup B$ เป็น cofinite subset

ดังนั้น $A \cup B \in X$

ดังนั้น การดำเนินการการอินเตอร์เซคชัน "$\cap$" และการดำเนินการยูเนียน "$\cup$" มีสมบัติปิดบน X เนื่องจาก $\left(P(S),\cap,\cup,\neg,^{c},\varnothing,S\right)$ เป็นพีชคณิตบูลีนและ $X\subseteq P(S)$ จะได้ว่า X มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่ สมบัติการดูดกลืนและสมบัติแจกแจง

จะแสดงว่า $\varnothing \in X$ และ $S \in X$

เนื่องจาก $\varnothing$ เป็น finiteset

ดังนั้น $\varnothing \in X$

เนื่องจาก $S-S=\varnothing$ เป็น finiteset

จะได้ S เป็น cofinitesubset

ดังนั้น $S \in X$

จะแสดงว่า $S-A \in A$

กำหนดให้ $A \in X$

กรณีที่ A เป็น finiteset

นั่นคือ $S-(S-A)=A$ เป็น finiteset

จะได้ $A^{c}=S-A$ เป็น cofinitesubset

ดังนั้น $S-A \in A$

กรณีที่ A เป็น cofinitesubset

จะได้ $S-A$ เป็น finiteset

ดังนั้น $S-A \in X$

ดังนั้น $A^{c}=S-A$

จะได้ว่า X มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ และสมบัติส่วนเติมเต็ม

สรุปว่า $\left(X,\cap,\cup,^{c},\varnothing,S\right)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>บทนิยามที่ 2.4.9</u>

จำนวนนับ n จะเป็น square – free ก็ต่อเมื่อ n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดนั่นคือ $n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k$ เมื่อสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.10</u> ให้ $n = 2\times3\times5 = 30$ เป็น square – free

ให้ $A = \{a \in \mathbb{N} : a|n\}$

จะได้ $A = \{1,2,3,5,(2\times3),(2\times5),(3\times5),(2\times3\times5)\}$

ดังนั้น $A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.11</u> ให้ $A = \{a \in \mathbb{N} : a|n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ ที่มีคุณสมบัติ square – free

<u>บทพิสูจน์</u> จากความรู้เดิมจะได้ว่า $(A, \gcd, \mathrm{lcm})$ เป็นแลตทิซนั่นคือจะมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่และสมบัติการดูดกลืน

สมบัติการมีเอกลักษณ์

- สมบัติการมีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ gcd

จะแสดงว่า $a \wedge 1 = a$

เนื่องจาก $\gcd(a,n) = a \quad \forall a \in A$

ดังนั้น 1 คือเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ gcd ในที่นี้คือ n

- สมบัติการมีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ lcm

จะแสดงว่า $a \vee 0 = a$

เนื่องจาก $\mathrm{lcm}(a,1) = a \forall a \in A$

ดังนั้น 0 คือเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ lcm ในที่นี้คือ เลข 1

สมบัติการแจกแจง

- สมบัติการแจกแจงภายใต้การดำเนินการ gcd

จะแสดงว่า $\gcd(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c))$

กำหนดให้ $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ เมื่อ $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ เมื่อ $\beta_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}$ เมื่อ $\gamma_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

เนื่องจาก $\operatorname{lcm}(b,c) = \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\beta_i,\gamma_i\}}$$

จะได้ว่า $\gcd(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\}}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}$$

เนื่องจาก $\min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\} = \max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}$

$$= \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right)$$

$$= \operatorname{lcm}\left(\gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right), \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)\right)$$

$$= \operatorname{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c))$$

ดังนั้น $\gcd(a,\operatorname{lcm}(b,c)) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b),\gcd(a,c))$

- สมบัติการแจกแจงภายใต้การดำเนินการ lcm

จะแสดงว่า $\operatorname{lcm}(a, \gcd(a,b)) = \gcd(\operatorname{lcm}(a,b), \operatorname{lcm}(a,c))$

กำหนดให้ $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ เมื่อ $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ เมื่อ $\beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}$ เมื่อ $\gamma_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

เนื่องจาก $\operatorname{lcm}(b,c) = \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$

$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i, \gamma_i\}}$

จะได้ว่า $\gcd(a, \gcd(b,c)) = \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)$

$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i, \min\{\beta_i,\gamma_i\}\}}$

$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\max\{\alpha_i,\beta_i\}, \max\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}$

เนื่องจาก $\max\{\alpha_i, \min\{\beta_i, \gamma_i\}\} = \min\{\max\{\alpha_i, \beta_i\}, \max\{\alpha_i, \gamma_i\}\}$

$= \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right)$

$= \gcd\left(\operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right), \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)\right)$

$= \gcd(\operatorname{lcm}(a,b), \operatorname{lcm}(a,c))$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}(a, \gcd(a,b)) = \gcd(\operatorname{lcm}(a,b), \operatorname{lcm}(a,c))$

ส่วนเติมเต็มบนการดำเนินการเอกภาคบน A

เรานิยาม $\neg$ บน A โดย $\neg a = \dfrac{n}{a} \forall a \in A$

เนื่องจาก $a|n$ และ $\dfrac{n}{a}$ เป็นตัวประกอบของ n

จะได้ว่า $\dfrac{n}{a} \in A$

นั่นคือ $\dfrac{n}{\frac{n}{a}} = a$ หรือ $n = \dfrac{n}{a} \cdot a$

ดังนั้น $\neg$ เป็นการดำเนินการเอกภาคบน A

จะแสดงว่า $a \wedge \neg a = 0$ และ $a \vee \neg a = 1$

$$\operatorname{lcm}(a, \neg a) = \operatorname{lcm}\left(a, \frac{n}{a}\right)$$

เนื่องจาก $n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_m p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_l$ และ $a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_m$

จะได้ว่า $\dfrac{n}{a} = p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_l$

จะเห็นว่า a กับ $\dfrac{n}{a}$ ไม่มีตัวประกอบที่ซ้ำกันเลยนอกจากเลข 1

ดังนั้น $a \wedge \neg a = 0$ และ $\operatorname{lcm}\left(a, \dfrac{n}{a}\right) = a \cdot \dfrac{n}{a} = n$

สรุปได้ว่า $\left(A, \gcd, \operatorname{lcm}, \dfrac{n}{a}, 1, n\right)$ เป็นพีชคณิตบูลีน

<u>ข้อสังเกต 2.4.12</u> ถ้า n ไม่เป็น square – free

จะได้ว่ามีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p^2|n$

ซึ่งทำให้ $\operatorname{lcm}\left(p, \dfrac{n}{p}\right) = \dfrac{n}{p} \neq n$

มี p ซ้ำกันมี p เป็นตัวประกอบ

สรุปว่า จำนวนนับจะเป็นพีชคณิตบูลีนก็ต่อเมื่อ n เป็น square – free

บทที่ 3

เมทริกซ์เหนือบูลีนพีชคณิตและการดำเนินการเชิงพีชคณิต

3.1 การดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐานของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

เมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน (matrices over a Boolean Algebra)

กำหนดให้ $\mathcal{B}$ เป็นพีชคณิตบูลีนและ $M_{m,n}(\mathcal{B})$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก $\mathcal{B}$ สำหรับแต่ละ $m,n \in \mathbb{N}$

ถ้า $A \in M_{m,n}(\mathcal{B})$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย

$A = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ หรือ $A = \left[a_{ij}\right]$

การจอยน์ฮาดามาร์ดและการมีทฮาดามาร์ดเมทริกซ์

<u>บทนิยามที่ 3.1.1</u>

การจอยน์ฮาดามาร์ดเมทริกซ์สำหรับแต่ละ $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathcal{B})$ จะได้ว่า $A + B = \left[a_{ij} \vee b_{ij}\right]$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.2</u> พิจารณา $\{0,1\}$ กับการดำเนินการทวิภาค

โดยเรานิยาม $a + b = a \vee b \quad ; a,b \in \{0,1\}$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (1 \vee 1) & (0 \vee 0) & (0 \vee 1) \\ (1 \vee 0) & (1 \vee 0) & (0 \vee 1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.3</u> ให้ $A = \{1,2,3\}$

พิจารณา $P(A) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\},\varnothing\}$

โดยเรานิยาม $X \vee Y = X \cup Y$ สำหรับแต่ละ $X, Y \in P(A)$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1,2\} \\ \{1,3\} & \{2,3\} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \{1,3\} & \{1,2,3\} \\ \varnothing & \{3\} \end{bmatrix}$

จะได้ $A+B = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1,2\} \\ \{1,3\} & \{2,3\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{1,3\} & \{1,2,3\} \\ \varnothing & \{3\} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \{1\} \vee \{1,3\} & \{1,2\} \vee \{1,2,3\} \\ \{1,3\} \vee \varnothing & \{2,3\} \vee \{3\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1\} \cup \{1,3\} & \{1,2\} \cup \{1,2,3\} \\ \{1,3\} \cup \varnothing & \{2,3\} \cup \{3\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1,3\} & \{1,2,3\} \\ \{1,3\} & \{2,3\} \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.4</u> พิจารณา $n = 2 \times 3 = 6$ เป็น square – free

