การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยวิธียิงเป้า

A Numerical Computation to a Water-Quality Measurement in a Stream Shooting Method

ประภัสสร รอดรัตน์
พรนภา แสงศรี
รัชรวี ลิ่มเจริญ

โครงงานปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A NUMERICAL COMPUTATION TO A WATER-QUALITY MEASUREMENT IN A STREAM SHOOTING METHOD

PRAPHATSORN RODRAT
POHNNAPA SANGSRI
RACHARAWEE LIMCHAROEN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREEOF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ	การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยวิธียิงเป้า A Numerical Computation to a Water-Quality Measurement in a Uniform Flow Steam Shooting Method
ชื่อนักศึกษา	นางสาวประภัสสร รอดรัตน์ 57050092 นางสาวพรนภา แสงศรี 57050100 นางสาวรัชรวี ลิ่มเจริญ 57050117
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	ภาควิชาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.จินดา ไชยช่วย

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	**ลายมือชื่อ**
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ	การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยวิธียิงเป้า
ชื่อนักศึกษา	นางสาวประภัสสร รอดรัตน์ 57050092
	นางสาวพรนภา แสงศรี 57050100
	นางสาวรัชรวี ลิ่มเจริญ 57050117
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	อ.จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

การปนเปื้อนของแอมโมเนียในลำน้ำ ที่มักถูกปล่อยจากเขตปศุสัตว์และอุตสาหกรรมบางประเภท เมื่อแอมโมเนียไหลลงสู่แม่น้ำลำคลองจะเกิดปัญหามลพิษทางน้ำ การประเมินคุณภาพน้ำในลำน้ำขนาดเล็ก เช่น ลำธาร ลำคลอง ที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอในสภาวะคงตัวสามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำมาประเมินค่าผลเฉลย และโดยวิธียิงเป้า (Shooting Method) ซึ่งเป็นวิธีกระทำซ้ำโดยขั้นตอนการคำนวณจะต้องกระทำซ้ำจนกว่าค่าประมาณเข้าสู่ค่าที่กำหนดไว้ที่เงื่อนไขขอบใกล้เคียงระดับที่ยอมรับได้ ค่าประมาณที่เงื่อนไขขอบจะให้ผลการคำนวณมีความแม่นยำตามที่ต้องการ ซึ่งจะทำให้ประมาณค่าดัชนีวัดคุณภาพน้ำที่สนใจ คือ ระดับความเข้มข้นของแอมโมเนีย สามารถใช้ทำนายแนวโน้มการเกิดปัญหามลพิษที่มีสารแอมโมเนียเป็นสาเหตุในลำน้ำที่พบปัญหามลพิษเกินค่ามาตรฐานได้

คำสำคัญ : ความเข้มข้นของแอมโมเนีย, วิธียิงเป้า, วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	A Numerical Computation to a Water-Quality Measurement in a Uniform Flow Stream Shooting Method
Students	Miss Praphatsorn Rodrat 57050092
	Miss Pohnnapa Sangsri 57050100
	Miss Racharawee Limcharoen 57050117
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
Academic Year	2017
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Advisor	Asst.Prof.Dr.Nopparat Pochai
Co-advisor	Mr.Chinda Chaichauy

Abstract

The contamination of Ammonium solution dissolves in water, which released from domestic animals farms and industries of sort. When Ammonia dissolves in water, it' ll inflict the pollution within water. For lesser source of water such as, pounds, rivers which flow gradually in potential state can be evaluate by using the mathematics algorithm. This thesis represents the precise calculation method by estimating the average mean and shooting method which replicates the numbers until the estimated value reaches the acceptable state. The estimated value which conditions effected the precision of calculation that indicates the desired quality of water is the concentration of Ammonia can be used to predict the pollution within water which possess the toxicity level higher than the standard value.

Keywords : Concentration of Ammonium, Forth Order Runge Kutta Method, Shooting Method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

การทำปัญหาพิเศษเรื่อง การคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยวิธียิงเป้า สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และ อาจารย์จินดา ไชยช่วย อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆรวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนมอบกำลังใจและทุนทรัพย์ในการจัดทำ จนการทำปัญหาพิเศษนั้นสำเร็จด้วยดี ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ รวมทั้งเพื่อนๆทุกคนที่มีส่วนช่วยในด้านต่างๆ เกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

ประภัสสร รอดรัตน์
พรนภา แสงศรี
รัชรวี ลิ่มเจริญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ.ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญตาราง ..... ฉ
สารบัญกราฟ ..... ซ
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ที่มาและความสำคัญ 1
1.2 วัตถุประสงค์ 4
1.3 ขอบเขตของการวิจัย 4
1.4 ขั้นตอนของการวิจัยและวิธีการดำเนินงาน 4
1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ 5
บทที่ 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หนึ่งมิติเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำ 6
2.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หนึ่งมิติเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำ 6
2.2 ดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่อธิบายโดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ 6
บทที่ 3 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 12
3.1 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น 12
3.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 12
3.3 วิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 14
3.4 วิธียิงเป้า 15
บทที่ 4 วิเคราะห์ผลการดำเนินงาน 18
4.1 การจำลองแบบเพื่อประมาณค่าในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ 18
4.1.1 แบบจำลอง 1 18
4.1.2 แบบจำลอง 2 81

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

4.1.3 แบบจำลอง 3 132
4.1.4 แบบจำลอง 4 137
4.1.5 แบบจำลอง 5 142
บทที่ 5 สรุปผลและอภิปรายผลการดำเนินงาน 148
5.1 สรุปผลการดำเนินงาน 148
5.1.1 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 1 148
5.1.2 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 2 149
5.1.3 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 3 150
5.1.4 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 4 151
5.1.5 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 5 152
5.2 อภิปรายผลการดำเนินงาน 153
5.3 ข้อเสนอแนะ 153
เอกสารอ้างอิง 154
ภาคผนวก 155

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

4-1 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 1 18
4-2 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 1 39
4-3 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 1 59
4-4 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 1 79
4-5 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 2 81
4-6 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลองที่ 2 98
4-7 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลองที่ 2 114
4-8 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลองที่ 2 130
4-9 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 3 132
4-10 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 3 134
4-11 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 3 135
4-12 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 3 136
4-13 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 4 137
4-14 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 4 139
4-15 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 4 140
4-16 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 4 141
4-17 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 5 142
4-18 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 5 144
4-19 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 5 145
4-20 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 5 146
4-21 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_3$ ของแบบจำลอง 5 147
5-1 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 1 148
5-2 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 2 149
5-3 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 3 150

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

5-4 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 4 151
5-5 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 5 152
5-6 สรุปค่าความเข้มข้นของแอมโมเนีย.....153

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญกราฟ

กราฟที่ หน้า

5-1 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำ(แบบจำลอง 1)..... 148
5-2 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำ(แบบจำลอง 2)..... 149
5-3 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำ(แบบจำลอง 3)..... 150
5-4 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำ(แบบจำลอง 4)..... 151
5-5 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำ(แบบจำลอง 5)..... 152

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

มลพิษทางน้ำ (Water pollution) เป็นปัญหาสิ่งแวดล้อมที่สำคัญที่สุดปัญหาหนึ่งของประเทศเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหามลพิษอื่นๆปัญหามลพิษทางน้ำมักเกิดกับเมืองใหญ่ๆแหล่งน้ำที่สำคัญของประเทศถูกปนเปื้อนด้วยสิ่งสกปรกและสารมลพิษต่างๆทำให้ไม่สามารถใช้ประโยชน์จากแหล่งน้ำได้เต็มที่ ซึ่งส่งผลกระทบต่อคุณภาพชีวิต และการพัฒนาทางเศรษฐกิจและสังคม สาเหตุของการเกิดมลพิษทางน้ำ ส่วนใหญ่เกิดจากน้ำทิ้งจากที่อยู่อาศัย ซึ่งมักจะมีสารอินทรีย์ปนเปื้อนมาด้วย น้ำทิ้งดังกล่าวมักเป็นสาเหตุของการที่น้ำมีสีดำ และมีกลิ่นเน่าเหม็น น้ำที่มีสารพิษตกค้างอยู่ เช่น น้ำจากแหล่งเกษตรกรรมที่มีปุ๋ยและยากำจัดศัตรูพืช น้ำทิ้งที่มีโลหะหนักปนเปื้อนจากโรงงานอุตสาหกรรม เป็นต้น สารเหล่านี้จะถูกสะสมในวงโคจรโซ่อาหารของสัตว์น้ำ และมีผลต่อมนุษย์ภายหลัง ผลกระทบจากมลพิษทางน้ำอยู่ในระดับรุนแรง ซึ่งประชาชนทั่วไป เรียกว่าน้ำเสียมีลักษณะที่เห็นได้ชัดเจน คือตะกอนขุ่นข้น สีดำคล้ำ ส่งกลิ่นเน่าเหม็น ก่อให้เกิดความรำคาญต่อชุมชน และอาจมีฟองลอยอยู่เหนือน้ำเป็นจำนวนมาก ซึ่งลักษณะของน้ำเสียบางครั้งเราอาจมองไม่เห็นก็ได้ ถ้าน้ำนั้นปนเปื้อนด้วยสารพิษ เช่น ยาปราบศัตรู หรือยาฆ่าแมลง แร่ธาตุ เป็นต้น

จากการศึกษาสาเหตุของมลพิษทางน้ำ เกิดจากหลายสาเหตุ เช่น ที่อยู่อาศัย แหล่งเกษตรกรรม และอีกมากมาย แต่มีสาเหตุหนึ่งที่น่าสนใจเป็นอย่างมากคือน้ำเสียจากโรงงานอุตสาหกรรม จึงทำให้เกิดการศึกษาเพิ่มเติม ว่าน้ำเสียจากโรงงานอุตสาหกรรมคือ น้ำทิ้ง ซึ่งหมายความว่าน้ำเสียที่เกิดจากการประกอบกิจการโรงงานอุตสาหกรรมหรือนิคมอุตสาหกรรมที่ จะระบายลงสู่แหล่งน้ำสาธารณะหรือออกสู่สิ่งแวดล้อม และให้ความหมายที่รวมถึงน้ำเสีย จากการใช้น้ำของคนงาน รวมทั้งจากกิจกรรมอื่นในโรงงานอุตสาหกรรมหรือในนิคมอุตสาหกรรมด้วย โดยน้ำทิ้งต้องเป็นไปตามมาตรฐาน ควบคุมการระบายน้ำทิ้งที่กำหนดไว้ตามประกาศกระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และสิ่งแวดล้อม ฉบับที่ 3 (พ.ศ. 2539) เรื่อง กำหนดมาตรฐานควบคุมการระบายน้ำทิ้งจากแหล่งกำเนิดประเภทโรงงานอุตสาหกรรมและนิคมอุตสาหกรรม กระทรวงอุตสาหกรรม ปรับปรุงการกำหนดมาตรฐานควบคุมการระบายน้ำทิ้งจากการประกอบกิจการโรงงาน เพื่อให้มีค่ามาตรฐานและวิธีการตรวจสอบน้ำทิ้งจากโรงงานให้เหมาะสมและเป็นไปตามมาตรฐานสากล รวมถึงเป็นการควบคุมการระบายน้ำทิ้งจากโรงงาน ประกาศนี้เรียกว่า “ประกาศกระทรวงอุตสาหกรรม เรื่อง กำหนดมาตรฐานควบคุม การระบายน้ำทิ้งจากโรงงาน พ.ศ. 2560”

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ได้รับอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การตรวจสอบค่ามาตรฐานน้ำทิ้งจากโรงงาน ให้ใช้วิธีดังต่อไปนี้

ลำดับ	สารที่ทำการตรวจสอบ	วิธีการตรวจสอบ
1.	ความเป็นกรดและด่าง (pH)	ใช้เครื่องวัดความเป็นกรดและด่างของน้ำ (pH Meter) ที่มีความละเอียดไม่ต่ำกว่า 0.1 หน่วย
2.	อุณหภูมิ	ให้ใช้เครื่องวัดอุณหภูมิวัดขณะทำการเก็บตัวอย่าง
3.	สี	ใช้วิธีเอดีเอ็มไอ (ADMI Method)
4.	ของแข็งละลายน้ำทั้งหมด	ใช้วิธีระเหยตัวอย่างที่กรองผ่านกระดาษกรองใยแก้ว (Glass Fiber Filter Disk) และอบแห้งที่อุณหภูมิ 180 องศาเซลเซียส เป็นเวลาอย่างน้อย 1 ชั่วโมง
5.	ของแข็งแขวนลอยทั้งหมด	ใช้วิธีกรองผ่านกระดาษกรองใยแก้ว(Glass Fiber Filter) และอบแห้งที่อุณหภูมิ 103 - 105 องศาเซลเซียส เป็นเวลาอย่างน้อย 1 ชั่วโมง
6.	บีโอดี	ใช้วิธีบ่มตัวอย่างที่อุณหภูมิ 20 องศาเซลเซียส เป็นเวลา 5 วัน ติดต่อกัน และหาค่าออกซิเจนละลายด้วยวิธีเอไซด์โมดิฟิเคชั่น (Azide Modification) หรือวิธีเมมเบรนอิเลคโทรด (Membrane Electrode)
7.	ซีโอดี	ให้ใช้วิธีย่อยสลายโดยใช้โพแทสเซียมไดโครเมต (Potassium Dichromate)
8.	ซัลไฟด์	ใช้วิธีไอโอโดเมตริก (Iodometric Method) หรือวิธีเมทิลีนบลู (Methylene Blue Method)
9.	ไซยาไนด์	ใช้การกลั่น (Distillation) และตรวจวัดด้วยวิธีเทียบสี (Colorimetric Method) หรือวิธี Flow Injection Analysis
10.	น้ำมันและไขมัน	ใช้วิธีสกัดด้วยเทคนิค Liquid – Liquid Extraction หรือ Soxhlet Extraction ด้วยตัวทำละลายแล้วแยกหาน้ำหนักของน้ำมันและไขมัน
11.	ฟอร์มาลดีไฮด์	ใช้วิธีเทียบสี (Colorimetric Method)
12.	สารประกอบฟีนอล	ใช้การกลั่น (Distillation) และตรวจวัดด้วยวิธีเทียบสี (Colorimetric Method)
13.	คลอรีนอิสระ	วิธีไตเตรท (Titrimetric Method) หรือวิธีเทียบสี (Colorimetric Method)
14.	สารฆ่าศัตรูพืชและสัตว์	วิธีก๊าซโครมาโตกราฟิค (Gas-Chromatographic

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Method) หรือวิธีไฮเพอร์ฟอร์แมนซ ลิควิด โครมาโตกราฟิค (High-Performance Liquid Chromatographic Method)
15.	ทีเคเอ็น	ใช้วิธีเจลดาห์ล (Kjeldahl)
16.	โลหะหนัก	
16.1	16.1 สังกะสี,ทองแดง, แคดเมียม,แบเรียม,ตะกั่ว นิกเกิลและแมงกานีส	ใช้วิธีย่อยสลายตัวอย่างด้วยกรด (Acid digestion) และวัดหาปริมาณโลหะด้วยวิธีอะตอมมิคแอบซอฟชั่น สเปคโตรเมตตรี (Atomic Absorption Spectrometry : AAS) หรือวิธีอินดักทีฟลีคัพเพิลพลาสม่า (Inductively Coupled Plasma)
	16.2 โครเมียม	โครเมียมทั้งหมด ให้ใช้วิธีย่อยสลายตัวอย่างด้วยกรด (Acid digestion) และวัดหาปริมาณโลหะด้วยวิธีอะตอมมิคแอบซอฟชั่นสเปคโตรเมตตรี (Atomic Absorption Spectrometry : AAS) หรือวิธีอินดักทีฟลีคัพเพิลพลาสม่า (Inductively Coupled Plasma) โครเมียมเฮกซะวาเลนท์ ให้ใช้วิธีเทียบสี (Colorimetric Method) หรือวิธีสกัดและตรวจวัดด้วยวิธีอะตอมมิคแอบซอฟชั่นสเปคโตรเมตตรี (Atomic Absorption Spectrometry : AAS) หรือวิธีสกัดและตรวจวัดด้วยวิธีอินดักทีฟลีคัพเพิลพลาสม่า (Inductively Coupled Plasma) โครเมียมไตรวาเลนท์ ให้ใช้วิธีคำนวณจากค่าส่วนต่างของโครเมียม ทั้งหมดกับโครเมียมเฮกซะวาเลนท์
	16.3 สารหนูและซีลีเนียม	ใช้วิธีอะตอมมิคแอบซอฟชั่นสเปคโตร์โฟโตเมตตรี(Atomic Absorption Spectrophotometry) ชนิดไฮไดรด์เจนเนอเรชั่น (Hydride Generation) หรือวิธีอินดักทีฟลีคัพเพิลพลาสม่า (Inductively Coupled Plasma)
	16.4 ปรอท	ใช้วิธีโคลด์เวเปอร์อะตอมมิคแอบซอฟชั่นสเปคโตรเมตตรี (Cold Vapor Atomic Absorption Spectrometry) หรือวิธีโคลด์เวเปอร์อะตอมมิคฟลูออเรสเซนซ์สเปคโตรเมตตรี (Cold Vapor Atomic Fluorescence Spectrometry) หรือวิธีอินดักทีฟลีคัพเพิลพลาสม่า(Inductively Coupled Plasma)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาการประเมินคุณภาพน้ำ ในทางน้ำขนาดเล็ก เช่น ลำธาร ลำคลอง ในสภาวะคงตัว (steady state) โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

2. นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำ เช่น วิธียิงเป้า (Shooting method) ในการพิจารณาปัญหาค่าขอบ หาผลเฉลยและตรวจสอบเงื่อนไขขอบที่เคยละไว้ว่ากระทำซ้ำ (Iteration) จนผลเฉลยเข้าเงื่อนไขดังกล่าว

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. ในปัญหาพิเศษผู้วิจัยต้องการที่จะศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อการประเมินคุณภาพน้ำในทางน้ำขนาดเล็ก เช่น ลำธาร ลำคลอง

2. ลำน้ำต้องมีกระแสน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ

3. ต้องการทราบระยะทางของบริเวณลำคลองที่จะศึกษา

4. ค่าจำเพาะของสารพิษที่ต้องการตรวจวัด ณ จุดปล่อย

5. ต้องระบุชนิดของดัชนีคุณภาพน้ำ ณ จุดปล่อยมลพิษ

6. ต้องทราบข้อมูลความเร็วเฉลี่ยของกระแสน้ำ

7. ต้องทราบถึงสัมประสิทธิ์การแพร่ของสารพิษที่ถูกปล่อย

8. ต้องทราบถึงอัตราสลาย (Decaying rate) ของสารมลพิษนั้น เมื่อถูกปล่อยสู่ลำคลอง

9. ใช้วิธียิงเป้า (Shooting method) เพื่อประมาณค่าผลเฉลยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นปัญหาค่าขอบ แล้วประมาณค่าผลเฉลยที่เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น แล้วตรวจสอบเงื่อนไขขอบขวาให้มีความแม่นยำตามความต้องการ

1.4 ขั้นตอนของการวิจัยและวิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการประเมินคุณภาพน้ำเพื่อกำหนดพารามิเตอร์ที่จำเป็นและเงื่อนไขขอบโดยเฉพาะแอมโมเนียไนโตรเจน ที่เป็นปัญหามลพิษทางน้ำอันเนื่องมาจากการปล่อยน้ำเสียจากการทำปศุสัตว์

2. ใช้วิธียิงเป้าและวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อพิจารณาปัญหาค่าขอบ ประมาณค่าผลเฉลย และตรวจสอบเงื่อนไขขอบขวา

3. ทดลองการคำนวณกับสมการก่อกำเนิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. นำขั้นตอนการคำนวณมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยคำนวณให้มีความแม่นยำและลดเวลาการคำนวณลง

5. นำเสนอผลการคำนวณภายหลังประเมินผล (Post processing) ในรูปแบบตารางและกราฟเปรียบเทียบ

6. ทดลองเชิงตัวเลข (Numerical experiment) เพื่อจำลองสถานการณ์ที่จะเกิดขึ้นภายใต้สภาวะที่แตกต่างกัน

7. ตรวจสอบและปรับปรุงวิธีการคำนวณ

8. สรุปผลการจำลองแบบที่ได้นำเสนอไป

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. เพื่อการจำลองแบบการตรวจวัดมลพิษในน้ำ จากดัชนีวัดคุณภาพน้ำ ของความเข้มข้นของแอมโมเนีย – ไนโตรเจน

2. เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาและปรับปรุงขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาการจำลองแบบมลพิษทางน้ำ

3. สามารถใช้ทำนายแนวโน้มที่จะเกิดปัญหามลพิษทางน้ำในลำคลองที่มีการปล่อยน้ำเสียจากชุมชนหรือพื้นที่ทางการเกษตรได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หนึ่งมิติเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำ

2.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หนึ่งมิติเพื่อการประเมินคุณภาพน้ำ

ระดับความเข้มข้นของมลพิษในแหล่งน้ำ สามารถอธิบายได้โดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หนึ่งมิติที่เป็นสมการการแพร่ การพา ปฏิกิริยา ดังนี้

ปัญหาค่าขอบ $u(x)\frac{dc}{dx} = D(x)\frac{d^2c}{dx^2} - R(x)c + Q(x)$ เมื่อ $x \in [a,b]$

เงื่อนไขขอบ $c = c_0$ ที่ $x = a$

เมื่อ $\frac{dc}{dx} = t_0$ ที่ $x = b$

$x \in [a,b]$ เมื่อ a,b เป็นพิกัดตำแหน่งจุดปล่อยและตำแหน่งท้ายลำน้ำ

$c(x)$ คือ ความเข้มข้นของมลพิษ ตำแหน่ง x (kg/L)

$u(x)$ คือ กระแสความเร็วในทิศทางของตำแหน่ง x (m/s)

$D(x)$ คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่ (m^2/s)

$R(x)$ คือ อัตราการสลายตัวของสาร (s^{-1})

$Q(x)$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราความเข้มข้น (kg/m^3s)

2.2 ดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่อธิบายโดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

แอมโมเนีย (Ammonia : NH_3) เป็นสารเคมีพื้นฐานที่มีประโยชน์อย่างมากทั้งต่อภาคเกษตรกรรมและภาคอุตสาหกรรม ด้วยเหตุนี้เองจึงมีการใช้แอมโมเนียกันอย่างแพร่หลาย แต่ในขณะเดียวกันแอมโมเนียก็อาจก่อให้เกิดความเสียหายต่อชีวิต ทรัพย์สิน และสิ่งแวดล้อมได้ ถ้าผู้ใช้ขาด ความระมัดระวังและอาจเกิดอุบัติเหตุในการจัดเก็บ การใช้งาน และการขนส่ง

คุณสมบัติทางเคมีและกายภาพ

แอมโมเนียเป็นก๊าซที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติและเป็นส่วนหนึ่งของวัฏจักรไนโตรเจน (nitrogen cycle) ที่ อุณหภูมิและความดันปกติ แอมโมเนียจะมีสถานะเป็นก๊าซ มีกลิ่นฉุนรุนแรงซึ่งทำให้เกิดการระคายเคืองได้ แต่ถ้าอยู่ภายใต้ความดันและอุณหภูมิเย็น จะมีสถานะเป็นของเหลว แอมโมเนียมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 17.03 มีความถ่วงจำเพาะที่อุณหภูมิ 25 องศาเซลเซียส เท่ากับ 0.7 จุดเดือด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

-33.4 องศาเซลเซียส มีความดันไอ 6,460 มิลลิเมตรปรอทที่อุณหภูมิ 20 องศาเซลเซียส ก๊าซแอมโมเนียสามารถละลายน้ำได้ดี มีจุดติดไฟที่อุณหภูมิ 648.89 องศาเซลเซียส

แอมโมเนียจะเสถียรที่อุณหภูมิปกติ แต่จะสลายตัวให้ไนโตรเจนและไฮโดรเจนที่อุณหภูมิสูง ความดันบรรยากาศปกติ การสลายตัวเริ่มต้นที่อุณหภูมิ 450-500 องศาเซลเซียส การสลายาตัวของแอมโมเนียเป็นแหล่งที่ให้ไนโตรเจนและไฮโดรเจนบริสุทธ์

ประโยชน์ของแอมโมเนีย แอมโมเนียเป็นสารเคมีที่มีประโยชน์อย่างมากทั้งภาคเกษตรกรรมและภาคอุตสาหกรรม

ภาคเกษตรกรรม แอมโมเนียส่วนใหญ่ประมาณ 85 % ถูกนำไปใช้ในการผลิตปุ๋ย โดยเฉพาะใช้ผลิตปุ๋ยแอมโมเนียมไนเตรต (ammonium nitrate) และปุ๋ยยูเรีย (urea)

ภาคอุตสาหกรรม

1. ใช้เป็นสารทำความเย็นที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมห้องเย็น โรงงานทำน้ำแข็ง และห้องแช่แข็ง
2. แอมโมเนียทำปฏิกิริยากับ cyclohexanone ได้สารคาโปรแลกตัม (caprolactam) ซึ่งเป็นวัตถุดิบในการทำเส้นใยไนลอน (nylon)
3. ใช้แอมโมเนียเป็นสารตั้งต้นในอุตสาหกรรมการผลิตกรดไนตริก (Nitric acid)
4. ใช้ในอุตสาหกรรมชุบแข็งและเคลือบผิวโลหะ โดยการทำให้แอมโมเนียแตกตัวที่อุณหภูมิประมาณ 400-500 องศาเซลเซียส เพื่อให้สารไนโตรเจนเข้าไปอยู่ในโมเลกุลของโลหะ ทำให้โลหะมีคุณสมบัติแข็งขึ้นและลื่น เหมาะสมสำหรับใช้ทำชิ้นส่วนเครื่องจักรกลต่างๆ
5. ใช้ในอุตสาหกรรมน้ำยางเข้มข้น (concentrate latex) โดยแอมโมเนียช่วยป้องกันการแข็งตัวของน้ำยางและยับยั้งการเจริญเติบโตของแบคทีเรียบางชนิด
6. ใช้ในอุตสาหกรรมอิเล็กทรอนิกส์และสารเคลือบผิวจอภาพ
7. นอกจากนี้แอมโมเนียยังมีการนำไปใช้เป็นวัตถุดิบในการสร้างวัตถุระเบิด เช่น Tri Nitrotoluene (TNT), Nitro Cellulose Nitroglycerin และ Ammonium nitrate เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โทษของแอมโมเนีย

