

การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อตัวแบบการวัดคุณภาพน้ำสถานะ
เสถียรในลำน้ำโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด

A NUMERICAL COMPUTATION TO A STEADY WATER-
QUALITY MEASUREMENT MODEL IN A STREAM USING
A FINITE DIFFERENCE METHOD



นางสาวนัตยา คำคุณ

นางสาวศินีนาฏ ยวญใจ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A NUMERICAL COMPUTATION TO A STEADY
WATER-QUALITY MEASUREMENT MODEL IN A STREAM
USING A FINITE DIFFERENCE METHOD



NATAYA CAMCOON

SINEENAT YUANJAI

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อตัวแบบการวัดคุณภาพน้ำสถานะเสถียรในลำน้ำ
โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด

A Numerical Computation to a Steady Water-Quality
Measurement Model in a Stream Using a Finite Difference
Method

ชื่อนักศึกษา นางสาวนัตยา คำคุณ รหัสนักศึกษา 57050083
นางสาวศินีนาฏ ยวณูใจ รหัสนักศึกษา 57050137

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

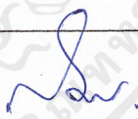


ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม อ.จินดา ไชยช่วย

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติ
ให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์
ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ กรรมการ	ดร.ดร. คำนึ่งกิจ
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ	การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อตัวแบบการวัดคุณภาพน้ำสถานะเสถียรในลำน้ำ โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด A Numerical Computation to a Steady Water-Quality Measurement Model in a Stream Using a Finite Difference Method
ชื่อนักศึกษา	นางสาวนาตยา คำคุณ รหัสนักศึกษา 57050083 นางสาวศินีนาฏ ยวญใจ รหัสนักศึกษา 57050137
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

ปัญหาน้ำเสียมักมีสาเหตุมาจากการปล่อยน้ำทิ้งจากโรงงานอุตสาหกรรม คุณภาพของน้ำสามารถพิจารณาจากดัชนีคุณภาพน้ำ หากสูงกว่ามาตรฐานหรือลักษณะการใช้งานจะถือว่าเป็นภาวะน้ำเสีย ซึ่งการตรวจวัดคุณภาพน้ำสามารถทำได้ โดยการตรวจวัดจากการเก็บตัวอย่างน้ำ และการประมาณค่าโดยการจำลองแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำนั้นสามารถอธิบายได้ด้วยสมการการแพร่-การพาปฏิกริยา หากเป็นการจำลองแบบในช่วงเวลาหนึ่งเวลาใดจะจำลองแบบในสถานะไม่เสถียร และหากเป็นการจำลองแบบในระยะทางที่ไม่ขึ้นกับเวลา จะจำลองแบบในสถานะเสถียร วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการจำลองแบบเชิงตัวเลขของการตรวจวัดความเข้มข้นของมลพิษในลำคลองในสถานะเสถียร โดยสามารถจำลองสถานการณ์ภายใต้เงื่อนไขขอบที่แตกต่างกันไป ที่กำหนดโดยจุดปล่อยมลพิษ ชนิดของมลพิษ ลักษณะของกระแสน้ำรวมถึงกลไกการเกิดมลพิษด้วยตัวของสิ่งแวดล้อมเอง

คำสำคัญ : ลำน้ำ วิธีผลต่างจำกัด สมการการแพร่-การพา การวัดคุณภาพน้ำ

Title	A Numerical Computation to a Steady Water-Quality Measurement Model in a Stream Using a Finite Difference Method		
Students	Miss. Nataya Camcoon	Student ID	57050083
	Miss. Sineenat Yuanjai	Student ID	57050137
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)		
Department	Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2017		
Advisor	Asst.Prof.Dr.Nopparat Pochai		
Co-advisor	Mr.Chinda Chaichuay		

Abstract

Wastewater problems are mainly caused by waste water discharge from industrial. Based upon the water quality index (WQI), If the WQI score of the water is higher than standard, it is considered as wastewater. A water-quality assessment can be conducted by analyzing of field data collection and approximately of mathematical simulation. Water – quality model can be describe by a one – dimensional advection – diffusion – reaction equation. If the model is used to assess the water – quality in a specified period of time, the unsteady – state model will be introduced. If the model is employed to measure the water – quality in a long period of time. The steady – state model will be considered. In this research, the numerical simulation for approximately water pollutant concentration in a steam under steady state is focused. The model can be used to simulate the water – quality in several scenarios under different conditions such as discharged pollutant concentration, type of pollutant matter.

Keywords : Stream, Finite Difference Method, Advection-Diffusion Equation, Water-Quality Measurement

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง “การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อการวัดคุณภาพน้ำในลำน้ำโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด” ได้ประสบกับปัญหาและอุปสรรคต่างๆ มากมาย และการแก้ไขปัญหาลำนี้ไม่สามารถแก้ไขปัญหาและอุปสรรคดังกล่าวได้หากขาดบุคคลเหล่านี้ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และ อ.จินดา ไชยช่วย ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้และได้ให้ความรู้คำแนะนำและแนวทางในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ อีกทั้งยังเป็นกำลังใจในการทำงาน

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการสอบ และ ผศ.ดร.กาญจนา คำนิงกิจ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนในการทำปัญหาพิเศษและเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด เพื่อนๆ สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่คอยแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และให้กำลังใจในการทำงานครั้งนี้ เจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆ จากผู้ที่เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถกล่าวนามได้หมดในที่นี้ ผู้จัดทำขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

นัตยา คำคุณ
ศินีนาฏ ยาวุใจ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	จ
สารบัญรูป.....	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ขอบเขต.....	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.5 ระยะเวลาการดำเนินงาน.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 การประมาณค่าโดยตรง.....	4
2.2 ระเบียบวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์และค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข.....	8
2.3 การประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....	18
2.4 ระบบพิกัดที่ไม่เป็นระบบพิกัดฉาก.....	25
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	29
3.1 ปัญหาค่าขอบ.....	29
3.2 ตัวแบบการประเมินคุณภาพน้ำ.....	32
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล.....	34
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	56
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	56
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	56
เอกสารอ้างอิง.....	57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 2.1 วิธีการใช้ h ที่น้อยกว่าจะให้ค่าคลาดเคลื่อนที่.....	13
ตารางที่ 2.2 ผลเฉลยจากวิธีที่ 2 ดีกว่าผลเฉลยจากวิธีที่.....	24
ตารางที่ 4.1 กำหนดตัวแปรสำหรับแต่ละกรณีศึกษา.....	34
ตารางที่ 4.2 กรณีศึกษาที่ 1.....	35
ตารางที่ 4.3 กรณีศึกษาที่ 2.....	36
ตารางที่ 4.4 กรณีศึกษาที่ 3.....	36
ตารางที่ 4.5 กรณีศึกษาที่ 4.....	37
ตารางที่ 4.6 กรณีศึกษาที่ 5.....	37
ตารางที่ 4.7 กรณีศึกษาที่ 6.....	38
ตารางที่ 4.8 กรณีศึกษาที่ 7.....	38
ตารางที่ 4.9 กรณีศึกษาที่ 8.....	39
ตารางที่ 4.10 กรณีศึกษาที่ 9.....	39
ตารางที่ 4.11 กรณีศึกษาที่ 10.....	40
ตารางที่ 4.12 กรณีศึกษาที่ 11.....	40
ตารางที่ 4.13 กรณีศึกษาที่ 12.....	41
ตารางที่ 4.14 กรณีศึกษาที่ 13.....	41
ตารางที่ 4.15 กรณีศึกษาที่ 14.....	42
ตารางที่ 4.16 กรณีศึกษาที่ 15.....	42
ตารางที่ 4.17 กรณีศึกษาที่ 16.....	43
ตารางที่ 4.18 กรณีศึกษาที่ 17.....	43
ตารางที่ 4.19 กรณีศึกษาที่ 18.....	44
ตารางที่ 4.20 กรณีศึกษาที่ 19.....	44
ตารางที่ 4.21 กรณีศึกษาที่ 20.....	45
ตารางที่ 4.22 กรณีศึกษาที่ 21.....	45
ตารางที่ 4.23 กรณีศึกษาที่ 22.....	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.24 กรณีสึกษาที่ 23.....	46
ตารางที่ 4.25 กรณีสึกษาที่ 24.....	47
ตารางที่ 4.26 กรณีสึกษาที่ 25.....	47
ตารางที่ 4.27 กรณีสึกษาที่ 26.....	48
ตารางที่ 4.28 กรณีสึกษาที่ 27.....	48
ตารางที่ 4.29 กรณีสึกษาที่ 28.....	49
ตารางที่ 4.30 กรณีสึกษาที่ 29.....	49
ตารางที่ 4.31 กรณีสึกษาที่ 30.....	50
ตารางที่ 4.32 กรณีสึกษาที่ 31.....	50
ตารางที่ 4.33 กรณีสึกษาที่ 32.....	51
ตารางที่ 4.34 กรณีสึกษาที่ 33.....	52
ตารางที่ 4.35 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อค่าจุดกำเนิดมลพิษมีค่าเพิ่มขึ้น (Q).....	52
ตารางที่ 4.36 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่ออัตราการสลายตัวของปฏิกิริยา ของมลพิษ (R) มีค่าเพิ่มขึ้น.....	53
ตารางที่ 4.37 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อความเร็วของกระแส (u) มีค่าเพิ่มขึ้น.....	54

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....	4
รูปที่ 2.2 ระเบียบวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์และค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข.....	9
รูปที่ 2.3 พิจารณากรณีที่ตาข่ายมีระยะห่างไม่เท่ากัน.....	15
รูปที่ 2.4 ตัวอย่าง 2.3.1 การกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า.....	19
รูปที่ 2.5 รูปแบบแผนผัง ตัวอย่าง 2.3.1.....	19
รูปที่ 2.6 ตัวอย่าง 2.3.2 (Neumann Problem).....	21
รูปที่ 2.7 รูปแบบแผนผัง ตัวอย่าง 2.3.2.....	21
รูปที่ 2.8 ใช้จุดต่อจำลอง.....	23
รูปที่ 2.9 ตัวดำเนินการลาปลาซใน 2 มิติ.....	25
รูปที่ 2.10 การแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	27
รูปที่ 4.1 กรณีศึกษาที่ 1.....	36
รูปที่ 4.2 กรณีศึกษาที่ 2.....	36
รูปที่ 4.3 กรณีศึกษาที่ 3.....	37
รูปที่ 4.4 กรณีศึกษาที่ 4.....	37
รูปที่ 4.5 กรณีศึกษาที่ 5.....	38
รูปที่ 4.6 กรณีศึกษาที่ 6.....	38
รูปที่ 4.7 กรณีศึกษาที่ 7.....	39
รูปที่ 4.8 กรณีศึกษาที่ 8.....	39
รูปที่ 4.9 กรณีศึกษาที่ 9.....	40
รูปที่ 4.10 กรณีศึกษาที่ 10.....	40
รูปที่ 4.11 กรณีศึกษาที่ 11.....	41
รูปที่ 4.12 กรณีศึกษาที่ 12.....	41
รูปที่ 4.13 กรณีศึกษาที่ 13.....	42
รูปที่ 4.14 กรณีศึกษาที่ 14.....	42
รูปที่ 4.15 กรณีศึกษาที่ 15.....	43

