

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ

CUBOIDS IN THE FORM OF THREE-TUPLES OF
NATURAL NUMBERS



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

CUBOIDS IN THE FORM OF THREE-TUPLES OF NATURAL NUMBERS



A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2017

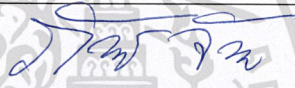
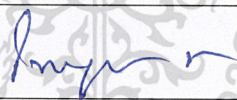
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ
Cuboids in the Form of Three-Tuples of Natural Numbers

ชื่อนักศึกษา นางสาวดวงสม ปิ่นนวงค์ รหัสนักศึกษา 57050058
 นายนพรุจ ซาซากิ รหัสนักศึกษา 57050078
 นายภาคภูมิ สระทองจันทร์ รหัสนักศึกษา 57050110

ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2560
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ภัทรารุธ จันทรเสียม ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.เดชา สมณะ กรรมการ	
รศ.ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในกรณีฉุกเฉินเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ		
ชื่อนักศึกษา	นางสาวดวงสม ปันนะวงศ์	รหัสนักศึกษา	57050058
	นายณพรุจ ชาญชากิ	รหัสนักศึกษา	57050078
	นายภาคภูมิ สระทองจันทร์	รหัสนักศึกษา	57050110
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์		
คณะ	วิทยาศาสตร์		
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)		
ปีการศึกษา	2560		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้นำเสนอการสร้างกล่องด้วยจำนวนในรูปสามสิ่งอันดับ (a,b,c) ที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับเรียกว่าจำนวน B' และการดำเนินการบน B' ได้แก่ การดำเนินการบวก การดำเนินการคูณ การแบ่งส่วนได้ และการหารลงตัว โดยที่การแบ่งส่วนได้ไม่จำเป็นต้องหารได้ลงตัว

คำสำคัญ : การหารลงตัว จำนวนเฉพาะ ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

Title	Cuboids in the Form of Three-Tuples of Natural Numbers			
Students	Miss Doungsom Pannawong	Student ID	57050058	
	Mr. Nopparut Sasaki	Student ID	57050078	
	Mr. Phakphum Sathongchan	Student ID	57050110	
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)			
Department	Mathematics			
Faculty	Science			
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)			
Academic Year	2017			
Advisor	Associate Professor Praiboon Pantaragphong			

Abstract

This special problem is present about cuboids in the form of three-tuples (a,b,c) and domain is natural number. This number is called B^3 . Operation on B^3 are consisting of addition, multiplication, partitions and divisibility. The number B^3 that can be partition is not necessary divisible.

Keywords: Divisibility, Prime Number, Discrete Cuboid, Prime Cuboid

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จได้ต้องขอขอบพระคุณ รศ.ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงษ์ ที่ให้ความกรุณาในการเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในหัวข้อปัญหาพิเศษนี้ ทั้งคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ ให้คำปรึกษาและความรู้เป็นอย่างดี สอนทักษะในการทำงาน มีความเอาใจใส่ลูกศิษย์กลุ่มนี้ ตลอดจนช่วยตรวจสอบแก้ไขให้ถูกต้องสมบูรณ์ จึงขอขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณอย่างสูง ผศ.ดร.ภัทรารุธ จันทรเสงี่ยม ที่กรุณามาเป็นประธานกรรมการตรวจสอบปัญหาพิเศษ และช่วยแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอย่างสูง ผศ.ดร.เดชา สมณะ ที่กรุณาเป็นกรรมการตรวจสอบปัญหาพิเศษ และช่วยแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกท่านที่ประสิทธิประสาทวิชาความรู้ พร้อมทั้งให้คำปรึกษา

ขอขอบพระคุณบุคลากร และเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่เอื้อเฟื้อให้ความสะดวกในเรื่องอุปกรณ์ในการทำงาน

ขอขอบพระคุณพี่ๆ เพื่อนๆ ทุกท่านสำหรับคำแนะนำช่วยเหลือต่างๆ และกำลังใจ ทำให้การทำงานดำเนินไปได้ด้วยดี

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ และญาติพี่น้องเป็นอย่างยิ่งที่คอยสนับสนุนให้กำลังใจ ให้คำแนะนำ คำตักเตือน และความห่วงใยในการดำเนินงานวิจัย

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้เขียนขอมอบให้ผู้ที่มิพระคุณและผู้ที่มีความปรารถนาดีต่อผู้เขียนตลอดมา หากมีสิ่งใดผิดพลาดหรือขาดตกบกพร่องผู้เขียนต้องขออภัยเป็นอย่างสูง และหวังว่าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่ต้องการศึกษาหรือสนใจในงานด้านนี้ต่อไป

ดวงสม	ปันนะวงศ์
นพรุจ	ชาซากิ
ภาคภูมิ	สระทองจันทร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง.....	ฉ
สารบัญรูป	ช
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ.....	1
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ.....	1
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน.....	2
บทที่ 2 หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 จำนวนธรรมชาติ.....	3
2.1.1 การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ	3
2.1.2 อันดับบนจำนวนธรรมชาติ	9
2.1.3 ตัวหารร่วมมาก.....	9
2.2. จำนวนเฉพาะ	12
2.2.1 ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต	12
2.3 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส.....	15
บทที่ 3 สมบัติเชิงพีชคณิตของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	
ในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ	19
3.1 การดำเนินการ	20
3.2 การแบ่งส่วน	21

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับที่ใช้ตามเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้แก้ไขได้โดยไม่แจ้งการดำเนินการ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 การหารลงตัวของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย	24
4.1 การหารลงตัวบน B^3	24
4.2 นอร์ม	26
4.3 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะบน B^3	28
บทที่ 5 สรุปผลปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ	32
5.1 สรุปผลปัญหาพิเศษ	32
5.2 ข้อเสนอแนะ	32
เอกสารอ้างอิง	33



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่

หน้า

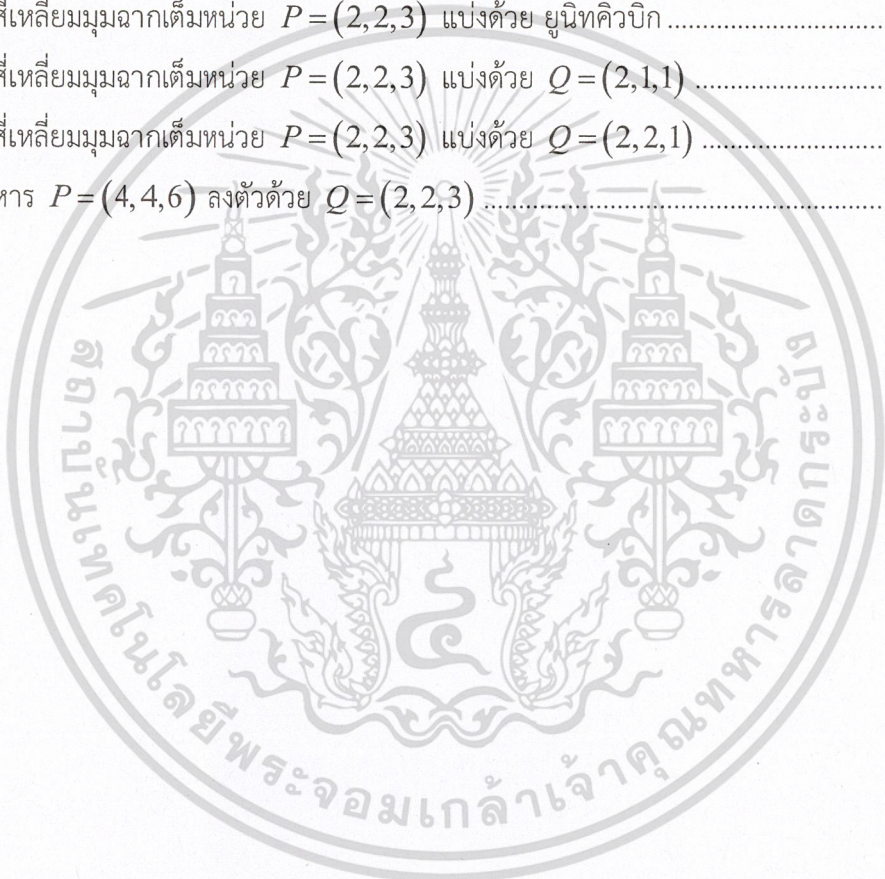
1.1 แสดงระยะเวลาการดำเนินงานตามแผน	2
--	---



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ความหมายของ $m \cdot n$	6
2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก.....	15
2.3 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงทฤษฎีบทของพีทาโกรัส	16
2.4 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงถึงบทพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส	18
3.1 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P=(2,2,3)$ ใน B^3	19
3.2 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $Q=(2,2,0)$ ใน B^3	20
3.3 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P=(2,2,3)$ แบ่งด้วย ยูนิทคิวบิก	22
3.4 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P=(2,2,3)$ แบ่งด้วย $Q=(2,1,1)$	22
3.5 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P=(2,2,3)$ แบ่งด้วย $Q=(2,2,1)$	23
4.1 การหาร $P=(4,4,6)$ ลงตัวด้วย $Q=(2,2,3)$	25



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

ในส่วนบทนำของปัญหาพิเศษเล่มนี้ คณะผู้วิจัยได้กล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญ วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ ขอบเขตของปัญหาพิเศษ ขั้นตอนในการดำเนินการและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

คณะผู้วิจัยได้ศึกษาหนังสือ “ทฤษฎีจำนวน 2 (Number Theory 2)” [3] ในหัวข้อเรื่องจำนวนเต็มเกาส์ (Gaussian Integer) ทำให้คณะผู้วิจัยสนใจในเรื่องทฤษฎีจำนวนตัวเลข จำนวนธรรมชาติ การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ และการหารลงตัว เป็นต้น

คณะผู้วิจัยสนใจที่จะแทนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วยจำนวนสามสิ่งอันดับในรูป (a,b,c) พร้อมทั้งศึกษาคุณสมบัติที่เกี่ยวข้อง การแบ่งกล่องใหญ่ให้เป็นกล่องเล็ก โดยที่คุณสมบัตินั้นมี การดำเนินการ ได้แก่ การดำเนินการบวก การดำเนินการคูณ การแบ่งส่วน การหารลงตัว และการแบ่งกล่องได้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. ศึกษาการแทนรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วยด้วยสามสิ่งอันดับ
2. ศึกษาการแบ่งกล่องและคุณสมบัติของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. นิยามหรือกำหนด การดำเนินการบวก คูณบนทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย
2. ศึกษาอนุกรม ของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย
3. ศึกษาการแบ่งของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย
4. ศึกษาการหารลงตัวของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย
5. ศึกษาทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาเรื่องจำนวนธรรมชาติ
2. ศึกษาทฤษฎีพีทาโกรัส
3. กำหนดนิยามและศึกษาการดำเนินการที่เกี่ยวข้อง
4. รวบรวมข้อมูลที่ผ่านมาวิเคราะห์แล้ว นำมาจัดทำรูปเล่ม
5. นำข้อมูลมาจัดทำ power point เตรียมเสนอ และทำอุปกรณ์ประกอบการนำเสนอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
6. นำปัญหาพิเศษนี้มานำเสนอ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1. การใช้คณิตศาสตร์อธิบายรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก
- 2. การใช้คณิตศาสตร์ในการแบ่งรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1.6 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาการดำเนินงานตามแผนงานแสดงไว้ในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 แสดงระยะเวลาการดำเนินงานตามแผน