ให้ $A = \{a \in \mathbb{N} : a | n\}$ จะได้ว่า $A = \{1,2,3,6\}$

โดยเรานิยาม $a \vee b = \operatorname{lcm}(a,b) \quad ; \forall a, b \in A$

กำหนดให้ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $N = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $M + N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 2 & 2 \vee 4 \\ 2 \vee 1 & 3 \vee 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{lcm}(1,2) & \operatorname{lcm}(2,4) \\ \operatorname{lcm}(2,1) & \operatorname{lcm}(3,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>บทนิยามที่ 3.1.5</u>

การมีทฮาดามาร์ดของเมทริกซ์สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathcal{B})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathcal{B})$ แล้วผลมีทฮาดามาร์ดของเมทริกซ์ A และ B นิยามโดย

$$A\circ B=\left[a_{ij}\wedge b_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}\wedge b_{11} & a_{12}\wedge b_{12} & \cdots & a_{1n}\wedge b_{1n} \\ a_{21}\wedge b_{21} & a_{22}\wedge b_{22} & \cdots & a_{2n}\wedge b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\wedge b_{m1} & a_{m2}\wedge b_{m2} & \cdots & a_{mn}\wedge b_{mn} \end{bmatrix}\in M_{m,n}(\mathcal{B})$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.6</u> พิจารณา $n=2\times3\times7=42$ เป็น square – free

ให้ $A=\{a\in\mathbb{N}:a|n\}$

จะได้ว่า $A=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

โดยเรานิยาม $a\wedge b=\gcd(a,b)$ และ $a\vee b=\operatorname{lcm}(a,b)$

สำหรับแต่ละ $a,b\in A$

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 14 & 3 & 14 \\ 1 & 21 & 21 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 42 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 21 & 2 \\ 2 & 2 & 14 & 3 \\ 42 & 7 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A\circ B=\begin{bmatrix} 2\wedge1 & 14\wedge3 & 3\wedge7 & 14\wedge1 \\ 1\wedge3 & 21\wedge14 & 21\wedge21 & 2\wedge2 \\ 3\wedge2 & 1\wedge2 & 2\wedge14 & 3\wedge3 \\ 6\wedge42 & 3\wedge7 & 42\wedge3 & 6\wedge14 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} \gcd(2,1) & \gcd(14,3) & \gcd(3,7) & \gcd(14,1) \\ \gcd(1,3) & \gcd(21,14) & \gcd(21,21) & \gcd(2,2) \\ \gcd(3,2) & \gcd(1,2) & \gcd(2,14) & \gcd(3,3) \\ \gcd(6,42) & \gcd(3,7) & \gcd(42,3) & \gcd(6,14) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

บทนิยามที่ 3.1.7

การมีทเมทริกซ์ด้วยค่าคงที่สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathcal{B})$ และ $k \in \mathcal{B}$ แล้ว $kA = [k \wedge a_{ij}]$

ตัวอย่างที่ 3.1.8 ให้ S เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $S = \varnothing$

ให้ $X = \{A \subseteq S \mid A$ เป็น finite set หรือ cofinite subset $\}$

โดยเรานิยาม A เป็น cofinite subset $\leftrightarrow A^c$ เป็น finite set

และ $X \wedge Y = X \cap Y$ สำหรับแต่ละ $X, Y \in A$

กำหนดให้ $M = \begin{bmatrix} \{2\} & \mathbb{N}-\{5,6\} & \{1,5\} \\ \{1,5\} & \{1,2\} & \{3,5,6\} \\ \varnothing & \mathbb{N}-\{3\} & \mathbb{N}-\{5,6,7\} \\ \mathbb{N} & \varnothing & \mathbb{N}-\{5,6\} \end{bmatrix}$ และ $k = \mathbb{N}-\{5,6\}$

จะได้ว่า $kM = (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \begin{bmatrix} \{2\} & \mathbb{N}-\{5,6\} & \{1,5\} \\ \{1,5\} & \{1,2\} & \{3,5,6\} \\ \varnothing & \mathbb{N}-\{3\} & \mathbb{N}-\{5,6,7\} \\ \mathbb{N} & \varnothing & \mathbb{N}-\{5,6\} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \{2\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge (\mathbb{N}-\{5,6\}) & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \{1,5\} \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \{1,5\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \{1,2\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \{3,5,6\} \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \varnothing & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge (\mathbb{N}-\{3\}) & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge (\mathbb{N}-\{5,6,7\}) \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \mathbb{N} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge \varnothing & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \wedge (\mathbb{N}-\{5,6\}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \{2\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap (\mathbb{N}-\{5,6\}) & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \{1,5\} \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \{1,5\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \{1,2\} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \{3,5,6\} \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \varnothing & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap (\mathbb{N}-\{3\}) & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap (\mathbb{N}-\{5,6,7\}) \\ (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \mathbb{N} & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap \varnothing & (\mathbb{N}-\{5,6\}) \cap (\mathbb{N}-\{5,6\}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{2\} & \mathbb{N}-\{5,6\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1,2\} & \{3\} \\ \varnothing & \mathbb{N}-\{3,5,6\} & \mathbb{N}-\{5,6,7\} \\ \mathbb{N}-\{5,6\} & \varnothing & \mathbb{N}-\{5,6\} \end{bmatrix}$$

การจอยน์และการมีทเมทริกซ์

<u>บทนิยามที่ 3.1.9</u>

การจอยน์เมทริกซ์สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathcal{B})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(\mathcal{B})$ แล้วผลจอยน์เมทริกซ์ A และ B นิยามโดย

$$A\vee B=\left[\bigwedge_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\vee b_{kj}\right)\right]\in M_{m,p}(\mathcal{B})$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.10</u> พิจารณา $n=3\times 7=21$ เป็น squart - free

ให้ $A=\{a\in\mathbb{N}:a|n\}$

จะได้ว่า $A=\{1,3,7,21\}$

โดยเรานิยาม $a\wedge b=\gcd(a,b)$ และ $a\vee b=\operatorname{lcm}(a,b)$

สำหรับแต่ละ $a,b\in A$

กำหนดให้ $M=\begin{bmatrix}1&3\\3&7\end{bmatrix}$ และ $N=\begin{bmatrix}7&21\\3&1\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $M\vee N=\begin{bmatrix}1&3\\3&7\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}7&21\\3&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(1\vee 7)\wedge(3\vee 3) & (1\vee 21)\wedge(3\vee 1)\\(3\vee 7)\wedge(7\vee 3) & (3\vee 21)\wedge(7\vee 1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{lcm}(1,7)\wedge\operatorname{lcm}(3,3) & \operatorname{lcm}(1,21)\wedge\operatorname{lcm}(3,1)\\\operatorname{lcm}(3,7)\wedge\operatorname{lcm}(7,3) & \operatorname{lcm}(3,21)\wedge\operatorname{lcm}(7,1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7\wedge 3 & 21\wedge 3\\21\wedge 21 & 21\wedge 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gcd(7,3) & \gcd(21,3)\\\gcd(21,21) & \gcd(21,7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3\\21&7\end{bmatrix}$$

<u>บทนิยามที่ 3.1.11</u>

การมีทเมทริกซ์กับเมทริกซ์สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathcal{B})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(\mathcal{B})$ นิยามโดย

$$A\wedge B=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\wedge b_{kj}\right)\right]\in M_{m,p}(\mathcal{B})$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.12</u> พิจารณา $n=2\cdot5=10$ เป็น square – free

ให้ $A=\{a\in\mathbb{N}:a|n\}$

จะได้ว่า $A=\{1,2,5,10\}$

โดยเรานิยาม $a\wedge b=\gcd(a,b)$ สำหรับแต่ละ $a,b\in A$

กำหนดให้ $M=\begin{bmatrix}1&2\\5&2\end{bmatrix}$ และ $N=\begin{bmatrix}5&10\\1&2\end{bmatrix}$

จะได้ว่า $M\wedge N=\begin{bmatrix}1&2\\5&2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}5&10\\1&2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(1\wedge5)\vee(2\wedge1) & (1\wedge10)\vee(2\wedge2)\\(5\wedge1)\vee(2\wedge1) & (5\wedge10)\vee(2\wedge2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gcd(1,5)\vee\gcd(2,1) & \gcd(1,10)\vee\gcd(2,2)\\\gcd(5,1)\vee\gcd(2,1) & \gcd(5,10)\vee\gcd(2,2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\vee1 & 1\vee2\\1\vee1 & 5\vee2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{lcm}(1,1) & \mathrm{lcm}(1,2)\\\mathrm{lcm}(1,1) & \mathrm{lcm}(5,2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\1&10\end{bmatrix}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.13**</u> พิจารณา $\{0,1\}$

