การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์

NUMERICAL SOLUTION OF BURGER'S EQUATIONS

กัญญา พึ่งพิบูลย์
ณัฐรินทร์ บุญโชติ
ธิดาวรรณ สายนวล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NUMERICAL SOLUTION OF BURGER'S EQUATIONS

KANYA PUENGPIBOON

NATTHARIN BUNCHOT

THIDAWUN SAI-NUAN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์

Numerical Solution of Burger's Equations

ชื่อนักศึกษา นางสาวกัญญา พึ่งพิบูลย์ รหัสนักศึกษา 57050011

นางสาวณัฐรินทร์ บุญโชติ รหัสนักศึกษา 57050053

นางสาวธิดาวรรณ สายนวล รหัสนักศึกษา 57050075

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อ.พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์

Numerical Solution of Burger's Equations

ชื่อนักศึกษา นางสาวกัญญา พึ่งพิบูลย์ รหัสนักศึกษา 57050011

นางสาวณัฐรินทร์ บุญโชติ รหัสนักศึกษา 57050053

นางสาวธิดาวรรณ สายนวล รหัสนักศึกษา 57050075

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการใช้วิธีผลต่างเชิงอันตะ (Finite Difference-Method: FDM) หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equations) โดยแบ่งออกเป็น 2 วิธี ได้แก่ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า (Forward Difference Method) ซึ่งมีค่าความแม่นยำเป็น $O(h)$ และอีกวิธีคือ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและ ผลต่างจากกลางในปริภูมิ(Forward Difference in Time and Central Difference in Space) ที่มีค่าความแม่นยำเป็น $O(h^4)$ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ผลของการศึกษาปัญหาพิเศษพบว่า การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าให้ความแม่นยำมากกว่าการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ และได้ทำการศึกษาความกว้าง $h = 0.01$ ให้มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าความกว้าง $h = 0.1$

คำสำคัญ :

สมการเบอร์เกอร์, วิธีผลต่างเชิงอันตะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Numerical Solution of Burger's Equations		
Students	Miss Kanya	Puengpiboon	Student ID 57050011
	Miss Nattharin	Bunchot	Student ID 57050053
	Miss Thidawun	Sai-nuan	Student ID 57050075
Degree	Bachelor of Science		
Major Program	Applied Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2017		
Advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert		

ABSTRACT

This special problem is study about using Finite Difference Method (FDM) to find the solution of Burger's Equations by dividing into two methods, including the Forward Difference Method which the precision value is $O(h)$ and the Forward Difference in Time and Central Difference in Space which the precision value is $O(h^4)$. In this study, we compare the performance of precise estimation of both methods with the Exact Solution using a computer program to calculate the solution. After studying, the results indicated that using the Forward Difference Method and the Forward Difference Method showed more precision than the Forward Difference in Time and Central Difference in Space, and also revealed that the width $h = 0.01$ have less discrepancy than $h = 0.1$

Keywords:

Burger's Equations, Finite difference method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการทำปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษเป็นอย่างสูงที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษา ในการแก้ไขปัญหาต่างๆรวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อ.พรชัย ชัยสนิท และ ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ที่ให้ความกรุณาและเสียสละเวลามาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในปัญหาพิเศษครั้งนี้ อีกทั้งยังให้ความรู้และให้คำแนะนำเพื่อให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติและขอขอบคุณเจ้าหน้าที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องคอมพิวเตอร์ในการทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านกำลังใจจนการทำปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆทุกคนที่มีส่วนช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

กัญญา พึ่งพิบูลย์
ณัฐรินทร์ บุญโชติ
ธิดาวรรณ สายนวล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญรูป	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	2
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	
2.1 ของไหล	3
2.2 สมการเบอร์เกอร์	4
2.3 วิธีผลต่างแบบอันตะ	6
2.4 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	10
2.4.1 ต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 2	11
2.4.2 สมการความร้อน	11
2.4.3 สมการคลื่น	12
2.4.4 สมการลาปลาซ	12
2.5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์	13
2.5.1 การสร้างตัวแปรใน MATLAB	13
2.5.2 การสร้างอาเรย์แบบลำดับเลขคณิต	14
2.5.3 การกำหนดค่าแสดงผลตัวเลขทศนิยม	14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง(ต่อ)

2.5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์(ต่อ)

2.5.4 การควบคุมทิศทางของโปรแกรม (Flow Control) 15

2.5.5 กราฟิกและการวาดกราฟ 17

บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย 21

3.1 การหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์โดยวิธีอันตะ 21

3.1.1 การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า (Forward Difference Method) 21

3.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์ 30

3.2.1 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง 30

3.2.2 การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้วิธีผลต่างหกจุดกลาง 35

3.2.3 การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ (Forward Difference in Time and Central Difference in Space) 38

บทที่ 4 วิธีการดำเนินงานวิจัย 44

บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ 51

5.1 สรุปผล 51

5.2 ข้อเสนอแนะ 52

เอกสารอ้างอิง 53

ภาคผนวก 55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
ตารางที่ 2.1	เปรียบเทียบผลเฉลย (υ) ที่ได้จากตัวอย่าง	5
ตารางที่ 2.2	เปรียบเทียบผลเฉลย (υ) ที่ได้จากตัวอย่าง	5
ตารางที่ 2.3	คำสั่งการกำหนดค่าแสดงผลตัวเลขทศนิยม	14
ตารางที่ 2.4	คำสั่งการกำหนดรูปแบบของเส้น เครื่องหมายและสี	17
ตารางที่ 4.1	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า สำหรับ $T=0.1,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$	47
ตารางที่ 4.2	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ สำหรับ $T=0.1,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$	47
ตารางที่ 4.3	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า สำหรับ $T=0.1,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$	48
ตารางที่ 4.4	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ สำหรับ $T=0.1,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$	48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
รูปที่ 2.1	การกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าขนาด 3x3	8
รูปที่ 2.2	การกระจายของอุณหภูมิบนกำแพง	11
รูปที่ 2.3	เงื่อนไขขอบเขตของ ฟังก์ชัน $T(x,y)$	12
รูปที่ 2.4	ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข If	15
รูปที่ 2.5	ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else	16
รูปที่ 2.6	ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else-if	16
รูปที่ 2.7	ตัวอย่างการวาดกราฟ2มิติ	18
รูปที่ 2.8	กราฟแบบตาข่าย (Mesh)	19
รูปที่ 2.9	กราฟแบบเค้าโครง (Contour)	19
รูปที่ 2.10	กราฟแบบพื้นผิว (Surface)	19
รูปที่ 2.11	กราฟแบบตาข่ายและเค้าโครง	19
รูปที่ 2.12	กราฟแบบตาข่ายและเส้นแนวตั้ง	19
รูปที่ 2.13	กราฟแบบริบบิ้น (Ribbon)	19
รูปที่ 2.14	ตัวอย่างการวาดกราฟ2มิติแบบหลายเส้นบนแกนเดียวกัน	20
รูปที่ 4.1	แผนผังกระบวนการหาผลลัพธ์ของการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า	44
รูปที่ 4.2	กระบวนการหาผลลัพธ์ของการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ	45
รูปที่ 4.3	กระบวนการหาผลลัพธ์ของค่าผลเฉลยแม่นตรง	46
รูปที่ 4.4	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า เมื่อ $h=0.1$ และ $N=100$	49
รูปที่ 4.5	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.1$ และ $N=100$	49
รูปที่ 4.6	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า เมื่อ $h=0.01$ และ $N=100$	50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
รูปที่ 4.7	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.01$ และ $N=100$	50
รูปที่ 5.1	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าค่าผลเฉลยแม่นตรงกับการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.1$ และ $N=100$	52
รูปที่ 5.2	แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงกับการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.01$ และ $N=100$	52

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics: CFD) คือการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลต่างๆ การถ่ายเทความร้อน การแพร่กระจายของอนุภาค รวมถึงการเกิดปฏิกิริยาเคมีต่างๆ โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยหาผลเฉลยและจำลองพฤติกรรมที่เกิดขึ้น หรือกล่าวโดยสั้นก็คือวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการไหล พื้นฐานของซีเอฟดีคือการแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งเป็นสมการควบคุมการไหล กระบวนการทางซีเอฟดีถูกพัฒนาขึ้นในราวปี 1930 สำหรับจำลองการไหลรอบทรงกระบอกสองมิติ จากนั้นเมื่อเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีความก้าวหน้าขึ้น จึงได้พัฒนาสู่การจำลองแบบสามมิติโดยบริษัทและองค์กรด้านการบินต่างๆ อาทิ โบอิง ล็อกฮีท ดั๊กลาส แม็คโดเนลนาซา เป็นต้น ซึ่งทุกวันนี้ซีเอฟดีถูกนำไปใช้ในการพัฒนาเรือดำน้ำ ผิวเรือ อากาศยาน รถยนต์ เฮลิคอปเตอร์การจำลองรถไฟความเร็วสูง เรือยอร์ชสำหรับแข่งขัน และอื่นๆอีกมากมาย

สมการเบอร์เกอร์(Burgers' Equation) เป็นสมการเชิงสมการย่อยที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานทางด้านฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น การจำลองแบบในเรื่องพลศาสตร์ ของแก๊ส กลศาสตร์ของไหล และงานที่เกี่ยวกับกระแสจราจรในด้านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมา นักวิจัยได้ให้ความสนใจศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ด้วยวิธีการที่แตกต่างกันหลากหลายรูปแบบ อาทิเช่น วิธีผลต่างอันตะชี้กำลังแบบชัดแจ้ง (Explicit Exponential Finite Difference) วิธีสมาชิกจำกัดพหุนามเสมือนจริง รูปร่างระฆังกำลังสองน้อยสุด (Least-Squares Quadratic Bspline Finite Element Method) รวมทั้งมีการศึกษาประสิทธิภาพของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์และสำหรับในงานวิจัยนี้เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ;a<x<b \tag{1.1}$$

มีเงื่อนไขขอบ คือ $u(a,t)=f_1 t$ และ $u(b,t)=f_2 t$ สำหรับ $0<t\leq T$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $u(x,0)=g(x)$ $;a<x<b$

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาวิธีการหาค่าผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ โดยใช้วิธีผลเฉลยเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบของสมการเบอร์เกอร์ ในการหาผลเฉลยได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ พบว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีความแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง แต่เนื่องจากสมการเบอร์เกอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดไม่เชิงเส้น ทำให้การหาผลเฉลยมีความยุ่งยากและซับซ้อนยากแก่การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ประกอบกับปัจจุบันสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ทำให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเอกสารนี้ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีเชิงตัวเลขได้รับความนิยมใช้กันอย่างกว้างขวางและวิธีเชิงตัวเลขสามารถแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตและรูปแบบที่มีความซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาสมการเบอร์เกอร์และเงื่อนไขขอบของสมการ

1.2.2 เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1.3.1 ศึกษาสมการเบอร์เกอร์

1.3.2 หาคำตอบของสมการเบอร์เกอร์โดยใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะ

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1.4.1 ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการเบอร์เกอร์

1.4.2 ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์

1.4.3 ศึกษาอัลกอรึทึมของวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์

1.4.4 ออกแบบการเขียนโปรแกรมของวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์

1.4.5 ทดสอบโปรแกรม

1.4.6 ประเมินผลและสรุปผลที่ได้จากการศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์

1.4.7 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 สามารถประยุกต์ใช้วิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์ได้

1.5.2 สามารถเขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรม Matlab เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างอันตะของสมการเบอร์เกอร์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ ซึ่งได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามความรู้เบื้องต้น สมการและวิธีการที่เกี่ยวข้องกับของไหลของของไหล อาทิเช่น ของไหล(Fluid) ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็นของไหลที่กดอัดได้และที่กดอัดไม่ได้ (Compressible and Incompressible Fluid) , แรงตึงผิว(Surface Tension) ซึ่งมี 2 ชนิดคือ แรงยึดติด(Cohesive Forces), และแรงเชื่อมแน่น (Adhesive Force), ความดัน (Pressure), ความหนาแน่น (Density), สมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equation), วิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Methods) ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยสามารถจำแนกออกเป็น 3 รูปแบบ คือสมการเชิงวงรี (Elliptic Equation), สมการเชิงไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Equation) และ สุดท้ายคือปัญหาค่าขอบอิสระและการเปลี่ยนแปลงสถานะของสสาร (Free Boundary Problems and Phase Transition)

2.1 ของไหล (Fluid)

ในการแบ่งประเภทของสสารโดยพิจารณาจากสถานะของสสาร สามารถแบ่งสสารได้เป็น 3 ชนิด คือ ของแข็ง(Solid) ของเหลว (Liquid) และก๊าซ (Gas) โดยเราจะเรียกของเหลวและก๊าซรวมกันว่า ขอนสสารซึ่งสามารถไหลได้ มีรูปร่างไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ กรณีของเหลว เช่น น้ำ, น้ำมัน จะมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมาก มีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลต่ำ โมเลกุลมีอิสระในการเคลื่อนที่มาก จึงสามารถเปลี่ยนรูปได้ง่ายและสามารถเทลงในภาชนะบรรจุได้ หรือบังคับให้ไหลไปในท่อหรือรางได้ ส่วนกรณีของก๊าซ เช่นอากาศ ออกซิเจน จะมีระยะห่าง ระหว่างโมเลกุลมากและมีแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลน้อยกว่าของเหลวจึงสามารถเปลี่ยนรูปร่างและถูกกดันได้ง่าย จะกล่าวว่าของไหลเป็นสสารที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้อย่างต่อเนื่อง

กลศาสตร์ของไหลอาจแบ่งได้เป็น 3 สาขา คือ

1) ของไหลหนืด (Fluid Statics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง
2) ไคเนมาติก (Kinematics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความเร็วและกระแสของไหล โดยไม่พิจารณาถึงแรงหรือ พลังงานที่ทำให้ของไหลเคลื่อนที่
3) ไฮโดรไดนามิก (Hydrodynamics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่ง พร้อมทั้งแรงที่กระทำหรือแรงที่เกิดขึ้นจากการที่ของไหลเคลื่อนที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าความคลาดเคลื่อน

การวัด (Measurement) คือ กระบวนการที่เปรียบเทียบปริมาณที่ไม่ทราบค่าของตัวแปรกับมาตรฐานที่ถูกกับหนดไว้ ซึ่งผลการวัดมักจะมีความคลาดเคลือน (Error) ความไม่แน่นอน (Uncertainty) และความถูกต้องของการวัดแฝงอยู่ โดย Specification ของเครื่องมือวัดต่างๆ จะระบุค่าความถูกต้องหรือเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนไว้ เพื่อให้ผู้ใช้งานสามารถทราบถึงผลการวัดที่ถูกต้องและแม่นยำที่สุด

นิยาม ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์และความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ให้ u เป็นค่าจริง และ $\tilde{u}$ เป็นค่าประมาณของ u

ความคลาดเคลื่อน $e = u - \tilde{u}$

ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error) $|e| = |u - \tilde{u}|$

ขอบเขตของความเคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ ε คือ ความเคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุด

นั่นคือ $|u - \tilde{u}| \le \varepsilon$

ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ $\frac{e}{u}$ หรือ $\frac{e}{\tilde{u}}$

ขอบเขตของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\frac{e}{u}$ หรือ $\left|\frac{e}{\tilde{u}}\right|$

2.2 สมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equation)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานทางด้านฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น การจำลองแบบในเรื่องพลศาสตร์ของแก๊ส กลศาสตร์ของไหล และงานที่เกี่ยวกับกระแสจราจรในด้านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมา นักวิจัยได้ให้ความสนใจในการศึกษาวิธีดารหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ด้วยวิธีที่แตกต่างกันหลายรูปแบบ ทั้งระเบียบวิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Methods) และระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (Finite Element Methods) อาทิเช่น วิธีผลต่างชี้กำลังแบบชัดแจ้ง (Explicit Exponential Finite Difference) วิธีสมาชิกจำกัดพหุนามเสมือนจริงรูปร่างระฆังกำลังสองน้อยสุด (Least-Square Quadratic B-spline Finite Element Methods) รวมทั้งมีการศึกษาประสิทธิภาพของระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์และสำหรับในงานวิจัยนี้ เราจะศึกษาหาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad a < x < b \tag{2.1}$$

มีเงื่อนไขขอบ คือ $u(a,t) = f_1(t)$ และ $u(b,t) = f_2(t)$ สำหรับ $0 < t \le T$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $u(x,0) = g(x)$; $a < x < b$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง สมการเบอร์เกอร์ (Burgers' Equation) ใน 2 มิติ [10]

พิจารณาสมการเบอร์เกอร์ 2 มิติ

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{1}{R}(\nabla^2\upsilon) \tag{2.2}$$

โดเมนของปัญหาคือ $D=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบใช้จากผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานี้

$$u(x,y,t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\left[1+\exp((-4x+4y-t)\frac{R}{32}\right]}$$

$$\upsilon(x,y,t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\left[1+\exp((-4x+4y-t)\frac{R}{32})\right]}$$

โดยที่ $R=100$

จุด	Linear-RBFs	CS-RBFs	ผลเฉลยแม่นตรง
(0.1,0.1)	0.5037	0.5000	0.5000
(0.5,0.1)	0.5030	0.5000	0.5000
(0.9,0.1)	0.5016	0.5000	0.5000
(0.3,0.3)	0.4978	0.5001	0.5000
(0.7,0.3)	0.4952	0.5000	0.5000
(0.1,0.5)	0.5052	0.5001	0.5000

ตารางที่ 2.1 เปรียบเทียบผลเฉลย(υ) ที่ได้จากตัวอย่าง

จุด	Linear-RBFs	CS-RBFs	ผลเฉลยแม่นตรง
(0.1,0.1)	1.0081	1.0000	1.0000
(0.5,0.1)	1.0037	1.0000	1.0000
(0.9,0.1)	1.0040	0.9999	1.0000
(0.3,0.3)	0.9893	1.0000	1.0000
(0.7,0.3)	1.0116	0.9999	1.0000
(0.1,0.5)	1.0030	0.9998	1.0000

ตารางที่ 2.2 เปรียบเทียบผลเฉลย(υ) ที่ได้จากตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method : FDM)

นำหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีการเชิงตัวเลขที่เรียกว่า วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method : FDM) มาช่วยในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (PDEs) ในทางคณิตศาสตร์วิธีการผลต่างอันตะ เป็นวิธีการเชิงตัวเลขในการประมาณค่าสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้สมการผลต่างอันตะในการประมาณค่าอนุพันธ์โดยเราจะทำการสมมติค่าอนุพันธ์ที่จะทำการประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

2.3.1 การประมาณค่าผลเฉลยจะอาศัยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์

พิจารณา $u = u(x,t)$

จะได้

$$u = u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \tag{2.3}$$

$$u = u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \tag{2.4}$$

จาก (2.3) จัดรูปใหม่

จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + O(h) \tag{2.5}$$

เรียกว่า **"การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า (Forward Difference Method)"** โดยที่ $O(h)$ ซึ่งเป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้เขียนแทนค่าคลาดเคลื่อน

จาก (2.4) จัดรูปใหม่

จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} + O(h) \tag{2.6}$$

เรียกว่า **"การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหลัง (Backward Difference Method)"** โดยที่ $O(h)$ ซึ่งเป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้เขียนแทนค่าคลาดเคลื่อน

เมื่อนำ (2.3) - (2.4) จัดรูปใหม่

จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} + O(h^2) \tag{2.7}$$

เรียกว่า **"การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากกลาง (Central Difference Method)"** โดยที่ $O(h)$ ซึ่งเป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้เขียนแทนค่าคลาดเคลื่อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (2.3)+(2.4) จัดรูปใหม่

จะได้ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2) \qquad (2.8)$$

เรียกว่า **"วิธีผลต่างจากกลางสำหรับ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$"** โดยที่ $O\left(h^2\right)$ ซึ่งเป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้เขียนแทนค่าคลาดเคลื่อน

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x,t+l) - u(x,t)}{l} + O(l) \qquad \text{Forward Finite Difference Method} \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x,t-l) - u(x,t)}{l} + O(l) \qquad \text{Backward Finite Difference Method} \qquad (2.10)$$

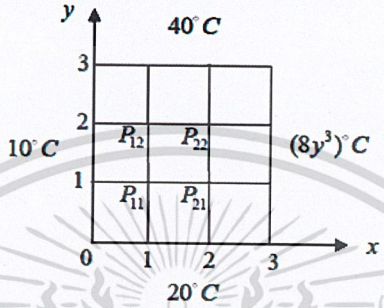
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x,t+l) - u(x,t-l)}{2l} + O(l) \qquad \text{Central Finite Difference Method} \qquad (2.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง พิจารณาการกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าขนาด 3x3 ที่ถูกแบ่งเป็นตาข่ายที่มี $\Delta x = \Delta y = 1$ โดยมีอุณหภูมิที่ขอบเป็น $10°C, 20°C, \left(8y^3\right)°C, 40°C$ ดังรูป โดยมีการกระจายตามสมการปัวซอง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10xy \tag{2.12}$$