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.16 กรณีสึกษาที่ 16.....	43
รูปที่ 4.17 กรณีสึกษาที่ 17.....	44
รูปที่ 4.18 กรณีสึกษาที่ 18.....	44
รูปที่ 4.19 กรณีสึกษาที่ 19.....	45
รูปที่ 4.20 กรณีสึกษาที่ 20.....	45
รูปที่ 4.21 กรณีสึกษาที่ 21.....	46
รูปที่ 4.22 กรณีสึกษาที่ 22.....	46
รูปที่ 4.23 กรณีสึกษาที่ 23.....	47
รูปที่ 4.24 กรณีสึกษาที่ 24.....	47
รูปที่ 4.25 กรณีสึกษาที่ 25.....	48
รูปที่ 4.26 กรณีสึกษาที่ 26.....	48
รูปที่ 4.27 กรณีสึกษาที่ 27.....	49
รูปที่ 4.28 กรณีสึกษาที่ 28.....	49
รูปที่ 4.29 กรณีสึกษาที่ 29.....	50
รูปที่ 4.30 กรณีสึกษาที่ 30.....	50
รูปที่ 4.31 กรณีสึกษาที่ 31.....	51
รูปที่ 4.32 กรณีสึกษาที่ 32.....	51
รูปที่ 4.33 กรณีสึกษาที่ 33.....	52
รูปที่ 4.34 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อค่าจุดกำเนิดมลพิษ (Q) มีค่าเพิ่มขึ้น.....	53
รูปที่ 4.35 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่ออัตราการสลายตัวของปฏิกิริยา ของมลพิษ (R) มีค่าเพิ่มขึ้น.....	54
รูปที่ 4.36 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อความเร็วของกระแส (u) มีค่าเพิ่มขึ้น.....	55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันเรามีการใช้สารเคมีกันมาก สารหลายชนิดจะทำให้เกิดมลพิษ ซึ่งมีการคิดค้นสารต่างๆ ที่เป็นมิตรกับสิ่งแวดล้อม ตัวอย่างเช่น ผงซักฟอกที่เป็นมิตรกับสิ่งแวดล้อม น้ำทิ้งจากครัวเรือนหรือน้ำทิ้งจากเกษตร และปุ๋ยสัตว์ที่มีการใช้สารเคมี เป็นอีกส่วนหนึ่งที่ทำให้เกิดมลพิษ หากมีความเข้มข้นสูงจะทำให้เกิดมลพิษที่รุนแรง สารเคมีที่มีพิษรุนแรงจะไม่ย่อยสลายและสร้างมลพิษเป็นเวลายาวนาน แต่ถ้าหากเป็นน้ำทิ้งจากโรงงานอุตสาหกรรม ซึ่งมีโลหะหนักละลายอยู่จะทำให้เกิดมลพิษที่รุนแรงมากดังนั้นจึงต้องมีการบำบัดน้ำทิ้งก่อนที่จะปล่อยลงสู่แหล่งน้ำ ในประเทศที่พัฒนาแล้วจะตระหนักถึงปัญหาวิกฤติของน้ำ จึงทุ่มค่าใช้จ่ายอย่างมากในการบำบัดน้ำทิ้ง โดยเฉพาะโลหะหนักที่ปนมากับน้ำทิ้งในโรงงานอุตสาหกรรม เช่น แคดเมียม โปรท ตะกั่ว โครเมียม ซึ่งไม่ย่อยสลายเมื่อมีโลหะหนักอยู่ในน้ำจุลินทรีย์จะกินโลหะหนัก ปลาเล็กๆ จะกินจุลินทรีย์ ปลาใหญ่จะกินปลาเล็ก สุดท้ายคนที่กินปลาเข้าไปจะมีโลหะหนักสะสมอยู่ในร่างกาย ทำให้เป็นโรคที่เกิดจากมลพิษ เช่น โรคนิเมตะ ที่ทำให้มือเท้าชา สายตาบอดพร่อง โรคอิตไอไต ที่ทำให้กระดูกปวดร้าว เป็นต้น เนื่องจากแหล่งกำเนิดมลพิษทางน้ำจากแหล่งชุมชนนับว่าเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดมลพิษทางน้ำ เป็นบริเวณที่ทำให้เกิดปัญหา น้ำเสียมาก น้ำเสียจากชุมชนเกิดจากการใช้น้ำในชีวิตประจำวัน ได้แก่ น้ำทิ้งที่มาจากห้องน้ำ น้ำซักผ้า ซักล้าง ประุงอาหาร ขับถ่าย การชำระร่างกาย จากที่อยู่อาศัยทุกประเภท อาคาร บ้านเรือน อาคารชุด ตลาดสด ร้านค้า ร้านอาหาร ภัตตาคาร หอพัก โรงพยาบาล สถานพยาบาล โรงแรม สถานบริการซ่อมรถยนต์ น้ำทิ้งจะถูกปล่อยมาจากท่อน้ำโสโครกซึ่งส่วนใหญ่จะไหลลงสู่แม่น้ำโดยไม่มีการบำบัดก่อน จะเห็นได้ว่ามีสารมลพิษมากมายหลายประเภทปนเปื้อนอยู่ในน้ำเสียชุมชน นอกจากน้ำทิ้งจากท่อระบายน้ำแล้วน้ำทิ้งจาก ชุมชนปริมาณมากที่ไหลลงสู่แหล่งน้ำในลักษณะที่มีตำแหน่งไม่ชัดเจน การตรวจวัดคุณภาพน้ำ สามารถทำได้โดยการเก็บตัวอย่างการใช้อุปกรณ์ตรวจวัดและการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หากเป็นวิธีการเก็บข้อมูลภาคสนาม จะทำให้ทราบถึงคุณภาพน้ำเฉพาะในอดีตและปัจจุบันเท่าที่ได้เก็บข้อมูลไว้ หากข้อมูลไม่ได้เก็บในช่วงใดก็จะไม่ทราบเลย อีกทั้งไม่ทราบแนวโน้มของคุณภาพน้ำในอนาคต แต่การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สามารถแก้ไขปัญหานี้ได้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อวัดคุณภาพน้ำในลำน้ำ
- 2) เพื่อศึกษาให้รู้ถึงตำแหน่งของสารพิษในลำน้ำ
- 3) เพื่อศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปฏิกิริยาการแพร่กระจายในลำน้ำ
- 4) เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างจำกัด และสามารถนำมาประยุกต์ใช้หาผลเฉลยของตัวแบบ การแพร่กระจายในลำน้ำได้

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) ปฏิกิริยาการแพร่กระจายเป็นปฏิกิริยาการแพร่กระจายในลำน้ำเท่านั้น
- 2) ปฏิกิริยาการแพร่กระจายเป็นปฏิกิริยาการแพร่กระจายในลำธารเป็นอิสระโดยไม่ขึ้นกับเวลา
- 3) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่ศึกษามีอันดับความแม่นยำไม่เกินอันดับสอง คือวิธีผลต่างจากกลาง สร้างโปรแกรมในการคำนวณหาค่าได้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) เพื่อศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือวิธีผลต่างจำกัด เพื่อประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
- 2) สามารถนำความรู้ทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์-สามัญได้
- 3) ได้ศึกษาโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการคำนวณ และสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาอื่น ๆ ได้

1.5 ระยะเวลาการดำเนินงาน

	เดือน										
	ส.ค. 60	ก.ย. 60	ต.ค. 60	พ.ย. 60	ธ.ค. 60	ม.ค. 61	ก.พ. 61	มี.ค. 61	เม.ย. 61	พ.ค. 61	มิ.ย. 61
หาอาจารย์ที่ปรึกษา ปัญหาพิเศษปรึกษา เรื่องที่สนใจ											
ค้นคว้าและศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องที่สนใจ											
วางแผนการวิจัย											
บทที่ 1 บทนำ											
บทที่ 2 ทฤษฎีและ งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง											
บทที่ 3 วิธีการ ดำเนินงานวิจัย											
บทที่ 4 ผลการวิจัยและ การอภิปรายผล											
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัย และข้อเสนอแนะ											
จัดทำรูปเล่ม											
ตรวจสอบและนำเสนอ											

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

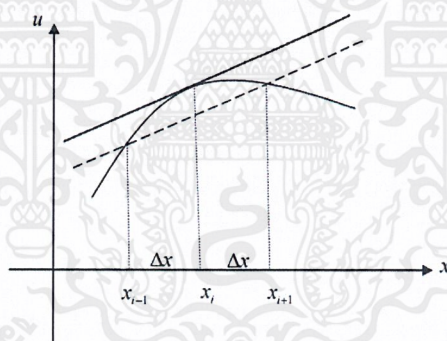
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method)

ในบทนี้มีจุดประสงค์เพื่อแนะนำให้รู้จักกับระเบียบวิธีผลต่างจำกัด เพื่อนำไปใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ ODE ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป โดยในเบื้องต้นจะกล่าวถึงการประมาณค่าโดยตรงดังหัวข้อต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าโดยตรง (Direct approximations)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

พิจารณา อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของตัวแปรตาม u เทียบกับตัวแปรอิสระ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $\frac{du}{dx}$ เราสามารถประมาณค่าโดยตรงของ $\frac{du}{dx}$ ได้ 3 วิธีโดยพิจารณาจากรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

กำหนดสัญลักษณ์ $u(x_i)$ แทนด้วย u_i

และ $\frac{du}{dx}(x_i)$ แทนด้วย $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$

ในทางเรขาคณิตเราทราบว่า $\left(\frac{du}{dx}\right)_i$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $u(x)$ ที่จุด x_i

ดังนั้นเราสามารถประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าวได้ 3 วิธีโดยตรงดังนี้

1. ผลต่างทางหน้า (Forward difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุด x_i และ x_{i+1} นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (2.1.1)$$

เมื่อ $h = \Delta x$

2. ผลต่างทางหลัง (Backward difference) เป็นการประมาณจากความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุด x_i และ x_{i-1} นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (2.1.2)$$

3. ผลต่างศูนย์กลาง (Central difference) เป็นการประมาณจากความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุด x_{i-1} และ x_{i+1} นั่นคือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (2.1.3)$$

โดยทั่วไปการประมาณค่าของอนุพันธ์แบบผลต่างศูนย์กลาง จะให้ค่าใกล้เคียงกว่า การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างทางหน้า และผลต่างทางหลัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.1 กำหนดฟังก์ชัน $y = x^2$ และ $\Delta x = 0.2$ จงประมาณค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = 1$ ในแบบผลต่างทางหน้า ผลต่างทางหลัง และ ผลต่างศูนย์กลาง พร้อมกับเปรียบเทียบค่าที่ได้กับค่าแม่นยำ (Exact Value)

วิธีทำ

1. โดยวิธีผลต่างทางหน้าจะได้ว่า

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_{1+0.2} - y_1}{0.2} = \frac{(1.2)^2 - 1^2}{0.2} = 2.2$$

2. โดยวิธีผลต่างทางหลังจะได้ว่า

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_1 - y_{1-0.2}}{0.2} = \frac{1^2 - (0.8)^2}{0.2} = 1.8$$

3. โดยวิธีผลต่างศูนย์กลางจะได้ว่า

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_{1+0.2} - y_{1-0.2}}{2(0.2)} = \frac{(1.02)^2 - (0.8)^2}{0.4} = 2.0$$

สำหรับค่าแม่นยำตรงหาได้จาก

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\text{ดังนั้น } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2(1) = 2$$

#

หมายเหตุ โดยทั่วไปการประมาณค่าของอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างจำกัด การใช้ Δx ที่เล็กกว่าย่อมให้ค่าที่ดีกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.2 กำหนดฟังก์ชัน $y = x^2$ และ Δx กำหนดค่า 4 ค่า คือ 0.01, 0.1, 0.2 และ 0.4

จงประมาณค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = 1$ โดยใช้วิธีผลต่างทางหน้าสำหรับแต่ละค่าของ Δx พร้อมกับเปรียบเทียบค่าที่ได้กับค่าแม่นยำ (Exact Value)

วิธีทำ

1. โดยวิธีผลต่างทางหน้า สำหรับ $h = \Delta x = 0.4$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_{1+0.4} - y_1}{0.4} = \frac{(1.4)^2 - 1^2}{0.4} = 2.4$$

2. โดยวิธีผลต่างทางหน้า สำหรับ $h = \Delta x = 0.2$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)} \approx \frac{y_{1+0.2} - y_1}{0.2} = \frac{(1.2)^2 - 1^2}{0.2} = 2.2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. โดยวิธีผลต่างทางหน้า สำหรับ $h = \Delta x = 0.1$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_{1+0.1} - y_1}{0.1} = \frac{(1.1)^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$$

4. โดยวิธีผลต่างทางหน้า สำหรับ $h = \Delta x = 0.01$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} \approx \frac{y_{1+0.01} - y_1}{0.01} = \frac{(1.1)^2 - 1^2}{0.01} = 2.01$$

สำหรับค่าแม่นยำได้จาก ตัวอย่าง 2.1 คือ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2x = 2(1) = 2$

เห็นได้ชัดว่ายิ่ง Δx มีขนาดเล็กลงเท่าไร ยิ่งทำให้ค่าประมาณของอนุพันธ์มีค่าเข้าใกล้ค่าแม่นยำมากยิ่งขึ้น

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสูง

สำหรับการประมาณค่าของ $\frac{d^2u}{dx^2}$ เราสามารถประมาณค่าได้โดยการประยุกต์ในแต่ละวิธีดังนี้

1. ผลต่างทางหน้า สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i+1} + u_i}{h} \right] \\ &= \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ผลต่างทางหลัง สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h} \right] \\ &= \left[\frac{u_i - u_{i-1} - u_{i-1} + u_{i-2}}{h} \right] \\ &= \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \end{aligned}$$

3. ผลต่างศูนย์กลาง สามารถประยุกต์หาอนุพันธ์อันดับสองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+1} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_i + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+1} - u_i - u_i + u_{i-1}}{h} \right] \\ &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

หมายเหตุ สำหรับการประมาณค่าโดยตรงที่กล่าวมา เราเพียงแต่สามารถประมาณค่าได้เท่านั้น แต่ไม่มีการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน (Error) แต่อย่างไร วิธีที่จะกล่าวต่อไปจะทราบค่าคลาดเคลื่อนด้วย ดังรายละเอียดในหัวข้อ 2.2

2.2 ระเบียบวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์และค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข (Taylor series Method and Numerical Error)

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้ทุกอันดับ เราสามารถเขียน $f(x)$ ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ รอบจุด $x = a$ โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

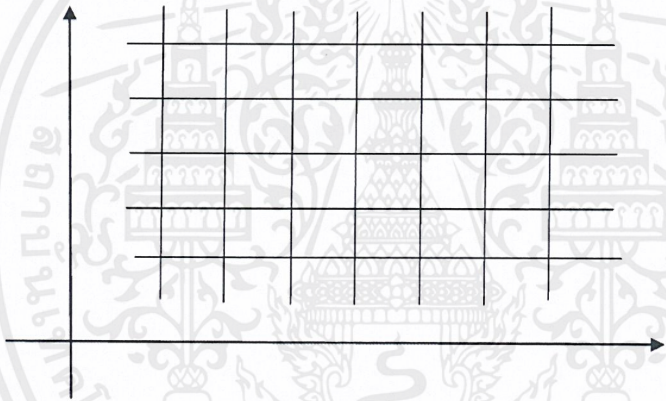
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots \quad (2.2.1)$$

ในกรณีที่ $a = 0$ เราจะเรียกอนุกรมดังกล่าวว่าอนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin Series) โดยที่

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} + \dots \quad (2.2.2)$$

เราสามารถประยุกต์แนวคิดนี้ไปสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาตาข่าย (Grid) ในระนาบ xy ที่มี $\Delta x = h$ และ $\Delta y = k$ ดังรูป



รูปที่ 2.2 ระเบียบวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์และค่าตลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข

จะเห็นว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $u(x, y)$ รอบจุด x_i ที่จุด $x_i + h$ คือ

$$u(x_i + h, y) = u(x_i, y) + h \frac{\partial u(x_i, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y)}{\partial x^3} + \dots$$

และ อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $u(x, y)$ รอบจุด x_i ที่จุด $x_i - h$ คือ

$$u(x_i - h, y) = u(x_i, y) - h \frac{\partial u(x_i, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y)}{\partial x^3} + \dots$$

สมการทั้งสองสามารถเขียนในรูปต่อไปนี้

$$u_{i+1} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.3)$$

และ
$$u_{i-1} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.4)$$

การประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง

จากสมการ (2.2.3) เราสามารถหาค่าของ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ ในรูป

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots$$

และเราสามารถประมาณค่าของ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ แบบผลต่างทางหลัง ในรูป

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \quad (2.2.5)$$

เมื่อ $O(h)$ แสดงอันดับของค่าเคลื่อน

จากสมการ (2.2.4) เราสามารถหาค่าของ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ ในรูป

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots$$

และเราสามารถประมาณค่าของ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ แบบผลต่างทางหลัง ในรูป

