วิธีการชิ้นประกอบอันตะของสมการสโตกบริงแมนสำหรับโดเมน 1 มิติ

THE FINITE ELEMENT METHOD OF STOKES-BRINKMAN EQUATIONS FOR ONE-DIMENSIONAL DOMAIN

ชลิตา คำมิ

ธนกานต์ แจ้งดี

นันทิพร ภูหัดธรรม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE FINITE ELEMENT METHOD OF STOKES-BRINKMAN EQUATIONS FOR ONE-DIMENSIONAL DOMAIN

CHALITA KAMMI

THANAKAN JEANGDEE

NANTIPORN POOHUTTUM

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ วิธีการชิ้นประกอบอันตะของสมการสโตกบริงแมนสำหรับโดเมน 1 มิติ
The Finite Element Method of Stokes-Brinkman Equations for One-Dimensional Domain

ชื่อนักศึกษา นางสาวชลิตา คำมิ รหัสนักศึกษา 57050034
นายธนกานต์ แจ้งดี รหัสนักศึกษา 57050063
นางสาวนันทิพร ภูหัดธรรม รหัสนักศึกษา 57050081

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร กรรมการ	
ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ วิธีการชิ้นประกอบอันตะของสมการสโตกบริงแมนสำหรับโดเมน 1 มิติ

ชื่อนักศึกษา นางสาวชลิตา คำมิ รหัสนักศึกษา 57050034

นายธนกานต์ แจ้งดี รหัสนักศึกษา 57050063

นางสาวนันทิพร ภูหัดธรรม รหัสนักศึกษา 57050081

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กนกณัฏฐ์ วัฒนแจ่มศรี

บทคัดย่อ

ในชีวิตประจำวันมนุษยเราตองหายใจเขาและออกตลอดเวลา ซึ่งในขณะที่หายใจเขารางกายอาจได้รับสิ่งสกปรกอยางฝุนละอองเขามาดวย ในรางกายของคนเราก็จะมีระบบที่ชวยในการจับฝุนละอองนั้น ระบบนี้เรียกวา ระบบภูมิคุมกันที่มีมาแตกำเนิด (Innate immune system) เปนระบบภูมิคุมกันที่จะสร้างเมือกขึ้นมาจับฝุนละอองเหลานั้นแลวทำการขับฝุนละอองออกโดยการพัดโบกของเสนขนที่อยู่ตามเยื่อบุผิวชั้นที่มีเส้นขนเรียกว่าชั้นพีซีแอล และของเหลวในชั้นพีซีแอลเรียกของเหลวพีซีแอล

ปัญหาพิเศษนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาความเร็วของของเหลวพีซีแอล โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คือ สมการสโตกบริงแมน (Stokes-Brinkman equations) และประยุกต์ใช้วิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite element method) ในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลในโดเมน 1 มิติ

คำสำคัญ : วิธีการประกอบอันตะ, สมการสโตกบริงแมน, ของแข็งเคลื่อนที่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	The Finite Element Method of Stokes-Brinkman Equations for One-Dimensional Domain
Student	Miss Chalita Kammi Student ID 57050034
	Mr. Thanakan Jeangdee Student ID 57050063
	Miss Nantiporn Poohuttum Student ID 57050081
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematic)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2017
Advisor	Asst.Prof.Dr.Kanognudge Wuttanachamsri

ABSTRACT

Everyday, we have to breathe in and out all the time. While breathing in the body may get dirt. In our bodies, there is a system that helps to catch the debris. This system is called innate immune system which is a system that mucus is built up to trap the particles and moved out by the movement of the cilia along the epithelium. The layer containing cilia is called PCL layer and the liquid in the PCL is called PCL liquid.

This special problem is designed to study the speed of PCL fluid. The mathematical model used is Stokes-Brinkman equations and then we apply a finite element method to find the speed in a 1-dimensional domain.

Keywords : Finite element method, Stokes-Brinkman equations, Moving solid phases

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่อง วิธีการชิ้นประกอบอันตะของสมการสโตกบริงแมนสำหรับโดเมน 1 มิติ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี เนื่องด้วยเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาและรับผิดชอบปัญหาพิเศษของผู้จัดทำด้วยดีมาตลอดและคอยให้คำปรึกษาให้การดูแลอย่างใกล้ชิด ให้ความช่วยเหลือแนะนำที่ดีในการปรับปรุงข้อบกพร่องในการทำปัญหาพิเศษ และขอขอบพระคุณ กรรมการสอบปัญหาพิเศษ คือ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล และ ดร.ธวัชชัย คำประภัสสร ที่ให้ข้อคิดเห็นและคำแนะนำช่วยเหลือในการทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาควิชาความรู้ ภาคทฤษฎี และภาคปฏิบัติ ให้แก่คณะผู้จัดทำ รวมทั้งเจ้าหน้าที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการ และการเบิก ยืม อุปกรณ์ต่างๆ

ขอขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้การสนับสนุนทางด้านการศึกษาและคอยให้กำลังใจเสมอมา สุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกท่าน รุ่นพี่ และบุคคลอื่นๆ ที่อาจจะไม่ได้กล่าวถึง ที่คอยให้คำแนะนำและช่วยเหลือในด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นทุนทรัพย์ กำลังใจ หรือปัจจัยอื่นๆ ที่เป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ชลิตา คำมิ
ธนกานต์ แจ้งดี
นันทิพร ภูหัดธรรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข

กิตติกรรมประกาศ ..... ค

สารบัญ ..... ง

สารบัญรูปภาพ ..... จ

สารบัญตาราง ..... ฉ

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ 1

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ 2

1.3 ขอบเขตของปัญหา 2

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ 2

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน 3

บทที่ 2 เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง 4

2.1 วิธีการของค่าความผิดพลาดที่ถูกให้น้ำหนัก (Weighted residual) 4

2.2 วิธีวีค (Weak Formulation) 12

2.3 ฟังก์ชันทดสอบต่อเนื่องรายจุด (Piecewise Continuous Trial Function) 12

2.4 ฟังก์ชันสัญฐานเชิงเส้น (Linear shape Function) 17

2.5 วิธีการชิ้นประกอบอันตะของกาเลอร์กิน (Galerkin's Finite Element Formulation) 19

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงาน 26

บทที่ 4 ผลเฉลยจริงของสมการสโตกบริงแมน 32

บทที่ 5 โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ 39

บทที่ 6 ผลเฉลยเชิงตัวเลข 54

บทที่ 7 สรุปและข้อเสนอแนะ 58

7.1 สรุปผล 58

7.2 ปัญหาและอุปสรรค 58

7.3 ข้อเสนอแนะ 58

เอกสารอ้างอิง 59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

หน้า

รูปภาพที่ 1.1 ระบบทางเดินหายใจในร่างกายมนุษย์ 1
รูปภาพที่ 2.1 การแบ่งโดเมนออกเป็น 4 ชิ้นประกอบ 14
รูปภาพที่ 2.2 กราฟสำหรับค่า u_1, u_2, u_3และ u_4 25
รูปภาพที่ 3.1 การแบ่งออกเป็น 3 ชิ้นประกอบ 29
รูปภาพที่ 3.2 ผลเฉลยของสมการสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$ 31
รูปภาพที่ 3.3 ผลเฉลยของสมการสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 1$ 31
รูปภาพที่ 6.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$ 54
รูปภาพที่ 6.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$ 55
รูปภาพที่ 6.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$ 56
รูปภาพที่ 6.4 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$ 57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบค่าของ $\tilde{u}$ ทั้ง 3 วิธี ที่ $x = 0.5$ 8

ตารางที่ 6.1 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$ 54

ตารางที่ 6.2 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$ 55

ตารางที่ 6.3 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$ 56

ตารางที่ 6.4 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$ 57

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

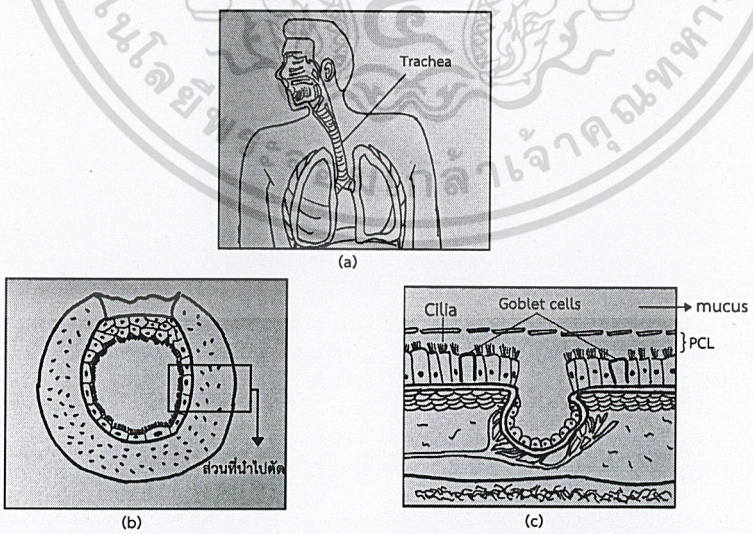
บทที่1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากในการหายใจเข้าและออกของมนุษย์แต่ละครั้ง จะมีฝุ่นละออง และสิ่งแปลกปลอมต่าง ๆ เข้ามาในร่างกาย ในขณะเดียวกัน ในร่างกายของคนเราจะมีระบบที่เรียกว่าระบบภูมิคุ้มกันที่มีมาแต่กำเนิด (Innate immune system) เป็นระบบที่ทำหน้าที่ในการกำจัดสิ่งแปลกปลอมและฝุ่นละอองเหล่านั้น โดยระบบจะทำการสร้างเมือกขึ้นมาดักจับสิ่งแปลกปลอม และทำการพัดออกไป โดยการพัดโบกของเส้นขนที่อยู่ตามท่อของระบบทางเดินหายใจ

รูปที่ 1.1(a) แสดงระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ เมื่อตัดตามขวางของหลอดลมจะแสดงดังรูปที่ 1.1(b) และเมื่อทำการตัดส่วนของหลอดลมจะได้ดังรูปที่ 1.1(c) ซึ่งชั้นที่มีเส้นขนเส้นเล็ก ๆ อยู่ เรียกว่า ชั้นเพอร์ริซิเลียรี่ (Periciliary Layer (PCL)) ช่วยในการพัดเมือกที่เรียงตัวอยู่บนเส้นขนนั้นออกจากร่างกาย และในชั้นพีซีแอล (PCL) นี้ จะมีของเหลวที่มีความหนืดคล้ายน้ำอยู่ เรียกว่า ของเหลวพีซีแอล

ในปัญหาพิเศษนี้เราจะทำการประมาณความเร็วของการไหลผ่านชั้นพีซีแอลหรือตัวกลางที่มีรูพรุน โดยจะพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการสโตกบริงแมน และใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะ และโปรแกรมแมทแลบ (Matlab) ในการหาคำตอบของแบบจำลองดังกล่าว



รูปภาพที่ 1.1 ระบบทางเดินหายใจในร่างกายมนุษย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. ต้องการหาความเร็วของของเหลวที่อยู่ในโดเมนที่มีรูพรุนโดยทราบความเร็วของของแข็ง
2. ประยุกต์ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะ เพื่อแก้ปัญหาสมการสโตกบริงแมน
3. ประยุกต์ใช้โปรแกรมแมทแลบเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาพิเศษนี้

1.3 ขอบเขตของปัญหา

พิจารณาปัญหาโดเมน 1 มิติ โดยใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะหาความเร็วของของเหลวในโดเมนที่มีรูพรุน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ทราบความเร็วของของเหลวที่อยู่ในโดเมนที่มีรูพรุน
2. ได้เรียนรู้วิธีการชิ้นประกอบอันตะและสามารถใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะ ในการแก้ปัญหาสมการสโตกบริงแมนได้
3. มีความเข้าใจในโปรแกรมแมทแลบ และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการทำปัญหาพิเศษและงานวิจัยขั้นสูงได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ
2. ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา
3. ทำการศึกษาวิธีการชิ้นประกอบอันตะ
4. ทำการศึกษาสมการสโตกบริงแมน
5. ประยุกต์ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะกับสมการสโตกบริงแมน
6. ทำการเขียนโปรแกรม โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ
7. หาผลเฉลยเทียบกับผลเฉลยที่มีอยู่จริงหรือในงานวิจัยอื่น ๆ
8. สรุปผลงานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน											
	ปี 2560							ปี 2561				
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ	←	→										
ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา		←	→	→								
ศึกษาสมการสโตกบริงแมน			←	→								
ศึกษาวิธีการชิ้นประกอบอันตะ			←	→	→	→	→					
ประยุกต์ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะกับสมการสโตกบริงแมน					←	→	→					
นำเสนอหัวข้อปัญหาพิเศษ							←	→				
เขียนโปรแกรม โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ							←	→	→	→	→	
หาผลเฉลยเทียบกับผลเฉลยที่มีอยู่จริงหรือเทียบกับงานวิจัยอื่น ๆ										←	→	
สรุปผลงานวิจัย											←	→
จัดทำเล่มรายงาน										←	→	→
นำเสนอปัญหาพิเศษ											←	→

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่2
เนื้อหาที่เกี่ยวข้อง

วิธีการชิ้นประกอบอันตะ

วิธีการชิ้นประกอบอันตะ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งสำหรับการแก้ปัญหาด้านวิศวกรรม ฟิสิกส์ และคณิตศาสตร์ เป็นต้น ปัญหาโดยทั่วไป ได้แก่ การวิเคราะห์โครงสร้างการถ่ายเทความร้อน และการไหลของของเหลว การวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้จำเป็นต้องมีโดเมนสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ การแก้ปัญหาจะแบ่งโดเมนที่มีขนาดใหญ่เป็นขนาดเล็ก ซึ่งโดเมนเล็กจะเรียกว่าชิ้นประกอบ ซึ่งมีอยู่จำนวนจำกัด เราจึงเรียกการแบ่งโดเมนแบบนี้ว่าชิ้นประกอบอันตะ (finite element)

ซึ่งในบทนี้เราจะทำการศึกษาวิธีการชิ้นประกอบอันตะ ได้แก่ วิธีการของค่าความผิดพลาดที่ถูกให้น้ำหนัก, วิธีการหาค่าน้ำหนัก เมื่อฟังก์ชันทดสอบมีค่าที่ไม่ทราบค่า 2 ค่า, วิธีการหาค่าน้ำหนัก เมื่อฟังก์ชันทดสอบมีค่าที่ไม่ทราบค่า n ค่า, วิธีวีค (weak formulation), ฟังก์ชันทดสอบต่อเนื่องรายจุด, ฟังก์ชันสัณฐานเชิงเส้น และ วิธีการชิ้นประกอบอันตะของกาเลอร์กิน