จงหาอุณหภูมิที่จุดต่อภายในแผ่นโลหะที่กำหนด



รูปภาพที่ 2.1 การกระจายอุณหภูมิบนแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าขนาด 3x3

วิธีทำ จากสูตรผลต่างจากกลางของอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{k^2} \tag{2.14}$$

แทนค่า (2.13) และ (2.14) ใน (2.12) จะได้ว่า

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 10x_i y_i \tag{2.15}$$

โดยการประยุกต์สมการต่างๆ (2.2) โดยใช้ $h = k = 1$ ที่จุดภายในโดเมนทั้งสี่จุดจะได้ว่า

ที่จุด

$$P_{11} : u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = 10 \times 1^2 \times 1 \times 1$$
$$P_{21} : u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} - 4u_{21} = 10 \times 1^2 \times 2 \times 1$$
$$P_{12} : u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} - 4u_{12} = 10 \times 1^2 \times 1 \times 2$$
$$P_{22} : u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} - 4u_{22} = 10 \times 1^2 \times 2 \times 2$$

และจากเงื่อนไข Dirichlet* เราทราบค่าต่อไปนี้

$$u_{01} = u_{02} = 10$$
$$u_{10} = u_{20} = 20$$
$$u_{31} = 8, u_{32} = 64$$
$$u_{13} = u_{23} = 40$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าเงื่อนไขขอบในระบบสมการ

$$u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = -20$$
$$u_{11} + u_{22} - 4u_{21} = -8$$
$$u_{11} + u_{22} - 4u_{12} = -30$$
$$u_{12} + u_{21} - 4u_{22} = -64$$

การแก้ระบบสมการดังกล่าวจะได้ว่า

$$u_{11} = 11.667$$
$$u_{21} = 10.583$$
$$u_{12} = 16.083$$
$$u_{22} = 22.667$$

Dirichlet* คือ การกำหนดเงื่อนไขขอบด้วยค่าคงที่ เช่น

$T(0) = 100$ → หมายถึง ที่ $x = 0$ (ขอบซ้าย) ค่า $T = 100$

$T(x, H) = 20$ → หมายถึง ที่ $y = H$ (ขอบบน) ค่า $T = 20$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations : PDEs)

เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตาม (Dependent Variable) ที่มีตัวแปรอิสระ (Independent Variable) มากกว่า 1 ตัวแปรขึ้นไป

ตัวอย่าง

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 3x$ เป็น PDE ที่มี u เป็นตัวแปรตาม และมีตัวแปรอิสระ 2 ตัวคือ x และ t

$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 3tx\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}$ เป็น PDE ที่มี u เป็นตัวแปรตาม และมีตัวแปรอิสระ 3 ตัวคือ u, x, t

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะพบได้ในการประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ เช่น การสั่น (Vibrations) การกระจายอุณหภูมิ (Temperature Equations) และศักย์ (Potentials) เป็นต้น โดยสมการเหล่านี้อาจจะมี เงื่อนไขค่าขอบ ในที่นี้เราอาจจะกล่าวถึงค่าขอบหรือสภาวะแบบคงที่ และในกรณีที่มีการกำหนดค่าขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น เรียกว่าปัญหาค่าขอบเริ่มต้น (Initial Boundary Value Problems)

ตัวอย่าง การพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอบที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระ x และ t

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D = 0 \qquad (2.16)$$

จะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ A, B และ C สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชัน x, t และ u ได้

นอกจากนี้ในบางกรณี พารามิเตอร์ D อาจเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ และ u ได้เช่นกัน อย่างไรก็ตามในด้านวิศวกรรมสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเกิดขึ้นในรูปแบบร่วมกันน้อยเมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงที่ ในกรณีนี้จะสามารถแบ่งโดยการใช้การจำแนกทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้ว สมการ (19) เรียกว่า **"สมการไฮเพอร์โบลิก: Hyperbolic PDE"**

$B^2 - 4AC = 0$ แล้ว สมการ (19) เรียกว่า **"สมการพาราโบลิก: Parabolic PDE"**

$B^2 - 4AC < 0$ แล้ว สมการ (19) เรียกว่า **"สมการอิลิปติก / สมการเชิงวงรี : Elliptic PDE"**

โดยในปัญหานี้จะศึกษาสมการเบอร์เกอร์ซึ่งเป็น**"สมการชนิด Parabolic PDE"**

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางสมการนั้นไม่สามารถใช้วิธีวิเคราะห์ได้ (Analysis Method) หาผลเฉลยได้ เช่นสภาวะคงที่หรือขึ้นอยู่กับเวลาที่เรากำลังพิจารณาดังนั้นเราจึงนำวิธีการเชิงตัวเลขมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการนั้น ซึ่งวิธีเชิงตัวเลขที่จะนำมาใช้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4.1 ต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยลำดับที่ 2

1. สมการการแพร่ (Diffusion Equation)

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \rightarrow \text{Parabolic (สมมติ } y \rightarrow t \text{)} \tag{2.17}$$

2. สมการคลื่น (Wave Equation)

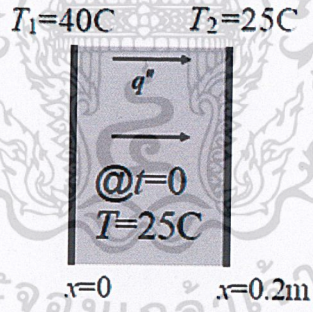
$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \rightarrow \text{Hyperbolic (สมมติ } y \rightarrow t \text{)} \tag{2.18}$$

3. สมการลาปลาซ (Laplace Equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \quad \rightarrow \text{Elliptic} \tag{2.19}$$

2.4.2 สมการความร้อน (Heat's Equation)

เป็นตัวอย่างของสมการที่มีพฤติกรรมแบบ Parabolic โดยในที่นี้เราพิจารณาสมการความร้อนในสองมิติ สมมติเราต้องการคำนวณการกระจายของอุณหภูมิบนกำแพงดังรูป อุณหภูมิของกำแพงภายนอกเท่ากับ $40°C$ อุณหภูมิภายในกำแพงเท่ากับ $25°C$ โดยที่อุณหภูมิเริ่มต้น $t = 0$ ของกำแพงเท่ากับ



รูปภาพที่ 2.2 การกระจายของอุณหภูมิบนกำแพง

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยใช้อธิบายพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนของปัญหาสมารถแสดงได้โดยสมการแพร่ดังนี้

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \tag{2.20}$$

โดยที่ $T(x,t)$ คือ อุณหภูมิของกำแพง

x คือ พิกัดตำแหน่งของผิวกำแพง

t คือ เวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบเขต(BC) : เนื่องจากสมการมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของตัวแปร x ดังนั้นเราต้องการเงื่อนไขขอบเขตสองเงื่อนไขกล่าวคือ $T(0,t)=40^{\circ}C$ และ $T(0.2,t)=25^{\circ}C$

เงื่อนไขเริ่มต้น (IC) : เราต้องการเงื่อนไขเริ่มต้นเพียงหนึ่งเงื่อนไขเนื่องจากสมการมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง สำหรับตัวแปร t ดังนี้ $T(x,0)=25^{\circ}C$

2.4.3 สมการคลื่น (Wave's Equation)

เป็นตัวอย่างสมการที่แสดงพฤติกรรมแบบ Hyperbolic พิจารณาการสั่นสะเทือนของเส้นลวดที่มีความยาวอนันต์ซึ่งสามารถอธิบายโดยสมการคลื่นในหนึ่งมิติ ดังนี้

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \qquad ;(-\infty<x<\infty, t>0) \tag{2.21}$$

โดยที่ $u(x,y)$ คือ ระยะการเคลื่อนที่ของเส้นลวด

x คือ พิกัดตำแหน่งบนเส้นลวด

t คือ เวลา

เงื่อนไขขอบเขต (BC) : $u(\infty,t)<\infty$, $u(-\infty,t)<\infty$

เงื่อนไขเริ่มต้น (IC) : $u(x,0)=f(x)$ และ $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x)$

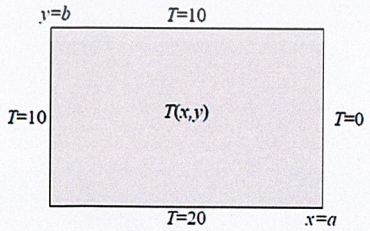
2.4.4 สมการลาปลาซ (Laplace Equation)

เป็นตัวอย่างของสมการที่แสดงพฤติกรรมแบบ Elliptic พิจารณาสมการลาปลาซในสองมิติซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,\mathrm{y})}{\partial t^2}=0 \tag{2.22}$$

โดยที่ $T(x,y)$ คือ ฟังก์ชันใดๆ

x และ y คือ พิกัดตำแหน่ง



รูปภาพที่ 2.3 เงื่อนไขขอบเขตของ ฟังก์ชัน $T(x,y)$

เงื่อนไขขอบเขต (BC) : $T(0,y)=10$ $T(a,y)=0$ $T(x,0)=20$ และ $T(x,b)=10$

เงื่อนไขเริ่มต้น (IC) : ไม่ต้องการเงื่อนเริ่มต้นเนื่องจากฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับตัวแปรเวลา

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของ [illegible] ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์

MATLAB คือโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีสิ่งแวดล้อมในการคำนวณของตัวเอง (Numerical Computing Environment) และมีภาษาเฉพาะตัวในการเขียนโปรแกรมได้โดย MATLAB มาจาก 2 คำรวมกัน คือ Matrix และ Laboratory ซึ่งหมายถึงห้องปฏิบัติการทางเมทริกซ์

MATLAB มีจุดกำเนิดในช่วงปี ค.ศ. 1970 ซึ่งในยุคเริ่มต้นนั้น MATLAB เป็นเพียงส่วนติดต่อของภาษา Fortran เพื่อให้ใช้งานได้กับ LINPACK (ไลบารีที่ใช้ในการคำนวณพีชคณิต) และ EISPACK (ไลบารีที่ใช้ในการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigen Vector)) เพื่อให้ผู้ใช้ไม่จำเป็นต้องเรียนรู้การใช้งานภาษา Fortran

หลังจากนั้นช่วงปี คศ.1984 บริษัท MathWorks ถูกก่อตั้งขึ้นเพื่อพัฒนา MATLAB และ MATLAB ถูกเขียนขึ้นใหม่ด้วยภาษาC พร้อมไลบารีจากนั้น MATLAB ได้ถูกพัฒนาต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน MATLAB มี GUI พัฒนาโดยภาษา Java และ Simulink ถูกผนวกเข้ากับ MATLAB

เมื่อจะเขียนโปรแกรมหรือคำนวณ เราต้องสร้างตัวแปรขึ้นมาก่อนเพื่อเก็บตัวเลขที่จะใช้ในการคำนวณและผลลัพท์การคำนวณ ซึ่งจะพบบ่อยๆ ว่าเราต้องเปลี่ยนแปลงชนิดของตัวแปรให้เหมาะสมกับข้อมูลที่จะใช้งานภายหลังจากการสร้าง

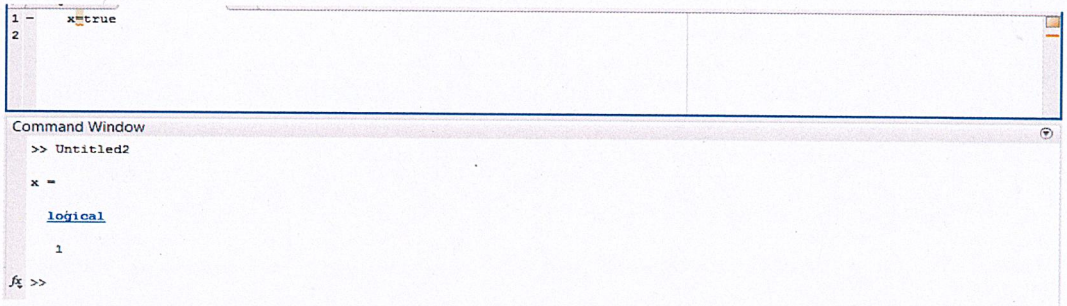
2.5.1 การสร้างตัวแปรใน MATLAB

เราสามารถสร้างตัวแปรได้โดยตรงไม่ต้องประกาศเหมือนในภาษาอื่นๆ เช่น

แต่ถ้าหากต้องการระบุชนิดของตัวแปร เราทำได้โดยใช้ชื่อฟังก์ชันเดียวกับชื่อชนิดของตัวแปรที่ต้องการ เช่น หากเราต้องการสร้าง x=1 เป็นแบบ uint8 เราทำได้โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ยกเว้นตัวแปรชนิด logical เราสามารถใช้ฟังก์ชัน logical หรือการกำหนดค่าเป็น true หรือ false ก็ได้ เช่น



2.5.2 การสร้างอาเรย์แบบลำดับเลขคณิต

อาเรย์แบบนี้จะมีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างเท่าๆกันทุกช่วง เราจะใช้เครื่องหมาย : ในการสร้างโดยมีวิธี ดังนี้

ค่าเริ่มต้น : ผลต่างร่วม : ขอบเขตบน

ค่าเริ่มต้น หมายถึง ตัวเลขตัวแรกของลำดับ

ผลต่างร่วม หมายถึง ผลลบที่อยู่ระหว่างค่าที่ติดกันสองตัว โดยใช้ตัวหลังตั้งแล้วลบด้วยตัวหน้า ซึ่งถ้าไม่กำหนด MATLAB จะระบุค่าเป็น 1 โดยอัตโนมัติ

ขอบเขตบน หมายถึง ค่าตัวเลขตัวสุดท้ายจะไม่เกินค่านี้

ตัวอย่างเช่น

```
>> x = 1:4:10
x     =
1 5         9
```

2.5.3 การกำหนดค่าแสดงผลตัวเลขทศนิยม

โดยปกติแล้ว โปรแกรม MATLAB จะแสดงผลลัพธ์ที่มีทศนิยม 4 ตัวแหน่ง ผู้ใช้สามารถกำหนดการแสดงผลจำนวนหลักของทศนิยมได้ด้วยคำสั่งต่อไปนี้

คำสั่งโปรแกรม	การแสดงผล	รูปแบบการแสดง
Format short	3.1416	แสดงตัวเลข 5 ตำแหน่ง
Format short e	3.1416e+00	แสดงตัวเลข 5 ตำแหน่งพร้อมเลข
Format short g	3.1416	แสดงตัวเลขที่ดีที่สุดระหว่างในรูปแบบสั้นๆ หรือในรูปแบบเลข
Format long	3.14159265359879	การแสดงตัวเลข 16 ตำแหน่ง
Format long e	3.141592653598793e+000	การแสดงตัวเลข 16 ตำแหน่งพร้อมเลข

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Format long g	3.14159265359879	การแสดงตัวเลขแบบยาว
Format hex	400921fb54442d18	การแสดงตัวเลขแบบฐาน
Format bank	3.14	การแสดงตัวเลขแบบธนาคาร คือทศนิยม 2 ตำแหน่ง
Format +	+	แสดงตัวเลขว่าเป็น บวก ลบ หรือ ศูนย์ +
Format rat	355/133	แสดงอัตราส่วนโดยประมาณ

ตารางที่ 2.3 คำสั่งการกำหนดค่าแสดงผลตัวเลขทศนิยม

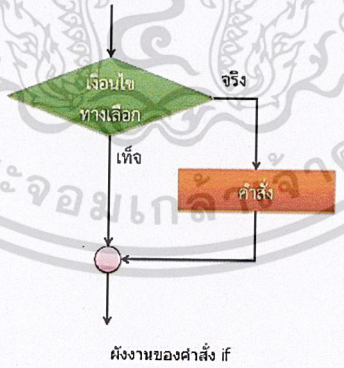
2.5.4 การควบคุมทิศทางของโปรแกรม (Flow Control)

การควบคุมทิศทางของโปรแกรม ทำได้โดย 2 ลักษณะ ได้แก่

1. การเลือก (Selection) ใช้ควบคุมให้ทำชุดคำสั่งเพียงครั้งเดียว ในกรณีเงื่อนไขเป็นจริง คำสั่งในกลุ่มนี้ประกอบด้วยเงื่อนไข if และ switch
2. การวนซ้ำ (Repetition) ใช้ควบคุมให้ทำชุดคำสั่งของโปรแกรมซ้ำ หลายๆรอบตามเงื่อนไขที่เรากำหนด คำสั่งในกลุ่มนี้ประกอบด้วยวงวน for และ while

เงื่อนไข If

รูปแบบ if จะตวจสอบเงื่อนไขในนิพจฯที่กำหนดหลัง if หากเงื่อนไขเป็นจริงจะทำคำสั่งที่ตามมาเพียงครั้งเดียว หากเงื่อนไขเป็นเท็จ ก็จะจบการทำงานของชุดคำสั่ง if

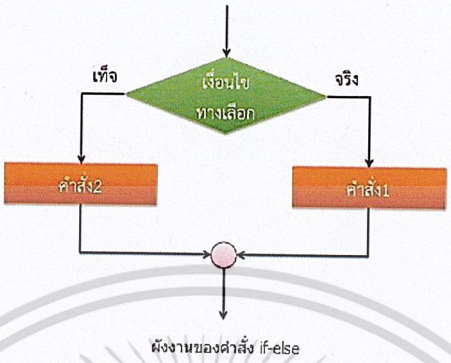


รูปภาพที่ 2.4 ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข If

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไข if-else

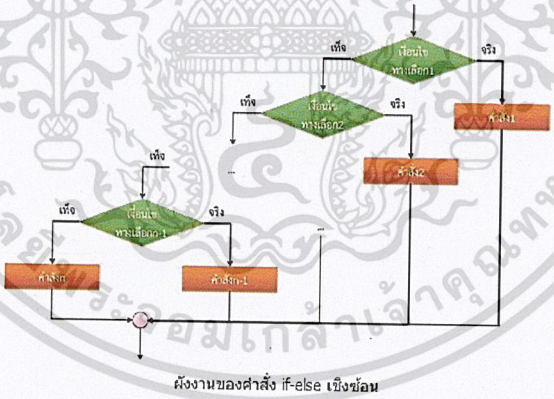
รูปแบบของ if-else จะคล้ายกับ if แบบปกติ แต่จำกำหนดส่วนของคำสั่งที่ต้องทำในกรณีที่เงื่อนไขที่ตรวจสอบเป็นเท็จด้วย



รูปภาพที่ 2.5 ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else

เงื่อนไข if-else-if

รูปแบบของ if else if จะทำในเงื่อนไขที่พบว่า เป็นจริงในเงื่อนไขเดียวที่พบเป็นเงื่อนไขแรก ถ้าเงื่อนไขเป็นเท็จก็จะตรวจสอบเงื่อนไขถัดไป และหากเงื่อนไขถัดไปเป็นเท็จอีก ก็จะตรวจสอบเงื่อนไขต่อไป ตามลำดับ ถ้าเป็นเท็จทุกเงื่อนไขจะทำชุดคำสั่งหลัง else



รูปภาพที่ 2.6 ตัวอย่างการเขียนผังการทำงานของโปรแกรมโดยใช้เงื่อนไข if-else-if

วงวน for

การวนซ้ำเพื่อทำชุดคำสั่งภายในวงวน for ซ้ำตามเวกเตอร์ดัชนีที่กำหนดขึ้น ซึ่ง MATLAB นั้นมีการเรียกใช้งาน วงวน for ที่ค่อนข้างต่างจากภาษาอื่น โดยวงวนจะดำเนินการดัชนีที่เก็บอยู่ในเวกเตอร์หนึ่ง โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้น เงื่อไน และการปรับค่าที่หลังคำสั่ง for จึงทำให้สะดวกและอิสระมากกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.5 กราฟิกและการวาดกราฟ

ใน MATLAB เราสามารถแบ่งงานทางกราฟิกออกได้ 4 ประเภทคือ งานกราฟิกแบบ 2 มิติ, งานกราฟิกแบบ 3 มิติ, งาน GUI และงานภาพเคลื่อนไหว โดยจะกล่าวถึงการวาดกราฟทางคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถวากราฟได้ทั้งแบบ 2 และ 3 มิติ โดยการกำหนดค่าพิกัด หรือการกำหนดสมการ ซึ่งมีรูปแบบกราฟ ให้เลือกมากมาย เช่น กราฟแท่ง กราฟเส้น กราฟวงหลม ฯลฯ นอกจากนี้เรายังสามารถเพิ่มพื้นผิว หรือจัดแสงได้ตามต้องการอีกด้วย