1. โทษต่อสุขภาพ

1.1 แอมโมเนียมีฤทธิ์กัดกร่อน และทำให้เกิดการระคายเคืองต่อผิวหนังที่สัมผัส

1.2 หากสูดดมเพียงเล็กน้อยจะทำให้น้ำตาไหล

1.3 หากสูดดมมากๆจะออกฤทธิ์กระตุ้นหัวใจ เสี่ยงต่อหัวใจวายได้ง่าย

1.4 การสูดดมเข้าระบบทางเดินหายใจจะทำให้เกิดการระคายเคืองเนื้อเยื่อ มีอาการแสบร้อน

1.5 การสัมผัสกับแอมโมเนียเข้มข้นทำให้เกิดเวียนศีรษะ ตาลาย และเกิดอาการทางระบบประสาทส่วนกลาง

ความเข้มข้นของแอมโมเนีย	ปฏิกิริยาเมื่อร่างกายสัมผัสแอมโมเนีย
ความเข้มข้น 5 ppm	บางคนอาจสัมผัสกลิ่นได้
ความเข้มข้น 25 ppm	บางคนอาจสัมผัสกลิ่นได้ สามารถทำงานได้ตลอด 8 ชั่วโมง
ความเข้มข้น 35 ppm	คนส่วนใหญ่อาจสัมผัสกลิ่นได้ สามารถทำงานได้ในระยะสั้น 15 นาที
ความเข้มข้น 50-100 ppm	คนส่วนใหญ่อาจสัมผัสกลิ่นได้ ทนต่อกลิ่นได้นานสูงสุด 2 ชั่วโมง สำหรับคนที่ไม่เคยรับกลิ่น
ความเข้มข้น 400 ppm	ระคายเคืองปานกลางต่อตา จมูก และลำคอ หากสัมผัสที่ 0.5-1 ชั่วโมง ยังไม่เป็นสาเหตุที่ทำให้บาดเจ็บรุนแรง
ความเข้มข้น 1,000-2,000 ppm	ทำให้ระคายเคือง และไออย่างรุนแรง มีอาการแสบที่ตา จมูก และลำคอ สามารถทำลายเนื้อเยื่อตา จมูกอวัยวะในระบบทางเดินหายใจ หากสัมผัสนาน 30 นาที
ความเข้มข้น 3,000-4,000 ppm	ทำให้ระคายเคือง และไออย่างรุนแรง มีอาการแสบที่ตา จมูก และลำคอ สามารถทำให้เสียชีวิตได้ใน 30 นาที
ความเข้มข้น 5,000-12,000 ppm	เกิดการหดเกร็งของกล้ามเนื้อหัวใจ เกิดภาวะขาดออกซิเจนอย่างเฉียบพลัน สามารถทำให้เสียชีวิตได้ในไม่กี่นาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. พิษแอมโมเนียต่อสิ่งแวดล้อม

2.1 หากแอมโมเนียลงสู่แหล่งน้ำจะทำให้ค่าความเป็นกรด-ด่าง (pH) ของน้ำสูงขึ้น ปริมาณออกซิเจนที่ละลายในน้ำ (DO) ลดลง ห่วงโซ่อาหารในระบบนิเวศเปลี่ยนแปลง

2.2 หากมีการปนเปื้อนในอากาศ จะเปลี่ยนเป็นสารประกอบกลุ่มไนโตรเจนและละอองไอแอมโมเนียมีฤทธิ์กัดกร่อนโลหะได้

การแพร่ (diffusion : D)

การแพร่ (diffusion) ของโมเลกุลของสารเป็นการเคลื่อนที่ของโมเลกุลจากจุดที่มีความเข้มข้นสูงกว่า ไปยังจุดที่มีความเข้มข้นต่ำกว่า การเคลื่อนที่นี้เป็นไปในลักษณะทุกทิศทุกทาง โดยไม่มีทิศทางที่แน่นอนผลจากการเคลื่อนที่อันนี้จะทำให้ความเข้มข้นของโมเลกุลของสารในภาชนะที่มีเนื้อที่จำกัดนั้น มีความเข้มข้นเท่ากันหมด

การแพร่เกิดจากพลังงานจลน์ (kinetic energy) ของโมเลกุลหรือไอออนของสาร ทำให้เกิดการเคลื่อนที่และกระทบกระทั่งหรือชนกันโดยบังเอิญเป็นผลให้เกิดการกระจายในทุกทิศทุกทาง บริเวณที่มีความเข้มข้นของโมเลกุลหรือไอออนน้อยกว่า จนทำให้ทุกบริเวณมีความเข้มข้นของโมเลกุลหรือไอออนเท่ากันจึงเรียกว่า ภาวะสมดุลของการแพร่ (diffusion equilibrium) ในภาวะเช่นนี้สารต่าง ๆ ก็ยังมีการเคลื่อนที่อยู่แต่อยู่ในลักษณะที่ไปและมาหรือออกเข้าในจำนวนที่เท่า ๆ กัน

การส่งถ่ายของไหล (Fluid)

ความร้อนสามารถเคลื่อนที่ได้ 3 รูปแบบ คือ การนำ การพา และการแผ่รังสี พฤติกรรมทางความร้อนจะเคลื่อนที่จากอุณหภูมิสูงไปยังอุณหภูมิต่ำ ยกตัวอย่างเช่น น้ำแข็งในแก้วน้ำที่มีน้ำอยู่ น้ำจะมีอุณหภูมิสูงกว่าจึงถ่ายเทความร้อนไปที่น้ำแข็งที่มีอุณหภูมิเย็นกว่า ทำให้น้ำแข็งละลาย และหยุดถ่ายเทความร้อนต่อเมื่อมันมีอุณหภูมิที่เท่ากัน

การนำ (Conduction)

เป็นการส่งถ่ายอุณหภูมิโดยที่ตัวกลางนั้นอยู่กับที่ ยกตัวอย่างเช่น เราจับแท่งเหล็กแท่งหนึ่งแล้วนำปลายของแท่งเหล็กนั้นไปเผาไฟ สักพักมือเราที่จับปลายอีกด้านก็จะรู้สึกถึงความร้อนที่มือ นี้คือตัวอย่างของการนำความร้อน ตัวกลางได้แก่ แท่งเหล็กที่มีความร้อนวิ่งผ่าน ส่วนตัวอย่างอื่นเช่น การนำความร้อนผ่านกำแพงบ้าน (กำแพงเป็นตัวกลาง) ความร้อนผ่านหลังคา (หลังคาเป็นตัวกลาง) ความร้อนผ่านผนังท่อ (ผนังท่อเป็นตัวกลาง)

ส่วนอัตราการนำความร้อน ขึ้นอยู่กับความแตกต่างของอุณหภูมิ และคุณสมบัติการนำความร้อนของวัสดุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การพา (Convection : u(x))

เป็นการส่งถ่ายอุณหภูมิโดยที่ตัวกลางนั้นเคลื่อนที่ไปกับอุณหภูมิด้วย ยกตัวอย่างเช่น น้ำที่มีอุณหภูมิไหลผ่านท่อซึ่งน้ำจะทำหน้าที่เป็นตัวกลางที่พาความร้อนไปกับน้ำเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน

ส่วนอัตราการพาความร้อน ขึ้นอยู่กับความแตกต่างของอุณหภูมิ ความเร็วของการไหลของตัวกลาง และชนิดของของไหล

อัตราการสลายสลายตัวของสาร/อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี (Chemical reaction: R)

อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี หมายถึง ความเร็วที่ตัวทำปฏิกิริยาเปลี่ยนไปเป็นสารผลิตภัณฑ์ต่อหน่วยเวลา โดยที่หน่วยความเข้มข้นของสารเป็น mol / dm^3 ดังนั้นอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีจึงมีการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารต่อวินาที ชั่วโมง หรือวัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับปฏิกิริยาเกิดเร็วหรือช้าเพียงใด

ให้เราพิจารณาจากปฏิกิริยาต่อไปนี้

$$AB + C \longrightarrow AC + B$$

เมื่อเวลาผ่านไปจากเวลา t_1 ไปเป็น t_2 ความเข้มข้นของสาร AB ที่ t_1 เป็น $[AB]t_1$ และความเข้มข้นของสาร AB ที่ t_2 เป็น $[AB]\ t_2$

ระยะเวลา t_1 ไป t_2 ความเข้มข้นของสาร AB เปลี่ยนไป $[AB]$ ที่ t_2 - $[AB]$ ที่ t_1

ดังนั้นอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี

$$\frac{[AB]t_2 - [AB]t_1}{t_2 - t_1}$$

หน่วยของอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีเป็น $mol / dm^3 \times s$

นอกจากพิจารณาความเข้มข้นของสาร AB เปลี่ยนไปต่อหน่วยเวลาแล้ว เราสามารถพิจารณาความเข้มข้นของสาร C ที่เปลี่ยนไปหรือพิจารณาจากสารผลิตภัณฑ์ AC หรือ B ที่เกิดขึ้นต่อหน่วยเวลาได้เช่นเดียวกัน

ดังนั้น

$$\text{อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี} = \frac{\text{ปริมาณของสารตั้งต้นที่ลดลง}}{\text{ระยะเวลาที่เกิดปฏิกิริยา}}$$

$$= \frac{\text{ปริมาณของสารผลิตัณฑ์ที่เกิดขึ้น}}{\text{ระยะเวลาที่เกิดปฏิกิริยา}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชนิดของอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี แบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. อัตราการเกิดปฏิกิริยาเฉลี่ย (Average rate) หมายถึง ปริมาณของสารตั้งต้นที่ลดลงหรือปริมาณสารผลิตภัณฑ์ที่เกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดการเกิดปฏิกิริยาในหนึ่งหน่วยเวลา

$$\text{อัตราการเกิดปฏิกิริยาเฉลี่ย} = \frac{\text{ปริมาณของสารตั้งต้นที่ลดลงทั้งหมด}}{\text{เวลาที่ใช้ทั้งหมด}}$$
$$= \frac{\text{ปริมาณของสารผลิตภัณฑ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมด}}{\text{เวลาที่ใช้ทั้งหมด}}$$

2. อัตราการเกิดปฏิกิริยาขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous Rate) หมายถึงปริมาณของสารที่เกิดขึ้นขณะใดขณะหนึ่งในหนึ่งหน่วยเวลาของช่วงนั้น

$$\text{อัตราการเกิดปฏิกิริยาขณะใดขณะหนึ่ง} = \frac{\text{ปริมาณของสารที่เกิดขึ้นในช่วงนั้น}}{\text{เวลาในช่วงนั้น}}$$

การหาอัตราการเกิดปฏิกิริยาขณะใดขณะหนึ่งจากกราฟ มีวิธีการดังนี้

1. เขียนกราฟระหว่างความเข้มข้นของสารกับเวลา
2. ลากเส้นสัมผัสกราฟที่เวลาตามที่ต้องการหาอัตราการเกิดปฏิกิริยา
3. สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากโดยให้เส้นสัมผัสในข้อ2 เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
4. หาอัตราการเกิดปฏิกิริยา จาก $r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

การวัดอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี สามารถหาได้จากสารทุกตัวในปฏิกิริยาเคมีแต่นิยมวัดตัวที่หาง่ายและสะดวกด้วยวิธี เช่น วัดจากปริมาณก๊าซที่เกิดขึ้น วัดตะกอนที่เกิดขึ้น วัดการนำไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงไป วัดความเข้มข้นที่เปลี่ยนแปลงไป วัดความเป็นกรด-เบสของสารละลาย วัดปริมาณสารที่เปลี่ยนแปลงไป วัดความดันที่เปลี่ยนแปลงไป วัดตะกอนที่เกิดขึ้น

จุดดูดซับและจุดกำเนิด (Sink point and Source point : Q(x))

จุดดูดซับเป็นจุดที่ทำให้สารเคมีสลายไปจากระบบ ณ ตำแหน่งจำเพาะนั้นๆ ในทางกลับกัน จุดกำเนิด เป็นจุดที่ก่อกำเนิดสารเคมีนั้นเข้ามาในระบบ ณ ตำแหน่งจำเพาะนั้นๆ เช่นกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

(Numerical Solution of Ordinary Differential Equations)

โดยทั่วไปสมการอนุพันธ์หากเป็นเชิงซ้อนตามปรากฏการณ์ตามธรรมชาติ มักจะหาผลเฉลยแม่นตรงได้ยากหรือยังไม่พบว่าผู้ใดหาค่าได้ หรือที่หาได้เป็นเพียงสมการในอุดมคติเท่านั้น ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขจึงนำมาใช้ประมาณค่าผลเฉลย

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อธิบายในที่นี้ ประกอบด้วย

1. ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value Problem) : IVPs
2. ปัญหาค่าขอบ (Boundary value Problem) : BVPs

3.1 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น

ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y' \quad \text{สำหรับทุก} \quad a \le x \le b$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$y(a) = y_a$$

พิจารณาช่วงปิด [a , b] โดยแบ่งช่วงปิดออกเป็น N ช่วงย่อยโดยกำหนด $h = \frac{b-a}{N}$

จะได้ $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = x_1+h, \ldots, x_n = x_{n-1}+h = b$

กล่าวคือ $x_i = x_0 + ih$ ค่าของ $y(x_i)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยแม่นตรงเพื่อความสะดวกจะใช้ y_i เป็นค่าประมาณของ $y(x_i)$ ที่ $x = x_i$

3.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Numerical Solution for System of ODEs)

ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเดียว

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $y' = f(x,y)$ สำหรับทุก $a \le x \le b$

ภายใต้เงื่อนไข : $y(a) = y_0$

ซึ่งปัญหานี้ จะมี x เป็นตัวแปรอิสระ และ y(x) เป็นตัวแปรตาม แต่หากเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ จะมีตัวแปรตามมากกว่า 1 ตัว เช่น

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $x' = 2x - \sin y + 3t$ (3.1)

: $y' = xy - 3x^2 + t^2$ สำหรับทุกๆ $0 \leq t \leq 1$ (3.2)

ภายใต้เงื่อนไข : $x(0) = 0$

: $y(0) = 1$

เมื่อ t เป็นตัวแปรอิสระที่มี

$x = x(t)$ เป็นตัวแปรตาม และ $y = y(t)$ เป็นตัวแปรตาม

นอกจากนี้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อาจเกิดจากสมการเชิงอันดับสูง

พิจารณา

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $y'' = -2\sin t - y - 2y'$ สำหรับ $0 \leq t \leq 1$

ภายใต้เงื่อนไข : $y(0) = 2$ และ $y'(0) = -1$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 2 สามารถแปลง (transform) สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงไปเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ได้ โดยการกำหนดตัวแปรเสริม เช่น

กำหนด $x_1 = y$ (3.1)

$x_2 = y'$ (3.4)

จะได้ $x'_1 = y'$ และ $x'_2 = y'$

นำ x'_1 และ x'_2 แทนในสมการ $y'' = -2\sin t - y - 2y'$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$x'_1 = y' = x_2$ (3.5)

$x'_2 = -2\sin t - x_1 - 2x_2$ (3.6)

เงื่อนไขเริ่มต้น $x_1(0) = 2$ และ $x_2(0) = -1$

สามารถเขียนระบบ (3.5) และ(3.6) ในรูปเวกเตอร์ได้คือ

ให้ $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow X' = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix}$

$$F = \begin{Bmatrix} x_2 \\ -2\sin t - x_1 - 2x_2 \end{Bmatrix}$$

จะได้สมการระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $x' = F(t, X) = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ -2\sin t - x_1 - 2x_2 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น $X(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$

สรุป ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามารถเขียนในรูป

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $x' = F(t, X)$ สำหรับทุก $a \leq t \leq b$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น : $X(a) = X_a$

3.3 วิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์

วิธีของรุงเงคุตตาอันดับที่สี่ (4^{th} Order Runge–Kutta : RK4) สืบเนื่องจากระเบียบวิธีเทย์เลอร์ วิธีออยเลอร์และวิธีออยเลอร์ปรับปรุงมีข้อจำกัดคือเราต้องเลือก N ขนาดใหญ่เพื่อจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยและต้องหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันด้วยส่วนวิธีรุเงคุตตาให้ ค่าความผิดพลาดในระดับ $O(h^4)$ แต่ไม่ต้องคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิธีรุเงคุตตาที่นิยมใช้คือวิธีของรุงเงคุตตาอันดับที่สี่เพราะให้ความแม่นยำและคำนวณได้ง่ายเพราะมีขั้นตอนไม่ยุ่งยาก

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $x' = F(t, x)$ สำหรับทุก $a \leq t \leq b$

ภายใต้เงื่อนไข : $x(a) = x_a$

เลือก $h = \dfrac{b-a}{n}$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ โดยที่ $x' = f(t, x, y)$

$y' = g(t, x, y)$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x(a) = x_0$

$y(a) = y_0$

นั้นคือ $X' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} x(a) \\ y(a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาโดยวิธี RK4

$$F_1 = hf(t_i, x_i, y_i)$$

$$G_1 = hg(t_i, x_i, y_i)$$

$$F_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}, y_i + \frac{G_1}{2})$$

$$G_2 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}, y_i + \frac{G_1}{2})$$

$$F_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}, y_i + \frac{G_2}{2})$$

$$G_3 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}, y_i + \frac{G_2}{2})$$

$$F_4 = hf(t_i + h, x_i + F_3, y_i + G_3)$$

$$G_4 = hg(t_i + h, x_i + F_3, y_i + G_3)$$

จะได้ว่า

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4] \quad \text{สำหรับทุก} \quad i = 0,1,2,3,...,N$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4] \quad \text{สำหรับทุก} \quad i = 0,1,2,3,...,N$$

3.4 วิธียิงเป้า (Shooting method)

วิธียิงเป้า มีหลักการคือพิจารณาปัญหาค่าขอบโดยแต่ละเงื่อนไขขอบขวาเอาไว้ก่อน จากนั้นหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นตามเงื่อนไขขอบซ้าย โดยพิจารณาเสมือนเป็นเงื่อนไขเริ่มต้น จากนั้นใช้วิธีเชิงตัวเลข เช่น รุงเง-คุตตาอันดับสี่(RK4) หาผลเฉลยแล้วตรวจสอบเงื่อนไขขอบขวาที่เคยละไว้ว่าใกล้เคียงกับผลที่ได้รับหรือไม่ หากยังไม่ใกล้เคียงความต้องการ(Tolerance)เราต้องปรับการคำนวณใหม่ เช่นเดียวกับการยิงปืนใหญ่นั้นเอง

ปัญหาค่าเริ่มต้น : $x' = F(t,x)$ สำหรับทุก $t_0 \le t \le t_f$

เงื่อนค่าเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$

$x'(t_0) = x_f$

ขั้นตอนที่1 $IVPa_0 : x' = F(t,x)$ สำหรับทุก $t_0 \le t \le t_f$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x'(t_0) = a_0$$

$IVPa_1 : x' = F(t,x)$ สำหรับทุก $t_0 \le t \le t_f$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$

$$x'(t_0) = y_0 = a_0$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดย รุงเง-คุตตาอันดับ4(RK4) ในปัญหาค่าเริ่มต้น $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ จะได้ว่า

$x' = F(t,x)$ สำหรับทุก $t_0 \le t \le t_f$

โดยที่ $h = \dfrac{t_f - t_0}{N}$

เมื่อ $x = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$

จะได้ว่า $x' = \begin{Bmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{Bmatrix}$ และ $x(t_0) = \begin{Bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$

วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ4(RK4)

$$F_1 = hf(t_i, x_i, y_i)$$

$$G_1 = hg(t_i, x_i, y_i)$$

$$F_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}, y_i + \frac{G_1}{2})$$

$$G_2 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_1}{2}, y_i + \frac{G_1}{2})$$

$$F_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}, y_i + \frac{G_2}{2})$$

$$G_3 = hg(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{F_2}{2}, y_i + \frac{G_2}{2})$$

$$F_4 = hf(t_i + h, x_i + F_3, y_i + G_3)$$

$$G_4 = hg(t_i + h, x_i + F_3, y_i + G_3)$$

จะได้ว่า

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ คือ $\tilde{x}_{a_0}(t)$ และ $\tilde{x}_{a_1}(t)$ ตามลำดับ กล่าวคือ เมื่อประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$IVPa_0$ จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ $\tilde{x}_{a_0}(t)$

$IVPa_1$ จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ คือ $\tilde{x}_{a_1}(t)$

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยที่ใช้เปรียบเทียบกับเงื่อนไขขอบขวา $(x = t_f)$ ที่ใช้จะได้ว่าใกล้เคียงกับจำนวนที่พอใจ (tolerance) โดยหากยังไม่พอใจ ให้กลับไปทำขั้นตอนที่ 4

กำหนดให้

$$\tilde{x}_{a_0}(t_f) = f(a_0)$$

และ $$\tilde{x}_{a_1}(t_f) = f(a_1)$$ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$ โดย $x' = F(t, x)$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$

$$x'(t_0) = y_0 = a_2$$

โดยที่ a_2 ประมาณค่าจากสูตร

$$a_{i+1} = a_i - \left(\frac{a_i - a_{i-1}}{f(a_i) - f(a_{i-1})} \right) \left(f(a_i) - x_f \right)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n$

จากนั้นคำนวณโดยกระทำซ้ำ (Iterative)จนกระทั่ง $\left| f(a_i) - x_f \right| < \text{tolerance}$ ที่กำหนดไว้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

วิเคราะห์ผลการดำเนินงาน

4.1 การจำลองแบบเพื่อประมาณค่าในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ

4.1.1 แบบจำลอง 1 : กำหนดให้ลำน้ำมีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยบริเวณที่ต้องการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียคือ ระยะทาง 0-1 กิโลเมตร มีการปล่อยสารแอมโมเนียที่ตำแหน่ง x = 0 กิโลเมตร มีความเข้มข้นของแอมโมเนีย ณ จุดปล่อย เป็น 1 มิลลิกรัมต่อลิตร และตรวจพบความเข้มข้นของแอมโมเนียเป็น 0.2 มิลลิกรัมต่อลิตรที่ตำแหน่ง x = 1 กิโลเมตร ความเร็วของการไหลของกระแสน้ำในทิศทางแกน x คือ 9 เซนติเมตรต่อวินาที โดยสารแอมโมเนียที่ถูกปล่อยลงสู่แหล่งน้ำนี้มีสมบัติทางเคมีคือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของแอมโมเนียชนิดนี้ในน้ำคือ 5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียชนิดนี้เมื่อละลายในลำน้ำบริเวณนี้เป็น 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ ล้ำนำมีอัตราดูดซึมแอมโมเนียเป็น 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

จากพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 4-1 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 1

พารามิเตอร์	ค่าที่กำหนด
L	1 กิโลเมตร
u	0.09 เมตรต่อวินาที
D	5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน
R	1×10^{-5} วัน$^{-1}$
Q	1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

แบบจำลองนี้สามารถกำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปสมการการพา-การแพร่ในสภาวะเสถียรในหนึ่งมิติดังนี้

$$-0.00598c'' + 0.05c' + 0.00001c - 0.000001 = 0 \qquad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดย

$$c(0) = 1.00 \qquad (4.2)$$

$$c(1) = 0.20 \qquad (4.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประมาณผลเฉลยของแบบจำลอง 1 โดยวิธียิงเป้า

กำหนดให้ $k = c'$ (4.4)

$k' = c''$ (4.5)

กำหนดปัญหาค่าขอบเป็น

$$c' = k$$

$$k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.00017 \quad (4.6)$$

เงื่อนไขขอบ

$$c(0) = 1$$

และ $c(1) = 0.2 = x_f$

ในการคำนวณโดยวิธียิงเป้าจะต้องกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหาและกำหนดค่าประมาณที่ยอมรับได้มีนัยสำคัญระดับ 0.003 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สมมติให้ $IVPa_0 : c' = k$ (4.7)

$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.00017$ (4.8)

$ICa_0 : c(0) = 1$ (4.9)

$: k(0) = 0 = a_0$ (4.10)

สมมติให้ $IVPa_1 : c' = k$ (4.11)

$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.00017$ (4.12)

$ICa_1 : c(0) = 1$ (4.13)

$: c'(0) = 0.5 = a_1$ (4.14)

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ โดยเลือกใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4

$IVPa_0 : c' = k$

$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.00017$

$ICa_0 : c(0) = 1$

$: c'(0) = 0$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$ (4.15)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$$k(0) = k_0$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0) \\ g(0,1,0) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

พิจารณาโดยโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	0.00000										

เมื่อ i = 0 จะได้

$F_1 = 0.1f(0.00000, 1.00000, 0.00000)$

$= 0.1(0.00000)$

$= 0.00000$

$G_1 = 0.1g(0.00000, 1.00000, 0.00000)$

$= 0.1[(8.36120)(0.00000) + (0.00167)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.1(0.0015)$

$= 0.00015$

$F_2 = 0.1f(0.05000, 1.00000, 0.00008)$

$= 0.1(0.00008)$

$= 0.00001$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$G_2 = 0.1g(0.05000, 1.00000, 0.00008)$

$= 0.1[(8.36120)(0.00008) + (0.00167)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.1(0.00217)$

$= 0.00021$

$F_3 = 0.1f(0.05000, 1.00000, 0.00011)$

$= 0.1(0.00011)$

$= 0.00001$

$G_3 = 0.1g(0.05000, 1.0000, 0.00011)$

$= 0.1[(8.36120)(0.00011) + (0.00167)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.1(0.00241)$

$= 0.00024$

$F_4 = 0.1f(0.10000, 1.00001, 0.00024)$

$= 0.1(0.00024)$

$= 0.00002$

$G_4 = 0.1g(0.10000, 1.00001, 0.00024)$

$= 0.1[(8.36120)(0.00024) + (0.00167)(1.00001) - 0.00017]$

$= 0.1(0.00350)$

$= 0.00035$

$$C(0.1) = 1 + \frac{1}{6}[0.00000 + (2)(0.00001) + (2)(0.00001) + 0.00002]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(0.00006)$$

$$= 1 + 0.00001$$

$$= 1.00001$$

$$k(0.1) = 0.00000 + \frac{1}{6}[0.00015 + (2)(0.00021) + (2)(0.00024) + 0.00035]$$

$$= 0.00000 + \frac{1}{6}(0.00014)$$

$$= 0.00000 + 0.00023$$

$$= 0.00023$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	1.00001									
$k(x_i)$	0.00000	0.00023									