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

เมื่อ $O(h)$ แสดงอันดับของค่าเคลื่อน (2.2.6)

ถ้าเรานำสมการ (2.2.3) – (2.2.4) และจัดสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots$$

และเราสามารถประมาณค่าของ $\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}$ แบบผลต่างศูนย์กลาง ในรูป

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2)$$

เมื่อ $O(h^2)$ แสดงอันดับของค่าเคลื่อน

(2.2.7)

หมายเหตุ จากการพิจารณาอันดับค่าเคลื่อนจากการประมาณค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยอาศัยอนุกรมเทย์เลอร์ จะพบว่า การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างศูนย์กลางจะมีคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีผลต่างทางหน้าและผลต่างทางหลัง

การประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

ถ้าเรานำสมการ (2.2.3) + (2.2.4) และจัดสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \dots$$

และเราสามารถประมาณค่าของ $\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}$ แบบผลต่างศูนย์กลาง ในรูป

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

เมื่อ $O(h^2)$ แสดงอันดับของค่าเคลื่อน

ในการทำงานเดียวกันกับการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x เราสามารถสรุปการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ได้ดังต่อไปนี้

จะเห็นว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $u(x, y)$ รอบจุด y_j ที่จุด $y_j + k$ คือ

$$u(x_i, y_j + k) = u(x_i, y_j) + k \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial y^3} + \dots$$

และอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $u(x, y)$ รอบจุด x_i ที่จุด $x_i - h$ คือ

$$u(x_i, y_j - k) = u(x_i, y_j) - k \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial y^3} + \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการทั้งสองสามารถเขียนในรูปต่อไปนี้

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.8)$$

และ
$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.9)$$

โดยการจัดรูปใหม่ของสมการ (2.2.8) และ (2.2.9)

เราจะได้สูตรในการประมาณค่าของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ในรูปแบบต่างๆ ดังนี้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \quad (\text{forward})$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad (\text{backward})$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \quad (\text{central})$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (\text{central})$$

ตัวอย่าง 2.2.1 กำหนด $u(x, y) = ye^x$ จงประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด (1.3,1) โดยใช้วิธีผลต่างทางหน้า ผลต่างทางหลังและผลต่างศูนย์กลาง โดยใช้ $\Delta x = h = 0.1$ และ $\Delta x = h = 0.05$

วิธีทำ

สำหรับ $h = 0.1$ เราสามารถประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด (1.3,1) โดยอาศัยสมการ (2.2.5) (2.2.6) และ (2.2.7) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Forward: } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(1.3+h,1) - u(1.3,1)}{h} = \frac{u(1.4,1) - u(1.3,1)}{0.1} \\
 &= \frac{e^{1.4} - e^{1.3}}{0.1} \\
 &= 3.859032
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Backward: } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(1.3+h,1) - u(1.3-h,1)}{h} = \frac{u(1.3,1) - u(1.2,1)}{0.1} \\
 &= \frac{e^{1.3} - e^{1.2}}{0.1} \\
 &= 3.491797
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ Central: } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(1.3+h,1) - u(1.3-h,1)}{2h} = \frac{u(1.4,1) - u(1.2,1)}{0.2} \\
 &= \frac{e^{1.4} - e^{1.2}}{0.2} \\
 &= 3.675415
 \end{aligned}$$

สำหรับ $h = 0.05$ เราสามารถประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด $(1.3,1)$ โดยอาศัยสมการ (2.2.5) (2.2.6) และ (2.2.7) ได้ในทำนองเดียวกัน โดยสรุปผลการคำนวณในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 วิธีการใช้ h ที่น้อยกว่าจะให้ค่าคลาดเคลื่อนที่

Type	$h = 0.1$		$h = 0.05$	
	$\frac{\partial u}{\partial x}(1.3,1)$	Error	$\frac{\partial u}{\partial x}(1.3,1)$	Error
Forward	3.859	0.189	3.762	0.093
Backward	3.491	0.177	3.579	0.090
Central	3.678	0.006	3.670	0.001

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางเห็นได้ชัดว่าในแต่ละวิธีการใช้ h ที่น้อยกว่าจะให้ค่าคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่า และเมื่อเปรียบเทียบวิธีในการประมาณค่า จะเห็นว่าวิธีผลต่างศูนย์กลางจะให้ค่าที่แม่นยำกว่า

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแสดงวิธีหาสูตรการประมาณค่าของ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ โดยวิธีผลต่างทางหน้าและวิธีผลต่างทางหลัง

วิธีทำ

1. วิธีผลต่างทางหน้า

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u_{i+1,j}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right] + O(h) \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j}}{h} + O(h) - \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \right] + O(h) \\ &= \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} + O(h)\end{aligned}$$

2. วิธีผลต่างทางหลัง

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i-1,j}}{\partial x} \right] + O(h) \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) - \frac{u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h} + O(h) \right] + O(h) \\ &= \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \quad \# \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงแสดงวิธีหาสูตรการประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดยวิธีผลต่างทางหลังแบบสามจุด

แล้วใช้ประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ของฟังก์ชัน $u(x, y) = ye^x$ ที่จุด $(1.3, 1)$ โดยใช้ $\Delta x = h = 0.1$

วิธีทำ

โดยใช้ออนุกรมเทย์เลอร์ เราทราบว่า

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^2)$$

แทนค่าสูตรการประมาณค่าของ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ แบบผลต่างทางหลังจาก ตัวอย่าง 2.2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + \frac{h}{2} \left[\frac{u_{i,j} - 2u_{i-2,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h) \right] + O(h^2) \\ &= \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2) \end{aligned}$$

ดังนั้นสูตรการประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดยวิธีผลต่างทางหลังแบบสามจุดคือ

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2)$$

ใช้สูตรที่ได้ประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ของฟังก์ชัน $u(x, y) = ye^x$ ที่จุด $(1.3, 1)$ โดยใช้ $\Delta x = h = 0.1$ จะได้ว่า

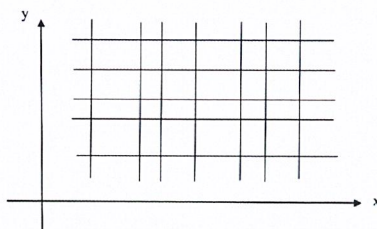
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3u_{(1.3,1)} - 4u_{(1.3-h,1)} + u_{(1.3-2h,1)}}{2h} + O(h^2) \\ &= \frac{3e^{1.3} - 4e^{1.2} + e^{1.1}}{2(0.1)} = 3.657\dots \end{aligned} \quad \#$$

หมายเหตุ

จะเห็นว่า ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากการประมาณค่าของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ โดยวิธีผลต่างทางหลังแบบสามจุด

คือ $e^{1.3} - 3.657 = 0.011$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากวิธีผลต่างทางหลังแบบสองจุดแล้ว จะเห็นได้ชัดเจนว่าได้ค่าที่แม่นยำกว่า ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ตาข่ายมีระยะห่างไม่เท่ากัน ดังรูป



รูปที่ 2.3 พิจารณากรณีที่ตาข่ายมีระยะห่างไม่เท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาเช่นเดียวกันกับกรณีที่ตาข่ายที่มีระยะห่างเท่ากัน เราจะได้สูตรผลต่างทางหน้าและผลต่างทางหลังดังนี้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{n} + O(n) \quad (\text{Forward})$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (\text{Backward})$$

สำหรับวิธีผลต่างศูนย์กลาง เราทราบว่า

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + n \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{n^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{n^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.10)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.11)$$

โดยการดำเนินการ $(1) \times h^2 - (2) \times 2$ จะได้ว่า

$$h^2 u_{i+1,j} = h^2 u_{i,j} + h^2 n \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2 n^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^2 n^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.12)$$

$$n^2 u_{i-1,j} = n^2 u_{i,j} + n^2 h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{n^2 h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{n^2 h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2.13)$$

โดยการดำเนินการ $(2.2.12) - (2.2.13)$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{h^2 u_{i+1,j} - (h^2 - n^2) u_{i,j} - n^2 u_{i-1,j}}{hn(h+n)} + O(hn) \quad (2.2.14)$$

โดยการดำเนินการ $(1) \times h - (2) \times n$ เราจะได้สูตรการหา $\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}$ ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2u_{i+1,j}}{n(h+n)} - \frac{2u_{i,j}}{hn} + \frac{2u_{i-1,j}}{h(h+n)} + O(n-h) \quad (2.2.15)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y เราสามารถสร้างสูตรต่อไปนี้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{m} + O(m) \quad (\text{Forward})$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad (\text{Backward})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{k^2 u_{i+1,j} - (k^2 - m^2) u_{i,j} - m^2 u_{i-1,j}}{km(k+m)} + O(km) \quad (\text{Central})$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{2u_{i,j+1}}{m(k+m)} - \frac{2u_{i,j}}{km} + \frac{2u_{i,j-1}}{k(k+m)} + O(k-m) \quad (\text{Central})$$

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข (Numerical Error)

ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จะมีค่าคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องอยู่ 2 ลักษณะ กล่าวคือ There are two types of numerical error, namely, the truncated error and the round-off error.

(1) ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดทอน (Round-off error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดทอนจำนวนในรูปทศนิยม ให้มีจำนวนตำแหน่งทศนิยมตามที่ต้องการ เช่น ค่าของ $\frac{2}{3}$ เท่ากับ 0.6666... แต่ถ้าเราต้องคำนวณโดยใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง เราจะแทน $\frac{2}{3}$ ด้วย 0.6667 เป็นต้น

(2) ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncated error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากตัดทอนท้ายๆ ของอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งในทางทฤษฎี ค่าคลาดเคลื่อนชนิดนี้จะเข้าสู่ 0 เมื่อระยะห่างของตาข่ายมีค่าน้อยลง แต่ในทางปฏิบัติขนาดของตาข่ายจะน้อยเกินไปก็ได้ไม่ได้เพราะจะเกิดปัญหาการหารด้วยศูนย์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.4 กำหนด $u(x, y) = ye^x$ จงประมาณค่า $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด (1.3, 1) โดยใช้วิธีผลต่างทางหน้า โดยใช้ $\Delta x = h = 0.01, \Delta x = h = 0.001$ และ $\Delta x = h = 0.0001$ โดยใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ

จากสูตร ผลต่างทางหน้า

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h)$$

ในแต่ละ h จะได้ค่าประมาณของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่จุด (1.3, 1) ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{e^{1.3+0.01} - e^{1.3}}{0.01} = \frac{3.706 - 3.669}{0.01} = 3.700 \quad \text{เมื่อ } h = 0.01$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{e^{1.3+0.001} - e^{1.3}}{0.001} = 4.000 \quad \text{เมื่อ } h = 0.001$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{e^{1.3+0.0001} - e^{1.3}}{0.0001} = 10.000 \quad \text{เมื่อ } h = 0.0001$$

ในขณะที่ค่าแม่ตรงคือ $e^{1.3} = 3.669$

2.3 การประยุกต์กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Application to Partial Differential Equations)

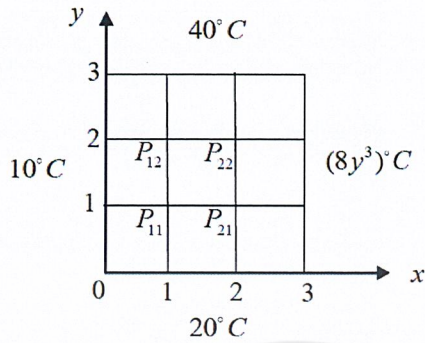
ในการหาผลเฉลยของ PDE ในโดเมนที่กำหนด เราจะเริ่มจากการแบ่งโดเมนให้อยู่ในรูปตาข่าย (Grid) โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปตาข่ายที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า และจุดตัดของตาข่ายจะเรียกว่า จุดต่อ (Node) จากนั้นเราจะแทนค่าอนุพันธ์ย่อยในสมการตามสูตรของผลต่างจำกัด (Finite Difference) แบบต่างๆ ตาม ที่กล่าวมาในหัวข้อ 2.1 และ 2.2 โดยสมการที่ได้จากที่ได้จากการแทนสูตรลงไปเราจะเรียกว่า สมการผลต่าง (Difference Equation) และเกิดเป็นระบบสมการเชิงเส้นขึ้น โดยที่ระบบสมการดังกล่าวสามารถหาผลเฉลยได้เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (BC) หรือ เงื่อนไขเริ่มต้นมาให้ โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3.1

(Dirichlet Problem) พิจารณาการกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด 3×3 ที่ถูกแบ่งเป็นตาข่ายที่ $\Delta x = \Delta y = 1$ โดยมีอุณหภูมิที่ขอบเป็น $10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, (8y^3)^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}$ ดังรูป โดยมีกรกระจายตามสมการปัวซอง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10xy \quad (2.3.1)$$

จงหาอุณหภูมิที่จุดต่อภายในแผ่นโลหะที่กำหนด



รูปที่ 2.4 ตัวอย่าง 2.3.1 การกระจายอุณหภูมิตามแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

วิธีทำ

จากสูตรผลต่างศูนย์กลางของอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.3.2}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \tag{2.3.3}$$

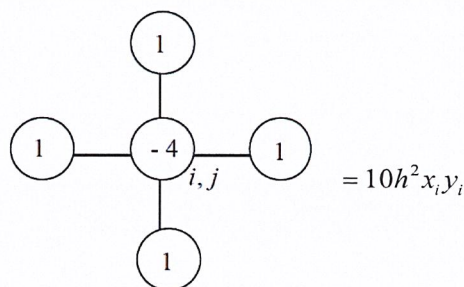
แทนค่า (2.3.2) และ (2.3.3) ใน (2.3.1) จะได้ว่า

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 10x_i y_i$$

เนื่องจาก $\Delta x = \Delta y = h$ จะได้ว่า

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 10h^2 x_i y_i \tag{2.3.4}$$