การวาดกราฟ 2 มิติ

การวาดกราฟใน MATLAB นั้นสามารถป้อนค่าได้ 2 ประเภท คือ ค่าพิกัด หรือเป็นสมการ โดยฟังก์ชันแรกที่ควรรู้จักในการวาดกราฟคือ plot ซึ่งสามารถสร้างกราฟในลักษณะเส้นหรือจุด โดยมีวิธีการใช้งานแบบง่ายๆ

```
>> Plot( X,Y,LineSpec )
```

โดยที่

X คือ อาร์เรย์ของพิกัด x ของคู่อันดับ (x,y) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

Y คือ อาร์เรย์ของพิกัด y ของคู่อันดับ (x,y) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

LineSpec คือ การกำหนดรูปแบบของเส้นที่ต้องการให้ปรากฏ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ชนิด ได้แก่ รูปแบบเส้น, เครื่องหมาย(Maker) และ สี โดยมีรายละเอียด ดังนี้

เส้น		เครื่องหมาย		สี	
สัญลักษณ์	ความหมาย	สัญลักษณ์	ความหมาย	สัญลักษณ์	ความหมาย
-	เส้นทึบ	+	บวก	r	แดง
--	เส้นประ	o	วงกลม	g	เขียว
:	จุดประ	*	ดอกจันทร์	b	น้ำเงิน
-.	เส้นประสมจุด	.	จุด	c	ฟ้าอมเขียว
		x	กากบาท	m	ม่วงอมแดง
		s	สี่เหลี่ยม	y	เหลือง
		d	ข้ามหลามตัด	k	ดำ
		^	สามเหลี่ยมบน	w	ขาว
		v	สามเหลี่ยมหงาย		
		>	สามเหลี่ยมขวา		
		<	สามเหลี่ยมซ้าย		
		p	ดาวห้าแฉก		
		h	ดาวหกแฉก		

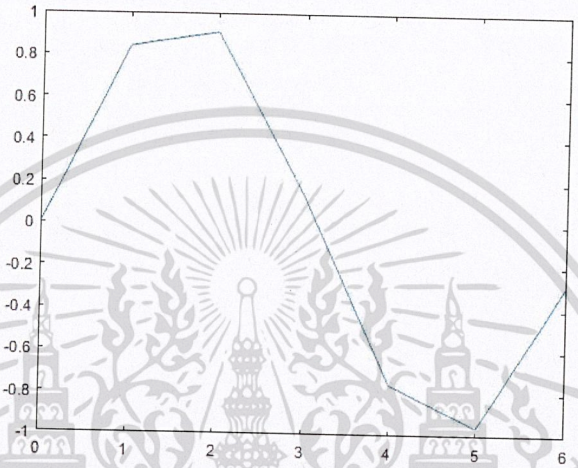
ตารางที่ 2.4 คำสั่งการกำหนดรูปแบบของเส้น เครื่องหมายและสี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งไม่อนุญาตให้นำไปดัดแปลงเพื่อการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น

โดย LineSpec จะกำหนดเป็นสตริง 1 สตริง ซึ่งสามารถใส่สัญลักษณ์ลงไปพร้อมกันได้ทั้งเส้น เครื่องหมาย และ สี

ตัวอย่างเช่น

```
x=0:1:2*pi;
y=sin(x);
plot(x,y)
```



รูปภาพที่ 2.7 ตัวอย่างการวาดกราฟ 2 มิติ

การวาดกราฟ 3 มิติ

การวาดกราฟ 3 มิติ ทำได้เช่นเดียวกับการวาดกราฟ 2 มิติ คือ สามารถป้อนค่าเข้าเป็นค่าพิกัดหรือสมการก็ได้ โดยคำสั่งทั่วไปที่ใช้ในการวาดกราฟ แบบ 3 มิติ มักจะมีการเติมตัวเลข 3 เข้าไป หลังชื่อฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชัน plotสำหรับวาดจุดหรือเส้นแบบ 3 มิติ ก็คือ ฟังก์ชัน plot 3 โดยมีวิธีการใช้ดังนี้

```
>> Plot3(X,Y,Z,LineSpec)
```

โดยที่

X คือ อาร์เรย์ของพิกัด x ของคู่อันดับ (x,y,z) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

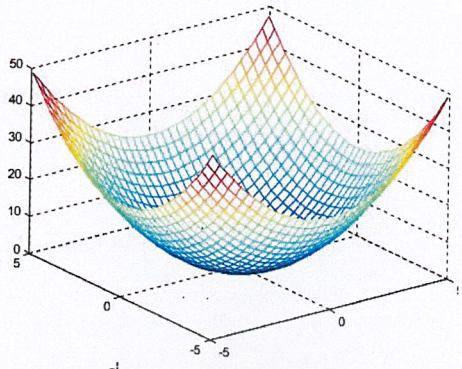
Y คือ อาร์เรย์ของพิกัด y ของคู่อันดับ (x,y,z) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

Z คือ อาร์เรย์ของพิกัด z ของคู่อันดับ (x,y,z) อาจเป็นเวกเตอร์แถวหรือหลักก็ได้

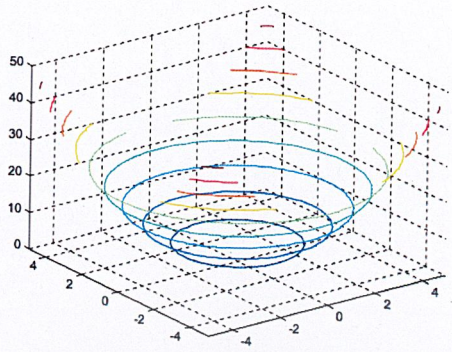
LineSpec คือ การกำหนดรูปแบบของเส้นที่ต้องการให้ปรากฏแบบเดียวกับที่ใช้ในคำสั่ง plot

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

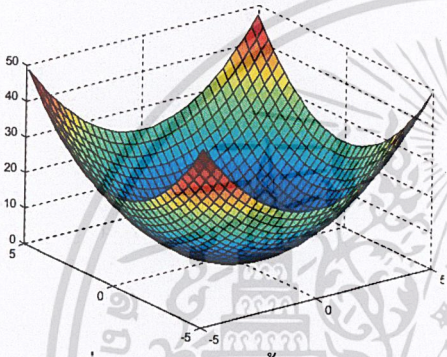
ตัวอย่าง การวาดกราฟแบบ 3 มิติ



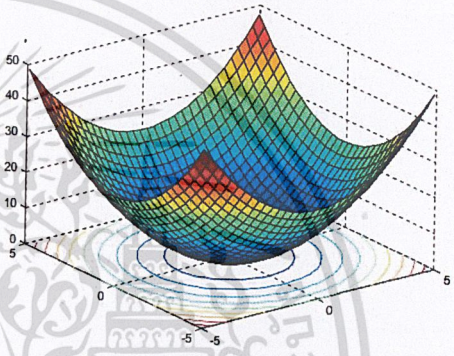
รูปภาพที่ 2.8 กราฟแบบตาข่าย (Mesh)



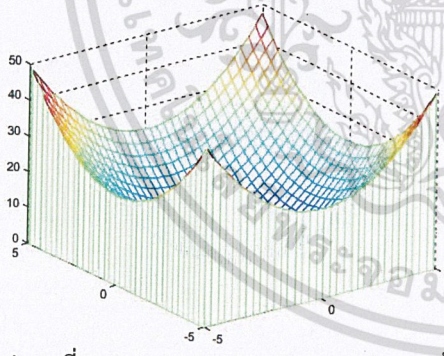
รูปภาพที่ 2.9 กราฟแบบเค้าโครง (Contour)



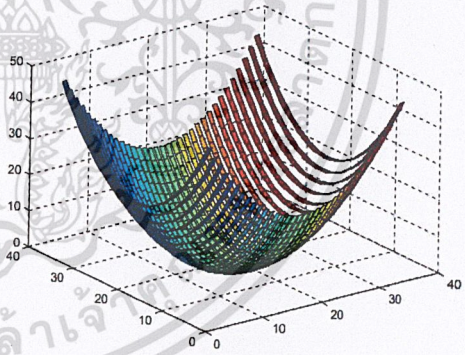
รูปภาพที่ 2.10 กราฟแบบพื้นผิว (Surface)



รูปภาพที่ 2.11 กราฟแบบตาข่ายและเค้าโครง



รูปภาพที่ 2.12 กราฟแบบตาข่ายและเส้นแนวตั้ง



รูปภาพที่ 2.13 กราฟแบบริบบิ้น (Ribbon)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การวาดกราฟหลายกราฟ

การวาดกราฟทำได้ 2 วิธี คือวาดทับบนแกนเดียวกัน หรือวาดแบบหลายแกนในหน้าต่าง Figure เดียวกัน

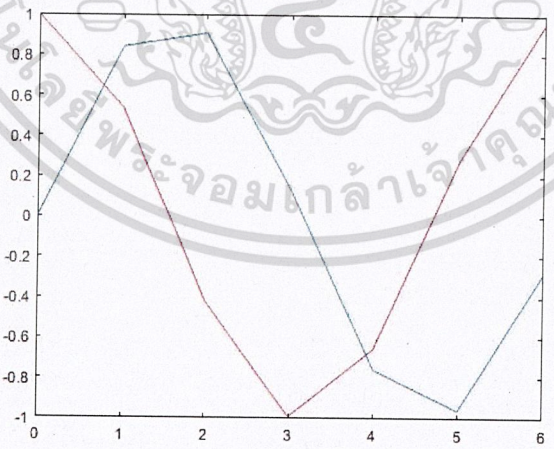
การวาดหลายกราฟบนแกนเดียวกัน

โดยปกติแล้วเมื่อเราวาดกราฟใหม่บนหน้าต่าง Figure เดิม MATLAB จะลบกราฟเก่าแล้วค่อยวาดทับลงไป แต่ในบางครั้งเราอาจจะต้องการวาดกราฟทับลงไปบนกราฟเดิมโดยไม่ต้องลบ เช่น กรณีต้องการเปรียบเทียบ

วิธีการ คือ ใช้คำสั่ง hold on และเมื่อสิ้นสุดการใช้งานแล้วให้เราใช้คำสั่ง hold off เพื่อยกเลิก

ตัวอย่าง เช่น

```
x=0:1:2*pi;
y1=sin(x);
y2=cos(x);
plot(x,y1)
hold on
plot(x,y2,'r')
x=0:.1:2*pi;
hold off
```



รูปภาพที่ 2.14 ตัวอย่างการวาดกราฟ 2 มิติแบบหลายเส้นบนแกนเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 การหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์โดยวิธีอันตะ

รูปทั่วไปของสมการเบอร์เกอร์

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ;0<a<x<b \tag{3.1}$$

มีเงื่อนไขขอบ คือ $u(a,t)=f_1 t$ และ $u(b,t)=f_2 t$ สำหรับ $0<t\le T$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $u(x,0)=g(x) \qquad ;a<x<b$

3.1.1 การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า (Forward Difference Method)

จากรูปทั่วไปของสมการเบอร์เกอร์

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ;0<a<x<b$$

จะได้ว่า $\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}+u\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}=\upsilon\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$

$$\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}=\upsilon\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}-u\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}$$

คูณ l ตลอดสมการ

$$u(x,t+l)-u(x,t)=\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot\left[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\right]-\frac{ul}{h}\cdot\left[u(x+h,t)-u(x,t)\right]$$

$$U_m^{n+1}-U_m^n=\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot\left[U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right]-\frac{ul}{h}\cdot\left[U_{m+1}^n-U_m^n\right]$$

$$U_m^{n+1}=\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot\left[U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n\right]-\frac{ul}{h}\cdot\left[U_{m+1}^n-U_m^n\right]+U_m^n$$

$$U_m^{n+1}=\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot U_{m+1}^n-2\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot U_m^n+\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot U_{m-1}^n-\frac{ul}{h}\cdot U_{m+1}^n+\frac{ul}{h}\cdot U_m^n+U_m^n$$

นั่นคือ

$$U_m^{n+1}=\frac{\upsilon l}{h^2}\cdot U_{m-1}^n+\left(-\frac{2\upsilon l}{h^2}+\frac{ul}{h}+1\right)\cdot U_m^n+\left(\frac{\upsilon l}{h^2}-\frac{ul}{h}\right)\cdot U_{m+1}^n \tag{3.2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้

เงื่อนไขเริ่มต้น : $u(x,0)=\dfrac{2\upsilon\pi\sin(\pi x)}{k+\cos(\pi x)}$

เงื่อนไขขอบ : $\left.\begin{matrix}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{matrix}\right\}t>0$

ผลเฉลยแม่นตรง : $u(x,t)=\dfrac{2\upsilon\pi e^{-\pi^2\upsilon t}\sin(\pi x)}{k+e^{-\pi^2\upsilon t}\cos(\pi x)}$

แสดงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้ง สำหรับ $T=0.1,\ k=2,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$

วิธีทำ กำหนดให้ $T=0.1, k=2, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1=h$ และ $\Delta t=0.0001=l$

จากสมการที่ (3.2) จะได้ว่า

กรณีที่ $n=0$ และ $m=1$

$$U_1^1=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^0+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(\Delta x,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^0+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(\Delta x,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^0$$

$$U_1^1=0.0001\cdot U_0^0+\left(-2(0.0001)+\frac{u(0.1,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^0+\left(0.0001-\frac{u(0.1,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.1,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.1\pi)}{2+\cos(0.1\pi)}=0.00657938$

จะได้

$$U_1^1=0.0001\cdot U_0^0+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.00657938)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^0+\left(0.0001-\frac{(0.00657938)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^0$$

$$U_1^1=0.0001U_0^0+0.99980066U_1^0+0.00009342U_2^0$$

$$U_1^1=0.0001\cdot u(0,0)+0.99980066\cdot u(0.1,0)+0.00009342\cdot u(0.2,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.2,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.2\pi)}{2+\cos(0.2\pi)}=0.01314753$

และจากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $u(0,0)=0$

จะได้ $U_1^1=(0.0001)(0)+(0.99980066)(0.00657938)+(0.00009342)(0.01314753)$

ดังนั้น $U_1^1=0.00657930$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ และ $m=1$)

$$u(1\cdot\Delta x,0\cdot\Delta t)=\frac{2\upsilon\pi e^{-\pi^2\upsilon l}\sin(\pi x)}{k+e^{-\pi^2\upsilon t}\cos(\pi x)}$$

$$u(0.1,0)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^1=0.00657931$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=2$

$$U_2^1=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^0+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(0.2,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^0+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(0.2,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.2,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.2\pi)}{2+\cos(0.2\pi)}=0.01314753$

จะได้

$$U_2^1=0.0001\cdot U_1^0+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01314753)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^0+\left(0.0001-\frac{(0.01314753)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^0$$

$$U_2^1=0.0001U_1^0+0.99981315U_2^0+0.00008685U_3^0$$

$$U_2^1=0.0001\cdot u(0.1,0)+0.99981315\cdot u(0.2,0)+0.00008685\cdot u(0.3,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.3,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.3\pi)}{2+\cos(0.3\pi)}=0.01964307$

จะได้ $U_2^1=(0.0001)(0.00657938)+(0.99981315)(0.01314753)+(0.00008685)(0.01964307)$

ดังนั้น $U_2^1=0.01314744$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=2$ **)**

$$u(0.2,0)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^1=0.01314740$

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=3$

$$U_3^1=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^0+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^0+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.3,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.3\pi)}{2+\cos(0.3\pi)}=0.01964307$

จะได้

$$U_3^1=0.0001\cdot U_2^0+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01964307)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^0+\left(0.0001-\frac{(0.01964307)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^0$$

$$U_3^1=0.0001U_2^0+0.99981964U_3^0+0.00008036U_4^0$$

$$U_3^1=0.0001\cdot u(0.2,0)+0.99981964\cdot u(0.3,0)+0.00008036\cdot u(0.4,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.4,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.4\pi)}{2+\cos(0.4\pi)}=0.02587969$

จะได้ $U_3^1=(0.0001)(0.01314753)+(0.99981964)(0.01964307)+(0.00008036)(0.02587969)$

ดังนั้น $U_3^1=0.01964292$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=3$ **)**

$$u(0.3,0)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^1=0.01964287$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=1$

$$U_1^2=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^1+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_1^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^1+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_1^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^1$$

$$U_1^2=0.0001\cdot U_0^1+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.00657930)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^1+\left(0.0001-\frac{(0.00657930)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^1$$

$$U_1^2=0.0001U_0^1+0.99980658U_1^1+0.00009342U_2^1$$

จากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $U_0^1=u(0,\Delta t)=u(0,0.0001)=0$

จะได้ $U_1^2=(0.0001)(0)+(0.99980658)(0.00657930)+(0.00009342)(0.01314744)$

ดังนั้น $U_1^2=0.00657926$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=1$**)**

$$u(0.1,0.0001)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^2=0.00657933$

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=2$

$$U_2^2=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^1+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_2^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^1+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_2^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^1$$

$$U_2^2=0.0001\cdot U_1^1+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01314744)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^1+\left(0.0001-\frac{(0.01314744)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^1$$

$$U_2^2=0.0001U_1^1+0.99981315U_2^1+0.00008685U_3^1$$

$$U_2^2=(0.0001)(0.00657930)+(0.99981315)(0.01314744)+(0.00008685)(0.01964292)$$

ดังนั้น $U_2^2=0.01314735$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=2$**)**

$$u(0.2,0.0001)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^2=0.01314744$

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=3$

$$U_3^2=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^1+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_3^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^1+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_3^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^1$$

$$U_3^2=0.0001\cdot U_2^1+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01964292)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^1+\left(0.0001-\frac{(0.01964292)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^1$$

$$U_3^2=0.0001U_2^1+0.99981964U_3^1+0.00008036U_4^1$$

$$U_3^2=(0.0001)(0.01314744)+(0.99981964)(0.01964292)+(0.00008036)(0.02587948)$$

ดังนั้น $U_3^2=0.01964277$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=3$**)**

$$u(0.3,0.0001)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^2=0.01964292$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=1$

$$U_1^3=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^2+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_1^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^2+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_1^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^2$$

$$U_1^3=0.0001\cdot U_0^2+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.00657926)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^2+\left(0.0001-\frac{(0.00657926)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^2$$

$$U_1^3=0.0001U_0^2+0.99980658U_1^2+0.00009342U_2^2$$

จากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $U_0^2=u(0,2\cdot\Delta t)=u(0,0.0002)=0$

จะได้ $U_1^3=(0.0001)(0)+(0.99980658)(0.00657926)+(0.00009342)(0.01314735)$

ดังนั้น $U_1^3=0.00657922$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=1$**)**

$$u(0.1,0.0002)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0002)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^3=0.00657935$

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=2$

$$U_2^3=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^2+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_2^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^2+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_2^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^2$$

$$U_2^3=0.0001\cdot U_1^2+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01314735)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^2+\left(0.0001-\frac{(0.01314735)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^2$$

$$U_2^3=0.0001U_1^2+0.99981315U_2^2+0.00008685U_3^2$$

$$U_2^3=(0.0001)(0.00657926)+(0.99981315)(0.01314735)+(0.00008685)(0.01964277)$$

ดังนั้น $U_2^3=0.01314726$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=2$**)**

$$u(0.2,0.0002)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0002)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^3=0.01314748$

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=3$

$$U_3^3=\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^2+\left(\frac{-2(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_3^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^2+\left(\frac{(0.01)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_3^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^2$$

$$U_3^3=0.0001\cdot U_2^2+\left(-2(0.0001)+\frac{(0.01964277)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^2+\left(0.0001-\frac{(0.01964277)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^2$$

$$U_3^3=0.0001U_2^2+0.99981964U_3^2+0.00008036U_4^2$$

$$U_3^3=(0.0001)(0.01314735)+(0.99981964)(0.01964277)+(0.00008036)(0.02587927)$$

ดังนั้น $U_3^3=0.01964262$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=3$**)**

$$u(0.3,0.0002)=\frac{(2)(0.01)\pi e^{-\pi^2(0.01)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(0.01)(0.0002)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^3=0.01964296$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้

เงื่อนไขเริ่มต้น : $u(x,0)=\dfrac{2\upsilon\pi\sin(\pi x)}{k+\cos(\pi x)}$

เงื่อนไขขอบ : $\left.\begin{matrix}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{matrix}\right\}t>0$

ผลเฉลยแม่นตรง : $u(x,t)=\dfrac{2\upsilon\pi e^{-\pi^2\upsilon t}\sin(\pi x)}{k+e^{-\pi^2\upsilon t}\cos(\pi x)}$

แสดงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้ง สำหรับ $T=0.1,\ k=2,\ \upsilon=1,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$

วิธีทำ กำหนดให้ $T=0.1,\ k=2,\ \upsilon=1,\Delta x=0.1=h$ และ $\Delta t=0.0001=l$

จากสมการที่ (3.2) จะได้ว่า

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=1$

$$U_1^1=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^0+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(\Delta x,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^0+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(\Delta x,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.1,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.1\pi)}{2+\cos(0.1\pi)}=0.65793760$