กิจกรรม	ระยะเวลาในการดำเนินงาน										
	ปี 2560					ปี 2561					
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.
1) ศึกษาข้อมูล และเตรียมการแก้ปัญหาพิเศษ											
2) ศึกษาและออกแบบขั้นตอนวิธีการตรวจสอบจำนวนธรรมชาติ											
3) นำเสนอความก้าวหน้าของปัญหาพิเศษ											
4) ศึกษาจำนวนธรรมชาติ											
5) ศึกษาทฤษฎีพีทาโกรัส											
6) รวบรวมข้อมูล ทำรูปเล่ม ปัญหาพิเศษ											
7) นำเสนอปัญหาพิเศษ											

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 จำนวนธรรมชาติ

แนวคิดเกี่ยวกับ จำนวนธรรมชาติ เริ่มมาตั้งแต่มนุษย์ รู้จักการนับถือได้ว่าการนับเป็นสิ่งแรกๆ ที่คณิตศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์ ดังนั้น จำนวนธรรมชาติเขียนแทนด้วย N จึงเป็นจำนวนชนิดแรกที่เกิดขึ้น

2.1.1 การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ

การบวก

สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ ผลบวกของ m และ n เขียนแทนด้วย $m+n$ เป็นจำนวนที่ได้จากการรวมสิ่งของจำนวน m และ n ขึ้น

เนื่องจาก 0 แสดงถึงความว่างเปล่า จึงกำหนดให้ $m+0=m$

เนื่องจาก 1 เป็นจำนวนถัดไปจาก 0 จึงมองได้ว่า $m+1$ เป็นจำนวนถัดไปจาก $m+0$ ซึ่งก็คือจำนวนถัดไปจาก m จึงจะกำหนดให้ $m+1$ เป็นตัวตามหลังของ m นั่นคือ $m+1=S(m)$

ทำนองเดียวกัน สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ใดๆ เนื่องจาก $S(k)$ เป็นตัวตามหลังของ k ซึ่งก็คือจำนวนถัดไป จะได้นิยาม $m+k$ จะกำหนดให้ $m+S(k)=S(m+k)$

บทนิยามของ ผลบวก ของจำนวนธรรมชาติจึงเป็นไปดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 นิยาม ผลบวก (Sum) ของจำนวนธรรมชาติ m และ n เขียนแทนด้วย $m+n$ ดังนี้

$$m+0=m$$

$$m+S(k)=S(m+k) \text{ สำหรับจำนวนธรรมชาติ } k \text{ ใดๆ}$$

หมายเหตุ 1. บทนิยามข้างต้นอาศัย ทฤษฎีบทการเวียนเกิด (Recursion Theorem) ซึ่งบทนิยามข้างต้นได้ว่า $+$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N ดังนั้นสำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะมีจำนวนธรรมชาติเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เป็นผลบวกของ m และ n

2. ในปัญหาพิเศษนี้จะกำหนดให้ 0 เป็นจำนวนธรรมชาติ

บทนิยาม 2.1.2 เรียกการดำเนินการ $+$ ว่า การบวก (Addition) บน N

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.1

$$0+1 = 0+S(0) = S(0+0) = S(0) = 1$$

$$0+2 = 0+S(1) = S(0+1) = S(1) = 2$$

$$1+1 = 1+S(0) = S(1+0) = S(1) = 2$$

$$1+2 = 1+S(1) = S(1+1) = S(2) = 3$$

$$2+1 = 2+S(0) = S(2+0) = S(2) = 3$$

$$2+2 = 2+S(1) = S(2+1) = S(3) = 4$$

$$2+3 = 2+S(2) = S(2+2) = S(4) = 5$$

$$4+1 = 4+S(0) = S(4+0) = S(4) = 5$$

$$4+2 = 4+S(1) = S(4+1) = S(5) = 6$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใดๆ ได้ว่า

$$n+1 = n+S(0) = S(n+0) = S(n) \quad \text{นั่นคือ } n+1 = S(n)$$

เพื่อที่จะพิสูจน์ว่าการบวกมีสมบัติการสลับที่ จะต้องอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1.3 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ จะได้ว่า

1. $0+n=n$
2. $S(m)+n=S(m+n)$

พิสูจน์ 1. ให้ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0+n=n\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $0+0=0$ ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $0+k=k$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$

และ $0+S(k)+S(0+k)=S(k)$ ดังนั้น $S(k) \in A$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

2. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid S(m)+n=S(m+n)\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $S(m)+0=S(m)=S(m+0)$ ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $S(m)+k=S(m+k)$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$

และ $S(m)+S(k)=S(S(m)+k)=S(S(m+k))=S(m+S(k))$

ดังนั้น $S(k) \in A$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

#

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.1.4 สำหรับจำนวนธรรมชาติ l, m และ n ใดๆ ได้ว่า

1. $m+n = n+m$ (กฎการสลับที่ของการบวก)
2. $l+(m+n) = (l+m)+n$ (กฎการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)

พิสูจน์ 1. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n = n+m\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $m+0 = m = 0+m$ โดยบทตั้ง 2.1.3 (1) ดังนั้น $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $m+k = k+m$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$ และ

$$\begin{aligned} m+S(k) &= S(m+k) \\ &= S(k+m) \\ &= S(k)+m \end{aligned} \quad \text{(โดยบทตั้ง 2.1.3 (2))}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

2. ให้ l และ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid l+(m+n) = (l+m)+n\}$$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $l+(m+0) = (l+m)+0$ ดังนั้น $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $l+(m+k) = (l+m)+k$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} S(k) \in \mathbb{N} \text{ และ } l+(m+S(k)) &= l+S(m+k) \\ &= S(l+(m+k)) \\ &= S((l+m)+k) \\ &= (l+m)+S(k) \end{aligned}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$ #

หมายเหตุ สำหรับจำนวนธรรมชาติ l, m และ n ใดๆ โดยกฎการเปลี่ยนหมู่ของการบวก อาจละวงเล็บสำหรับ $(l+m)+n$ และ $l+(m+n)$ ได้ โดยเขียนเพียง $l+m+n$ เช่นเดียวกันสำหรับการดำเนินการอื่นๆ ที่นิยามต่อจากนี้ ถ้าการดำเนินการนั้นสอดคล้องกฎการเปลี่ยนหมู่

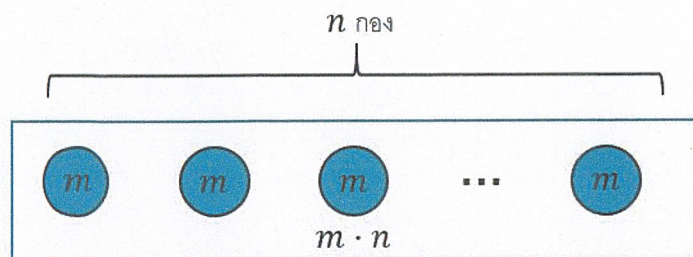
การคูณ

ผลคูณ ของจำนวนธรรมชาติ m และ n เขียนแทนด้วย $m \cdot n$ ดังนี้

$$m \cdot n = \underbrace{m+m+\dots+m}_n^1$$

เอกสารนี้อาจกำหนดให้ $m \cdot n = \underbrace{n+n+\dots+n}_m$ ได้เช่นกัน โดยการกำหนดทั้งสองแบบนี้อาศัยทฤษฎีบทการไม่ซ้ำกันใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิใช้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้ เว้นแต่เกิด แต่สำหรับในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้นิยามแบบแรก

จากความหมายของผลบวก $m \cdot n$ จึงเป็นจำนวนที่ได้จากการรวมสิ่งของจำนวน n กอง โดยที่แต่ละกองมีของอยู่จำนวน m ชิ้น



รูปที่ 2.1 ความหมายของ $m \cdot n$

เนื่องจาก 0 เป็นจำนวนธรรมชาติที่แสดงถึงความว่างเปล่า ดังนั้นผลคูณของจำนวนธรรมชาติใดๆ กับ 0 ก็จะแสดงถึงความว่างเปล่าด้วยเพราะไม่มีกองของสิ่งของเลย จึงจะกำหนดให้ $m \cdot 0 = 0$

สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ใดๆ จากที่ $S(k) = k + 1$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} m \cdot S(k) &= \underbrace{m + m + \dots + m + m}_{k+1} \\ &= \underbrace{m + m + \dots + m + m}_{k+1} \\ &= (m \cdot k) + m \end{aligned}$$

จึงได้บทนิยาม ผลคูณ ของจำนวนธรรมชาติดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.5 นิยาม ผลคูณ (Product) ของจำนวนธรรมชาติ m และ n เขียนแทนด้วย $m \cdot n$ ดังนี้

$$m \cdot 0 = 0$$

$$m \cdot S(k) = (m \cdot k) + m \text{ สำหรับจำนวนธรรมชาติ } k \text{ ใดๆ}$$

หมายเหตุ เช่นเดียวกับ ผลบวก บทนิยามของ ผลคูณ อาศัยทฤษฎีบทการเวียนเกิด จึงได้ว่าเป็นการดำเนินการทวิภาคบน N ดังนั้นสำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ จะมีจำนวนธรรมชาติเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เป็นผลคูณของ m และ n

บทนิยาม 2.1.6 เรียกการดำเนินการ $\cdot$ ว่า การคูณ (Multiplication) บน N

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot S(0) = (1 \cdot 0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 1 \cdot S(1) = (1 \cdot 1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot S(0) = (2 \cdot 0) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot S(1) = (2 \cdot 1) + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot S(2) = (2 \cdot 2) + 2 = 2 + 4 = 6$$

หมายเหตุ เมื่อเขียน $m \cdot n + l$ หมายถึง $(m \cdot n) + l$ ทำนองเดียวกัน $l + m \cdot n$ หมายถึง $l + (m \cdot n)$ นอกจากนี้อาจเขียน mn แทน $m \cdot n$ จะถือปฏิบัติเช่นนี้กับการบวกและการคูณของจำนวนอื่นในหัวข้อต่อไป

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใดๆ ได้ว่า

$$1. \ n \cdot 1 = n \quad \text{เนื่องจาก } n \cdot 1 = n \cdot S(0) = (n \cdot 0) + n = 0 + n = n$$

$$2. \ n \cdot 2 = n + n \quad \text{เนื่องจาก } n \cdot 2 = n \cdot S(1) = (n \cdot 1) + n = n + n$$