สูตร (2.4) อาจเขียนในรูปแบบแผนผังดังนี้



รูปที่ 2.5 รูปแบบแผนผัง ตัวอย่าง 2.3.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการประยุกต์สมการผลต่าง (2.4) โดยใช้ $h = k = 1$ ที่จุดภายในโดเมนทั้งสี่จุดจะได้ว่า

$$\text{ที่จุด } P_{11} : u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = 10 \times 1^2 \times 1 \times 1$$

$$\text{ที่จุด } P_{21} : u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} - 4u_{21} = 10 \times 1^2 \times 2 \times 1$$

$$\text{ที่จุด } P_{12} : u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} - 4u_{12} = 10 \times 1^2 \times 1 \times 2$$

$$\text{ที่จุด } P_{22} : u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} - 4u_{22} = 10 \times 1^2 \times 2 \times 2$$

และจากเงื่อนไข Dirichlet เราทราบค่าต่อไปนี้

$$u_{01} = u_{02} = 10$$

$$u_{10} = u_{20} = 20$$

$$u_{31} = 8, u_{32} = 64$$

$$u_{13} = u_{23} = 40$$

แทนค่าของเงื่อนไขขอบในระบบสมการจะได้ระบบสมการใหม่เป็น

$$u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = -20$$

$$u_{11} + u_{22} - 4u_{21} = -8$$

$$u_{11} + u_{22} - 4u_{12} = -30$$

$$u_{12} + u_{21} - 4u_{22} = -64$$

โดยการแก้ระบบสมการดังกล่าวจะได้ว่า

$$u_{11} = 11.667$$

$$u_{21} = 10.583$$

$$u_{12} = 16.083$$

$$u_{22} = 22.667$$

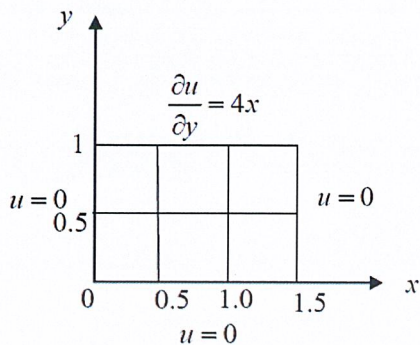
#

ตัวอย่าง 2.3.2 (Neumann Problem) พิจารณาการกระจายอุณหภูมิ บนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด 1×1.5 ที่ถูกแบ่งตาข่ายที่มี $\Delta x = \Delta y = 0.5$ โดยมีเงื่อนไขขอบ ดังรูปโดยมีการกระจายตามสมการลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จงหาอนุพันธ์ที่จุดต่อภายในแผ่นโลหะที่กำหนด



รูปที่ 2.6 ตัวอย่าง 2.3.2 (Neumann Problem)

วิธีทำ

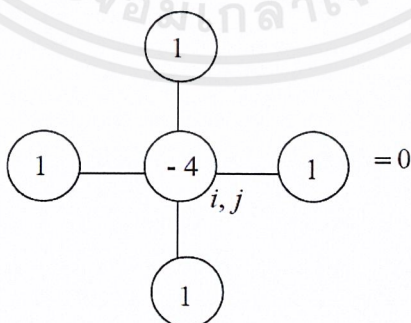
ทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.3.1 จะได้ว่าสมการผลต่างอยู่ในรูป

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

เนื่องจาก $\Delta x = \Delta y = h$ จะได้ว่า

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \tag{2.3.6}$$

สูตร (2.3.6) อาจเขียนในรูปแบบแผนผังดังนี้



รูปที่ 2.7 รูปแบบแผนผัง ตัวอย่าง 2.3.2

โดยการประยุกต์สมการผลต่าง (2.3.4) โดยใช้ $h = k = 1$ ที่จุดภายในโดเมนทั้งสอง จะได้ว่า

$$\text{ที่จุด } P_{11} : u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = 0$$

$$\text{ที่จุด } P_{21} : u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} - 4u_{21} = 0$$

และจากเงื่อนไข Dirichlet เราทราบค่าต่อไปนี้

$$u_{01} = 0$$

$$u_{10} = u_{20} = 0$$

$$u_{31} = 0$$

แทนค่าของเงื่อนไขขอบในระบบสมการจะได้ระบบสมการใหม่เป็น

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} &= 0 \\ u_{11} + u_{22} - 4u_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

จะเห็นว่าระบบสมการ (2.3.7) มีตัวแปร 4 ตัว แสดงว่าเราต้องการอีก 2 สมการเพื่อหาผลเฉลย ซึ่งสมการดังกล่าวจะได้มาจากเงื่อนไข Neumann และสามารถหาได้หลายวิธีดังนี้

วิธีทำ 1 โดยใช้วิธีผลต่างทางหลัง

$$\text{จากสูตร} \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k)$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = \frac{u_{12} - u_{11}}{0.5} = 4(0.5) \implies u_{12} - u_{11} = 1 \quad (2.3.8)$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = \frac{u_{22} - u_{21}}{0.5} = 4(1) \implies u_{22} - u_{21} = 2 \quad (2.3.9)$$

โดยการแก้ระบบสมการ (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9) จะได้ว่า

$$u_{11} = 0.6250$$

$$u_{21} = 0.8750$$

$$u_{12} = 1.6250$$

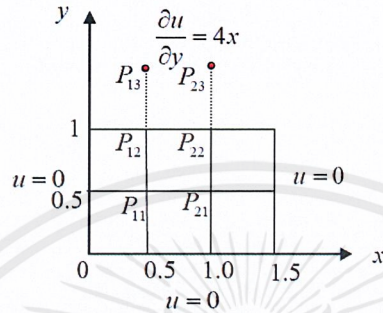
$$u_{22} = 2.8750$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ

ถ้าเราต้องการให้ได้ผลเฉลยที่แม่นยำขึ้น เราอาจใช้วิธีผลต่างจากหลังแบบ 3 จุดได้

วิธีที่ 2 โดยใช้จุดต่อจำลอง ดังรูป



รูปที่ 2.8 โดยใช้จุดต่อจำลอง

สมมติว่า สมการ PDF ถูกขยายโดเมนโดยการเพิ่มจุดต่อจำลอง P_{13} และ P_{23} และจากดังรูป เงื่อนไข Dirichlet เราทราบค่าต่อไปนี้

$$u_{01} = u_{02} = 0$$

$$u_{10} = u_{20} = 0$$

$$u_{31} = u_{32} = 0$$

ดังนั้น เราจะได้ว่าระบบสมการมีสมการเพิ่ม 2 สมการ คือ

$$u_{11} + u_{22} + u_{13} - 4u_{12} = 0 \quad (2.3.10)$$

$$u_{21} + u_{23} + u_{12} - 4u_{22} = 0$$

จากสูตรผลต่างศูนย์กลาง

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = \frac{u_{13} - u_{11}}{2 \times 0.5} = 4(0.5) \quad \Rightarrow \quad u_{13} = u_{11} + 2 \quad (2.3.11)$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = \frac{u_{23} - u_{21}}{2 \times 0.5} = 4(1) \quad \Rightarrow \quad u_{23} = u_{21} + 4 \quad (2.3.12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าของสมการ (2.3.11) และ(2.3.12) ในสมการ (2.3.10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2u_{11} + u_{22} - 4u_{12} &= -2 \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -4 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

โดยการแก้ระบบสมการ (2.3.7) และ (2.3.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.3851 \\ u_{21} &= 0.4720 \\ u_{12} &= 1.0683 \\ u_{22} &= 1.5031 \end{aligned} \quad \#$$

หมายเหตุ

ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาในตัวอย่าง 2.3.2 คือ

$$u(x, y) = \frac{18}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2 \cosh\left(\frac{n\pi}{1.5}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{1.5}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{1.5}\right)$$

จะเห็นว่าผลเฉลยจากวิธีที่ 2 ดีกว่าผลเฉลยจากวิธีที่ 1 ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.2 ผลเฉลยจากวิธีที่ 2 ดีกว่าผลเฉลยจากวิธีที่ 1

u	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	Exact
u_{11}	0.6250	0.3851	0.4320
u_{21}	0.8750	0.4720	0.5248
u_{12}	1.6250	1.0683	1.1870
u_{22}	2.8750	1.5031	1.8037

2.4 ระบบพิกัดที่ไม่เป็นระบบพิกัดฉาก (Non-rectangular Coordinates)

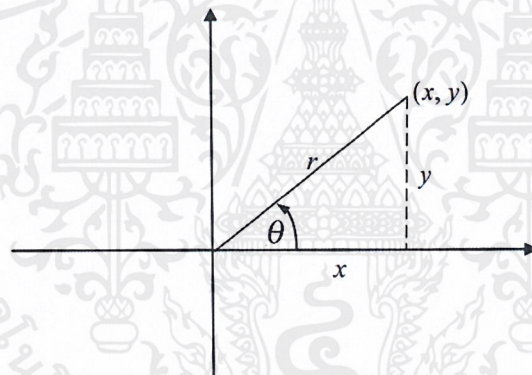
ในการหาผลเฉลยของ PDE ในโดเมนที่เกี่ยวข้องกับวงกลม การใช้ระบบพิกัดฉาก(Rectangular Coordinates) ที่ผ่านมาจะทำให้การหาผลเฉลยทำได้ยาก ในกรณีนี้เราจะแปลงระบบพิกัดฉากให้เป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ตัวดำเนินการลาปลาซในระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาตัวดำเนินการลาปลาซใน 2 มิติ

กำหนดให้ดังรูป

$$u = u(x, y), \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{และ} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



รูปที่ 2.9 ตัวดำเนินการลาปลาซใน 2 มิติ

สมมติให้

$$x = r \cos \theta \tag{2.4.1}$$

และ

$$y = r \sin \theta \tag{2.4.2}$$

พิจารณาตัวดำเนินการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.4.3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} (\cos \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (\sin \theta) \quad (2.4.4)$$

และ
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

ดังนั้น
$$= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \sin \theta) \quad (2.4.5)$$

โดยการแก้ระบบสมการ (2.4.4) และ (2.4.5) โดยใช้ Cramer's Rule จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2.4.6)$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.4.7)$$

พิจารณาส่วนประกอบของการดำเนินการลาปลาซ สมการ (2.4.3) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} (-\sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2} \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} (\cos \theta) \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการทำงานเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

แทนค่าจากสมการ (2.4.8) และสมการ (2.4.9) ในสมการ (2.4.3) จะได้ว่า

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (2.4.10)$$

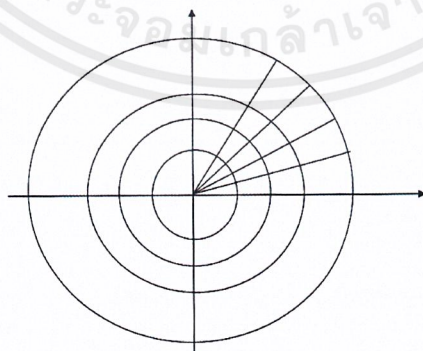
ดังนั้นสมการลาปลาซในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.4.11)$$

และในกรณีที่ไม่คำนึงถึงมุม θ แสดงว่า $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (2.4.12)$$

พิจารณาการแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้วจากรูป



รูปที่ 2.10 การแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยใช้สูตรผลต่างศูนย์กลาง จะเห็นว่า

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial r^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2}$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial r} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta r)}$$

และ
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial \theta^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2}$$

แทนค่าในสมการลาปลาซ (2.4.11) จะได้ว่า

$$\left(1 + \frac{1}{2i}\right)u_{i+1,j} + \left(1 - \frac{1}{2i}\right)u_{i-1,j} - 2\left(1 + \frac{1}{i^2(\Delta\theta)^2}\right)u_{i,j} + \frac{1}{i^2(\Delta\theta)^2}u_{i,j+1} + \frac{1}{i^2(\Delta\theta)^2}u_{i,j-1} = 0$$

เมื่อ $i = \frac{r}{\Delta r}$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 ปัญหาค่าขอบ (Boundary Value Problems)

ปัญหาในสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งหรือมากกว่า โดยทั่วไปในทางประยุกต์มักจะประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขประกอบ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับเงื่อนไขนั้น ถ้าในสมการนั้นมี c เป็นตัวแปรตามและ x เป็นตัวแปรอิสระ ถ้าปัญหาของการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ มีเงื่อนไขประกอบเกี่ยวข้องกับ x มากกว่าหนึ่งค่าเราจะเรียกว่า ปัญหาค่าขอบ (Boundary-Value Problem: BVP)

วิธีผลต่างจำกัดสำหรับปัญหาค่าขอบเชิงเส้นอันดับสอง

$$\text{รูปทั่วไป} \quad c'' = p(x)c' + q(x)c + r(x) \quad ; a \leq x \leq b \quad (3.1.1)$$

$$\text{โดยที่} \quad y(a) = \alpha \quad \text{และ} \quad y(b) = \beta$$

ในการหาผลเฉลยในช่วงที่กำหนด N ช่วง โดยแบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย (Subinterval)

โดยแต่ละจุด $x_i = a + ih$ สำหรับทุก $i = 0, 1, 2, \dots, N$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{N}$

$$\text{จะได้} \quad c''(x_i) = p(x_i)c'(x_i) + q(x_i)c(x_i) + r(x_i) \quad (3.1.2)$$

ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสามของ x_i ที่ x_{i+1} และ x_{i-1} ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ 4 พจน์

$$c(x_{i+1}) = c(x_i + h) = c(x_i) + hc'(x_i) + \frac{h^2}{2}c''(x_i) + \frac{h^3}{6}c'''(x_i) + \frac{h^4}{24}c^{(4)}(\xi_i^+)$$

สำหรับบาง $\xi_i^+ \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

$$\text{และ} \quad c(x_{i-1}) = c(x_i - h) = c(x_i) - hc'(x_i) + \frac{h^2}{2}c''(x_i) - \frac{h^3}{6}c'''(x_i) + \frac{h^4}{24}c^{(4)}(\xi_i^-)$$

สำหรับบาง $\xi_i^- \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{จะได้ } c(x_{i+1}) + c(x_{i-1}) = 2c(x_i) + h^2 c''(x_i) + \frac{h^4}{24} [c^{(4)}(\xi_i^+) + c^{(4)}(\xi_i^-)]$$

สามารถใช้ทฤษฎีบทค่ากลาง ให้ในเทอมความคลาดเคลื่อนง่ายขึ้น ดังนี้

$$c''(x_i) = \frac{1}{h^2} [c(x_{i+1}) - 2c(x_i) + c(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24} c^{(4)}(\xi_i) \quad (3.1.3)$$