จะได้

$$U_1^1=0.01\cdot U_0^0+\left(-2(0.01)+\frac{(0.65793760)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^0+\left(0.01-\frac{(0.65793760)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^0$$

$$U_1^1=0.01U_0^0+0.98065794U_1^0+0.00934206U_2^0$$

$$U_1^1=0.01\cdot u(0,0)+0.98065794\cdot u(0.1,0)+0.00934206\cdot u(0.2,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.2,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.2\pi)}{2+\cos(0.2\pi)}=1.31475305$

และจากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $u(0,0)=0$

จะได้ $U_1^1=0.01(0)+0.98065794(0.65793760)+0.00934206(1.31475305)$

ดังนั้น $U_1^1=0.65749423$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=1$**)**

$$u(0.1,0)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^1=0.65728856$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=2$

$$U_2^1=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^0+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(0.2,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^0+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(0.2,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.2,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.2\pi)}{2+\cos(0.2\pi)}=1.31475305$

จะได้

$$U_2^1=0.01\cdot U_1^0+\left(-2(0.01)+\frac{(1.31475305)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^0+\left(0.01-\frac{(1.31475305)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^0$$

$$U_2^1=0.01U_1^0+0.98131475U_2^0+0.00868525U_3^0$$

$$U_2^1=0.01\cdot u(0.1,0)+0.98131475\cdot u(0.2,0)+0.00868525\cdot u(0.3,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.3,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.3\pi)}{2+\cos(0.3\pi)}=1.96430662$

จะได้ $U_2^1=0.01(0.65793760)+0.98131475(1.31475305)+0.00868525(1.96430662)$

ดังนั้น $U_2^1=1.31382643$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=2$ **)**

$$u(0.2,0)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^1=1.31345608$

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=3$

$$U_3^1=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^0+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^0+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.3,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.3\pi)}{2+\cos(0.3\pi)}=1.96430662$

จะได้

$$U_3^1=0.01\cdot U_2^0+\left(-2(0.01)+\frac{(1.96430662)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^0+\left(0.01-\frac{(1.96430662)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^0$$

$$U_3^1=0.01U_2^0+0.98196431U_3^0+0.00803569U_4^0$$

$$U_3^1=0.01\cdot u(0.2,0)+0.98196431\cdot u(0.3,0)+0.00803569\cdot u(0.4,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.4,0)=\dfrac{(2)(1)(\pi)\sin(0.4\pi)}{2+\cos(0.4\pi)}=2.58796897$

จะได้ $U_3^1=(0.01)(1.31475305)+(0.98196431)(1.96430662)+(0.00803569)(2.58796897)$

ดังนั้น $U_3^1=1.96282264$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=3$ **)**

$$u(0.3,0)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^1=1.96236888$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=1$

$$U_1^2=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^1+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_1^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^1+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_1^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^1$$

$$U_1^2=0.01\cdot U_0^1+\left(-2(0.01)+\frac{(0.65749423)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^1+\left(0.01-\frac{(0.65749423)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^1$$

$$U_1^2=0.01U_0^1+0.98065749U_1^1+0.00934251U_2^1$$

จากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $U_0^1=u(0,\Delta t)=u(0,0.0001)=0$

จะได้ $U_1^2=0.01(0)+0.98065749(0.65749423)+0.00934251(1.31382643)$

ดังนั้น $U_1^2=0.65705108$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=1$**)**

$$u(0.1,0.0001)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^2=0.65749759$

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=2$

$$U_2^2=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^1+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_2^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^1+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_2^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^1$$

$$U_2^2=0.01\cdot U_1^1+\left(-2(0.01)+\frac{(1.31382643)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^1+\left(0.01-\frac{(1.31382643)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^1$$

$$U_2^2=0.01U_1^1+0.98131383U_2^1+0.00868617U_3^1$$

$$U_2^2=0.01(0.65749423)+0.98131383(1.31382643)+0.00868617(1.96282264)$$

ดังนั้น $U_2^2=1.31290010$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=2$**)**

$$u(0.2,0.0001)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^2=1.31382935$

กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=3$

$$U_3^2=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^1+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_3^1\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^1+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_3^1\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^1$$

$$U_3^2=0.01\cdot U_2^1+\left(-2(0.01)+\frac{(1.96282264)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^1+\left(0.01-\frac{(1.96282264)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^1$$

$$U_3^2=0.01U_2^1+0.98196283U_3^1+0.00803717U_4^1$$

$$U_3^2=0.01(1.31382643)+0.98196283(1.96282264)+0.00803717(2.58583582)$$

ดังนั้น $U_3^2=1.96133994$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=1$ **และ** $m=3$**)**

$$u(0.3,0.0001)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^2=1.96280868$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=1$

$$U_1^3=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_0^2+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_1^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^2+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_1^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^2$$

$$U_1^3=0.01\cdot U_0^2+\left(-2(0.01)+\frac{(1.31290010)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_1^2+\left(0.01-\frac{(1.31290010)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_2^2$$

$$U_1^3=0.01U_0^2+0.98131290U_1^2+0.00868710U_2^2$$

จากเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า $U_0^2=u(0,2\cdot\Delta t)=u(0,0.0002)=0$

จะได้ $U_1^3=0.01(0)+0.98131290(0.65705108)+0.00868710(1.31290010)$

ดังนั้น $U_1^3=0.65617800$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=1$**)**

$$u(0.1,0.0002)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.1\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0002)}\cos(0.1\pi)}$$

ดังนั้น $U_1^3=0.65770655$

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=2$

$$U_2^3=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_1^2+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_2^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^2+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_2^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^2$$

$$U_2^3=0.01\cdot U_1^2+\left(-2(0.01)+\frac{(1.31290010)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_2^2+\left(0.01-\frac{(1.31290010)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_3^2$$

$$U_2^3=0.01U_1^2+0.9813129U_2^2+0.00868710U_3^2$$

$$U_2^3=0.01(0.65705108)+0.9813129(1.31290010)+0.00868710(1.96133994)$$

ดังนั้น $U_2^3=1.31197467$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=2$**)**

$$u(0.2,0.0002)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.2\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0002)}\cos(0.2\pi)}$$

ดังนั้น $U_2^3=1.31420247$

กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=3$

$$U_3^3=\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}\cdot U_2^2+\left(\frac{-2(1)(0.0001)}{(0.1)^2}+\frac{U_3^2\cdot(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^2+\left(\frac{(1)(0.0001)}{(0.1)^2}-\frac{U_3^2\cdot(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^2$$

$$U_3^3=0.01\cdot U_2^2+\left(-2(0.01)+\frac{(1.96133994)(0.0001)}{0.1}+1\right)\cdot U_3^2+\left(0.01-\frac{(1.96133994)(0.0001)}{0.1}\right)\cdot U_4^2$$

$$U_3^3=0.01U_2^2+0.92196134U_3^2+0.00803866U_4^2$$

$$U_3^3=0.01(1.31290010)+0.92196134(1.96133994)+0.00803866(2.58370506)$$

ดังนั้น $U_3^3=1.84217813$

ผลเฉลยแม่นตรง (กรณีที่ $n=2$ **และ** $m=3$**)**

$$u(0.3,0.0002)=\frac{(2)(1)\pi e^{-\pi^2(1)(0.0001)}\sin(0.3\pi)}{2+e^{-\pi^2(1)(0.0002)}\cos(0.3\pi)}$$

ดังนั้น $U_3^3=1.96324824$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) รอบจุด $x=a$ นั่นคือ

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (3.3)$$

และกำหนดให้ $h=x-a$ เราสามารถสร้างสูตรการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขทั้งอันดับหนึ่งและอันดับสองได้ดังต่อไปนี้

3.2.1 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

พิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x-2h$, $x-h$, $x+h$ และ $x+2h$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion)

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

$$f(x-h)=f(x)-\mathrm{h}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

$$f(x)=f(x)$$

$$f(x+h)=f(x)+\mathrm{h}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x)=af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h) \qquad (3.4)$$

นำค่า $f(x-2h), f(x-h), f(x), f(x+h)$ และ $f(x+2h)$ แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$f'(x)=a\left[f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots\right]$$
$$+b\left[f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots\right]+\mathrm{c}f(x)$$
$$+d\left[f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots\right]$$
$$+e\left[f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\ldots\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f'(x)=af(x)-2ahf'(x)+\frac{a(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{a(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{a(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)$$
$$+bf(x)-bhf'(x)+\frac{bh^2}{2!}f''(x)-\frac{bh^3}{3!}f'''(x)+\frac{bh^4}{4!}f^{(4)}(x)+\mathrm{c}f(x)$$
$$+df(x)+dhf'(x)+\frac{dh^2}{2!}f''(x)+\frac{dh^3}{3!}f'''(x)+\frac{dh^4}{4!}f^{(4)}(x)+ef(x)$$
$$+2ehf'(x)+\frac{e(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{e(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{e(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\mathrm{O}(h^5)$$
$$f'(x)=[a+b+c+d+e]f(x)+[-2a-b+d+2e](h)f'(x)+\left[2a+\frac{b}{2}+\frac{d}{2}+2e\right](h^2)f''(x)$$
$$+\left[-\frac{4a}{3}-\frac{b}{6}+\frac{d}{6}+\frac{4e}{3}\right](h^3)f'''(x)+\left[\frac{2a}{3}+\frac{b}{24}+\frac{d}{24}+\frac{2e}{3}\right](h^4)f^{(4)}(x)+\mathrm{O}(h^5)$$

เทียบค่าสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \tag{3.5}$$
$$-2a-b+d+2e=\frac{1}{h} \tag{3.6}$$
$$4a+b+d+4a=0 \tag{3.7}$$
$$-8a-b+d+8e=0 \tag{3.8}$$
$$16a+b+d+16e=0 \tag{3.9}$$

แก้ระบบสมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

นำสมการ (3.6) + (3.7)

จะได้

$$(-2a-b+d+2e)+(4a+b+d+4e)=\frac{1}{h}+0$$
$$-2a-b+d+2e+4a+b+d+4e=\frac{1}{h}$$
$$2a+2d+6e=\frac{1}{h}$$

คูณ $\frac{1}{2}$ ตลอดสมการ;
$$a+d+3e=\frac{1}{2h} \tag{3.10}$$

นำสมการ (3.8) + (3.9)

จะได้

$$(-8a-b+d+8e)+(16a+b+d+16e)=0$$
$$-8a-b+d+8e+16a+b+d+16e=0$$
$$8a+2d+24e=0$$

คูณ $\frac{1}{2}$ ตลอดสมการ;
$$4a+d+12e=0 \tag{3.11}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (3.7)+ (3.8)

จะได้

$$(4a+b+d+4e)+(-8a-b+d+8e)=0$$
$$4a+b+d+4e-8a-b+d+8e=0$$
$$-4a+2d+12e=0$$

คูณ $\frac{1}{2}$ ตลอดสมการ; $$-2a+d+6e=0 \quad (3.12)$$

นำสมการ (3.10) - (3.12)

จะได้

$$(a+d+3e)-(-2a+d+6e)=\frac{1}{2h}-0$$
$$a+d+3e+2a-d-6e=\frac{1}{2h}$$
$$3a-3e=\frac{1}{2h}$$
$$3a=\frac{1}{2h}+3e$$

คูณ $\frac{1}{3}$ ตลอดสมการ ; $$a=\frac{1}{6h}+e \quad (3.13)$$

นำสมการ (3.12) - (3.13)

จะได้

$$(-2a+d+6e)-(4a+d+12e)=0$$
$$-2a+d+6e-4a-d-12e=0$$
$$-6a-6e=0$$
$$-6(a+e)=0 \quad (3.14)$$

นำสมการ (3.13) แทนใน (3.12)

จะได้

$$-6\left(\frac{1}{6h}+e+e\right)=0$$
$$-6\left(\frac{1}{6h}+2e\right)=0$$
$$-\frac{6}{6h}-12e=0$$
$$-\frac{1}{h}-12e=0$$
$$-12e=\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $$e=-\frac{1}{12h}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ(3.13) $a=\frac{1}{6h}+e$

นำ $e=-\frac{1}{12h}$ แทนในสมการ (3.13)

จะได้

$$a=\frac{1}{6h}+\left(-\frac{1}{12h}\right)$$

$$a=\frac{2}{12h}-\frac{1}{12h}$$

ดังนั้น $$a=\frac{1}{12h}$$

จากสมการ (3.10) $$a+d+3e=\frac{1}{2h}$$

นำ $a=\frac{1}{12h}$ และ $e=-\frac{1}{12h}$ แทนในสมการ (4.7)

จะได้

$$\frac{1}{12h}+d+3\left(-\frac{1}{12h}\right)=\frac{1}{2h}$$

$$\frac{1}{12h}+d-\frac{3}{12h}=\frac{1}{2h}$$

$$d-\frac{2}{12h}=\frac{1}{2h}$$

$$d=\frac{1}{2h}+\frac{2}{12h}$$

$$d=\frac{8}{12h}$$

ดังนั้น $$d=\frac{2}{3h}$$

จากสมการ (3.6) $$-2a-b+d+2e=\frac{1}{h}$$

นำ $a=\frac{1}{12h}$, $d=\frac{2}{3h}$ และ $e=-\frac{1}{12h}$ แทนในสมการ (3.6)

จะได้

$$-2\left(\frac{1}{12h}\right)-b+\frac{2}{3h}+2\left(-\frac{1}{12h}\right)=\frac{1}{h}$$

$$-\frac{2}{12h}-b+\frac{8}{12h}-\frac{2}{12h}=\frac{1}{h}$$

$$-b+\frac{4}{12h}=\frac{1}{h}$$

$$b=\frac{4}{12h}-\frac{1}{h}$$

$$b=\frac{-8}{12h}$$

ดังนั้น $$b=\frac{-2}{3h}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (3.5) $a+b+c+d+e=0$

นำ $a=\frac{1}{12h}$, $b=-\frac{2}{3h}$, $d=\frac{2}{3h}$ และ $e=-\frac{1}{12h}$ แทนในสมการ (3.5)

จะได้

$$\frac{1}{12h}+\left(-\frac{2}{3h}\right)+c+\frac{2}{3h}+\left(-\frac{1}{12h}\right)=0$$

$$\frac{1}{12h}-\frac{8}{12h}+c+\frac{8}{12h}+-\frac{1}{12h}=0$$

ดังนั้น $c=0$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(\frac{1}{12h},-\frac{2}{3h},0,\frac{2}{3h},-\frac{1}{12h}\right) \quad (3.15)$$

จาก $f'(x)=af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h)$

จะได้ว่า

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12h}\right)f(x-2h)+\left(-\frac{2}{3h}\right)f(x-h)+(0)f(x)+\left(\frac{2}{3h}\right)f(x+h)+\left(-\frac{1}{12h}\right)f(x+2h)$$

$$f'(x)=\frac{1}{12h}f(x-2h)-\frac{8}{12h}f(x-h)+\frac{8}{12h}f(x+h)-\frac{1}{12h}f(x+2h)$$

ดังนั้น $$f'(x)=\frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h} \quad (3.16)$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $$\left(-\frac{4a}{15}-\frac{b}{120}+\frac{d}{120}+\frac{4e}{15}\right)h^5f^{(5)}(x)=O(h^4) \quad (3.17)$$

$$\left[-\frac{4}{15}\left(\frac{1}{12h}\right)-\frac{1}{120}\left(-\frac{2}{3h}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{2}{3h}\right)+\frac{4}{15}\left(-\frac{1}{12h}\right)\right]h^5f^{(5)}(x)=O(h^4)$$

$$\left[-\frac{1}{45h}+\frac{1}{180h}+\frac{1}{180h}-\frac{1}{45h}\right]h^5f^{(5)}(x)=O(h^4)$$

$$\left[\frac{-4+1+1-4}{180h}\right]h^5f^{(5)}(x)=O(h^4)$$

$$\frac{2}{180h}h^5f^{(5)}(x)=O(h^4)$$

$$\frac{1}{90}h^4f^{(5)}(x)=O(h^4)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง คือ

$$f'(x)=\frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}+O(h^4) \quad (3.18)$$

หรือ $$y'(x_i)=\frac{y(x_{i-2})-8y(x_{i-1})+8y(x_{i+1})-y(x_{i+2})}{12h}+O(h^4) \quad (3.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยใช้วิธีผลต่างหกจุดกลาง

พิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f''(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x-3h$, $x-2h$, $x-h$, $x+h$, $x+2h$ และ $x+3h$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์(Taylor Series Expansion)

$$f(x-3h)=f(x)-3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

$$f(x)=f(x)$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

$$f(x+3h)=f(x)+3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots$$

หาอนุพันธ์อันดับสองโดยกำหนดให้

$$f''(x)=af(x-3h)+bf(x-2)+cf(x-h)+df(x)+ef(x+h)+jf(x+2h)+kf(x+3h) \quad (3.20)$$

นำ $f(x-3h), f(x-2), f(x-h), f(x), f(x+h), f(x+2h)$ และ $f(x+3h)$ แทนในสมการ (3.20) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f''(x)=\ & a\left[f(x)-3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]\\
&+b\left[f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]\\
&+c\left[f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]\\
&+df(x)\\
&+e\left[f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]\\
&+j\left[f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]\\
&+k\left[f(x)+3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+\dots\right]
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$f''(x)=af(x)-3ahf'(x)+\frac{a(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{a(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{a(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{a(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{a(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)$$
$$+bf(x)-2bhf'(x)+\frac{b(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{b(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{b(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{b(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{b(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)$$
$$+cf(x)-chf'(x)+\frac{ch^2}{2!}f''(x)-\frac{ch^3}{3!}f'''(x)+\frac{ch^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{ch^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{ch^6}{6!}f^{(6)}(x)+df(x)$$
$$+ef(x)+ehf'(x)+\frac{eh^2}{2!}f''(x)+\frac{eh^3}{3!}f'''(x)+\frac{eh^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{eh^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{eh^6}{6!}f^{(6)}(x)$$
$$+jf(x)+2jhf'(x)+\frac{j(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{j(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{j(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{j(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{j(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x)$$
$$+kf(x)+3khf'(x)+\frac{k(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{k(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{k(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{k(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\frac{k(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x)+O(h^7)$$

$$f''=[a+b+c+e+d+j+k]f(x)+[-3a-2b-c+e+2j+3k]f'(x)+\left[\frac{9a}{2}+2b+\frac{c}{2}+\frac{e}{2}+2j+\frac{9k}{2}\right](h^2)f''(x)$$
$$+\left[-\frac{9a}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{c}{6}+\frac{e}{6}+\frac{4j}{3}+\frac{9k}{2}\right](h^3)f'''(x)+\left[\frac{27a}{8}+\frac{2b}{3}+\frac{c}{24}+\frac{e}{24}+\frac{2j}{3}+\frac{27k}{8}\right](h^4)f^{(4)}(x)$$
$$+\left[-\frac{81a}{40}-\frac{4b}{15}-\frac{1c}{120}+\frac{1e}{120}+\frac{4j}{15}+\frac{81k}{40}\right](h^5)f^{(5)}(x)+\left[\frac{81a}{80}+\frac{4b}{45}+\frac{1c}{720}+\frac{1e}{720}+\frac{4j}{45}+\frac{81k}{80}\right](h^6)f^{(6)}(x)+O(h^7)$$

เทียบค่าสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e+j+k=0 \tag{3.21}$$
$$-3a-2b-c+e+2j+3k=0 \tag{3.22}$$
$$9a+4b+c+e+4j+9k=\frac{2}{h^2} \tag{3.23}$$
$$-27a-8b-c+e+8j+27k=0 \tag{3.24}$$
$$81a+16b+c+e+16j+81k=0 \tag{3.25}$$
$$-243a-32b-c+e+32j+243k=0 \tag{3.26}$$
$$729a+64b+c+e+64j+729k=0 \tag{3.27}$$

แก้ระบบสมการโดยนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $AX=B$
จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ -27 & -8 & -1 & 0 & 1 & 8 & 27 \\ 81 & 16 & 1 & 0 & 1 & 16 & 81 \\ -243 & -32 & -1 & 0 & 1 & 32 & 243 \\ 729 & 64 & 1 & 0 & 1 & 64 & 729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ j \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/h^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากรูปเมทริกซ์ $$AX=B$$
$$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{576460752303423488} & \frac{-1}{60} & \frac{1}{180} & \frac{1}{48} & \frac{-1}{144} & \frac{-1}{240} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{3}{20} & \frac{-3}{40} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{60} & \frac{-1}{120} \\ \frac{-1}{36028797018963968} & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{13}{48} & \frac{-13}{48} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{48} \\ 1 & \frac{-6019158806320401}{1014120480182583521197362564300 8} & \frac{-49}{36} & \frac{6004799503160667}{5070602400912917605986812821504} & \frac{7}{18} & \frac{-3523649708451921}{1014120480182583521197362564300 8} & \frac{-1}{36} \\ \frac{1}{36028797018963968} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-13}{48} & \frac{-13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{72057594037927936} & \frac{-3}{20} & \frac{-3}{40} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{60} & \frac{-1}{120} \\ \frac{-1}{576460752303423488} & \frac{1}{60} & \frac{1}{180} & \frac{-1}{48} & \frac{-1}{144} & \frac{1}{240} & \frac{1}{720} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{90h^2} \\ \frac{-3}{h^2} \\ \frac{3}{2h^2} \\ \frac{-49}{18h^2} \\ \frac{3}{2h^2} \\ \frac{-3}{20h^2} \\ \frac{1}{90h^2} \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e,j,k)=\left(\frac{1}{90h^2},\frac{-3}{h^2},\frac{3}{2h^2},\frac{-49}{18h^2},\frac{3}{2h^2},\frac{-3}{20h^2},\frac{1}{90h^2}\right) \qquad (3.28)$$