2.1 วิธีการของค่าความผิดพลาดที่ถูกให้น้ำหนัก (weighted residual)

วิธีการนี้เป็นวิธีการหาค่าน้ำหนัก w ที่ใช้กับวิธีการชิ้นประกอบอันตะ ซึ่งจะแสดงให้เห็นดังตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1
$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x,\ 0 < x < 1 \qquad (2.1.1)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบคือ $u(0) = 0$ และ $u(1) = 0$

ขั้นตอนแรกของวิธีการหาค่าของความผิดพลาดที่ถูกให้น้ำหนัก คือการสมมติฟังก์ชันทดสอบ (trial function) ที่มีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าที่จะถูกกำหนดในภายหลัง เช่น เราสมมติว่า u สามารถประมาณด้วย $\tilde{u}$ ดังนี้

ให้ $\tilde{u} = ax(1-x)$ โดยที่ a ไม่ทราบค่า

และ $\tilde{u}(0) = 0$ และ $\tilde{u}(1) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทั่วไปแล้ว ความถูกต้องของการแก้ปัญหาโดยประมาณจะขึ้นอยู่กับการเลือกฟังก์ชันทดสอบที่เหมาะสม ซึ่งเราจะหาค่า a ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันทดสอบ จากค่าความผิดพลาดดังต่อไปนี้

กำหนดให้ค่าความผิดพลาด (residual) R คือ

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x$$

$$= \frac{d^2(ax(1-x))}{dx^2} - (ax(1-x)) + x$$

$$= \frac{d^2(ax - ax^2))}{dx^2} - (ax(1-x)) + x$$

$$R = -2a - (ax(1-x)) + x \tag{2.1.2}$$

ขั้นตอนต่อไปคือการหาตัวที่ไม่ทราบค่า a โดยนำค่าความผิดพลาด R คูณกับน้ำหนัก w แล้วทำการอินทิเกรตบนโดเมน ซึ่งเป็นที่แน่นอนว่าเราต้องการให้ค่าความผิดพลาดเป็นศูนย์ ดังนี้

$$I = \int_0^1 wRdx$$

$$= \int_0^1 w\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x\right)dx$$

$$= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x)dx \tag{2.1.3}$$

ทำให้ได้ว่า $\int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x)dx = 0$

วิธีการหาค่าน้ำหนัก w

วิธีการหาค่าน้ำหนัก จะแบ่งออกเป็น 3 วิธี ดังต่อไปนี้

1. วิธีคอลโลเคชัน (Collocation method) ให้ $w = \delta(x - x_i)$
2. วิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด (Least Squares method) ให้ $w = \frac{dR}{da}$
3. วิธีกาเลอร์กิน (Galerkin's method) ให้ $w = \frac{d\tilde{u}}{da}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีที่1 วิธีคอลโลเคชัน

ให้ $w = \delta(x - x_i)$ และทำการแทนค่า w ลงในสมการ (2.1.3) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x)dx \\ &= \int_0^1 \delta(x - x_i)(-2a - ax(1-x) + x)dx \\ &= -2a - ax_i(1 - x_i) + x_i \end{aligned}$$

ดังนั้น $-2a - ax_i(1 - x_i) + x_i = 0,\ 0 < x_i < 1$

สมมติให้ $x_i = 0.5$ ดังนั้น

$$-2a - a\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2a - \frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

ทำให้ได้ว่า $a = 0.2222$ และ ดังนั้น $\tilde{u} = 0.2222x(1 - x)$

วิธีที่ 2 วิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด

ให้ $w = \dfrac{dR}{da}$ ดังนั้น จากสมการ (2.1.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} w = \frac{dR}{da} &= \frac{d}{da}(-2a - ax(1-x) + x) \\ &= -2 - x(1-x) \end{aligned}$$

ทำการแทนค่า w ลงในสมการ (2.1.3) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x)dx \\ &= \int_0^1 (-2 - x(1-x))(-2a - ax(1-x) + x)dx \\ &= \int_0^1 (-2 - x - x^2)(-2a - ax(1-x) + x)dx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 4a + 4ax - 3ax^2 - 2ax^3 + ax^4 - 2x - x^2 + x^3\ dx = 0$$

$$\left[4ax + 2ax^2 - ax^3 - \frac{ax^4}{2} + \frac{ax^5}{5} - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\left[4a(1)+2a(1)^2-a(1)^3-\frac{a(1)^4}{2}+\frac{a(1)^5}{5}-(1)^2-\frac{(1)^3}{3}+\frac{(1)^4}{4}\right]-$$

$$\left[4a(0)+2a(0)^2-a(0)^3-\frac{a(0)^4}{2}+\frac{a(0)^5}{5}-(0)^2-\frac{(0)^3}{3}+\frac{(0)^4}{4}\right]=0$$

$$4a+2a-a-\frac{a}{2}+\frac{a}{5}-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=0$$

$$a\left(4+2-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$a\left(4+2-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$a\left(\frac{47}{10}\right)=\left(\frac{11}{12}\right)$$

$$a=\left(\frac{110}{564}\right)$$

ทำให้ได้ว่า $a=0.1950$ และ ดังนั้น $\tilde{u}=0.1950x(1-x)$

วิธีที่ 3 วิธีกาเลอร์กิน

ให้ $w=\dfrac{d\tilde{u}}{da}$ ดังนั้น จากสมการ (2.1.2) จะได้ว่า

$$w=\frac{d\tilde{u}}{da}=\frac{d}{da}(ax(1-x))$$
$$=x(1-x)$$

ทำการแทนค่า w ลงในสมการ (2.1.3) ทำให้ได้ว่า

$$I=\int_0^1 w(-2a-ax(1-x)+x)dx$$
$$=\int_0^1 (x(1-x))(-2a-ax(1-x)+x)dx$$
$$=\int_0^1 (x-x^2)(-2a-ax(1-x)+x)dx$$
$$=\int_0^1 (-2ax+ax^2+ax^3-ax^4+x^2-x^3)dx$$

ดังนั้น $$\left[-ax^2+\frac{ax^3}{3}+\frac{ax^4}{4}-\frac{ax^5}{5}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\left[-a(1)^2+\frac{a(1)^3}{3}+\frac{a(1)^4}{4}-\frac{a(1)^5}{5}+\frac{(1)^3}{3}-\frac{(1)^4}{4}\right]$$

$$-\left[-a(0)^2+\frac{a(0)^3}{3}+\frac{a(0)^4}{4}-\frac{a(0)^5}{5}+\frac{(0)^3}{3}-\frac{(0)^4}{4}\right]=0$$

$$-a+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}-\frac{a}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0$$

$$a\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$a\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

$$a\left(-\frac{37}{60}\right)=\left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$a=\left(-\frac{5}{37}\right)$$

ทำให้ได้ว่า $a=0.1351$ และ ดังนั้น $\tilde{u}=0.1351x(1-x)$

ตารางเปรียบเทียบค่าของ $\tilde{u}$ ทั้ง 3 วิธี ที่ $x=0.5$

Exact solution	Collocation	Least squares	Galerkin
0.0566	0.0556	0.0576	0.0568
ค่าความคลาดเคลื่อน	0.001	0.001	0.0002

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบค่าของ $\tilde{u}$ ทั้ง 3 วิธี ที่ $x=0.5$

จะเห็นว่าวิธีการกาเลอร์กินให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับอีก 2 วิธีข้างต้น สำหรับการปรับปรุงผลเฉลยให้ดีขึ้นเราสามารถเพิ่มจำนวนพจน์ให้มากขึ้นในฟังก์ชันทดสอบ ดังนี้

ตัวอย่าง 2 ให้ $\tilde{u}=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)$

ดังนั้น $\dfrac{d\tilde{u}}{dx}=a_1-2a_1x+2a_2x-3a_2x^2$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}=-2a_1+2a_2-6a_2x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.1.1) ดังนั้น ค่าความผิดพลาด (residual) คือ

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x$$

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a_1 - a_1x + a_1x^2 + 2a_2 - 6a_2x - a_2x^2 + a_2x^3 + x$$

วิธีการหาค่าน้ำหนัก เมื่อฟังก์ชันทดสอบมีค่าที่ไม่ทราบค่า 2 ค่า

จากวิธีการหาค่าน้ำหนักก่อนหน้านี้ เราสามารถหา w_i ได้จากทั้ง 3 วิธี ดังนี้

1. วิธีคอลโลเคชัน $w_i = \delta(x - x_i),\ i = 1, 2, ..., n$

2. วิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด $w_i = \dfrac{\partial R}{\partial a_i},\ i = 1, 2, ..., n$

3. วิธีกาเลอร์กิน $w_i = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i},\ i = 1, 2, ..., n$

สำหรับค่า i = 1, 2 จากตัวอย่างที่ 2 ทำให้ได้ว่า

วิธีคอลโลเคชัน $w_1 = \delta(x - x_1),\ w_2 = \delta(x - x_2)$

วิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด $w_1 = \dfrac{\partial R}{\partial a_1} = -2 - x + x^2$

$$w_2 = \frac{\partial R}{\partial a_2} = 2 - 6x - x^2 + x^3$$

วิธีกาเลอร์กิน $w_1 = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial a_1} = x(1 - x)$

$$w_2 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_2} = x^2(1 - x)$$

สังเกตว่า w_1 และ w_2 จากวิธีการกาเลอร์กิน (Galerkin's method) สามารถหาได้ง่าย นั่นคือ ฟังก์ชันที่คูณกับค่าคงที่ $a_i, i = 1, 2$ นั่นเอง

ถ้าเราประยุกต์ใช้วิธีการกาเลอร์กินจะสามารถหา $I_i, i = 1, 2$ ได้ดังนี้

$$I_1 = \int_0^1 w_1 R dx$$

$$= \int_0^1 x(1 - x)(a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$I_2 = \int_0^1 w_2 R dx$$
$$= \int_0^1 x^2(1-x)(a_1(-2-x+x^2) + a_2(2-6x-x^2+x^3) + x)dx$$

เมื่อให้ $I_1 = 0$ และ $I_2 = 0$ ทำให้เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ a_1 และ a_2 ได้

วิธีการหาค่าน้ำหนักเมื่อฟังก์ชันทดสอบมีค่าที่ไม่ทราบค่า n ค่า

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$L(u) = f \tag{2.1.4}$$

เมื่อ L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ฟังก์ชันทดสอบที่เลือกมาคือ

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + ... + a_n g_n(x)$$

โดยที่ $g_i(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า ที่ขึ้นอยู่กับ x ถ้ากำหนดให้ $L(u) = \dfrac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u}$ และ $f(x) = x$ ดังสมการ (2.1.1) ทำให้ได้ว่า

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x) + x$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}(a_1 g_1 + a_2 g_2 + ... + a_n g_n) - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i + x$$

$$= a_1 g_1'' + a_2 g_2'' + ... + a_n g_n'' - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i + x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i g_i'' - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i + x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i (g_i'' - g_i) + x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + p$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $h_i = g_i'' - g_i$ และ $p = x$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับ x

ฟังก์ชันทดสอบสำหรับวิธีกำลังสองที่น้อยที่สุด คือ

$$w_j = \frac{dR}{da_j} = h_j,\ j = 1, 2, ..., n$$

ดังนั้น

$$I = \int_\Omega w_j R\ d\Omega = \int_\Omega h_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i h_i + p \right)\ d\Omega,\ j = 1, 2, ..., n$$

สมมติให้ n = 2 เราจะได้ว่า

$$\int_\Omega h_1 \left(\sum_{i=1}^{2} a_i h_i + p \right)\ d\Omega = \int_\Omega h_1(a_1 h_1 + a_2 h_2 + p)\ d\Omega$$

$$\int_\Omega h_2 \left(\sum_{i=1}^{2} a_i h_i + p \right)\ d\Omega = \int_\Omega h_2(a_1 h_1 + a_2 h_2 + p)\ d\Omega$$

เนื่องจากเราต้องการให้ค่าความผิดพลาดเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\int_\Omega h_1(a_1 h_1 + a_2 h_2 + p)\ d\Omega = 0 \quad \text{และ} \quad \int_\Omega h_2(a_1 h_1 + a_2 h_2 + p)\ d\Omega = 0 \quad (2.1.5)$$

นำสมการ (2.1.5) มาเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \int h_1 h_1 & \int h_1 h_2 \\ \int h_2 h_1 & \int h_2 h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int h_1 p \\ \int h_2 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \int h_1 h_1 & \int h_1 h_2 \\ \int h_2 h_1 & \int h_2 h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int h_1 p \\ \int h_2 p \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} \int h_1 h_1 & \int h_1 h_2 \\ \int h_2 h_1 & \int h_2 h_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ และ $b = - \begin{bmatrix} \int h_1 p \\ \int h_2 p \end{bmatrix}$

ดังนั้น สมการ (2.1.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $Ax = b$

ถ้า A สามารถหาผกผันได้ ทำให้ได้ว่า

$$x = A^{-1} b$$

เนื่องจาก $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น เมื่อหาค่า x ได้ ทำให้เราสามารถคำนวณหา $\tilde{u}$ ได้นั่นคือ

$$\tilde{u} = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 วิธีวีค (Weak Formulation)

ในหัวข้อนี้เราต้องการจะแสดงถึงวิธีวีค ซึ่งเป็นวิธีที่สำคัญของวิธีการชิ้นประกอบอันตะ โดยใช้การอินทิเกรตบางส่วนเข้ามาช่วย สำหรับโดเมน 1 มิติ เพื่อให้อันดับของอนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าลดลงมาหนึ่งอันดับ วิธีการนี้จึงเรียกว่าวิธีวีค

จากสมการ (2.1.1): $\dfrac{d^2u}{dx^2} - u = -x,\ 0 < x < 1$

และเงื่อนไข $u(0) = 0$ และ $u(1) = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x\right)\ dx \\ &= \int_0^1 w\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u}w + xw\ \ dx \\ &= \int_0^1 w\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}\ dx - \int_0^1 \tilde{u}w\ dx + \int_0^1 xw\ dx \\ &= w\frac{d\tilde{u}}{dx}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dw}{dx}\ dx - \int_0^1 \tilde{u}w\ dx + \int_0^1 xw\ dx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dw}{dx} - \tilde{u}w + xw\right)\ dx + \left[w\frac{d\tilde{u}}{dx}\right]_0^1 = 0 \qquad (2.2.1)$$