บทตั้ง 2.1.7 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ จะได้ว่า

$$1. \ 0 \cdot n = 0$$

$$2. \ S(m) \cdot n = m \cdot n + n$$

พิสูจน์ 1. ให้ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \cdot n = 0\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $0 \cdot 0 = 0$ ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $0 \cdot k = 0$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$

และ $0 \cdot S(k) = 0 \cdot k + 0 = 0 + 0 = 0$ ดังนั้น $S(k) \in A$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

2. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid S(m) \cdot n = m \cdot n + n\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $S(m) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = (m \cdot 0) + 0$ ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $S(m) \cdot k = m \cdot k + k$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$

และ $S(m) \cdot S(k) = S(m) \cdot k + S(m)$

$$= (m \cdot k + k) + S(m)$$

$$= S((m \cdot k + k) + m)$$

$$= S(m \cdot k + (k + m))$$

$$= S(m \cdot k + (m + k))$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น (โดยกฎการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ทำซ้ำหรือดัดแปลงในลักษณะใดๆ (โดยกฎการสลับที่ของการบวก)

$$\begin{aligned}
&= S((m \cdot k + m) + k) && \text{(โดยกฎการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)} \\
&= S(m \cdot S(k) + k) \\
&= m \cdot S(k) + S(k)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$ #

ทฤษฎีบท 2.1.8 สำหรับจำนวนธรรมชาติ l, m และ n ใดๆ ได้ว่า

1. $m \cdot n = n \cdot m$ (กฎการสลับที่ของการคูณ)
2. $l \cdot (m + n) = (l \cdot m) + (l \cdot n)$ (กฎการแจกแจงทางซ้าย)
3. $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n$ (กฎการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ)

พิสูจน์ 1. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m\}$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$ โดยบทตั้ง 2.1.7 (1) ดังนั้น $0 \in A$
ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $m \cdot k = k \cdot m$ ทำให้ได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$ และ

$$\begin{aligned}
m \cdot S(k) &= (m \cdot k) + m \\
&= (k \cdot m) + m \\
&= S(k) \cdot m && \text{(โดยบทตั้ง 2.1.7 (2))}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

2. ให้ l และ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid l \cdot (m + n) = (l \cdot m) + (l \cdot n)\}$$

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $l \cdot (m + 0) = l \cdot m = (l \cdot m) + 0 = (l \cdot m) + (l \cdot 0)$

ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $l \cdot (m + k) = (l \cdot m) + (l \cdot k)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
S(k) \in \mathbb{N} \text{ และ } l \cdot (m + S(k)) &= l \cdot S(m + k) \\
&= (l \cdot (m + k)) + l \\
&= ((l \cdot m) + (l \cdot k)) + l \\
&= (l \cdot m) + ((l \cdot k) + l) \\
&&& \text{(โดยกฎการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)} \\
&= (l \cdot m) + (l \cdot S(k))
\end{aligned}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$

3. ให้ l และ m เป็นจำนวนธรรมชาติและ

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $0 \in \mathbb{N}$ และ $l \cdot (m \cdot 0) = l \cdot 0 = 0 = (l \cdot m) \cdot 0$ ได้ว่า $0 \in A$

ให้ $k \in A$ ดังนั้น $k \in \mathbb{N}$ และ $l \cdot (m \cdot k) = (l \cdot m) \cdot k$ จึงได้ว่า $S(k) \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{และ } l \cdot (m \cdot S(k)) &= l \cdot ((m \cdot k) + m) \\ &= (l \cdot (m \cdot k)) + (l \cdot m) && \text{(โดยกฎการแจกแจงทางซ้าย)} \\ &= ((l \cdot m) \cdot k) + (l \cdot m) \\ &= (l \cdot m) \cdot S(k) \end{aligned}$$

ดังนั้น $S(k) \in A$ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $A = \mathbb{N}$ #

ข้อสังเกต โดยกฎการแจกแจงทางซ้ายและกฎการสลับที่ของการคูณ จึงได้กฎการแจกแจงทางขวาด้วย กล่าวคือ

สำหรับจำนวนธรรมชาติ l, m และ n ใดๆ ได้ว่า

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot l &= l \cdot (m+n) \\ &= (l \cdot m) + (l \cdot n) \\ &= (m \cdot l) + (n \cdot l) \end{aligned}$$

2.1.2 อันดับบนจำนวนธรรมชาติ

ดังที่กล่าวไปแล้ว ต้องการจำนวนธรรมชาติมาใช้ในการนับ เนื่องจากจำนวนจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อนับ ดังนั้นถ้าให้สัญลักษณ์ “ $<$ ” แทน “น้อยกว่า” ต้องการให้ได้ว่า

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

จึงกำหนดนิยามของ ความน้อยกว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติดังนี้

บทนิยาม 2.1.9 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n กล่าวว่า m น้อยกว่า n เขียนแทนด้วย $m < n$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนธรรมชาติ k ที่ไม่ใช่ 0 ซึ่ง $n = m + k$ และกล่าวว่า m น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เขียนแทนด้วย $m \leq n$ ก็ต่อเมื่อ $m < n$ หรือ $m = n$

สามารถเขียน

$n > m$ แทน $m < n$ และกล่าวว่า n มากกว่า m

$n \geq m$ แทน $m \leq n$ และกล่าวว่า n มากกว่าหรือเท่ากับ m

2.1.3 ตัวหารร่วมมาก (The Greatest Common Divisor)

บทนิยาม 2.1.10 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ จะกล่าวว่า a หาร b (เขียนแทนด้วย $a | b$) ถ้ามีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $b = ac$ ไม่การณใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้ง a ยังเป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดซึ่งหาร b ได้

และสำหรับกรณีที่ a หาร b ไม่ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \nmid b$ จากบทนิยาม 2.1.10 เรียกว่า a ตัวหาร (divisor) หรือตัวประกอบ (factor) ของ b และ b เรียกว่าพหุคูณ (multiple) ของ a

ทฤษฎีบท 2.1.11 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $a|0, 1|a, a|a$
- 2) $a|1$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm 1$
- 3) ถ้า $a|b$ และ $c|d$ แล้ว $ac|bd$
- 4) ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$
- 5) $a|b$ และ $b|a$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm b$
- 6) ถ้า $a|b$ และ $b \neq 0$ แล้ว $|a| \leq |b|$
- 7) ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx+cy)$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม 2.1.12 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่มีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์ ตัวหารร่วมมาก ของ a และ b แทนด้วย $\gcd(a, b)$ เป็นจำนวนเต็มบวก d ซึ่งสอดคล้องกับ

1. $d|a$ และ $d|b$
2. ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c \leq d$

ตัวอย่าง 2.3 ตัวหารที่เป็นบวกของ -12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

ส่วนตัวหารของ 30 คือ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

ดังนั้นตัวหารร่วมที่เป็นที่เป็นบวกของ -12 และ 30 คือ 1, 2, 3, 6

เนื่องจาก 6 เป็นจำนวนที่มากที่สุด จะได้ $\gcd(-12, 30) = 6$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\gcd(-5, 5) = 5, \gcd(9, 19) = 1$

และ $\gcd(-8, -36) = 4$

ทฤษฎีบท 2.1.13 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม (และไม่เป็นศูนย์ทั้งสองจำนวน) แล้ว

มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $\gcd(a, b) = ax + by$ นำไปใช้ประโยชน์ด้านการคำนวณ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ สมมติ $a \neq 0$ และให้เซต $S = \{au + bv : au + bv > 0 ; u, v \in \mathbb{Z}\}$

เนื่องจาก a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

แล้ว $|a| = au + b \cdot 0$ อยู่ใน S

เมื่อเลือก $u=1$ หรือ $u=-1$ จึงได้ a เป็นบวกหรือลบ ดังนั้นโดยคุณสมบัติการเป็นอันดับที่ดี S มีสมาชิกที่เล็กที่สุด

ให้ d เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ S โดยนิยามจะมีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง

$$d = ax + by$$

และคาดว่า $d = \gcd(a, b)$

โดยขั้นตอนวิธีการหาร จะมีจำนวนเต็ม q และ r ซึ่ง

$$a = qd + r \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leq r < d$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(ax + by) \\ &= a(1 - qx) + b(-qy) \end{aligned}$$

นั่นคือถ้า $r \neq 0$ จะได้ว่า $r \in S$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า d เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดของ S และ $r < d$ ดังนั้น $r = 0$

และ $a = qd$ หรือ $d|a$

และโดยขั้นตอนวิธีการหาร เช่นเดียวกันจะได้ $d|b$ จึงทำให้ d เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b

ถ้า c เป็นตัวหารร่วมที่เป็นบวกของ a และ b แล้ว ทฤษฎีบท 2.1.11 (7) สรุปได้ว่า $c|(ax + by)$ นั่นคือ $c|d$ และจากทฤษฎีบท 2.1.11 (6) จะได้

$c = |c| \leq |d| = d$ เพื่อให้ d เป็นตัวที่มากกว่าตัวหารร่วมที่เป็นบวกทุกตัวของ a และ

b จึงได้ว่า $d = \gcd(a, b)$

#

บทนิยาม 2.1.14 จำนวนเต็ม a และ b ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกว่า จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime number หรือ coprime) เมื่อ $\gcd(a, b) = 1$

ตัวอย่าง 2.4 จำนวนเต็มที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน เช่น

-9 กับ 26 เพราะว่า $\gcd(-9, 26) = 1$

4 กับ 15 เพราะว่า $\gcd(4, 15) = 1$

ทฤษฎีบท 2.1.15 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แล้ว

a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $1 = ax + by$

พิสูจน์ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ จะได้ $\gcd(a,b)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.1.13 จะได้ $1=ax+by$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $1=ax+by$ โดยที่ x,y เป็นจำนวนเต็มบางจำนวน และ

$$d = \gcd(a,b)$$

เนื่องจาก $d|a$ และ $d|b$ โดยทฤษฎี 2.1.10 จะได้ $d|(ax+by)$ หรือ $d|1$ และจาก

ที่ d เป็นจำนวนเต็มบวกและเงื่อนไขของการหารลงตัว สรุปได้ว่า $d=1$ #

บทแทรก 2.1.16 ถ้า $\gcd(a,b)=d$ แล้ว $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$

พิสูจน์ จะเห็นว่า $\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ นั้นอยู่ในรูปของเศษส่วน แต่ความจริงแล้วเป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก d เป็นตัวหารของทั้ง a และ b

จาก $\gcd(a,b)=d$ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง

$$d=ax+by$$

จากนั้นหารทั้งสองข้างของสมการด้วย d จะได้

$$1=\left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{b}{d}\right)y$$

เนื่องจาก $\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ เป็นจำนวนเต็มจึงได้ว่า

$\frac{a}{d}$ และ $\frac{b}{d}$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ หรือ $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$ #

ตัวอย่างเช่น $\gcd(-12,30)=6$ และ $\gcd\left(\frac{-12}{6}, \frac{30}{6}\right)=\gcd(-2,5)=1$