จาก $f''(x)=af(x-3h)+bf(x-2)+cf(x-h)+df(x)+ef(x+h)+jf(x+2h)+kf(x+3h)$

จะได้ว่า

$$f''(x)=\left(\frac{1}{90h^2}\right)f(x-3h)+\left(-\frac{3}{20h^2}\right)f(x-2)+\left(\frac{3}{2h^2}\right)f(x-h)+\left(\frac{49}{18h^2}\right)f(x)+\left(\frac{3}{2h^2}\right)f(x+h)$$
$$+\left(-\frac{3}{20h^2}\right)f(x+2h)+\left(\frac{1}{90h^2}\right)f(x+3h)$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{90h^2}\cdot\frac{2}{2}\right)f(x-3h)+\left(-\frac{3}{20h^2}\cdot\frac{9}{9}\right)f(x-2)+\left(\frac{3}{2h^2}\cdot\frac{90}{90}\right)f(x-h)+\left(\frac{49}{18h^2}\cdot\frac{10}{10}\right)f(x)$$
$$+\left(\frac{3}{2h^2}\cdot\frac{90}{90}\right)f(x+h)+\left(-\frac{3}{20h^2}\cdot\frac{9}{9}\right)f(x+2h)+\left(\frac{1}{90h^2}\cdot\frac{2}{2}\right)f(x+3h)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$f''(x)=\frac{2f(x-3h)-27f(x-2)+270f(x-h)-490f(x)+270f(x+h)-27f(x+2h)+2f(x+3h)}{180h^2} \quad (3.29)$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(\frac{3^8}{8!}a+\frac{2^8}{8!}b+\frac{1^8}{8!}c+\frac{1^8}{8!}e+\frac{2^8}{8!}j+\frac{3^8}{8!}k\right)\cdot h^8 f^{(8)}(x)=O(h^6)$ (3.30)

จะได้

$$\left[\frac{3^8}{8!}\left(\frac{1}{90h^2}\right)+\frac{2^8}{8!}\left(\frac{-3}{h^2}\right)+\frac{1^8}{8!}\left(\frac{3}{2h^2}\right)+\frac{1^8}{8!}\left(\frac{3}{2h^2}\right)+\frac{2^8}{8!}\left(\frac{-3}{h^2}\right)+\frac{3^8}{8!}\left(\frac{1}{90h^2}\right)\right]\left(h^8\right)f^{(8)}(x)=O(h^6)$$

$$\left[\frac{8}{44800h^2}-\frac{1}{1050h^2}+\frac{1}{26880h^2}+\frac{1}{26880h^2}-\frac{1}{1050h^2}+\frac{8}{44800h^2}\right]\left(h^8\right)f^{(8)}(x)=O(h^6)$$

$$\left[\frac{81}{44800}-\frac{1}{1050}+\frac{1}{26880}+\frac{1}{26880}-\frac{1}{1050}+\frac{81}{44800}\right]\left(\frac{1}{h^2}\right)\left(h^8\right)f^{(8)}(x)=O(h^6)$$

$$\frac{1}{560}h^6 f^{(8)}(x)=O(h^6)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง คือ

$$f''(x)=\frac{2f(x-3h)-27f(x-2)+270f(x-h)-490f(x)+270f(x+h)-27f(x+2h)+2f(x+3h)}{180h^2}+O(h^6) \quad (3.31)$$

หรือ $$y''(x_i)=\frac{2y(x_{i-3})-27y(x_{i-2})+270y(x_{i-1})-490y(x_i)+270y(x_{i+1})-27y(x_{i+2})+2y(x_{i+3})}{180h^2}+O(h^6) \quad (3.32)$$

3.2.3 การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ (Forward Difference in Time and Central Difference in Space)

จากรูปทั่วไปของสมการเบอร์เกอร์

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ;0<a<x<b$$

จัดรูปใหม่ $$\frac{\partial u}{\partial t}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}$$

<u>กำหนดให้</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t}\simeq\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\simeq\frac{2u(x-3h,t)-27u(x-2,t)+270u(x-h,t)-490u(x,t)+270u(x+h,t)-27u(x+2h,t)+2u(x+3h,t)}{180h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\simeq\frac{u(x-2h,t)-8u(x-h,t)+8u(x+h,t)-u(x+2h,t)}{12h}$$

เมื่อ

$\frac{\partial u}{\partial t}$ คือ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า

$\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ คือ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากกลาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}=\upsilon\left(\begin{array}{l}\dfrac{2u(x-3h,t)-27u(x-2,t)+270u(x-h,t)-490u(x,t)}{180h^2}\\ \dfrac{+270f(x+h)-27u(x+2h,t)+2u(x+3h,t)}{180h^2}\end{array}\right)$$
$$+u\left(\frac{u(x-2h,t)-8u(x-h,t)+8u(x+h,t)-u(x+2h,t)}{12h}\right)$$

คูณ l ตลอดสมการ

จะได้

$$u(x,t+l)-u(x,t)=\frac{\upsilon l}{180h^2}\left(\begin{array}{l}2u(x-3h,t)-27u(x-2,t)+270u(x-h,t)-490u(x,t)\\ +270u(x+h,t)-27u(x+2h,t)+2u(x+3h,t)\end{array}\right)$$
$$+\frac{ul}{12h}\left(u(x-2h,t)-8u(x-h,t)+8u(x+h,t)-u(x+2h,t)\right)$$

$$\cup_m^{n+1}-\cup_m^n=\frac{\upsilon l}{180h^2}\left[2\cup_{m-3}^n-27\cup_{m-2}^n+270\cup_{m-1}^n-490\cup_m^n+270\cup_{m+1}^n-27\cup_{m+2}^n+2\cup_{m+3}^n\right]$$
$$+\frac{ul}{12h}\cdot\left[\cup_{m-2}^n-8\cup_{m-1}^n+8\cup_{m+1}^n-\cup_{m+2}^n\right]$$

$$\cup_m^{n+1}=\frac{\upsilon l}{180h^2}\left[2\cup_{m-3}^n-27\cup_{m-2}^n+270\cup_{m-1}^n-490\cup_m^n+270\cup_{m+1}^n-27\cup_{m+2}^n+2\cup_{m+3}^n\right]$$
$$+\frac{ul}{12h}\cdot\left[\cup_{m-2}^n-8\cup_{m-1}^n+8\cup_{m+1}^n-\cup_{m+2}^n\right]+\cup_m^n$$

$$\cup_m^{n+1}=\frac{2\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m-3}^n-\frac{27\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m-2}^n+\frac{270\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m-1}^n-\frac{490\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_m^n+\frac{270\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m+1}^n-\frac{27\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m+2}^n+\frac{2\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m+3}^n$$
$$-\frac{ul}{12h}\cdot\cup_{m-2}^n+\frac{8ul}{12h}\cdot\cup_{m-1}^n-\frac{8ul}{12h}\cdot\cup_{m+1}^n+\frac{ul}{12h}\cdot\cup_{m+2}^n+\cup_m^n$$

นั่นคือ

$$\cup_m^{n+1}=\frac{2\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m-3}^n-\left(\frac{27\upsilon l}{180h^2}+\frac{ul}{12h}\right)\cdot\cup_{m-2}^n+\left(\frac{270\upsilon l}{180h^2}+\frac{8ul}{12h}\right)\cdot\cup_{m-1}^n-\left(\frac{490\upsilon l}{180h^2}-1\right)\cdot\cup_m^n+\left(\frac{270\upsilon l}{180h^2}-\frac{8ul}{12h}\right)\cdot\cup_{m+1}^n$$
$$-\left(\frac{27\upsilon l}{180h^2}-\frac{ul}{12h}\right)\cdot\cup_{m+2}^n+\frac{2\upsilon l}{180h^2}\cdot\cup_{m+3}^n \qquad (3.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้

เงื่อนไขเริ่มต้น : $u(x,0)=\dfrac{2\upsilon\pi\sin(\pi x)}{k+\cos(\pi x)}$

เงื่อนไขขอบ : $\left.\begin{matrix}u(0,t)=0\\u(1,t)=0\end{matrix}\right\}t>0$

ผลเฉลยแม่นตรง : $u(x,t)=\dfrac{2\upsilon\pi e^{-\pi^2\upsilon t}\sin(\pi x)}{k+e^{-\pi^2\upsilon t}\cos(\pi x)}$

แสดงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีผลต่างอันตะแบบชัดแจ้ง สำหรับ $T=0.1,\ k=2,\ \upsilon=0.01,\ \Delta x=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$

วิธีทำ กำหนดให้ $T=0.1, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1=h$ และ $\Delta t=0.0001=l$

ซึ่งจากสมการที่ (3.33) จะได้ว่า

กรณีที่ $n=0$ และ $m=3$

$$U_3^1=\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_0^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_1^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_2^0-\left(\frac{490(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_3^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_4^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.3,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_5^0$$
$$+\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_6^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.3,0)=\dfrac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.3\pi)}{2+\cos(0.3\pi)}=0.01964307$

$$U_3^1=0.00000111\cdot U_0^0-\left(0.00001500+\frac{(0.0964307)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_1^0$$
$$+\left(0.00015000+\frac{8(0.0964307)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_2^0-0.099972778\cdot U_3^0$$
$$+\left(0.00015000+\frac{8(0.0964307)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_4^0-\left(0.00001500+\frac{(0.0964307)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_5^0$$
$$+0.00000111\cdot U_6^0$$
$$U_3^1=0.00000111\cdot U_0^0-0.0001664\cdot U_1^0+0.00016310\cdot U_2^0-0.099972778\cdot U_3^0+0.00016310\cdot U_4^0$$
$$-0.0001664\cdot U_5^0+0.00000111\cdot U_6^0$$
$$U_3^1=0.00000111\cdot(0)-0.0001664\cdot u(0.1,0)+0.00016310\cdot u(0.2,0)-0.099972778\cdot u(0.3,0)$$
$$+0.00016310\cdot u(0.4,0)-0.0001664\cdot u(0.5,0)+0.00000111\cdot u(0.6,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า

$$U_3^1=0-(0.0001664)(0.00657938)+(0.00016310)(0.0196307)-(0.09997277)(0.0196307)$$
$$+(0.00016310)(0.02587969)-(0.0001664)(0.03141583)+(0.00000111)(0.03533841)$$

ดังนั้น $U_3^1=0.01964397$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=4$

$$U_4^1=\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_1^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.4,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_2^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.4,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_3^0+\left(\frac{490(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_4^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.4,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_5^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.4,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_6^0$$
$$+\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_7^0$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า $u(0.4,0)=\frac{(2)(0.01)(\pi)\sin(0.4\pi)}{2+\cos(0.4\pi)}=0.02587969$

$$U_4^1=0.00000111\cdot U_1^0-\left(0.00001500+\frac{(0.02587969)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_2^0+\left(0.00015000+\frac{8(0.02587969)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_3^0$$
$$+0.099972778\cdot U_4^0+\left(0.00015000+\frac{8(0.02587969)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_5^0$$
$$-\left(0.00001500+\frac{(0.02587969)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_6^0+0.00000111\cdot U_7^0$$
$$U_4^1=0.00000111\cdot U_1^0-0.0001716\cdot U_2^0+0.00016725\cdot U_3^0+0.099972778\cdot U_4^0+0.00013275\cdot U_5^0$$
$$-0.0001284\cdot U_6^0+0.00000111\cdot U_7^0$$
$$U_4^1=0.00000111\cdot u(\Delta x,0)-0.0001716\cdot u(2\cdot\Delta x,0)+0.00016725\cdot u(3\cdot\Delta x,0)$$
$$+0.099972778\cdot u(4\cdot\Delta x,0)+0.00013275\cdot u(5\cdot\Delta x,0)-0.0001284\cdot u(6\cdot\Delta x,0)$$
$$+0.00000111\cdot u(7\cdot\Delta x,0)$$
$$U_4^1=0.00000111\cdot u(0.1,0)-0.0001716\cdot u(0.2,0)+0.00016725\cdot u(0.3,0)+0.099972778\cdot u(0.4,0)$$
$$+0.00013275\cdot u(0.5,0)-0.0001284\cdot u(0.6,0)+0.00000111\cdot u(0.7,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า

$$U_4^1=0.00000111(0.00657938)-0.00001716(0.01314753)+0.00016725(0.01964307)$$
$$+0.099972778(0.02587969)+0.00013275(0.03141953)-0.0001284(0.03141953)$$
$$+0.00000111(0.0599455)$$

ดังนั้น $U_4^1=0.02587953$

กรณีที่ $n=0$ **และ** $m=5$

$$U_5^1=\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_2^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.5,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_3^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.5,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_4^0-\left(\frac{490(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_5^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.5,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_6^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.5,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_7^0$$
$$+\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_8^0$$

$$U_5^1=0.00000111\cdot U_2^0-\left(0.00001500+\frac{(0.03141953)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_3^0$$
$$+\left(0.00015000+\frac{8(0.03141953)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_4^0-0.099972778\cdot U_5^0$$
$$+\left(0.00015000+\frac{8(0.03141953)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_6^0-\left(0.00001500+\frac{(0.03141953)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_7^0$$
$$+0.00000111\cdot U_8^0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U_5^1 = 0.00000111\cdot U_2^0 - 0.0001762\cdot U_3^0 + 0.00017094\cdot U_4^0 + 0.099972778\cdot U_5^0 + 0.00016310\cdot U_6^0 - 0.0001664\cdot U_7^0 + 0.00000111\cdot U_8^0$$

$$U_5^1 = 0.00000111\cdot u(2\cdot\Delta x,0) - 0.0001762\cdot u(3\cdot\Delta x,0) + 0.00017094\cdot u(4\cdot\Delta x,0) + 0.099972778\cdot u(5\cdot\Delta x,0) + 0.00012906\cdot u(6\cdot\Delta x,0) - 0.0001238\cdot u(7\cdot\Delta x,0) + 0.00000111\cdot u(8\cdot\Delta x,0)$$

$$U_5^1 = 0.00000111\cdot u(0.2,0) - 0.0001762\cdot u(0.3,0) + 0.00017094\cdot u(0.4,0) + 0.099972778\cdot u(0.5,0) + 0.00012906\cdot u(0.6,0) - 0.0001238\cdot u(0.7,0) + 0.00000111\cdot u(0.8,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น ทำให้ได้ว่า

$$U_5^1 = (0.00000111)(0.01314753) - (0.00017620)(0.01964307) + (0.00017094)(0.0.02587969) + (0.099972778)(0.03141593) + (0.00012906)(0.03533841) - (0.00012380)(0.03599455) + (0.00000111)(0.03100937)$$

ดังนั้น $U_5^1 = 0.03141560$

กรณีที่ $n = 0$ และ $m = 6$

$$U_6^1 = \left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_3^0 - \left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2} + \frac{u(0.6,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_4^0 + \left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2} + \frac{8u(0.6,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_5^0 - \left(\frac{490(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_6^0 + \left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2} + \frac{8u(0.6,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_7^0 - \left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2} + \frac{u(0.6,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_8^0 + \left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_9^0$$

$$U_6^1 = 0.00000111\cdot U_3^0 - \left(0.00001500 + \frac{(0.03533841)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_4^0 + \left(0.00015000 + \frac{8(0.03533841)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_5^0 + 0.099972778\cdot U_6^0 + \left(0.00015000 + \frac{8(0.03533841)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_7^0 - \left(0.00001500 + \frac{(0.03533841)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_8^0 + 0.00000111\cdot U_9^0$$

$$U_6^1 = 0.00000111\cdot U_3^0 - 0.0001794\cdot U_4^0 + 0.00017356\cdot U_5^0 + 0.099972778\cdot U_6^0 + 0.00012644\cdot U_7^0 - 0.0001206\cdot U_8^0 + 0.00000111\cdot U_9^0$$

$$U_6^1 = 0.00000111\cdot u(3\cdot\Delta x,0) - 0.0001794\cdot u(4\cdot\Delta x,0) + 0.00017356\cdot u(5\cdot\Delta x,0) + 0.099972778\cdot u(6\cdot\Delta x,0) + 0.00012644\cdot u(7\cdot\Delta x,0) - 0.0001206\cdot u(8\cdot\Delta x,0) + 0.00000111\cdot u(9\cdot\Delta x,0)$$

$$U_6^1 = 0.00000111\cdot u(0.3,0) - 0.0001794\cdot u(0.4,0) + 0.00017356\cdot u(0.5,0) + 0.099972778\cdot u(0.6,0) + 0.00012644\cdot u(0.7,0) - 0.0001206\cdot u(0.8,0) + 0.00000111\cdot u(0.9,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า

$$U_6^1 = (0.00000111)(0.01964307) - (0.00001794)(0.02587969) + (0.00017356)(0.03141593) + (0.099972778)(0.03533841) + (0.00012644)(0.03599455) - (0.00012060)(0.03100937) + (0.00000111)(0.01851016)$$

ดังนั้น $U_6^1 = 0.03533800$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ $n=0$ และ $m=7$

$$U_7^1=\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_4^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.7,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_5^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.7,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_6^0-\left(\frac{490(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_7^0$$
$$+\left(\frac{270(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{8u(0.7,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_8^0-\left(\frac{27(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}+\frac{u(0.7,0)\cdot(0.0001)}{12(0.1)}\right)\cdot U_9^0$$
$$+\left(\frac{2(0.01)(0.0001)}{180(0.1)^2}\right)\cdot U_{10}^0$$

$$U_7^1=0.00000111\cdot U_4^0-\left(0.00001500+\frac{(0.03599455)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_5^0+\left(0.00015000+\frac{8(0.03599455)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_6^0$$
$$+0.09997277\cdot U_7^0+\left(0.00015000+\frac{8(0.03599455)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_8^0-\left(0.00001500+\frac{(0.03599455)(0.0001)}{1.2}\right)\cdot U_9^0$$
$$+0.00000111\cdot U_{10}^0$$

$$U_7^1=0.00000111\cdot U_4^0-0.00018000\cdot U_5^0+0.00017400\cdot U_6^0+0.09997277\cdot U_7^0+0.00012690\cdot U_8^0$$
$$-0.00001200\cdot U_9^0+0.00000111\cdot U_{10}^0$$

$$U_7^1=0.00000111\cdot u(4\cdot\Delta x,0)-0.00018000\cdot u(5\cdot\Delta x,0)+0.00017400\cdot u(6\cdot\Delta x,0)+0.09997277\cdot u(7\cdot\Delta x,0)$$
$$+0.00012690\cdot u(8\cdot\Delta x,0)-0.00001200\cdot u(9\cdot\Delta x,0)+0.00000111\cdot u(10\cdot\Delta x,0)$$

$$U_7^1=0.00000111\cdot u(0.4,0)-0.00018000\cdot u(0.5,0)+0.00017400\cdot u(0.6,0)+0.09997277\cdot u(0.7,0)$$
$$+0.00012690\cdot u(0.8,0)-0.00001200\cdot u(0.9,0)+0.00000111\cdot u(1.0,0)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ ทำให้ได้ว่า

$$U_7^1=(0.00000111)(0.02587969)-(0.00018000)(0.03141593)+(0.00017400)(0.03533841)$$
$$+(0.09997277)(0.03599455)+(0.00012690)(0.03100937)-(0.00001200)(0.01851016)+(0.00000111)(0)$$