ภายใต้การดำเนินการ $a \vee b$ และ $a \wedge b$ สำหรับแต่ละ $a,b \in \{0,1\}$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 0 & 0\vee 0 \\ 0\vee 1 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 1 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 0\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.14**</u> ให้ $A = \{2,4,6\}$

พิจารณา $P(A) = \{\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\},\varnothing\}$

โดยเรานิยาม $X \wedge Y = X \cap Y$ และ $X \vee Y = X \cup Y$

สำหรับแต่ละ $X, Y \in P(A)$

กำหนดให้ $M = \begin{bmatrix} \{2\} & \varnothing \\ \{4\} & \{6\} \\ \{4,6\} & \{2\} \end{bmatrix}$ และ $N = \begin{bmatrix} \{4,6\} & \varnothing \\ \{2,4,6\} & \{6\} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $M \wedge N = \begin{bmatrix} \{2\} & \varnothing \\ \{4\} & \{6\} \\ \{4,6\} & \{2\} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \{4,6\} & \varnothing \\ \{2,4,6\} & \{6\} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (\{2\}\wedge\{4,6\})\vee\{\varnothing\wedge\{2,4,6\}\} & (\{2\}\wedge\varnothing)\vee(\varnothing\wedge\{6\}) \\ (\{4\}\wedge\{4,6\})\vee(\{6\}\wedge\{2,4,6\}) & (\{4\}\wedge\varnothing)\vee(\{6\}\wedge\{6\}) \\ (\{4,6\}\wedge\{4,6\})\vee(\{2\}\wedge\{2,4,6\}) & (\{4,6\}\wedge\varnothing)\vee(\{2\}\wedge\{6\}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\{2\}\cap\{4,6\})\cup\{\varnothing\cap\{2,4,6\}\} & (\{2\}\cap\varnothing)\cup(\varnothing\cap\{6\}) \\ (\{4\}\cap\{4,6\})\cup(\{6\}\cap\{2,4,6\}) & (\{4\}\cap\varnothing)\cup(\{6\}\cap\{6\}) \\ (\{4,6\}\cap\{4,6\})\cup(\{2\}\cap\{2,4,6\}) & (\{4,6\}\cap\varnothing)\cup(\{2\}\cap\{6\}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varnothing\cup\varnothing & \varnothing\cup\varnothing \\ \{4\}\cup\{6\} & \varnothing\cup\{6\} \\ \{4,6\}\cup\{2\} & \varnothing\cup\varnothing \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing \\ \{4,6\} & \{6\} \\ \{2,4,6\} & \varnothing \end{bmatrix}$$

<u>บทนิยามที่3.1.15</u>

นิเสธเมทริกซ์ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(B)$ นิยามโดย $\neg A=\left[\neg a_{ij}\right]\in M_{m,n}(B)$

<u>ตัวอย่างที่3.1.16</u> พิจารณา $\{0,1\}$

ภายใต้การดำเนินการนิเสธ

กำหนดให้ $$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$\neg A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

3.2 สมบัติของการดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐานของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

สมบัติการเกี่ยวกับการจอยน์ฮาดามาร์ดและการมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.1</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือบูลีน $\mathscr{B}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้นิยามได้ โดยกำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$ และให้ $k,p\in\mathscr{B}$

1. $(k\wedge p)A=k(pA)$
2. $k(A+B)=kA+kB$
3. $(k\vee p)A=kA+pA$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $(k \wedge p)A = k(pA)$

<u>บทพิสูจน์</u> $(k \wedge p)A = (k \wedge p)[a_{ij}]$

$$= [(k \wedge p) \wedge a_{ij}]$$

$$= [k \wedge (p \wedge a_{ij})]$$

$$= k[p \wedge a_{ij}]$$

$$= k(p[a_{ij}])$$

$$= k(pA)$$

2. $k(A+B) = kA + kB$

<u>บทพิสูจน์</u> $k(A+B) = k([a_{ij} \vee b_{ij}])$

$$= [k(a_{ij} \vee b_{ij})]$$

$$= [(k \wedge a_{ij}) \vee (k \wedge b_{ij})]$$

$$= [k \wedge a_{ij}] + [k \wedge b_{ij}]$$

$$= kA + kB$$

3. $(k \vee p)A = kA + pA$

<u>บทพิสูจน์</u> $(k \vee p)A = [(k \vee p) \wedge a_{ij}]$

$$= [(k \wedge a_{ij}) \vee (p \wedge a_{ij})]$$

$$= [k \wedge a_{ij}] + [p \wedge a_{ij}]$$

$$= kA + pA$$

สมบัติเกี่ยวกับการมีทเมทริกซ์กับเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.2</u>

ให้ A,B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือบูลีน $\mathcal{B}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงโดยกำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$, $C=\left[c_{ij}\right]$ และให้ $p\in\mathcal{B}$

1. $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$

2. $p(A\wedge B)=(pA)\wedge B=A\wedge(pB)$

3. $A\wedge(B+C)=(A\wedge B)+(A\wedge C)$

4. $(B+C)\wedge A=(B\wedge A)+(C\wedge A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$

<u>บทพิสูจน์</u> จากนิยาม $A\wedge B=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ij}\wedge b_{jk})\right]$

$$(A\wedge B)\wedge C=\left[\bigvee_{k=1}^{p}\left(\left(\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge b_{jk})\right)\wedge c_{kl}\right)\right]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{p}\left(\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge b_{jk}\wedge c_{kl})\right)\right]$$

และ $B\wedge C=\left[\bigvee_{k=1}^{p}(b_{jk}\wedge c_{kl})\right]$

$$A\wedge(B\wedge C)=\left[\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\wedge\left(\bigvee_{k=1}^{p}(b_{jk}\wedge c_{kl})\right)\right)\right]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{p}\left(\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge b_{jk}\wedge c_{kl})\right)\right]$$

2. $p(A\wedge B)=(pA)\wedge B = A\wedge(pB)$

<u>บทพิสูจน์</u> $p(A\wedge B)=p\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})\right]$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}((p\wedge a_{ik})\wedge b_{kj})\right]$$

$$=(pA)\wedge B$$

เนื่องจาก $pA=[p\wedge a_{ij}]=[a_{ij}\wedge p]=Ap$

เพราะฉะนั้น $(Ap)\wedge B=[a_{ij}\wedge p]\wedge[b_{ij}]$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}((a_{ik}\wedge p)\wedge b_{kj})\right]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ij}\wedge(p\wedge b_{kj}))\right]$$

$$=[a_{ij}]\wedge(p[b_{kj}])$$

$$=A\wedge(pB)$$

3. $A\wedge(B+C)=(A\wedge B)+(A\wedge C)$

<u>บทพิสูจน์</u> $A\wedge(B+C)=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge(b_{kj}\vee c_{kj}))\right]$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}((a_{ik}\wedge b_{kj})\vee(a_{ik}\wedge c_{kj}))\right]$$

$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})\right]+\left[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge c_{kj})\right]$$

$$=(A\wedge B)+(A\wedge C)$$

4. $(B+C)\wedge A=(B\wedge A)+(C\wedge A)$

<u>บทพิสูจน์</u> $$(B+C)\wedge A=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(\left(b_{ik}\vee c_{ik}\right)\wedge a_{kj}\right)\right]$$
$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(\left(b_{ik}\wedge a_{kj}\right)\vee\left(c_{ik}\wedge a_{kj}\right)\right)\right]$$
$$=\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(b_{ik}\wedge a_{kj}\right)\right]+\left[\bigvee_{k=1}^{n}\left(c_{ik}\wedge a_{kj}\right)\right]$$
$$=(B\wedge A)+(C\wedge A)$$

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.2.3**</u> กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathscr{B})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathscr{B})$ ที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย

1. $A+(A\circ B)=A$
2. $A\circ(A+B)=A$
3. $A+(\neg A)=1$ เมื่อ 1 เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด
4. $A\circ(\neg A)=0$ เมื่อ 0 เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เล็กที่สุด

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $A+(A\circ B)=A$

<u>บทพิสูจน์</u> $$A+(A\circ B)=\left[a_{ij}\vee\left(a_{ij}\wedge b_{ij}\right)\right]$$
$$=\left[a_{ij}\right] \quad \text{(จากสมบัติการดูดกลืน)}$$
$$=A$$

2. $A\circ(A+B)=A$

<u>บทพิสูจน์</u> $$A\circ(A+B)=\left[a_{ij}\wedge\left(a_{ij}\vee b_{ij}\right)\right]$$
$$=\left[a_{ij}\right] \quad \text{(จากสมบัติการดูดกลืน)}$$
$$=A$$

3. $A+(\neg A)=1$

<u>บทพิสูจน์</u> $A+(\neg A)=\left[a_{ij} \vee \neg a_{ij}\right]$

$=1$ (จากสมบัติส่วนเติมเต็ม)

4. $A \circ(\neg A)=0$

<u>บทพิสูจน์</u> $A \circ(\neg A)=\left[a_{ij} \wedge \neg a_{ij}\right]$

$=0$ (จากสมบัติส่วนเติมเต็ม)

การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์

เมทริกซ์สลับเปลี่ยนคือเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับสมาชิกจากแถวเป็นหลักและจากหลักเป็นแถวของเมทริกซ์ต้นแบบเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมรทิกซ์ A ขนาด $m \times n$ คือ A^T ขนาด $n \times m$

<u>บทนิยามที่ 3.2.4</u>

การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ (matrix transpose) สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathscr{B})$ นิยามโดย $A^T=\left[a_{ij}\right]^T=\left[a_{ji}\right] \in M_{m,n}(\mathscr{B})$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.5</u> ให้ S เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $S \neq \varnothing$

ให้ $X=\{A \subseteq S \mid A$ เป็น finite set หรือ cofinite subset$\}$

เรานิยาม A เป็น cofinite subset $\leftrightarrow A^c$ เป็น finite set

กำหนดให้ $$M=\begin{bmatrix} \{3\} & \mathbb{R}-\{5,6\} & \{\sqrt{2}\} & \{0\} \\ \{\pi,4\} & \{1,2\} & \mathbb{R}-\{3.7\} & \{14,5,7\} \\ \varnothing & \mathbb{R}-\{3\} & \mathbb{R}-\{\sqrt[3]{23}\} & \{\pi,4.8\} \\ \{4,6.5\} & \{\pi,4.8\} & \varnothing & \mathbb{R}-\{5,6\} \\ \mathbb{R}-\{4,6.5\} & \{100,20\} & \mathbb{R} & \{\pi,4\} \end{bmatrix}$$

จะได้ $$M^T=\begin{bmatrix} \{3\} & \{\pi,4\} & \varnothing & \{4,6.5\} & \mathbb{R}-\{4,6.5\} \\ \mathbb{R}-\{5,6\} & \{1,2\} & \mathbb{R}-\{3\} & \{\pi,4.8\} & \{100,20\} \\ \{\sqrt{2}\} & \mathbb{R}-\{3.7\} & \mathbb{R}-\{\sqrt[3]{23}\} & \varnothing & \mathbb{R} \\ \{0\} & \{14,5,7\} & \{\pi,4.8\} & \mathbb{R}-\{5,6\} & \{\pi,4\} \end{bmatrix}$$

สมบัติเกี่ยวกับการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.2.6**</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือบูลีน $\mathcal{B}$ และ $k \in \mathcal{B}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\left(A^T\right)^T = A$

2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

3. $\left(kA\right)^T = A^T$ สำหรับทุก $k \in \mathcal{B}$

4. $\left(A \wedge B\right)^T = A^T \wedge B^T$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $\left(A^T\right)^T = A$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $A = \left[a_{ij}\right]$

จากบทนิยาม $A^T = \left[a_{ji}\right]$

เพราะฉะนั้น $\left(A^T\right)^T = \left[a_{ij}\right] = A$

2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันนั่นคือ $m \times n$

จากบทนิยาม $A+B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]$

$= \left[a_{ij} \vee b_{ij}\right]$

เพราะฉะนั้น $\left(A+B\right)^T = \left[a_{ji} \vee b_{ji}\right]$

$= \left[a_{ji}\right] + \left[b_{ji}\right]$

$= A^T + B^T$

3. $(kA)^T = A^T$ สำหรับทุก $k \in \mathcal{B}$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $A = [a_{ij}]$

จากนิยาม $kA = k[a_{ij}]$

$= [k \wedge a_{ij}]$

เพราะฉะนั้น $(kA)^T = [k \wedge a_{ji}]$

$= k[a_{ji}]$

$= kA^T$

4. $(A \wedge B)^T = B^T \wedge A^T$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{jk}]$

และให้ $A \wedge B = C = [c_{ik}]$ เมื่อ $c_{ik} = \left[\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge b_{jk})\right]$

ดังนั้น $(A \wedge B)^T = C^T = [d_{ik}]$ เมื่อ $d_{ik} = c_{ki}$

เพราะฉะนั้น $c_{ki} = \left[\bigvee_{j=1}^{n} (a_{ji} \wedge b_{kj})\right]$

$= \left[\bigvee_{j=1}^{n} (b_{kj} \wedge a_{ji})\right]$

จากบทนิยาม $B^T = E = [e_{jk}]$ เมื่อ $e_{jk} = b_{kj}$

และ $A^T = F = [f_{ij}]$ เมื่อ $f_{ij} = a_{ji}$

ดังนั้น $B^T \wedge A^T = [e_{jk}] \wedge [f_{ij}]$

$= [b_{kj}] \wedge [a_{ji}]$

$= B^T \wedge A^T$

รอยเมทริกซ์

บทนิยามที่ 3.2.7

รอย (trace) ของเมทริกซ์ $A=[a_{ii}]\in M_{n,n}(\mathcal{B})$ คือผลจอยน์ของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นิยามโดย

$$\operatorname{tr}(A)=\bigvee_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.8 ให้ $A=\{3,5,6\}$

พิจารณา $P(A)=\{\{3\},\{5\},\{6\},\{3,5\},\{3,6\},\{5,6\},\{3,5,6\},\varnothing\}$

โดยเรานิยาม $X\vee Y=X\cup Y$ สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(A)$

กำหนดให้ $$M=\begin{bmatrix} \{3\} & \varnothing & \{3,5,6\} & \{6\} \\ \{3,5\} & \{5\} & \{3,6\} & \varnothing \\ \{5\} & \{3,5,6\} & \{3\} & \{3,5\} \\ \{3,6\} & \varnothing & \varnothing & \{5,6\} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M)&=\bigvee_{i=1}^{4} m_{ii}\\ &=(\{3\}\vee\{5\}\vee\{3\}\vee\{5,6\})\\ &=(\{3\}\cup\{5\})\vee(\{3\}\cup\{5,6\})\\ &=\{3,5\}\cup\{3,5,6\}\\ &=\{3,5,6\}\end{aligned}$$

สมบัติเกี่ยวกับรอยเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.9</u>

สำหรับแต่ละ $A,B \in M_{n,n}(\mathcal{B})$ และ $k \in \mathcal{B}$ กำหนดให้ $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$

จะได้ว่า

1. $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)\vee\operatorname{tr}(B)$
2. $\operatorname{tr}(kA)=k\wedge\operatorname{tr}(A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)\vee\operatorname{tr}(B)$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B)&=\bigvee_{i=1}^{n}(a_{ii}\vee b_{ii})\\&=\left(\bigvee_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\vee\left(\bigvee_{i=1}^{n}b_{ii}\right)\\&=\operatorname{tr}(A)\vee\operatorname{tr}(B)\end{aligned}$$

2. $\operatorname{tr}(kA)=k\wedge\operatorname{tr}(A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(kA)&=\left(\bigvee_{i=1}^{n}(k\wedge a_{ii})\right)\\&=k\wedge\left(\bigvee_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\\&=k\wedge\operatorname{tr}(A)\end{aligned}$$

บทที่ 4

สมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ๊อคซ์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลมีทบ๊อคซ์

<u>บทนิยามที่ 4.1.1</u>

ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $m=\sum_{i=1}^{k}m_i$ และ $B=\left[B_{ij}\right]\in M_{kp,q}(\mathcal{B})$ เมื่อ $q=\sum_{j=1}^{n}q_j$ และ n คือจำนวนบล็อกตามแนวหลัก k คือจำนวนบล็อกตามแนวแถว เป็นเมทริกซ์ที่มีการแบ่งบล็อกดังนี้

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kn} \end{bmatrix}_{\sum_{i=1}^{k}m_i\times np} \quad \text{และ} \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kn} \end{bmatrix}_{kp\times\sum_{j=1}^{n}q_j}$$

ซึ่งแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $m_i\times p$ และเมทริกซ์ย่อย B_{ij} มีขนาด $p\times q_j$ โดยเรานิยามผลมีทบ๊อคซ์ของ A และ B ดังนี้

$$A\Diamond B=\left[A_{ij}\wedge B_{ij}\right]\in M_{m,p}(\mathcal{B}) \text{ เมื่อ } m=\sum_{i=1}^{k}m_i \text{ และ } q=\sum_{j=1}^{n}q_j$$

ในกรณีที่ $n=k=1$ จะได้ว่าสามารถลดรูปเป็นผลมีทปกติ

ในกรณีที่ A_{ij} และ B_{ij} มีขนาด 1×1 จะได้ว่าสามารถลดรูปเป็นผลมีทฮาดามาร์ด

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.2**</u> ให้ $A=\{a,b,c\}$

พิจารณา $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

โดยเรานิยาม $X\vee Y=X\cup Y$ และ $X\wedge Y=X\cap Y$

สำหรับแต่ละ $X,Y\in P(A)$

กำหนดให้ $$S=\left[\begin{array}{c|c|c}\{a\} & \{b,c\} & \varnothing \\ \hline \{a,b\} & \{c\} & \{a\} \\ \{a,b,c\} & \{b\} & \varnothing\end{array}\right]$$