สำหรับบาง $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

โดยจะเรียก $c''(x_i)$ ว่า สูตรผลต่างจากกลาง และสูตรผลต่างจากกลางของ $c'(x_i)$ จะได้

$$c'(x_i) = \frac{1}{2h} [c(x_{i+1}) - c(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6} c'''(\eta_i) \quad (3.1.4)$$

สำหรับบาง $\eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

นำสูตรผลต่างต่างจากกลาง แทนใน (3.1.2)

$$\begin{aligned} \frac{c(x_{i+1}) - 2c(x_i) + c(x_{i-1}))}{h^2} &= p(x_i) \left[\frac{c(x_{i+1}) - c(x_{i-1}))}{2h} \right] + q(x_i) c(x_i) \\ &\quad + r(x_i) - \frac{h^2}{24} [4p(x_i) c''(\eta_i) + c^{(4)}(\xi_i)] \end{aligned}$$

โดยการตัดปลาย (Truncation error) ของอันดับ $O(h^2)$ จะได้วิธีผลต่างจำกัด โดยหาค่าผลเฉลยจากการแก้ระบบสมการ โดยเงื่อนไขขอบ $y(a) = \alpha$ และ $y(b) = \beta$ เพื่อจัดรูประบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

กำหนดให้ $w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta$

$$\text{จะได้ } \left(\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i) w_i = -r(x_i) \quad (3.1.5)$$

สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, N$

พิจารณา (3.1.5) สามารถเขียนได้เป็น

$$-\left(1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i)) w_i - \left(1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจากสมการนำไปจัดรูปในเมทริกซ์ขนาด $N \times N$ ของระบบสมการเชิงเส้น

$$\text{รูปแบบ } Aw = b \tag{3.1.6}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad b = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)w_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_N) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_N)\right)w_{N+1} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 BVP: $c'' + c = x$; $0 \leq x \leq 1$

$$\text{BCs: } y(0) = 0 \quad \text{และ} \quad y(1) = 1.8414$$

โดยวิธี FDM เลือก $h = 0.25$

วิธีทำ

ให้ $p(x) = 0$, $q(x) = 1$, $r(x) = x$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$c(x_i)$	0	0.3648	0.7693	1.2507	1.8414

$$\text{จาก } (1 - \frac{1}{2} p_i h) c_{i-1} + (-2 + h^2 q_i) c_i + (1 + \frac{1}{2} p_i h) c_{i+1} = h^2 r_i$$

$$i = 1 ; (1 - \frac{1}{2} p_1 h) c_0 + (-2 + h^2 q_1) c_1 + (1 + \frac{1}{2} p_1 h) c_2 = h^2 r_1$$

$$i = 2 ; (1 - \frac{1}{2} p_2 h) c_1 + (-2 + h^2 q_2) c_2 + (1 + \frac{1}{2} p_2 h) c_3 = h^2 r_2$$

$$i = 3 ; (1 - \frac{1}{2} p_3 h) c_2 + (-2 + h^2 q_3) c_3 + (1 + \frac{1}{2} p_3 h) c_4 = h^2 r_3$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -2 + h^2 q_1 & 1 + \frac{1}{2} p_1 h & 0 \\ 1 - \frac{1}{2} p_2 h & -2 + h^2 q_2 & 1 + \frac{1}{2} p_3 h \\ 0 & 1 - \frac{1}{2} p_3 h & -2 + h^2 q_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h^2 r_1 - (1 - \frac{1}{2} p_1 h) c_0 \\ h^2 r_2 \\ h^2 r_3 - (1 + \frac{1}{2} p_3 h) c_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} -1.9375 & 1 & 0 \\ 1 & -1.9375 & 1 \\ 0 & 1 & -1.9375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0.1250 \\ -1.6539 \end{Bmatrix}$$

$$\text{โดยวิธีเกาส์จะได้ } \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3648 \\ 0.7693 \\ 1.2507 \end{Bmatrix} \quad \#$$

3.2 ตัวแบบการประเมินคุณภาพน้ำ (Water-Quality Measurement Model)

ตัวแบบการประเมินคุณภาพน้ำสามารถอธิบายโดยใช้สมการการแพร่-การพาปฏิกิริยา (advection-diffusion reaction equation) โดยในงานวิจัยนี้ เราจะพิจารณากรณีที่กระแสน้ำในทางน้ำไหลแบบสม่ำเสมอและความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไม่ขึ้นกับเวลา (Independent of time) [5] และ [17] จะได้

$$u \frac{dc}{dx} = D \frac{d^2c}{dx^2} - RC + Q \quad \text{สำหรับทุก } 0 \leq x \leq L \quad (3.2.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ	L	เป็นความยาวของลำน้ำ (km)
	$c(x)$	เป็นระดับความเข้มข้นของมลพิษ (kg/m^3)
	u	เป็นความเร็วของกระแสน้ำ (m/s)
	D	เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่ของสารมลพิษ (m^2/s)
	R	อัตราการสลายตัวของมลพิษ
	Q	พจน์ของจุดกำเนิด (Source term) หรือจุดดูดซึม (Sink term) (day^{-1})

โดยความเข้มข้นของสารมลพิษ ณ จุดปล่อย

กำหนดโดย

$$c(0) = c_0 \quad \left(\frac{kg}{m^3} \right) \quad \text{เมื่อ } c_0 > 0 \quad (3.2.2)$$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นมลพิษที่ปลายสุดของลำน้ำ ($x = L$)

กำหนดโดย

$$\frac{dc}{dx} = T_L \quad \text{เมื่อ } T_L \in [-1, 1] \quad (3.2.3)$$

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ผลการวิจัย

กำหนดให้ขอบเขตของของคลองที่ศึกษาคือ ส่วนของคลองที่มีความยาว 1 km ความเร็วของกระแสน้ำอยู่ระหว่าง 0.025 ถึง 0.10 m/s ($0.01 \text{ cm/s} - 10 \text{ cm/s}$) สมมติให้มีการปล่อยมลพิษลงสู่แหล่งน้ำที่ต้นน้ำ ความเข้มข้นของสารพิษเป็น 10 kg/m^3 และปลายน้ำมีความเข้มข้นของมลพิษเป็น 0.4 kg/m^3

กำหนดให้มลพิษชนิดนี้มีค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient) เป็น $0.188 \text{ m}^2/\text{s}$ อัตราการเกิดปฏิกิริยาอยู่ระหว่าง $R = 0 - 0.1$ และกำหนดแหล่งน้ำมีอัตราการกำเนิดมลพิษ Q อยู่ระหว่าง $0 - 0.1$

ผู้วิจัยต้องการวัดปริมาณความเข้มข้นของมลพิษในคลองโดยกำหนดตัวแปรสำหรับแต่ละกรณีศึกษา ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 กำหนดตัวแปรสำหรับแต่ละกรณีศึกษา

กรณีศึกษา	LBC	RBC	D	Q	R	u
1	10.00	0.40	0.188	0.00	0.01	0.25
2	10.00	0.40	0.188	0.01	0.01	0.25
3	10.00	0.40	0.188	0.02	0.01	0.25
4	10.00	0.40	0.188	0.03	0.01	0.25
5	10.00	0.40	0.188	0.04	0.01	0.25
6	10.00	0.40	0.188	0.05	0.01	0.25
7	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.25
8	10.00	0.40	0.188	0.07	0.01	0.25
9	10.00	0.40	0.188	0.08	0.01	0.25
10	10.00	0.40	0.188	0.09	0.01	0.25
11	10.00	0.40	0.188	0.10	0.01	0.25
12	10.00	0.40	0.188	0.06	0.00	0.25
13	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.25
14	10.00	0.40	0.188	0.06	0.02	0.25
15	10.00	0.40	0.188	0.06	0.03	0.25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 กำหนดตัวแปรสำหรับแต่ละกรณีศึกษา(ต่อ)

กรณีศึกษา	LBC	RBC	D	Q	R	u
16	10.00	0.40	0.188	0.06	0.04	0.25
17	10.00	0.40	0.188	0.06	0.05	0.25
18	10.00	0.40	0.188	0.06	0.06	0.25
19	10.00	0.40	0.188	0.06	0.07	0.25
20	10.00	0.40	0.188	0.06	0.08	0.25
21	10.00	0.40	0.188	0.06	0.09	0.25
22	10.00	0.40	0.188	0.06	0.10	0.25
23	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.00
24	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.01
25	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.02
26	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.03
27	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.04
28	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.05
29	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.06
30	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.07
31	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.08
32	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.09
33	10.00	0.40	0.188	0.06	0.01	0.10

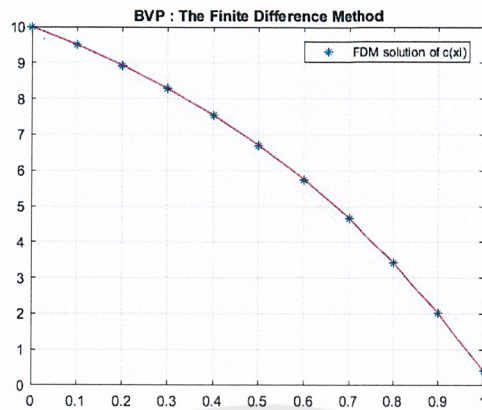
จะได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

กรณีศึกษาที่ 1

ตารางที่ 4.2 กรณีศึกษาที่ 1

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4941	8.9216	8.2726	7.5359	6.6985	5.7456	4.6603	3.4231	2.0115	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

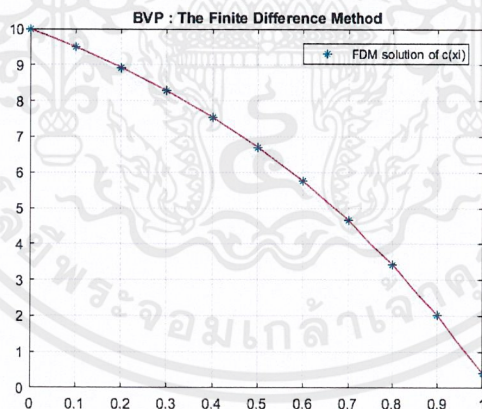


รูปที่ 4.1 กรณีศึกษาที่ 1

กรณีศึกษาที่ 2

ตารางที่ 4.3 กรณีศึกษาที่ 2

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(x)$	10.0000	9.4961	8.9252	8.2775	7.5417	6.7049	5.7520	4.6662	3.4277	2.0143	0.4000



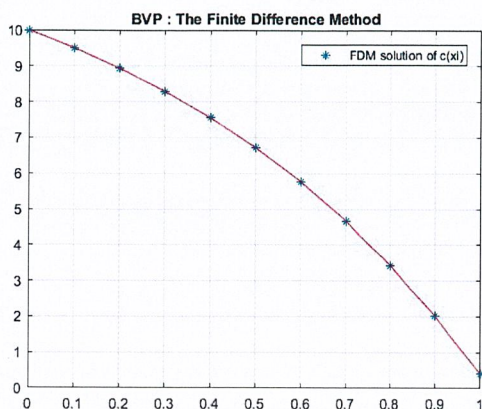
รูปที่ 4.2 กรณีศึกษาที่ 2

กรณีศึกษาที่ 3

ตารางที่ 4.4 กรณีศึกษาที่ 3

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(x)$	10.0000	9.4980	8.9288	8.2825	7.5476	6.7113	5.7585	4.6721	3.4324	2.0170	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

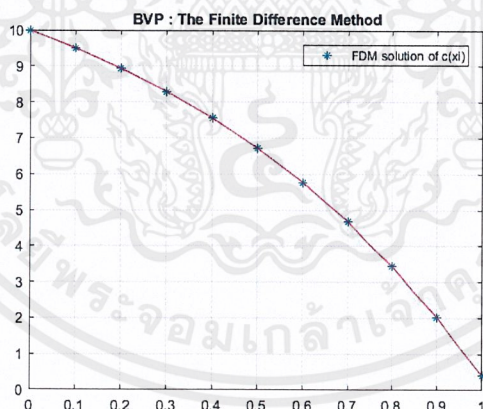


รูปที่ 4.3 กรณีสึกษาที่ 3

กรณีสึกษาที่ 4

ตารางที่ 4.5 กรณีสึกษาที่ 4

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5000	8.9324	8.2874	7.5535	6.7177	5.7649	4.6779	3.4371	2.0198	0.4000



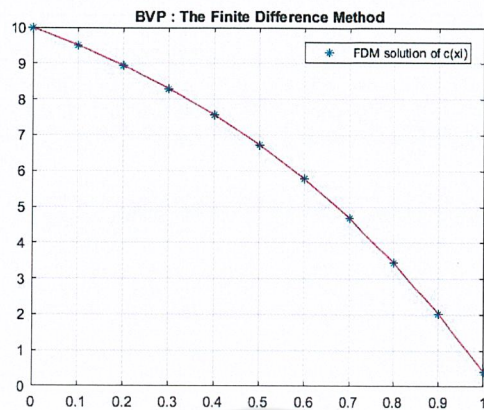
รูปที่ 4.4 กรณีสึกษาที่ 4

กรณีสึกษาที่ 5

ตารางที่ 4.6 กรณีสึกษาที่ 5

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5019	8.9360	8.2923	7.5594	6.7240	5.7713	4.6838	3.4418	2.0225	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

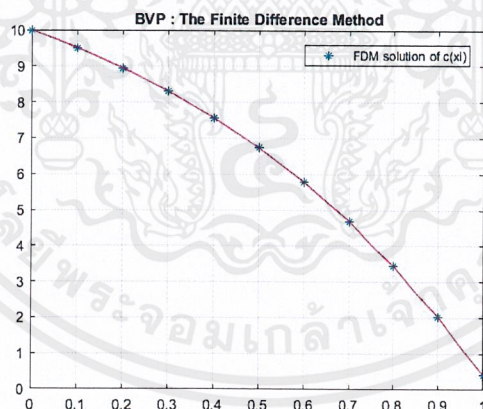


รูปที่ 4.5 กรณีศึกษาที่ 5

กรณีศึกษาที่ 6

ตารางที่ 4.7 กรณีศึกษาที่ 6

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.000	9.5039	8.9396	8.2972	7.5652	6.7304	5.7777	4.6897	3.4465	2.0253	0.4000