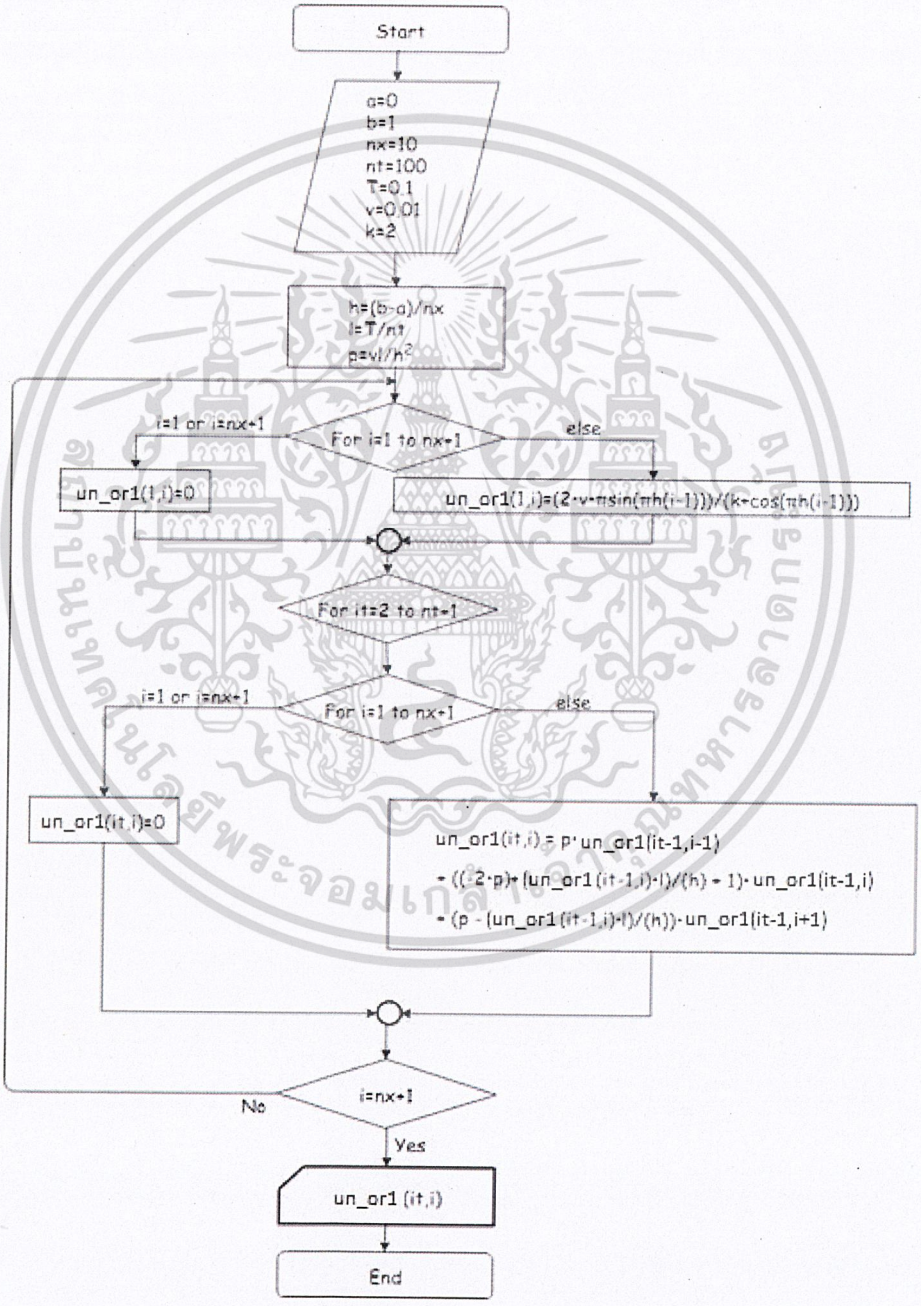
ดังนั้น $U_7^1=0.03599408$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

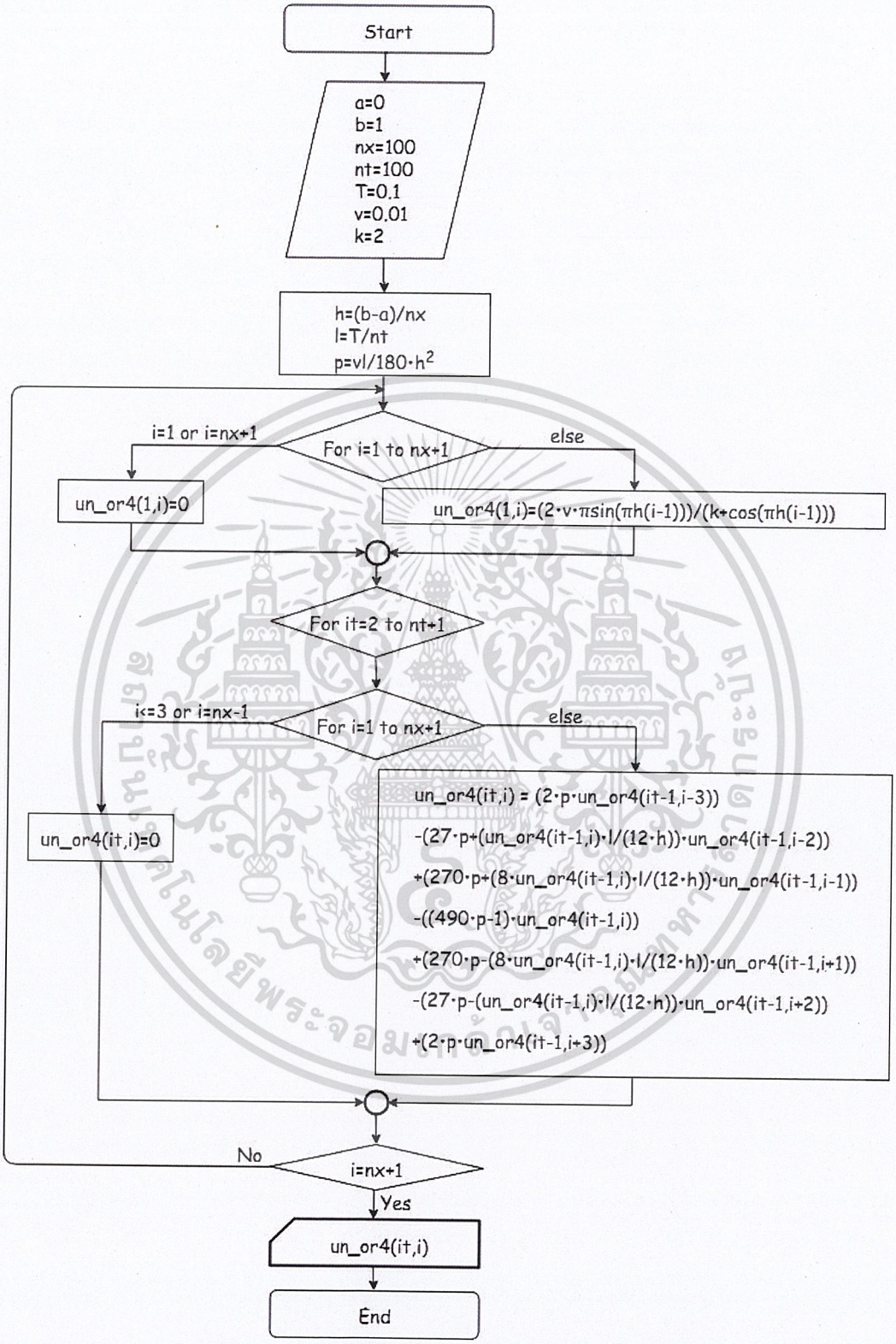
ผลการดำเนินงานวิจัยและการอภิปรายผล

4.1 แผนผังการทำงานของโปรแกรม



รูปที่ 4.1 กระบวนการหาผลลัพธ์ของการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า

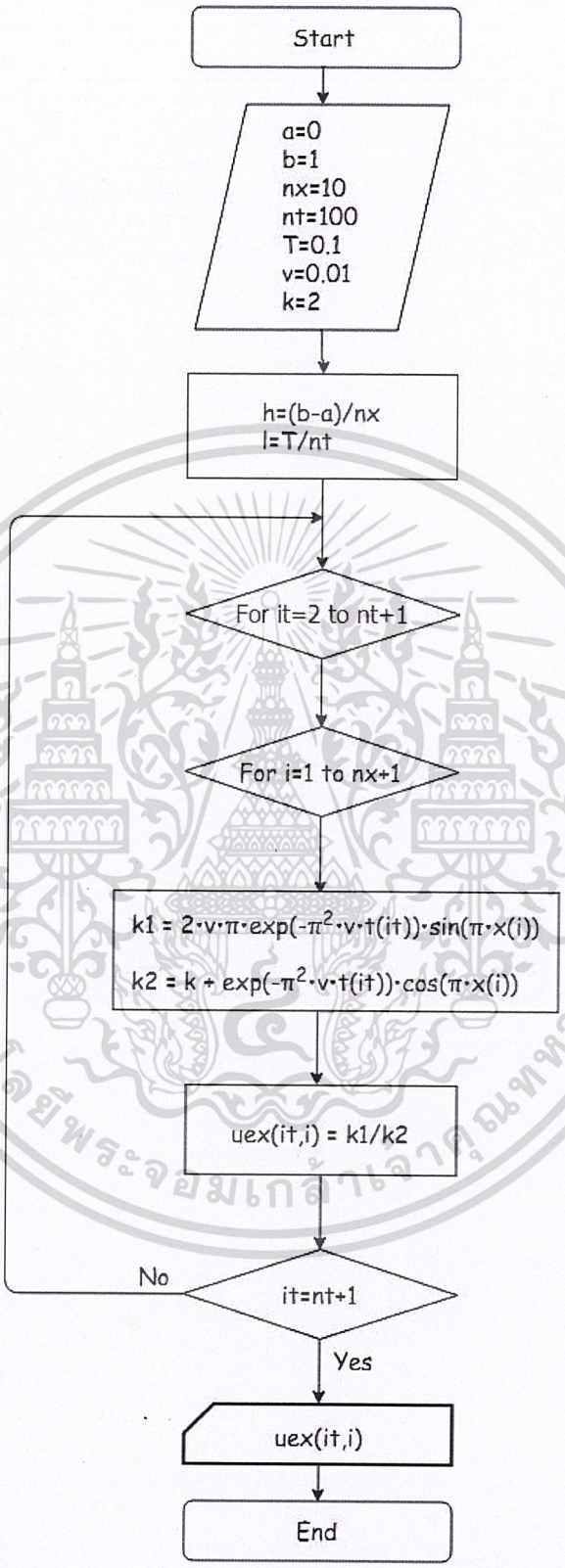
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 กระบวนการหาผลลัพธ์ของการประมาณค่า

โดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 กระบวนการหาผลลัพธ์ของค่าผลเฉลยแม่นตรง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการศึกษาปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยของสมการเบอร์เกอร์ โดยใช้วิธีผลต่างเชิงอันตะในการแก้ปัญหา คือ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าที่มีความแม่นยำ $O(h)$ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและผลต่างจากกลางที่มีความแม่นยำ $O(h^4)$ เปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย

x	วิธีที่นำเสนอ (FDM order1)	ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution)	ค่าคลาดเคลื่อน (Absolute Error)
0.1	0.0065351450	0.0065354449	$2.9988626990\times10^{-7}$
0.2	0.0130551634	0.0130553353	$1.7193802798\times10^{-7}$
0.3	0.0194953021	0.0194936357	$1.6664544587\times10^{-6}$
0.4	0.0256675489	0.0256592491	$8.2997383092\times10^{-6}$
0.5	0.0311331672	0.0311073888	$2.5778400170\times10^{-5}$
0.6	0.0349907788	0.0349286571	$6.2121635244\times10^{-5}$
0.7	0.0356113047	0.0354959513	$1.1535342883\times10^{-4}$
0.8	0.0306459776	0.0305013448	$1.4463279308\times10^{-4}$
0.9	0.0182544210	0.0181666037	$8.7817320938\times10^{-5}$

ตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า

สำหรับ $T=0.1, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1, h=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$

x	วิธีที่นำเสนอ (FDM order4)	ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution)	ค่าคลาดเคลื่อน (Absolute Error)
0.1	0	0.0065354449	$6.5354448682\times10^{-3}$
0.2	0	0.0130553353	$1.3055335238\times10^{-2}$
0.3	0.0193860818	0.0194936357	$1.0755388672\times10^{-4}$
0.4	0.0257777799	0.0256592491	$1.1853079980\times10^{-4}$
0.5	0.0312890461	0.0311073888	$1.8165723599\times10^{-4}$
0.6	0.0351714119	0.0349286571	$2.4275472307\times10^{-4}$
0.7	0.0367736530	0.0354959513	$1.2777017497\times10^{-3}$
0.8	0	0.0305013448	$3.0501344786\times10^{-2}$
0.9	0	0.0181666037	$1.8166603703\times10^{-2}$

ตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ

สำหรับ $T=0.1, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1, h=0.1$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	วิธีที่นำเสนอ (FDM order1)	ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution)	ค่าคลาดเคลื่อน (Absolute Error)
0.1	0.0065354452	0.0065354449	$2.9938015175\times10^{-10}$
0.2	0.0130553765	0.0130553353	$4.1188463385\times10^{-8}$
0.3	0.0194938771	0.0194936357	$2.4147509874\times10^{-7}$
0.4	0.0256601250	0.0256592491	$8.7585223200\times10^{-7}$
0.5	0.0311098495	0.0311073888	$2.4606070318\times10^{-6}$
0.6	0.0349342802	0.0349286571	$5.6231005408\times10^{-6}$
0.7	0.0355059433	0.0354959513	$9.9920445844\times10^{-6}$
0.8	0.0305131340	0.0305013448	$1.1789206167\times10^{-5}$
0.9	0.0181728411	0.0181666037	$6.2373578290\times10^{-6}$

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า

สำหรับ $T=0.1, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1, h=0.01$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$

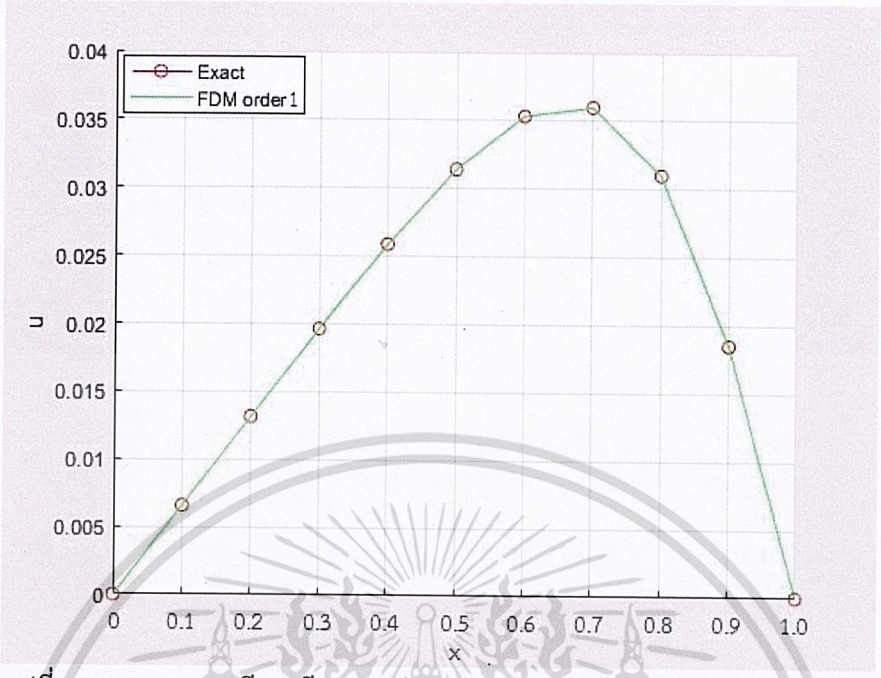
x	วิธีที่นำเสนอ (FDM order4)	ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution)	ค่าคลาดเคลื่อน (Absolute Error)
0.1	0.0065366446	0.0065354449	$1.1997066069\times10^{-6}$
0.2	0.0130622382	0.0130553353	$6.9029043614\times10^{-6}$
0.3	0.0195181136	0.0194936357	$2.4477990850\times10^{-5}$
0.4	0.0257256197	0.0256592491	$6.6370545929\times10^{-5}$
0.5	0.0312611693	0.0311073888	$1.5378043982\times10^{-4}$
0.6	0.0352437845	0.0349286571	$3.1512739260\times10^{-4}$
0.7	0.0360538433	0.0354959513	$5.5789205703\times10^{-4}$
0.8	0.0312748219	0.0305013448	$7.7347712396\times10^{-4}$
0.9	0.0188137147	0.0181666037	$6.4711102480\times10^{-4}$

ตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ

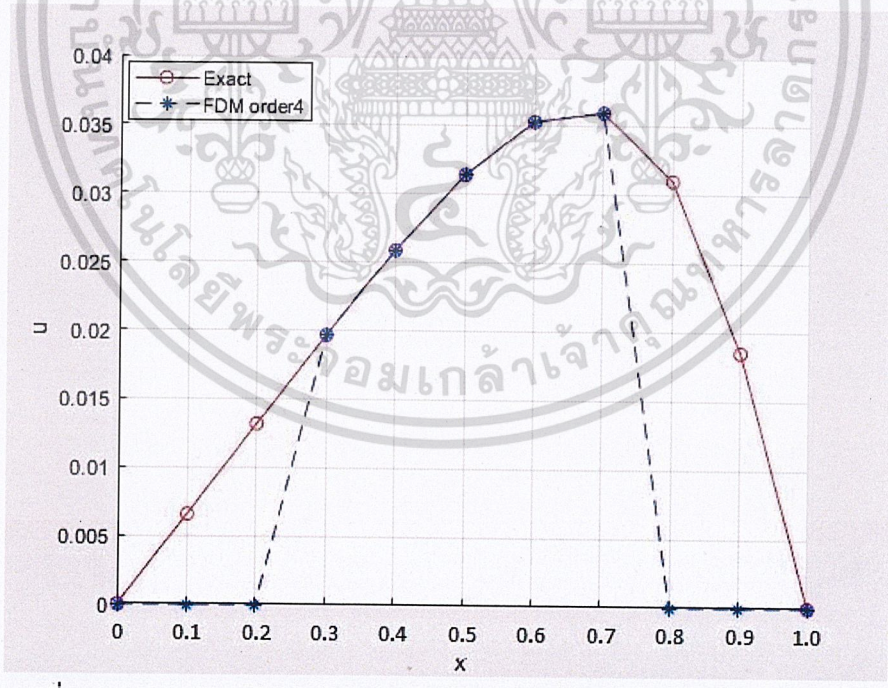
สำหรับ $T=0.1, \upsilon=0.01, \Delta x=0.1, h=0.01$ และ $\Delta t=0.0001$ เมื่อ $N=100$

จากตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.2 จะพบว่า เมื่อค่า $h=0.1$ ค่าความคลาดเคลื่อน(Error) ทั้ง2ตารางจะมีค่าต่างกันมากกว่าหากเทียบกับตารางที่ 4.3 และตารางที่ 4.4 ที่ค่า $h=0.01$ มีค่าความคลาดเคลื่อน(Absolute Error)ใกล้เคียงกันมากกว่าส่งผลทำให้มีความแม่นยำในการคำนวณมากกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเอกสารนี้ทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

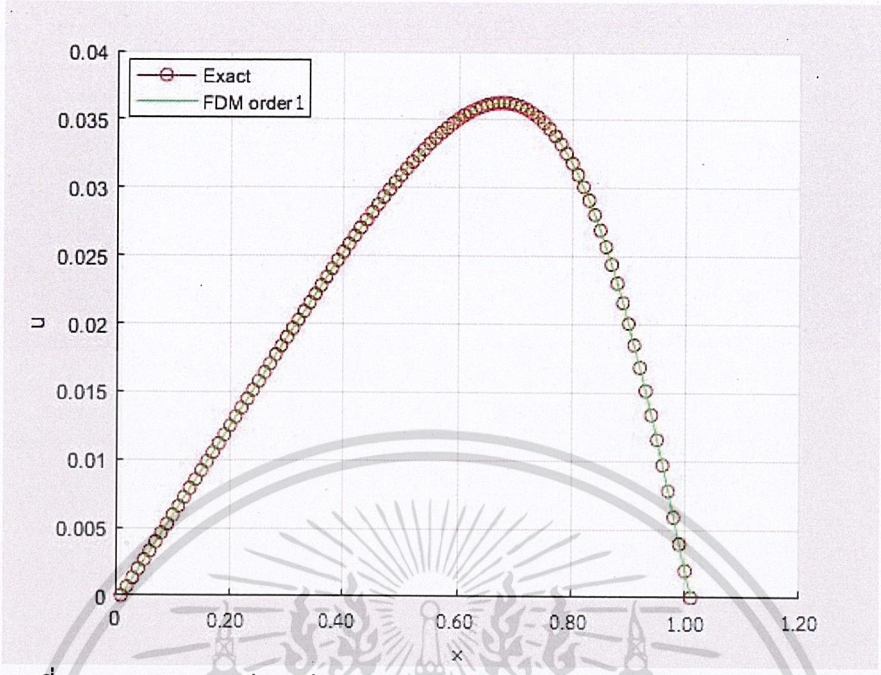


รูปที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า เมื่อ $h=0.1$ และ $N=100$