วิธีการดังกล่าว เรียกว่า วิธีวีค (Weak Formulation)

2.3 ฟังก์ชันทดสอบต่อเนื่องรายจุด (Piecewise Continuous Trial Function)

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จะมีความถูกต้องของวิธีการประมาณค่ามากน้อยเพียงใดนั้น ขึ้นอยู่กับการเลือกฟังก์ชันทดสอบ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันทดสอบต่อเนื่องรายจุด

พิจารณา ฟังก์ชันเชิงเส้นรายจุด (piecewise linear function) บนโดเมนหนึ่งมิติดังต่อไปนี้

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i+1})/h_i & ,\ x_{i-1} \le x \le x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & ,\ x_i < x \le x_{i+1} \\ 0 & ,\ \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ $i = 1, 2, ..., n$ เมื่อ n คือจำนวนชิ้นประกอบลบหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3 พิจารณาปัญหาก่อนหน้านี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x,\ 0 < x < 1$$

และเงื่อนไขค่าขอบ $u(0) = 0$ และ $u(1) = 0$ โดยใช้วิธีวีค (weak formulation) ทำให้ได้ว่า

$$I = \int_0^1 w\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x\right)\ dx$$

ดังนั้น $$\int_0^1 \left(-\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dw}{dx} - \tilde{u}w + xw\right)\ dx + \left[w\frac{d\tilde{u}}{dx}\right]_0^1 = 0$$

เลือกฟังก์ชัน

$$\tilde{u} = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$$

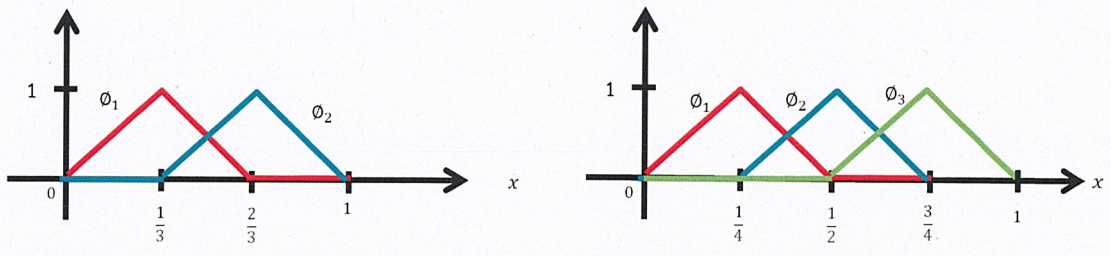
ซึ่ง a_1 และ a_2 เป็นตัวที่ไม่ทราบค่า และสำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็น 3 ชิ้นประกอบ ทำให้ได้ว่า ϕ_1 และ ϕ_2 สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 2 - 3x & , \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 0 & , \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & , \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 3 - 3x & , \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังแสดงในรูปภาพที่ 2.1(a) และ สำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็น 4 ชิ้นประกอบ จะได้ดังรูปภาพที่ 2.1(b)



(a) (b)

รูปภาพที่ 2.1 การแบ่งโดเมนออกเป็น 4 ชิ้นประกอบ

เนื่องจาก $\tilde{u} = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ ดังนั้น

$$\tilde{u} = \begin{cases} a_1 3x & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ a_1(2-3x) + a_2(3x-1) & , \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ a_2(3-3x) & , \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

ประยุกต์ใช้วิธีการกาเลอร์กิน นั่นคือ

$$w_i = \frac{d\tilde{u}}{da_i} \quad , i = 1, 2 \quad \text{ดังนั้น}$$

$$w_1 = \begin{cases} 3x & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 2-3x & , \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 0 & , \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 3x-1 & , \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 3-3x & , \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

สังเกตว่า $w_1 = \phi_1(x)$ และ $w_2 = \phi_2(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ค่าความผิดพลาดที่ถูกให้น้ำหนักเฉลี่ย (averaged weighted residuals) คือ

$$I_1 = \int_0^1 \left(-\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dw_1}{dx} - \tilde{u}w_1 + xw_1 \right) \, dx = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(-\frac{d\tilde{u}}{dx}\frac{dw_2}{dx} - \tilde{u}w_2 + xw_2 \right) \, dx = 0$$

แทนค่า $\tilde{u}$ และ w_i ใน I_i โดยที่ $i = 1, 2$ ทำให้ได้ว่า

$$I_1 = \int_0^{1/3} -3(3a_1) - 3x(3a_1x) + x(3x) \; dx + \int_{1/3}^{2/3} [3(-3a_1 + 3a_2) - (2 - 3x)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(2 - 3x)] \; dx - \int_{2/3}^{1} 0 \; dx$$

$$= \int_0^{1/3} -9a_1 - 9a_1x^2 + 3x^2 dx + \int_{1/3}^{2/3} [-9a_1 + 9a_2 - (4a_1 - 6a_1x + 6a_2x - 2a_2 + 6a_1x - 9a_1x^2 + 9a_2x^2 - 3a_2x) + 2x - 3x] dx$$

$$= \int_0^{1/3} -9a_1 - 9a_1x^2 - 3x^2 dx + \int_{1/3}^{2/3} [-9a_1 + 9a_2 - 4a_1 + 6a_1x - 6a_2x + 2a_2 - 6a_1x + 9a_1x^2 - 9a_2x^2 + 3a_2x - x] dx$$

$$= \int_0^{1/3} (-9a_1 - 9a_1x^2 - 3x^2) dx + \int_{1/3}^{2/3} (-13a_1 + 11a_2 - 3a_2x + 9a_1x^2 - 9a_2x^2 - x) dx$$

$$= \left[-9a_1x - \frac{9}{3}a_1x^3 - \frac{3}{3}x^3 \right]_0^{1/3} + \left[-13a_1x + 11a_2x - \frac{3}{2}a_2x^2 + \frac{9}{3}a_1x^3 - \frac{9}{3}a_2x^3 - \frac{x^2}{2} \right]_{1/3}^{2/3}$$

$$= \left[-9a_1x - 3a_1x^3 - x^3 \right]_0^{1/3} + \left[-13a_1x + 11a_2x - \frac{3}{2}a_2x^2 + 3a_1x^3 - 3a_2x^3 - \frac{x^2}{2} \right]_{1/3}^{2/3}$$

$$= \left[-9\left(\frac{1}{3}\right)a_1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 a_1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] + \left[-13\left(\frac{2}{3}\right)a_1 + 11\left(\frac{2}{3}\right)a_2 - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 a_2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 a_1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 a_2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 13\left(\frac{1}{3}\right)a_1 - 11\left(\frac{1}{3}\right)a_2 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 a_2 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 a_1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 a_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \right]$$

$$= a_1\left[-9\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 13\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 13\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] + a_2\left[11\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 11\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] + \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \right]$$

$$= a_1\left[-3 - \frac{1}{9} - \frac{26}{3} + \frac{8}{9} + \frac{13}{3} - \frac{1}{9} \right] + a_2\left[+\frac{22}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{11}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \right] + \left[-\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \right]$$

ดังนั้น

$$-6.2222a_1 + 2.9444a_2 + 0.1111 = 0 \qquad (2.3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $I_2 = \int_0^{1/3} 0\ dx + \int_{1/3}^{2/3} [-3(-3a_1 - 3a_2) - (3x-1)(2a_1 - 3a_2x + 3a_2x - a_2) + x(3x - 1)]\ dx + \int_{2/3}^{1} [3(-3a_2) - (3-3x)(3a_2 - 3a_2x) + x(3-3x)]\ dx$

$= \int_{1/3}^{2/3} [9a_1 + 9a_2 - (6a_1x - 9a_1x^2 + 9a_2x^2 - 3a_2x - 2a_1 + 3a_1x - 3a_2x + a_2) + 3x^2 - x]dx + \int_{2/3}^{1} [-9a_2 - (9a_2 - 9a_2x - 9a_2x + 9a_2x^2) + 3x - 3x^2]dx$

$= \int_{1/3}^{2/3} [9a_1 + 9a_2 - 6a_1x + 9a_1x^2 - 9a_2x^2 + 3a_2x + 2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2 + 3x^2 - x]dx + \int_{2/3}^{1} [-9a_2 - 9a_2 + 9a_2x + 9a_2x - 9a_2x^2 + 3x - 3x^2]dx$

$= \int_{1/3}^{2/3} [11a_1 + 8a_2 - 9a_1x + 6a_2x - 9a_1x^2 - 9a_2x^2 + 3x^2 - x]dx + \int_{2/3}^{1} [-9a_2 - 9a_2 + 9a_2x + 9a_2x - 9a_2x^2 + 3x - 3x^2]dx$

$= \left[11a_1x + 8a_2x - \frac{9}{2}a_1x^2 + \frac{6}{2}a_2x^2 + \frac{9}{3}a_1x^3 - \frac{9}{3}a_2x^3 + \frac{3}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{2/3} + \left[-9a_2x - 9a_2x + \frac{18}{2}a_2x^2 - \frac{9}{3}a_2x^3 + \frac{3}{3}x^3 - \frac{3}{3}x^3\right]_{2/3}^{1}$

$= \left[11\left(\frac{2}{3}\right)a_1 + 8\left(\frac{2}{3}\right)a_2 - \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 a_1 + \frac{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 a_2 + \frac{9}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 a_1 - \frac{9}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 a_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{1}{3}\right)a_1 - 8\left(\frac{1}{3}\right)a_2 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 a_1 - \frac{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 a_2 - \frac{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 a_1 + \frac{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 a_2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 9(1)a_2 - 9(1)a_2 + \frac{18}{2}(1)^2 a_2 - \frac{9}{3}(1)^3 a_2 + (1)^3 - (1)^3 + 9\left(\frac{2}{3}\right)a_2 + 9\left(\frac{2}{3}\right)a_2 - \frac{18}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 a_2 + \frac{9}{3}a_2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\right]$

$= a_1\left[11\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{9}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 11\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + a_2\left[8\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{9}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{9}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9 - 9 + \frac{18}{2} - \frac{9}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right) + 9\left(\frac{2}{3}\right) - 18\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{9}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right] + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= a_1\left[\frac{22}{3} - 2 + 2 - \frac{11}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + a_2\left[\frac{16}{3} + \frac{8}{9} - \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - \frac{21}{3} + \frac{1}{9} - 9 - 9 - 9 - 3 + 6 + 6 - 8 + \frac{8}{9}\right] + \frac{8}{27} - \frac{4}{18} - \frac{1}{27} + \frac{1}{52}$

ดังนั้น

$$2.9444a_1 - 6.2222a_2 + 0.2222 = 0 \qquad (2.3.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการแก้สมการ (2.3.1) และ (2.3.2) ทำให้ได้ว่า $a_1 = 0.0488$ และ $a_2 = 0.0569$

ดังนั้น $\tilde{u} = 0.0488\phi_1(x) + 0.0569\phi_2(x)$

2.4 ฟังก์ชันสัณฐานเชิงเส้น (Linear shape function)

เนื่องจากว่าเราต้องการหาฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) ($\phi_i(x)$) ทุกชิ้นประกอบ (element) ทำให้ไม่สะดวกที่จะใช้หาผลเฉลยที่ชิ้นประกอบ (element) มีจำนวนมาก ในหัวข้อนี้เราจะแสดงถึงวิธีการหาฟังก์ชันสัณฐาน ที่สามารถใช้ได้กับจำนวนชิ้นประกอบที่มีจำนวนมาก

เราจะสมมติให้ฟังก์ชันทดสอบเชิงเส้นที่ไม่ทราบค่าเป็น

$$u(x) = c_1 x + c_2 \tag{2.4.1}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน เราจะละ ~ ออกจาก $\tilde{u}$ และเขียนแทน $\tilde{u}$ ด้วย u

ให้ $u_i = u(x_i)$ และ $u_{i+1} = u(x_{i+1})$

ดังนั้น
$$u_i = c_1 x_i + c_2 \tag{2.4.2}$$

และ
$$u_{i+1} = c_1 x_{i+1} + c_2 \tag{2.4.3}$$

จากสมการ (2.4.2) ทำให้ได้ว่า
$$c_1 = \frac{u_i - c_2}{x_i} \tag{2.4.4}$$

แทนค่าสมการ (2.4.4) ในสมการ (2.4.3) ทำให้ได้ว่า

$$\left(\frac{u_i - c_2}{x_i}\right) x_{i+1} + c_2 = u_{i+1}$$

ดังนั้น
$$\frac{u_i x_{i+1} - c_2 x_{i+1}}{x_i} + \frac{c_2 x_i}{x_i} = \frac{u_{i+1} x_i}{x_i}$$

$$u_i x_{i+1} - c_2 x_{i+1} + c_2 x_i = u_{i+1} x_i$$

$$c_2(x_i - x_{i+1}) = u_{i+1} x_i - u_i x_{i+1}$$

$$c_2 = \frac{u_{i+1} x_i - u_i x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \tag{2.4.5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{h_i} \tag{2.4.6}$$

เมื่อ $h_i = x_{i+1} - x_i$ แทนค่าสมการ (2.4.5) ในสมการ (2.4.4) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_i - \left(\frac{u_{i+1} x_i - u_i x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)}{x_i} \\ &= \frac{u_i x_i - u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i + u_i x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{1}{x_i} \\ &= \frac{u_i x_i - u_{i+1} x_i}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{1}{x_i} = \frac{(u_i - u_{i+1}) x_i}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \tag{2.4.7}$$

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} \tag{2.4.8}$$

แทนค่าสมการ (2.4.6) และ (2.4.8) กลับไปในสมการ (2.4.1)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 x - c_2 \\ &= \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} \right) x + \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{h_i} \\ &= \frac{u_{i+1} x - u_i x + u_i x_{i+1} - x_i u_{i+1}}{h_i} \\ &= \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) u_i + \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) u_{i+1} \\ u(x) &= H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1} \end{aligned}$$

โดยที่ $H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$ และ $H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$

ฟังก์ชัน $H_1(x)$ และ $H_2(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันสัณฐานเชิงเส้น (linear shape function)

สังเกตว่า $\sum_{i=1}^{2} H_i(x) = H_1(x) + H_2(x)$

$$= \frac{x_{i+1} - x + x - x_i}{h_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} = \frac{h_i}{h_i} = 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 วิธีการชิ้นประกอบอันตะของกาเลอร์กิน (Galerkin's Finite Element Formulation)

ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงถึงวิธีการชิ้นประกอบอันตะของกาเลอร์กิน โดยการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันสัณฐานเชิงเส้นในหัวข้อ 2.4

ตัวอย่าง 4 พิจารณาปัญหาก่อนหน้านี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x,\ 0 < x < 1$$

กับเงื่อนไขค่าขอบ $u(0) = 0$ และ $u(1) = 1$

ประยุกต์ใช้วิธีวีคกับสมการ (2.1.1) ทำให้ได้ว่า

$$I = \int_0^1 \left(-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - uw + xw \right) dx + \left[u'w \right]_0^1 = 0$$

สำหรับจำนวนชิ้นประกอบ 3 ชิ้นประกอบ ทำให้ได้ว่า

$$I = \sum_{i=1}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - uw + xw \right) dx + \left[u'w \right]_0^1 = 0 \qquad (2.5.1)$$

พิจารณา

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - uw + xw \right) dx \qquad (2.5.2)$$

เนื่องจาก $u = H_1(x)u_i + H_2(x)u_{i+1}$

ดังนั้น

$$u = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix},\ u' = \begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \qquad (2.5.3)$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \text{ และ } w' = \begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix} \qquad (2.5.4)$$

โดยที่ $H_1(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}$ และ $H_2(x) = \dfrac{x - x_i}{h_i}$

แทนค่าสมการ (2.5.3) และ (2.5.4) ลงในสมการ (2.5.2) ทำให้ได้ว่า

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - uw + xw \right) dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \; dx$$

$$= -\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1'H_1' & H_1'H_2' \\ H_2'H_1' & H_2'H_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1H_1 & H_1H_2 \\ H_2H_1 & H_2H_2 \end{bmatrix} \; dx \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx \quad (2.5.5)$$

พิจารณา $\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1'H_1' + H_1H_1 \; dx$

เนื่องจากว่า $H_1(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}$ ดังนั้น $H_1'(x) = \dfrac{-1}{h_i}$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i} \quad \text{ดังนั้น} \quad H_2'(x) = \frac{1}{h_i}$$

ดังนั้น $\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1'H_1' + H_1H_1 \; dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_i}\right)\left(-\frac{1}{h_i}\right) + \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i}\right)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i}\right) \; dx$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{h_i^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{h_i^2}\Big[x\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 \frac{d(x_{i+1} - x)}{-1}$$

$$= \frac{1}{h_i^2}[x_{i+1} - x_i] - \frac{1}{h_i^2}\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{h_i}{h_i^2} - \frac{1}{3h_i^2}[0 - (x_{i+1} - x_i)^3]$$

$$= \frac{h_i}{h_i^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3h_i^2}$$

$$= \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} \quad (2.5.6)$$

และในทำนองเดียวกัน ทำให้ได้ว่า $\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2'H_2' + H_2H_2 \; dx = \dfrac{1}{h_i} + \dfrac{h_i}{3}$ (2.5.7)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1'H_2' + H_1H_2 \ dx$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_i}\right)\left(\frac{1}{h_i}\right) + \left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \ dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h_i^2} + \frac{(x_{i+1}-x)(x-x_i)}{h_i^2} \ dx$$

$$= -\frac{1}{h_i^2}\left[x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (xx_{i+1}x_{i+1}x_i + xx_i - x^2)dx$$

$$= -\frac{(x_{i+1}-x_i)}{h_i^2} + \frac{1}{h_i^2}\left[\frac{x^2}{2}x_{i+1}x_{i+1}x_ix + \frac{x^2}{2}x_i - \frac{x^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_i^2}\left[\frac{x_{i+1}^3}{2}x_{i+1}^2x_i + \frac{x_{i+1}^2x_i}{2} - \frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_{i+1}x - i^2}{2} + x_{i+1}x_i^2 - \frac{x_i^3}{2} + \frac{x_i^3}{3}\right]$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{1}{6h_i^2}\left[3x_{i+1}^3 6x_{i+1}^2x_i + 3x_{i+1}^2x_i - 2x_{i+1}^3 - 3x_{i+1}x - i^2 + 6x_{i+1}x_i^2 - 3x_i^3 + 2x_i^3\right]$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{1}{6h_i^2}\left[x_{i+1}^3 3x_{i+1}^2x_i + 3x_{i+1}x - i^2 - x_i^3\right]$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i^2}$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i^3}{6h_i^2}$$

$$= -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \qquad (2.5.8)$$

และในทำนองเดียวกัน $\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2'H_1' + H_2H_1 \ dx = -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6}$ (2.5.9)

พิจารณา $\int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \ dx$

ดังนั้น $\int_{x_i}^{x_{i+1}} xH_1 \ dx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\left(\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\right)\ dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1}x - x^2}{h_i}\ dx$$

$$= \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1}x - x^2\ dx$$

$$= \frac{1}{h_i}\left[\frac{x_{i+1}x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[3x_{i+1}x^2 - 2x^3\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[3x_{i+1}^3 - 2x_{i+1}^3 - 3x_{i+1}x_i^2 + 2x_i^3\right]$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[x_{i+1}^3 - 3x_{i+1}x_i^2 + 2x_i^3\right]$$

$$= \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{6h_i}(x_{i+1}+2x_i)$$

$$= \frac{h_i^2}{6h_i}(x_{i+1}+2x_i)$$

$$= \frac{h_i}{6}(x_{i+1}+2x_i) \qquad (2.5.10)$$

และ $\int_{x_i}^{x_{i+1}} xH_2\ dx$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\ dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x^2 - x_i x}{h_i}\ dx$$

$$= \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2 - x_i x\ dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{h_i}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x_i x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[2x^3 - 3x_i x^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[2x_{i+1}^3 - 3x_i x_{i+1}^2 - 2x_i^3 + 3x_i^3\right]$$

$$= \frac{1}{6h_i}\left[2x_{i+1}^3 - 3x_i x_{i+1}^2 + x_i^3\right]$$

$$= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6h_i}(2x_{i+1} + x_i)$$

$$= \frac{h_i^2}{6h_i}(2x_{i+1} + x_i)$$

$$= \frac{h_i}{6}(2x_{i+1} + x_i) \qquad (2.5.11)$$

แทนค่าสมการ (2.5.6) – (2.5.11) ในสมการ (2.5.5) ทำให้ได้ว่า

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1'H_1' & H_1'H_2' \\ H_2'H_1' & H_2'H_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1H_1 & H_1H_2 \\ H_2H_1 & H_2H_2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} + \frac{hi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h_i}{6}(x_{i+1} + 2x_i) \\ \frac{h_i}{6}(2x_{i+1} + x_i) \end{bmatrix}$$

ขั้นต่อไปคือการแทนค่า h_i, x_i และ x_{i+1} สำหรับแต่ละชิ้นประกอบ (element) ซึ่งแต่ละชิ้นประกอบมีค่า $h_i = \frac{1}{3},\ i = 1, 2, 3$

ชิ้นประกอบที่ 1 $\quad x_i = 0,\ x_{i+1} = \frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งค่าทางขวามือมือของเครื่องหมายเท่ากับได้จากสมการ (2.5.1) เพราะชิ้นประกอบที่ 1 $u'w$ ถูกกำหนดค่าที่ $x = 0$

ชิ้นประกอบที่ 2 $\quad x_i = \frac{1}{3},\ x_{i+1} = \frac{2}{3}$

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0741 \\ 0.0926 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ชิ้นประกอบที่ 3 $\quad x_i = \frac{2}{3},\ x_{i+1} = 1$

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1296 \\ 0.1481 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u'(1) \end{bmatrix}$$

ซึ่งค่าทางขวามือมือของเครื่องหมายเท่ากับได้จากสมการ (2.5.1) เพราะชิ้นประกอบที่ 3 $u'w$ ถูกกำหนดค่าที่ $x = 0$

ต่อไปเราจะทำการเขียนชิ้นประกอบทั้ง 3 ชิ้น ในรูปเมทริกซ์ของทั้งโดเมน ดังนี้

รวมชิ้นประกอบที่ 1

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -3.1111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

รวมชิ้นประกอบ 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.1111 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -3.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0741 \\ 0.0926 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.13}$$

รวมชิ้นประกอบที่3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1111 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1296 \\ 0.1481 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u'(1) \end{bmatrix} \tag{2.5.14}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการนำสมการ (2.5.12) + (2.5.13) + (2.5.14) จะได้เมทริกซ์รวม (global matrix) คือ

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0185 \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u'(0) \\ 0 \\ 0 \\ u'(1) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3.1111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0185 + u'(0) \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ -0.1481 - u'(1) \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

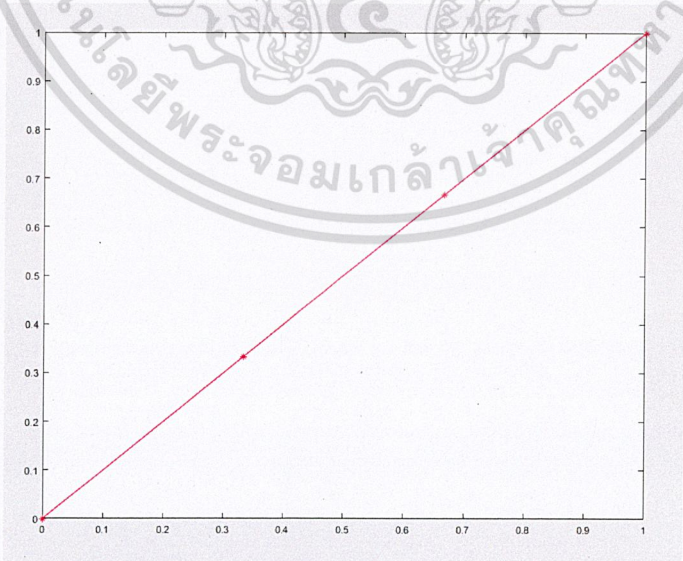
เนื่องจาก $u_1 = u(0) = 0$ และ $u_4 = u(1) = 1$ ดังนั้นสมการ (2.5.15) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และสามารถหาค่าของ u_1, u_2, u_3 และ u_4 ได้ดังนี้

$$u_1 = 0, u_2 = 0.3333, u_3 = 0.6666 \text{ และ } u_4 = 1$$

เมื่อนำ u_1, u_2, u_3 และ u_4 มาวาดกราฟ ทำให้ได้รูปภาพที่ 2.2 ดังนี้



รูปภาพที่ 2.2 กราฟสำหรับค่า u_1, u_2, u_3 และ u_4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่3
วิธีการดำเนินงาน

ในบทนี้ เราจะประยุกต์ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะของกาเลอร์กิน มาใช้ในการแก้สมการสโตกบริงแมนเพื่อหาความเร็วของของเหลวในโดเมนที่พิจารณา

จากสมการสโตกบริงแมน n มิติในงานวิจัยของ [K. Chamsri] ทำให้ได้ว่า

$$\mu k^{-1}\cdot(\varepsilon^l v^l)+\nabla p-\frac{\mu}{\varepsilon^l}\Delta(\varepsilon^l v^l)=\rho g+\mu k^{-1}\cdot\varepsilon^l v^s+\frac{\mu}{\varepsilon^l}\nabla f\ ,\quad 0\le y\le y_0 \quad (3.1)$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon^l v^l)=f\ ,\quad 0\le y\le y_0 \quad (3.2)$$

เมื่อ $0\le y_0\le 1$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ โดยที่

μ คือ ความหนืด (dynamic viscosity) หน่วยเป็น Pascal/s

k^{-1} คือ ส่วนกลับของความสามารถในการไหลของของไหลผ่านตัวกลางที่มีรูพรุน (inverse of permeability) หน่วยเป็น $1/l^2$

v^l คือ ความเร็วของของเหลว หน่วยเป็น $\mu m/s$

p คือ ความดัน (pressure) หน่วยเป็น $N/(\mu m)^2$

ε^l คือ ความพรุน (porousity) หน่วยเป็น 1

ρ คือ ความหนาแน่นของวัตถุ หน่วยเป็น $g/(\mu m)^3$

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravity) หน่วยเป็น $\mu m/s^2$

v^s คือ ความเร็วของของแข็งหรือเส้นขน หน่วยเป็น rad/s^2

เมื่อ ความพรุน คือ ปริมาตรของของไหลหารด้วยปริมาตรของโดเมนที่พิจารณา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับโดเมน 1 มิติ จะได้ว่า สมการ (3.1) และ (3.2) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\mu k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + P_0 - \frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} = \rho g + \mu k^{-1}\varepsilon^l v^s + \frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d}{dy}\left(\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\right) \tag{3.3}$$

โดยที่ ∇p ถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่ P_0 ทำการย้ายข้าง ทำให้ได้ว่า

$$\mu k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + P_0 - \frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} - \rho g - \mu k^{-1}\varepsilon^l v^s - \frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} = 0$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่ ทำให้ได้ว่า

$$\mu k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + P_0 - 2\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} - \rho g - \mu k^{-1}\varepsilon^l v^s = 0$$

หารด้วย μ ทั้งสมการ ทำให้ได้ว่า

$$k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + \frac{P_0}{\mu} - 2\frac{1}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} - \frac{\rho g}{\mu} - k^{-1}\varepsilon^l v^s = 0$$