และ $$T=\left[\begin{array}{cc|c|cc}\{b\} & \{c\} & \varnothing & \{a\} & \{b,c\} \\ \hline \{a,b\} & \{a\} & \{a,b,c\} & \varnothing & \{B\}\end{array}\right]$$

จะได้ว่า

$$S\lozenge T=\begin{bmatrix}[\{a\}]\wedge[\{b\}\quad\{c\}] & [\{b,c\}]\wedge[\varnothing] & [\varnothing]\wedge[\{a\}\quad\{b,c\}] \\ \begin{bmatrix}\{a,b\}\\ \{a,b,c\}\end{bmatrix}\wedge[\{a,b\}\quad\{a\}] & \begin{bmatrix}\{c\}\\ \{b\}\end{bmatrix}\wedge[\{a,b,c\}] & \begin{bmatrix}\{a\}\\ \{\varnothing\}\end{bmatrix}\wedge[\varnothing\quad\{b\}]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[\{a\}\cap\{b\}\quad\{a\}\cap\{c\}] & [\{b,c\}\cap\varnothing] & [\varnothing\cap\{a\}\quad\varnothing\cap\{b,c\}] \\ \begin{bmatrix}\{a,b\}\cap\{a,b\} & \{a,b\}\cap\{a\}\\ \{a,b,c\}\cap\{a,b\} & \{a,b,c\}\cap\{a\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{c\}\cap\{a,b,c\}\\ \{b\}\cap\{a,b,c\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{a\}\cap\varnothing & \{a\}\cap\{b\}\\ \varnothing\cap\varnothing & \varnothing\cap\{b\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[\varnothing\quad\varnothing] & [\varnothing] & [\varnothing\quad\varnothing] \\ \begin{bmatrix}\{a,b\} & \{a\}\\ \{a,b\} & \{a\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{c\}\\ \{b\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing\\ \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing \\ \{a,b\} & \{a\} & \{c\} & \varnothing & \varnothing \\ \{a,b\} & \{a\} & \{b\} & \varnothing & \varnothing\end{bmatrix}$$

<u>**ตัวอย่าง 4.1.3**</u> พิจารณา $\{0,1\}$ กับการดำเนินการทวิภาค

ภายใต้การดำเนินการ $a \vee b$ และ $a \wedge b$ สำหรับแต่ละ $a,b \in \{0,1\}$

กำหนดให้
$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

และ
$$B = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

จะได้ว่า

$$A \Diamond B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 0\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 1\vee 0 \\ 0\vee 0 & 1\vee 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 1\vee 0 \\ 0\vee 0 & 1\vee 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 1\vee 0 \\ 1\vee 1 & 1\vee 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.4</u> พิจารณา $n=3\times 5=15$ เป็น square-free

ให้ $A=\{a\in\mathbb{N}:a|n\}$

จะได้ว่า $A=\{1,3,5,15\}$

โดยเรานิยาม $a\wedge b=\gcd(a,b)$ และ $a\vee b=\operatorname{lcm}(a,b)$

สำหรับแต่ละ $a,b\in A$

กำหนดให้ $M=\begin{bmatrix}3\\5\\ \hdashline 15\\5\end{bmatrix}$ และ $N=\begin{bmatrix}1&3&3\\ \hdashline 5&15&1\end{bmatrix}$

จะได้ $M\lozenge N=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}1&3&3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}15\\5\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}5&15&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\wedge 1&3\wedge 3&3\wedge 3\\5\wedge 1&5\wedge 3&5\wedge 3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}15\wedge 5&15\wedge 15&15\wedge 1\\5\wedge 5&5\wedge 15&5\wedge 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\gcd(3,1)&\gcd(3,3)&\gcd(3,3)\\\gcd(5,1)&\gcd(5,3)&\gcd(5,3)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gcd(15,5)&\gcd(15,15)&\gcd(15,1)\\\gcd(5,5)&\gcd(5,15)&\gcd(5,1)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&3\\1&1&1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}5&15&1\\5&5&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&1&1\\5&15&1\\5&5&1\end{bmatrix}$$

<u>บทนิยามที่ 4.1.5</u>

ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $m=\sum_{i=1}^{k}m_i$ และ $B=\left[B_{ij}\right]\in M_{kp,q}(\mathcal{B})$

เมื่อ $q=\sum_{j=1}^{n}q_j$ และ n คือจำนวนบล็อกตามแนวหลัก k คือจำนวนบล็อกตามแนวแถว เป็นเมทริกซ์ซึ่งแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $m_i\times p$ และเมทริกซ์ย่อย B_{ij} มีขนาด $p\times q_j$ โดยเรานิยามผลจอยน์บ๊อคซ์ของ A และ B ดังนี้

$$A\nabla B=\left[A_{ij}\vee B_{ij}\right]\in M_{m,p}(\mathcal{B}) \quad \text{เมื่อ } m=\sum_{i=1}^{k}m_i \text{ และ } q=\sum_{j=1}^{n}q_j$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.6</u> พิจารณา $\{0,1\}$ กับการดำเนินการทวิภาค

ภายใต้การดำเนินการ $a\vee b$ และ $a\wedge b$ สำหรับแต่ละ $a,b\in\{0,1\}$

กำหนดให้ $A=\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\0&0&1&1\\\hline 1&1&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right]$ และ $B=\left[\begin{array}{cc|cc}0&0&0&1\\1&1&0&1\\\hline 0&1&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$

จะได้ว่า

$$A\nabla B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(0\vee 0)\wedge(1\vee 1) & (0\vee 0)\wedge(1\vee 1)\\(0\vee 0)\wedge(0\vee 1) & (0\vee 0)\wedge(0\vee 1)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(1\vee 0)\wedge(0\vee 0) & (1\vee 1)\wedge(0\vee 1)\\(1\vee 0)\wedge(1\vee 0) & (1\vee 1)\wedge(1\vee 1)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}(1\vee 0)\wedge(1\vee 0) & (1\vee 1)\wedge(1\vee 0)\\(1\vee 0)\wedge(1\vee 0) & (1\vee 1)\wedge(1\vee 0)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(0\vee 1)\wedge(1\vee 1) & (0\vee 1)\wedge(1\vee 1)\\(1\vee 1)\wedge(1\vee 1) & (1\vee 1)\wedge(1\vee 1)\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\wedge 1 & 0\wedge 1\\0\wedge 1 & 0\wedge 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\wedge 0 & 1\wedge 1\\1\wedge 1 & 1\wedge 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\wedge 1 & 1\wedge 1\\1\wedge 1 & 1\wedge 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\wedge 1 & 1\wedge 1\\1\wedge 1 & 1\wedge 1\end{bmatrix}\end{bmatrix} \quad =\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

4.2 สมบัติการสลับที่ การเปลี่ยนกลุ่ม และการมีเอกลักษณ์ของผลมีทบ๊อคซ์

สมบัติการสลับที่ของผลมีทบ๊อคซ์

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.1</u> พิจารณา $\{0,1\}$

ภายใต้การดำเนินการ $a \vee b$ และ $a \wedge b$ สำหรับแต่ละ $a,b \in \{0,1\}$

กำหนดให้ $A=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ และ $B=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$A \lozenge B=\left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \hdashline \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 0\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 1 & 0\vee 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 0\vee 0 \\ 1\vee 1 & 1\vee 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 0\vee 0 \\ 0\vee 0 & 1\vee 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \lozenge A = \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \hdashline \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\vee 0 & 0\vee 0 \\ 1\vee 1 & 1\vee 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 1\vee 0 \\ 1\vee 1 & 1\vee 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 0\vee 1 & 0\vee 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 0\vee 0 & 0\vee 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A \lozenge B \neq B \lozenge A$

สรุปว่า ไม่มีสมบัติการสลับที่ของผลมีทบ๊อคซ์

สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของผลมีทบ๊อคซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.2.2</u> ให้ A,B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน $\mathcal{B}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้สามารถหา $A\Diamond(B\Diamond C)$ และ $(A\Diamond B)\Diamond C$ ได้ จะได้ว่า $A\Diamond(B\Diamond C)=(A\Diamond B)\Diamond C$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}A\Diamond(B\Diamond C)&=\left[A_{ij}\right]\Diamond\left[B_{ij}\wedge C_{ij}\right]\\&=\left[A_{ij}\wedge\left(B_{ij}\wedge C_{ij}\right)\right]\\&=\left[\left(A_{ij}\wedge B_{ij}\right)\wedge C_{ij}\right] && \text{(จากทบ. 3.2.2 ข้อ1)}\\&=\left[A_{ij}\wedge B_{ij}\right]\Diamond\left[C_{ij}\right]\\&=(A\Diamond B)\Diamond C\end{aligned}$$

สมบัติการมีเอกลักษณ์ของผลมีทบ๊อคซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.2.3</u>