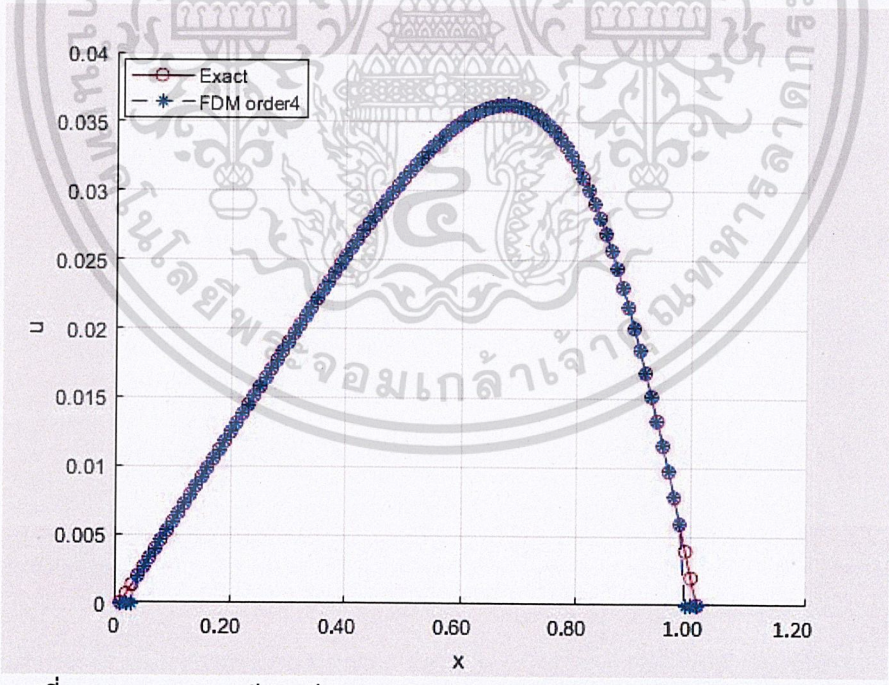


รูปที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.1$ และ $N=100$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า เมื่อ $h = 0.01$ และ $N = 100$



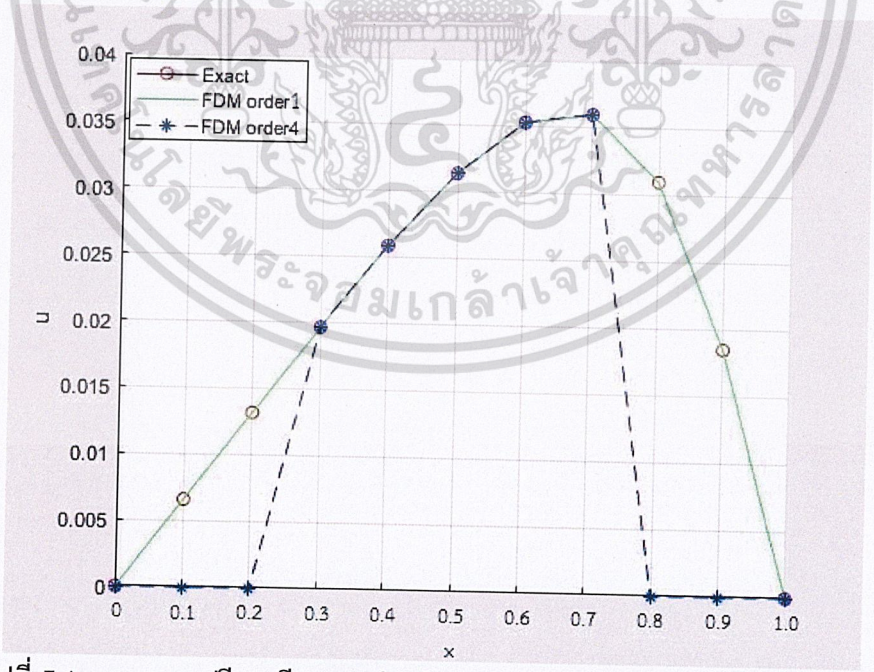
รูปที่ 4.7 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h = 0.01$ และ $N = 100$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

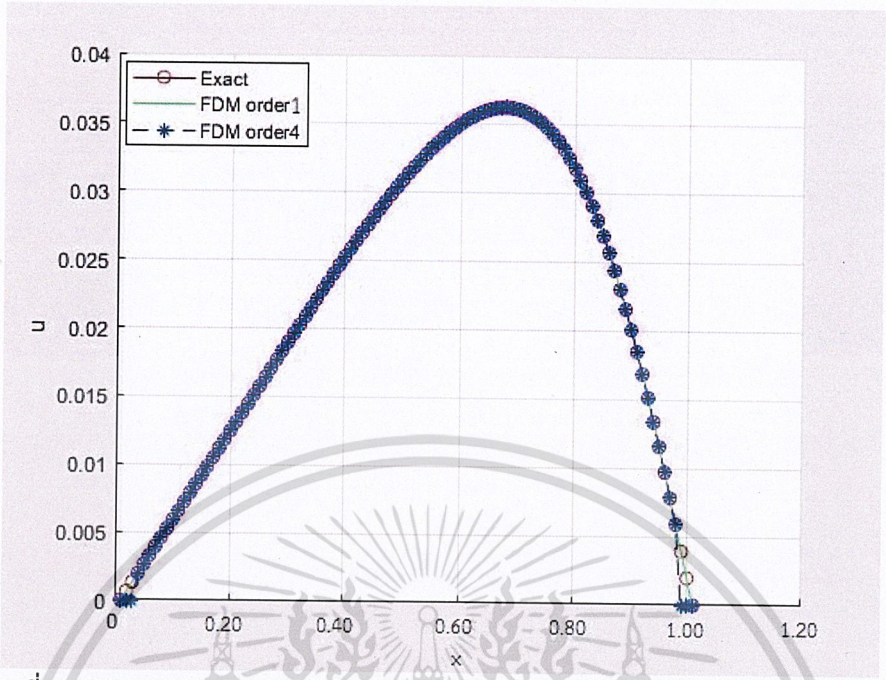
5.1 สรุปผล

ในการศึกษาปัญหาพิเศษเล่มนี้ได้ศึกษาเรื่องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์โดยวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) ซึ่งวิธีที่ได้นำมาหาผลเฉลยในปัญหาพิเศษมี 2 วิธี ได้แก่ การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า(Forward Difference Method)ที่มีความแม่นยำ $O(h)$ และการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ (Forward Difference in Time and Central Difference in Space) ที่มีความแม่นยำ $O(h^4)$ มาเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย ดังที่แสดงในตารางและกราฟของบทที่ 4 พบว่า ค่าผลเฉลยจากการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าผลเฉลยแม่นตรง จึงสรุปได้ว่า การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าให้ความแม่นยำมากกว่าการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ และความกว้าง $h = 0.01$ ให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าความกว้าง $h = 0.1$



รูปที่ 5.1 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงกับการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h = 0.1$ และ $N = 100$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าผลเฉลยแม่นตรงกับการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าและการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ $h=0.01$ และ $N=100$

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาปัญหาพิเศษครั้งนี้พบว่า การศึกษาและการทำความเข้าใจเนื้อหารวมถึงการศึกษาการเขียนแผนผังกระบวนการทำงานของโปรแกรมและการเขียนโปรแกรม ทำให้คณะผู้จัดทำได้เห็นปัญหาหลายประการจึงได้มีข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจศึกษาและนำปัญหาพิเศษนี้ไปพัฒนาต่อไป

5.2.1 ควรที่จะศึกษา ทำความเข้าใจในเรื่องของสมการเบอร์เกอร์ (Burger's Equation) และกระบวนการคำนวณของวิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) เพื่อจะได้เข้าใจที่มาของการทำงานสมการทำให้เขียนโปรแกรมได้ถูกต้อง

5.2.2 ควรที่จะศึกษารูปแบบการใช้คำสั่งและหลักการเขียนโปรแกรม เพื่อจะได้เข้าใจกระบวนการของโปรแกรมมากขึ้น

5.2.3 หากทำการแบ่งระยะห่างยิ่งมีช่วงแคบเท่าใด ผลลัพธ์ที่ได้จะยิ่งมีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น

5.2.4 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเบอร์เกอร์ด้วยวิธีอื่นๆที่น่าสนใจ เช่น การหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ (Finite Element Method : FEM), ผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีรุง เง-คุตตา (Runge-Kutta Method) เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] **กลศาสตร์ของไหล (Fluid Machanics)**. (ม.ม.ป).
จาก : http://www.sci.rmuti.ac.th/physic/physic1/Phy1_Chapter_08.pdf

[2] **ของไหลที่อัดได้และที่อัดไม่ได้ (Compressible and incompressible Fluid).** (ม.ป.ด).
จาก : http://aap.eng.ubu.ac.th/~e-thesis/uplosd/c2/865ch2.pdf

[3] **นิยามของของไหล** (Definition of a Fluid). (ม.ป.ป.).
จาก : http://44116720077.tripod.com/definition.htm

[4] **พลศสาตร์ของไหล(Fluid Dynamic)**. (ม.ป.ป).
จาก : http://kasetpibut.net.lms/claroline/bacends/download.php

[5] **พลศสาตร์ของไหล(Fluid Dynamic).** (ม.ป.ป).
จาก: http://rmutphysics.com/charud/oldnews/0/286/15/9/Fluid/fuidsdynamic.htm

[6] สำนักวิชาวิศวกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล.
Computational Fluid Dynamics. สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 19 กันยายน 2560
จาก : http://eng.sut.ac.th/me/2014/subject_mechanical-blue.php?page=CFD

[7] สุปรียา ไพรัตน์, นุชนันทร์ เอื้อวงศาโรจน์. ณรงค์ฤทธิ์ แก้วบรรจักร์ .
An improvement of a numerical method for solving Burgers' equation.
Faculty of Science Chiang Mai University. The 22nd Annual Meeting in Mathematics
Department of Mathematics. (AMM 2017) สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 20 มิถุนายน 2560

[8] ดร.กนิษฐา ยิ้มนาค. **Meshless Method for Solving Coupled Burgers Equation Based on Moving Kriging Interpolation Method.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 27 มิถุนายน 2560
จาก : http://www.dpu.ac.th/dpurc/research-443#

[9] เจณรงค์ ผิวจันทร์. **การแปลงอาบูทและระเบียบวิธีโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชั่นแบบใหม่สำหรับการหาผลเฉลยของสมการวิสคัซเบอร์เกอร์คู่.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 8 สิงหาคม 2560

[10] กฤติกา ลายสวัสดิ์ . วัฒนา เถาว์ทิพย์ . **The dual reciprocity boundary element method for nonlinear problems using compactly supported radial basis function.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 16 สิงหาคม 2560
จาก : https://home.kku.ac.th/wattou/research/research/paper06-attanakritiga.pdf

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง(ต่อ)

[11] W.T.Math.KKU. **Taylor series Method and Numerical Error.**
สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 28 สิงหาคม 2560
จาก : https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/323462/202.pdf

[12] W.T.Math.KKU. **Application to Partial Differential Equations.**
สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 9 กันยายน 2560
จาก : https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/323462/203.pdf

[13] W.T.Math.KKU. **Finite Difference Method.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 10 กันยายน 2560
จาก : https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/323462/201.pdf

[14] **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 15 กันยายน 2560
จาก :
http://charnnarong.me.engr.tu.ac.th/charnnarong/My%20classes/MN611/PDE.pdf

[15] W.T.Math.KKU. **บทนำสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.** สาระสังเขป สืบค้นวันที่ 21 กันยายน 2560
จาก : https://home.kku.ac.th/wattou/teaching/323462/101.pdf

[16] David Kincaid & Ward Cheney. (2002) . **Numerical Analysis: Mathematic of Scientific Computing.** The University of Texas at Austin.
สืบค้นวันที่ 29 กันยายน 2560

[17] ผศ.ดร.ปริญญา สงวนสัตย์. **คู่มือการใช้ MATLAB ฉบับสมบูรณ์** . นนทบุรี : ไอซีดีฯ. 2556

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้า

สำหรับ $T = 0.1, \upsilon = 0.01, \Delta x = 0.1, h = 0.1$ และ $\Delta t = 0.0001$

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0.0065793760	0.0131475305	0.0196430662	0.0258796897	0.0314159265	0.0353384056	0.0359945518	0.0310093733	0.0185101587	0
1	0	0.0065789326	0.0131466039	0.0196415822	0.0258775565	0.0314130805	0.0353349074	0.0359907049	0.0310057352	0.0185075741	0
2	0	0.0065784893	0.0131456773	0.0196400983	0.0258754236	0.0314102348	0.0353314096	0.0359868583	0.0310020971	0.0185049899	0
3	0	0.0065780460	0.0131447508	0.0196386146	0.0258732910	0.0314073895	0.0353279123	0.0359830119	0.0309984592	0.0185024064	0
4	0	0.0065776027	0.0131438244	0.0196371310	0.0258711585	0.0314045446	0.0353244155	0.0359791658	0.0309948212	0.0184998234	0
5	0	0.0065771594	0.0131428980	0.0196356476	0.0258690263	0.0314017001	0.0353209191	0.0359753201	0.0309911834	0.0184972411	0
6	0	0.0065767161	0.0131419717	0.0196341642	0.0258668944	0.0313988559	0.0353174231	0.0359714746	0.0309875456	0.0184946592	0
7	0	0.0065762729	0.0131410454	0.0196326810	0.0258647627	0.0313960122	0.0353139276	0.0359676294	0.0309839079	0.0184920780	0
8	0	0.0065758297	0.0131401192	0.0196311979	0.0258626312	0.0313931688	0.0353104325	0.0359637845	0.0309802702	0.0184894973	0
9	0	0.0065753865	0.0131391930	0.0196297150	0.0258605000	0.0313903257	0.0353069379	0.0359599399	0.0309766327	0.0184869172	0
10	0	0.0065749433	0.0131382670	0.0196282322	0.0258583690	0.0313874831	0.0353034438	0.0359560956	0.0309729951	0.0184843377	0
11	0	0.0065745001	0.0131373409	0.0196267495	0.0258562382	0.0313846408	0.0352999500	0.0359522516	0.0309693577	0.0184817587	0
12	0	0.0065740570	0.0131364150	0.0196252669	0.0258541077	0.0313817989	0.0352964568	0.0359484078	0.0309657203	0.0184791803	0
13	0	0.0065736139	0.0131354891	0.0196237845	0.0258519774	0.0313789574	0.0352929639	0.0359445644	0.0309620830	0.0184766024	0
14	0	0.0065731708	0.0131345632	0.0196223022	0.0258498473	0.0313761162	0.0352894716	0.0359407212	0.0309584458	0.0184740252	0
15	0	0.0065727277	0.0131336374	0.0196208200	0.0258477175	0.0313732755	0.0352859796	0.0359368784	0.0309548086	0.0184714485	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
16	0	0.0065722847	0.0131327117	0.0196193379	0.0258455880	0.0313704351	0.0352824882	0.0359330358	0.0309511715	0.0184688723	0
17	0	0.0065718416	0.0131317860	0.0196178560	0.0258434586	0.0313675950	0.0352789971	0.0359291935	0.0309475345	0.0184662967	0
18	0	0.0065713986	0.0131308604	0.0196163742	0.0258413295	0.0313647554	0.0352755065	0.0359253515	0.0309438976	0.0184637217	0
19	0	0.0065709557	0.0131299349	0.0196148925	0.0258392007	0.0313619161	0.0352720164	0.0359215099	0.0309402607	0.0184611473	0
20	0	0.0065705127	0.0131290094	0.0196134110	0.0258370721	0.0313590772	0.0352685267	0.0359176685	0.0309366239	0.0184585734	0
21	0	0.0065700698	0.0131280839	0.0196119296	0.0258349437	0.0313562387	0.0352650374	0.0359138273	0.0309329872	0.0184560000	0
22	0	0.0065696268	0.0131271586	0.0196104483	0.0258328155	0.0313534006	0.0352615486	0.0359099865	0.0309293505	0.0184534273	0
23	0	0.0065691839	0.0131262332	0.0196089671	0.0258306876	0.0313505628	0.0352580603	0.0359061460	0.0309257140	0.0184508550	0
24	0	0.0065687410	0.0131253080	0.0196074861	0.0258285600	0.0313477254	0.0352545724	0.0359023058	0.0309220775	0.0184482834	0
25	0	0.0065682982	0.0131243828	0.0196060052	0.0258264325	0.0313448884	0.0352510849	0.0358984658	0.0309184411	0.0184457123	0
26	0	0.0065678554	0.0131234577	0.0196045244	0.0258243053	0.0313420517	0.0352475979	0.0358946262	0.0309148047	0.0184431417	0
27	0	0.0065674125	0.0131225326	0.0196030438	0.0258221784	0.0313392154	0.0352441113	0.0358907868	0.0309111685	0.0184405718	0
28	0	0.0065669697	0.0131216076	0.0196015633	0.0258200517	0.0313363795	0.0352406252	0.0358869477	0.0309075323	0.0184380023	0
29	0	0.0065665270	0.0131206826	0.0196000829	0.0258179252	0.0313335440	0.0352371395	0.0358831089	0.0309038962	0.0184354335	0
30	0	0.0065660842	0.0131197577	0.0195986026	0.0258157989	0.0313307088	0.0352336542	0.0358792705	0.0309002602	0.0184328651	0
31	0	0.0065656415	0.0131188329	0.0195971225	0.0258136729	0.0313278740	0.0352301694	0.0358754323	0.0308966243	0.0184302974	0
32	0	0.0065651988	0.0131179081	0.0195956425	0.0258115472	0.0313250396	0.0352266851	0.0358715944	0.0308929885	0.0184277302	0
33	0	0.0065647561	0.0131169834	0.0195941626	0.0258094216	0.0313222056	0.0352232011	0.0358677568	0.0308893527	0.0184251635	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
34	0	0.0065643134	0.0131160587	0.0195926829	0.0258072964	0.0313193719	0.0352197177	0.0358639194	0.0308857170	0.0184225974	0
35	0	0.0065638708	0.0131151341	0.0195912032	0.0258051713	0.0313165386	0.0352162346	0.0358600824	0.0308820814	0.0184200318	0
36	0	0.0065634282	0.0131142096	0.0195897238	0.0258030465	0.0313137057	0.0352127520	0.0358562457	0.0308784459	0.0184174668	0
37	0	0.0065629856	0.0131132851	0.0195882444	0.0258009219	0.0313108732	0.0352092699	0.0358524092	0.0308748105	0.0184149024	0
38	0	0.0065625430	0.0131123607	0.0195867652	0.0257987976	0.0313080410	0.0352057882	0.0358485731	0.0308711752	0.0184123385	0
39	0	0.0065621004	0.0131114363	0.0195852860	0.0257966734	0.0313052092	0.0352023069	0.0358447372	0.0308675399	0.0184097751	0
40	0	0.0065616579	0.0131105120	0.0195838071	0.0257945496	0.0313023778	0.0351988261	0.0358409017	0.0308639047	0.0184072123	0
41	0	0.0065612154	0.0131095878	0.0195823282	0.0257924259	0.0312995467	0.0351953457	0.0358370664	0.0308602697	0.0184046500	0
42	0	0.0065607729	0.0131086636	0.0195808495	0.0257903025	0.0312967160	0.0351918658	0.0358332314	0.0308566347	0.0184020883	0
43	0	0.0065603304	0.0131077395	0.0195793709	0.0257881794	0.0312938857	0.0351883863	0.0358293967	0.0308529998	0.0183995271	0
44	0	0.0065598879	0.0131068154	0.0195778924	0.0257860565	0.0312910557	0.0351849073	0.0358255623	0.0308493650	0.0183969665	0
45	0	0.0065594455	0.0131058914	0.0195764141	0.0257839338	0.0312882262	0.0351814287	0.0358217282	0.0308457303	0.0183944064	0
46	0	0.0065590031	0.0131049675	0.0195749359	0.0257818113	0.0312853970	0.0351779505	0.0358178944	0.0308420956	0.0183918469	0
47	0	0.0065585607	0.0131040436	0.0195734578	0.0257796891	0.0312825681	0.0351744728	0.0358140609	0.0308384611	0.0183892879	0
48	0	0.0065581183	0.0131031198	0.0195719798	0.0257775671	0.0312797397	0.0351709955	0.0358102277	0.0308348267	0.0183867294	0
49	0	0.0065576760	0.0131021960	0.0195705020	0.0257754454	0.0312769116	0.0351675186	0.0358063948	0.0308311923	0.0183841715	0
50	0	0.0065572337	0.0131012723	0.0195690243	0.0257733239	0.0312740839	0.0351640422	0.0358025621	0.0308275581	0.0183816141	0
51	0	0.0065567914	0.0131003486	0.0195675467	0.0257712026	0.0312712565	0.0351605663	0.0357987298	0.0308239239	0.0183790573	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
52	0	0.0065563491	0.0130994251	0.0195660693	0.0257690816	0.0312684295	0.0351570907	0.0357948977	0.0308202898	0.0183765010	0
53	0	0.0065559068	0.0130985015	0.0195645920	0.0257669608	0.0312656029	0.0351536156	0.0357910660	0.0308166559	0.0183739453	0
54	0	0.0065554646	0.0130975781	0.0195631148	0.0257648402	0.0312627767	0.0351501410	0.0357872345	0.0308130220	0.0183713901	0
55	0	0.0065550224	0.0130966547	0.0195616377	0.0257627199	0.0312599508	0.0351466668	0.0357834033	0.0308093882	0.0183688354	0
56	0	0.0065545802	0.0130957313	0.0195601608	0.0257605998	0.0312571253	0.0351431930	0.0357795724	0.0308057545	0.0183662812	0
57	0	0.0065541380	0.0130948080	0.0195586840	0.0257584800	0.0312543002	0.0351397197	0.0357757419	0.0308021210	0.0183637276	0
58	0	0.0065536958	0.0130938848	0.0195572073	0.0257563604	0.0312514754	0.0351362468	0.0357719116	0.0307984875	0.0183611746	0
59	0	0.0065532537	0.0130929616	0.0195557307	0.0257542410	0.0312486510	0.0351327743	0.0357680816	0.0307948541	0.0183586220	0
60	0	0.0065528116	0.0130920385	0.0195542543	0.0257521218	0.0312458270	0.0351293023	0.0357642519	0.0307912208	0.0183560700	0
61	0	0.0065523695	0.0130911155	0.0195527780	0.0257500029	0.0312430033	0.0351258307	0.0357604224	0.0307875876	0.0183535186	0
62	0	0.0065519274	0.0130901925	0.0195513019	0.0257478843	0.0312401801	0.0351223596	0.0357565933	0.0307839545	0.0183509676	0
63	0	0.0065514854	0.0130892696	0.0195498258	0.0257457658	0.0312373571	0.0351188889	0.0357527645	0.0307803216	0.0183484172	0
64	0	0.0065510434	0.0130883467	0.0195483499	0.0257436476	0.0312345346	0.0351154186	0.0357489360	0.0307766887	0.0183458674	0
65	0	0.0065506014	0.0130874239	0.0195468741	0.0257415296	0.0312317124	0.0351119488	0.0357451077	0.0307730559	0.0183433180	0
66	0	0.0065501594	0.0130865012	0.0195453985	0.0257394119	0.0312288906	0.0351084794	0.0357412798	0.0307694232	0.0183407692	0
67	0	0.0065497174	0.0130855785	0.0195439229	0.0257372944	0.0312260692	0.0351050104	0.0357374521	0.0307657907	0.0183382209	0
68	0	0.0065492755	0.0130846558	0.0195424475	0.0257351772	0.0312232481	0.0351015419	0.0357336248	0.0307621582	0.0183356732	0
69	0	0.0065488336	0.0130837333	0.0195409723	0.0257330601	0.0312204274	0.0350980738	0.0357297977	0.0307585258	0.0183331260	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
70	0	0.0065483917	0.0130828108	0.0195394971	0.0257309434	0.0312176070	0.0350946062	0.0357259709	0.0307548936	0.0183305793	0
71	0	0.0065479498	0.0130818883	0.0195380221	0.0257288268	0.0312147871	0.0350911390	0.0357221445	0.0307512614	0.0183280331	0
72	0	0.0065475080	0.0130809659	0.0195365472	0.0257267105	0.0312119675	0.0350876722	0.0357183183	0.0307476294	0.0183254875	0
73	0	0.0065470661	0.0130800436	0.0195350724	0.0257245944	0.0312091482	0.0350842059	0.0357144924	0.0307439974	0.0183229424	0
74	0	0.0065466243	0.0130791213	0.0195335978	0.0257224786	0.0312063294	0.0350807400	0.0357106668	0.0307403656	0.0183203978	0
75	0	0.0065461826	0.0130781991	0.0195321233	0.0257203629	0.0312035109	0.0350772745	0.0357068415	0.0307367339	0.0183178537	0
76	0	0.0065457408	0.0130772770	0.0195306489	0.0257182476	0.0312006927	0.0350738095	0.0357030165	0.0307331023	0.0183153102	0
77	0	0.0065452990	0.0130763549	0.0195291747	0.0257161324	0.0311978750	0.0350703449	0.0356991918	0.0307294708	0.0183127672	0
78	0	0.0065448573	0.0130754328	0.0195277006	0.0257140175	0.0311950576	0.0350668807	0.0356953674	0.0307258394	0.0183102247	0
79	0	0.0065444156	0.0130745109	0.0195262266	0.0257119028	0.0311922405	0.0350634170	0.0356915432	0.0307222081	0.0183076827	0
80	0	0.0065439740	0.0130735890	0.0195247527	0.0257097884	0.0311894239	0.0350599537	0.0356877194	0.0307185769	0.0183051413	0
81	0	0.0065435323	0.0130726671	0.0195232789	0.0257076742	0.0311866076	0.0350564908	0.0356838959	0.0307149458	0.0183026003	0
82	0	0.0065430907	0.0130717453	0.0195218053	0.0257055602	0.0311837916	0.0350530284	0.0356800726	0.0307113149	0.0183000599	0
83	0	0.0065426490	0.0130708236	0.0195203318	0.0257034465	0.0311809760	0.0350495664	0.0356762497	0.0307076840	0.0182975201	0
84	0	0.0065422075	0.0130699019	0.0195188585	0.0257013330	0.0311781608	0.0350461049	0.0356724270	0.0307040533	0.0182949807	0
85	0	0.0065417659	0.0130689803	0.0195173853	0.0256992197	0.0311753460	0.0350426437	0.0356686047	0.0307004227	0.0182924419	0
86	0	0.0065413243	0.0130680588	0.0195159122	0.0256971067	0.0311725315	0.0350391831	0.0356647826	0.0306967922	0.0182899035	0
87	0	0.0065408828	0.0130671373	0.0195144392	0.0256949939	0.0311697174	0.0350357228	0.0356609608	0.0306931618	0.0182873657	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
88	0	0.0065404413	0.0130662158	0.0195129663	0.0256928813	0.0311669037	0.0350322630	0.0356571394	0.0306895316	0.0182848284	0
89	0	0.0065399998	0.0130652945	0.0195114936	0.0256907690	0.0311640903	0.0350288036	0.0356533182	0.0306859014	0.0182822916	0
90	0	0.0065395584	0.0130643732	0.0195100210	0.0256886569	0.0311612773	0.0350253446	0.0356494973	0.0306822714	0.0182797554	0
91	0	0.0065391169	0.0130634519	0.0195085486	0.0256865451	0.0311584647	0.0350218861	0.0356456767	0.0306786415	0.0182772196	0
92	0	0.0065386755	0.0130625307	0.0195070762	0.0256844334	0.0311556524	0.0350184280	0.0356418564	0.0306750117	0.0182746844	0
93	0	0.0065382341	0.0130616096	0.0195056040	0.0256823221	0.0311528405	0.0350149703	0.0356380364	0.0306713820	0.0182721497	0
94	0	0.0065377928	0.0130606885	0.0195041319	0.0256802109	0.0311500289	0.0350115131	0.0356342167	0.0306677524	0.0182696155	0
95	0	0.0065373514	0.0130597675	0.0195026600	0.0256781000	0.0311472177	0.0350080563	0.0356303973	0.0306641230	0.0182670818	0
96	0	0.0065369101	0.0130588466	0.0195011881	0.0256759893	0.0311444069	0.0350045999	0.0356265782	0.0306604937	0.0182645486	0
97	0	0.0065364688	0.0130579257	0.0194997164	0.0256738788	0.0311415964	0.0350011440	0.0356227594	0.0306568645	0.0182620160	0
98	0	0.0065360275	0.0130570048	0.0194982449	0.0256717686	0.0311387863	0.0349976885	0.0356189409	0.0306532354	0.0182594838	0
99	0	0.0065355862	0.0130560841	0.0194967734	0.0256696586	0.0311359766	0.0349942334	0.0356151227	0.0306496064	0.0182569522	0
100	0	0.0065351450	0.0130551634	0.0194953021	0.0256675489	0.0311331672	0.0349907788	0.0356113047	0.0306459776	0.0182544210	0