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.10000, 1.00001, 0.00023)$

$= 0.10000(0.00023)$

$= 0.00002$

$G_1 = 0.10000g(0.10000, 1.00001, 0.00023)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00023) + (0.00167)(1.00001) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.00342)$

$= 0.00035$

$F_2 = 0.10000f(0.15000, 1.00002, 0.00041)$

$= 0.10000(0.00041)$

$= 0.00004$

$G_2 = 0.10000g(0.15000, 1.00002, 0.00041)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00041) + (0.00167)(1.00002) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.00492)$

$= 0.00049$

$F_3 = 0.10000f(0.15000, 1.00003, 0.00048)$

$= 0.10000(0.00048)$

$= 0.00005$

$G_3 = 0.10000g(0.15000, 1.00003, 0.00048)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00048) + (0.00167)(1.00003) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.00551)$

$= 0.00055$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.20000, 1.00006, 0.00078)$

$= 0.10000(0.00078)$

$= 0.00008$

$G_4 = 0.10000g(0.20000, 1.00006, 0.00078)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00078) + (0.00167)(1.00006) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.00802)$

$= 0.00081$

$$C(0.2) = 1.00001 + \frac{1}{6}[0.00002 + (2)(0.00004) + (2)(0.00005) + 0.00008]$$

$$= 1.00001 + \frac{1}{6}(0.00028)$$

$$= 1.00001 + 0.00005$$

$$= 1.00006$$

$$k(0.2) = 0.00023 + \frac{1}{6}[0.00035 + (2)(0.00049) + (2)(0.00055) + 0.00087]$$

$$= 0.00023 + \frac{1}{6}(0.00324)$$

$$= 0.00023 + 0.00054$$

$$= 0.00077$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006								
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077								

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 2 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.20000, 1.00006, 0.00077)$

$= 0.10000(0.00077)$

$= 0.00008$

$G_1 = 0.10000g(0.20000, 1.00006, 0.00077)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00077) + (0.00167)(1.00006) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.00793)$

$= 0.00080$

$F_2 = 0.10000f(0.25000, 1.00010, 0.00117)$

$= 0.10000(0.00117)$

$= 0.00012$

$G_2 = 0.10000g(0.25000, 1.00010, 0.00117)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00117) + (0.00167)(1.00010) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.01128)$

$= 0.00113$

$F_3 = 0.10000f(0.25000, 1.00012, 0.00134)$

$= 0.10000(0.00134)$

$= 0.00013$

$G_3 = 0.10000g(0.25000, 1.00012, 0.00134)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00134) + (0.00167)(0.00134) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.01270)$

$= 0.00127$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.30000, 1.00019, 0.00201)$

$= 0.10000(0.00201)$

$= 0.00020$

$G_4 = 0.10000g(0.30000, 1.00019, 0.00201)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00201) + (0.00167)(1.00019) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.01855)$

$= 0.00186$

$$C(0.3) = 1.00006 + \frac{1}{6}[0.00008 + (2)(0.00012) + (2)(0.00013) + 0.00020]$$

$$= 1.00006 + \frac{1}{6}(0.00078)$$

$$= 1.00006 + 0.00013$$

$$= 1.00019$$

$$k(0.3) = 0.00077 + \frac{1}{6}[0.00080 + (2)(0.00113) + (2)(0.00127) + 0.00186]$$

$$= 0.00077 + \frac{1}{6}(0.00746)$$

$$= 0.00077 + 0.00124$$

$$= 0.00201$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019							
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201							

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.30000, 1.00019, 0.00201)$

$= 0.10000(0.00201)$

$= 0.00020$

$G_1 = 0.10000g(0.30000, 1.00019, 0.00201)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00201) + (0.00167)(1.00019) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.01830)$

$= 0.00183$

$F_2 = 0.10000f(0.35000, 1.00029, 0.00293)$

$= 0.10000(0.00293)$

$= 0.00029$

$G_2 = 0.10000g(0.35000, 1.00029, 0.00293)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00293) + (0.00167)(1.00029) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.02599)$

$= 0.00260$

$F_3 = 0.10000f(0.35000, 1.00033, 0.00331)$

$= 0.10000(0.00331)$

$= 0.00033$

$G_3 = 0.10000g(0.35000, 1.00033, 0.00331)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00331) + (0.00167)(1.00033) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.02917)$

$= 0.00292$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.40000, 1.00052, 0.00493)$

$= 0.10000(0.00493)$

$= 0.00049$

$G_4 = 0.10000g(0.40000, 1.00052, 0.00493)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00493) + (0.00167)(1.00052) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.04272)$

$= 0.00428$

$$C(0.4) = 1.00019 + \frac{1}{6}[0.00020 + (2)(0.00029) + (2)(0.00023) + 0.00049]$$

$$= 1.00019 + \frac{1}{6}(0.00193)$$

$$= 1.00019 + 0.00032$$

$$= 1.00051$$

$$k(0.4) = 0.00201 + \frac{1}{6}[0.00183 + (2)(0.00260) + (2)(0.00292) + 0.00428]$$

$$= 0.00201 + \frac{1}{6}(0.01715)$$

$$= 0.00201 + 0.00286$$

$$= 0.00487$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051						
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487						

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 4$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.40000, 1.00051, 0.00487)$

$= 0.10000(0.00487)$

$= 0.00049$

$G_1 = 0.10000g(0.40000, 1.00051, 0.00487)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00487) + (0.00167)(1.00051) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.04222)$

$= 0.00422$

$F_2 = 0.10000f(0.45000, 1.00075, 0.00698)$

$= 0.10000(0.00698)$

$= 0.00070$

$G_2 = 0.10000g(0.45000, 1.00075, 0.00698)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.00698) + (0.00167)(1.00075) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.05986)$

$= 0.00599$

$F_3 = 0.1f(0.45000, 1.00086, 0.00787)$

$= 0.1(0.00787)$

$= 0.00079$

$G_3 = 0.1g(0.45000, 1.00086, 0.00787)$

$= 0.1[(8.36120)(0.00787) + (0.00167)(1.00086) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.06730)$

$= 0.00673$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.50000, 1.00130, 0.01160)$

$= 0.10000(0.01160)$

$= 0.00116$

$G_4 = 0.10000g(0.50000, 1.00130, 0.01160)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.01160) + (0.00167)(1.00130) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.09850)$

$= 0.00985$

$$C(0.5) = 1.00051 + \frac{1}{6}[0.00049 + (2)(0.00070) + (2)(0.00079) + 0.00116]$$

$$= 1.00051 + \frac{1}{6}(0.00463)$$

$= 1.00051 + 0.00077$

$= 1.00128$

$$k(0.5) = 0.00487 + \frac{1}{6}[0.00422 + (2)(0.00599) + (2)(0.00673) + 0.00985]$$

$$= 0.00487 + \frac{1}{6}(0.03951)$$

$= 0.00487 + 0.00658$

$= 0.01145$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128					
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145					

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 5 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.50000, 1.00128, 0.01145)$

$= 0.10000(0.01145)$

$= 0.00115$

$G_1 = 0.10000g(0.50000, 1.00128, 0.01145)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.01145) + (0.00167)(1.00128) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.09724)$

$= 0.00973$

$F_2 = 0.10000f(0.55000, 1.00185, 0.01632)$

$= 0.10000(0.01632)$

$= 0.00163$

$G_2 = 0.10000g(0.55000, 1.00185, 0.01632)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.01632) + (0.00167)(1.00185) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.13795)$

$= 0.01379$

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 1.00210, 0.01835)$

$= 0.10000(0.01835)$

$= 0.00184$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 1.00210, 0.01835)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.01835) + (0.00167)(1.00210) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.15493)$

$= 0.01550$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 1.00312, 0.02695)$

$= 0.10000(0.02695)$

$= 0.00270$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 1.00312, 0.02695)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.02695) + (0.00167)(1.00312) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.22683)$

$= 0.02268$

$$C(0.6) = 1.00128 + \frac{1}{6}[0.00115 + (2)(0.00163) + (2)(0.00184) + 0.00270]$$

$$= 1.00128 + \frac{1}{6}(0.01079)$$

$$= 1.00128 + 0.00180$$

$$= 1.00308$$

$$k(0.6) = 0.01145 + \frac{1}{6}[0.00973 + (2)(0.01379) + (2)(0.02550) + 0.02268]$$

$$= 0.01145 + \frac{1}{6}(0.09099)$$

$$= 0.01145 + 0.01516$$

$$= 0.02662$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128	1.00308				
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145	0.02662				

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 6$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.60000, 1.00308, 0.02662)$

$= 0.10000(0.02662)$

$= 0.00266$

$G_1 = 0.10000g(0.60000, 1.00308, 0.02662)$

$= 0.10000[(8.3612)(0.02662) + (0.00167)(1.00308) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.22408)$

$= 0.02241$

$F_2 = 0.10000f(0.65000, 1.00441, 0.03782)$

$= 0.10000(0.03782)$

$= 0.00378$

$G_2 = 0.10000g(0.65000, 1.00441, 0.03782)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.03782) + (0.00167)(1.00441) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.31778)$

$= 0.03178$

$F_3 = 0.10000f(0.65000, 1.00497, 0.04251)$

$= 0.1000(0.04251)$

$= 0.00425$

$G_3 = 0.10000g(0.65000, 1.00497, 0.04251)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.04251) + (0.00167)(1.00497) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.35694)$

$= 0.03569$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.70000, 1.00733, 0.06231)$

$= 0.10000(0.06231)$

$= 0.00623$

$G_4 = 0.10000g(0.70000, 1.00733, 0.06231)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.06231) + (0.00167)(1.00733) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.52250)$

$= 0.05225$

$$C(0.7) = 1.00308 + \frac{1}{6}[0.00266 + (2)(0.00378) + (2)(0.00425) + 0.00623]$$

$$= 1.00308 + \frac{1}{6}(0.02495)$$

$$= 1.00308 + 0.00416$$

$$= 1.00724$$

$$k(0.7) = 0.02662 + \frac{1}{6}[0.02241 + (2)(0.03178) + (2)(0.03564) + 0.05225]$$

$$= 0.02662 + \frac{1}{6}(0.2095)$$

$$= 0.02662 + 0.03492$$

$$= 0.06155$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128	1.00308	1.00724			
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145	0.02662	0.06155			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 7 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.70000,1.00724,0.06155)

= 0.10000(0.06155)

= 0.00616

G_1 = 0.10000g(0.70000,1.00724,0.06155)

= 0.10000[(8.3612)(0.06155) + (0.00167)(1.00724) - 0.00017]

= 0.10000(0.51614)

= 0.05162

F_2 = 0.10000f(0.75000,1.01031,0.08736)

= 0.10000(0.08736)

= 0.00874

G_2 = 0.10000g(0.75000,1.01031,0.08736)

= 0.10000[(8.36120)(0.08736) + (0.00167)(1.01031) - 0.00017]

= 0.10000(0.73195)

= 0.07320

F_3 = 0.10000f(0.75000,1.01160,0.09815)

= 0.10000(0.09815)

= 0.00982

G_3 = 0.10000g(0.75000,1.01160,0.09815)

= 0.10000[(8.36120)(0.09815) + (0.00167)(1.01160) - 0.00017]

= 0.10000(0.82217)

= 0.08222

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.80000, 1.01705, 0.14377)$

$= 0.10000(0.14377)$

$= 0.01438$

$G_4 = 0.10000g(0.80000, 1.01705, 0.14377)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.14377) + (0.00167)(1.01705) - 0.00017]$

$= 0.10000(1.20362)$

$= 0.12036$

$$C(0.8) = 1.00724 + \frac{1}{6}[0.00616 + (2)(0.00874) + (2)(0.00982) + 0.01438]$$

$$= 1.00724 + \frac{1}{6}(0.05766)$$

$$= 1.00724 + 0.00961$$

$$= 1.01684$$

$$k(0.8) = 0.06155 + \frac{1}{6}[0.05162 + (2)(0.07320) + (2)(0.08222) + 0.12036]$$

$$= 0.06155 + \frac{1}{6}(0.48282)$$

$$= 0.06155 + 0.08047$$

$$= 0.14202$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128	1.00308	1.00724	1.01684		
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145	0.02662	0.06155	0.15202		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 8 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 1.01684, 0.14202)$

$= 0.10000(0.14202)$

$= 0.01420$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 1.01684, 0.14202)$

$= 0.10000[(8.3612)(0.14202) + (0.00167)(1.01684) - 0.00017]$

$= 0.10000(1.18898)$

$= 0.11890$

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 1.02394, 0.20147)$

$= 0.10000(0.20147)$

$= 0.02015$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 1.02394, 0.20147)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.20147) + (0.00167)(1.02394) - 0.00017]$

$= 0.10000(1.68607)$

$= 0.16861$

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 1.02692, 0.22633)$

$= 0.10000(0.22633)$

$= 0.02263$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 1.02692, 0.22633)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.22633) + (0.00167)(1.02692) - 0.00017]$

$= 0.10000(1.89393)$

$= 0.18939$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.90000, 1.03947, 0.33141)$

$= 0.10000(0.33141)$

$= 0.03314$

$G_4 = 0.10000g(0.90000, 1.03947, 0.33141)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.33141) + (0.00167)(1.03947) - 0.00017]$

$= 0.10000(2.77255)$

$= 0.27726$

$$C(0.9) = 1.01684 + \frac{1}{6}[0.01420 + (2)(0.02015) + (2)(0.02263) + 0.03314]$$

$$= 1.01684 + \frac{1}{6}(0.1329)$$

$$= 1.01684 + 0.02215$$

$$= 1.03899$$

$$k(0.9) = 0.14202 + \frac{1}{6}[0.11890 + (2)(0.16861) + (2)(0.18939) + 0.27726]$$

$$= 0.14202 + \frac{1}{6}(1.11216)$$

$$= 0.14202 + 0.18536$$

$$= 0.32738$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128	1.00308	1.00724	1.01684	1.03899	
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145	0.02662	0.06155	0.15202	0.32738	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 9 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.90000,1.03899,0.32738)

= 0.10000(0.32738)

= 0.03274

G_1 = 0.10000g(0.90000,1.03899,0.32738)

= 0.10000[(8.3612)(0.32738) + (0.00167)(1.03899) - 0.00017]

= 0.10000(2.73885)

= 0.27389

F_2 = 0.10000f(0.95000,1.05536,0.46433)

= 0.10000(0.46433)

= 0.04643

G_2 = 0.10000g(0.95000,1.05536,0.46433)

= 0.10000[(8.36120)(1.05536) + (0.00167)(0.46433) - 0.00017]

= 0.10000(3.88394)

= 0.38839

F_3 = 0.10000f(0.95000,1.06221,0.52158)

= 0.10000(0.52158)

= 0.05216

G_3 = 0.10000g(0.95000,1.06221,0.52158)

= 0.10000[(8.36120)(0.52158) + (0.00167)(1.06221) - 0.00017]

= 0.10000(4.36263)

= 0.43626

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(1.00000, 1.09115, 0.76365)$

$= 0.10000(0.76365)$

$= 0.07636$

$G_4 = 0.10000g(1.00000, 1.09115, 0.76365)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.76365) + (0.00167)(1.09115) - 0.00017]$

$= 0.10000(0.38668)$

$= 0.63867$

$$C(1.0) = 1.03899 + \frac{1}{6}[0.03274 + (2)(0.04643) + (2)(0.05216) + 0.07636]$$

$$= 1.03899 + \frac{1}{6}(0.30628)$$

$= 1.03899 + 0.05105$

$= 1.09004$

$$k(1.0) = 0.32738 + \frac{1}{6}[0.27389 + (2)(0.38839) + (2)(0.43626) + 0.63867]$$

$$= 0.32738 + \frac{1}{6}(2.56185)$$

$= 0.32738 + 0.42698$

$= 0.75436$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00019	1.00051	1.00128	1.00308	1.00724	1.01684	1.03899	1.09004
$k(x_i)$	0.00000	0.00023	0.00077	0.00201	0.00487	0.01145	0.02662	0.06155	0.15202	0.32738	0.75436

ตารางที่ 4-2 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากค่า $c(1.0) \approx 1.09004$ และเงื่อนไขขอบขวาของปัญหาค่าขอบคือ $c(1) = 0.2$ จะเห็นว่าผลการคำนวณยังไม่แม่นยำที่อยู่ในระดับนัยสำคัญที่พอใจ $\left|c - \tilde{c}\right| \leq 0.003$ ดังนั้นจึงต้องกระทำซ้ำดังนี้

$IVPa_1 : c' = k$

$: k' = 8.3612k + 0.00167 - 0.00017$

$ICa_1 : c(0) = 1$

$: k(0) = 0.5$

เลือก $h = \dfrac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$$k(0) = k_0$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.5) \\ g(0,1,0.5) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	0.50000										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 0 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.00000,1.00000,0.50000)

= 0.10000(0.50000)

= 0.05000

G_1 = 0.10000g(0.00000,1.00000,0.50000)

= 0.10000[(8.36120)(0.50000) + (0.00167)(1.00000) - 0.00017]

= 0.10000(4.1821)

= 0.41821

F_2 = 0.10000f(0.05000,1.02500,0.70910)

= 0.10000(0.70910)

= 0.07091

G_2 = 0.10000g(0.05000,1.02500,0.70910)

= 0.10000[(8.36120)(0.70910) + (0.00167)(1.02500) - 0.00017]

= 0.10000(5.9305)

= 0.59305

F_3 = 0.10000f(0.05000,1.03546,0.79653)

= 0.10000(0.79653)

= 0.07965

G_3 = 0.10000g(0.05000,1.03546,0.79653)

= 0.10000[(8.36120)(0.79653) + (0.00167)(1.03546) - 0.00017]

= 0.10000(6.66150)

= 0.66615

F_4 = 0.10000f(0.10000,1.16615,1.07965)

= 0.10000(1.07965)

= 0.11661

G_4 = 0.10000g(0.10000,1.16615,1.07965)

= 0.10000[(8.36120)(1.07965) + (0.00167)(1.16615) - 0.00017]

= 0.10000(9.75205)

= 0.97520

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.1) = 1.00000 + \frac{1}{6}[0.05000 + (2)(0.07091) + (2)(0.07965) + 0.11661]$$

$$= 1.00000 + \frac{1}{6}(0.45773)$$

$$= 1.00000 + 0.07795$$

$$= 1.07796$$

$$k(0.1) = 0.50000 + \frac{1}{6}[0.41821 + (2)(0.59305) + (2)(0.66615) + 0.97520]$$

$$= 0.50000 + \frac{1}{6}(3.91181)$$

$$= 0.50000 + 0.65197$$

$$= 1.15197$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	1.07796									
$k(x_i)$	0.50000	1.15197									

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.10000, 1.07796, 1.15197)$

$= 0.10000(1.15197)$

$= 0.11520$

$G_1 = 0.10000g(0.10000, 1.07796, 1.15197)$

$= 0.10000[(8.36120)(1.15197) + (0.00167)(1.07796) - 0.00017]$

$= 0.10000(9.63348)$

$= 0.96335$

$F_2 = 0.10000f(0.15000, 1.13556, 1.63364)$

$= 0.10000(1.63364)$

$= 0.16336$

$G_2 = 0.10000g(0.15000, 1.13556, 1.63364)$

$= 0.10000[(8.36120)(1.63364) + (0.00167)(1.13556) - 0.00017]$

$= 0.10000(13.66092)$

$= 1.36609$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.15000, 1.15964, 1.83501)$

$= 0.10000(1.83501)$

$= 0.18350$

$G_3 = 0.10000g(0.15000, 1.15964, 1.83501)$

$= 0.10000[(8.36120)(1.83501) + (0.00167)(1.15964) - 0.00017]$

$= 0.10000(15.34465)$

$= 1.53447$

$F_4 = 0.10000f(0.20000, 1.26146, 2.68644)$

$= 0.10000(2.68644)$

$= 0.26864$

$G_4 = 0.10000g(0.20000, 1.26146, 2.68644)$

$= 0.10000[(8.36120)(2.68644) + (0.00167)(1.26146) - 0.00017]$

$= 0.10000(22.46379)$

$= 2.24638$

$$C(0.2) = 1.07796 + \frac{1}{6}[0.11520 + (2)(0.16336) + (2)(0.18350) + 0.26864]$$

$$= 1.07796 + \frac{1}{6}(1.07756)$$

$$= 1.07796 + 0.17959$$

$$= 1.27755$$

$$k(0.2) = 1.15197 + \frac{1}{6}[0.96335 + (2)(1.36609) + (2)(1.53447) + 2.24638]$$

$$= 1.15197 + \frac{1}{6}(9.01085)$$

$$= 1.15197 + 1.50181$$

$$= 2.65378$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755								
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378								

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.20000, 1.25755, 2.65378)$

$= 0.10000(2.65378)$

$= 0.26538$

$G_1 = 0.10000g(0.20000, 1.25755, 2.65378)$

$= 0.10000[(8.36120)(2.65378) + (0.00167)(1.25755) - 0.00017]$

$= 0.10000(22.19071)$

$= 2.21907$

$F_2 = 0.10000f(0.25000, 1.39024, 3.76331)$

$= 0.10000(3.76331)$

$= 0.37633$

$G_2 = 0.10000g(0.25000, 1.39024, 3.76331)$

$= 0.10000[(8.36120)(3.76331) + (0.00167)(1.39024) - 0.00017]$

$= 0.10000(31.46793)$

$= 3.14679$

$F_3 = 0.10000f(0.25000, 1.44572, 4.22717)$

$= 0.10000(4.22717)$

$= 0.42272$

$G_3 = 0.10000g(0.25000, 1.44572, 4.22717)$

$= 0.10000[(8.36120)(4.22717) + (0.00167)(1.44572) - 0.00017]$

$= 0.10000(35.34646)$

$= 3.53465$

$F_4 = 0.10000f(0.30000, 1.68027, 6.18842)$

$= 0.10000(6.18842)$

$= 0.61884$

$G_4 = 0.10000g(0.30000, 1.68027, 6.18842)$

$= 0.10000[(8.36120)(6.18842) + (0.00167)(1.68027) - 0.00017]$

$= 0.10000(51.74525)$

$= 5.17453$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.3) = 1.25755 + \frac{1}{6}[0.26538 + (2)(0.37633) + (2)(0.42272) + 0.61884]$$

$$= 1.25755 + \frac{1}{6}(2.48232)$$

$$= 1.25755 + 0.41372$$

$$= 1.67127$$

$$k(0.3) = 2.65378 + \frac{1}{6}[2.21907 + (2)(3.14679) + (2)(3.53465) + 5.17453]$$

$$= 2.65378 + \frac{1}{6}(20.75648)$$

$$= 2.65378 + 3.45941$$

$$= 6.11319$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127							
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319							

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.30000, 1.67127, 6.11319)$$

$$= 0.10000(6.11319)$$

$$= 0.61132$$

$$G_1 = 0.10000g(0.30000, 1.67127, 6.11319)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(6.11319) + (0.00167)(1.67127) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(51.11622)$$

$$= 5.11162$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.35000,1.97693,8.66900)

= 0.10000(8.66900)

= 0.86690

G_2 = 0.10000g(0.35000,1.97693,8.66900)

= 0.10000[(8.36120)(1.97693) + (0.00167)(8.66900) - 0.00017]

= 0.10000(72.48637)

= 7.24864

F_3 = 0.10000f(0.35000,2.10472,9.73751)

= 0.10000(9.73751)

= 0.97375

G_3 = 0.10000g(0.35000,2.10472,9.73751)

= 0.10000[(8.36120)(9.73751) + (0.00167)(2.10472) - 0.00017]

= 0.10000(81.42061)

= 8.14206

F_4 = 0.10000f(0.40000,2.64502,14.25525)

= 0.10000(14.25525)

= 1.42552

G_4 = 0.10000g(0.40000,2.64502,14.25525)

= 0.10000[(8.36120)(14.25525) + (0.00167)(2.64502) - 0.00017]

= 0.10000(119.19524)

= 11.91952

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.4) = 1.67127 + \frac{1}{6}[0.61132 + (2)(0.86690) + (2)(0.97375) + 1.42552]$$

$$= 1.67127 + \frac{1}{6}(5.71805)$$

$$= 1.67127 + 0.95301$$

$$= 2.62430$$

$$k(0.4) = 6.11319 + \frac{1}{6}[5.11162 + (2)(7.24864) + (2)(8.14206) + 11.91952]$$

$$= 6.11319 + \frac{1}{6}(47.81254)$$

$$= 6.11319 + 7.96876$$

$$= 14.08195$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430						
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195						

เมื่อ $i = 4$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.40000, 2.62430, 14.08195)$$

$$= 0.10000(14.08195)$$

$$= 1.40819$$

$$G_1 = 0.10000g(0.40000, 2.62430, 14.08195)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(14.08195) + (0.00167)(2.62430) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(117.74621)$$

$$= 11.77462$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.45000, 3.32839, 19.96925)

= 0.10000(19.96925)

= 1.99693

G_2 = 0.10000g(0.45000, 3.32839, 19.96925)

= 0.10000[(8.36120)(19.96925) + (0.00167)(3.32839) - 0.00017]

= 0.10000(166.97228)

= 16.69723

F_3 = 0.10000f(0.45000, 3.62276, 22.43056)

= 0.10000(22.43056)

= 2.24306

G_3 = 0.10000g(0.45000, 3.62276, 22.43056)

= 0.10000[(8.36120)(22.43056) + (0.00167)(3.62276) - 0.00017]

= 0.10000(187.55228)

= 18.75523

F_4 = 0.10000f(0.50000, 4.86735, 32.83717)

= 0.10000(32.83717)

= 3.28372

G_4 = 0.10000g(0.50000, 4.86735, 32.83717)

= 0.10000[(8.36120)(32.83717) + (0.00167)(4.86735) - 0.00017]

= 0.10000(274.56610)

= 27.45661

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.5) = 2.62430 + \frac{1}{6}[1.40819 + (2)(1.99693) + (2)(2.24306) + 3.28372]$$

$$= 2.62430 + \frac{1}{6}(13.17189)$$

$$= 2.62430 + 2.19531$$

$$= 4.81961$$

$$k(0.5) = 14.08195 + \frac{1}{6}[11.77462 + (2)(16.69723) + (2)(18.75523) + 27.45661]$$

$$= 14.08195 + \frac{1}{6}(110.13615)$$

$$= 14.08195 + 18.35602$$

$$= 32.43797$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961					
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797					