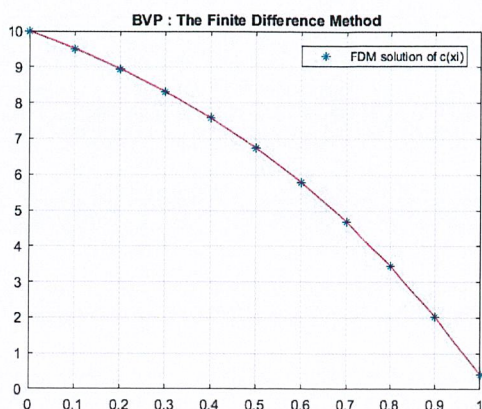
รูปที่ 4.6 กรณีศึกษาที่ 6

กรณีศึกษาที่ 7

ตารางที่ 4.8 กรณีศึกษาที่ 7

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5058	8.9432	8.3022	7.5711	6.7368	5.7841	4.6955	3.4512	2.0281	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

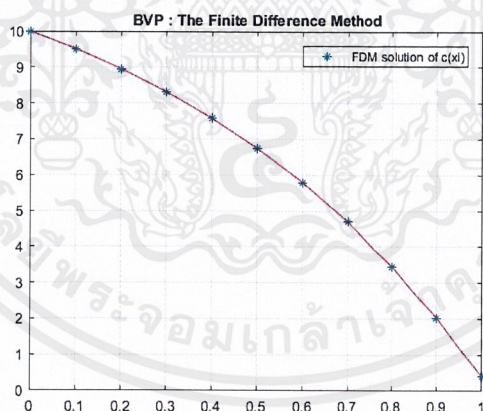


รูปที่ 4.7 กรณีสึกษาที่ 7

กรณีสึกษาที่ 8

ตารางที่ 4.9 กรณีสึกษาที่ 8

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(x)$	10.0000	9.5078	8.9468	8.3071	7.5770	6.7432	5.7905	4.7014	3.4558	2.0308	0.4000



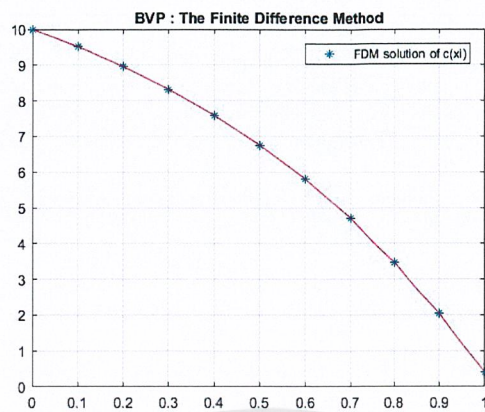
รูปที่ 4.8 กรณีสึกษาที่ 8

กรณีสึกษาที่ 9

ตารางที่ 4.10 กรณีสึกษาที่ 9

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(x)$	10.0000	9.5097	8.9504	8.3120	7.5829	6.7496	5.7969	4.7073	3.4605	2.0336	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

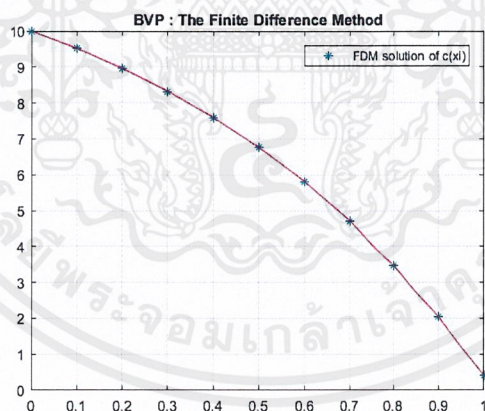


รูปที่ 4.9 กรณีศึกษาที่ 9

กรณีศึกษาที่ 10

ตารางที่ 4.11 กรณีศึกษาที่ 10

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5117	8.9540	8.3170	7.5887	6.7560	5.8033	4.7131	3.4652	2.0364	0.4000



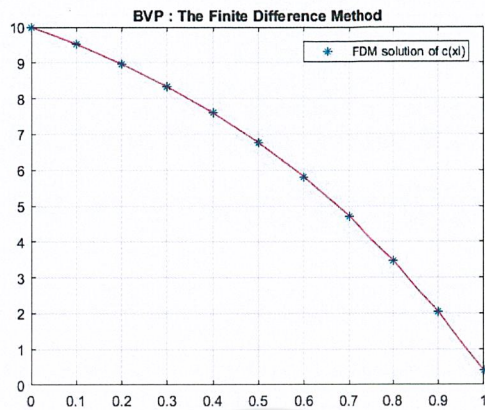
รูปที่ 4.10 กรณีศึกษาที่ 10

กรณีศึกษาที่ 11

ตารางที่ 4.12 กรณีศึกษาที่ 11

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5136	8.9576	8.3219	7.5946	6.7624	5.8097	4.7190	3.4699	2.0391	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

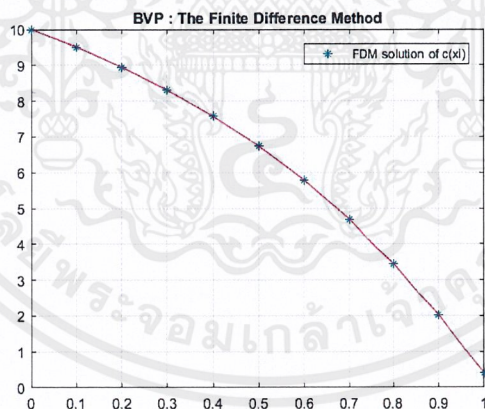


รูปที่ 4.11 กรณีศึกษาที่ 11

กรณีศึกษาที่ 12

ตารางที่ 4.13 กรณีศึกษาที่ 12

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5212	8.9707	8.3384	7.6127	6.7801	5.8255	4.7315	3.4783	2.0431	0.4000



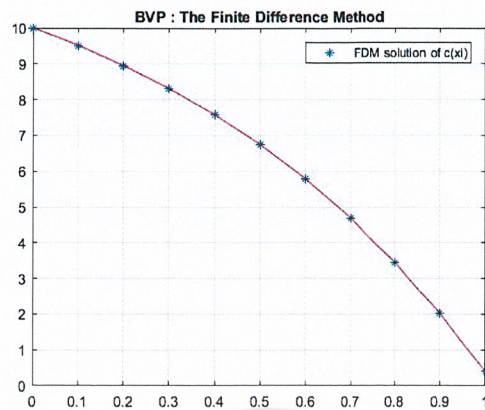
รูปที่ 4.12 กรณีศึกษาที่ 12

กรณีศึกษาที่ 13

ตารางที่ 4.14 กรณีศึกษาที่ 13

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.5058	8.9432	8.3022	7.5711	6.7368	5.7841	4.6955	3.4512	2.0281	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

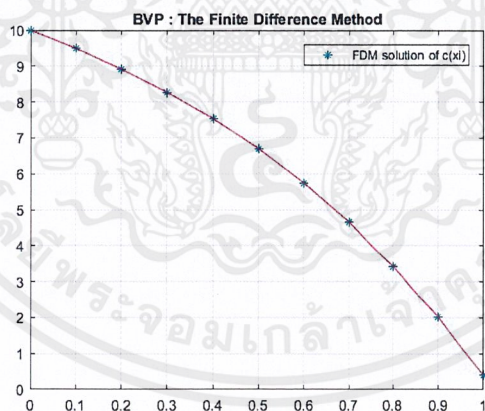


รูปที่ 4.13 กรณีศึกษาที่ 13

กรณีศึกษาที่ 14

ตารางที่ 4.15 กรณีศึกษาที่ 14

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4906	8.9160	8.2663	7.5300	6.6940	5.7431	4.6600	3.4244	2.0133	0.4000



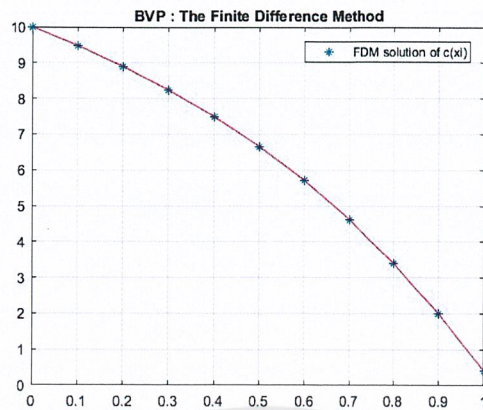
รูปที่ 4.14 กรณีศึกษาที่ 14

กรณีศึกษาที่ 15

ตารางที่ 4.16 กรณีศึกษาที่ 15

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4754	8.8889	8.2307	7.4893	6.6516	5.7026	4.6248	3.3979	1.9986	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

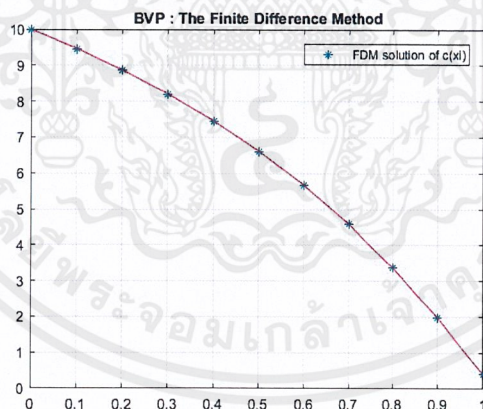


รูปที่ 4.15 กรณีศึกษาที่ 15

กรณีศึกษาที่ 16

ตารางที่ 4.17 กรณีศึกษาที่ 16

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4604	8.8621	8.1954	7.4489	6.6097	5.6626	4.5900	3.3717	1.9841	0.4000



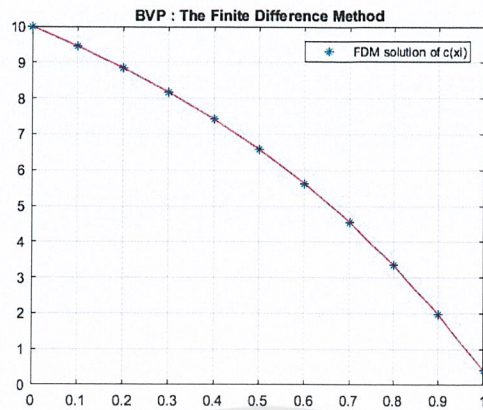
รูปที่ 4.16 กรณีศึกษาที่ 16

กรณีศึกษาที่ 17

ตารางที่ 4.18 กรณีศึกษาที่ 17

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4455	8.8356	8.1605	7.4090	6.5682	5.6230	4.5557	3.3459	1.9698	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

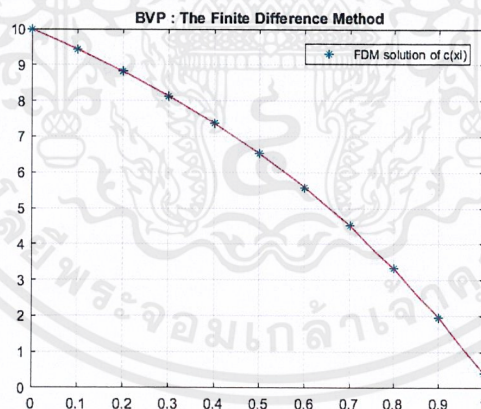


รูปที่ 4.17 กรณีศึกษาที่ 17

กรณีศึกษาที่ 18

ตารางที่ 4.19 กรณีศึกษาที่ 18

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4307	8.8092	8.1259	7.3695	6.5272	5.5838	4.5217	3.3203	1.9557	0.4000



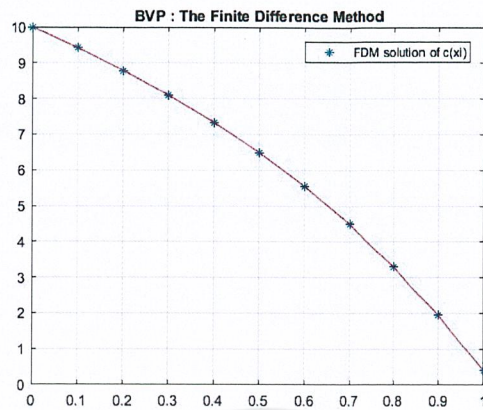
รูปที่ 4.18 กรณีศึกษาที่ 18

กรณีศึกษาที่ 19

ตารางที่ 4.20 กรณีศึกษาที่ 19

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4161	8.7831	8.0916	7.3304	6.4866	5.5450	4.4881	3.2950	1.9417	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

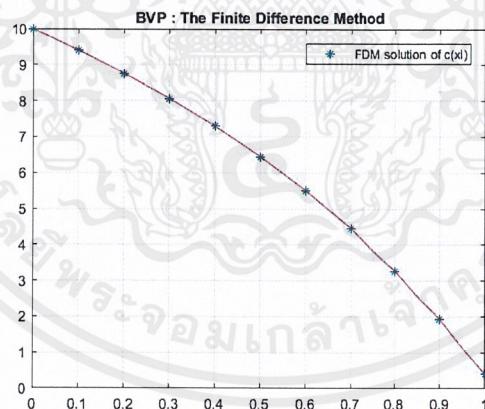


รูปที่ 4.19 กรณีศึกษาที่ 19

กรณีศึกษาที่ 20

ตารางที่ 4.21 กรณีศึกษาที่ 20

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.4015	8.7572	8.0576	7.2916	6.4464	5.5067	4.4548	3.2700	1.9279	0.4000



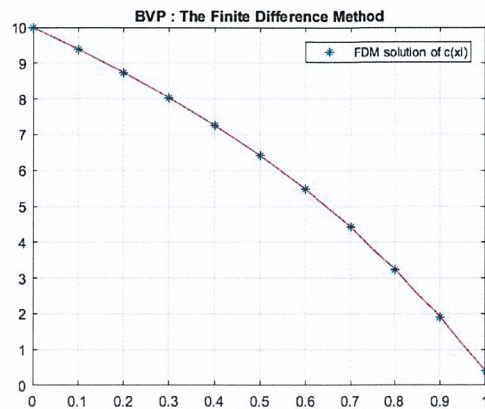
รูปที่ 4.20 กรณีศึกษาที่ 20

กรณีศึกษาที่ 21

ตารางที่ 4.22 กรณีศึกษาที่ 21

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.3870	8.7315	8.0239	7.2532	6.4066	5.4687	4.4220	3.2453	1.9143	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