2.2. จำนวนเฉพาะ

2.2.1 ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

บทนิยาม 2.2.1 จำนวนเต็ม $p > 1$ เรียกว่าจำนวนเฉพาะ (prime) ถ้าจำนวนเต็มนั้นมีตัวหารเป็น 1 และ p เท่านั้น

จำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 ซึ่งไม่เป็นจำนวนเฉพาะเรียกว่าจำนวนประกอบ (composite)
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำนวนเต็มบวก 10 จำนวนแรกนั้นมี 2, 3, 5, 7 เป็นจำนวนเฉพาะและ 4, 6, 8, 9, 10 เป็นจำนวนประกอบที่มี 2 เป็นจำนวนเฉพาะและเป็นจำนวนคู่เพียงจำนวนเดียว ส่วน 1 นั้นเป็นกรณีเฉพาะที่ไม่เป็นทั้งจำนวนเฉพาะและจำนวนประกอบ

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p|ab$ แล้ว $p|a$ หรือ $p|b$

พิสูจน์ ถ้า $p|a$ แล้วการพิสูจน์สิ้นสุด จึงสมมติให้ $p \nmid a$

เนื่องจากตัวหารที่เป็นบวกของ p คือ 1 และ p เท่านั้น จึงได้ว่า $\gcd(p, a) = 1$

(โดยทั่วไป $\gcd(p, a) = p$ หรือ $\gcd(p, a) = 1$ ขึ้นอยู่กับ $p|a$ หรือ $p \nmid a$)

เพราะฉะนั้นจากบทตั้งของยุคลิดจะได้ $p|b$

#

ตัวอย่างเช่น 36 เป็นจำนวนเต็มที่มีจำนวนเฉพาะ 3 หารลงตัว และเมื่อเขียนในรูปผลคูณกรณีต่างๆ ได้

$$6 \cdot 6 = 9 \cdot 4 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2$$

ซึ่งจะเห็นว่า 3 หารลงตัวอย่างน้อยตัวประกอบหนึ่งในผลคูณ

ทฤษฎีบท 2.2.1 นี้สามารถขยายเทอมผลคูณได้มากกว่า 2 เทอม

บทแทรก 2.2.3 ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะและ $p|a_1 a_2 \dots a_n$ แล้ว $p|a_k$ สำหรับบาง k โดยที่ $1 \leq k \leq n$

พิสูจน์ ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์กับ n ที่เป็นจำนวนของตัวประกอบ

เมื่อ $n=1$ จะเห็นว่าข้อสรุปเป็นจริง และเมื่อ $n=2$ ยังเป็นจริงโดยทฤษฎีบท 2.2.2

สมมติ เมื่อ $n > 2$ ตั้งสมมติฐานไว้ว่า p หารผลคูณของจำนวนที่น้อยกว่า n ตัว

ประกอบลงตัว นั่นคือหารลงตัวอย่างน้อย 1 ตัวประกอบ

ให้ $p|a_1 a_2 \dots a_n$ จากทฤษฎีบท 2.2.2 จะได้ว่า $p|a_n$ หรือ $p|a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ แต่จาก

สมมติฐานที่ตั้งไว้ $p|a_k$ โดยที่ $1 \leq k \leq n-1$ จึงสรุปได้ว่า p หารจำนวนเต็ม

จำนวนหนึ่งของ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ลงตัว

#

บทแทรก 2.2.4 ถ้า $p, q_1, q_2, \dots, q_n$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $p|q_1 q_2 \dots q_n$ แล้ว $p = q_k$ สำหรับบาง k โดยที่ $1 \leq k \leq n$

พิสูจน์ จากบทแทรก 2.2.3 สำหรับบาง k โดยที่ $1 \leq k \leq n$

จากจำนวนเฉพาะ q_k ไม่มีจำนวนเต็มบวกอื่นหารลงนอกจาก 1 หรือ q_k

เพราะว่า $p > 1$ จึงทำให้ได้ข้อสรุปว่า $p = q_k$ นั่นคือ $p | q_k$

#

ทฤษฎีบท 2.2.5 ทฤษฎีหลักมูลเลขคณิต

ทุกๆ จำนวนเต็มบวก $n > 1$ สามารถแสดงได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ และเขียนได้เพียงแบบเดียวเท่านั้นโดยไม่คำนึงถึงลำดับของตัวประกอบที่ได้

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จำนวนเต็ม n เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนประกอบ

กรณีที่ n เป็นจำนวนเฉพาะไม่มีอะไรที่ต้องพิสูจน์

ถ้า n เป็นจำนวนประกอบแล้วจะมีจำนวนเต็ม d ที่สอดคล้องกับ $d | n$ และ

$$1 < d < n$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม d เลือก p_1 เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด (ซึ่งเป็นไปได้เนื่องจาก

คุณสมบัติ การจัดอันดับที่ดี) แล้ว p_1 ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ มิฉะนั้นจะมีตัวหาร q ที่

$$1 < q < p_1$$

แต่ $q | p_1$ และ $p_1 | n$ จะได้ $q | n$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งที่ว่า p_1 เป็นตัวหารที่เป็นบวกที่น้อยที่สุดของ n ซึ่งไม่เท่ากับ 1 ฉะนั้น

$$n = p_1 n_1 \text{ เมื่อ } p_1 \text{ เป็นจำนวนเฉพาะและ } 1 < n_1 < n$$

ถ้า n_1 เป็นจำนวนเฉพาะแล้วจะเขียนได้ แต่ถ้าไม่เป็น จะทำซ้ำสำหรับจำนวนเฉพาะ

$$p_2 \text{ ซึ่ง } n_1 = p_2 n_2$$

$$n = p_1 p_2 n_2 \text{ โดยที่ } 1 < n_2 < n_1$$

ถ้า n_2 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ให้ $n_2 = p_3 n_3$ ซึ่ง p_3 เป็นจำนวนเฉพาะ

$$n = p_1 p_2 p_3 n_3 \text{ โดยที่ } 1 < n_3 < n_2$$

ลำดับลดลง

$$n > n_1 > n_2 > \dots > 1$$

ซึ่งต้องเป็นจำนวนจำกัดของขั้น n_{k-1} เป็นจำนวนเฉพาะ ให้เป็น p_k ฉะนั้น

$$n = p_1 p_2 \dots p_k$$

การพิสูจน์ส่วนที่สองคือเขียนเป็นผลคูณจำนวนเฉพาะได้เพียงแบบเดียว สมมติว่า

$$n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s \text{ โดยที่ } r \leq s$$

เมื่อ p_i และ q_j เป็นจำนวนเฉพาะ และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$ และ $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$ เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $p_1|q_1q_2\cdots q_s$ โดยบทแทรก 2.2.4 ได้ว่า $p_1=q_k$ สำหรับบาง k แต่ $p_1\geq q_k$ และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกันจะได้ $q_1\geq p_1$ ฉะนั้น $p_1=q_1$ ละเว้นการเขียนตัวประกอบร่วมจึงได้

$$p_2p_3\cdots p_r=q_2q_3\cdots q_s$$

และเมื่อทำกระบวนการซ้ำจะได้ $p_2=q_2$ และ

$$p_3p_4\cdots p_r=q_3q_4\cdots q_s$$

ถ้า $r<s$ แล้วจะได้ $1=q_{r+1}q_{r+2}\cdots q_s$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เนื่องจากแต่ละ $q_j>1$ ฉะนั้น $r=s$ และ

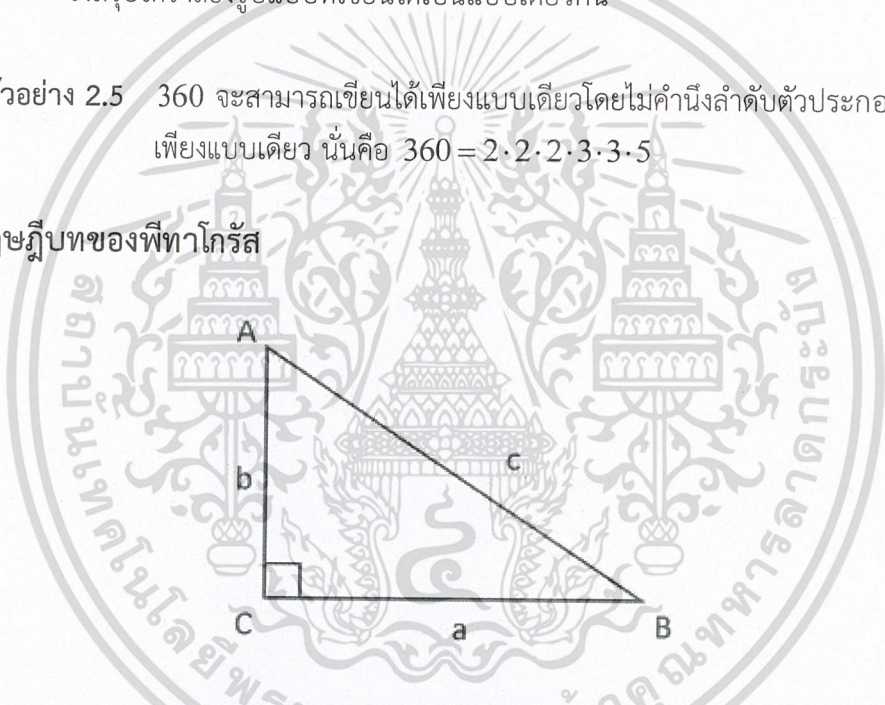
$$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ldots,\ p_r=q_r$$

จึงสรุปได้ว่าสองรูปแบบที่เขียนได้เป็นแบบเดียวกัน

#

ตัวอย่าง 2.5 360 จะสามารถเขียนได้เพียงแบบเดียวโดยไม่คำนึงลำดับตัวประกอบได้เพียงแบบเดียว นั่นคือ $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$

2.3 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส



รูปที่ 2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangle)

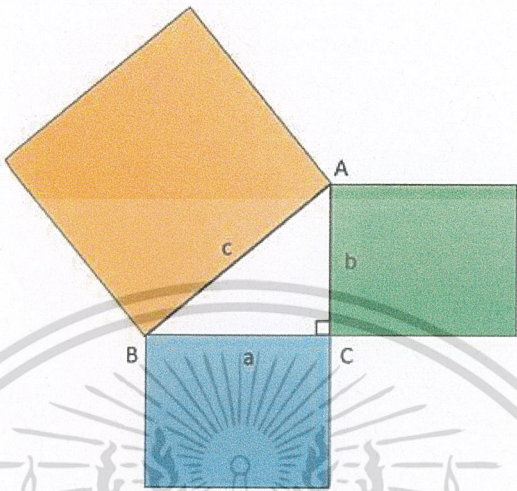
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งทำมุม 90° จากรูปที่ 2.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangle) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง $\angle ACB=90^\circ$