เมื่อ i = 5 จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.50000, 4.81961, 32.43797)$$

$$= 0.10000(32.43797)$$

$$= 3.24380$$

$$G_1 = 0.10000g(0.50000, 4.81961, 32.43797)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(32.43797) + (0.00167)(4.81961) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(271.22823)$$

$$= 27.12282$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_2 = 0.10000f(0.55000, 6.44151, 45.99938)$

$= 0.10000(45.99938)$

$= 4.59994$

$G_2 = 0.10000g(0.55000, 6.44151, 45.99938)$

$= 0.10000[(8.36120)(45.99938) + (0.00167)(6.44151) - 0.00017]$

$= 0.10000(384.62060)$

$= 38.46206$

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 7.11958, 51.66900)$

$= 0.10000(51.66900)$

$= 5.16690$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 7.11958, 51.66900)$

$= 0.10000[(8.36120)(51.66900) + (0.00167)(7.11958) - 0.00017]$

$= 0.10000(432.02656)$

$= 43.20266$

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 9.98651, 75.64063)$

$= 0.10000(75.64063)$

$= 7.56406$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 9.98651, 75.64063)$

$= 0.10000[(8.36120)(75.64063) + (0.00167)(9.98651) - 0.00017]$

$= 0.10000(632.46294)$

$= 63.24629$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.6) = 4.81961 + \frac{1}{6}[3.24380 + (2)(4.59994) + (2)(5.16690) + 7.56406]$$

$$= 4.81961 + \frac{1}{6}(30.34154)$$

$$= 4.81961 + 5.05692$$

$$= 9.87653$$

$$k(0.6) = 32.43797 + \frac{1}{6}[27.12282 + (2)(38.46206) + (2)(43.20266) + 63.24629]$$

$$= 32.43797 + \frac{1}{6}(253.69855)$$

$$= 32.43797 + 42.28309$$

$$= 74.72106$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961	9.87653				
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797	74.72106				

เมื่อ $i = 6$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.60000, 9.87653, 74.72106)$$

$$= 0.10000(74.72106)$$

$$= 7.47211$$

$$G_1 = 0.10000g(0.60000, 9.87653, 74.72106)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(74.72106) + (0.00167)(9.87653) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(624.77405)$$

$$= 62.47741$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.65000,13.61258,105.95977)

= 0.10000(105.95977)

= 10.59598

G_2 = 0.10000g(0.65000,13.61258,105.95977)

= 0.10000[(8.36120)(105.95977) + (0.00167)(13.61258) - 0.00017]

= 0.10000(885.97339)

= 88.59734

F_3 = 0.10000f(0.65000,15.17452,119.01973)

= 0.10000(119.01973)

= 11.90197

G_3 = 0.10000g(0.65000,15.17452,119.01973)

= 0.10000[(8.36120)(119.01973) + (0.00167)(15.17452) - 0.00017]

= 0.10000(995.17294)

= 99.51730

F_4 = 0.10000f(0.70000,21.77850,174.23836)

= 0.10000(174.23836)

= 17.42384

G_4 = 0.10000g(0.70000,21.77850,174.23836)

= 0.10000[(8.36120)(174.23836) + (0.00167)(21.77850) - 0.00017]

= 0.10000(1,456.68780)

= 154.68780

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.7) = 9.87653 + \frac{1}{6}[7.47211 + (2)(10.59598) + (2)(11.90197) + 17.42384]$$

$$= 9.87653 + \frac{1}{6}(69.89184)$$

$$= 9.87653 + 11.64864$$

$$= 21.52517$$

$$k(0.7) = 74.72106 + \frac{1}{6}[62.47741 + (2)(88.59734) + (2)(99.51730) + 145.68780]$$

$$= 74.72106 + \frac{1}{6}(584.39449)$$

$$= 74.72106 + 97.39908$$

$$= 172.12014$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961	9.87653	21.52517			
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797	74.72106	172.12014			

เมื่อ $i = 7$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.70000, 21.52517, 172.12014)$$

$$= 0.10000(172.12014)$$

$$= 17.21201$$

$$G_1 = 0.10000g(0.70000, 21.52517, 172.12014)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(172.12014) + (0.00167)(21.52517) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(1,439.16669)$$

$$= 143.91667$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_2 = 0.10000f(0.75000, 30.13118, 244.07848)$

$= 0.10000(244.07848)$

$= 24.40785$

$G_2 = 0.10000g(0.75000, 30.13118, 244.07848)$

$= 0.10000[(8.36120)(244.07848) + (0.00167)(30.13118) - 0.00017]$

$= 0.10000(2,040.83914)$

$= 204.08391$

$F_3 = 0.10000f(0.75000, 33.72910, 274.16210)$

$= 0.10000(274.16210)$

$= 27.41521$

$G_3 = 0.10000g(0.75000, 33.72910, 274.16210)$

$= 0.10000[(8.36120)(274.16210) + (0.00167)(33.72910) - 0.00017]$

$= 0.10000(2,292.38031)$

$= 229.23803$

$F_4 = 0.10000f(0.80000, 48.94138, 401.35818)$

$= 0.10000(401.35818)$

$= 40.13582$

$G_4 = 0.10000g(0.80000, 48.94138, 401.35818)$

$= 0.10000[(8.36120)(401.35818) + (0.00167)(48.94138) - 0.00017]$

$= 0.10000(3,355.91758)$

$= 335.59175$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.8) = 21.52517 + \frac{1}{6}[17.21207 + (2)(24.40785) + (2)(27.41621) + 40.13582]$$

$$= 21.52517 + \frac{1}{6}(160.99595)$$

$$= 21.52517 + 26.83266$$

$$= 48.35783$$

$$k(0.8) = 172.12014 + \frac{1}{6}[143.91667 + (2)(204.08391) + (2)(229.23803) + 335.59175]$$

$$= 172.12014 + \frac{1}{6}(1,346.1523)$$

$$= 172.12014 + 224.35872$$

$$= 396.47886$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961	9.87653	21.52517	48.35783		
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797	74.72106	172.12014	396.47886		

เมื่อ $i = 8$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 48.35783, 396.47886)$

$= 0.10000(396.47886)$

$= 39.64789$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 48.35783, 396.47886)$

$= 0.10000[(8.36120)(396.47886) + (0.00167)(48.35783) - 0.00017]$

$= 0.10000(3,315.11963)$

$= 331.51197$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 68.18177, 562.23485)$

$= 0.10000(562.23485)$

$= 56.22348$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 68.18177, 562.23485)$

$= 0.10000[(8.36120)(562.23485) + (0.00167)(68.18177) - 0.00017]$

$= 0.10000(4,701.07172)$

$= 470.10717$

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 91.51755, 757.43543)$

$= 0.10000(757.43543)$

$= 67.43256$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 91.51755, 757.43543)$

$= 0.10000[(8.36120)(757.43543) + (0.00002)(91.51755) - 0.00017]$

$= 0.10000(6333.07078)$

$= 633.30708$

$F_4 = 0.10000f(0.9000, 111.51107, 924.52853)$

$= 0.10000(924.52853)$

$= 92.45285$

$G_4 = 0.10000g(0.9000, 111.51107, 924.52853)$

$= 0.10000[(8.36120)(924.52853) + (0.00167)(111.51107) - 0.00017]$

$= 0.10000(7,730.354)$

$= 773.03540$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.9) = 48.35783 + \frac{1}{6}[39.64789 + (2)(56.22348) + (2)(111.51107) + 92.45285]$$

$$= 48.35783 + \frac{1}{6}(370.85418)$$

$$= 48.35783 + 61.80903$$

$$= 110.16686$$

$$k(0.9) = 396.47886 + \frac{1}{6}[331.51197 + (2)(470.10717) + (2)(528.04967) + 773.03540]$$

$$= 396.47886 + \frac{1}{6}(3,1000.86105)$$

$$= 396.47886 + 516.81017$$

$$= 913.28904$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961	9.87653	21.52517	48.35783	110.16686	
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797	74.72106	172.12014	396.47886	913.28904	

เมื่อ i = 9 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.9000, 110.16686, 913.28904)$

$= 0.10000(913.28904)$

$= 91.32890$

$G_1 = 0.10000g(0.9000, 110.16686, 913.28904)$

$= 0.10000[(8.36120)(913.28904) + (0.00167)(110.16686) - 0.00017]$

$= 0.10000(7,636.37613)$

$= 763.63751$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.95000,155.83131,1,295.10784)

= 0.10000(1,295.10784)

= 129.51078

G_2 = 0.10000g(0.95000,155.83131,1,295.10784)

= 0.10000[(8.36120)(1,295.10784) + (0.00167)(155.83131) - 0.00017]

= 0.10000(10,828.9157)

= 1,082.89158

F_3 = 0.10000f(0.95000,174.92225,1454.73483)

= 0.10000(1454.73483)

= 145.47348

G_3 = 0.10000g(0.95000,174.92225,1744.71790)

= 0.10000[(8.36120)(1744.71790) + (0.00167)(174.92225) - 0.00017]

= 0.10000(12163.6208)

= 1216.36208

F_4 = 0.10000f(1.00000,255.64035,2129.65111)

= 0.10000(2129.65111)

= 212.96511

G_4 = 0.10000g(1.00000,255.64035,2129.65111)

= 0.10000[(8.36120)(2129.65111) + (0.00167)(255.64035) - 0.00017]

= 0.10000(17806.8656)

= 1780.68656

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(1.0) = 110.16686 + \frac{1}{6}[91.32890 + (2)(129.51078) + (2)(145.47348) + 212.96511]$$

$$= 110.16686 + \frac{1}{6}(854.26253)$$

$$= 110.16686 + 142.37709$$

$$= 252.54395$$

$$k(1.0) = 913.28904 + \frac{1}{6}[763.36761 + (2)(1082.89158) + (2)(1216.36208) + 1180.68656]$$

$$= 913.28904 + \frac{1}{6}(7142.83149)$$

$$= 913.28904 + 1190.47192$$

$$= 2103.76096$$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.27755	1.67127	2.62430	4.81961	9.87653	21.52517	48.35783	110.16686	252.54395
$k(x_i)$	0.50000	1.15197	2.65378	6.11319	14.08195	32.43797	74.72106	172.12014	396.47886	913.28904	2103.76096

ตารางที่ 4-3 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 1

ขั้นตอนที่3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_0, IVPa_1$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_0}(0.2) = f(0.0) = 1.09004$ (4.20)

$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.5) = 252.54395$ (4.21)

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$

$k(0) = -0.00177 = a_2$ (4.22)

โดย a_2 คือ $a_2 = 0.5 - \left(\frac{0.5 - 0.0}{252.54395 - 1.09004}\right)(252.54395 - 0.2) = -0.00177$ (4.23)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นกลับไปกำหนดในขั้นตอนที่ 2 ใหม่ดังนี้

ขั้นตอนที่ 2

$$IVPa_2 : c' = k \tag{4.24}$$

$$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.00017 \tag{4.25}$$

$$ICa_2 : c(0) = 1 \tag{4.26}$$

$$: k(0) = -0.00177 \tag{4.27}$$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $$c(0) = 1$$

$$k(0) = -0.00177$$

นั่นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0, 1, -0.00177) \\ g(0, 1, -0.00177) \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.00177 \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	-0.00177										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 0$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.00000, 1.00000, -0.00177)$

$= 0.10000(-0.00177)$

$= -0.00018$

$G_1 = 0.10000g(0.00000, 1.00000, -0.00177)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00177) + (0.00167)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.01329)$

$= -0.00133$

$F_2 = 0.10000f(0.05000, 0.99991, -0.00243)$

$= 0.10000(-0.00243)$

$= -0.00024$

$G_2 = 0.10000g(0.05000, 0.99991, -0.00243)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00243) + (0.00167)(0.99991) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.01882)$

$= -0.00189$

$F_3 = 0.10000f(0.05000, 0.99988, -0.00271)$

$= 0.10000(-0.00271)$

$= -0.00027$

$G_3 = 0.10000g(0.05000, 0.99988, -0.00271)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00271) + (0.00167)(0.99988) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.02116)$

$= -0.00212$

$F_4 = 0.10000f(0.10000, 0.99973, -0.00389)$

$= 0.10000(-0.00389)$

$= -0.00039$

$G_4 = 0.10000g(0.10000, 0.99973, -0.00389)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00389) + (0.00167)(0.99973) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.03102)$

$= -0.00310$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.1) = 1.00000 + \frac{1}{6}[-0.00018 + (2)(-0.00024) + (2)(-0.00027) + (-0.00039)]$$

$$= 1.00000 + \frac{1}{6}(0.00159)$$

$$= 1.00000 + (0.00027)$$

$$= 0.99973$$

$$k(0.1) = -0.00177 + \frac{1}{6}[-0.00133 + (2)(-0.00189) + (2)(-0.00212) + (-0.00310)]$$

$$= -0.00177 + \frac{1}{6}(-0.01245)$$

$$= -0.00177 + (-0.00207)$$

$$= -0.00384$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	0.99973									
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384									

เมื่อ $i = 1$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.10000, 0.99973, -0.00384)$$

$$= 0.10000(-0.00384)$$

$$= -0.00038$$

$$G_1 = 0.10000g(0.10000, 0.99973, -0.00384)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(-0.00384) + (0.00167)(0.99973) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(-0.00306)$$

$$= -0.00306$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.15000, 0.99954, -0.00538)

= 0.10000(-0.00538)

= -0.00054

G_2 = 0.10000g(0.15000, 0.99954, -0.00538)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00538) + (0.00167)(0.99954) - 0.00017]

= 0.10000(-0.04348)

= -0.00434

F_3 = 0.10000f(0.15000, 0.99947, -0.00602)

= 0.10000(-0.00602)

= -0.00060

G_3 = 0.10000g(0.15000, 0.99947, -0.00602)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00602) + (0.00167)(0.99947) - 0.00017]

= 0.10000(-0.04883)

= -0.00488

F_4 = 0.10000f(0.20000, 0.99913, -0.00872)

= 0.10000(-0.00872)

= -0.00087

G_4 = 0.10000g(0.20000, 0.99913, -0.00872)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00872) + (0.00167)(0.99913) - 0.00017]

= 0.10000(-0.07141)

= -0.00714

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.2) = 0.99973 + \frac{1}{6}[-0.00038 + (2)(-0.00054) + (2)(-0.00060) + (-0.00087)]$$

$$= 0.99973 + \frac{1}{6}(-0.00353)$$

$$= 0.99973 + (-0.00059)$$

$$= 0.99914$$

$$k(0.2) = -0.00384 + \frac{1}{6}[-0.00306 + (2)(-0.00434) + (2)(-0.00488) + (-0.00714)]$$

$$= -0.00384 + \frac{1}{6}(-0.02868)$$

$$= -0.00384 + (-0.00478)$$

$$= -0.00862$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914								
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862								

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.20000, 0.99914, -0.00862)$$

$$= 0.10000(-0.00862)$$

$$= -0.00086$$

$$G_1 = 0.10000g(0.20000, 0.99914, -0.00862)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(-0.00862) + (0.00167)(0.99914) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(-0.07057)$$

$$= -0.00706$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.25000, 0.99871, -0.01215)

= 0.10000(-0.01215)

= -0.00121

G_2 = 0.10000g(0.25000, 0.99871, -0.01215)

= 0.10000[(8.36120)(-0.01215) + (0.00167)(0.99871) - 0.00017]

= 0.10000(-0.10009)

= -0.01001

F_3 = 0.10000f(0.25000, 0.99854, -0.01362)

= 0.10000(-0.01362)

= -0.00136

G_3 = 0.10000g(0.25000, 0.99854, -0.01362)

= 0.10000[(8.36120)(-0.01362) + (0.00167)(0.99854) - 0.00017]

= 0.10000(-0.11238)

= -0.01124

F_4 = 0.10000f(0.30000, 0.99778, -0.01986)

= 0.10000(-0.01986)

= -0.00199

G_4 = 0.10000g(0.30000, 0.99778, -0.01986)

= 0.10000[(8.36120)(-0.01986) + (0.00167)(0.99778) - 0.00017]

= 0.10000(-0.16456)

= -0.01646

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.3) = 0.99914 + \frac{1}{6}[-0.00086 + (2)(-0.00121) + (2)(-0.00136) + (-0.00199)]$$

$$= 0.99914 + \frac{1}{6}(-0.00799)$$

$$= 0.99914 + (-0.00133)$$

$$= 0.99781$$

$$k(0.3) = -0.00862 + \frac{1}{6}[-0.00706 + (2)(-0.01001) + (2)(-0.01124) + (-0.01646)]$$

$$= -0.00862 + \frac{1}{6}(-0.06602)$$

$$= -0.00862 + (-0.01100)$$

$$= -0.01962$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781							
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962							

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.30000, 0.99781, -0.01962)$$

$$= 0.10000(-0.01962)$$

$$= -0.00196$$

$$G_1 = 0.10000g(0.30000, 0.99781, -0.01962)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(-0.01962) + (0.00167)(0.99781) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(-0.16255)$$

$$= -0.01626$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.35000, 0.99683, -0.02775)

= 0.10000(-0.02775)

= -0.00277

G_2 = 0.10000g(0.35000, 0.99683, -0.02775)

= 0.10000[(8.36120)(-0.02775) + (0.00167)(0.99683) - 0.00017]

= 0.10000(-0.23053)

= -0.02305

F_3 = 0.10000f(0.35000, 0.99642, -0.03115)

= 0.10000(-0.03115)

= -0.00311

G_3 = 0.10000g(0.35000, 0.99642, -0.03115)

= 0.10000[(8.36120)(-0.03115) + (0.00167)(0.99642) - 0.00017]

= 0.10000(-0.25896)

= -0.02589

F_4 = 0.10000f(0.40000, 0.99470, -0.04551)

= 0.10000(-0.04551)

= -0.00455

G_4 = 0.10000g(0.40000, 0.99470, -0.04551)

= 0.10000[(8.36120)(-0.04551) + (0.00167)(0.99470) - 0.00017]

= 0.10000(-0.37903)

= -0.03790

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.4) = 0.99781 + \frac{1}{6}[-0.00196 + (2)(-0.00277) + (2)(-0.00311) + (-0.00455)]$$

$$= 0.99781 + \frac{1}{6}(-0.01827)$$

$$= 0.99781 + (-0.00305)$$

$$= 0.99476$$

$$k(0.4) = -0.01962 + \frac{1}{6}[-0.01626 + (2)(-0.02305) + (2)(-0.02589) + (-0.03790)]$$

$$= -0.01962 + \frac{1}{6}(-0.15204)$$

$$= -0.01962 + (-0.02534)$$

$$= -0.04496$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476						
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496						

เมื่อ i = 4 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.40000, 0.99476, -0.04496)$

$= 0.10000(-0.04496)$

$= -0.00450$

$G_1 = 0.10000g(0.40000, 0.99476, -0.04496)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.04496) + (0.00167)(0.99476) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.37443)$

$= -0.03744$

$F_2 = 0.10000f(0.45000, 0.99251, -0.06368)$

$= 0.10000(-0.06368)$

$= -0.00637$

$G_2 = 0.10000g(0.45000, 0.99251, -0.06368)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.06368) + (0.00167)(0.99251) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.53095)$

$= -0.05310$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.45000, 0.99158, -0.07151)$

$= 0.10000(-0.07151)$

$= -0.00715$

$G_3 = 0.10000g(0.45000, 0.99158, -0.07151)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.07151) + (0.00167)(0.99158) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.59642)$

$= -0.05964$

$F_4 = 0.10000f(0.50000, 0.98761, -0.10460)$

$= 0.10000(-0.10460)$

$= -0.01046$

$G_4 = 0.10000g(0.50000, 0.98761, -0.10460)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.10460) + (0.00167)(0.98761) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.87310)$

$= -0.08731$

$$C(0.5) = 0.99476 + \frac{1}{6}[-0.00450 + (2)(-0.00637) + (2)(-0.00715) + (-0.01046)]$$

$$= 0.99476 + \frac{1}{6}(-0.042)$$

$$= 0.99476 + (-0.007)$$

$$= 0.98776$$

$$k(0.5) = -0.04496 + \frac{1}{6}[-0.03744 + (2)(-0.05310) + (2)(-0.05964) + (-0.08731)]$$

$$= -0.04496 + \frac{1}{6}(-0.35023)$$

$$= -0.04496 + (-0.05837)$$

$$= -0.10333$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776					
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333					

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 5 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.50000, 0.98776, -0.10333)$

$= 0.10000(-0.10333)$

$= -0.01033$

$G_1 = 0.10000g(0.50000, 0.98776, -0.10333)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.10333) + (0.00167)(0.98776) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.86248)$

$= -0.08625$

$F_2 = 0.10000f(0.55000, 0.98260, -0.14646)$

$= 0.10000(-0.14646)$

$= -0.01465$

$G_2 = 0.10000g(0.55000, 0.98260, -0.14646)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.14646) + (0.00167)(0.98260) - 0.00017]$

$= 0.10000(-1.22311)$

$= -0.12231$

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 0.98044, -0.16449)$

$= 0.10000(-0.16449)$

$= -0.01645$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 0.98044, -0.16449)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.16449) + (0.00167)(0.98044) - 0.00017]$

$= 0.10000(-1.37387)$

$= -0.13739$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 0.97131, -0.24072)$

$= 0.10000(-0.24072)$

$= -0.02407$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 0.97131, -0.24072)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.24072) + (0.00167)(0.97131) - 0.00017]$

$= 0.10000(-2.01126)$

$= -0.20113$

$$C(0.6) = 0.98776 + \frac{1}{6}[-0.01033 + (2)(-0.01465) + (2)(-0.01645) + (-0.02407)]$$

$$= 0.98776 + \frac{1}{6}(-0.0966)$$

$$= 0.98776 + (-0.0161)$$

$$= 0.97166$$

$$k(0.6) = -0.10333 + \frac{1}{6}[-0.08625 + (2)(-0.12231) + (2)(-0.13739) + (-0.20113)]$$

$$= -0.10333 + \frac{1}{6}(-0.80678)$$

$$= -0.10333 + (-0.13446)$$

$$= -0.23780$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166				
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333	-0.23780				

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 6$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.60000, 0.97166, -0.23780)$

$= 0.10000(-0.23780)$

$= -0.02378$

$G_1 = 0.10000g(0.60000, 0.97166, -0.23780)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.23780) + (0.00167)(0.97166) - 0.00017]$

$= 0.10000(-1.98684)$

$= -0.19868$

$F_2 = 0.10000f(0.65000, 0.95977, -0.33714)$

$= 0.10000(-0.33714)$

$= -0.03371$

$G_2 = 0.10000g(0.65000, 0.95977, -0.33714)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.33714) + (0.00167)(0.95977) - 0.00017]$

$= 0.10000(-2.81747)$

$= -0.28175$

$F_3 = 0.10000f(0.65000, 0.95481, -0.37867)$

$= 0.10000(-0.37867)$

$= -0.03787$

$G_3 = 0.10000g(0.65000, 0.95481, -0.37867)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.37867) + (0.00167)(0.95481) - 0.00017]$

$= 0.10000(-3.16471)$

$= -0.31647$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.70000, 0.93380, -0.55427)$

$= 0.10000(-0.55427)$

$= -0.05543$

$G_4 = 0.10000g(0.70000, 0.93380 - 0.55427)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.55427) + (0.00167)(0.93380) - 0.00017]$

$= 0.10000(-4.63297)$

$= -0.46330$

$$C(0.7) = 0.97166 + \frac{1}{6}[-0.02378 + (2)(-0.03371) + (2)(-0.03787) + (-0.05543)]$$

$$= 0.97166 + \frac{1}{6}(-0.22237)$$

$$= 0.97166 + (-0.03706)$$

$$= 0.93460$$

$$k(0.7) = -0.23780 + \frac{1}{6}[-0.19868 + (2)(-0.28175) + (2)(-0.31647) + (-0.46330)]$$

$$= -0.23780 + \frac{1}{6}(-1.85842)$$

$$= -0.23780 + (-0.30973)$$

$$= -0.54753$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460			
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333	-0.23780	-0.54753			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 7 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.70000, 0.93460, -0.54753)$

$= 0.10000(-0.54753)$

$= -0.05475$

$G_1 = 0.10000g(0.70000, 0.93460, -0.54753)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.54753) + (0.00167)(0.93460) - 0.00017]$

$= 0.10000(-4.57662)$

$= -0.45766$

$F_2 = 0.10000f(0.75000, 0.90723, -0.77637)$

$= 0.10000(-0.77637)$

$= -0.07764$

$G_2 = 0.10000g(0.75000, 0.90723, -0.77637)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.77637) + (0.00167)(0.90723) - 0.00017]$

$= 0.10000(-6.49004)$

$= -0.64900$

$F_3 = 0.10000f(0.75000, 0.89578, -0.87203)$

$= 0.10000(-0.87203)$

$= -0.08720$

$G_3 = 0.10000g(0.75000, 0.89578, -0.87203)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.87203) + (0.00167)(0.89578) - 0.00017]$

$= 0.10000(-7.28989)$

$= -0.72899$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.80000, 0.84740, -1.27653)$

$= 0.10000(-1.27653)$

$= -0.12765$

$G_4 = 0.10000g(0.80000, 0.84740, -1.27653)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.27653) + (0.00167)(0.84740) - 0.00017]$

$= 0.10000(-10.67208)$

$= -1.06720$

$$C(0.8) = 0.93460 + \frac{1}{6}[-0.05475 + (2)(-0.07764) + (2)(-0.08720) + (-0.12765)]$$

$$= 0.93460 + \frac{1}{6}(-0.51203)$$

$$= 0.93460 + (-0.08535)$$

$$= 0.84925$$

$$k(0.8) = -0.54753 + \frac{1}{6}[-0.45766 + (2)(-0.64900) + (2)(-0.72899) + (-1.06720)]$$

$$= -0.54753 + \frac{1}{6}(-4.28084)$$

$$= -0.54753 + (-0.71347)$$

$$= -1.26101$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84925		
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333	-0.23780	-0.54753	-1.23101		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 8$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 0.84925, -1.26101)$

$= 0.10000(-1.26101)$

$= -0.12610$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 0.84925, -1.26101)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.26101) + (0.00167)(0.84925) - 0.00017]$

$= 0.10000(-10.54230)$

$= -1.05423$

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 0.78620, -1.78812)$

$= 0.10000(-1.78812)$

$= -0.17881$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 0.78620, -1.78812)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.78812) + (0.00167)(0.78620) - 0.00017]$

$= 0.10000(-14.94968)$

$= -1.49497$

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 0.75985, -2.00850)$

$= 0.10000(-2.00850)$

$= -0.20085$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 0.75985, -2.00850)$