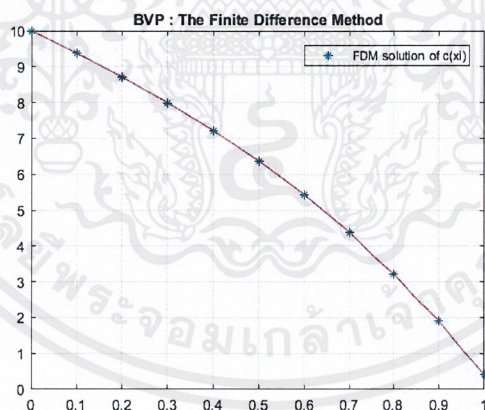


รูปที่ 4.21 กรณีศึกษาที่ 21

กรณีศึกษาที่ 22

ตารางที่ 4.23 กรณีศึกษาที่ 22

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.3727	8.7060	7.9905	7.2152	6.3672	5.4312	4.3894	3.2209	1.9008	0.4000



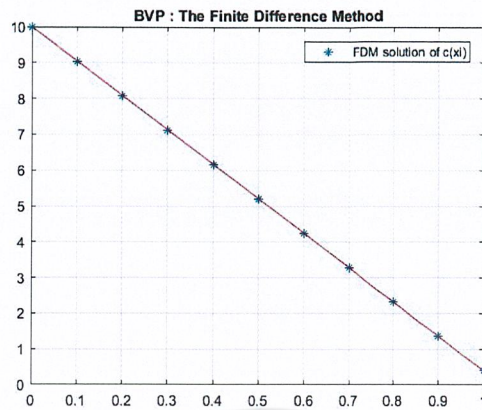
รูปที่ 4.22 กรณีศึกษาที่ 22

กรณีศึกษาที่ 23

ตารางที่ 4.24 กรณีศึกษาที่ 23

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.0388	8.0793	7.1209	6.1630	5.2053	4.2471	3.2880	2.3275	1.3650	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

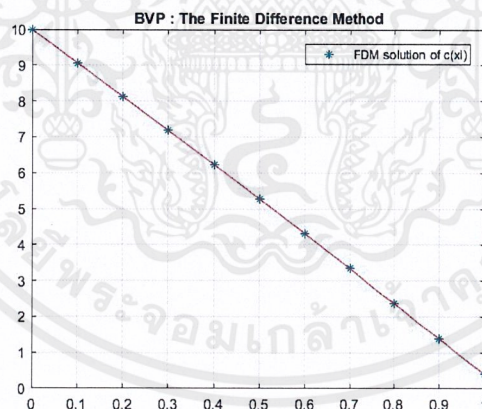


รูปที่ 4.23 กรณีศึกษาที่ 23

กรณีศึกษาที่ 24

ตารางที่ 4.25 กรณีศึกษาที่ 24

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.0615	8.1197	7.1739	6.2238	5.2687	4.3081	3.3415	2.3683	1.3880	0.4000



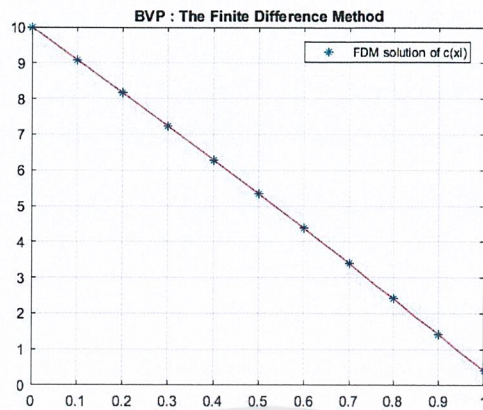
รูปที่ 4.24 กรณีศึกษาที่ 24

กรณีศึกษาที่ 25

ตารางที่ 4.26 กรณีศึกษาที่ 25

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.0839	8.1596	7.2266	6.2843	5.3321	4.3693	3.3953	2.4096	1.4114	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

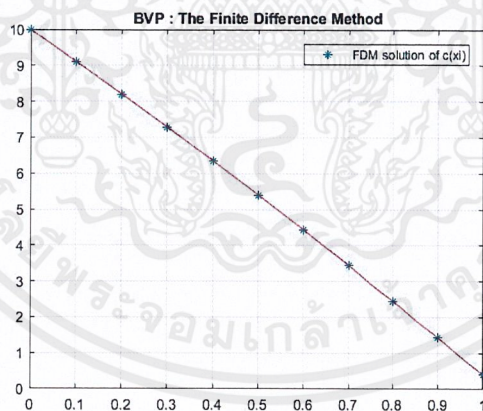


รูปที่ 4.25 กรณีสืบศึกษาที่ 25

กรณีสืบศึกษาที่ 26

ตารางที่ 4.27 กรณีสืบศึกษาที่ 26

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.1059	8.1991	7.2789	6.3446	5.3954	4.4307	3.4495	2.4513	1.4350	0.4000



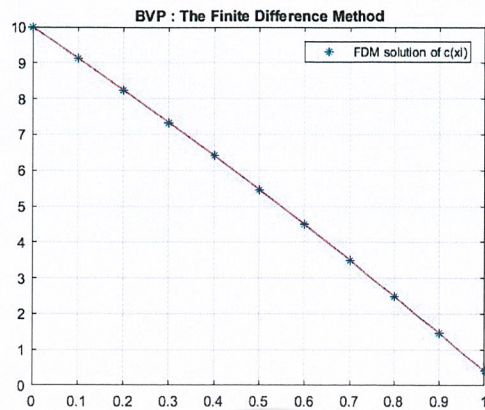
รูปที่ 4.26 กรณีสืบศึกษาที่ 26

กรณีสืบศึกษาที่ 27

ตารางที่ 4.28 กรณีสืบศึกษาที่ 27

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.1276	8.2382	7.3308	6.4046	5.4587	4.4922	3.5041	2.4933	1.4590	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

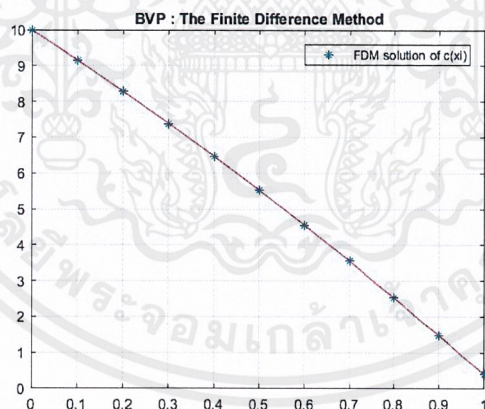


รูปที่ 4.27 กรณีศึกษาที่ 27

กรณีศึกษาที่ 28

ตารางที่ 4.29 กรณีศึกษาที่ 28

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.1490	8.2767	7.3822	6.4643	5.5219	4.5538	3.5589	2.5358	1.4833	0.4000



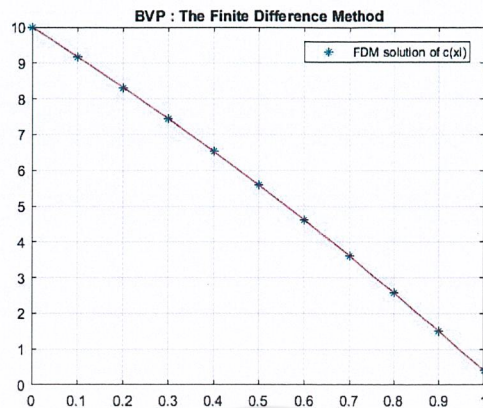
รูปที่ 4.28 กรณีศึกษาที่ 28

กรณีศึกษาที่ 29

ตารางที่ 4.30 กรณีศึกษาที่ 29

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.1700	8.3148	7.4332	6.5237	5.5850	4.6156	3.6140	2.5787	1.5079	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

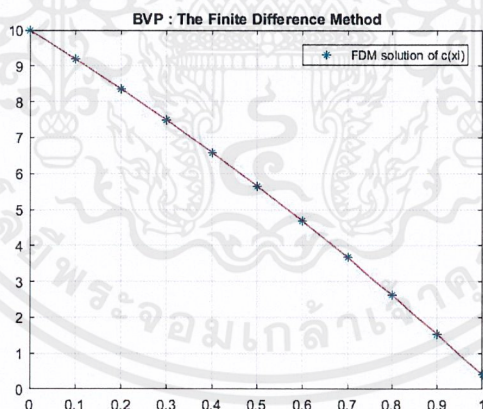


รูปที่ 4.29 กรณีสึกษาที่ 29

กรณีสึกษาที่ 30

ตารางที่ 4.31 กรณีสึกษาที่ 30

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.1907	8.3525	7.4837	6.5827	5.6479	4.6774	3.6694	2.6219	1.5328	0.4000



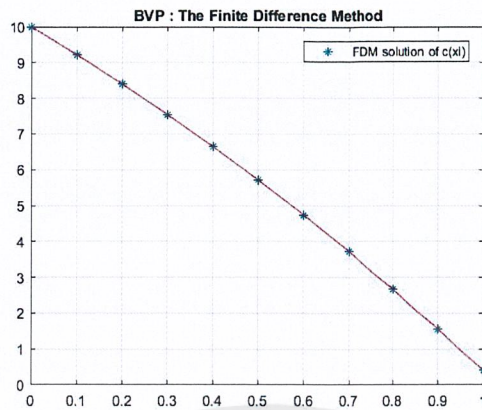
รูปที่ 4.30 กรณีสึกษาที่ 30

กรณีสึกษาที่ 31

ตารางที่ 4.32 กรณีสึกษาที่ 31

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.2111	8.3896	7.5337	6.6414	5.7107	4.7394	3.7251	2.6655	1.5580	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

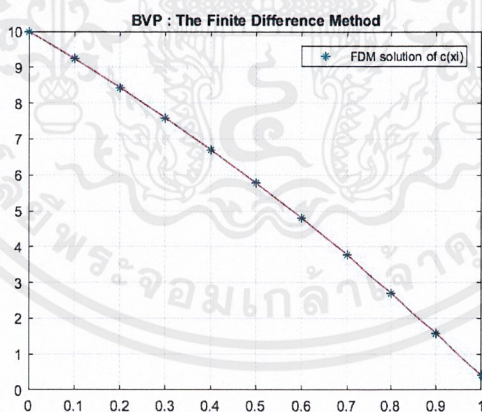


รูปที่ 4.31 กรณีศึกษาที่ 31

กรณีศึกษาที่ 32

ตารางที่ 4.33 กรณีศึกษาที่ 32

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c(x)	10.0000	9.2311	8.4263	7.5833	6.6998	5.7734	4.8014	3.7810	2.7095	1.5835	0.4000



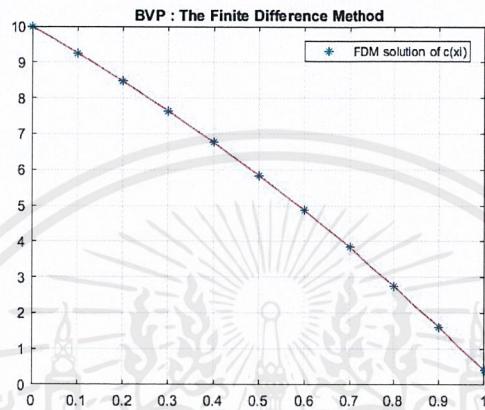
รูปที่ 4.32 กรณีศึกษาที่ 32

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีศึกษาที่ 33

ตารางที่ 4.34 กรณีศึกษาที่ 33

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(x)$	10.0000	9.2508	8.4624	7.6323	6.7577	5.8358	4.8634	3.8372	2.7538	1.6093	0.4000



รูปที่ 4.33 กรณีศึกษาที่ 33

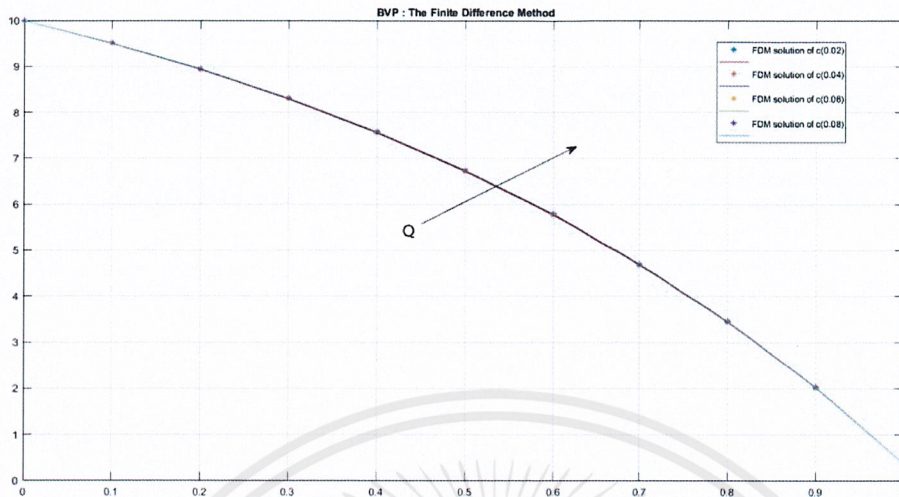
การอภิปรายผล

กำหนดให้ $D=0.188$, $N=0.01$, $u=0.25$

ตารางที่ 4.35 ความเข้มข้นของมลพิษของค่าจุดกำเนิดมลพิษ (Q)