- โดย $\overline{AB}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่ตรงข้ามกับมุม C แทนด้วยความยาว c หน่วย
- $\overline{AC}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่ตรงข้ามกับมุม B แทนด้วยความยาว b หน่วย
- $\overline{BC}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากอยู่ตรงข้ามกับมุม A แทนด้วยความยาว a หน่วย

ทฤษฎีบท (พีทาโกรัส)

“ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ความยาวกำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉากมีค่าเท่ากับผลบวกของความยาวกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน” นั้น ไม่นับว่าดีให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จึงสามารถอธิบายโดยพิจารณาจากพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก มีค่าเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากสองด้าน ดังรูปที่ 2.3

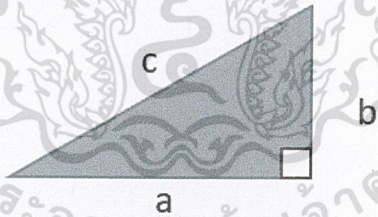


รูปที่ 2.3 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

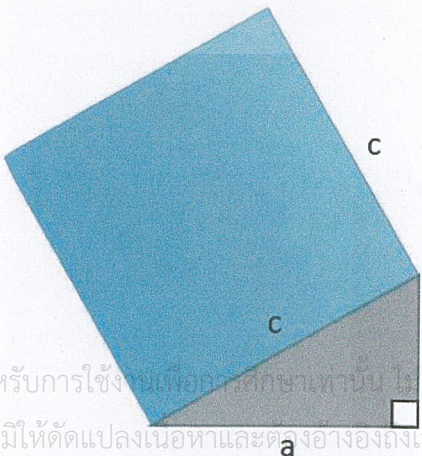
นั่นคือ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

พิสูจน์ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

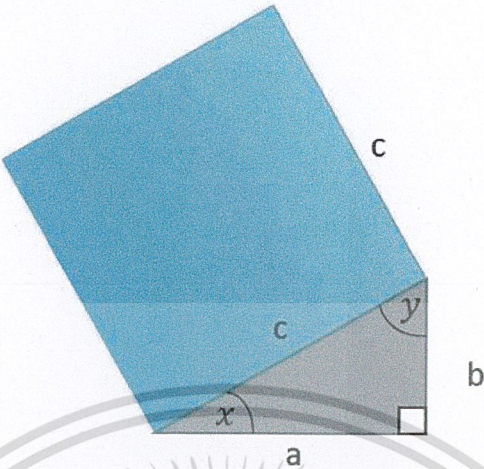


สร้างพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส c^2 ตารางหน่วยบนด้าน c

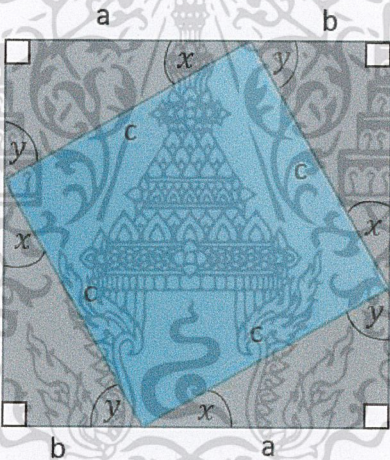


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

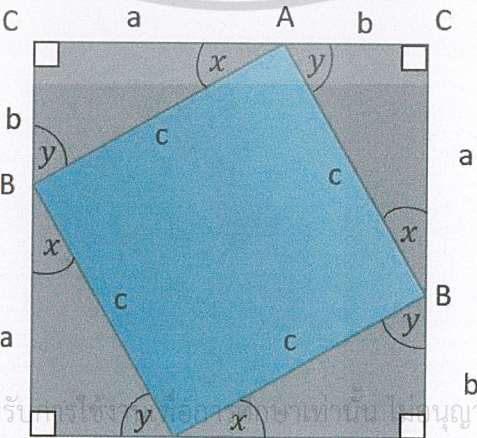
กำหนดมุมฉากในสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ดังรูป



สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากให้ตัดผ่านมุมทั้ง 4 มุมของพื้นที่ c^2 ตารางหน่วย

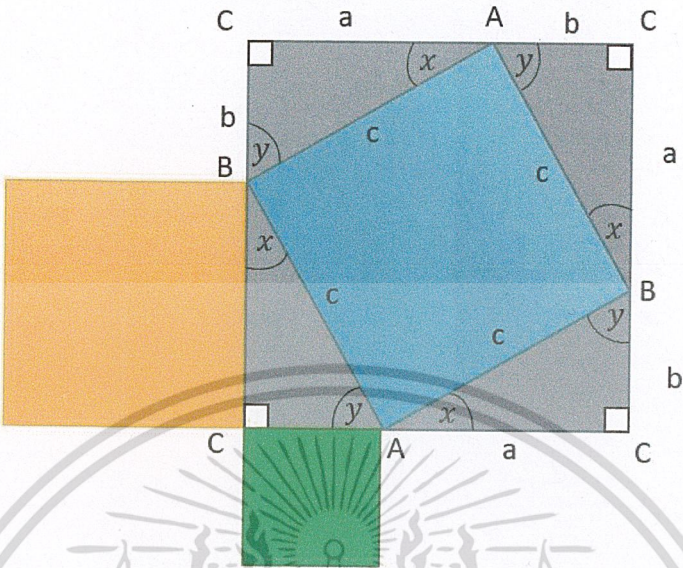


กำหนดมุม A, B และ C ดังรูปจะได้ว่า $\overline{AB} = b$ และ $\overline{BC} = a$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นจะได้ ด้านแต่ละด้านดังรูป



รูปที่ 2.4 สามเหลี่ยมมุมฉากแสดงถึงบทพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ต้องการแสดงว่า $c^2 = a^2 + b^2$

จากพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส CCCC จะได้

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) \text{ หรือ } a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

ดังนั้น $c^2 = a^2 + b^2$

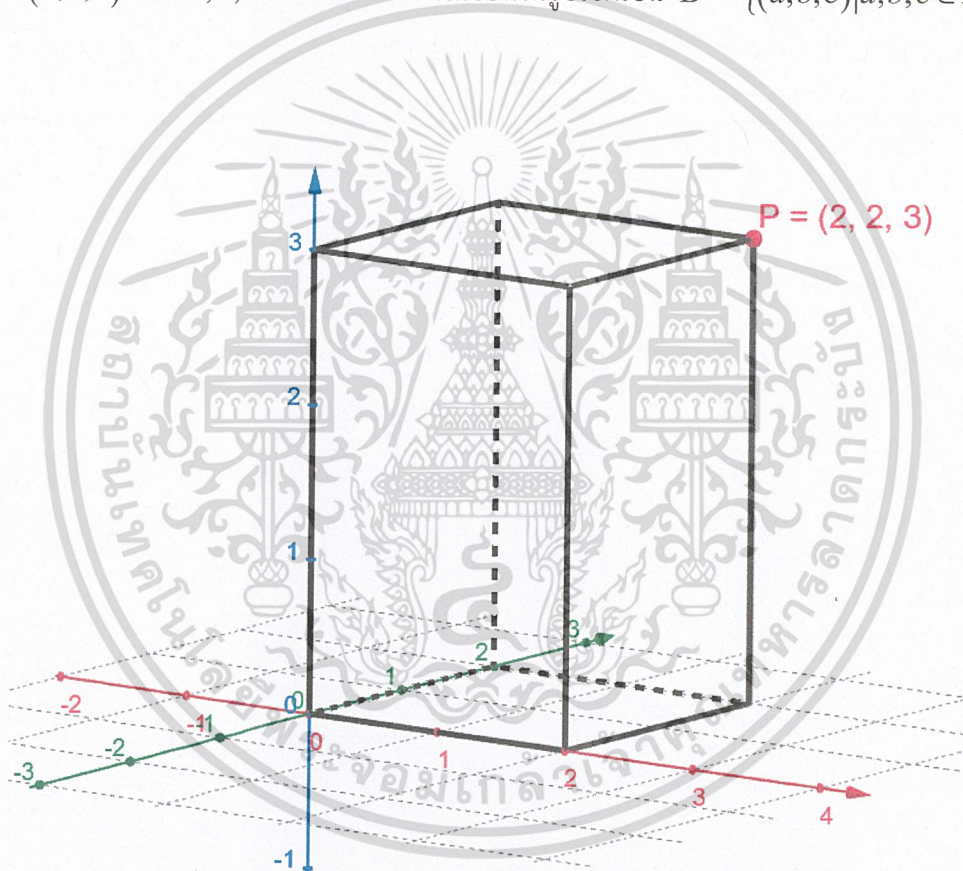
#

บทที่ 3

สมบัติเชิงพีชคณิตของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบ ของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Cuboid) คือการอธิบายรูปทรงด้วยจำนวนจริง 3 จำนวน ในที่นี้จะสนใจ
แต่ละด้านของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย (Discrete Cuboid) แทนด้วยเซต B^3 เป็นเซตของสามสิ่ง
อันดับ (a,b,c) เมื่อ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และสามารถเขียนในรูปเซตเป็น $B^3 = \{(a,b,c) | a,b,c \in \mathbb{N}\}$

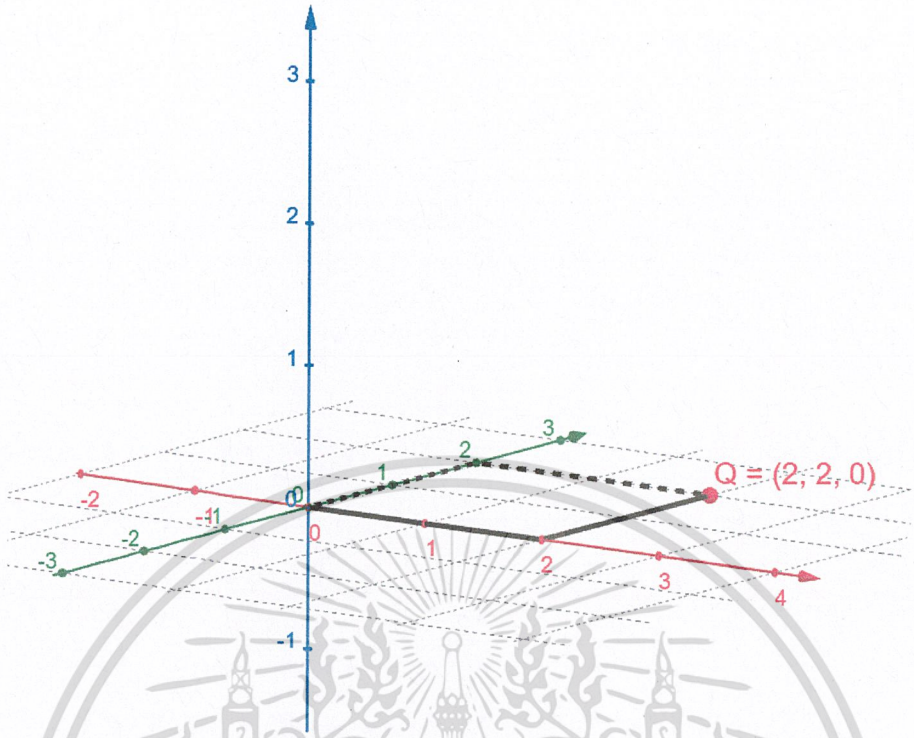


รูปที่ 3.1 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P = (2,2,3)$ ใน B^3

จะเรียกทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $(1,1,1) \in B^3$ เรียกว่า “ยูนิทคิวบิก” (Unit Cubic)

หากมีสมาชิกตัวใดเป็นศูนย์ ค่าของจุดที่ได้จะไม่เป็นลักษณะของกล่อง จะเป็นลักษณะของพื้นที่หรือ
เส้นตรง เช่น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $Q = (2, 2, 0)$ ใน B^3

บทนิยาม 3.1.2 การเท่ากัน
สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$
 $P = Q$ นั่นคือ $(a, b, c) = (x, y, z)$
ก็ต่อเมื่อ $a = x$ และ $b = y$ และ $c = z$

การเท่ากันจะพิจารณาในตำแหน่งที่ตรงกันว่าเท่ากันหรือไม่

ตัวอย่าง 3.1 $P = (a, b, c)$ และ $Q = (5, 4, 7)$

$P = Q$ ก็ต่อเมื่อ $a = 5$ และ $b = 4$ และ $c = 7$

3.1 การดำเนินการ (Operations)

บทนิยาม 3.1.1 การบวก
สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$
 $P + Q = (a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ภายในเท่านั้น เมื่อถูกนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและห้อยย้งอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3.2 $P = (1, 2, 3)$ และ $Q = (5, 4, 7)$

$$P + Q = (1, 2, 3) + (5, 4, 7) = (1+5, 2+4, 3+7) = (6, 6, 10)$$

บทนิยาม 3.1.2 การคูณระหว่าง B^3 กับ $\mathbb{N}$

สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $d \in \mathbb{N}$

$$d \cdot P = d \cdot (a, b, c) = (d \cdot a, d \cdot b, d \cdot c) = (a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d)$$

ตัวอย่าง 3.3 $P = (1, 2, 3)$ และ $d = 2$

$$d \cdot P = 2 \cdot (1, 2, 3) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (2, 4, 6)$$

บทนิยาม 3.1.3 การคูณบน B^3

สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$

$$P \cdot Q = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = (a \cdot x, b \cdot y, c \cdot z)$$

ตัวอย่าง 3.4 $P = (1, 2, 3)$ และ $Q = (2, 3, 5)$

$$P \cdot Q = (1, 2, 3) \cdot (2, 3, 5) = (1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5) = (2, 6, 15)$$

3.2 การแบ่งส่วน (Partitions)

บทนิยาม 3.2.1

สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$

P แบ่งส่วนด้วย Q ได้ เขียนแทนด้วย $Q \parallel P$

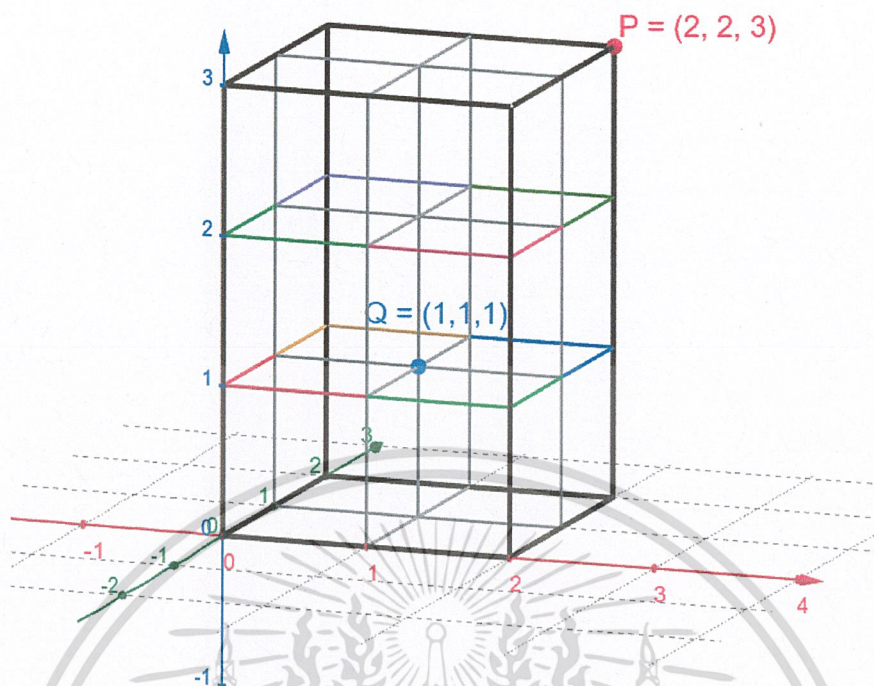
ก็ต่อเมื่อ $x|a$ และ $y|b$ และ $z|c$

ข้อสังเกต ให้ดูแต่ละตำแหน่งว่าหารลงตัวได้

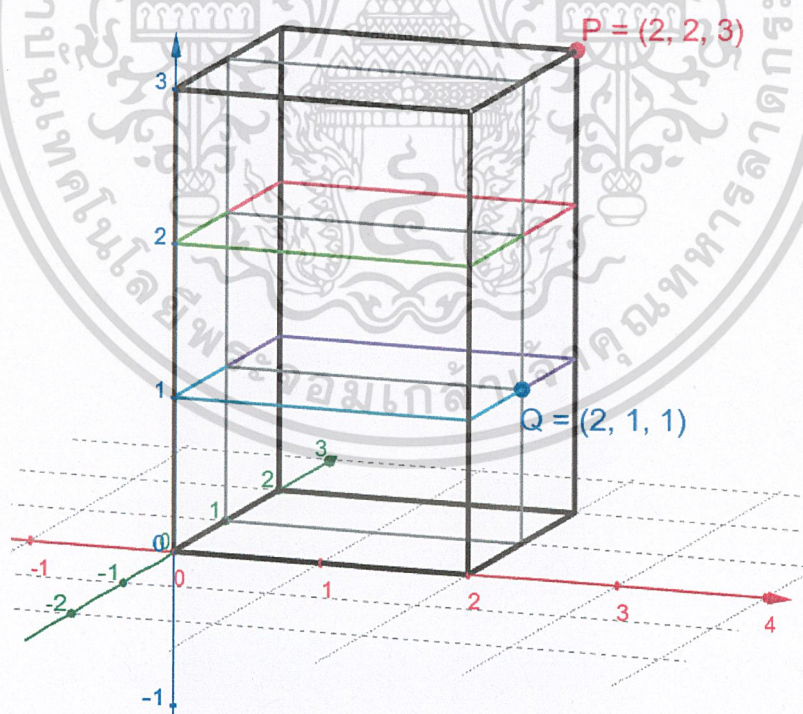
ตัวอย่าง 3.5 $P = (2, 2, 3)$ จะสามารถแบ่งได้ทั้งหมดดังนี้

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 3), (2, 2, 3) \text{ เป็นต้น}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

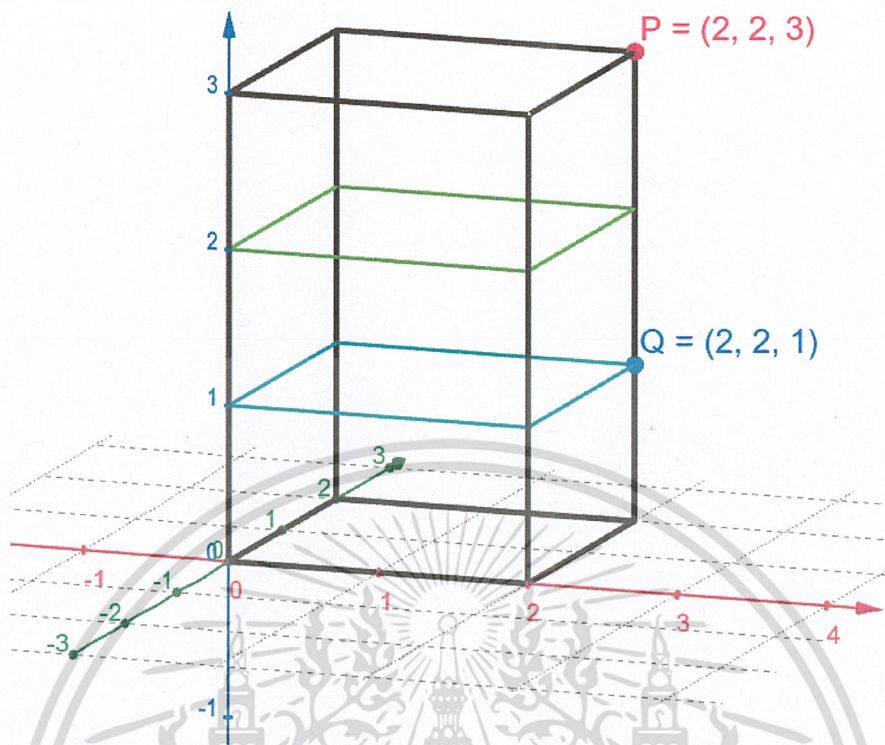


รูปที่ 3.3 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P = (2, 2, 3)$ แบ่งด้วย ยูนิทคิวบิก



รูปที่ 3.4 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P = (2, 2, 3)$ แบ่งด้วย $Q = (2, 1, 1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.5 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย $P = (2, 2, 3)$ แบ่งด้วย $Q = (2, 2, 1)$

ทฤษฎีบท 3.2.2

สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$
ถ้า $Q \parallel P$ แล้วจะแบ่ง P เป็น Q ได้ด้วยจำนวน $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ กล่อง
เมื่อ k_i คือผลหารในแต่ละตำแหน่ง

พิสูจน์ ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$
สมมติ $Q \parallel P$ นั่นคือจะมี k_1, k_2, k_3 ที่ทำให้
 $xk_1 = a, yk_2 = b, zk_3 = c$
ดังนั้นจำนวนทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ใช้ในแต่ละแกนคือ k_1, k_2, k_3 ตามลำดับ
จะได้จำนวนที่ใช้ทั้งหมดเป็น $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ #

บทที่ 4

การหารลงตัวของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย

จากบทที่แล้วจะแสดงถึงการดำเนินการเบื้องต้นที่จะใช้ในปัญหาพิเศษนี้ ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทอื่นๆ และทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะบน B^3

4.1 การหารลงตัวบน B^3 (Divisibility)

ต่อไปนี ถ้าแบ่งส่วนทุกด้านเท่ากัน จะเรียกว่าหารลงตัว

บทนิยาม 4.1.1

สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$
จะกล่าวว่า Q หาร P ลงตัว เขียนแทนด้วย $Q|P$ ก็ต่อเมื่อ
มีจำนวนธรรมชาติ k บางจำนวนที่ทำให้ $xk = a$ และ $yk = b$ และ $zk = c$
ในกรณีนี้จะเรียก Q ว่าตัวประกอบของ P และเรียก P ว่าพหุคูณของ Q