$= 0.10000[(8.36120)(-2.00850) + (0.00167)(0.75985) - 0.00017]$

$= 0.10000(-16.79237)$

$= -1.67923$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(0.90000, 0.64841, -2.94024)$

$= 0.10000(-2.94024)$

$= -0.29402$

$G_4 = 0.10000g(0.90000, 0.64841, -2.94024)$

$= 0.10000[(8.36120)(-2.94024) + (0.00167)(0.64841) - 0.00017]$

$= 0.10000(-24.58302)$

$= -2.45830$

$$C(0.9) = 0.84925 + \frac{1}{6}[-0.12610 + (2)(-0.17881) + (2)(-0.20085) + (-0.29402)]$$

$$= 0.84925 + \frac{1}{6}(-1.17944)$$

$$= 0.84925 + (-0.19657)$$

$$= 0.65268$$

$$k(0.9) = -1.26101 + \frac{1}{6}[-1.05423 + (2)(-1.49497) + (2)(-1.67923) + (-2.45830)]$$

$$= -1.26101 + \frac{1}{6}(-9.86093)$$

$$= -1.26101 + (-1.64349)$$

$$= -2.90450$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84925	0.65268	
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333	-0.23780	-0.54753	-1.23101	-2.90450	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 9 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.90000, 0.65268, -2.90450)

= 0.10000(-2.90450)

= -0.29045

G_1 = 0.10000g(0.90000, 0.65268, -2.90450)

= 0.10000[(8.36120)(-2.90450) + (0.00167)(0.65268) - 0.00017]

= 0.10000(-24.28418)

= -2.42842

F_2 = 0.10000f(0.95000, 0.50746, -4.11871)

= 0.10000(-4.11871)

= -0.41187

G_2 = 0.10000g(0.95000, 0.50746, -4.11871)

= 0.10000[(8.36120)(-4.11871) + (0.00167)(0.50746) - 0.00017]

= 0.10000(-34.43668)

= -3.44367

F_3 = 0.10000f(0.95000, 0.44674, -4.62633)

= 0.10000(-4.62633)

= -0.46263

G_3 = 0.10000g(0.95000, 0.44674, -4.62633)

= 0.10000[(8.36120)(-4.62633) + (0.00167)(0.44674) - 0.00017]

= 0.10000(-3.86811)

= -3.86811

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.10000f(1.00000, 0.19005, -6.77261)$

$= 0.10000(-6.77261)$

$= -0.67726$

$G_4 = 0.10000g(1.00000, 0.19005, -6.77261)$

$= 0.10000[(8.36120)(-6.77261) + (0.00167)(0.19005) - 0.00017]$

$= 0.10000(-56.62699)$

$= -5.66270$

$$C(1.0) = 0.65268 + \frac{1}{6}[-0.29045 + (2)(-0.41187) + (2)(-0.46263) + (-0.67726)]$$

$$= 0.65268 + \frac{1}{6}(-2.71671)$$

$$= 0.65268 + (-0.45279)$$

$$= 0.19989$$

$$k(1.0) = -2.90450 + \frac{1}{6}[-2.42842 + (2)(-3.44367) + (2)(-3.86811) + (-5.66270)]$$

$$= -2.90450 + \frac{1}{6}(-22.71468)$$

$$= -2.90450 + (-3.78578)$$

$$= -6.69028$$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84925	0.65268	0.19989
$k(x_i)$	-0.00177	-0.00384	-0.00862	-0.01962	-0.04496	-0.10333	-0.23780	-0.54753	-1.23101	-2.90450	-6.69028

ตารางที่ 4-4 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_2$

จะได้ว่า $\tilde{x}_{a_2}(1.00000) = f(-0.00177) = 0.19989$ (4.30)

ค่าประมาณผลเฉลยของ $IVPa_3$ ณ x = 1.00000 มีค่าใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบขวา ดังนั้น $|f(a_2) - 0.2| < 0.003$ ซึ่งอยู่ในนัยสำคัญที่ต้องการ ดังนั้นผลเฉลยปัญหาค่าขอบขวาคือ

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84925	0.65268	0.19989

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 แบบจำลอง 2 : กำหนดให้ลำน้ำมีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยบริเวณที่ต้องการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียคือระยะทาง 0-1 กิโลเมตร มีการปล่อยสารแอมโมเนียที่ตำแหน่ง x = 0 กิโลเมตร มีความเข้มข้นของแอมโมเนีย ณ จุดปล่อย เป็น 1 มิลลิกรัมต่อลิตร และตรวจพบความเข้มข้นของแอมโมเนียเป็น 0.2 มิลลิกรัมต่อลิตรที่ตำแหน่ง x = 1 กิโลเมตร ความเร็วของการไหลของกระแสน้ำในทิศทางแกน x คือ 9 นติเมตรต่อวินาที โดยสารแอมโมเนียที่ถูกปล่อยลงสู่แหล่งน้ำนี้มีสมบัติทางเคมีคือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของแอมโมเนียชนิดนี้ในน้ำคือ 5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียชนิดนี้เมื่อละลายในลำน้ำบริเวณนี้เป็น 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ ลำน้ำมีอัตราดูดซึมแอมโมเนียเป็น 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

จากพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 4-5 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 2

พารามิเตอร์	ค่าที่กำหนด
L	1 กิโลเมตร
u	เมตรต่อวินาที 0.09
D	5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน
R	1×10^{-7} วัน$^{-1}$
Q	1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน(เพิ่มขึ้น)

แบบจำลองนี้สามารถกำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ในรูปสมการการพา-การแพร่ในสภาวะเสถียรในหนึ่งมิติ ดังนี้

$$-0.00598c'' + 0.05c' + 0.0000001c - 0.000001 = 0 \quad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดย

$$c(0) = 1.00 \quad (4.2)$$

$$c(1) = 0.20 \quad (4.3)$$

การประมาณผลเฉลยของแบบจำลอง 2 โดยวิธียิงเป้า

กำหนดให้ $k = c'$ (4.4)

$$k' = c'' \quad (4.5)$$

กำหนดปัญหาค่าขอบเป็น

$$c' = k$$

$$k' = 8.3612k + 0.00002c - 0.00017 \quad (4.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบ

$$c(0) = 1$$

และ $$c(1) = 0.2 = X_f$$

ในการคำนวณโดยวิธียิงเป้าจะต้องกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหาและกำหนดค่าประมาณที่ยอมรับได้มีนัยสำคัญระดับ 0.003 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ $IVPa_0 : c' = k$ (4.7)

$$: k' = 8.3612k + 0.00002 - 0.00017 \quad (4.8)$$

$$ICa_0 : c(0) = 1 \quad (4.9)$$

$$: k(0) = 0.3 = a_0 \quad (4.10)$$

กำหนดให้ $IVPa_1 : c' = k$ (4.11)

$$: k' = 8.3612k + 0.00002 - 0.00017 \quad (4.12)$$

$$ICa_1 : c(0) = 1 \quad (4.13)$$

$$: k(0) = 0.6 = a_1 \quad (4.14)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ โดยเลือกใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ4

$$IVPa_0 : c' = k$$

$$: k' = 8.3612k + 0.00002 - 0.00017$$

$$ICa_0 : c(0) = 1$$

$$: k(0) = 0.3$$

เลือก $$h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1 \quad (4.15)$$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$$k(0) = k_0$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.3) \\ g(0,1,0.3) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.3 \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	0.30000										

เมื่อ i = 0 จะได้

$F_1 = 0.1f(0.00000, 1.00000, 0.30000)$

$= 0.10000(0.30000)$

$= 0.03000$

$G_1 = 0.1g(0.00000, 1.00000, 0.30000)$

$= 0.1[(8.36120)(0.30000) + (0.00002)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.10000(2.50821)$

$= 0.25082$

$F_2 = 0.1f(0.05000, 1.01500, 0.42541)$

$= 0.10000(0.42541)$

$= 0.04254$

$G_2 = 0.1g(0.05000, 1.01500, 0.42541)$

$= 0.1[(8.36120)(0.42541) + (0.00002)(1.01500) - 0.00017]$

$= 0.10000(3.55679)$

$= 0.35567$

$F_3 = 0.1f(0.05000, 1.02127, 0.47784)$

$= 0.1(0.47784)$

$= 0.04778$

$G_3 = 0.1g(0.05000, 1.02127, 0.47784)$

$= 0.1[(8.36120)(0.47784) + (0.00002)(1.02127) - 0.00017]$

$= 0.10000(3.99517)$

$= 0.39952$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_4 = 0.1f(0.10000, 1.04778, 0.69952)$

$= 0.1(0.69952)$

$= 0.06995$

$G_4 = 0.1g(0.10000, 1.04778, 0.69952)$

$= 0.1[(8.36120)(0.69952) + (0.00002)(1.04778) - 0.00017]$

$= 0.10000(5.84868)$

$= 0.58486$

$$C(0.1) = 1 + \frac{1}{6}[0.03000 + (2)(0.04254) + (2)(0.04778) + 0.06995]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(0.28059)$$

$= 1 + 0.04677$

$= 1.04677$

$$k(0.1) = 0.30000 + \frac{1}{6}[0.25082 + (2)(0.35568) + (2)(0.39952) + 0.58486]$$

$$= 0.30000 + \frac{1}{6}(2.34608)$$

$= 0.30000 + 0.39101$

$= 0.69101$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	1.04677									
$k(x_i)$	0.30000	0.69101									

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 1 จะได้

F_1 = 0.1f(0.10000,1.04677,0.69101)

= 0.10000(0.69101)

= 0.06910

G_1 = 0.1g(0.10000,1.04677,0.69101)

= 0.1[(8.36120)(0.69101) + (0.00002)(1.04677) - 0.00017]

= 0.10000(5.77752)

= 0.57775

F_2 = 0.1f(0.15000,1.08132,0.97989)

= 0.10000(0.97989)

= 0.09799

G_2 = 0.1g(0.15000,1.08132,0.97989)

= 0.1[(8.36120)(0.97989) + (0.00002)(1.08132) - 0.00017]

= 0.10000(8.19291)

= 0.81929

F_3 = 0.1f(0.15000,1.09576,1.10066)

= 0.1(1.10066)

= 0.11007

G_3 = 0.1g(0.15000,1.09576,1.10066)

= 0.1[(8.36120)(1.10066) + (0.00002)(1.09576) - 0.00017]

= 0.10000(9.20269)

= 0.92027

F_4 = 0.1f(0.20000,1.15683,1.61128)

= 0.1(1.61128)

= 0.16113

G_4 = 0.1g(0.20000,1.15683,1.61128)

= 0.1[(8.36120)(1.61128) + (0.00002)(1.15683) - 0.00017]

= 0.10000(13.47209)

= 1.34721

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.2) = 1.04677 + \frac{1}{6}[0.06910 + (2)(0.09799) + (2)(0.11007) + 0.16113]$$

$$= 1.04677 + \frac{1}{6}(0.64635)$$

$$= 1.04677 + 0.10772$$

$$= 1.15449$$

$$k(0.2) = 0.69101 + \frac{1}{6}[0.57775 + (2)(0.81929) + (2)(0.92027) + 1.34721]$$

$$= 0.69101 + \frac{1}{6}(5.40408)$$

$$= 0.69101 + 0.90068$$

$$= 1.59169$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449								
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169								

เมื่อ $i = 2$ จะได้

$$F_1 = 0.1f(0.20000, 1.15449, 1.59169)$$

$$= 0.10000(1.59169)$$

$$= 0.15917$$

$$G_1 = 0.1g(0.20000, 1.15449, 1.59169)$$

$$= 0.1[(8.36120)(1.59169) + (0.00002)(1.15449) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(13.30829)$$

$$= 1.33083$$

$$F_2 = 0.1f(0.25000, 1.23407, 2.25711)$$

$$= 0.10000(2.25711)$$

$$= 0.22571$$

$$G_2 = 0.1g(0.25000, 1.23407, 2.25711)$$

$$= 0.1[(8.36120)(2.25711) + (0.00002)(1.23407) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(18.87200)$$

$$= 1.88720$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.1f(0.25000, 1.26735, 2.53529)$

$= 0.1(2.53529)$

$= 0.25353$

$G_3 = 0.1g(0.25000, 1.26735, 2.53529)$

$= 0.1[(8.36120)(2.53529) + (0.00002)(1.26735) - 0.00017]$

$= 0.10000(21.19792)$

$= 2.11979$

$F_4 = 0.10000f(0.30000, 1.40802, 3.71149)$

$= 0.10000(3.71149)$

$= 0.37115$

$G_4 = 0.10000g(0.30000, 1.40802, 3.71149)$

$= 0.10000[(8.36120)(3.71149) + (0.00002)(1.40802) - 0.00017]$

$= 0.10000(31.03237)$

$= 3.10323$

$$C(0.3) = 1.15449 + \frac{1}{6}[0.15917 + (2)(0.22571) + (2)(0.25353) + 0.37115]$$

$$= 1.15449 + \frac{1}{6}(1.48880)$$

$$= 1.15449 + 0.24813$$

$$= 1.40262$$

$$k(0.3) = 1.59169 + \frac{1}{6}[1.33083 + (2)(1.88720) + (2)(2.11979) + 3.10323]$$

$$= 1.59169 + \frac{1}{6}(12.44804)$$

$$= 1.59169 + 2.07467$$

$$= 3.66636$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262							
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636							

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.30000, 1.40262, 3.66637)$

$= 0.10000(3.66637)$

$= 0.36664$

$G_1 = 0.10000g(0.30000, 1.40262, 3.66637)$

$= 0.10000[(8.36120)(3.66637) + (0.00002)(1.40262) - 0.00017]$

$= 0.10000(30.65511)$

$= 3.06551$

$F_2 = 0.1f(0.35000, 1.58594, 5.19912)$

$= 0.10000(5.19912)$

$= 0.51991$

$G_2 = 0.1g(0.35000, 1.58594, 5.19912)$

$= 0.1[(8.36120)(5.19912) + (0.00002)(1.58594) - 0.00017]$

$= 0.10000(43.47074)$

$= 4.34708$

$F_3 = 0.1f(0.35000, 1.66258, 5.83991)$

$= 0.1(5.83991)$

$= 0.58399$

$G_3 = 0.1g(0.35000, 1.66258, 5.83991)$

$= 0.1[(8.36120)(5.83991) + (0.00002)(1.66258) - 0.00017]$

$= 0.10000(48.82852)$

$= 4.88285$

$F_4 = 0.10000f(0.40000, 1.98661, 8.54922)$

$= 0.10000(8.54922)$

$= 0.85492$

$G_4 = 0.10000g(0.40000, 1.98661, 8.54922)$

$= 0.10000[(8.36120)(8.54922) + (0.00002)(1.98661) - 0.00017]$

$= 0.10000(71.48161)$

$= 7.14816$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.4) = 1.40262 + \frac{1}{6}[0.36664 + (2)(0.51991) + (2)(0.58399) + 0.85492]$$

$$= 1.40262 + \frac{1}{6}(3.42936)$$

$$= 1.40262 + 0.57156$$

$$= 1.97418$$

$$k(0.4) = 3.66637 + \frac{1}{6}[3.06551 + (2)(4.34708) + (2)(4.88285) + 7.14816]$$

$$= 3.66637 + \frac{1}{6}(28.67353)$$

$$= 3.66637 + 4.77892$$

$$= 8.44529$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418						
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529						

เมื่อ i = 4 จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.40000, 1.97418, 8.44529)$$

$$= 0.10000(8.44529)$$

$$= 0.84453$$

$$G_1 = 0.10000g(0.40000, 1.97418, 8.44529)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(8.44529) + (0.00002)(1.97418) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(70.61263)$$

$$= 7.06126$$

$$F_2 = 0.10000f(0.45000, 2.39645, 11.97592)$$

$$= 0.10000(11.97592)$$

$$= 1.19759$$

$$G_2 = 0.10000g(0.45000, 2.39645, 11.97592)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(11.97592) + (0.00002)(2.39645) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(100.13294)$$

$$= 10.01329$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.1f(0.45000, 2.57298, 13.45194)$

$= 0.1(13.45194)$

$= 1.34519$

$G_3 = 0.1g(0.45000, 2.57298, 13.45194)$

$= 0.1[(8.36120)(13.45194) + (0.00002)(2.57298) - 0.00017]$

$= 0.10000(112.47424)$

$= 11.24742$

$F_4 = 0.10000f(0.50000, 3.31938, 19.69271)$

$= 0.10000(19.69271)$

$= 1.96927$

$G_4 = 0.10000g(0.50000, 3.31938, 19.69271)$

$= 0.10000[(8.36120)(19.69271) + (0.00002)(3.31938) - 0.00017]$

$= 0.10000(164.65458)$

$= 16.46546$

$$C(0.5) = 2.94842 + \frac{1}{6}[1.68911 + (2)(2.39525) + (2)(2.69047) + 3.93866]$$

$$= 2.94842 + \frac{1}{6}(15.79921)$$

$= 2.94842 + 2.63320$

$= 5.58162$

$$k(0.5) = 16.89106 + \frac{1}{6}[14.12295 + (2)(20.02719) + (2)(22.49551) + 32.93190]$$

$$= 16.89106 + \frac{1}{6}(132.10025)$$

$= 16.89106 + 22.01671$

$= 38.90777$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075					
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331					

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 5 จะได้

$F_1 = 0.1f(0.50000, 3.29075, 19.45331)$

$= 0.10000(19.45331)$

$= 1.94533$

$G_1 = 0.1g(0.50000, 3.29075, 19.45331)$

$= 0.1[(8.36120)(19.45331) + (0.00002)(3.29075) - 0.00017]$

$= 0.10000(162.65291)$

$= 16.26529$

$F_2 = 0.1f(0.55000, 4.26341, 27.58596)$

$= 0.10000(27.58596)$

$= 2.75860$

$G_2 = 0.1g(0.55000, 4.26341, 27.58596)$

$= 0.1[(8.36120)(27.58596) + (0.00002)(4.26341) - 0.00017]$

$= 0.10000(230.65164)$

$= 23.06517$

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 4.67004, 30.98590)$

$= 0.10000(30.98590)$

$= 3.09859$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 4.67004, 30.98590)$

$= 0.10000[(8.36120)(30.98590) + (0.00002)(4.67004) - 0.00017]$

$= 0.10000(259.07923)$

$= 25.90792$

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 6.38934, 45.36123)$

$= 0.10000(45.36123)$

$= 4.53612$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 6.38934, 45.36123)$

$= 0.10000[(8.36120)(45.36123) + (0.00002)(6.38934) - 0.00017]$

$= 0.10000(379.27427)$

$= 37.92943$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.6) = 3.29075 + \frac{1}{6}[1.94533 + (2)(2.75860) + (2)(3.09859) + 4.53612]$$

$$= 3.29075 + \frac{1}{6}(18.19583)$$

$$= 3.29075 + 3.03263$$

$$= 6.32338$$

$$k(0.6) = 19.45331 + \frac{1}{6}[16.26529 + (2)(23.06517) + (2)(25.90792) + 37.92743]$$

$$= 19.45331 + \frac{1}{6}(152.13890)$$

$$= 19.45331 + 25.35649$$

$$= 44.80980$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075	6.32338				
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331	44.80980				

เมื่อ i = 6 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.60000, 6.32338, 44.80980)$

$= 0.10000(44.80980)$

$= 4.48098$

$G_1 = 0.10000g(0.60000, 6.32338, 44.80980)$

$= 0.10000[(8.3612)(44.80980) + (0.00002)(6.32338) - 0.00017]$

$= 0.10000(374.66366)$

$= 37.46636$

$F_2 = 0.10000f(0.65000, 8.56387, 63.54298)$

$= 0.10000(63.54298)$

$= 6.35430$

$G_2 = 0.10000g(0.65000, 8.56387, 63.54298)$

$= 0.10000[(8.36120)(63.54298) + (0.00002)(8.56387) - 0.00017]$

$= 0.10000(531.29557)$

$= 53.12955$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.65000, 9.50053, 71.37457)$

$= 0.1000(71.37457)$

$= 7.13746$

$G_3 = 0.10000g(0.65000, 9.50053, 71.37457)$

$= 0.10000[(8.36120)(71.37457) + (0.00002)(9.50053) - 0.00017]$

$= 0.10000(596.77707)$

$= 59.67771$

$F_4 = 0.10000f(0.70000, 13.46084, 104.48751)$

$= 0.10000(104.48751)$

$= 10.44875$

$G_4 = 0.10000g(0.70000, 13.46084, 104.48751)$

$= 0.10000[(8.36120)(104.48751) + (0.00002)(13.46084) - 0.00017]$

$= 0.10000(873.64107)$

$= 87.36410$

$$C(0.7) = 6.32338 + \frac{1}{6}[4.48098 + (2)(6.35430) + (2)(7.13746) + 10.44875]$$

$$= 6.32338 + \frac{1}{6}(41.91325)$$

$= 6.32338 + 6.98554$

$= 13.30892$

$$k(0.7) = 44.80980 + \frac{1}{6}[37.46636 + (2)(53.12955) + (2)(59.67771) + 87.36410]$$

$$= 44.80980 + \frac{1}{6}(350.44498)$$

$= 44.80980 + 58.40750$

$= 103.21730$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075	6.32338	13.30892			
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331	44.80980	103.21730			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 7 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.70000,13.30892,103.21730)

= 0.10000(103.21730)

= 10.32173

G_1 = 0.10000g(0.70000,13.30892,103.21730)

= 0.10000[(8.3612)(103.21730) + (0.00002)(13.30892) - 0.00017]

= 0.10000(863.02058)

= 86.30205

F_2 = 0.10000f(0.75000,18.46979,146.36832)

= 0.10000(146.36832)

= 14.63683

G_2 = 0.10000g(0.75000,18.46979,146.36832)

= 0.10000[(8.36120)(146.36832) + (0.00002)(18.46979) - 0.00017]

= 0.10000(1223.81500)

= 122.38150

F_3 = 0.10000f(0.75000,20.62734,164.40805)

= 0.10000(164.40805)

= 16.44080

G_3 = 0.10000g(0.75000,20.62734,164.40805)

= 0.10000[(8.36120)(164.40805) + (0.00002)(20.62734) - 0.00017]

= 0.10000(1374.64883)

= 137.46488

F_4 = 0.10000f(0.80000,29.74973,240.68217)

= 0.10000(240.68217)

= 24.06822

G_4 = 0.10000g(0.80000,29.74973,240.68217)

= 0.10000[(8.36120)(240.68217) + (0.00002)(29.74973) - 0.00017]

= 0.10000(2012.39218)

= 201.23922

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.8) = 13.30892 + \frac{1}{6}[10.32173 + (2)(14.63683) + (2)(16.44080) + 24.06822]$$

$$= 13.30892 + \frac{1}{6}(96.53621)$$

$$= 13.30892 + 16.08937$$

$$= 29.39979$$

$$k(0.8) = 103.21730 + \frac{1}{6}[86.30205 + (2)(122.38150) + (2)(137.46488) + 201.23922]$$

$$= 103.21730 + \frac{1}{6}(807.23403)$$

$$= 103.21730 + 134.53900$$

$$= 237.75630$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075	6.32338	13.30892	29.39979		
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331	44.80980	103.21730	237.75630		

เมื่อ $i = 8$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 29.39979, 237.75630)$

$= 0.10000(237.75630)$

$= 23.77563$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 29.39979, 237.75630)$

$= 0.10000[(8.3612)(237.75630) + (0.00002)(29.39979) - 0.00017]$

$= 0.10000(1987.92981)$

$= 198.79284$

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 41.28761, 337.15272)$

$= 0.10000(337.15272)$

$= 33.71527$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 41.28761, 337.15272)$

$= 0.10000[(8.36120)(337.15272) + (0.00002)(41.28761) - 0.00017]$

$= 0.10000(2819.00115)$

$= 281.90020$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 46.25743, 378.70640)$

$= 0.10000(378.70640)$

$= 37.87064$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 46.25743, 378.70640)$

$= 0.10000[(8.36120)(378.70640) + (0.00002)(46.25743) - 0.00017]$

$= 0.10000(3166.44071)$

$= 316.64407$

$F_4 = 0.10000f(0.90000, 67.27043, 554.40037)$

$= 0.10000(554.40037)$

$= 55.44004$

$G_4 = 0.10000g(0.90000, 67.27043, 554.40037)$

$= 0.10000[(8.36120)(554.40037) + (0.00002)(67.27043) - 0.00017]$

$= 0.10000(4635.45355)$

$= 463.54536$

$$C(0.9) = 29.39979 + \frac{1}{6}[23.77563 + (2)(33.71527) + (2)(37.87064) + 55.44004]$$

$$= 29.39979 + \frac{1}{6}(222.38749)$$

$= 29.39979 + 37.06459$

$= 66.46438$

$$k(0.9) = 237.75630 + \frac{1}{6}[198.79284 + (2)(281.90020) + (2)(316.64407) + 463.54536]$$

$$= 237.75630 + \frac{1}{6}(1859.42674)$$

$= 237.75630 + 309.90446$

$= 547.66076$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075	6.32338	13.30892	29.39979	66.46438	
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331	44.80980	103.21730	237.75630	547.66076	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 9 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.90000,66.46438,547.66076)

= 0.10000(547.66076)

= 54.76608

G_1 = 0.10000g(0.90000,66.46438,547.66076)

= 0.10000[(8.3612)(547.66076) + (0.00002)(66.46438) - 0.00017]

= 0.10000(4579.10231)

= 457.91023

F_2 = 0.10000f(0.95000,93.84741,776.61587)

= 0.10000(776.61587)

= 77.6659

G_2 = 0.10000g(0.95000,93.84741,776.61587)

= 0.10000[(8.36120)(776.61587) + (0.00002)(93.84741) - 0.00017]

= 0.10000(6493.44232)

= 649.34423

F_3 = 0.10000f(0.95000,105.29517,872.33288)

= 0.10000(872.33288)

= 87.23329

G_3 = 0.10000g(0.95000,105.29517,872.33288)

= 0.10000[(8.36120)(872.33288) + (0.00002)(105.29517) - 0.00017]

= 0.10000(7293.75161)

= 729.37516

F_4 = 0.10000f(1.00000,153.69766,1277.03592)

= 0.10000(1277.03592)

= 127.70359

G_4 = 0.10000g(1.00000,153.69766,1277.03592)

= 0.10000[(8.36120)(1277.03592) + (0.00002)(153.69766) - 0.00017]

= 0.10000(10677.55564)