เมทริกซ์เอกลักษณ์ของผลมีทบ๊อคซ์ให้ $A=\left[A_{ij}\right]$ และ $J=\left[I_{ij}\right]\in M_{mp,np}(\mathcal{B})$ โดยที่ $I_{ij}=\operatorname{diag}(1,1,1,\ldots,1)$ ซึ่ง A_{ij} และ I_{ij} มีขนาด $p\times p$ สำหรับแต่ละ $i=1,2,3,\ldots,n$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ จะได้ว่า $A\Diamond J=A=J\Diamond A$

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $A\Diamond J=A=J\Diamond A$

$$A\Diamond J=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{bmatrix}\Diamond\begin{bmatrix}I_{11}&I_{12}&\cdots&I_{1n}\\I_{21}&I_{22}&\cdots&I_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\I_{m1}&I_{m2}&\cdots&I_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}\wedge I_{11}&A_{12}\wedge I_{12}&\cdots&A_{1n}\wedge I_{1n}\\A_{21}\wedge I_{21}&A_{21}\wedge I_{22}&\cdots&A_{2n}\wedge I_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}\wedge I_{m1}&A_{m2}\wedge I_{m2}&\cdots&A_{mn}\wedge I_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mn}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} \wedge A_{11} & I_{12} \wedge A_{12} & \cdots & I_{1n} \wedge A_{1n} \\ I_{21} \wedge A_{21} & I_{21} \wedge A_{22} & \cdots & I_{2n} \wedge A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m1} \wedge A_{m1} & I_{m2} \wedge A_{m2} & \cdots & I_{mn} \wedge A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m1} & I_{m2} & \cdots & I_{mn} \end{bmatrix} \Diamond \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= J \Diamond A$$

สรุปได้ว่า $A \Diamond J = A = J \Diamond A$

4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทบ๊อคซ์กับการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.3.1</u> ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน $\mathcal{B}$ ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้นิยามได้และให้ $k \in \mathcal{B}$ จะได้ว่า

1. $A \Diamond (B + C) = (A \Diamond B) + (A \Diamond C)$
2. $(B + C) \Diamond A = (B \Diamond A) + (C \Diamond A)$
3. $(kA) \Diamond B = A \Diamond (kB) = k(A \Diamond B)$
4. $(A \Diamond B)^T = B^T \Diamond A^T$
5. $\neg(A \Diamond B) = \neg A \nabla \neg B$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $A \Diamond (B + C) = (A \Diamond B) + (A \Diamond C)$

<u>บทพิสูจน์</u> $A \Diamond (B + C) = \left[A_{ij} \wedge \left(B_{ij} + C_{ij} \right) \right]$

$= \left[\left(A_{ij} \wedge B_{ij} \right) + \left(A_{ij} \wedge C_{ij} \right) \right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ3)

$= \left[A_{ij} \wedge B_{ij} \right] + \left[A_{ij} \wedge C_{ij} \right]$

$= (A \Diamond B) + (A \Diamond C)$

2. $(B+C)\Diamond A=(B\Diamond A)+(C\Diamond A)$

<u>บทพิสูจน์</u> $(B+C)\Diamond A=\left[\left(B_{ij}+C_{ij}\right)\wedge A_{ij}\right]$

$=\left[\left(B_{ij}\wedge A_{ij}\right)+\left(C_{ij}\wedge A_{ij}\right)\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ4)

$=\left[B_{ij}\wedge A_{ij}\right]+\left[C_{ij}\wedge A_{ij}\right]$

$=(B\Diamond A)+(C\Diamond A)$

3. $(kA)\Diamond B=A\Diamond(kB)=k(A\Diamond B)$

<u>บทพิสูจน์</u> $(kA)\Diamond B=\left[\left(kA_{ij}\right)\wedge B_{ij}\right]$

$=\left[k\left(A_{ij}\wedge B_{ij}\right)\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ2)

$=k\left[A_{ij}\wedge B_{ij}\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ2)

$=k(A\Diamond B)$

$A\Diamond(kB)=\left[A_{ij}\wedge\left(kB_{ij}\right)\right]$

$=\left[\left(kA_{ij}\right)\wedge B_{ij}\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ2)

$=\left[k\left(A_{ij}\wedge B_{ij}\right)\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ2)

$=k\left[A_{ij}\wedge B_{ij}\right]$ (จากทบ. 3.2.2 ข้อ2)

$=k(A\Diamond B)$

4. $(A\Diamond B)^{T}=B^{T}\Diamond A^{T}$

<u>บทพิสูจน์</u> $(A\Diamond B)^{T}=\left[A_{ij}\wedge B_{ij}\right]^{T}$

$=\left[\left(A_{ji}\wedge B_{ji}\right)^{T}\right]$

$=\left[\left(B_{ji}\right)^{T}\wedge\left(A_{ji}\right)^{T}\right]$ (จากทบ. 3.2.6 ข้อ4)

$=\left[\left(B_{ji}\right)^{T}\right]\Diamond\left[\left(A_{ji}\right)^{T}\right]$

$=B^{T}\Diamond A^{T}$

5. $\neg(A \Diamond B) = \neg A \nabla \neg B$

<u>บทพิสูจน์</u> $\neg(A \Diamond B) = \neg\left[A_{ij} \wedge B_{ij}\right]$

$$= \left[\neg\left(A_{ij} \wedge B_{ij}\right)\right]$$

$$= \left[\neg A_{ij} \vee \neg B_{ij}\right]$$

$$= \neg A \nabla \neg B$$

<u>บทตั้งที่ 4.3.2</u>

ให้ $A \in M_{m,m}(\mathcal{B})$ และ $B \in M_{m,m}(\mathcal{B})$ จะได้ว่า $\operatorname{tr}(A \wedge B) = \operatorname{tr}(B \wedge A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\operatorname{tr}(A \wedge B) = \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{1j} \wedge b_{j1}\right)\right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{2j} \wedge b_{j2}\right)\right) \vee \ldots \vee \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{mj} \wedge b_{jm}\right)\right)$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n}\left(\left(a_{1j} \wedge b_{j1}\right) \vee \left(a_{2j} \wedge b_{j2}\right) \vee \ldots \vee \left(a_{mj} \wedge b_{jm}\right)\right)$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \wedge b_{ji}\right)\right)$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(b_{ji} \wedge a_{ij}\right)\right)$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n}\left(\left(b_{j1} \wedge a_{1j}\right) \vee \left(b_{j2} \wedge a_{2j}\right) \vee \ldots \vee \left(b_{jm} \wedge a_{mj}\right)\right)$$

$$= \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(b_{j1} \wedge a_{1j}\right)\right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(b_{j2} \wedge a_{2j}\right)\right) \vee \ldots \vee \left(\bigvee_{j=1}^{n}\left(b_{jm} \wedge a_{mj}\right)\right)$$

$$= \operatorname{tr}(B \wedge A)$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.3.3</u>

ให้ $A \in M_{mp,mp}(\mathcal{B})$ และ $B \in M_{mp,mp}(\mathcal{B})$ โดย $A \Diamond B$ และ $B \Diamond A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสจะได้ว่า $\operatorname{tr}(A \Diamond B) = \operatorname{tr}(B \Diamond A)$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A \Diamond B) &= \operatorname{tr}\left((A_{11} \wedge B_{11}) + (A_{22} \wedge B_{22}) + \ldots + (A_{mm} \wedge B_{mm})\right) \\
&= \operatorname{tr}(A_{11} \wedge B_{11}) \vee \operatorname{tr}(A_{22} \wedge B_{22}) \vee \ldots \vee \operatorname{tr}(A_{mm} \wedge B_{mm}) \\
&= \operatorname{tr}(B_{11} \wedge A_{11}) \vee \operatorname{tr}(B_{22} \wedge A_{22}) \vee \ldots \vee \operatorname{tr}(B_{mm} \wedge A_{mm}) \quad \text{(จากบทตั้งที่ 4.3.2)} \\
&= \operatorname{tr}\left((B_{11} \wedge A_{11}) + (B_{22} \wedge A_{22}) + \ldots + (B_{mm} \wedge A_{mm})\right) \\
&= \operatorname{tr}(B \Diamond A)
\end{aligned}$$

4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทบ๊อคซ์กับผลมีทโครเนคเคอร์

<u>บทนิยาม 4.4.1</u>

สำหรับ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathcal{B})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathcal{B})$ แล้วผลมีทโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A \otimes B = [a_{ij}B] = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathcal{B})$$

ตัวอย่างที่ 4.4.2 พิจารณา $\{0,1\}$

$$\text{กำหนดให้} \quad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad A\otimes B=\begin{bmatrix}1B & 0B & 0B\\ 1B & 1B & 0B\\ 0B & 1B & 1B\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\wedge 1 & 0\wedge 1 & 0\wedge 1\\ 1\wedge 0 & 0\wedge 0 & 0\wedge 0\\ 1\wedge 1 & 1\wedge 1 & 0\wedge 1\\ 1\wedge 0 & 1\wedge 0 & 0\wedge 0\\ 0\wedge 1 & 1\wedge 1 & 1\wedge 1\\ 0\wedge 0 & 1\wedge 0 & 1\wedge 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