การประมาณค่าโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาและผลต่างจากกลางในปริภูมิ

สำหรับ $T = 0.1, \upsilon = 0.01, \Delta x = 0.1, h = 0.1$ และ $\Delta t = 0.0001$

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0.0065793760	0.0131475305	0.0196430662	0.0258796897	0.0314159265	0.0353384056	0.0359945518	0.0310093733	0.0185101587	0
1	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196420701	0.0258784001	0.0314146351	0.0353377384	0.0359954638	0.0000000000	0.0000000000	0
2	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196394603	0.0258773941	0.0314133436	0.0353361576	0.0360032616	0.0000000000	0.0000000000	0
3	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196368510	0.0258763879	0.0314120525	0.0353345747	0.0360110608	0.0000000000	0.0000000000	0
4	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196342422	0.0258753815	0.0314107619	0.0353329898	0.0360188613	0.0000000000	0.0000000000	0
5	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196316338	0.0258743749	0.0314094718	0.0353314029	0.0360266631	0.0000000000	0.0000000000	0
6	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196290260	0.0258733681	0.0314081821	0.0353298139	0.0360344661	0.0000000000	0.0000000000	0
7	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196264187	0.0258723611	0.0314068928	0.0353282229	0.0360422705	0.0000000000	0.0000000000	0
8	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196238118	0.0258713538	0.0314056041	0.0353266299	0.0360500761	0.0000000000	0.0000000000	0
9	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196212055	0.0258703464	0.0314043158	0.0353250349	0.0360578830	0.0000000000	0.0000000000	0
10	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196185996	0.0258693387	0.0314030279	0.0353234378	0.0360656912	0.0000000000	0.0000000000	0
11	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196159942	0.0258683309	0.0314017405	0.0353218387	0.0360735007	0.0000000000	0.0000000000	0
12	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196133894	0.0258673228	0.0314004536	0.0353202376	0.0360813115	0.0000000000	0.0000000000	0
13	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196107850	0.0258663145	0.0313991671	0.0353186344	0.0360891236	0.0000000000	0.0000000000	0
14	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196081811	0.0258653060	0.0313978811	0.0353170292	0.0360969369	0.0000000000	0.0000000000	0
15	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196055777	0.0258642972	0.0313965956	0.0353154220	0.0361047516	0.0000000000	0.0000000000	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
16	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196029748	0.0258632883	0.0313953105	0.0353138128	0.0361125675	0.0000000000	0.0000000000	0
17	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0196003724	0.0258622791	0.0313940259	0.0353122015	0.0361203847	0.0000000000	0.0000000000	0
18	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195977705	0.0258612698	0.0313927417	0.0353105882	0.0361282032	0.0000000000	0.0000000000	0
19	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195951690	0.0258602602	0.0313914580	0.0353089729	0.0361360230	0.0000000000	0.0000000000	0
20	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195925681	0.0258592504	0.0313901748	0.0353073556	0.0361438441	0.0000000000	0.0000000000	0
21	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195899677	0.0258582404	0.0313888920	0.0353057362	0.0361516664	0.0000000000	0.0000000000	0
22	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195873677	0.0258572302	0.0313876097	0.0353041148	0.0361594900	0.0000000000	0.0000000000	0
23	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195847682	0.0258562198	0.0313863278	0.0353024914	0.0361673149	0.0000000000	0.0000000000	0
24	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195821693	0.0258552092	0.0313850465	0.0353008659	0.0361751411	0.0000000000	0.0000000000	0
25	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195795708	0.0258541983	0.0313837655	0.0352992385	0.0361829686	0.0000000000	0.0000000000	0
26	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195769728	0.0258531873	0.0313824851	0.0352976089	0.0361907974	0.0000000000	0.0000000000	0
27	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195743753	0.0258521760	0.0313812051	0.0352959774	0.0361986274	0.0000000000	0.0000000000	0
28	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195717783	0.0258511645	0.0313799256	0.0352943439	0.0362064587	0.0000000000	0.0000000000	0
29	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195691818	0.0258501528	0.0313786465	0.0352927083	0.0362142913	0.0000000000	0.0000000000	0
30	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195665858	0.0258491409	0.0313773679	0.0352910707	0.0362221252	0.0000000000	0.0000000000	0
31	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195639903	0.0258481288	0.0313760898	0.0352894310	0.0362299603	0.0000000000	0.0000000000	0
32	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195613952	0.0258471165	0.0313748122	0.0352877894	0.0362377968	0.0000000000	0.0000000000	0
33	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195588007	0.0258461039	0.0313735350	0.0352861457	0.0362456345	0.0000000000	0.0000000000	0

x / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
34	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195562066	0.0258450912	0.0313722583	0.0352845000	0.0362534735	0.0000000000	0.0000000000	0
35	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195536131	0.0258440782	0.0313709820	0.0352828523	0.0362613138	0.0000000000	0.0000000000	0
36	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195510200	0.0258430650	0.0313697062	0.0352812025	0.0362691553	0.0000000000	0.0000000000	0
37	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195484274	0.0258420516	0.0313684309	0.0352795507	0.0362769981	0.0000000000	0.0000000000	0
38	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195458353	0.0258410380	0.0313671561	0.0352778969	0.0362848422	0.0000000000	0.0000000000	0
39	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195432437	0.0258400242	0.0313658817	0.0352762411	0.0362926876	0.0000000000	0.0000000000	0
40	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195406526	0.0258390102	0.0313646078	0.0352745832	0.0363005343	0.0000000000	0.0000000000	0
41	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195380620	0.0258379960	0.0313633343	0.0352729233	0.0363083822	0.0000000000	0.0000000000	0
42	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195354719	0.0258369815	0.0313620614	0.0352712614	0.0363162314	0.0000000000	0.0000000000	0
43	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195328823	0.0258359669	0.0313607889	0.0352695975	0.0363240819	0.0000000000	0.0000000000	0
44	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195302931	0.0258349520	0.0313595169	0.0352679315	0.0363319336	0.0000000000	0.0000000000	0
45	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195277045	0.0258339369	0.0313582453	0.0352662636	0.0363397867	0.0000000000	0.0000000000	0
46	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195251163	0.0258329216	0.0313569742	0.0352645936	0.0363476409	0.0000000000	0.0000000000	0
47	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195225286	0.0258319061	0.0313557036	0.0352629215	0.0363554965	0.0000000000	0.0000000000	0
48	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195199414	0.0258308904	0.0313544335	0.0352612475	0.0363633534	0.0000000000	0.0000000000	0
49	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195173547	0.0258298744	0.0313531638	0.0352595714	0.0363712115	0.0000000000	0.0000000000	0
50	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195147685	0.0258288583	0.0313518946	0.0352578933	0.0363790709	0.0000000000	0.0000000000	0
51	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195121828	0.0258278419	0.0313506259	0.0352562132	0.0363869315	0.0000000000	0.0000000000	0

รอบที่ \ x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
52	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195095976	0.0258268253	0.0313493577	0.0352545310	0.0363947935	0.0000000000	0.0000000000	0
53	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195070129	0.0258258085	0.0313480899	0.0352528469	0.0364026567	0.0000000000	0.0000000000	0
54	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195044286	0.0258247915	0.0313468226	0.0352511607	0.0364105211	0.0000000000	0.0000000000	0
55	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0195018449	0.0258237743	0.0313455558	0.0352494725	0.0364183869	0.0000000000	0.0000000000	0
56	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194992616	0.0258227569	0.0313442895	0.0352477822	0.0364262539	0.0000000000	0.0000000000	0
57	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194966788	0.0258217393	0.0313430236	0.0352460900	0.0364341222	0.0000000000	0.0000000000	0
58	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194940965	0.0258207214	0.0313417582	0.0352443957	0.0364419917	0.0000000000	0.0000000000	0
59	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194915147	0.0258197034	0.0313404933	0.0352426994	0.0364498625	0.0000000000	0.0000000000	0
60	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194889334	0.0258186851	0.0313392288	0.0352410011	0.0364577346	0.0000000000	0.0000000000	0
61	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194863526	0.0258176666	0.0313379649	0.0352393007	0.0364656080	0.0000000000	0.0000000000	0
62	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194837723	0.0258166479	0.0313367014	0.0352375984	0.0364734826	0.0000000000	0.0000000000	0
63	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194811925	0.0258156290	0.0313354384	0.0352358940	0.0364813585	0.0000000000	0.0000000000	0
64	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194786131	0.0258146099	0.0313341759	0.0352341876	0.0364892356	0.0000000000	0.0000000000	0
65	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194760342	0.0258135906	0.0313329138	0.0352324792	0.0364971141	0.0000000000	0.0000000000	0
66	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194734559	0.0258125710	0.0313316522	0.0352307687	0.0365049938	0.0000000000	0.0000000000	0
67	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194708780	0.0258115512	0.0313303911	0.0352290562	0.0365128747	0.0000000000	0.0000000000	0
68	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194683006	0.0258105313	0.0313291305	0.0352273417	0.0365207569	0.0000000000	0.0000000000	0
69	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194657237	0.0258095111	0.0313278704	0.0352256252	0.0365286404	0.0000000000	0.0000000000	0

รอบที่ \ x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
70	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194631473	0.0258084907	0.0313266108	0.0352239067	0.0365365251	0.0000000000	0.0000000000	0
71	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194605713	0.0258074701	0.0313253516	0.0352221861	0.0365444111	0.0000000000	0.0000000000	0
72	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194579959	0.0258064493	0.0313240929	0.0352204636	0.0365522984	0.0000000000	0.0000000000	0
73	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194554210	0.0258054282	0.0313228347	0.0352187390	0.0365601869	0.0000000000	0.0000000000	0
74	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194528465	0.0258044070	0.0313215769	0.0352170124	0.0365680767	0.0000000000	0.0000000000	0
75	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194502725	0.0258033855	0.0313203197	0.0352152837	0.0365759678	0.0000000000	0.0000000000	0
76	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194476990	0.0258023639	0.0313190629	0.0352135531	0.0365838601	0.0000000000	0.0000000000	0
77	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194451260	0.0258013420	0.0313178067	0.0352118204	0.0365917537	0.0000000000	0.0000000000	0
78	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194425535	0.0258003199	0.0313165509	0.0352100857	0.0365996485	0.0000000000	0.0000000000	0
79	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194399815	0.0257992976	0.0313152955	0.0352083490	0.0366075446	0.0000000000	0.0000000000	0
80	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194374100	0.0257982750	0.0313140407	0.0352066103	0.0366154420	0.0000000000	0.0000000000	0
81	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194348389	0.0257972523	0.0313127864	0.0352048695	0.0366233406	0.0000000000	0.0000000000	0
82	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194322684	0.0257962294	0.0313115325	0.0352031267	0.0366312405	0.0000000000	0.0000000000	0
83	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194296983	0.0257952062	0.0313102791	0.0352013820	0.0366391416	0.0000000000	0.0000000000	0
84	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194271287	0.0257941828	0.0313090262	0.0351996351	0.0366470440	0.0000000000	0.0000000000	0
85	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194245597	0.0257931592	0.0313077738	0.0351978863	0.0366549476	0.0000000000	0.0000000000	0
86	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194219910	0.0257921354	0.0313065219	0.0351961355	0.0366628526	0.0000000000	0.0000000000	0
87	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194194229	0.0257911114	0.0313052704	0.0351943826	0.0366707587	0.0000000000	0.0000000000	0

ระยะ / รอบที่	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
88	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194168553	0.0257900872	0.0313040195	0.0351926277	0.0366786661	0.0000000000	0.0000000000	0
89	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194142882	0.0257890628	0.0313027690	0.0351908708	0.0366865748	0.0000000000	0.0000000000	0
90	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194117215	0.0257880381	0.0313015190	0.0351891119	0.0366944848	0.0000000000	0.0000000000	0
91	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194091553	0.0257870133	0.0313002695	0.0351873510	0.0367023959	0.0000000000	0.0000000000	0
92	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194065897	0.0257859882	0.0312990205	0.0351855881	0.0367103084	0.0000000000	0.0000000000	0
93	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194040245	0.0257849629	0.0312977720	0.0351838231	0.0367182221	0.0000000000	0.0000000000	0
94	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0194014598	0.0257839374	0.0312965240	0.0351820561	0.0367261370	0.0000000000	0.0000000000	0
95	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193988955	0.0257829117	0.0312952764	0.0351802871	0.0367340532	0.0000000000	0.0000000000	0
96	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193963318	0.0257818858	0.0312940294	0.0351785161	0.0367419707	0.0000000000	0.0000000000	0
97	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193937686	0.0257808596	0.0312927828	0.0351767431	0.0367498894	0.0000000000	0.0000000000	0
98	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193912058	0.0257798333	0.0312915368	0.0351749680	0.0367578094	0.0000000000	0.0000000000	0
99	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193886435	0.0257788067	0.0312902912	0.0351731910	0.0367657306	0.0000000000	0.0000000000	0
100	0	0.0000000000	0.0000000000	0.0193860818	0.0257777799	0.0312890461	0.0351714119	0.0367736530	0.0000000000	0.0000000000	0

มหาวิทยาลัยพระจอมเกล้าเจ้าคุณ