Q $c(x_i)$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(0.0)$	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
$c(0.1)$	9.4941	9.4961	9.4980	9.5000	9.5019	9.5039	9.5058	9.5078	9.5097	9.5117	9.5136
$c(0.2)$	8.9216	8.9252	8.9288	8.9324	8.9360	8.9396	8.9432	8.9468	8.9504	8.9540	8.9576
$c(0.3)$	8.2726	8.2775	8.2825	8.2874	8.2923	8.2972	8.3022	8.3071	8.3120	8.3170	8.3219
$c(0.4)$	7.5359	7.5417	7.5476	7.5535	7.5594	7.5652	7.5711	7.5770	7.5829	7.5887	7.5946
$c(0.5)$	6.6985	6.7049	6.7113	6.7177	6.7240	6.7304	6.7368	6.7432	6.7496	6.7560	6.7624
$c(0.6)$	5.7456	5.7520	5.7585	5.7649	5.7713	5.7777	5.7841	5.7905	5.7969	5.8033	5.8097
$c(0.7)$	4.6603	4.6662	4.6721	4.6779	4.6838	4.6897	4.6955	4.7014	4.7073	4.7131	4.7190
$c(0.8)$	3.4231	3.4277	3.4324	3.4371	3.4418	3.4465	3.4512	3.4558	3.4605	3.4652	3.4699
$c(0.9)$	2.0115	2.0143	2.0170	2.0198	2.0225	2.0253	2.0281	2.0308	2.0336	2.0364	2.0391
$c(1.0)$	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.34 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อค่าจุดกำเนิดมลพิษ (Q) มีค่าเพิ่มขึ้น

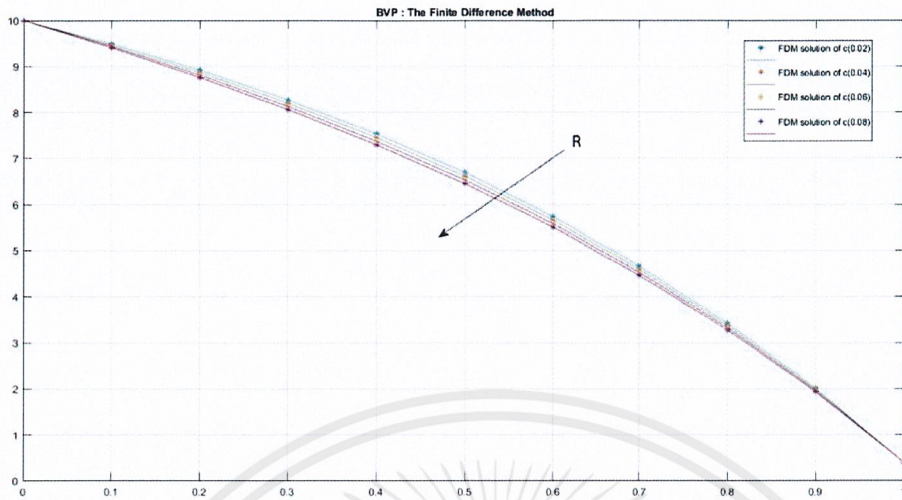
จะเห็นว่า ถ้าแหล่งน้ำมีอัตราการกำเนิดมลพิษสูงขึ้น จะส่งผลให้ความเข้มข้นของมลพิษสูงขึ้นด้วย ดังตารางที่ 4.35 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อค่าจุดกำเนิดมลพิษ (Q) มีค่าเพิ่มขึ้น

กำหนดให้ $D=0.188$, $Q=0.06$, $u=0.25$

ตารางที่ 4.36 ความเข้มข้นของมลพิษของอัตราการสลายตัวของปฏิกิริยาของมลพิษ (R)

R	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(0.0)$	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
$c(0.1)$	9.5212	9.5058	9.4906	9.4754	9.4604	9.4455	9.4307	9.4161	9.4015	9.3870	9.3727
$c(0.2)$	8.9707	8.9432	8.9160	8.8889	8.8621	8.8356	8.8092	8.7831	8.7572	8.7315	8.7060
$c(0.3)$	8.3384	8.3022	8.2663	8.2307	8.1954	8.1605	8.1259	8.0916	8.0576	8.0239	7.9905
$c(0.4)$	7.6127	7.5711	7.5300	7.4893	7.4489	7.4090	7.3695	7.3304	7.2916	7.2532	7.2152
$c(0.5)$	6.7801	6.7368	6.6940	6.6516	6.6097	6.5682	6.5272	6.4866	6.4464	6.4066	6.3672
$c(0.6)$	5.8255	5.7841	5.7431	5.7026	5.6626	5.6230	5.5838	5.5450	5.5067	5.4687	5.4312
$c(0.7)$	4.7315	4.6955	4.6600	4.6248	4.5900	4.5557	4.5217	4.4881	4.4548	4.4220	4.3894
$c(0.8)$	3.4783	3.4512	3.4244	3.3979	3.3717	3.3459	3.3203	3.2950	3.2700	3.2453	3.2209
$c(0.9)$	2.0431	2.0281	2.0133	1.9986	1.9841	1.9698	1.9557	1.9417	1.9279	1.9143	1.9008
$c(1.0)$	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.35 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่ออัตราการสลายตัวของปฏิกิริยาของมลพิษ (R) มีค่าเพิ่มขึ้น

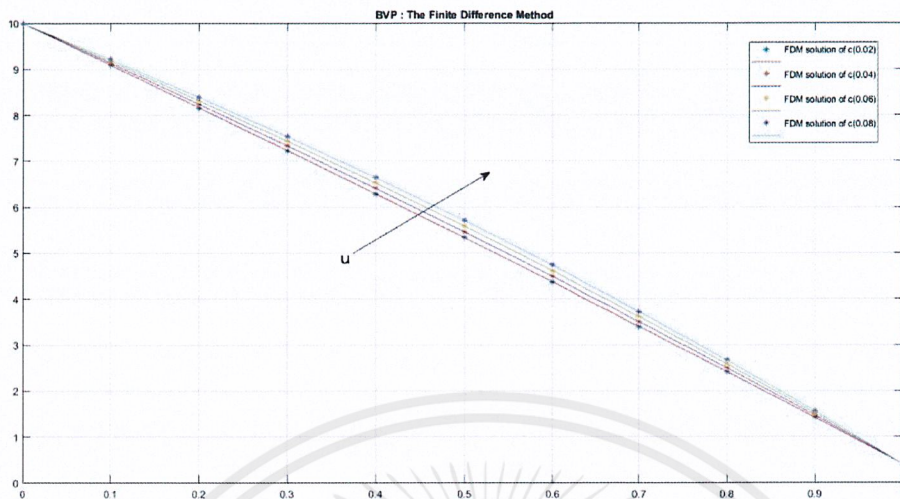
จะเห็นว่า อัตราการเกิดปฏิกิริยา R ของสารพิษสูงขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของมลพิษนั้นต่ำลง ดังตารางที่ 4.36 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่ออัตราการสลายตัวของปฏิกิริยาของมลพิษ (R) มีค่าเพิ่มขึ้น

กำหนดให้ $D=0.188$, $Q=0.06$, $R=0.01$

ตารางที่ 4.37 ความเข้มข้นของมลพิษของความเร็วของกระแส (u)

u $c(x_i)$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$c(0.0)$	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
$c(0.1)$	9.0388	9.0615	9.0839	9.1059	9.1276	9.1490	9.1700	9.1907	9.2111	9.2311	9.2508
$c(0.2)$	8.0793	8.1197	8.1596	8.1991	8.2382	8.2767	8.3148	8.3525	8.3896	8.4263	8.4624
$c(0.3)$	7.1209	7.1739	7.2266	7.2789	7.3308	7.3822	7.4332	7.4837	7.5337	7.5833	7.6323
$c(0.4)$	6.1630	6.2238	6.2843	6.3446	6.4046	6.4643	6.5237	6.5827	6.6414	6.6998	6.7577
$c(0.5)$	5.2053	5.2687	5.3321	5.3954	5.4587	5.5219	5.5850	5.6479	5.7107	5.7734	5.8358
$c(0.6)$	4.2471	4.3081	4.3693	4.4307	4.4922	4.5538	4.6156	4.6774	4.7394	4.8014	4.8634
$c(0.7)$	3.2880	3.3415	3.3953	3.4495	3.5041	3.5589	3.6140	3.6694	3.7251	3.7810	3.8372
$c(0.8)$	2.3275	2.3683	2.4096	2.4513	2.4933	2.5358	2.5787	2.6219	2.6655	2.7095	2.7538
$c(0.9)$	1.3650	1.3880	1.4114	1.4350	1.4590	1.4833	1.5079	1.5328	1.5580	1.5835	1.6093
$c(1.0)$	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000	0.4000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.36 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อความเร็วของกระแสน้ำ (u) มีค่าเพิ่มขึ้น

จะเห็นว่า หากอัตราการไหลของกระแสน้ำเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ความเข้มข้นของมลพิษในคลองเพิ่มขึ้นด้วย ดังตารางที่ 4.37 ความเข้มข้นของมลพิษเมื่อความเร็วของกระแสน้ำ (u) มีค่าเพิ่มขึ้น

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้นำเสนอ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อวัดปริมาณมลพิษในน้ำของแม่น้ำหรือลำคลอง ในสถานะเสถียร(Steady State) โดยผู้ใช้งานสามารถกำหนดเงื่อนไขขอบและพารามิเตอร์ต่างๆที่เหมาะสมกับสารพิษนั้น และแหล่งน้ำที่ศึกษาอยู่ได้เอง โดยข้อมูลความเข้มข้นมลพิษ ณ จุดปล่อยและปลายน้ำของบริเวณที่ศึกษา ความเร็วเฉลี่ยของกระแสน้ำในลำน้ำ นำมากำหนดเป็นเงื่อนไขขอบ ทั้ง 2 ด้านและพารามิเตอร์ต่างๆ ของตัวแบบ

วิธีเชิงตัวเลขที่นำมาประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบคือวิธีผลต่างจำกัด(Finite Difference Method) และนำมาสร้างเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยใช้ MatLab เพื่อเพิ่มความแม่นยำด้วยการกำหนดความละเอียดการแบ่งกริดและประหยัดเวลาการคำนวณ

ผลการคำนวณได้รับพบว่าปัจจัยที่มีผลต่อปริมาณมลพิษในแหล่งน้ำได้แก่ ความเข้มข้นของมลพิษ ณ จุดปล่อย ความเข้มข้นของมลพิษ ที่กำหนดที่ปลายน้ำ

- เมื่อพจน์ของจุดกำเนิด (Source term) มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของมลพิษตลอดลำน้ำเพิ่มขึ้น
- เมื่ออัตราการสลายตัวของมลพิษมีอัตราเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของมลพิษตลอดลำน้ำมีค่าลดลง
- เมื่อความเร็วของกระแสน้ำเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของมลพิษตลอดลำน้ำเพิ่มขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

กระแสน้ำควรกำหนดเป็นฟังก์ชันของกระแสน้ำหรือจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ ความเข้มข้นของมลพิษที่ปลายน้ำ จำเป็นต้องใช้ค่าเฉลี่ย แต่หากปรากฏการณ์อื่น เช่น ไม่พบอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของมลพิษ เมื่อเทียบกับระยะทาง ก็สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบให้เป็นประเภทอื่นได้

งานวิจัยนี้มุ่งวัดปริมาณมลพิษในสถานะเสถียรที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นอาจพัฒนาไปสู่ตัวแบบที่ขึ้นกับเวลาเพื่อบ่งชี้ถึงสถานการณ์มลพิษทางน้ำ ที่เกิดขึ้นในระยะสั้นได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Wattana Toutip, A. (2009). Finite Difference Method: FDM. Retrieved from <https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/323462.html> [October 30,2017]
- [2] Pochai, N., and Depana, R. "An Optimal Control of Water Pollution in a Stream Using a Finite Difference Method", World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 6(56), 2011, pp. 1186-1188. (DOI:)
- [3] Napalai Seesod and Nopparat Pochai.(2013). A Numerical Computation to a Water-Quality Measurement in Stream Using the Finite Volume Method, International Conference on Engineering, Applied Sciences, and Technology August 21-24, 2013, The Sukosol, Bangkok, Thailand
- [4] Flow rates measurement system. (2018, Feb 14). Department of Drainags and Sewerage. Access date <http://dds.bangkok.go.th>
- [5] Grathwohl, P. (1998). Diffusion in natural porous media: Contaminant transport, sorption/ desorption, and dissolution kinetics. Kluwer Academic.



งานทะเบียนคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

คำรับรองเล่มโครงการพิเศษ/ปัญหาพิเศษ/สหกิจศึกษา

วันที่ 1 เดือน มิถุนายน พ.ศ 2561

ข้าพเจ้า นางสาวนาตยา คำคุณ

รหัสประจำตัว 57050083

นางสาวศินีนาฏ ยวญใจ

รหัสประจำตัว 57050137

นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชา คณิตศาสตร์
ขอรับรองว่าปัญหาพิเศษเรื่อง

ชื่อภาษาไทย การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อตัวแบบการวัดคุณภาพน้ำสถานะเสถียรในลำน้ำโดย
ใช้วิธีผลต่างจำกัด

ชื่อภาษาอังกฤษ A Numerical Computation to a Steady Water-Quality Measurement
Model in a Stream Using a Finite Difference Method

ปีการศึกษา 2560

เป็นผลงานวิจัยที่ได้คัดลอกหรือละเมิดลิขสิทธิ์ของผู้อื่นและได้ผ่านการตรวจสอบความซ้ำซ้อน
เรียบร้อยแล้ว และได้แนบเอกสารการตรวจสอบการลอกเลียนงานวรรณกรรมที่ตรวจสอบจากเล่ม
ปัญหาพิเศษฉบับสมบูรณ์แล้ว
โปรแกรมอักขราวิสุทธิ์ 0.18%

ลงชื่อ.....*นาตยา คำคุณ*.....

ลงชื่อ.....*ศินีนาฏ ยวญใจ*.....

(นางสาวนาตยา คำคุณ)

(นางสาวศินีนาฏ ยวญใจ)

นักศึกษา

นักศึกษา

ข้าพเจ้า ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และ อ.จินดา ไชยช่วย อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ได้
ตรวจสอบปัญหาพิเศษของนักศึกษาข้างต้นแล้วขอรับรองว่าเป็นผลงานวิจัยของนักศึกษาจริงและมี
เนื้อหาสมบูรณ์จึงลงชื่อไว้เป็นหลักฐาน

ลงชื่อ.....*นพรัตน์ โพธิ์ชัย*.....

ลงชื่อ.....*จินดา ไชยช่วย*.....

(ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย)

(อ.จินดา ไชยช่วย)

อาจารย์ที่ปรึกษา

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้