ข้อสังเกต ในการหารลงตัวจะต้องใช้จำนวนธรรมชาติ k เดียวกันในการแบ่งแต่ละด้าน

ตัวอย่าง 4.1 $P = (4, 4, 6)$ และ $Q = (2, 2, 3)$ เนื่องจาก

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$3 \cdot 2 = 6$$

ซึ่ง $k = 2$ ดังนั้น $Q|P$

ตัวอย่าง 4.2 $(2, 3, 4)$ สามารถแบ่งเป็นอะไรได้บ้าง แล้วทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วยใดบ้างที่

หาร $(2, 3, 4)$ ลงตัว

เนื่องจาก 2 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2

เนื่องจาก 3 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 3

และเนื่องจาก 4 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2, 4

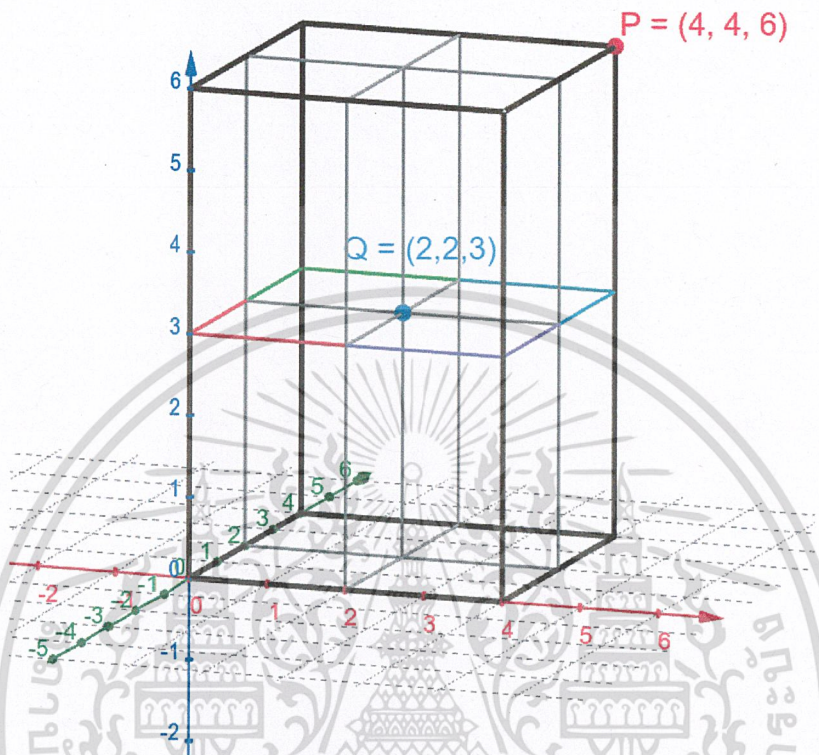
ดังนั้นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แบ่ง $(2, 3, 4)$ ได้คือ $(1, 1, 1), (1, 1, 2),$

$(1, 1, 4), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (2, 1, 1), (2, 3, 1), (2, 3, 2),$

$(2, 1, 2), (2, 1, 4), (2, 3, 4)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วยที่หาร $(2,3,4)$ ลงตัวคือ $(2,3,4)$ เท่านั้น
เพราะว่ามีเพียง $k=1$ ที่ทำให้ $k \cdot (2,3,4) = (2,3,4)$



รูปที่ 4.1 การหาร $P=(4,4,6)$ ลงตัวด้วย $Q=(2,2,3)$

ทฤษฎีบท 4.1.2 ถ้า $P, Q, R \in B^3$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $P|P$ (Reflexive)
- 2) ถ้า $P|Q$ และ $Q|R$ แล้ว $P|R$ (Transitive)
- 3) ถ้า $P|Q$ และ $Q|P$ แล้ว $P=Q$ (Anti-Symmetric)

พิสูจน์ กำหนดให้ m, n เป็นจำนวนธรรมชาติ

และ P, Q, R เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใดๆที่อยู่ใน

- 1) เพราะว่า $1 \cdot P = P$
- 2) เพราะว่า $P|Q$ และ $Q|R$ ดังนั้น $\exists m \in \mathbb{N}$ และ $\exists n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$Q = m \cdot P \text{ และ } R = n \cdot Q$$

และ $R = n \cdot Q = n(m \cdot P) = (nm) \cdot P = k \cdot P$ เมื่อ $k = n \cdot m$ และ $k \in \mathbb{N}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ดังนั้น $P|R$
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) เพราะว่า $P|Q$ ทำให้ได้ว่า $Q = m \cdot P$ สำหรับ $\exists m \in \mathbb{N}$

และ เพราะว่า $Q|P$ ทำให้ได้ว่า $P = n \cdot Q$ สำหรับ $\exists n \in \mathbb{N}$

$$\text{ดังนั้น } P = n \cdot Q = n \cdot (m \cdot P) = (n \cdot m) \cdot P$$

$$\text{เนื่องจาก } P = 1 \cdot P \text{ ดังนั้น } (n \cdot m) \cdot P = 1 \cdot P$$

$$\text{จะได้ว่า } n \cdot m = 1$$

$$\text{ดังนั้น } n = 1 \text{ และ } m = 1$$

$$\text{จาก } P = n \cdot Q \text{ จะได้ว่า } P = 1 \cdot Q = Q$$

$$\text{สรุปได้ว่า } P = Q$$

#

ทฤษฎีบท 4.1.3

$$\text{สำหรับ } P = (a, b, c) \in B^3 \text{ และ } Q = (x, y, z) \in B^3$$

ถ้า Q หาร P ลงตัวแล้ว P แบ่งส่วนด้วย Q ได้

พิสูจน์

$$\text{ให้ } P = (a, b, c) \in B^3 \text{ และ } Q = (x, y, z) \in B^3$$

สมมติ $Q|P$ นั่นคือ $\exists k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k \cdot Q = P$

$$k \cdot Q = k \cdot (x, y, z) = (k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z) = P$$

$$(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z) = (a, b, c)$$

นั่นคือ $kx = a, ky = b, kz = c$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{N}$

$$\text{ดังนั้น } x|a, y|b, z|c$$

$$\text{นั่นคือ } Q||P$$

#

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 4.1 จะเห็นว่า $(2, 2, 3)$ จะหาร $(4, 4, 6)$ ลงตัวและ $(4, 4, 6)$ แบ่งส่วนได้ด้วย $(2, 2, 3)$ เช่นกันเพราะ $2|4$ และ $2|4$ และ $3|6$

4.2 นอร์ม (Norm)

บทนิยาม 4.2.1 สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ นอร์มของ P เขียนแทนด้วย $N(P)$

$$\text{และ } N(P) = a^2 + b^2 + c^2$$

สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า

จากจุด a ไปยัง b มีระยะทางคือ $a^2 + b^2 = d^2$ เมื่อ d คือจุดปลายของ (a, b)

จากจุด d ไปยัง c มีระยะทางเป็น $d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{ดังนั้น } N(P) = a^2 + b^2 + c^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้งนี้เพื่อให้การคิดนอร์มในรูปของจำนวนเต็ม จึงคงรูปของกำลังสอง แทนการคิดเป็นระยะทาง
แบบยุคลิดที่นอร์มเป็นจำนวนเต็ม
แนวคิดนี้ได้มาจากการหานอร์มในจำนวนเต็มเกาส์

ตัวอย่าง 4.3 $P = (2, 2, 3)$, $N(P) = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 4 + 4 + 9 = 17$

ทฤษฎีบท 4.2.2 สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $d \in \mathbb{N}$,

$$N(d \cdot P) = d^2 \cdot N(P)$$

พิสูจน์

ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $d \in \mathbb{N}$

$$\text{จาก } d \cdot P = d \cdot (a, b, c) = (d \cdot a, d \cdot b, d \cdot c) = (a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d)$$

$$\begin{aligned} N(d \cdot P) &= (a \cdot d)^2 + (b \cdot d)^2 + (c \cdot d)^2 = a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot d^2 + c^2 \cdot d^2 \\ &= d^2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = d^2 \cdot N(P) \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 4.4 เมื่อ $P = (2, 2, 3) \in B^3$ และ $d = 3$ จงหา $N(d \cdot Q)$

$$d \cdot P = 3 \cdot (2, 2, 3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3) = (6, 6, 9)$$

$$N(d \cdot Q) = 6^2 + 6^2 + 9^2 = 36 + 36 + 81 = 153$$

$$N(P) = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 4 + 4 + 9 = 17 \text{ และ } 3^2 = 9$$

$$d^2 \cdot N(P) = 9 \cdot 17 = 153$$

ทฤษฎีบท 4.2.3 สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$

ถ้า $Q|P$ แล้ว 1) $N(P) = k^2 \cdot N(Q)$ เมื่อ $k \cdot Q = P$

2) $N(Q) | N(P)$

พิสูจน์

1) ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$

สมมติ $Q|P$ นั่นคือ $\exists k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k \cdot Q = P$

$$\text{จะได้ว่า } N(P) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (k \cdot x)^2 + (k \cdot y)^2 + (k \cdot z)^2$$

$$= k^2 \cdot x^2 + k^2 \cdot y^2 + k^2 \cdot z^2$$

$$= k^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= k^2 \cdot N(Q)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$ และ $Q = (x, y, z) \in B^3$

สมมติ $Q|P$ นั่นคือ $\exists k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k \cdot Q = P$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } N(k \cdot Q) &= N(k \cdot (x, y, z)) = N((k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)) \\ &= (k \cdot x)^2 + (k \cdot y)^2 + (k \cdot z)^2 \\ &= (a)^2 + (b)^2 + (c)^2 \\ &= N(P) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4.1.2 จะได้ว่า $N(k \cdot Q) = k^2 \cdot N(Q)$

$$\text{ดังนั้น } N(P) = k^2 \cdot N(Q)$$

เนื่องจาก $k \in \mathbb{N}$

$$\text{ดังนั้น } N(Q) | N(P)$$

#

ส่วนกลับของทฤษฎีบทไม่เป็นจริง เช่น

ตัวอย่าง 4.5 ให้ $P = (9, 6, 6)$ และ $Q = (5, 5, 1)$

$$\text{จะได้ว่า } N(P) = 9^2 + 6^2 + 6^2 = 153 \text{ และ } N(Q) = 5^2 + 5^2 + 1^2 = 51$$

จะเห็นว่า $N(Q) | N(P)$ แต่ Q หาร P ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง 4.6 ให้ $P = (4, 4, 6)$ และ $Q = (2, 2, 3)$ จะได้ $N(P) = 68$ และ $N(Q) = 17$

$$\text{จะเห็นว่า } 2 \cdot Q = 2 \cdot (2, 2, 3) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 4, 6) = P$$

$$\text{จะได้ว่า } 2^2 \cdot N(Q) = 2^2 \cdot 17 = 4 \cdot 17 = 68 = N(P)$$

$$\text{เนื่องจาก } 4 \cdot N(Q) = N(P) \text{ และ } k = 4 \in \mathbb{N}$$

$$\text{ดังนั้น } N(Q) | N(P)$$

4.3 ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะบน B^3 (Prime Cuboid in B^3)