= 1067.75556

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(1.0) = 66.46438 + \frac{1}{6}[54.76608 + (2)(77.66159) + (2)(87.23329) + 127.70359]$$

$$= 66.46438 + \frac{1}{6}(512.25943)$$

$$= 66.46438 + 85.37657$$

$$= 151.84095$$

$$k(1.0) = 547.66076 + \frac{1}{6}[457.91023 + (2)(649.34424) + (2)(729.37516) + 1067.75556]$$

$$= 547.66076 + \frac{1}{6}(4283.10459)$$

$$= 547.66076 + 713.85077$$

$$= 1261.51153$$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.04677	1.15449	1.40262	1.97418	3.29075	6.32338	13.30892	29.39979	66.46438	151.84095
$k(x_i)$	0.30000	0.69101	1.59169	3.66636	8.44529	19.45331	44.80980	103.21730	237.75630	547.66076	1261.51153

ตารางที่ 4-6 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลองที่ 2

เนื่องจากค่า $c(1.0) \approx 151.84095$ และเงื่อนไขขอบขวาของปัญหาค่าขอบคือ $c(1) = 0.2$ จะเห็นว่าผลการคำนวณยังไม่แม่นยำที่อยู่ในระดับนัยสำคัญที่พอใจ $|c - \tilde{c}| \leq 0.003$ ดังนั้นจึงต้องกระทำซ้ำดังนี้

$$IVPa_1 : c' = k$$

$$: k' = 8.3612k + 0.00002 - 0.00017$$

$$ICa_1 : c(0) = 1$$

$$: k(0) = 0.6$$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$k(0) = k_0$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.6) \\ g(0,1,0.6) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	0.60000										

เมื่อ i = 0 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.00000, 1.00000, 0.60000)$

$= 0.10000(0.60000)$

$= 0.06000$

$G_1 = 0.10000g(0.00000, 1.00000, 0.60000)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.60000) + (0.00002)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.10000(5.01657)$

$= 0.50166$

$F_2 = 0.10000f(0.05000, 1.03000, 0.85083)$

$= 0.10000(0.85083)$

$= 0.08508$

$G_2 = 0.10000g(0.05000, 1.03000, 0.85083)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.85083) + (0.00002)(1.03000) - 0.00017]$

$= 0.10000(7.11381)$

$= 0.71138$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.05000, 1.04254, 0.95569)$

$= 0.10000(0.95569)$

$= 0.09557$

$G_3 = 0.10000g(0.05000, 1.04254, 0.95569)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.95569) + (0.00002)(1.04254) - 0.00017]$

$= 0.10000(7.99057)$

$= 0.79906$

$F_4 = 0.10000f(0.10000, 1.09557, 1.39906)$

$= 0.10000(1.39906)$

$= 0.13991$

$G_4 = 0.10000g(0.10000, 1.09557, 1.39906)$

$= 0.10000[(8.36120)(1.39906) + (0.00002)(1.09557) - 0.00017]$

$= 0.10000(11.69767)$

$= 1.16976$

$$C(0.1) = 1.00000 + \frac{1}{6}[0.06000 + (2)(0.08508) + (2)(0.09557) + 0.13991]$$

$$= 1.00000 + \frac{1}{6}(0.56121)$$

$$= 1.00000 + 0.09353$$

$$= 1.09353$$

$$k(0.1) = 0.60000 + \frac{1}{6}[0.50166 + (2)(0.71138) + (2)(0.79906) + 1.16976]$$

$$= 0.60000 + \frac{1}{6}(4.69230)$$

$$= 0.60000 + 0.78205$$

$$= 1.38205$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	1.09353									
$k(x_i)$	0.60000	1.38205									

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 1 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.10000,1.09353,1.38205)

= 0.10000(1.38205)

= 0.13820

G_1 = 0.10000g(0.10000,1.09353,1.38205)

= 0.10000[(8.36120)(1.38205) + (0.00002)(1.09353) - 0.00017]

= 0.10000(11.55545)

= 1.15554

F_2 = 0.10000f(0.15000,1.16264,1.95982)

= 0.10000(1.95982)

= 0.19598

G_2 = 0.10000g(0.15000,1.16264,1.95982)

= 0.10000[(8.36120)(1.95982) + (0.00002)(1.16264) - 0.00017]

= 0.10000(16.38630)

= 1.63863

F_3 = 0.10000f(0.15000,1.19153,2.20136)

= 0.10000(2.20136)

= 0.22014

G_3 = 0.10000g(0..15000,1.19153,2.20136)

= 0.10000[(8.36120)(2.20136) + (0.00002)(1.19153) - 0.00017]

= 0.10000(18.40587)

= 1.84059

F_4 = 0.10000f(0.20000,1.31367,3.22264)

= 0.10000(3.22264)

= 0.32226

G_4 = 0.10000g(0.20000,1.31367,3.22264)

= 0.10000[(8.36120)(3.22264) + (0.00002)(1.31367) - 0.00017]

= 0.10000(26.94499)

= 2.69450

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.2) = 1.09353 + \frac{1}{6}[0.13820 + (2)(0.19598) + (2)(0.22014) + 0.32226]$$

$$= 1.09353 + \frac{1}{6}(1.29270)$$

$$= 1.09353 + 0.21546$$

$$= 1.30899$$

$$k(0.2) = 1.38205 + \frac{1}{6}[1.15554 + (2)(1.63863) + (2)(1.84059) + 2.69450]$$

$$= 1.38205 + \frac{1}{6}(10.80848)$$

$$= 1.38205 + 1.80141$$

$$= 3.18346$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899								
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346								

เมื่อ i = 2 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.20000, 1.30899, 0.318346)$

$= 0.10000(0.318346)$

$= 0.31835$

$G_1 = 0.10000g(0.20000, 1.30899, 0.318346)$

$= 0.10000[(8.36120)(0.318346) + (0.00002)(1.30899) - 0.00017]$

$= 0.10000(2.66161)$

$= 2.66174$

$F_2 = 0.10000f(0.25000, 1.46816, 4.51433)$

$= 0.10000(4.51433)$

$= 0.45143$

$G_2 = 0.10000g(0.25000, 1.46816, 4.51433)$

$= 0.10000[(8.36120)(4.51433) + (0.00002)(1.46816) - 0.00017]$

$= 0.10000(37.74508)$

$= 3.77451$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.25000, 1.53470, 5.07072)$

$= 0.10000(5.07072)$

$= 0.22014$

$G_3 = 0.10000g(0.25000, 1.53470, 5.07072)$

$= 0.10000[(8.36120)(5.07072) + (0.00002)(1.53470) - 0.00017]$

$= 0.10000(42.39716)$

$= 4.23972$

$F_4 = 0.10000f(0.30000, 1.81606, 7.42318)$

$= 0.10000(7.42318)$

$= 0.74232$

$G_4 = 0.10000g(0.30000, 1.81606, 7.42318)$

$= 0.10000[(8.36120)(7.42318) + (0.00002)(1.81606) - 0.00017]$

$= 0.10000(62.06656)$

$= 26.20665$

$$C(0.3) = 1.30899 + \frac{1}{6}[0.31835 + (2)(0.45143) + (2)(0.50707) + 0.74232]$$

$$= 1.30899 + \frac{1}{6}(2.97767)$$

$= 1.30899 + 0.49628$

$= 1.80527$

$$k(0.3) = 3.18346 + \frac{1}{6}[2.66174 + (2)(3.77451) + (2)(4.23972) + 6.20665]$$

$$= 3.18346 + \frac{1}{6}(24.89685)$$

$= 3.18346 + 4.14948$

$= 7.33294$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527							
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294							

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.30000, 1.80527, 7.33294)$

$= 0.10000(7.33294)$

$= 0.73329$

$G_1 = 0.10000g(0.30000, 1.80527, 7.33294)$

$= 0.10000[(8.36120)(7.33294) + (0.00002)(1.80527) - 0.00017]$

$= 0.10000(61.31204)$

$= 6.13120$

$F_2 = 0.10000f(0.35000, 2.17191, 10.39854)$

$= 0.10000(10.39854)$

$= 1.03985$

$G_2 = 0.10000g(0.35000, 2.17191, 10.39854)$

$= 0.10000[(8.36120)(10.39854) + (0.00002)(2.17191) - 0.00017]$

$= 0.10000(86.94415)$

$= 8.69441$

$F_3 = 0.10000f(0.35000, 2.32519, 11.68015)$

$= 0.10000(11.68015)$

$= 1.16801$

$G_3 = 0.10000g(0.35000, 2.32519, 11.68015)$

$= 0.10000[(8.36120)(11.68015) + (0.00002)(2.32519) - 0.00017]$

$= 0.10000(97.65995)$

$= 9.76599$

$F_4 = 0.10000f(0.40000, 2.97328, 17.09893)$

$= 0.10000(17.09893)$

$= 1.70989$

$G_4 = 0.10000g(0.40000, 2.97328, 17.09893)$

$= 0.10000[(8.36120)(17.09893) + (0.00002)(2.97328) - 0.00017]$

$= 0.10000(142.96746)$

$= 14.29675$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.4) = 1.80527 + \frac{1}{6}[0.73329 + (2)(1.03985) + (2)(1.16801) + 1.70989]$$

$$= 1.80527 + \frac{1}{6}(6.85890)$$

$$= 1.80527 + 1.14315$$

$$= 2.94842$$

$$k(0.4) = 7.33294 + \frac{1}{6}[6.13120 + (2)(8.69441) + (2)(9.76599) + 14.29675]$$

$$= 7.33294 + \frac{1}{6}(57.34875)$$

$$= 7.33294 + 9.55812$$

$$= 16.89106$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842						
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106						

เมื่อ $i = 4$ จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.40000, 2.94842, 16.89106)$$

$$= 0.10000(16.89106)$$

$$= 1.68911$$

$$G_1 = 0.10000g(0.40000, 2.94842, 16.89106)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(16.89106) + (0.00002)(2.94842) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(141.22942)$$

$$= 14.12295$$

$$F_2 = 0.10000f(0.45000, 3.79297, 23.95254)$$

$$= 0.10000(23.95254)$$

$$= 2.39525$$

$$G_2 = 0.10000g(0.45000, 3.79297, 23.95254)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(23.95254) + (0.00002)(3.79297) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(200.27188)$$

$$= 20.02719$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.45000, 4.14605, 26.90466)$

$= 0.10000(26.90466)$

$= 2.69047$

$G_3 = 0.10000g(0.45000, 4.14605, 26.90466)$

$= 0.10000[(8.36120)(26.90466) + (0.00002)(4.14605) - 0.00017]$

$= 0.10000(224.95516)$

$= 22.49551$

$F_4 = 0.10000f(0.50000, 5.63888, 39.38658)$

$= 0.10000(39.38658)$

$= 3.93866$

$G_4 = 0.10000g(0.50000, 5.63888, 39.38658)$

$= 0.10000[(8.36120)(39.38658) + (0.00002)(5.63888) - 0.00017]$

$= 0.10000(329.31902)$

$= 32.93190$

$$C(0.5) = 2.94842 + \frac{1}{6}[1.68911 + (2)(2.39525) + (2)(2.69047) + 3.93866]$$

$$= 2.94842 + \frac{1}{6}(15.79921)$$

$= 2.94842 + 2.63320$

$= 5.58162$

$$k(0.5) = 16.89106 + \frac{1}{6}[14.12295 + (2)(20.02719) + (2)(22.49551) + 32.93190]$$

$$= 16.89106 + \frac{1}{6}(132.10025)$$

$= 16.89106 + 22.01671$

$= 38.90777$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162					
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777					

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 5 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.50000, 5.58162, 38.90777)$

$= 0.10000(38.90777)$

$= 3.89078$

$G_1 = 0.10000g(0.50000, 5.58162, 38.90777)$

$= 0.10000[(8.36120)(38.90777) + (0.00002)(5.58162) - 0.00017]$

$= 0.10000(325.31559)$

$= 32.53156$

$F_2 = 0.10000f(0.55000, 7.52701, 55.17355)$

$= 0.10000(55.17355)$

$= 5.51736$

$G_2 = 0.10000g(0.55000, 7.52701, 55.17355)$

$= 0.10000[(8.36120)(55.17355) + (0.00002)(7.52701) - 0.00017]$

$= 0.10000(461.31707)$

$= 46.13171$

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 8.34030, 61.97363)$

$= 0.10000(61.97363)$

$= 6.19736$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 8.34030, 61.97363)$

$= 0.10000[(8.36120)(61.97363) + (0.00002)(8.34030) - 0.00017]$

$= 0.10000(518.17391)$

$= 51.81739$

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 11.77898, 90.72516)$

$= 0.10000(90.72516)$

$= 9.07252$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 11.77898, 90.72516)$

$= 0.10000[(8.36120)(90.72516) + (0.00002)(11.77898) - 0.00017]$

$= 0.10000(758.57127)$

$= 75.85713$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.6) = 5.58162 + \frac{1}{6}[3.89078 + (2)(5.51736) + (2)(6.19736) + 9.07252]$$

$$= 5.58162 + \frac{1}{6}(36.39354)$$

$$= 5.58162 + 6.06545$$

$$= 11.64707$$

$$k(0.6) = 38.90777 + \frac{1}{6}[32.53156 + (2)(46.13171) + (2)(51.81739) + 75.85713]$$

$$= 38.90777 + \frac{1}{6}(304.28689)$$

$$= 38.90777 + 50.71448$$

$$= 89.62225$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162	11.64707				
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777	89.62225				

เมื่อ i = 6 จะได้

$$F_1 = 0.10000f(0.60000, 11.64707, 89.62225)$$

$$= 0.10000(89.62225)$$

$$= 8.96223$$

$$G_1 = 0.10000g(0.60000, 11.64707, 89.62225)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(89.62225) + (0.00002)(11.64707) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(749.34962)$$

$$= 74.93497$$

$$F_2 = 0.10000f(0.65000, 16.12819, 127.08974)$$

$$= 0.10000(127.08974)$$

$$= 12.70897$$

$$G_2 = 0.10000g(0.65000, 16.12819, 127.08974)$$

$$= 0.10000[(8.36120)(127.08974) + (0.00002)(16.12819) - 0.00017]$$

$$= 0.10000(1062.62289)$$

$$= 106.26229$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.65000, 18.00156, 142.75340)$

$= 0.10000(142.75340)$

$= 14.27534$

$G_3 = 0.10000g(0.65000, 18.00156, 142.75340)$

$= 0.10000[(8.36120)(142.75340) + (0.00002)(18.00156) - 0.00017]$

$= 0.10000(1193.58992)$

$= 119.35899$

$F_4 = 0.10000f(0.70000, 25.92241, 208.98124)$

$= 0.10000(208.98124)$

$= 20.89812$

$G_4 = 0.10000g(0.70000, 25.92241, 208.98124)$

$= 0.10000[(8.36120)(208.98124) + (0.00002)(25.92241) - 0.00017]$

$= 0.10000(1747.33429)$

$= 174.73343$

$$C(0.7) = 11.64707 + \frac{1}{6}[8.962225 + (2)(12.70897) + (2)(14.27537) + 20.89812]$$

$$= 11.64707 + \frac{1}{6}(83.82903)$$

$= 11.64707 + 13.97150$

$= 25.61857$

$$k(0.7) = 89.62225 + \frac{1}{6}[74.93497 + (2)(106.26229) + (2)(119.35899) + 174.73343]$$

$$= 89.62225 + \frac{1}{6}(700.91096)$$

$= 89.62225 + 116.81850$

$= 206.44075$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162	11.64707	25.61857			
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777	89.62225	206.44075			

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $i = 7$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.70000, 25.61857, 206.44075)$

$= 0.10000(206.44075)$

$= 20.64407$

$G_1 = 0.10000g(0.70000, 25.61857, 206.44075)$

$= 0.10000[(8.36120)(206.44075) + (0.00002)(25.61857) - 0.00017]$

$= 0.10000(1726.09274)$

$= 172.60927$

$F_2 = 0.10000f(0.75000, 35.94061, 292.74538)$

$= 0.10000(292.74538)$

$= 29.27454$

$G_2 = 0.10000g(0.75000, 35.94061, 292.74538)$

$= 0.10000[(8.36120)(292.74538) + (0.00002)(35.94061) - 0.00017]$

$= 0.10000(2447.70322)$

$= 244.77032$

$F_3 = 0.10000f(0.75000, 40.25584, 328.82591)$

$= 0.10000(328.82591)$

$= 32.88259$

$G_3 = 0.10000g(0.75000, 40.25584, 328.82591)$

$= 0.10000[(8.36120)(328.82591) + (0.00002)(40.25584) - 0.00017]$

$= 0.10000(2749.37983)$

$= 274.93798$

$F_4 = 0.10000f(0.80000, 58.50116, 481.37873)$

$= 0.10000(481.37873)$

$= 48.13787$

$G_4 = 0.10000g(0.80000, 58.50116, 481.37873)$

$= 0.10000[(8.36120)(481.37873) + (0.00002)(58.50116) - 0.00017]$

$= 0.10000(4024.90484)$

$= 402.49048$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.8) = 25.61857 + \frac{1}{6}[20.64407 + (2)(29.27454) + (2)(32.88259) + 48.13787]$$

$$= 25.61857 + \frac{1}{6}(193.09620)$$

$$= 25.61857 + 32.18270$$

$$= 57.80127$$

$$k(0.8) = 206.44075 + \frac{1}{6}[172.60927 + (2)(244.77032) + (2)(274.93798) + 402.49048]$$

$$= 206.44075 + \frac{1}{6}(1614.51635)$$

$$= 206.44075 + 269.08605$$

$$= 475.52680$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162	11.64707	25.61857	57.80127		
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777	89.62225	206.44075	475.52680		

เมื่อ i = 8 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 57.80127, 475.52680)$

$= 0.10000(475.52680)$

$= 47.55268$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 57.80127, 475.52680)$

$= 0.10000[(8.36120)(475.52680) + (0.00002)(57.80127) - 0.00017]$

$= 0.10000(3975.97567)$

$= 397.59757$

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 81.57761, 674.32559)$

$= 0.10000(674.32559)$

$= 67.43256$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 81.57761, 674.32559)$

$= 0.10000[(8.36120)(674.32559) + (0.00002)(81.57761) - 0.00017]$

$= 0.10000(5638.17258)$

$= 563.81726$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 91.51755, 757.43543)$

$= 0.10000(757.43543)$

$= 67.43256$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 91.51755, 757.43543)$

$= 0.10000[(8.36120)(757.43543) + (0.00002)(91.51755) - 0.00017]$

$= 0.10000(6333.07078)$

$= 633.30708$

$F_4 = 0.10000f(0.9000, 133.54481, 1108.83389)$

$= 0.10000(1108.83389)$

$= 110.88339$

$G_4 = 0.10000g(0.9000, 133.54481, 1108.83389)$

$= 0.10000[(8.36120)(1108.83389) + (0.00002)(133.54481) - 0.00017]$

$= 0.10000(9271.18442)$

$= 927.11844$

$$C(0.9) = 57.80127 + \frac{1}{6}[47.55268 + (2)(67.43256) + (2)(75.74354) + 110.88339]$$

$$= 57.80127 + \frac{1}{6}(444.78827)$$

$= 57.80127 + 74.13138$

$= 131.93265$

$$k(0.9) = 475.52680 + \frac{1}{6}[397.59757 + (2)(563.81726) + (2)(633.30708) + 927.11844]$$

$$= 475.52680 + \frac{1}{6}(3718.96469)$$

$= 475.52680 + 619.82745$

$= 1095.35425$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162	11.64707	25.61857	57.80127	131.93265	
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777	89.62225	206.44075	475.52680	1095.35425	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 9 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.9000,133.93265,1095.35425)

= 0.10000(1095.35425)

= 109.53543

G_1 = 0.10000g(0.9000,133.93265,1095.35425)

= 0.10000[(8.36120)(1095.35425) + (0.00002)(133.93265) - 0.00017]

= 0.10000(9158.47846)

= 915.84784

F_2 = 0.10000f(0.95000,186.70036,1553.27817)

= 0.10000(1553.27817)

= 155.32782

G_2 = 0.10000g(0.95000,186.70036,1553.27817)

= 0.10000[(8.36120)(1553.27817) + (0.00002)(186.70036) - 0.00017]

= 0.10000(12987.27300)

= 1298.72730

F_3 = 0.10000f(0.95000,209.59656,1744.71790)

= 0.10000(1744.71790)

= 174.47179

G_3 = 0.10000g(0.95000,209.59656,1744.71790)

= 0.10000[(8.36120)(1744.71790) + (0.00002)(209.59656) - 0.00017]

= 0.10000(14587.93933)

= 1458.79394

F_4 = 0.10000f(1.00000,306.40444,2554.14819)

= 0.10000(2554.14819)

= 255.41482

G_4 = 0.10000g(1.00000,306.40444,2554.14819)

= 0.10000[(8.36120)(2554.14819) + (0.00002)(306.40444) - 0.00017]

= 0.10000(21355.74980)

= 2135.57498

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(1.0) = 131.93265 + \frac{1}{6}[109.53543 + (2)(155.32782) + (2)(174.47179) + 255.41482]$$

$$= 131.93265 + \frac{1}{6}(1024.54947)$$

$$= 131.93265 + 170.75824$$

$$= 302.69089$$

$$k(1.0) = 1095.35425 + \frac{1}{6}[915.84784 + (2)(1298.72730) + (2)(1458.79394) + 2135.57498]$$

$$= 1095.35425 + \frac{1}{6}(8566.46530)$$

$$= 1095.35425 + 1427.74422$$

$$= 2523.09847$$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.09353	1.30899	1.80527	2.94842	5.58162	11.64707	25.61857	57.80127	131.93265	302.69089
$k(x_i)$	0.60000	1.38205	3.18346	7.33294	16.89106	38.90777	89.62225	206.44075	475.52680	1095.35425	2523.09847

ตารางที่ 4-7 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลองที่ 2

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_0$, $IVPa_1$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_0}(0.2) = f(0.3) = 151.84095$ (4.21)

$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.6) = 302.69089$ (4.22)

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.23)

$k(0) = -0.00157 = a_2$ (4.24)

โดย $a_2 = 0.6 - \left(\frac{0.6 - 0.3}{302.69089 - 151.84095}\right)(302.69089 - 0.2) = -0.00157$ (4.25)

จากนั้นกลับไปกำหนดในขั้นตอนที่ 2 ใหม่ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้ $IVPa_2 : c' = k$ (4.26)

$: k' = 8.3612k + 0.00002 - 0.00017$ (4.27)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$ICa_1 : c(0) = 1 \tag{4.28}$$

$$: k(0) = -0.00157 \tag{4.29}$$

เลือก $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x,c,k)$$

และ $$k' = g(x,c,k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $$c(0) = 1 \tag{4.30}$$

$$k(0) = -0.00157 \tag{4.31}$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,-0.00157) \\ g(0,1,-0.00157) \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.00157 \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000										
$c(x_i)$	1.00000										
$k(x_i)$	-0.00157										

เมื่อ $i = 0$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.00000, 1.00000, -0.00157)$

$= 0.10000(-0.00157)$

$= -0.00016$

$G_1 = 0.10000g(0.00000, 1.00000, -0.00157)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00157) + (0.00002)(1.00000) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.01328)$

$= -0.00133$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

F_2 = 0.10000f(0.05000, 0.99992, -0.00223)

= 0.10000(-0.00223)

= -0.00022

G_2 = 0.10000g(0.05000, 0.99992, -0.00223)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00223) + (0.00002)(0.99992) - 0.00017]

= 0.10000(-0.01880)

= -0.00188

F_3 = 0.10000f(0.05000, 0.99989, -0.00251)

= 0.10000(-0.00251)

= -0.00025

G_3 = 0.10000g(0.05000, 0.99989, -0.00251)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00251) + (0.00002)(0.99989) - 0.00017]

= 0.10000(-0.02114)

= -0.00211

F_4 = 0.10000f(0.10000, 0.99975, -0.00368)

= 0.10000(-0.00368)

= -0.00037

G_4 = 0.10000g(0.10000, 0.99975, -0.00368)

= 0.10000[(8.36120)(-0.00368) + (0.00002)(0.99975) - 0.00017]

= 0.10000(-0.03092)

= -0.00310

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.1) = 1.00000 + \frac{1}{6}[-0.00016 + (2)(-0.00022) + (2)(-0.00025) + (-0.00037)]$$

$$= 1.00000 + \frac{1}{6}(-0.00147)$$

$$= 1.00000 + (-0.00025)$$

$$= 0.99975$$

$$k(0.1) = -0.00157 + \frac{1}{6}[-0.00133 + (2)(-0.00188) + (2)(-0.00211) + (-0.00310)]$$

$$= -0.00157 + \frac{1}{6}(-0.01241)$$

$$= -0.00157 + (-0.00207)$$

$$= -0.00364$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000									
$c(x_i)$	1.00000	0.99975									
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364									

เมื่อ i = 1 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.10000, 0.99975, -0.00364)$

$= 0.10000(-0.00364)$

$= -0.00036$

$G_1 = 0.10000g(0.10000, 0.99975, -0.00364)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00364) + (0.00002)(0.99975) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.03058)$

$= -0.00306$

$F_2 = 0.10000f(0.15000, 0.99957, -0.00517)$

$= 0.10000(-0.00517)$

$= -0.00052$

$G_2 = 0.10000g(0.15000, 0.99957, -0.00517)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00517) + (0.00002)(0.99957) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.04338)$

$= -0.00434$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.15000, 0.99950, -0.00581)$

$= 0.10000(-0.00581)$

$= -0.00058$

$G_3 = 0.10000g(0.15000, 0.99950, -0.00581)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00581) + (0.00002)(0.99950) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.04873)$

$= -0.00487$

$F_4 = 0.10000f(0.20000, 0.99917, -0.00851)$

$= 0.10000(-0.00851)$

$= -0.00085$

$G_4 = 0.10000g(0.20000, 0.99917, -0.00851)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00851) + (0.00002)(0.99917) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.07130)$

$= -0.00713$

$$C(0.2) = 0.99975 + \frac{1}{6}[-0.00036 + (2)(-0.00052) + (2)(-0.00058) + (-0.00085)]$$

$$= 0.99975 + \frac{1}{6}(-0.00341)$$

$= 0.99975 + (-0.00056)$

$= 0.99919$

$$k(0.2) = -0.00364 + \frac{1}{6}[-0.00306 + (2)(-0.00434) + (2)(-0.00487) + (-0.00713)]$$

$$= -0.00364 + \frac{1}{6}(-0.02861)$$

$= -0.00364 + (-0.00477)$

$= -0.00364$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000								
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919								
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346								