<u>**ทฤษฎีบทที่ 4.4.3**</u> ให้ $A,B\in M_{m,n}(\mathcal{B}),C\in M_{p,q}(\mathcal{B})$ และ $D\in M_{q,r}(\mathcal{B})$ จะได้ $(A\otimes C)\lozenge(B\otimes D)=(A\circ B)\otimes(C\wedge D)$

<u>**บทพิสูจน์**</u> ให้ $A,B\in M_{m,n}(\mathcal{B}),C\in M_{p,q}(\mathcal{B})$ และ $D\in M_{q,r}(\mathcal{B})$

จะได้ว่า $(A\otimes C)=\left[(a_{ij}C)_{ij}\right]$ และ $(B\otimes D)=\left[(b_{ij}D)_{ij}\right]$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\otimes C)\lozenge(B\otimes D)&=\left[(a_{ij}C)_{ij}\right]\lozenge\left[(b_{ij}D)_{ij}\right]\\&=\left[(a_{ij}C)_{ij}\wedge(b_{ij}D)_{ij}\right]\\&=\left[(a_{ij}\wedge b_{ij})\wedge(C\wedge D)\right] \quad \text{(จากทบ. 3.2.1 ข้อ 1)}\\&=(A\circ B)\otimes(C\wedge D)\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $(A\otimes C)\lozenge(B\otimes D)=(A\circ B)\otimes(C\wedge D)$

4.5 การยกกำลังบ๊อคซ์

<u>**บทนิยามที่ 4.5.1**</u>

ให้ $A=\left[A_{ij}\right]\in M_{mq,nq}(\mathcal{B})$ โดยแต่ละเมทริกซ์ย่อย A_{ij} มีขนาด $q\times q$ และ $k\in\mathbb{N}$ นิยามโดย $A^{\lozenge 1}=A$ และ $A^{\lozenge(k+1)}=A\lozenge A^{\lozenge k}$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.5.2**</u> ให้ $A=\{2,7,9\}$

พิจารณา $P(A)=\{\{2\},\{7\},\{9\},\{2,7\},\{2,9\},\{7,9\},\{2,7,9\},\varnothing\}$

โดยเรานิยาม $X\vee Y=X\cup Y$ และ $X\wedge Y=X\cap Y$

สำหรับ $X,Y\in P(A)$

กำหนดให้ $$A=\left[\begin{array}{cc}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\} \\ \hline \{7\} & \{2,7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{array}\right]$$

จะได้ว่า $$A^{\circ 2}=A\Diamond A=\left[\begin{array}{cc}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\} \\ \hline \{7\} & \{2,7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{array}\right]\Diamond\left[\begin{array}{cc}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\} \\ \hline \{7\} & \{2,7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\{7\} & \{2,7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\{7\} & \{2,7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\{2\}\wedge\{2\})\vee(\varnothing\wedge\{2,9\}) & (\{2\}\wedge\varnothing)\vee(\varnothing\wedge\{7,9\}) \\ (\{2,9\}\wedge\{2\})\vee(\{7,9\}\wedge\{2,9\}) & (\{2,9\}\wedge\varnothing)\vee(\{7,9\}\wedge\{7,9\}) \\ (\{7\}\wedge\{7\})\vee(\{2,7,9\}\wedge\varnothing) & (\{7\}\wedge\{2,7,9\})\vee(\{2,7,9\}\wedge\{9\}) \\ (\varnothing\wedge\{7\})\vee(\{9\}\wedge\varnothing) & (\varnothing\wedge\{2,7,9\})\vee(\{9\}\wedge\{9\})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\{2\}\cap\{2\})\cup(\varnothing\cap\{2,9\}) & (\{2\}\cap\varnothing)\cup(\varnothing\cap\{7,9\}) \\ (\{2,9\}\cap\{2\})\cup(\{7,9\}\cap\{2,9\}) & (\{2,9\}\cap\varnothing)\cup(\{7,9\}\cap\{7,9\}) \\ (\{7\}\cap\{7\})\cup(\{2,7,9\}\cap\varnothing) & (\{7\}\cap\{2,7,9\})\cup(\{2,7,9\}\cap\{9\}) \\ (\varnothing\cap\{7\})\cup(\{9\}\cap\varnothing) & (\varnothing\cap\{2,7,9\})\cup(\{9\}\cap\{9\})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\{2\}\cup\varnothing & \varnothing\cup\varnothing \\ \{2\}\cup\{9\} & \varnothing\cup\{7,9\} \\ \{7\}\cup\varnothing & \{7\}\cup\{9\} \\ \varnothing\cup\varnothing & \varnothing\cup\{9\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{2\} & \varnothing \\ \{2,9\} & \{7,9\} \\ \{7\} & \{7,9\} \\ \varnothing & \{9\}\end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.5.3</u> สำหรับแต่ละ $A \in M_{mp,nq}(\mathcal{B})$ และ $r,s \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. $A^{\Diamond r} \Diamond A^{\Diamond s} = A^{\Diamond(r+s)}$

2. $\left(A^{\Diamond r}\right)^{\Diamond s} = A^{\Diamond(rs)}$

<u>บทพิสูจน์</u>

1. $A^{\Diamond r} \Diamond A^{\Diamond s} = A^{\Diamond(r+s)}$

เนื่องจาก $A^{\Diamond r} = \underbrace{A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A}_{r}$ และ $A^{\Diamond s} = \underbrace{A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A}_{s}$

โดยบทนิยาม และสมบัติการเปลียนกลุ่มของผลคูณบ๊อคซ์

จะได้ $A^{\Diamond r} \Diamond A^{\Diamond s} = \underbrace{\left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)}_{r} \Diamond \underbrace{\left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)}_{s}$

$$= \underbrace{A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A}_{r+s}$$

$$= A^{\Diamond(r+s)}$$

2. $\left(A^{\Diamond r}\right)^{\Diamond s} = A^{\Diamond(rs)}$

<u>บทพิสูจน์</u> เนื่องจาก $A^{\Diamond r} = A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A$

โดยบทนิยาม และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของผลมีทบ๊อคซ์

จะได้ $\left(A^{\Diamond r}\right)^{\Diamond s} = \left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)^{\Diamond s}$

$$= \underbrace{\underbrace{\left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)}_{r} \Diamond \underbrace{\left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)}_{r} \Diamond \ldots \Diamond \underbrace{\left(A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A\right)}_{r}}_{s}$$

$$= \underbrace{A \Diamond A \Diamond \ldots \Diamond A}_{rs}$$

$$= A^{\Diamond(rs)}$$

บทที่ 5
ความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทบ๊อคซ์กับผลมีทเมทริกซ์

5.1 การแปลงผลมีทบ๊อคซ์เป็นผลมีทปกติ

การแปลงผลมีทบ๊อคซ์เป็นผลมีทเมทริกซ์ปกติ สำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ในรูปแบบบ๊อคซ์ทแยงมุม (The transformation of Box Meet in to normal matrix product for Block Diagonal Matrix – Valued functions)

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.1.1</u> ให้ $A \in M_{np,np}(\mathcal{B})$ และ $X \in M_{np,np}(\mathcal{B})$

ถ้า X เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อกทแยงมุมแล้ว

1. $A \Diamond X = \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}) \wedge X$
2. $X \Diamond A = X \wedge \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn})$

<u>บทพิสูจน์</u>

ให้ $A = [A_{ij}] \in M_{np,np}(\mathcal{B})$ และ X เป็นเมทริกซ์ในรูปแบบบล็อกทแยงมุม

โดยที่ $A_{ij} \in M_{p,p}$ และ $X_{ij} \in M_{p,p}$ $;\forall i, j = 1,2,3,\ldots,n$

กำหนดโดย $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ และ $X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix}$

1. $A \Diamond X = \text{blockdiag}\left(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}\right) \wedge X$

พิจารณา $A \Diamond X = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \Diamond \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \wedge X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} \wedge X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \wedge X_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \Diamond \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{blockdiag}\left(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}\right) \wedge X$$

2. $X \Diamond A = X \wedge \text{blockdiag}\left(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}\right)$

พิจารณา $X \Diamond A = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \Diamond \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} \wedge A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} \wedge A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \wedge A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \Diamond \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= X \wedge \text{blockdiag}\left(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}\right)$$

5.2 การแปลงจอห์นสัน-ไนเลนสำหรับเมริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน

<u>บทนิยามที่ 5.2.1</u>

ให้ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \in M_{m,p}(\mathcal{B})$ เมื่อ $X_i \in M_{m_i,p}(\mathcal{B})$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,\ldots,k$

โดย $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$

เรานิยาม $D(X) = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_k = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_k \end{bmatrix} \in M_{m,kp}(\mathcal{B})$

เห็นได้ชัดว่า D เป็นฟังก์ชันจาก $M_{m,p}(\mathcal{B})$ ไปยัง $M_{m,kp}(\mathcal{B})$

<u>บทนิยามที่ 5.2.2</u>

ให้ $A = [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n] \in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $A_j = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{kj} \end{bmatrix} \in M_{m,p}(\mathcal{B})$