ต่อไปเราจะทำการหา I โดยกำหนดให้ w เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก ดังนี้

$$I = \int_\Omega w\left(k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + \frac{P_0}{\mu} - 2\frac{1}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} - \frac{\rho g}{\mu} - k^{-1}\varepsilon^l v^s\right)dy$$

$$= \int_0^{y_0} wk^{-1}(\varepsilon^l v^l)dy + \int_0^{y_0} w\frac{P_0}{\mu}dy - \frac{2}{\varepsilon^l}\int_0^{y_0} w\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2}dy - \int_0^{y_0} w\frac{\rho g}{\mu}dy - \int_0^{y_0} wk^{-1}\varepsilon^l v^s dy$$

$$= \int_0^{y_0} wk^{-1}(\varepsilon^l v^l)dy + \int_0^{y_0} w\frac{P_0}{\mu}dy - \frac{2}{\varepsilon^l}\left[\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy}\bigg|_0^{y_0} - \int_0^{y_0}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy}dy\right] - \int_0^{y_0} w\frac{\rho g}{\mu}dy - \int_0^{y_0} wk^{-1}\varepsilon^l v^s dy$$

$$= \int_0^{y_0} wk^{-1}(\varepsilon^l v^l)dy + \int_0^{y_0} w\frac{P_0}{\mu}dy + \int_0^{y_0}\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy}dy - \int_0^{y_0} w\frac{\rho g}{\mu}dy - \int_0^{y_0} wk^{-1}\varepsilon^l v^s dy - \left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy}\right]_0^{y_0}$$

$$= \int_0^{y_0}\left(wk^{-1}(\varepsilon^l v^l) + w\frac{P_0}{\mu} + \frac{2}{\varepsilon^l}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy} - w\frac{\rho g}{\mu} - wk^{-1}\varepsilon^l v^s\right)dy - \left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy}\right]_0^{y_0}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{y_0}\left(wk^{-1}(\varepsilon^l v^l) + w\frac{P_0}{\mu} + \frac{2}{\varepsilon^l}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy} - w\frac{\rho g}{\mu} - wk^{-1}\varepsilon^l v^s\right)dy - \left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy}\right]_0^{y_0} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในที่นี้ เราจะแสดงให้เห็นถึงตัวอย่างของการแบ่งโดเมนออกเป็น 3 ชิ้นประกอบ จะได้ว่า

$$I = \sum_{i=1}^{3} \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} \left(wk^{-1}(\varepsilon^l v^l) + w\frac{P_0}{\mu} + \frac{2}{\varepsilon^l}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy} - w\frac{\rho g}{\mu} - wk^{-1}\varepsilon^l v^s \right) dy - \left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy} \right]_0^{y_0}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} \left(wk^{-1}(\varepsilon^l v^l) + w\frac{P_0}{\mu} + \frac{2}{\varepsilon^l}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy}\frac{dw}{dy} - w\frac{\rho g}{\mu} - wk^{-1}\varepsilon^l v^s \right) - \left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy} \right]_0^{y_0} = 0 \tag{3.4}$$

พิจารณา

$$A = \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} \left(wk^{-1}(\varepsilon^l v^l) + w\frac{P_0}{\mu} + \frac{2}{\varepsilon^l}\frac{dw}{dy}\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy} - w\frac{\rho g}{\mu} - wk^{-1}\varepsilon^l v^s \right) dy$$

กำหนดให้ $v = (\varepsilon^l v^l)$ และเนื่องจาก $v = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$, $v^s = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^s \\ v_{i+1}^s \end{bmatrix}$

$$\frac{d(\varepsilon^l v^l)}{dy} = \frac{dv}{dy} = \begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \frac{dw}{dy} = \begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$A = \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} k^{-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \left(\frac{P_0 - \rho g}{\mu} \right) + \frac{2}{\varepsilon^l} \begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1' H_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} - k^{-1}\varepsilon^l \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^s \\ v_{i+1}^s \end{bmatrix} dy$$

$$= \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} \left(k^{-1} \begin{bmatrix} H_1 H_1 & H_1 H_2 \\ H_2 H_1 & H_2 H_2 \end{bmatrix} + \frac{2}{\varepsilon^l} \begin{bmatrix} H_1' H_1' & H_1' H_2' \\ H_2' H_1' & H_2' H_2' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} - k^{-1}\varepsilon^l \begin{bmatrix} H_1 H_1 & H_1 H_2 \\ H_2 H_1 & H_2 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^s \\ v_{i+1}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \left(\frac{P_0 - \rho g}{\mu} \right) dy$$

เนื่องจาก $H_1 = \dfrac{Y_{i+1} - Y}{h_i}$ ดังนั้น $H_1' = \dfrac{-1}{h_i}$ และ $H_2 = \dfrac{Y - Y_i}{h_i}$ ดังนั้น $H_2' = \dfrac{1}{h_i}$

จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} k^{-1}\dfrac{h_i}{3} + \dfrac{2}{\varepsilon^l h_i} & k^{-1}\dfrac{h_i}{6} - \dfrac{2}{\varepsilon^l h_i} \\ k^{-1}\dfrac{h_i}{6} - \dfrac{2}{\varepsilon^l h_i} & k^{-1}\dfrac{h_i}{3} + \dfrac{2}{\varepsilon^l h_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} - k^{-1}\varepsilon^l \begin{bmatrix} \dfrac{h_i}{3} & \dfrac{h_i}{6} \\ \dfrac{h_i}{6} & \dfrac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^s \\ v_{i+1}^s \end{bmatrix} +$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(\frac{P_0-\rho g}{\mu}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{2h_i}(Y_{i+1}-2Y_{i+1}Y_i+Y_i^2)\\ \frac{h_i}{2}\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

สำหรับเทอมสุดท้ายในสมการ (3.4) เราสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

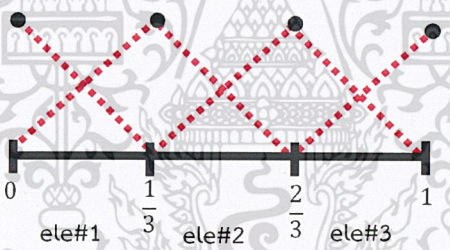
$$-\left[\frac{2}{\varepsilon^l}\frac{wd(\varepsilon^l v^l)}{dy}\right]_0^{y_0}=-\frac{2}{\varepsilon^l}\left[wv'\right]_0^{y_0}=-\frac{2}{\varepsilon^l}\left[w(y_0)v'(y_0)-w(0)v'(0)\right] \tag{3.6}$$

กำหนดให้ $\mu=1\times10^6 g/\mu m\cdot s,\ \rho=992.2\times10^{-15}g/(\mu m)^3,$

$g=9.81\times10^6\mu m/s^2,\ k^{-1}=\frac{1}{0.0017}(\mu m)^2,\ \varepsilon^l=0.74867,\ P_0=1\,N/(\mu m)^2$

และ $v^s=y\ rad/s^2$ (3.7)

ทำการแทนค่าสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.5) และ แทนค่าสมการ (3.5) และ สมการ (3.6) ลงในสมการ (3.4) ทำให้ได้เมทริกซ์ชิ้นประกอบ (element matrix) ดังนี้



รูปภาพที่ 3.1 การแบ่งออกเป็น 3 ชิ้นประกอบ

ชิ้นประกอบที่ 1

$$\begin{bmatrix}73.3737 & 24.6655\\ 24.6655 & 73.3737\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8.1555\\ 16.3109\end{bmatrix}+\frac{2}{\varepsilon^l}\begin{bmatrix}v'(0)H_1(0)\\ v'(0)H_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

ชิ้นประกอบที่ 2

$$\begin{bmatrix}73.3737 & 24.6655\\ 24.6655 & 73.3737\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_2\\ v_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}32.6218\\ 40.7772\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชิ้นประกอบที่ 3

$$\begin{bmatrix} 73.3737 & 24.6655 \\ 24.6655 & 73.3737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 57.0881 \\ 65.2436 \end{bmatrix} - \frac{2}{\varepsilon^l} \begin{bmatrix} v'(y_0)H_1(y_0) \\ v'(y_0)H_2(y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $H_1(0) = 1, H_2(0) = 0, H_1(y_0) = 0, H_2(y_0) = 1$

ดังนั้น ทำการรวมเมทริกซ์ชิ้นประกอบ ทำให้ได้เมทริกซ์รวม (global matrix) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 73.3737 & 24.6655 & 0 & 0 \\ 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 & 0 \\ 0 & 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 \\ 0 & 0 & 24.6655 & 73.3737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8.1555 \\ 48.9327 \\ 97.8653 \\ 65.2436 \end{bmatrix} + \frac{2}{\varepsilon^l} \begin{bmatrix} v'(0) \\ 0 \\ 0 \\ -v'(y_0) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 73.3737 & 24.6655 & 0 & 0 \\ 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 & 0 \\ 0 & 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 \\ 0 & 0 & 24.6655 & 73.3737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1555 - \frac{2}{\varepsilon^l} v'(0) \\ 48.9327 \\ 97.8653 \\ 65.2436 + \frac{2}{\varepsilon^l} v'(y_0) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

สมมติค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$ ทำการแทนค่าขอบลงในสมการ (3.8) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 & 0 \\ 0 & 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 48.9327 \\ 97.8653 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2569 \\ 0.4556 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ทำการหาผลเฉลย ทำให้ได้ว่า $v_1 = 0$, $v_2 = 0.2569$, $v_3 = 0.4556$ และ $v_4 = 1$

และ สำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 1$ ทำการแทนค่าขอบลงในสมการ (3.8) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 & 0 \\ 0 & 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 \\ 0 & 0 & 24.6655 & 73.3737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 48.9327 \\ 97.8653 \\ 65.2436 + \frac{2}{\varepsilon^l} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

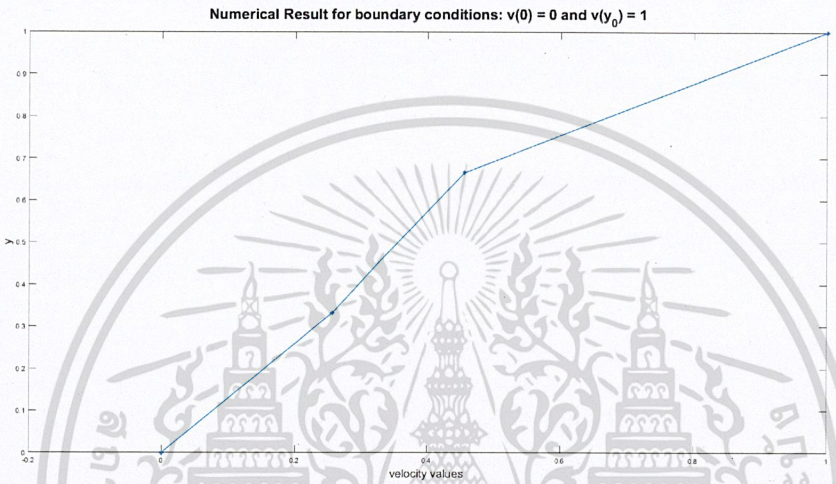
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 & 0 \\ 0 & 24.6655 & 146.7474 & 24.6655 \\ 0 & 0 & 24.6655 & 73.3737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 48.9327 \\ 97.8653 \\ 67.9150 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2498 \\ 0.4974 \\ 0.7584 \end{bmatrix}$$

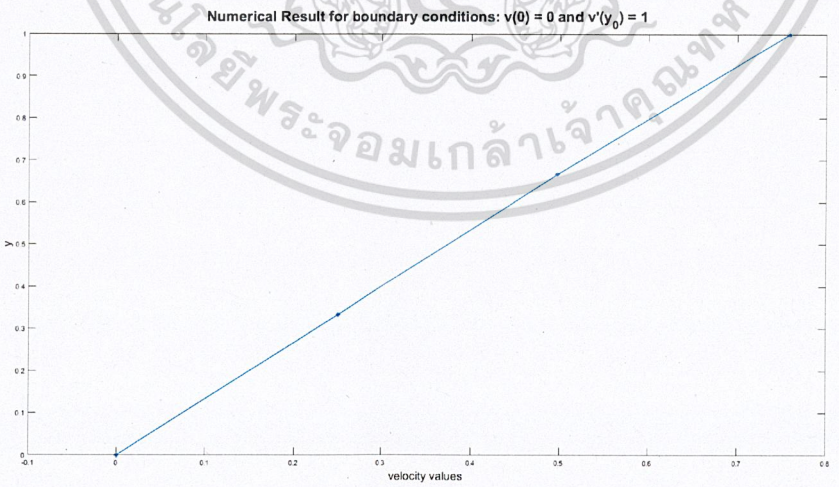
ทำการหาผลเฉลย ทำให้ได้ว่า $v_1 = 0,\ v_2 = 0.2498,\ v_3 = 0.4974$ และ $v_4 = 0.7584$

ผลเฉลยของสมการ (3.9) สามารถแสดงได้ดังรูปภาพที่ 3.2



รูปภาพที่ 3.2 ผลเฉลยของสมการสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$

และผลเฉลยของสมการ (3.10) สามารถแสดงได้ดังรูปภาพที่ 3.3



รูปภาพที่ 3.3 ผลเฉลยของสมการสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่4
ผลเฉลยจริงของสมการสโตกบริงแมน

ในการตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีชิ้นประกอบอันตะในการคำนวณเชิงตัวเลข ในบทนี้ เราจะทำการเขียนสมการสโตกบริงแมนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าผลเฉลยจริง (Exact Solution) และนำผลเฉลยจริงที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีชิ้นประกอบอันตะ

จากสมการสโตกบริงแมน

$$\mu k^{-1}(\varepsilon^l v^l) + P_0 - \frac{2\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2(\varepsilon^l v^l)}{dy^2} = \rho g + \mu k^{-1}\varepsilon^l v^s \qquad (4.1)$$

กำหนดให้ $c_1 = \mu k^{-1}$, $c_2 = P_0$, $c_3 = \frac{-2\mu}{\varepsilon^l}$, $c_4 = \rho g$, $c_5 = \mu k^{-1}\varepsilon^l$ และ $v^s = y$

จากสมการ (4.1) ทำให้ได้ว่า $c_1 v + c_2 + c_3 v'' = c_4 + c_5 y \qquad (4.1.1)$

$$c_1 v + c_3 v'' = c_4 + c_5 y - c_2 \qquad (4.1.2)$$

เราจะใช้วิธีการของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในการหาผลเฉลยของสมการ (4.1.1)

ดังนั้น $v = v_p + v_c$ โดยที่ v_p คือผลเฉลยเฉพาะ และ v_c คือผลเฉลยทั่วไป

ในการหา v_c จากสมการ (4.1.2) ทำให้ได้ว่า $c_3 r^2 + c_1 = 0$

$$r = \pm\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}$$

จะได้ $v_c = d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y}$

ในการหา v_p จากสมการ (4.1.2) ทำให้ได้ว่า $f(x) = c_4 - c_2 + c_5 y$

ในการหา v_p สมมติให้ $v_p = Ay + B \qquad (4.1.3)$

โดยใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

ดังนั้น $\frac{dv_p}{dy} = A \qquad (4.1.4)$

$$\frac{d^2 v_p}{dy^2} = 0 \qquad (4.1.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (4.1.2) $$c_3v'' + c_1v = c_5y + c_4 - c_2$$

จะได้ $$c_3\frac{d^2v_p}{dv_p^2} + c_1v_p = c_5y + c_4 - c_2 \qquad (4.2)$$

แทนค่าสมการ (4.1.3) - (4.1.5) ในสมการ (4.2)