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 2 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.20000, 0.99919, -0.00841)$

$= 0.10000(-0.00841)$

$= -0.00084$

$G_1 = 0.10000g(0.20000, 0.99919, -0.00841)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.00841) + (0.00002)(0.99919) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.07047)$

$= -0.00704$

$F_2 = 0.10000f(0.25000, 0.99877, -0.01193)$

$= 0.10000(-0.01193)$

$= -0.00119$

$G_2 = 0.10000g(0.25000, 0.99877, -0.01193)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.01193) + (0.00002)(0.99877) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.09990)$

$= -0.00999$

$F_3 = 0.10000f(0.25000, 0.99859, -0.01340)$

$= 0.10000(-0.01340)$

$= -0.00134$

$G_3 = 0.10000g(0.25000, 0.99859, -0.01340)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.01340) + (0.00002)(0.99859) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.11219)$

$= -0.01122$

$F_4 = 0.10000f(0.30000, 0.99785, -0.01963)$

$= 0.10000(-0.01963)$

$= -0.00196$

$G_4 = 0.10000g(0.30000, 0.99785, -0.01963)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.01963) + (0.00002)(0.99785) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.16428)$

$= -0.01643$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.3) = 0.99919 + \frac{1}{6}[-0.00084 + (2)(-0.00119) + (2)(-0.00134) + (-0.00196)]$$

$$= 0.99919 + \frac{1}{6}(-0.00786)$$

$$= 0.99919 + (-0.00132)$$

$$= 0.99787$$

$$k(0.3) = -0.00364 + \frac{1}{6}[-0.00704 + (2)(-0.00999) + (2)(-0.01122) + (-0.01643)]$$

$$= -0.00364 + \frac{1}{6}(-0.09450)$$

$$= -0.00364 + (-0.01575)$$

$$= -0.01939$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000							
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787							
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939							

เมื่อ $i = 3$ จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.30000, 0.99787, -0.01939)$

$= 0.10000(-0.01939)$

$= -0.00194$

$G_1 = 0.10000g(0.30000, 0.99787, -0.01939)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.01939) + (0.00002)(0.99787) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.16227)$

$= -0.01623$

$F_2 = 0.10000f(0.35000, 0.99690, -0.02750)$

$= 0.10000(-0.02750)$

$= -0.00275$

$G_2 = 0.10000g(0.35000, 0.99690, -0.02750)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.02750) + (0.00002)(0.99690) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.23008)$

$= -0.02301$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.35000, 0.99650, -0.03090)$

$= 0.10000(-0.03090)$

$= -0.00309$

$G_3 = 0.10000g(0.35000, 0.99650, -0.03090)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.03090) + (0.00002)(0.99650) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.25851)$

$= -0.02585$

$F_4 = 0.10000f(0.40000, 0.99478, -0.04524)$

$= 0.10000(-0.04524)$

$= -0.00452$

$G_4 = 0.10000g(0.40000, 0.99478, -0.04524)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.04524) + (0.00002)(0.99478) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.37841)$

$= -0.03784$

$$C(0.4) = 0.99787 + \frac{1}{6}[-0.00194 + (2)(-0.00275) + (2)(-0.00309) + (-0.00452)]$$

$$= 0.99787 + \frac{1}{6}(-0.01814)$$

$= 0.99787 + (-0.00302)$

$= 0.99485$

$$k(0.4) = -0.01939 + \frac{1}{6}[-0.01623 + (2)(-0.02301) + (2)(-0.02585) + (-0.03784)]$$

$$= -0.01939 + \frac{1}{6}(-0.15179)$$

$= -0.01939 + (-0.02530)$

$= -0.04469$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000						
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485						
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469						

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 4 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.40000, 0.99485, -0.04469)

= 0.10000(-0.04469)

= -0.00447

G_1 = 0.10000g(0.40000, 0.99485, -0.04469)

= 0.10000[(8.36120)(-0.04469) + (0.00002)(0.99485) - 0.00017]

= 0.10000(-0.37381)

= -0.03738

F_2 = 0.10000f(0.45000, 0.99262, -0.06338)

= 0.10000(-0.06338)

= -0.00634

G_2 = 0.10000g(0.45000, 0.99262, -0.06338)

= 0.10000[(8.36120)(-0.06338) + (0.00002)(0.99262) - 0.00017]

= 0.10000(-0.53008)

= -0.05300

F_3 = 0.10000f(0.45000, 0.99168, -0.07119)

= 0.10000(-0.07119)

= -0.00712

G_3 = 0.10000g(0.45000, 0.99168, -0.07119)

= 0.10000[(8.36120)(-0.07119) + (0.00002)(0.99168) - 0.00017]

= 0.10000(-0.59538)

= -0.05954

F_4 = 0.10000f(0.50000, 0.98773, -0.10422)

= 0.10000(-0.10422)

= -0.01042

G_4 = 0.10000g(0.50000, 0.98773, -0.10422)

= 0.10000[(8.36120)(-0.10422) + (0.00002)(0.98773) - 0.00017]

= 0.10000(-0.87155)

= -0.08716

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.5) = 0.99485 + \frac{1}{6}[-0.00447 + (2)(-0.00634) + (2)(-0.00712) + (-0.01042)]$$

$$= 0.99485 + \frac{1}{6}(-0.04181)$$

$$= 0.99485 + (-0.00697)$$

$$= 0.98788$$

$$k(0.5) = -0.04469 + \frac{1}{6}[-0.03738 + (2)(-0.05300) + (2)(-0.05954) + (-0.08716)]$$

$$= -0.04469 + \frac{1}{6}(-0.34962)$$

$$= -0.04469 + (-0.05827)$$

$$= -0.10296$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000					
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788					
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296					

เมื่อ i = 5 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.50000, 0.98788, -0.10296)$

$= 0.10000(-0.10296)$

$= -0.01030$

$G_1 = 0.10000g(0.50000, 0.98788, -0.10296)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.10296) + (0.00002)(0.98788) - 0.00017]$

$= 0.10000(-0.86102)$

$= -0.08610$

$F_2 = 0.10000f(0.55000, 0.98274, -0.14601)$

$= 0.10000(-0.14601)$

$= -0.01460$

$G_2 = 0.10000g(0.55000, 0.98274, -0.14601)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.14601) + (0.00002)(0.98274) - 0.00017]$

$= 0.10000(-1.22097)$

$= -0.12209$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.55000, 0.98058, -0.16400)$

$= 0.10000(-0.16400)$

$= -0.01640$

$G_3 = 0.10000g(0.55000, 0.98058, -0.16400)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.16400) + (0.00002)(0.98058) - 0.00017]$

$= 0.10000(-1.37139)$

$= -0.13714$

$F_4 = 0.10000f(0.60000, 0.97148, -0.24010)$

$= 0.10000(-0.24010)$

$= -0.02401$

$G_4 = 0.10000g(0.60000, 0.97148, -0.24010)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.24010) + (0.00002)(0.97148) - 0.00017]$

$= 0.10000(-2.00767)$

$= -0.20077$

$$C(0.6) = 0.98788 + \frac{1}{6}[-0.01030 + (2)(-0.01460) + (2)(-0.01640) + (-0.02401)]$$

$$= 0.98788 + \frac{1}{6}(-0.09631)$$

$= 0.98788 + (-0.01605)$

$= 0.97183$

$$k(0.6) = -0.10296 + \frac{1}{6}[-0.08610 + (2)(-0.12209) + (2)(-0.13714) + (-0.20077)]$$

$$= -0.10296 + \frac{1}{6}(-0.80533)$$

$= -0.10296 + (-0.13422)$

$= -0.23718$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000				
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183				
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296	-0.23718				

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 6 จะได้

F_1 = 0.10000f(0.60000, 0.97183, -0.23718)

= 0.10000(-0.23718)

= -0.02372

G_1 = 0.10000g(0.60000, 0.97183, -0.23718)

= 0.10000[(8.36120)(-0.23718) + (0.00002)(0.97183) - 0.00017]

= 0.10000(-1.98326)

= -0.19833

F_2 = 0.10000f(0.65000, 0.95997, -0.33634)

= 0.10000(-0.23718)

= -0.03363

G_2 = 0.10000g(0.65000, 0.95997, -0.33634)

= 0.10000[(8.36120)(-0.33634) + (0.00002)(0.95997) - 0.00017]

= 0.10000(-2.81236)

= -0.28124

F_3 = 0.10000f(0.65000, 0.95501, -0.37780)

= 0.10000(-0.37780)

= -0.03778

G_3 = 0.10000g(0.65000, 0.95501, -0.37780)

= 0.10000[(8.36120)(-0.37780) + (0.00002)(0.95501) - 0.00017]

= 0.10000(-3.15901)

= -0.31590

F_4 = 0.10000f(0.70000, 0.93405, -0.55308)

= 0.10000(-0.55308)

= -0.05531

G_4 = 0.10000g(0.70000, 0.93405, -0.55308)

= 0.10000[(8.36120)(-0.55308) + (0.00002)(0.93405) - 0.00017]

= 0.10000(-4.62456)

= -0.46246

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.7) = 0.97183 + \frac{1}{6}[-0.02372 + (2)(-0.03363) + (2)(-0.03778) + (-0.05531)]$$

$$= 0.97183 + \frac{1}{6}(-0.22185)$$

$$= 0.97183 + (-0.03699)$$

$$= 0.93486$$

$$k(0.7) = -0.23718 + \frac{1}{6}[-0.19833 + (2)(-0.28124) + (2)(-0.31590) + (-0.46246)]$$

$$= -0.23718 + \frac{1}{6}(-1.85507)$$

$$= -0.23718 + (-0.30918)$$

$$= -0.54636$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000			
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486			
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296	-0.23718	-0.54636			

เมื่อ i = 7 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.70000, 0.93486, -0.54636)$

$= 0.10000(-0.54636)$

$= -0.05464$

$G_1 = 0.10000g(0.70000, 0.93486, -0.54636)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.54636) + (0.00002)(0.93486) - 0.00017]$

$= 0.10000(-4.56838)$

$= -0.45684$

$F_2 = 0.10000f(0.75000, 0.90754, -0.77478)$

$= 0.10000(-0.77478)$

$= -0.07748$

$G_2 = 0.10000g(0.75000, 0.90754, -0.77478)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.77478) + (0.00002)(0.90754) - 0.00017]$

$= 0.10000(-6.47824)$

$= -0.64782$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.75000, 0.89612, -0.87027)$

$= 0.10000(-0.87027)$

$= -0.08703$

$G_3 = 0.10000g(0.75000, 0.89612, -0.87027)$

$= 0.10000[(8.36120)(-0.87027) + (0.00002)(0.89612) - 0.00017]$

$= 0.10000(-7.27665)$

$= -0.72766$

$F_4 = 0.10000f(0.80000, 0.84783, -1.27402)$

$= 0.10000(-1.27402)$

$= -0.12740$

$G_4 = 0.10000g(0.80000, 0.84783, -1.27402)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.27402) + (0.00002)(0.84783) - 0.00017]$

$= 0.10000(-10.65249)$

$= -1.06525$

$$C(0.8) = 0.93486 + \frac{1}{6}[-0.05464 + (2)(-0.07748) + (2)(-0.08703) + (-0.12740)]$$

$$= 0.93486 + \frac{1}{6}(-0.51106)$$

$$= 0.93486 + (-0.08518)$$

$$= 0.84968$$

$$k(0.8) = -0.54636 + \frac{1}{6}[-0.45684 + (2)(-0.64782) + (2)(-0.72766) + (-1.06525)]$$

$$= -0.54636 + \frac{1}{6}(-4.27305)$$

$$= -0.54636 + (-0.71217)$$

$$= -1.25853$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000		
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486	0.84968		
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296	-0.23718	-0.54636	-1.25853		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ i = 8 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.80000, 0.84968, -1.25853)$

$= 0.10000(-1.25853)$

$= -0.12585$

$G_1 = 0.10000g(0.80000, 0.84968, -1.25853)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.25853) + (0.00002)(0.84968) - 0.00017]$

$= 0.10000(-10.52297)$

$= -1.05230$

$F_2 = 0.10000f(0.85000, 0.78675, -1.78468)$

$= 0.10000(-1.78468)$

$= -0.17847$

$G_2 = 0.10000g(0.85000, 0.78675, -1.78468)$

$= 0.10000[(8.36120)(-1.78468) + (0.00002)(0.78675) - 0.00017]$

$= 0.10000(-14.92222)$

$= -1.49222$

$F_3 = 0.10000f(0.85000, 0.76045, -2.00465)$

$= 0.10000(-2.00465)$

$= -0.20046$

$G_3 = 0.10000g(0.85000, 0.76045, -2.00465)$

$= 0.10000[(8.36120)(-2.00465) + (0.00002)(0.76045) - 0.00017]$

$= 0.10000(-16.76143)$

$= -1.67614$

$F_4 = 0.10000f(0.90000, 0.64922, -2.93467)$

$= 0.10000(-2.93467)$

$= -0.29347$

$G_4 = 0.10000g(0.90000, 0.64922, -2.93467)$

$= 0.10000[(8.36120)(-2.93467) + (0.00002)(0.64922) - 0.00017]$

$= 0.10000(-24.53752)$

$= -2.45375$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(0.9) = 0.84968 + \frac{1}{6}[-0.12585 + (2)(-0.17847) + (2)(-0.20046) + (-0.29347)]$$

$$= 0.84968 + \frac{1}{6}(-1.17718)$$

$$= 0.84968 + (-0.19620)$$

$$= 0.65348$$

$$k(0.9) = -1.25853 + \frac{1}{6}[-1.05230 + (2)(-1.49222) + (2)(-1.67614) + (-2.45375)]$$

$$= -1.25853 + \frac{1}{6}(-9.84277)$$

$$= -1.25853 + (-1.64047)$$

$$= -2.89900$$

ดังนั้น

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486	0.84968	0.65348	
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296	-0.23718	-0.54636	-1.25853	-2.89900	

เมื่อ i = 9 จะได้

$F_1 = 0.10000f(0.90000, 0.65348, -2.89900)$

$= 0.10000(-2.89900)$

$= -0.28990$

$G_1 = 0.10000g(0.90000, 0.65348, -2.89900)$

$= 0.10000[(8.36120)(-2.89900) + (0.00002)(0.65348) - 0.00017]$

$= 0.10000(-24.23928)$

$= -2.42392$

$F_2 = 0.10000f(0.95000, 0.50853, -4.11096)$

$= 0.10000(-4.11096)$

$= -0.41110$

$G_2 = 0.10000g(0.95000, 0.50853, -4.11096)$

$= 0.10000[(8.36120)(-4.11096) + (0.00002)(0.50853) - 0.00017]$

$= 0.10000(-34.37272)$

$= -3.43727$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$F_3 = 0.10000f(0.95000, 0.44794, -4.61763)$

$= 0.10000(-4.61763)$

$= -0.46176$

$G_3 = 0.10000g(0.95000, 0.44794, -4.61763)$

$= 0.10000[(8.36120)(-4.61763) + (0.00002)(0.44794) - 0.00017]$

$= 0.10000(-38.60909)$

$= -3.86091$

$F_4 = 0.10000f(1.00000, 0.19172, -6.75991)$

$= 0.10000(-6.75991)$

$= -0.67599$

$G_4 = 0.10000g(1.00000, 0.19172, -6.75991)$

$= 0.10000[(8.36120)(-6.75991) + (0.00002)(0.19172) - 0.00017]$

$= 0.10000(-56.52113)$

$= -5.65211$

$$C(1.0) = 0.65348 + \frac{1}{6}[-0.28990 + (2)(-0.41110) + (2)(-0.46176) + (-0.67599)]$$

$$= 0.65348 + \frac{1}{6}(-2.71161)$$

$$= 0.65348 + (-0.45193)$$

$$= 0.20155$$

$$k(1.0) = -2.89900 + \frac{1}{6}[-2.42392 + (2)(-3.43727) + (2)(-3.86091) + (-5.65211)]$$

$$= -2.89900 + \frac{1}{6}(-22.67239)$$

$$= -2.89900 + (-3.77873)$$

$$= -6.67773$$

จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486	0.84968	0.65348	0.20155
$k(x_i)$	-0.00157	-0.00364	-0.00346	-0.01939	-0.04469	-0.10296	-0.23718	-0.54636	-1.25853	-2.89900	-6.67773

ตารางที่ 4-8 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลองที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_2$

จะได้ว่า $\tilde{x}_{a_2}(1.00000) = f(-0.00157) = 0.20155$ (4.34)

ค่าประมาณผลเฉลยของ $IVPa_2$ ณ $x = 1.00000$ มีค่าใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบขวา ดังนั้น $|f(a_2) - 0.2| < 0.003$ ซึ่งอยู่ในนัยสำคัญที่ต้องการ ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาขอบนี้คือ

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486	0.84968	0.65348	0.20155

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.3 แบบจำลอง 3 : กำหนดให้ลำน้ำมีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยบริเวณที่ต้องการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียคือระยะทาง 0-1 กิโลเมตร มีการปล่อยสารแอมโมเนียที่ตำแหน่ง x = 0 กิโลเมตร มีความเข้มข้นของแอมโมเนีย ณ จุดปล่อย เป็น 1 มิลลิกรัมต่อลิตร และตรวจพบความเข้มข้นของแอมโมเนียเป็น 0.2 มิลลิกรัมต่อลิตรที่ตำแหน่ง x = 1 กิโลเมตร ความเร็วของการไหลของกระแสน้ำในทิศทางแกน x คือ 9 เซนติเมตรต่อวินาที โดยสารแอมโมเนียที่ถูกปล่อยลงสู่แหล่งน้ำนี้มีสมบัติทางเคมีคือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของแอมโมเนียชนิดนี้ในน้ำคือ 5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียชนิดนี้เมื่อละลายในลำน้ำบริเวณนี้เป็น 1×10^{-3} วัน$^{-1}$ ล้ำนำมีอัตราดูดซึมแอมโมเนียเป็น 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

จากพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 4-9 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 3

พารามิเตอร์	ค่าที่กำหนด
L	1 กิโลเมตร
U	0.09 เมตรต่อวินาที
D	5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน
R	1×10^{-3} วัน$^{-1}$ (เพิ่มขึ้น)
Q	1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

แบบจำลองนี้สามารถกำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปสมการการพา-การแพร่ในสภาวะเสถียรในหนึ่งมิติดังนี้

$$-0.00598c'' + 0.05c' + 0.001c - 0.000001 = 0 \quad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดย

$$c(0) = 1.00 \quad (4.2)$$

$$c(1) = 0.20 \quad (4.3)$$

การประมาณผลเฉลยของแบบจำลอง 3 โดยวิธียิงเป้า

กำหนดให้ $k = c'$ (4.4)

$k' = c''$ (4.5)

กำหนดปัญหาค่าขอบเป็น

$c' = k$

$k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$ (4.6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบ

$$c(0) = 1$$

และ $$c(1) = 0.2 = X_f$$

ในการคำนวณโดยวิธียิงเป้าจะต้องกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหาและกำหนดค่าประมาณที่ยอมรับได้มีนัยสำคัญระดับ 0.003 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ $IVPa_0$: $c' = k$ (4.7)

: $k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$ (4.8)

ICa_0 : $c(0) = 1$ (4.9)

: $k(0) = 0 = a_0$ (4.10)

กำหนดให้ $IVPa_1$: $c' = k$ (4.11)

: $k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$ (4.12)

ICa_1 : $c(0) = 1$ (4.13)

: $k(0) = 0.5 = a_1$ (4.14)

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ โดยเลือกใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ4

$IVPa_0$: $c' = k$

: $k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$

ICa_0 : $c(0) = 1$

: $k(0) = 0$

เลือก $h = \dfrac{1 - 0}{10} = 0.1$ (4.15)

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$k(0) = k_0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0) \\ g(0,1,0) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.00112	1.00630	1.02085	1.05703	1.14312	1.34439	1.81151	2.89220	5.38900	11.15423
$k(x_i)$	0.00000	0.02605	0.08612	0.22470	0.54451	1.28259	2.98601	6.91750	15.99136	36.93392	85.26959

ตารางที่ 4-10 ผลเฉลยโดยประมาณของ IVPa$_0$ ของแบบจำลอง 3

เนื่องจากค่า $c(1.0) \approx 11.15423$ และเงื่อนไขขอบขวาของปัญหาค่าขอบคือ $c(1) = 0.2$ จะเห็นว่าผลการคำนวณยังไม่แม่นยำที่อยู่ในระดับนัยสำคัญที่พอใจ $|c - \tilde{c}| \leq 0.003$ ดังนั้นจึงต้องกระทำซ้ำดังนี้

$$\text{IVPa}_1 : c' = k$$

$$: k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$$

$$\text{ICa}_1 : c(0) = 1$$

$$: k(0) = 0.4$$

เลือก $h = \dfrac{1-0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$$k(0) = k_0$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.4) \\ g(0,1,0.4) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.06349	1.21250	1.55890	2.36086	4.21426	8.49438	18.37541	41.18340	93.82700	215.33156
$k(x_i)$	0.40000	0.94801	2.21277	5.13182	11.86895	27.41831	63.30638	146.13648	333.30942	778.53904	1796.90285

ตารางที่ 4-11 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 3

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_0, IVPa_1$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_0}(0.2) = f(0.0) = 11.15423$ (4.20)

$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.4) = 215.33156$ (4.21)

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.22)

$k(0) = -0.02146 = a_2$ (4.23)

โดย $a_2 = 0.4 - \left(\dfrac{0.4 - 0.0}{215.33156 - 11.15423} \right)(215.33156 - 0.2) = -0.02146$

จากนั้นกลับไปกำหนดในขั้นตอนที่ 2 ใหม่ดังนี้

ขั้นตอนที่ 2 $IVPa_2 : c' = k$ (4.24)

$: k' = 8.3612k + 0.16722c - 0.00017$ (4.25)

$ICa_2 : c(0) = 1$ (4.26)

$: k(0) = -0.02146$ (4.27)

เลือก $h = \dfrac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$c' = f(x, c, k)$

และ $k' = g(x, c, k)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$

$$k(0) = -0.02146$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,-0.02146) \\ g(0,1,-0.02146) \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.02146 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99777	0.99523	0.99198	0.98708	0.97835	0.96079	0.92286	0.83787	0.64431	0.20012
$k(x_i)$	-0.02146	-0.02341	-0.02798	-0.03856	-0.06304	-0.11960	-0.25017	-0.55160	-1.24735	-2.85320	-6.55957

ตารางที่ 4-12 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 3

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_2$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_2}(1.00000) = f(-0.02146) = 0.20012$ (4.30)

ค่าประมาณผลเฉลยของ $IVPa_2$ ณ $x=1.00000$ มีค่าใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบขวา ดังนั้น $\left|f(a_2) - 0.2\right| < 0.003$ ซึ่งอยู่ในนัยสำคัญที่ต้องการ ดังนั้นผลเฉลยปัญหาค่าขอบนี้คือ

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99777	0.99523	0.99198	0.98708	0.97835	0.96079	0.92286	0.83787	0.64431	0.20012

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4 แบบจำลอง 4 : กำหนดให้ลำน้ำมีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยบริเวณที่ต้องการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียคือระยะทาง 0-1 กิโลเมตร มีการปล่อยสารแอมโมเนียที่ตำแหน่ง x = 0 กิโลเมตร มีความเข้มข้นของแอมโมเนีย ณ จุดปล่อย เป็น 1 มิลลิกรัมต่อลิตร และตรวจพบความเข้มข้นของแอมโมเนียเป็น 0.2 มิลลิกรัมต่อลิตรที่ตำแหน่ง x = 1 กิโลเมตร ความเร็วของการไหลของกระแสน้ำในทิศทางแกน x คือ 9 เซนติเมตรต่อวินาที โดยสารแอมโมเนียที่ถูกปล่อยลงสู่แหล่งน้ำนี้มีสมบัติทางเคมีคือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของแอมโมเนียชนิดนี้ในน้ำคือ 5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียชนิดนี้เมื่อละลายในลำน้ำบริเวณนี้เป็น 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ ลำน้ำมีอัตราดูดซึมแอมโมเนียเป็น 1×10^{-8} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

จากพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่4-13 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 3

พารามิเตอร์	ค่าที่กำหนด
L	1 กิโลเมตร
U	0.09 เมตรต่อวินาที
D	5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน
R	1×10^{-5} วัน$^{-1}$
Q	1×10^{-8} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน (ลดลง)

แบบจำลองนี้สามารถกำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปสมการการพา-การแพร่ในสภาวะเสถียรในหนึ่งมิติดังนี้

$$-0.00598c'' + 0.05c' + 0.00001c - 0.00000001 = 0 \quad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดย

$$c(0) = 1.00 \quad (4.2)$$

$$c(1) = 0.20 \quad (4.3)$$

การประมาณผลเฉลยของแบบจำลอง 4 โดยวิธียิงเป้า

กำหนดให้ $k = c'$ (4.4)

$k' = c''$ (4.5)

กำหนดปัญหาค่าขอบเป็น

$c' = k$ (4.6)

$k' = 8.3612k + 0.00167c$ (4.7)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบ

$$c(0) = 1$$

และ $$c(1) = 0.2 = X_f$$

ในการคำนวณโดยวิธียิงเป้าจะต้องกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหาและกำหนดค่าประมาณที่ยอมรับได้มีนัยสำคัญระดับ 0.003 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ $IVPa_0 : c' = k$ (4.8)

$$: k' = 8.3612k + 0.00167c \quad (4.9)$$

$$ICa_0 : c(0) = 1 \quad (4.10)$$

$$: k(0) = 0 = a_0 \quad (4.11)$$

กำหนดให้ $IVPa_1 : c' = k$ (4.12)

$$: k' = 8.3612k + 0.00167c \quad (4.13)$$

$$ICa_1 : c(0) = 1 \quad (4.14)$$

$$: k(0) = 0.5 = a_1 \quad (4.15)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ โดยเลือกใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ4

$IVPa_0$: $c' = k$

: $k' = 8.3612k + 0.00167c$

ICa_0 : $c(0) = 1$

: $k(0) = 0$

เลือก $h = \dfrac{1 - 0}{10} = 0.1$ (4.16)

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$$k(0) = k_0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0) \\ g(0,1,0) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

พิจารณาโดยโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.00001	1.00006	1.00021	1.00057	1.00143	1.00342	1.00806	1.01875	1.04341	1.10024
$k(x_i)$	0.00000	0.00026	0.00086	0.00242	0.00542	0.01275	0.02964	0.06853	0.15812	0.36449	0.83986