บทนิยาม 4.3.1 ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$

จะเรียก P ว่าทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ (Prime Cuboid) ก็ต่อเมื่อ
ตัวประกอบของ P มีเพียง 2 ตัวเท่านั้น

ตัวอย่าง 4.7 $P = (2, 2, 3)$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะหรือไม่

ไม่เป็น เพราะ P มีตัวประกอบเพียงตัวเดียวคือ $(2, 2, 3)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4.8 $Q = (2, 2, 4)$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะหรือไม่

เนื่องจาก 2 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2

เนื่องจาก 2 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2

และเนื่องจาก 4 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2, 4

ดังนั้น Q มีตัวหารร่วม 2 ตัว คือ 1, 2

จะได้ว่า Q เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

เพราะ Q มีตัวประกอบเพียง 2 ตัวเท่านั้น ได้แก่ $(1, 1, 2)$ และ $(2, 2, 4)$

ตัวอย่าง 4.9 $R = (4, 16, 20)$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะหรือไม่

เนื่องจาก 4 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2, 4

เนื่องจาก 16 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2, 4, 8, 16

และเนื่องจาก 20 มีตัวประกอบดังนี้ 1, 2, 4, 5, 10, 20

ดังนั้น R มีตัวหารร่วม 3 ตัว คือ 1, 2, 4

ไม่เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะเพราะ R มีตัวประกอบมากกว่า 2 ตัว ได้แก่ $(1, 4, 5), (2, 4, 10), (4, 16, 20)$

ทฤษฎีบท 4.3.2 $P = (a, b, c) \in B^3$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะก็ต่อเมื่อ

มีจำนวนเฉพาะ $k \in \mathbb{N}$ และ $(x, y, z) \in B^3$ โดยที่ $(a, b, c) = k \cdot (x, y, z)$
และตัวหารร่วมมากของ x, y, z เป็น 1

พิสูจน์ ($\rightarrow$) สมมติ $P = (a, b, c) \in B^3$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

จะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง k เป็นตัวหารร่วมมากของ a, b, c

ที่ทำให้ $xk = a$ และ $yk = b$ และ $zk = c$

นั่นคือ $k \cdot (x, y, z) = (a, b, c)$

และจะมี $k_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k_1 = \gcd(a, b)$

โดยทฤษฎีบท 2.1.13 จะมี $m, n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $\gcd(a, b) = am + bn$

จะได้ว่า $\frac{\gcd(a, b)}{k} = \frac{a \cdot m}{k} + \frac{b \cdot n}{k}$

เนื่องจาก $xk = a$ และ $yk = b$ ดังนั้น $\frac{\gcd(a, b)}{k} = xm + yn$

นั่นคือ $\frac{\gcd(a, b)}{k} = \gcd(x, y)$

จาก $\gcd(\gcd(a, b), c) = k$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และโดยบทแทรก 2.1.16 ได้ว่า $\gcd\left(\frac{\gcd(a,b)}{k}, \frac{c}{k}\right) = \frac{k}{k} = 1$

ดังนั้น $\gcd(\gcd(x,y), z) = 1$

นั่นคือตัวหารร่วมมากของ x, y, z เท่ากับ 1

กรณี k เป็นจำนวนเฉพาะ

จะได้ว่า $(x, y, z) \mid (a, b, c)$ หรือ $k \cdot (x, y, z) \mid (a, b, c)$ เท่านั้น

กรณี k ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

$$k=1$$

จะได้ว่า $(x, y, z) = (a, b, c)$

นั่นคือ (a, b, c) มีตัวประกอบเดียวคือ (x, y, z)

$$k > 1$$

จะได้ว่า $k = (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \dots (p_m)^{n_m}$

จะเห็นว่า มีตัวประกอบมากกว่า 2 ตัวที่หาร (a, b, c) ลงตัว

เนื่องจาก $k \cdot (x, y, z) = (a, b, c)$

ดังนั้น $(x, y, z) \mid (a, b, c)$ หรือ $k \cdot (x, y, z) \mid (a, b, c)$

และเนื่องจาก $k = (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \dots (p_m)^{n_m}$

ดังนั้น $k \cdot (x, y, z) = [(p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \dots (p_m)^{n_m}] \cdot (x, y, z)$

นั่นคือ $(p_1 \cdot (x, y, z)) \mid (k \cdot (x, y, z))$

โดยทฤษฎีบท 4.1.2 (2) จะได้ว่า $(p_1 \cdot (x, y, z)) \mid (a, b, c)$

ซึ่งขัดแย้งเพราะ $P = (a, b, c)$ เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

ต้องมีตัวประกอบ 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้น k ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่เป็นจริง

(←) สมมติ $k \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $(x, y, z) \in B^3$

โดยที่ตัวหารร่วมมากของ x, y, z เป็น 1

ให้ $k \cdot (x, y, z) = (a, b, c)$

จะได้ว่า (a, b, c) เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

เนื่องจากมีตัวประกอบ 2 ตัวเท่านั้น

คือ (x, y, z) และ $k \cdot (x, y, z)$

#

บทนิยาม 4.3.3 สำหรับ $a \in \mathbb{N}$

$$a = (p_1^{n_1})(p_2^{n_2})(p_3^{n_3}) \dots (p_k^{n_k}) \text{ เมื่อ } p_k \text{ คือจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน}$$

และ k, n_k เป็นจำนวนธรรมชาติ

จำนวนของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน เขียนแทนด้วย $n_p(a) = k$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาจำนวนของจำนวนเฉพาะของ 2178

วิธีทำ $2178 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$

ดังนั้น $n_p(2178) = 3$

ทฤษฎีบท 4.3.4

จำนวนวิธีในการแยกตัวประกอบด้วยทรงแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ $P = (a, b, c) \in B^3$ เท่ากับ $n_p(d)$

เมื่อ d คือตัวหารร่วมมากของ a, b, c

พิสูจน์ ให้ $P = (a, b, c) \in B^3$

จะมี $d \in \mathbb{N}$ ซึ่ง d คือตัวหารร่วมมากของ a, b, c

เนื่องจากต้องการแบ่งส่วน P ด้วยทรงแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะเท่านั้น

จากทฤษฎีบท 4.3.2 P จะแบ่งได้ด้วย $p \cdot (x, y, z)$ ที่เป็นทรงแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ

เมื่อ $p \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนเฉพาะ

และ $(x, y, z) \in B^3$ และตัวหารร่วมมากของ x, y, z เป็น 1

ดังนั้นจำนวนวิธีในการแบ่งส่วนด้วยทรงแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะคือ

จำนวนของทรงแท่งสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะ d ที่แตกต่างกันทั้งหมด นั่นคือ $n_p(d)$ #

บทที่ 5

สรุปผลปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลปัญหาพิเศษ

บทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติเชิงพีชคณิตของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับได้ดังนี้

1. ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย เป็นการมอง N^3 ในลักษณะของกล่อง แทนด้วย B^3
2. บทนิยามการดำเนินการบน B^3
 - 2.1. การบวก
 - 2.2. การคูณ
3. บทนิยามการแบ่งส่วนบน B^3 $Q \parallel P$ ก็ต่อเมื่อ $x|a$ และ $y|b$ และ $z|c$
4. บทนิยามการหารลงตัวของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเต็มหน่วย โดยการแบ่งส่วนทุกด้านด้วยจำนวนที่เท่ากัน
5. ทฤษฎีบททอร์ม คือ $N(P) = a^2 + b^2 + c^2, P \in B^3$
6. บทนิยามทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเฉพาะบน B^3

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. สามารถนำปัญหาพิเศษนี้ไปพัฒนาต่อในเรื่องอื่นได้ เช่น การนำไปพัฒนาต่อโดยแต่ละด้านแทนด้วยจำนวนเต็มลบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. 2558. ระบบจำนวนจริง. กรุงเทพฯ : บริษัท วี พรินท์ (1991) จำกัด.
- [2] รศ. ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงศ์ และรศ. พชรินทร์ เหมโชติ. 2556. ทฤษฎีจำนวน 1. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มินเซอรัวิส ซัพพลาย.
- [3] รศ. ไพโรบลย์ พันธรัักษ์พงศ์ และรศ. พชรินทร์ เหมโชติ. 2557. ทฤษฎีจำนวน 2. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มินเซอรัวิส ซัพพลาย.
- [4] เรืออากาศเอก อิศระ เชิดชู. 2558. สรุปเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



งานทะเบียนคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

คำรับรองเล่มปัญหาพิเศษ

วันที่ 3 เดือน กรกฎาคม พ.ศ 2561

ข้าพเจ้า นางสาว ดวงสม ปันนวงค์ รหัสประจำตัว 57050058

นาย นพรุจ ชาญากิ รหัสประจำตัว 57050078

นาย ภาควมิ สระทองจันทร์ รหัสประจำตัว 57050110

นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชา คณิตศาสตร์ ขอ
รับรองว่า ปัญหาพิเศษ เรื่อง

ชื่อภาษาไทย ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในรูปแบบของสามสิ่งอันดับของจำนวนนับ

ชื่อภาษาอังกฤษ Cuboids in the Form of Three-Tuples of Natural Numbers

ปีการศึกษา 2560

เป็นผลงานวิจัยที่มีได้คัดลอกหรือละเมิดลิขสิทธิ์ของผู้อื่นและได้ผ่านการตรวจสอบความซ้ำซ้อน
เรียบร้อยแล้ว และได้แนบเอกสารการตรวจสอบการลอกเลียนงานวรรณกรรมที่ตรวจสอบจากเล่ม
ปัญหาพิเศษฉบับสมบูรณ์แล้ว

โปรแกรมอักขราวิสุทธิ์.....0.00.....%

ลงชื่อ.....นางสาว ดวงสม ปันนวงค์.....

(นางสาว ดวงสม ปันนวงค์)

นักศึกษา

ลงชื่อ.....นาย นพรุจ ชาญากิ.....

(นาย นพรุจ ชาญากิ)

นักศึกษา

ลงชื่อ.....นาย ภาควมิ สระทองจันทร์.....

(นาย ภาควมิ สระทองจันทร์)

นักศึกษา

ข้าพเจ้า รศ. ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ได้ตรวจสอบปัญหาพิเศษของ
นักศึกษาข้างต้น แล้ว ขอรับรองว่าเป็นผลงานวิจัยของนักศึกษาจริงและมีเนื้อหาสมบูรณ์ จึงลงชื่อไว้
เป็นหลักฐาน

ลงชื่อ.....รศ. ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์.....

(รศ. ไพโรบลย์ พันธรักษ์พงษ์)

อาจารย์ที่ปรึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้