จะได้ว่า $$0 + c_1(Ay + B) = c_5y + c_4 - c_2$$

$$c_1Ay + c_1B = c_5y + c_4 - c_2$$

เทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหา A และ B ได้ดังนี้

$$c_1Ay = c_5y$$

ดังนั้น $$c_1A = c_5$$

ทำให้ได้ว่า $$A = \frac{c_5}{c_1}$$

และ

$$c_1B = c_4 - c_2$$

$$B = \frac{c_4 - c_2}{c_1}$$

ทำให้ได้ว่า $$v_p = \frac{c_5}{c_1}y + \frac{c_4 - c_2}{c_1}$$

จะได้ว่า $$v = d_1e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y} + d_2e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y} + \frac{c_5}{c_1}y + \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right)$$

เนื่องจากในโครงงานพิเศษนี้ เราจะทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับค่าขอบที่แตกต่างกัน 4 แบบ ดังนั้น เราจะทำการหา $\frac{dv}{dy}$ เพื่อใช้ในการคำนวณค่าขอบ

ดังนั้น $$v' = d_1e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}y}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1}$$

ในการคำนวณหาค่าผลเฉลยจริง เราจะแบ่งขอบออกเป็น 4 กรณี ดังนี้ โดยสมมติว่า $y_0 = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขอบเขตที่ 1</u> $v(0)=0,\ v(1)=100$

จาก $v(0)=0$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)} + \frac{c_5}{c_1}(0) + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) = 0$$

$$d_1 + d_2 + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) = 0$$

$$d_1 = -d_2 - \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) \qquad (4.3)$$

จาก $v(0)=100$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)} + \frac{c_5}{c_1}(1) + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) = 100$$

จากสมการ (4.3) แทนค่า d_1 ด้วย $d_1 = -d_2 - \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)$

จะได้ $$\left[-d_2 - \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)\right] e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + \frac{c_5}{c_1} + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) = 100$$

$$-d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + \frac{c_5}{c_1} + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) = 100$$

$$-d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} = 100 + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - \frac{c_5}{c_1} + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)$$

$$d_2\left[e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\right] = 100 + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - \frac{c_5}{c_1} + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)$$

$$d_2 = \frac{100 + \left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right) e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + \left(-\frac{c_5+c_4-c_2}{c_1}\right)}{\left[e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\right]}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขอบเขตที่ 2</u> $v'(0)=0,\ v(1)=1$

จาก $v'(0)=0$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+\frac{c_5}{c_1}=0$$

$$d_1\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+d_2\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+\frac{c_5}{c_1}=0$$

$$d_1=\frac{d_2\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)-\frac{c_5}{c_1}}{\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)}$$

$$d_1=\frac{d_2\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)}-\left(\frac{c_5}{c_1}\right)\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$$

$$d_1=d_2-\frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$$

จาก $v(0)=1$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}+\frac{c_5}{c_1}(1)+\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)=1$$

แทนค่า d_1 ด้วย $d_1=d_2-\frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$

จะได้ $$\left[d_2-\frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)\right]e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}+\frac{c_5}{c_1}+\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)=1$$

$$d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}-\frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}+\frac{c_5}{c_1}+\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)=1$$

$$d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}=1+\frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}-\left(\frac{c_5+c_4-c_2}{c_1}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d_2 = \frac{1 + \frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right) e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + \left(-\frac{c_5 + c_4 - c_2}{c_1}\right)}{\left[e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\right]}$$

<u>ขอบเขตที่ 3</u> $v'(0) = 0,\ v'(1) = 2$

จาก $v'(0) = 0$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 0$$

$$d_1\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 0$$

$$d_1 = \frac{d_2\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) - \frac{c_5}{c_1}}{\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)}$$

$$d_1 = \frac{d_2\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)} - \left(\frac{c_5}{c_1}\right)\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$$

$$d_1 = d_2 - \frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$$

จาก $v'(1) = 2$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 2$$

แทนค่า d_1 ด้วย $d_1 = d_2 - \frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)$

จะได้ $$\left[d_2 - \frac{c_5}{c_1}\left(\sqrt{\frac{-c_3}{c_1}}\right)\right] e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) - \frac{c_5}{c_1}e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 2$$

$$d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) = 2 - \frac{c_5}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}$$

$$d_2\left[e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)\right] = 2 - \frac{c_5}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}$$

$$d_2 = \frac{2 - \frac{c_5}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}}{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\left[e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}} - e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\right]}$$

<u>ขอบเขตที่ 4</u> $v(0) = 0,\ v'(1) = 0$

จาก $v(0) = 0$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(0)} + \frac{c_5}{c_1}(0) + \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right) = 0$$

$$d_1 + d_2 + \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right) = 0$$

$$d_1 = -d_2 - \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right)$$

จาก $v'(1) = 0$ ดังนั้น

$$d_1 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}(1)}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 0$$

แทนค่า d_1 ด้วย $d_1 = -d_2 - \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right)$

จะได้ $$\left[-d_2 - \left(\frac{c_4 - c_2}{c_1}\right)\right] e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right) + \frac{c_5}{c_1} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)-\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+\frac{c_5}{c_1}=0$$

$$-d_2 e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+d_2 e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)=\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}-\frac{c_5}{c_1}$$

$$-d_2\left[-e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)\right]=\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}-\frac{c_5}{c_1}$$

$$d_2=\frac{\left(\frac{c_4-c_2}{c_1}\right)\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}-\frac{c_5}{c_1}}{\left[e^{\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)+e^{-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}}\left(-\sqrt{\frac{-c_1}{c_3}}\right)\right]}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่5
โปรแกรมทางคณิตศาสตร์

ในการหาผลเฉลยในบทที่ 3 สังเกตว่าถ้าเราแบ่งโดเมนออกเป็นชิ้นประกอบจำนวนมาก เช่น 1,000 ชิ้นประกอบ จะค่อนข้างใช้เวลาในการคำนวณด้วยมือ และถ้าจำนวนชิ้นประกอบมีมาก ความถูกต้องของผลเฉลยก็จะยิ่งมากขึ้นด้วย ในบทนี้ เราจะทำการเขียนโปรแกรมเพื่อช่วยในการหาผลเฉลยเมื่อชิ้นประกอบมีเป็นจำนวนมาก

ในบทนี้ เราจะนำเสนอโปรแกรมการคำนวณในบทที่ 3 รวมถึงอธิบายลักษณะการใช้โปรแกรมและการแสดงผลในขั้นตอนต่าง ๆ โปรแกรมหลักที่ใช้ในการคำนวณเป็นดังนี้

```
clc
clear all
format long
%to solve the ordinary differrential equation given as
%au''+bu'+cu = d ,0 < y < y0
%v(0)=0 and v(y0)=1 and v(0)=0 and v'(y0)=1
%-------------------------
% variable decriptions
%-------------------------
% nel = number of elements
% nnel = number of nodes per element
% ndof = number of degree of freedom per nodes
% nnode = total number of nodes in system
% sdof = total system of dofs
% leng = element length
% gcoordinate = cordinate value of domain
% nodes = nodal connectivity for each elements
% bc = case of boundary conditions
% bcdof = global nodes on the Dirichlet boundaries
% bcval = boundary value of each bcdof
% ccdof = global nodes on the natural boundaries
% ccval = boundary value of each ccdof
% u = dynamic viscosity
% g = gravity
% p = density
% kinv = inverse of permeability
% el   = porousity
% P0 = pressure
% index = a vector containing system dofs associated with each element
% k = element matrix
% f = element vector
% kk = system matrix
% ff = system vector
% fsol = numerical result vector
% v = result of exact solution
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%-------------------------------------------------------------------
% input data for control parameters
%-------------------------------------------------------------------
nel = 3;                %number of elements
nnel = 2;               %number of nodes per element
ndof = 1;               %number of degree of freedom per nodes
nnode = nel + 1;        %total number of nodes in system
sdof = nnode*ndof;      %total system of dofs

%-------------------------------------------------------------------
% input data for nodal cordinate value
%-------------------------------------------------------------------
leng = 1/nel;
for i = 1:nnode
    gcoordinate(i) = (i-1)*leng;
end

%-------------------------------------------------------------------
% input data for nodal connectivity for each elements
%-------------------------------------------------------------------
for i = 1:nel
    nodes(i,1)= i;    nodes(i,2)= i+1;
end

%-------------------------------------------------------------------
% input data for boundary conditions
%-------------------------------------------------------------------
% 1: v(0)  and v(y0) , 2: v(0)  and v'(y0) ,
% 3: v'(0) and v(y0) , 4: v'(0) and v'(y0)
bc = 2;
bcdof(1) = ndof;        % v(0)
bcval(1) = 0;
bcdof(2) = nnode;       % v(1)
bcval(2) = 1;
ccdof(1) = ndof;        % v'(0)
ccval(1) = 0;
ccdof(2) = nnode;       % v'(1)
ccval(2) = 1;

%-------------------------------------------
% input data for each variable
%-------------------------------------------
u = 1*(10^6);           % g/micron*s
g = 9.81*(10^6);        % micron/s^2
p = 992.2*(10^-15);     % g/micron^3
kinv = 1/0.0017;        % micron^2
el = 0.74867;
P0 = 1;                 % N/micron^2
s = (2/el);

%-------------------------------------------------------------------
% initialization of matrices and vectors
%-------------------------------------------------------------------
ff = zeros(sdof,1);          %initialization of system force vector
kk = zeros(sdof,sdof);       %initialization of system matrix
index = zeros(nnel*ndof,1);  %initialization of index vector
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
87      %-------------------------------------------------------------------
88      % computation of element matrices and vector and their assemby
89      %-------------------------------------------------------------------
90 -    for iel = 1:nel                                    %loop for the total number of elements
91 -        nl = nodes(iel,1);    nr = nodes(iel,2);     %extract nodes for (iel)-th element
92 -        yl = gcoordinate(nl); yr = gcoordinate(nr); %extract nodal coord values
93 -        eleng = yr-yl;                               %element length
94 -        index = feeldof1(iel,nnel,ndof);             %extract system dofs associated
95 -        k = feode21(yl,yr,kinv,el);                  %compute element matrix
96 -        f = fefll(yl,yr,u,kinv,P0,p,g,el);
97 -        [kk ff] = feasmbl2(kk,ff,k,f,index);         %assemble element
98                                                       %matrices and vectors
99 -    end

100     %-------------------------------------------------------------------
101     % Apply boundary condition
102     %-------------------------------------------------------------------
103 -   [kk,ff] = feaplyc2(kk,ff,bc,bcdof,bcval,ccdof,ccval,s,ndof,nnode);

104     %-------------------------------------------------------------------
105     % solve the matrix equation
106     %-------------------------------------------------------------------
107 -   fsol = kk\ff;
108     %-------------------------------------------------------------------
109     % analytical solution
110     %-------------------------------------------------------------------
111 -   c1 = u*kinv;
112 -   c2 = P0;
113 -   c3 = -2*(u/el);
114 -   c4 = p*g;
115 -   c5 = u*kinv*el;
116 -   sqr = deg2rad(sqrt(c1/c3));

117     %-------------------------------------------------------------
118     % exact solution for v(0)=0 and v(y0)=100 boundary conditions
119     %-------------------------------------------------------------
120 -   b1 = (-(c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3));
121 -   b2 = ((c5+c4-c2)/c1);
122 -   b3 = ((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
123 -   b4 = (((((c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3)))-((c5+c4-c2)/c1))/((-exp(sqrt(-c1/c3)))...
124         +(exp(-sqrt(-c1/c3)))))*((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
125 -   b5 = (((100+((c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3)))-((c5+c4-c2)/c1))/((-exp(sqrt(-c1/c3)))...
126         +(exp(-sqrt(-c1/c3)))))*((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
127 -   b51 = exp(sqrt(-c1/c3));
128 -   b52 = (c4-c2)/c1;
129 -   b6 = -b1;%(b52)*b51;
130 -   b7 = -b2;%(-(c5+c4-c2)/c1);
131 -   b8 = ((100+b6+b7)/b3)*b3+b1+b3;
132 -   for i = 1:nnode
133 -       y = gcoordinate(i);
134 -       d2 = ((100+b6+b7)/b3);
135 -       d1 = -d2-(b52);
136 -       vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
137 -       vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
138 -       v1(i) = vp + vc;
139 -   end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    %-----------------------------------------------------------------
    % exact solution for v'(0)=0 and v(y0)=1 boundary conditions
    %-----------------------------------------------------------------
    a1 = 1-(c5/c1)-((c4-c2)/c1);
    a2 = (c5/c1)*(sqrt(-c3/c1))*exp(sqrt(-c1/c3));
    a3 = exp(sqrt(-c1/c3))+(exp(-sqrt(-c1/c3)));
    for i = 1:nnode
        y = gcoordinate(i);
        d2 = (a1+a2)/a3;
        d1 = d2-(c5/c1)*(sqrt(c3/-c1));
        vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
        vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
        v2(i) = vp + vc;
    end

    %-----------------------------------------------------------------
    % exact solution for v'(0)=0 and v'(y0)=2 boundary conditions
    %-----------------------------------------------------------------
    e1 = 2-(c5/c1);
    e2 = (c5/c1)*(exp(sqrt(-c1/c3)));
    e3 = (exp(sqrt(-c1/c3)))-(exp(-sqrt(-c1/c3)));
    for i = 1:nnode
        y = gcoordinate(i);
        d2 = (e1+e2)/((sqrt(-c1/c3))*e3);
        d1 = d2-(c5/c1)*(sqrt(-c3/c1));
        vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
        vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
        v3(i) = vp + vc;
    end
    %-----------------------------------------------------------------
    % exact solution for v(0)=0 and v'(y0)=0 boundary conditions
    %-----------------------------------------------------------------
    f1 = (c4-c2)/c1;
    f2 = (sqrt(-c1/c3))*(exp(sqrt(-c1/c3))*y);
    f3 = (-exp(sqrt(-c1/c3))*y)*(sqrt(-c1/c3));
    f4 = (exp(-sqrt(-c1/c3)))*(-sqrt(-c1/c3));
    for i = 1:nnode
        y = gcoordinate(i);
        d2 = ((-c5/c1)+(f1*f2))/(f3+f4);
        d1 = -d2-((c4-c2)/c1);
        vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
        vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
        v4(i) = vp + vc;
    end


    %-----------------------------------------------------------
    % plot graph
    %-----------------------------------------------------------
    plot(fsol,0:1/nel:1,'-*b','DisplayName','numerical result');
    hold on;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%-------------------------------------------------------------------
% plot both exact and fem solution
%-------------------------------------------------------------------
plot(v1,gcoordinate,'-r');
plot(v2,gcoordinate,'-k');
plot(v3,gcoordinate,'-g');
plot(v4,gcoordinate,'-y');
legend({'Numerical Result'},'FontSize',16,'Location','northwest')
```