ตารางที่ 4-14 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 4

เนื่องจากค่า $c(1.0) \approx 1.10024$ และเงื่อนไขขอบขวาของปัญหาค่าขอบคือ $c(1) = 0.2$ จะเห็นว่าผลการคำนวณยังไม่แม่นยำที่อยู่ในระดับนัยสำคัญที่พอใจ $|c - \tilde{c}| \leq 0.003$ ดังนั้นจึงต้องกระทำซ้ำดังนี้

$IVPa_1$: $c' = k$

: $k' = 8.3612k + 0.00167c$

ICa_1 : $c(0) = 1$

: $k(0) = 0.5$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$c' = f(x, c, k)$

และ $k' = g(x, c, k)$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$k(0) = k_0$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.5) \\ g(0,1,0.5) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.07796	1.25756	1.67129	2.62435	4.81975	9.87688	21.52599	48.35974	110.1713	252.55416
$k(x_i)$	0.50000	1.15199	2.65386	6.11342	14.08250	32.43927	74.72408	172.12712	396.49496	913.32614	2103.84644

ตารางที่ 4-15 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 4

ขั้นตอนที่3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_0, IVPa_1$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_0}(0.2) = f(0.0) = 1.10024$ (4.21)

$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.5) = 252.55416$ (4.22)

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.23)

$c'(0) = -0.00179 = a_2$ (4.24)

โดย a_2 คือ $a_2 = 0.5 - \left(\frac{0.5 - 0.0}{252.55416 - 1.10024}\right)(252.55416 - 0.2) = -0.00179$ (4.25)

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้ $IVPa_2 : c' = k$ (4.26)

$: k' = 8.3612k + 0.00167c$ (4.27)

$ICa_2 : c(0) = 1$ (4.28)

$: k(0) = -0.00218$ (4.29)

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$c' = f(x, c, k)$

และ $k' = g(x, c, k)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.30)

$$k(0) = -0.00179 \quad (4.31)$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,-0.00179) \\ g(0,1,-0.00179) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.00179 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84927	0.65273	0.20004
$k(x_i)$	-0.00179	-0.00386	-0.00864	-0.01964	-0.04497	-0.10333	-0.23777	-0.54744	-1.26077	-2.90392	-6.68891

ตารางที่ 4-16 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 4

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_2$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_2}(1.00000) = f(-0.00179) = 0.20004$ (4.34)

ค่าประมาณผลเฉลยของ $IVPa_2$ ณ $x=1.00000$ มีค่าใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบขวา ดังนั้น $|f(a_3) - 0.2| < 0.003$ ซึ่งอยู่ในนัยสำคัญที่ต้องการ ดังนั้นผลเฉลยปัญหาค่าขอบนี้คือ

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84927	0.65273	0.20004

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.5 แบบจำลอง 5 : กำหนดให้ลำน้ำมีการไหลแบบสม่ำเสมอโดยบริเวณที่ต้องการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียคือ ระยะทาง 0-1 กิโลเมตร มีการปล่อยสารแอมโมเนียที่ตำแหน่ง x = 0 กิโลเมตร มีความเข้มข้นของแอมโมเนีย ณ จุดปล่อย เป็น 1 มิลลิกรัมต่อลิตร และตรวจพบความเข้มข้นของแอมโมเนียเป็น 0.2 มิลลิกรัมต่อลิตรที่ตำแหน่ง L = 1 กิโลเมตร ความเร็วของการไหลของกระแสน้ำในทิศทางแกน x คือ 9 เซนติเมตรต่อวินาที โดนสารแอมโมเนียที่ถูกปล่อยลงสู่แหล่งน้ำนี้มีสมบัติทางเคมีคือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของแอมโมเนียชนิดนี้ในน้ำคือ 5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียชนิดนี้เมื่อละลายในลำน้ำบริเวณนี้เป็น 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ ล้ำนำมีอัตราดูดซึมแอมโมเนียเป็น 1×10^{-4} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน

จากพารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ตารางที่ 4-17 พารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ 5

พารามิเตอร์	ค่าที่กำหนด
L	1 กิโลเมตร
U	0.09 เมตรต่อวินาที
D	5.9×10^{-3} ตารางเมตรต่อวัน
R	1×10^{-5} วัน$^{-1}$
Q	1×10^{-4} กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร·วัน (เพิ่มขึ้น)

แบบจำลองนี้สามารถกำหนดให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ในรูปสมการการพา-การแพร่ในสภาวะเสถียรในหนึ่งมิติดังนี้

$$-0.00598c'' + 0.05c' + 0.00001c - 0.0001 = 0 \quad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดย

$$c(0) = 1.00 \quad (4.2)$$

$$c(1) = 0.20 \quad (4.3)$$

การประมาณผลเฉลยของแบบจำลอง 5 โดยวิธียิงเป้า

กำหนดให้ $k = c'$ (4.4)

$$k' = c'' \quad (4.5)$$

กำหนดปัญหาค่าขอบเป็น

$$c' = k \quad (4.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672 \quad (4.7)$$

เงื่อนไขขอบ

$$c(0) = 1$$

และ $$c(1) = 0.2 = X_f$$

ในการคำนวณโดยวิธียิงเป้าจะต้องกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น 2 ปัญหาและกำหนดค่าประมาณที่ยอมรับได้มีนัยสำคัญระดับ 0.003 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ $IVPa_0$: $c' = k$ (4.8)

: $k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672$ (4.9)

ICa_0 : $c(0) = 1$ (4.10)

: $k(0) = 0 = a_0$ (4.11)

กำหนดให้ $IVPa_1$: $c' = k$ (4.12)

: $k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672$ (4.13)

ICa_1 : $c(0) = 1$ (4.14)

: $k(0) = 0.5 = a_1$ (4.15)

ขั้นตอนที่ 2 หาผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ และ $IVPa_1$ โดยเลือกใช้วิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4

$IVPa_0$: $c' = k$

: $k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672$

ICa_0 : $c(0) = 1$

: $k(0) = 0$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$ (4.16)

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$k(0) = k_0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0) \\ g(0,1,0) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

พิจารณาโดยโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99993	0.99954	0.99839	0.99552	0.98868	0.97269	0.93561	0.84995	0.65242	0.19718
$k(x_i)$	0.00000	-0.00235	-0.00775	-0.0202	-0.04888	-0.11493	-0.26709	-0.61759	-1.42496	-3.28475	-7.56876

ตารางที่ 4-18 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_0$ ของแบบจำลอง 5

เนื่องจากค่า $c(1.0) \approx 0.09660$ และเงื่อนไขขอบขวาของปัญหาค่าขอบคือ $c(1) = 0.2$ จะเห็นว่าผลการคำนวณยังไม่แม่นยำที่อยู่ในระดับนัยสำคัญที่พอใจ $|c - \tilde{c}| \leq 0.003$ ดังนั้นจึงต้องกระทำซ้ำดังนี้

$IVPa_1 : c' = k$

$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672$

$ICa_1 : c(0) = 1$

$: k(0) = 0.5$

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$c' = f(x, c, k)$

และ $k' = g(x, c, k)$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = c_0$

$k(0) = k_0$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,0.5) \\ g(0,1,0.5) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	1.07785	1.25693	1.66921	2.61866	4.80548	9.84259	21.44533	48.17201	109.7366	251.55051
$k(x_i)$	0.50000	1.14939	2.64525	6.09098	14.02820	32.31158	74.42735	171.44100	394.9119	909.67690	2095.43783

ตารางที่ 4-19 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_1$ ของแบบจำลอง 5

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_0, IVPa_1$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_0}(0.2) = f(0.0) = 0.09660$ (4.21)

$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.5) = 251.55051$ (4.22)

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_2$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.23)

$c'(0) = -0.00021 = a_2$ (4.24)

โดย $a_2 = 0.5 - \left(\frac{0.5 - 0.0}{251.55051 - 0.09660}\right)(251.55051 - 0.2) = -0.00021$ (4.25)

จากนั้นกลับไปกำหนดในขั้นตอนที่ 2 ใหม่ดังนี้

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้ $IVPa_2 : c' = k$ (4.26)

$: k' = 8.3612k + 0.00167c - 0.01672$ (4.27)

$ICa_2 : c(0) = 1$ (4.28)

$: k(0) = -0.00021$ (4.29)

เลือก $h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$c' = f(x, c, k)$

และ $k' = g(x, c, k)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.30)

$$k(0) = -0.00021 \tag{4.31}$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,-0.00021) \\ g(0,1,-0.00021) \end{Bmatrix} \tag{4.32}$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.00021 \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99993	0.99954	0.99841	0.99556	0.98876	0.97286	0.93602	0.85090	0.65461	0.20221
$k(x_i)$	-0.00021	-0.00186	-0.00664	-0.01763	-0.04296	-0.10131	-0.23572	-0.54533	-1.25850	-2.90130	-6.68550

ตารางที่ 4-20 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_2$ ของแบบจำลอง 5

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_1, IVPa_2$

กำหนดให้ $$\tilde{x}_{a_1}(0.2) = f(0.5) = 251.55051 \tag{4.34}$$

$$\tilde{x}_{a_2}(0.2) = f(-0.00021) = 0.20221 \tag{4.35}$$

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดปัญหาค่าเริ่มต้นใหม่ $IVPa_3$

เงื่อนไขเริ่มต้น $c(0) = 1$ (4.36)

$$k(0) = -0.00020 = a_3 \tag{4.37}$$

โดย $$a_3 = -0.00021 - \left(\frac{-0.00021 - 0.50000}{0.20221 - 251.55051} \right)(0.20221 - 0.20000) = -0.00020 \tag{4.38}$$

จากนั้นกลับไปกำหนดในขั้นตอนที่ 2 ใหม่ดังนี้

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้ $IVPa_2 : c' = k$ (4.39)

$$: k' = 8.3612k + 0.00002c - 0.01672 \tag{4.40}$$

ICa_2 $: c(0) = 1$ (4.41)

$$: k(0) = -0.00020 \tag{4.42}$$

เลือก $$h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $X = \begin{Bmatrix} c \\ k \end{Bmatrix}$ โดยที่

$$c' = f(x, c, k)$$

และ $$k' = g(x, c, k)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $$c(0) = 1 \quad (4.43)$$

$$k(0) = -0.00020 \quad (4.44)$$

นั้นคือ $$X = \begin{Bmatrix} c' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(0,1,-0.00020) \\ g(0,1,-0.00020) \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{Bmatrix} c(0) \\ k(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.00020 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

พิจารณาโดยวิธี รุงเง-คุตตาอันดับ 4 จะได้

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99993	0.99954	0.99839	0.99552	0.98868	0.97269	0.93561	0.84995	0.65242	0.19718
$k(x_i)$	-0.00020	-0.00189	-0.00669	-0.01776	-0.04325	-0.10196	-0.23721	-0.54877	-1.26643	-2.91956	-6.72756

ตารางที่ 4-21 ผลเฉลยโดยประมาณของ $IVPa_3$ ของแบบจำลอง 5

ขั้นตอนที่ 3 พิจารณาผลเฉลยของ $IVPa_3$

กำหนดให้ $\tilde{x}_{a_3}(1.00000) = f(-0.00020) = 0.19718 \quad (4.47)$

ค่าประมาณผลเฉลยของ $IVPa_3$ ณ x=1.00000 มีค่าใกล้เคียงกับเงื่อนไขขอบขวา ดังนั้น $|f(a_3) - 0.2| < 0.003$ ซึ่งอยู่ในนัยสำคัญที่ต้องการ ดังนั้นผลเฉลยปัญหาค่าขอบนี้คือ

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99993	0.99954	0.99839	0.99552	0.98868	0.97269	0.93561	0.84995	0.65242	0.19718

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

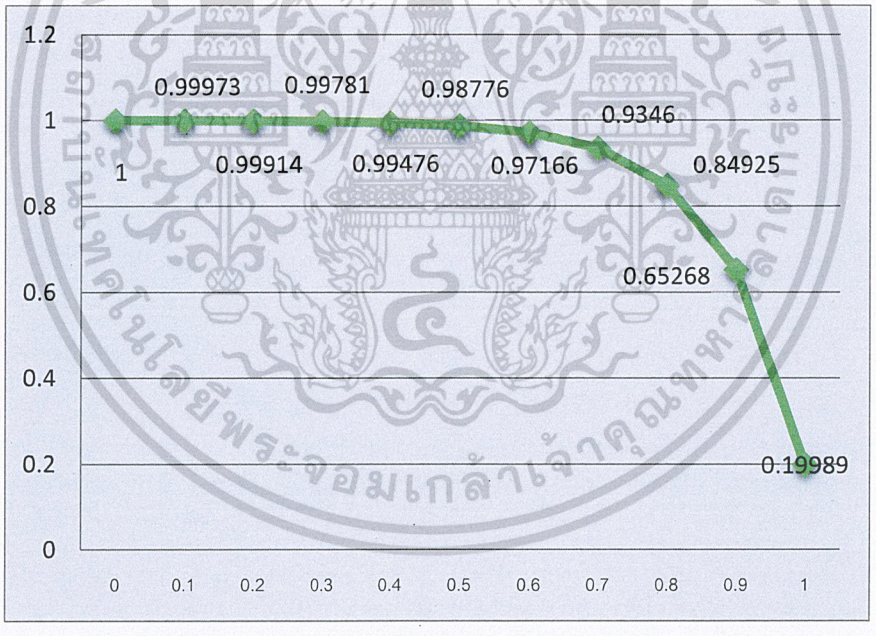
สรุปผลและอภิปรายผลการดำเนินงาน

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

5.1.1 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84925	0.65268	0.19989

ตารางที่ 5-1 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 1 เมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศ์กเมตร·วัน



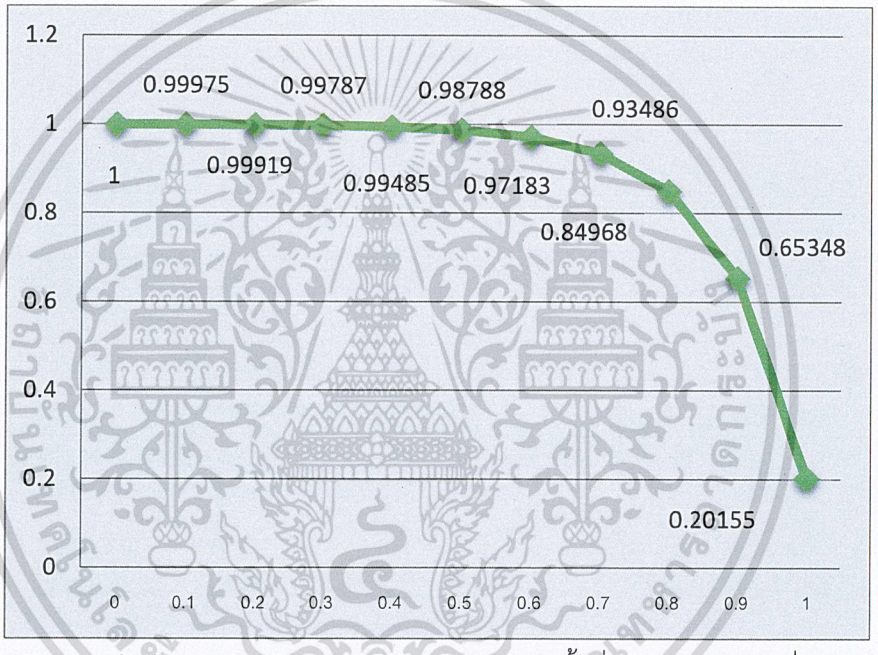
กราฟที่ 5-1 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (แบบจำลอง 1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.2 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99975	0.99919	0.99787	0.99485	0.98788	0.97183	0.93486	0.84968	0.65348	0.20155

ตารางที่ 5-2 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 2 เมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) 1×10^{-7} วัน$^{-1}$ และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศ์กเมตร·วัน



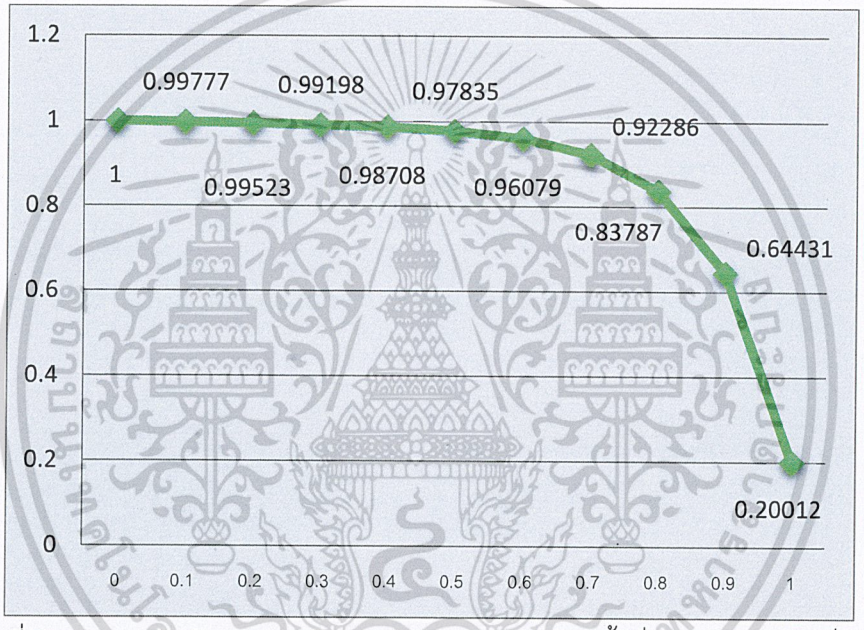
กราฟที่ 5-2 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (แบบจำลอง 2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99777	0.99523	0.99198	0.98708	0.97835	0.96079	0.92286	0.83787	0.64431	0.20012

ตารางที่ 5-3 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 3 เมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) 1×10^{-3} วัน$^{-1}$ และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) 1×10^{-6} กิโลกรัมต่อลูกบาศ์กเมตร·วัน



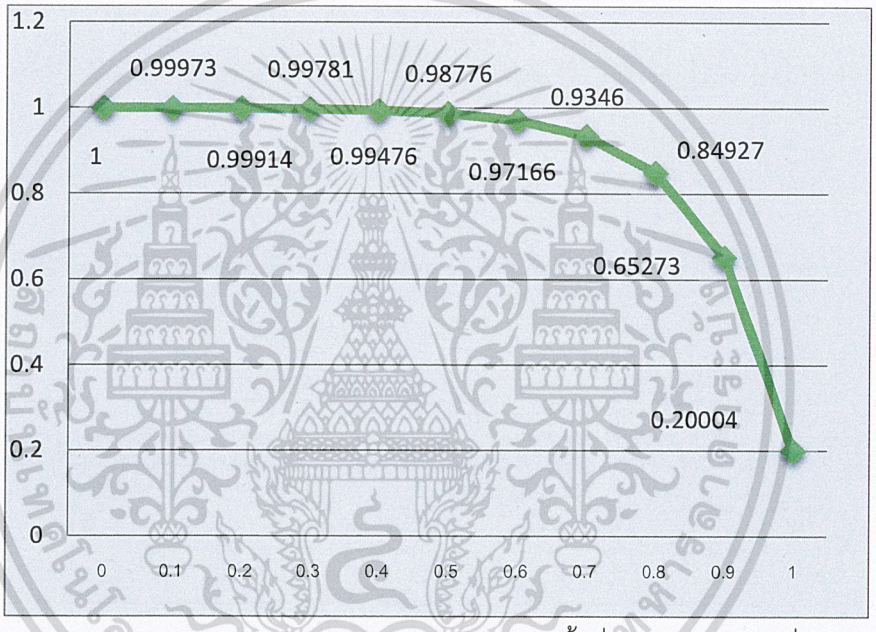
กราฟที่ 5-3 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (แบบจำลอง 3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.4 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99973	0.99914	0.99781	0.99476	0.98776	0.97166	0.93460	0.84927	0.65273	0.20004

ตารางที่ 5-4 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 4 เมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) 1×10^{-5} วัน$^{-1}$ และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) 1×10^{-8} กิโลกรัมต่อลูกบาศ์กเมตร·วัน



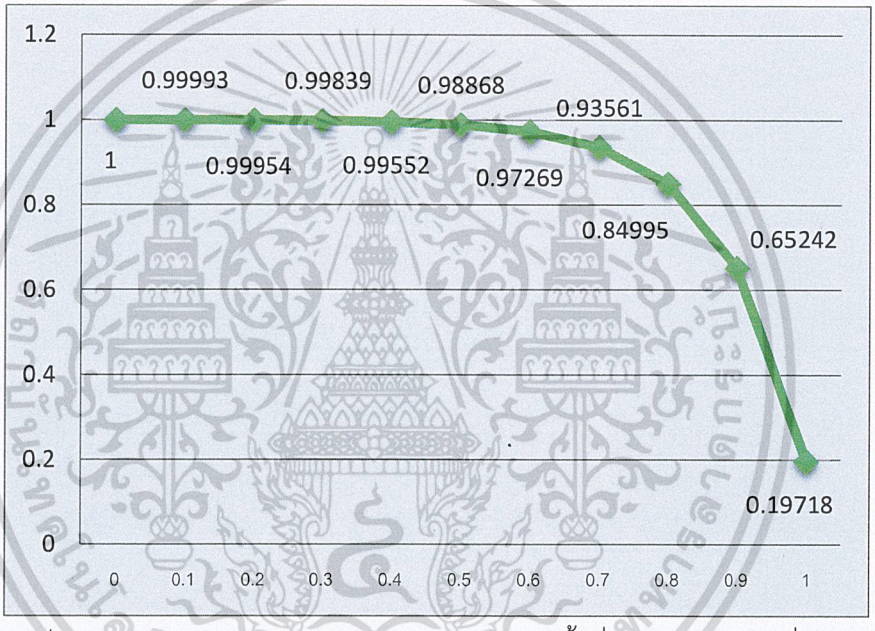
กราฟที่ 5-4 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (แบบจำลอง 4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.5 สรุปผลการดำเนินงานของแบบจำลอง

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.00000	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.00000
$c(x_i)$	1.00000	0.99993	0.99954	0.99839	0.99552	0.98868	0.97269	0.93561	0.84995	0.65242	0.19718

ตารางที่ 5-5 ค่าประมาณของแอมโมเนียในลำน้ำของแบบจำลอง 5 อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) 1×10^{-5} วัน $^{-1}$ และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) 1×10^{-4} กิโลกรัมต่อลูกบาศ์กเมตร·วัน



กราฟที่ 5-5 ความเข้มข้นของแอมโมเนียต่อระยะทางของลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (แบบจำลอง 5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบจำลองที่	R	Q	C(0.8)	C(0.9)	C(1)
1	1×10^{-5}	1×10^{-6}	0.84925	0.65268	0.19989
2	1×10^{-7}	1×10^{-6}	0.84968	0.65348	0.20155
3	1×10^{-3}	1×10^{-6}	0.83787	0.64431	0.20012
4	1×10^{-5}	1×10^{-8}	0.84927	0.65273	0.20004
5	1×10^{-5}	1×10^{-4}	0.84995	0.65242	0.19718

ตารางที่5-6 สรุปค่าความเข้มข้นของแอมโมเนียเมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R) และ อัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q) ของแต่ละแบบจำลอง

จากงานวิจัยนี้จะเห็นว่าหากอัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียละลายในลำน้ำ(R)เพิ่มขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของแอมโมเนียในลำน้ำลดลง และอัตราการดูดซึมแอมโมเนียในลำน้ำ(Q)เพิ่มขึ้นจะทำให้ความเข้มข้นของแอมโมเนียลดลงด้วยเช่นกัน และจะได้ว่าค่าความเข้มข้นของแอมโมเนียลดลงมากที่สุดคือแบบจำลองที่ 3 มีค่า $R = 1\times10^{-3}$ และ $Q = 1\times10^{-6}$

5.2 อภิปรายผลการดำเนินงาน

การประมาณค่าความเข้มข้นของแอมโมเนียที่ตรวจวัดในลำน้ำที่มีการไหลแบบสม่ำเสมอมาประมาณผลเฉลยของตัวเลขโดยใช้โปรแกรมMATLABมาช่วยในการคำนวณ สามารถทำได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำเป็นที่พอใจ สามารถจำลองแบบลำน้ำความยาว 1 กิโลเมตร การตรวจวัดแอมโมเนียในสถานการณ์ที่แตกต่างกันได้เช่น เมื่อจุดปล่อยแอมโมเนียเปลี่ยนระดับความเข้มข้นเมื่ออัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมีในการสลายตัวของแอมโมเนียเปลี่ยนไปในระดับต่างๆและเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราการดูดซึมแอมโมเนียของลำน้ำ

5.3 ข้อเสนอแนะ

การจำลองแบบควรพัฒนาไปสู่การจำลองแบบการตรวจวัดปริมาณแอมโมเนียในลำน้ำที่มีการไหลของกระแสน้ำที่ไม่สม่ำเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1]. กรมควบคุมมลพิษ. 2561. มาตรฐานคุณภาพน้ำ. เข้าถึงได้จาก : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

[2]. ณปภัช พิมพ์ดี กรุงเทพฯ. อัตราการเกิดปฏิกิริยาเคมี. 2560. เข้าถึงได้จาก : คลังความรู้ SciMath.

[3]. บทความดีมีสาระ. ตัวชีวัดคุณภาพน้ำ. กรุงเทพฯ : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

[4]. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่9. กรุงเทพฯ. โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์ : มหาวิทยาลัย,2555

[5]. นิรนาม. การส่งถ่ายความร้อน(Heat transfer). 2558. กรุงเทพฯ. เข้าถึงได้จาก : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

[6]. รองศาสตราจารย์ ดร.มนตรี มาลีวงศ์. 2559. ตอนที่57 บทนำเกี่ยวกับผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. เข้าถึงได้จาก : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

[7]. สำนักงานการระบายน้ำ. 2561. ข้อมูลระดับน้ำ. กรุงเทพฯ : ข้อมูลสถิติ(08/03/2561 10:45น.)

[8]. สำนักงานทรัพยากรธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมจังหวัดเพชรบุรี. 2557. การตรวจวัดคุณภาพน้ำอย่างง่าย. กรุงเทพฯ : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

[9]. สมาคมส่งเสริมความปลอดภัยและอนามัยในการทำงาน(ประเทศไทย). 2561. การใช้แอมโมเนียอย่างปลดภัย. กรุงเทพฯ : สื่อการเรียนรู้[ออนไลน์]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้