โดย $A_{ij} \in M_{m_i,p}(\mathcal{B})$ สำหรับทุก $j = 1,2,3,\ldots,k$ และ $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$

เรานิยาม $F(A) = [D(A_1) \quad D(A_2) \quad \cdots \quad D(A_n)] \in M_{m,nkp}(\mathcal{B})$

เห็นได้ชัดว่า F เป็นฟังก์ชันจาก $M_{m,np}(\mathcal{B})$ ไปยัง $M_{m,nkp}(\mathcal{B})$

<u>ตัวอย่างที่ 5.2.3</u> ให้ $A=\{1,2\}$

พิจารณา $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

กำหนดให้ $$B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{1\}\\\{2\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2\}\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{2\}\\\{2\}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\varnothing\\\{1\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1\}\\\{1\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2\}\\\varnothing\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

จะได้ $$F(B)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\{1\}\\\{2\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2\}\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{2\}\\\{2\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\{1\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1\}\\\{1\}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varnothing\\\varnothing\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\{1,2\}\\\varnothing\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2.4</u> F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $X,Y\in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$

สมมติ $F(X)=F(Y)$

นั่นคือ $\left[D(X_1)\ \ D(X_2)\ \ \cdots\ \ D(X_m)\right]=\left[D(Y_1)\ \ D(Y_2)\ \ \cdots\ \ D(Y_m)\right]$

จะได้ $D(X_i)=D(Y_i)\ \ ;\forall i\in\mathbb{N}$

ดังนั้น $X=Y$

สรุปว่า F เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>บทนิยามที่ 5.2.5</u>

ให้ $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \in M_{l,q}(\mathscr{B})$ เมื่อ $A_i \in M_{l,q_i}(\mathscr{B})$ สำหรับทุก $i=1,2,3,\ldots,n$ และ $q=\sum_{i=1}^{n} q_i$

เรานิยามโดย $G(A)=A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \in M_{nl,q}(\mathscr{B})$

เห็นได้ชัดว่า G เป็นฟังก์ชันจาก $M_{l,q}(\mathscr{B})$ ไปยัง $M_{nl,q}(\mathscr{B})$

<u>ตัวอย่างที่ 5.2.6</u> พิจารณา $\{0,1\}$

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $G(A)=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2.7</u> G เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $X,Y \in M_{l,q}(\mathscr{B})$ เมื่อ $q=\sum_{i=1}^{n} q_i$

สมมติ $G(X)=G(Y)$

$X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_n$

จะได้ว่า $X=Y$

สรุปได้ว่า G เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>**ทฤษฎีบทที่ 5.2.8**</u> การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

ให้ $A \in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$ และ $B \in M_{l,q}(\mathcal{B})$ เมื่อ $q=\sum_{i=1}^{n} q_i$
จะได้ว่า $A \lozenge B = F(A) \wedge G(B)$ เมื่อ F และ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยบทนิยามที่ 5.2.1 และ 5.2.5

<u>บทพิสูจน์</u>

ให้ $A \in M_{m,np}(\mathcal{B})$ เมื่อ $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$ และ $B \in M_{l,q}(\mathcal{B})$ เมื่อ $q=\sum_{i=1}^{n} q_i$

จะได้ว่า $F(A)=\begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n) \end{bmatrix}$

และ $G(B)=B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$

พิจารณา

$$F(A) \wedge G(B)=\begin{bmatrix} D(A_1) & D(A_2) & \cdots & D(A_n) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} D(A_1)\wedge B_1 & D(A_2)\wedge B_2 & \cdots & D(A_n)\wedge B_n \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k1} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{k1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kn} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_{1n} \\ B_{2n} \\ \vdots \\ B_{kn} \end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}\wedge B_{11} & A_{12}\wedge B_{12} & \cdots & A_{1n}\wedge B_{1n} \\ A_{21}\wedge B_{21} & A_{22}\wedge B_{22} & \cdots & A_{2n}\wedge B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1}\wedge B_{n1} & A_{k2}\wedge B_{k2} & \cdots & A_{kn}\wedge B_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=A \lozenge B$$

สรุปได้ว่า $A \lozenge B = F(A) \wedge G(B)$

บทที่6

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

ผู้วิจัยได้นิยามการดำเนินการเชิงพีชคณิตพื้นฐานของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยการจอยน์ฮาดามาร์ด การมีทฮาดามาร์ด การจอยน์และการมีทเมทริกซ์ จึงทำให้เกิดทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่น่าสนใจซึ่งสัมพันธ์กับการดำเนินการเชิงพีชคณิตข้างต้นนั่นคือ

1. สมบัติเกี่ยวกับการจอยน์ฮาดามาร์ดและการมีทเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
    - การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาด้วยสเกลาร์เหนือการจอยน์ฮาดามาร์ดเมทริกซ์
    - การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาด้วยเมทริกซ์เหนือการจอยน์ฮาดามาร์ดเมทริกซ์
2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการมีทของเมทริกซ์
3. สมบัติเกี่ยวกับการทรานสโพสของเมทริกซ์
4. สมบัติเกี่ยวกับรอยของเมทริกซ์

นอกจากความสัมพันธ์ข้างต้นที่กล่าวมาสามารถนำไปสู่แนวคิดของผลมีทบ๊อคซ์ซึ่งผู้วิจัยได้นิยามผลมีทบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทบ๊อคซ์กับการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตรวมไปถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลมีทบ๊อคซ์กับผลมีทเมทริกซ์ซึ่งประกอบด้วย

1. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของผลมีทบ๊อคซ์
2. สมบัติการมีเอกลักษณ์ของผลมีทบ๊อคซ์
3. การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาของผลมีทบ๊อคซ์เหนือการจอยน์ฮาดามาร์ดของเมทริกซ์
4. การแจกแจงทรานสโพสเหนือการมีทบ๊อคซ์

ยิ่งกว่านั้นผู้วิจัยสามารถแปลงผลมีทบ๊อคซ์เป็นผลมีทเมทริกซ์แบบปกติโดยใช้การแปลงจอห์นสัน-ไนเลน

6.2 ข้อเสนอแนะ

เราสามารถพิจารณาศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลจอยน์บ๊อคซ์ของเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีนใด ๆ เช่น การสลับที่ การเปลี่ยนกลุ่ม หรือการมีเอกลักษณ์เป็นต้น ยิ่งกว่านั้นยังศึกษาความสัมพันธ์ของผลจอยน์บ๊อคซ์ที่น่าสนใจไม่ว่าจะเป็น การแจกแจงทางซ้ายและทางขวาของผลจอยน์บ๊อคซ์เหนือการจอยน์ฮาดามาร์ดหรือการแจกแจงทรานสโพสของเมทริกซ์เหนือการจอยน์บ๊อคซ์เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] ประวิตร เปี่ยมสันติกุล, สุดารัตน์ เกษมสุข, หทัยดาว แช่มมาก. 2560. **ผลคูณบ๊อคซ์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่**. กรุงเทพมหานคร: คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[2] Salvatore A. Adelfio, Christine F and Nolan. 1964. **Principles and application of BLOOEAN ALGEBRA for electronic engineers.** New York

[3] Maritn Pearl. 1973. **MATRIX THEORY AND FINITE MATHEMATICS.** United States America: 16 – 50

[4] Faraz E. Hohn. 1958. **Elementary Matrix Algebra.** New York: 1 – 20

[5] Marshall C. Pease. 1966. **Methods of MATRIX ALGEBRA.** New York San Francisco London.

[6] Elliott Mendelson, Ph.D. 1987. **SCHAUM'S OUTLINE OF THEORY AND PROBLEMS OF BOOLEAN ALGEBRA and SWITCHING CIRCITS.** Singapore: 1 - 59

Plagiarism Checking Report

Created on Jun 4, 2019 at 12:44 PM

Submission Information

ID	SUBMISSION DATE	SUBMITTED BY	ORGANIZATION	FILENAME	STATUS	SIMILARITY INDEX
1252809	Jun 4, 2019 at 12:44 PM	58050079@kmitl.ac.th	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง	สมบัติเชิงพีชคณิตของผลมีทบ๊อคซ์สำหรับเมทริกซ์เหนือพีชคณิตบูลีน.pdf	Completed	0.07 %

Match Overview

NO.	TITLE	AUTHOR(S)	SOURCE	SIMILARITY INDEX
1	การรู้จำตัวอักษรพิมพ์ไทยโดยการใช้วิธีคอนดิชั่นนัลแรนดอมฟิลด์สและระยะเซนทรอยด์แบบลำดับชั้น,Printed Thai character recognition using conditional random fields and hierarchical centroid distance	อุษนีย์ สังฆธรรม	สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์	0.06 %
2	ระบบควบคุมการเติมออกซิเจนแบบอัตโนมัติในบ่อเลี้ยงสัตว์น้ำโดยใช้พลังงานทดแทนร่วม,Automatic control oxygen enhancement system for pond powered by hybrid renewables energy	กีรดิษ สายพัทลุง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์	0.01 %