ฟังก์ชันย่อยที่ใช้ในการคำนวณเป็นดังนี้

```
function[kk ff] = feaplyc2(kk,ff,bc,bcdof,bcval,ccdof,ccval,s,ndof,nnode)
%-------------------------------------------------------
% purpose
% Apply constraints to matrix equation[kk]x = ff
%-------------------------------------------------------
if bc == 1          %1: v(0)  and v(y0)
    n = length(bcdof);
    sdof = size(kk);
    for i = 1:n
    c = bcdof(i);
        for j = 1:sdof
        kk(c,j) = 0;
        end
    kk(c,c) = 1;
    ff(c) = bcval(i);
    end
elseif bc == 2      %2: v(0)  and v'(y0)
    sdof = size(kk);
        for j = 1:sdof
        kk(ndof,j) = 0;
        end
    kk(ndof,ndof) = 1;
    ff(ndof) = bcval(i);

    ff(nnode) = ff(nnode) + s*ccval(2);
elseif bc == 3      %3: v'(0) and v(y0)
    ff(ndof) = ff(ndof) - s*ccval(1);

    sdof = size(kk);
        for j = 1:sdof
        kk(nnode,j) = 0;
        end
    kk(nnode,nnode) = 1;
    ff(nnode) = bcval(2);
elseif bc == 4      %4: v'(0) and v'(y0)
    ff(ndof) = ff(ndof) - s*ccval(1);
    ff(nnode) = ff(nnode) + s*ccval(2);
end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
function[kk ff] = feasmbl2(kk,ff,k,f,index)
%purpose
 %Assembly of element matrices into system matrix and
 %Assembly of element vectors into the system vector

 edof = length(index);
     for i = 1:edof
         ii = index(i);
         ff(ii) = ff(ii)+f(i);
         for j = 1:edof
             jj = index(j);
             kk(ii,jj) = kk(ii,jj)+k(i,j);
         end
     end
 end
```

```
function[index] = feeldof1(iel,nnel,ndof)
%purpose
 %compute system dofs associated with each element
 %in one-dimensional problem

 edof = nnel*ndof;
 start = (iel-1)*(nnel-1)*ndof;
     for i=1:edof
         index(i) = start+i;
     end
 end
 %-------------------------------------------------------
```

```
function [f] = fef11(yl,yr,u,kinv,P0,p,g,el);
%purpose
 %element vector for f(x)=1
 %using linear element
 eleng = yr-yl;              %element length
 vsl = yl;
 vsr = yr;
 f = -(-(kinv*el)*[eleng/3 eleng/6 ; eleng/6 eleng/3]*[vsl; vsr]...
     +((P0-(p*g))/u)*[(1/(2*eleng))*(yr-2*yl*yr+yl^2); eleng/2]);
 end
```

```
function[k] = feode21(yl,yr,kinv,el)
%purpose
 %element matrix for au''+bu'+cu
 %using linear element
 eleng = yr-yl;
 k = [(kinv*(eleng/3))+(2)/(eleng*el) ...
     (kinv*(eleng/6))-(2)/(eleng*el);
     (kinv*(eleng/6))-(2)/(eleng*el) ...
     (kinv*(eleng/3))+(2)/(eleng*el)]; ...
 end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เริ่มต้นด้วยการเขียนกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ กับค่าขอบที่ต้องการหาผลเฉลย และกำหนดตัวแปรแต่ละตัว ดังนี้

```
clc
clear all
format long
%to solve the ordinary differrential equation given as
%au''+bu'+cu = d ,0 < y < y0
%v(0)=0 and v(y0)=1 and v(0)=0 and v'(y0)=1
%-------------------------
% variable decriptions
%-------------------------
% nel = number of elements
% nnel = number of nodes per element
% ndof = number of degree of freedom per nodes
% nnode = total number of nodes in system
% sdof = total system of dofs
% leng = element length
% gcoordinate = cordinate value of domain
% nodes = nodal connectivity for each elements
% bc = case of boundary conditions
% bcdof = global nodes on the Dirichlet boundaries
% bcval = boundary value of each bcdof
% ccdof = global nodes on the natural boundaries
% ccval = boundary value of each ccdof
% u = dynamic viscosity
% g = gravity
% p = density
% kinv = inverse of permeability
% el   = porousity
% P0 = pressure
% index = a vector containing system dofs associated with each element
% k = element matrix
% f = element vector
% kk = system matrix
% ff = system vector
% fsol = numerical result vector
% v = result of exact solution
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อธิบายการรับค่าเพื่อคำนวณดังต่อไปนี้

ทำการกำหนดจำนวนชิ้นประกอบ (nel), จำนวนจุดของแต่ละชิ้นประกอบ (nnel), จำนวนอันดับของแต่ละจุด (ndof), จำนวนจุดในระบบ (nnode) และ ผลคูณของจำนวนจุดและจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดในระบบ (sdof)

```
%-------------------------------------------------------------------
% input data for control parameters
%-------------------------------------------------------------------
nel = 3;                %number of elements
nnel = 2;               %number of nodes per element
ndof = 1;               %number of degree of freedom per nodes
nnode = nel + 1;        %total number of nodes in system
sdof = nnode*ndof;      %total system of dofs
```

ป้อนข้อมูลจุดพิกัดสำหรับแต่ละจุดบนโดเมน

```
%-------------------------------------------------------------------
% input data for nodal cordinate value
%-------------------------------------------------------------------
leng = l/nel;
for i = 1:nnode
    gcoordinate(i) = (i-1)*leng;
end
```

ป้อนข้อมูลจุดสำหรับแต่ละชิ้นประกอบ

```
%-------------------------------------------------------------------
% input data for nodal connectivity for each elements
%-------------------------------------------------------------------
for i = 1:nel
    nodes(i,1)= i;    nodes(i,2)= i+1;
end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การกำหนดค่าของเราจะกำหนดค่าขอบที่ต่างกัน 4 แบบ คือ แบบที่ 1 $v(0)$ และ $v(y_0)$ แบบที่ 2 $v'(0)$ และ $v(y_0)$ แบบที่ 3 $v'(0)$ และ $v'(y_0)$ และ แบบที่ 4 $v(0)$ และ $v'(y_0)$

```
%--------------------------------------------------------------------
% input data for boundary conditions
%--------------------------------------------------------------------
% 1: v(0)  and v(y0) , 2: v(0)  and v'(y0) ,
% 3: v'(0) and v(y0) , 4: v'(0) and v'(y0)
bc = 2;
bcdof(1) = ndof;       % v(0)
bcval(1) = 0;
bcdof(2) = nnode;      % v(1)
bcval(2) = 1;
ccdof(1) = ndof;       % v'(0)
ccval(1) = 0;
ccdof(2) = nnode;      % v'(1)
ccval(2) = 1;
```

กำหนดค่าคงที่ต่าง ๆ ในแต่ละตัวแปร

```
%-----------------------------------------
% input data for each variable
%-----------------------------------------
u = 1*(10^6);          % g/micron*s
g = 9.81*(10^6);       % micron/s^2
p = 992.2*(10^-15);    % g/micron^3
kinv = 1/0.0017;       % micron^2
el = 0.74867;
P0 = 1;                % N/micron^2
s = (2/el);
```

กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับเมทริกซ์และเวกเตอร์

```
%--------------------------------------------------------------------
% initialization of matrices and vectors
%--------------------------------------------------------------------
ff = zeros(sdof,1);           %initialization of system force vector
kk = zeros(sdof,sdof);        %initialization of system matrix
index = zeros(nnel*ndof,1);   %initialization of index vector
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการคำนวณเมทริกซ์ชิ้นประกอบ (element matrix) และทำการรวมเมทริกซ์ชิ้นประกอบ โดยเรียกใช้ฟังก์ชัน feasmbl2 เพื่อหาเมทริกซ์รวม (global matrix) ฟังก์ชัน feeldof1 เพื่อคำนวณหา index ฟังก์ชัน feode2l เพื่อคำนวณหาเมทริกซ์ชิ้นประกอบ และฟังก์ชัน fefl1 เพื่อคำนวณหาเวกเตอร์ชิ้นประกอบ

```
87      %-------------------------------------------------------------------
88      % computation of element matrices and vector and their assemby
89      %-------------------------------------------------------------------
90 -    for iel = 1:nel                                    %loop for the total number of elements
91 -        nl = nodes(iel,1);    nr = nodes(iel,2);       %extract nodes for (iel)-th element
92 -        yl = gcoordinate(nl); yr = gcoordinate(nr);    %extract nodal coord values
93 -        eleng = yr-yl;                                 %element length
94 -        index = feeldof1(iel,nnel,ndof);               %extract system dofs associated
95 -        k = feode2l(yl,yr,kinv,el);                    %compute element matrix
96 -        f = fefl1(yl,yr,u,kinv,P0,p,g,el);
97 -        [kk ff] = feasmbl2(kk,ff,k,f,index);           %assemble element
98                                                        %matrices and vectors
99 -    end
```

ทำการเรียกฟังก์ชัน feaplyc2 เพื่อใส่เงื่อนไขค่าขอบ

```
100     %-------------------------------------------------------------------
101     % Apply boundary condition
102     %-------------------------------------------------------------------
103 -   [kk,ff] = feaplyc2(kk,ff,bc,bcdof,bcval,ccdof,ccval,s,ndof,nnode);
```

ทำการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลย $fsol = kk^{-1}ff$

```
104     %-------------------------------------------------------------------
105     % solve the matrix equation
106     %-------------------------------------------------------------------
107 -   fsol = kk\ff;
```

ผลเฉลยจริงของสมการสโตกบริงแมน เริ่มต้นด้วยการกำหนดค่าในตัวแปรต่าง ๆ

```
108     %-------------------------------------------------------------------
109     % analytical solution
110     %-------------------------------------------------------------------
111 -   c1 = u*kinv;
112 -   c2 = P0;
113 -   c3 = -2*(u/el);
114 -   c4 = p*g;
115 -   c5 = u*kinv*el;
116 -   sqr = deg2rad(sqrt(c1/c3));
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยจริงสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$

```
%-------------------------------------------------------------------
% exact solution for v(0)=0 and v(y0)=100 boundary conditions
%-------------------------------------------------------------------
b1 = (-(c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3));
b2 = ((c5+c4-c2)/c1);
b3 = ((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
b4 = (((((c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3)))-((c5+c4-c2)/c1))/((-exp(sqrt(-c1/c3)))...
    +(exp(-sqrt(-c1/c3)))))*((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
b5 = (((100+((c4-c2)/c1)*exp(sqrt(-c1/c3)))-((c5+c4-c2)/c1))/((-exp(sqrt(-c1/c3)))...
    +(exp(-sqrt(-c1/c3)))))*((-exp(sqrt(-c1/c3)))+(exp(-sqrt(-c1/c3))));
b51 = exp(sqrt(-c1/c3));
b52 = (c4-c2)/c1;
b6 = -b1;%(b52)*b51;
b7 = -b2;%(-(c5+c4-c2)/c1);
b8 = ((100+b6+b7)/b3)*b3+b1+b3;
for i = 1:nnode
    y = gcoordinate(i);
    d2 = ((100+b6+b7)/b3);
    d1 = -d2-(b52);
    vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
    vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
    v1(i) = vp + vc;
end
```

ผลเฉลยจริงสำหรับค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$

```
%-------------------------------------------------------------------
% exact solution for v'(0)=0 and v(y0)=1 boundary conditions
%-------------------------------------------------------------------
a1 = 1-(c5/c1)-((c4-c2)/c1);
a2 = (c5/c1)*(sqrt(-c3/c1))*exp(sqrt(-c1/c3));
a3 = exp(sqrt(-c1/c3))+(exp(-sqrt(-c1/c3)));
for i = 1:nnode
    y = gcoordinate(i);
    d2 = (a1+a2)/a3;
    d1 = d2-(c5/c1)*(sqrt(c3/-c1));
    vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
    vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
    v2(i) = vp + vc;
end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยจริงสำหรับค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$

```
154       %-----------------------------------------------------------------
155       % exact solution for v'(0)=0 and v'(y0)=2 boundary conditions
156       %-----------------------------------------------------------------
157 -     e1 = 2-(c5/c1);
158 -     e2 = (c5/c1)*(exp(sqrt(-c1/c3)));
159 -     e3 = (exp(sqrt(-c1/c3)))-(exp(-sqrt(-c1/c3)));
160 -     for i = 1:nnode
161 -         y = gcoordinate(i);
162 -         d2 = (e1+e2)/((sqrt(-c1/c3))*e3);
163 -         d1 = d2-(c5/c1)*(sqrt(-c3/c1));
164 -         vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
165 -         vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
166 -         v3(i) = vp + vc;
167 -     end
```

ผลเฉลยจริงสำหรับค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$

```
168       %-----------------------------------------------------------------
169       % exact solution for v(0)=0 and v'(y0)=0 boundary conditions
170       %-----------------------------------------------------------------
171 -     f1 = (c4-c2)/c1;
172 -     f2 = (sqrt(-c1/c3))*(exp(sqrt(-c1/c3))*y);
173 -     f3 = (-exp(sqrt(-c1/c3))*y)*(sqrt(-c1/c3));
174 -     f4 = (exp(-sqrt(-c1/c3)))*(-sqrt(-c1/c3));
175 -     for i = 1:nnode
176 -         y = gcoordinate(i);
177 -         d2 = ((-c5/c1)+(f1*f2))/(f3+f4);
178 -         d1 = -d2-((c4-c2)/c1);
179 -         vc = (d1*exp(sqrt(-c1/c3)*y))+(d2*(exp(-sqrt(-c1/c3)*y)));
180 -         vp = ((c5/c1)*y)+((c4-c2)/c1);
181 -         v4(i) = vp + vc;
182 -     end
```

วาดกราฟสำหรับ plot fsol

```
183       %-------------------------------------------------------
184       % plot graph
185       %-------------------------------------------------------
186 -     plot(fsol,0:1/nel:1,'-*b','DisplayName','numerical result');
187 -     hold on;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยจริง และผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีชิ้นประกอบอันตะ

```
%-------------------------------------------------------------------
% plot both exact and fem solution
%-------------------------------------------------------------------
plot(v1,gcoordinate,'-r');
plot(v2,gcoordinate,'-k');
plot(v3,gcoordinate,'-g');
plot(v4,gcoordinate,'-y');
legend({'Numerical Result'},'FontSize',16,'Location','northwest')
```

ฟังก์ชันสำหรับกำหนดค่าขอบ

```
function[kk ff] = feaplyc2(kk,ff,bc,bcdof,bcval,ccdof,ccval,s,ndof,nnode)
%-------------------------------------------------------
% purpose
% Apply constraints to matrix equation[kk]x = ff
%-------------------------------------------------------
if bc == 1          %1: v(0)  and v(y0)
    n = length(bcdof);
    sdof = size(kk);
    for i = 1:n
    c = bcdof(i);
        for j = 1:sdof
        kk(c,j) = 0;
        end
    kk(c,c) = 1;
    ff(c) = bcval(i);
    end
elseif bc == 2      %2: v(0)  and v'(y0)
    sdof = size(kk);
        for j = 1:sdof
        kk(ndof,j) = 0;
        end
    kk(ndof,ndof) = 1;
    ff(ndof) = bcval(1);

    ff(nnode) = ff(nnode) + s*ccval(2);
elseif bc == 3      %3: v'(0) and v(y0)
    ff(ndof) = ff(ndof) - s*ccval(1);

    sdof = size(kk);
        for j = 1:sdof
        kk(nnode,j) = 0;
        end
    kk(nnode,nnode) = 1;
    ff(nnode) = bcval(2);
elseif bc == 4      %4: v'(0) and v'(y0)
    ff(ndof) = ff(ndof) - s*ccval(1);
    ff(nnode) = ff(nnode) + s*ccval(2);
end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการรวมเมทริกซ์ชิ้นประกอบเป็นเมทริกซ์รวม และรวมเวกเตอร์ชิ้นประกอบเป็นเวกเตอร์รวม

```
function[kk ff] = feasmbl2(kk,ff,k,f,index)
%purpose
%Assembly of element matrices into system matrix and
%Assembly of element vectors into the system vector

edof = length(index);
    for i = 1:edof
        ii = index(i);
        ff(ii) = ff(ii)+f(i);
        for j = 1:edof
            jj = index(j);
            kk(ii,jj) = kk(ii,jj)+k(i,j);
        end
    end
end
```

คำนวณหา index สำหรับแต่ละชิ้นประกอบ ในการแก้ปัญหา 1 มิติ

```
function[index] = feeldof1(iel,nnel,ndof)
%purpose
%compute system dofs associated with each element
%in one-dimensional problem

edof = nnel*ndof;
start = (iel-1)*(nnel-1)*ndof;
    for i=1:edof
        index(i) = start+i;
    end
end
%-------------------------------------------------------
```

คำนวณหาค่าของเวกเตอร์ทางขวามือของแต่ละชิ้นประกอบ

```
function [f] = fefl1(yl,yr,u,kinv,P0,p,g,el);
%purpose
%element vector for f(x)=1
%using linear element
eleng = yr-yl;              %element length
vsl = yl;
vsr = yr;
f = -(-(kinv*el)*[eleng/3 eleng/6 ; eleng/6 eleng/3]*[vsl; vsr]...
    +((P0-(p*g))/u)*[(1/(2*eleng))*(yr-2*yl*yr+yl^2); eleng/2]);
end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

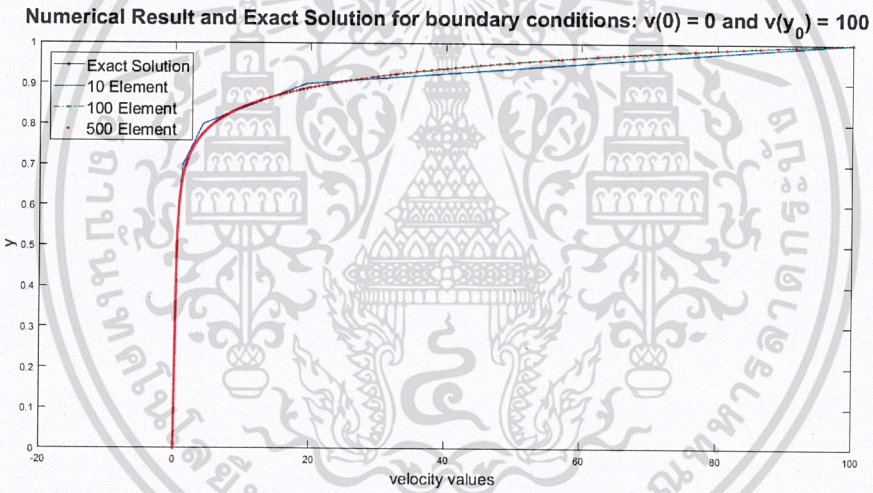
คำนวณหาเมทริกซ์ชิ้นประกอบสำหรับแต่ละชิ้นประกอบ

```
1   function[k] = feode2l(yl,yr,kinv,el)
2   %purpose
3   %element matrix for au''+bu'+cu
4   %using linear element
5   eleng = yr-yl;
6   k = [(kinv*(eleng/3))+(2)/(eleng*el) ...
7        (kinv*(eleng/6))-(2)/(eleng*el);
8        (kinv*(eleng/6))-(2)/(eleng*el) ...
9        (kinv*(eleng/3))+(2)/(eleng*el)]; ...
10  end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่6
ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในบทนี้ เราจะนำเสนอกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้สำหรับค่าขอบทั้ง 4 กรณี เทียบกับผลเฉลยจริง โดยทำจำนวนชิ้นประกอบตั้งแต่ 10, 100, 500 และผลเฉลยจริง ให้เห็นการลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง และใช้วิธี l2-norm ในโปรแกรมแมทแลบ (Matlab) เพื่อหาค่าความผิดพลาดของทั้ง 4 กรณี ดังนี้ ค่าความผิดพลาด คือ $\sqrt{(fsol_1 - exact_1)^2 + ... + (fsol_i - exact_i)^2 + ... + (fsol_n - exact_n)^2}$ เมื่อ n คือ จำนวนชิ้นประกอบ ผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$ ได้แสดงในรูปภาพที่ 6.1 โดยแบ่งออกเป็น 10, 100, 500 ชิ้นประกอบ เทียบกับผลเฉลยจริง จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขลู่เข้าหาผลเฉลยจริง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 6.1



รูปภาพที่ 6.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$

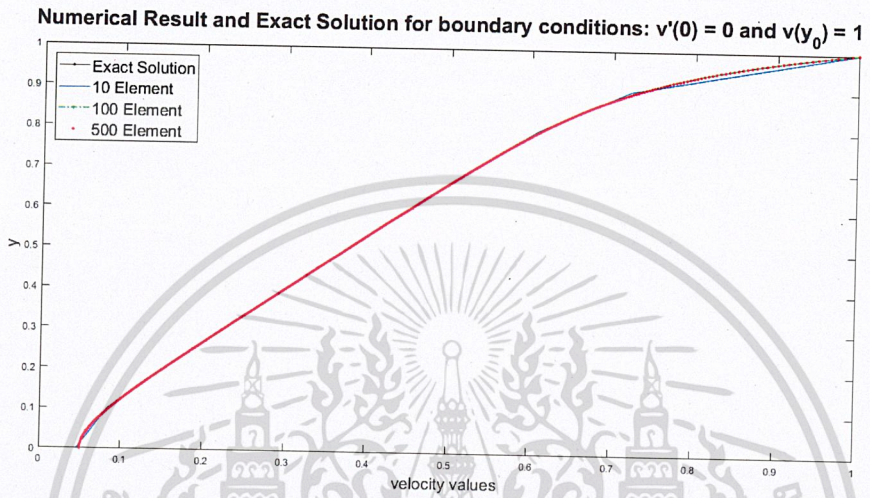
โดยมีค่าความผิดพลาด (error) ตามตารางดังนี้

จำนวนชิ้นประกอบ	ค่าความผิดพลาด
10	4.0837
100	1.1841×10^{-1}
500	1.0848×10^{-2}

ตารางที่ 6.1 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v(y_0) = 100$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$ ได้แสดงในรูปภาพที่ 6.2 โดยแบ่งออกเป็น 10, 100, 500 ชิ้นประกอบ เทียบกับผลเฉลยจริง จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขลู่เข้าหาผลเฉลยจริง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 6.2



รูปภาพที่ 6.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$

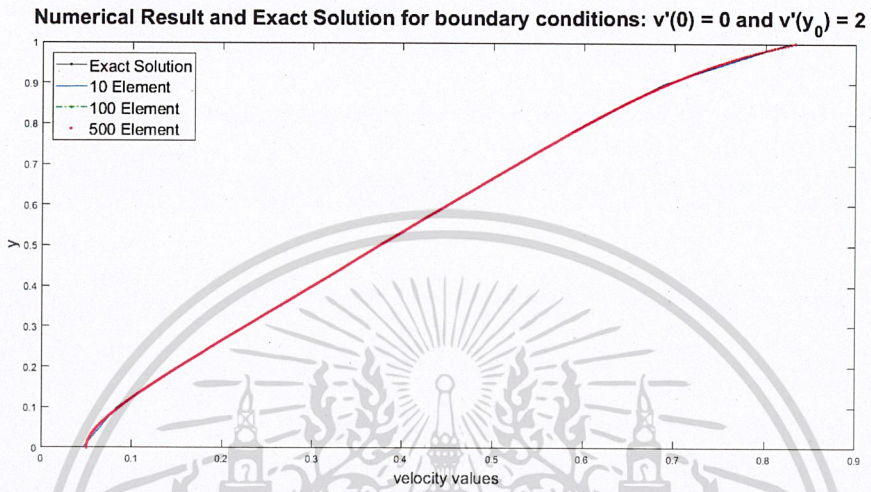
โดยมีค่าความผิดพลาด (error) ตามตารางดังนี้

จำนวนชิ้นประกอบ	ค่าความผิดพลาด
10	1.1475×10^{-2}
100	3.3609×10^{-4}
500	8.4919×10^{-4}

ตารางที่ 6.2 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v(y_0) = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$ ได้แสดงในรูปภาพที่ 6.3 โดยแบ่งออกเป็น 10, 100, 500 ชิ้นประกอบ เทียบกับผลเฉลยจริง จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขลู่เข้าหาผลเฉลยจริง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 6.3



รูปภาพที่ 6.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$

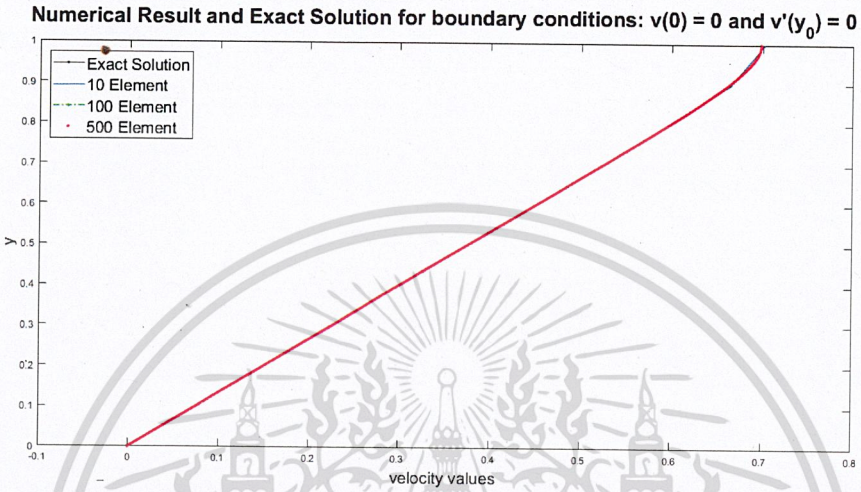
โดยมีค่าความผิดพลาด (error) ตามตารางดังนี้

จำนวนชิ้นประกอบ	ค่าความผิดพลาด
10	9.6832×10^{-3}
100	2.7482×10^{-4}
500	8.5321×10^{-4}

ตารางที่ 6.3 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v'(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$ ได้แสดงในรูปภาพที่ 6.4 โดยแบ่งออกเป็น 10, 100, 500 ชิ้นประกอบ เทียบกับผลเฉลยจริง จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขลู่เข้าหาผลเฉลยจริง เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 6.4



รูปภาพที่ 6.4 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$

โดยมีค่าความผิดพลาด (error) ตามตารางดังนี้

จำนวนชิ้นประกอบ	ค่าความผิดพลาด
10	4.9713×10^{-3}
100	1.3540×10^{-4}
500	8.3398×10^{-4}

ตารางที่ 6.4 ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าขอบ $v(0) = 0$ และ $v'(y_0) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่7
สรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 สรุปผล

เราพิจารณาปัญหาการไหลของของไหลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนที่อยู่ตามระบบทางเดินหายใจ โดยเส้นขนจะอยู่ในชั้นที่เรียกว่า พีซีแอล (PCL) และของไหลในชั้นพีซีแอลเรียกว่าของไหลพีซีแอล เราหาความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการสโตกบริงแมนใน 1 มิติ และ ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะ ในการหาความเร็วของของเหลวพีซีแอลที่อยู่ในโดเมนที่มีรูพรุน ซึ่งเราจะแบ่งออกเป็น 4 กรณี และทำการหาผลเฉลยจริงของสมการสโตกบริงแมนโดยใช้วิธีการหาผลเฉลยแบบเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อทำการเปรียบเทียบและตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ กับผลเฉลยจริงที่คำนวณได้จากสมการสโตกบริงแมน จากการคำนวณทั้ง 4 กรณี พบว่า จากตารางค่าความผิดพลาดในบทที่ 6 เมื่อเราเพิ่มจำนวนชิ้นประกอบมากขึ้น ค่าความผิดพลาดจะมีค่าน้อยลง

7.2 ปัญหาและอุปสรรค

1. ใช้เวลาในการเรียนรู้และทำความเข้าใจกับวิธีการชิ้นประกอบอันตะนาน
2. ใช้เวลาในการทำโปรแกรมค่อนข้างนาน

7.3 ข้อเสนอแนะ

1. ใช้วิธีการชิ้นประกอบอันตะในการแก้ปัญหาสมการอื่น ๆ
2. ศึกษาวิธีการสโตกบริงแมนอย่างลึกซึ้งเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาจริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] K. Chamsri, Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman Problem with a Permeability Tensor, International Scientific Journal Journal of Mathematics VOL. 1 Issue 1, 2015, CreateSpace Independent Publishing Platform.

[2] Y. W. Kwon, H. Bang, The Finite Element Method using MATLAB, 1997, CRC press.

[3] J.N.Reddy, D.K.Gartling, The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, 1994, CRC Press.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้