

การหาผลเฉลยของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับ  
สำหรับคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์

SOLUTIONS OF THE FREE AND FORCE VIBRATION PROBLEM  
FOR VARIABLE CROSS-SECTIONAL BEAMS USING  
DIFFERENTIAL TRANSFORMATION



ขวัญชัย บุญประดิษฐ์  
เจนจิรา จุลทะลี  
ปรัชญา ป้อมเอี่ยม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)  
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ปีการศึกษา 2560

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

SOLUTIONS OF THE FREE AND FORCE VIBRATION PROBLEM  
FOR VARIABLE CROSS-SECTIONAL BEAMS USING  
DIFFERENTIAL TRANSFORMATION



A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF  
THE REQUIREMENT FOR  
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

การหาผลเฉลยของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบ  
บังคับสำหรับคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์  
Solutions of the free and force vibration problem for  
variable cross-sectional beams using differential  
transform

ชื่อนักศึกษา

นายขวัญชัย บุญประดิษฐ์ รหัสนักศึกษา 57050018  
นางสาวเจนจิรา จุลทะสี รหัสนักศึกษา 57050028  
นายปรัชญา ป้อมเอี่ยม รหัสนักศึกษา 57050093

ปริญญา

วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา

2560

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ  
อ.พรชัย ชัยสนิท

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้  
ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์  
ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ภัทรารุธ จันทร์เสงี่ยม ประธานกรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับสำหรับคานาหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์	
	Solutions of the free and force vibration problem for variable cross-sectional beams using differential transform	
ชื่อนักศึกษา	นายขวัญชัย บุญประดิษฐ์	รหัสนักศึกษา 57050018
	นางสาวเจนจิรา จุลทะสี	รหัสนักศึกษา 57050028
	นายปรัชญา ป้อมเอี่ยม	รหัสนักศึกษา 57050093
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์	
ปีการศึกษา	2560	
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ อ.พรชัย ชัยสนิท	

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาวิธีแก้ไขปัญหาการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบอิสระและแบบบังคับของคานาไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองข้างถูกยึดแบบยึดหยุ่น โดยคานาวางบนฐานรากยื่นหยุ่นที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกนและแรงตามขวาง โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ ขั้นตอนแรกเริ่มจากการแปลงปัญหาจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หลังจากนั้นใช้ตัวดำเนินการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญให้อยู่ในอยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด ซึ่งถูกนำไปใช้หาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยรูปแบบปิดภายใต้ความถี่ธรรมชาติพจน์ที่  $i$  โดยอนุกรมผลเฉลยของทุกๆ รูปร่างโหมดพจน์ที่  $i$  เหล่านี้จะถูกนำเสนอในรูปของกราฟที่แทนการสั่นสะเทือนของคานาภายใต้ความถี่ธรรมชาติที่สอดคล้องกัน

คำสำคัญ : การแปลงเชิงอนุพันธ์, การสั่นสะเทือนของคานา, ความถี่ธรรมชาติ,

รูปร่างโหมด, การตอบสนองเชิงไดนามิก

Title	Solutions of the free and force vibration problem for variable cross-sectional beams using differential transform	
Students	Mr Kwanchai Boonpradit	57050018
	Miss Jenjira Julthasee	57050028
	Mr Pratchta Pomien	57050093
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Faculty	Science	
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)	
Academic Year	2017	
Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan	
	Pornchai Chaisanit	

### Abstract

This work deals with the free and forced vibration problems of general elastically end restrained non-uniform beam, resting on a non-homogeneous elastic foundation and subjected to axial tensile and transverse forces using the differential transform method. The first step is to convert the problem to the non-dimensional ordinary differential equation. Subsequently, the differential transform method is applied to the non-dimensional form for obtaining the recurrence relation, which is used to determine the coefficients of the closed form series solution under the  $i$ th natural frequency. The graphical results of any  $i$ th mode shapes of the beam vibration are shown under the corresponding natural frequencies.

**Keywords:** Differential transform, the Beam Vibration, Natural frequency, Mode shape, Dynamic response

## กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้ศึกษาในหัวข้อเรื่อง การหาผลเฉลยของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับสำหรับคานหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Solutions of the free and force vibration problem for variable cross-sectional beams using differential transform)

ข้าพเจ้าขอกราบขอบคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ และอาจารย์พรชัย ชัยสนิท อาจารย์ที่ปรึกษางานวิจัย ผศ.ดร.ภัทรารุจ จันทร์เสงี่ยม และดร.วรรณพร สรรประเสริฐ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำแนวทาง ตลอดจนช่วยตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ อีกทั้งยังให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า ทำให้งานวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบคุณบิดามารดาที่คอยสั่งสอนอบรม เป็นกำลังใจให้แก่ข้าพเจ้า และสนับสนุนด้านการศึกษามาตั้งแต่ต้นจนถึงทุกวันนี้ และความดีอันเกิดจากการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแต่บิดามารดาครูอาจารย์และผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่มีส่วนงานและเป็นกำลังใจ ซึ่งข้าพเจ้าซาบซึ้งในความกรุณาอันยิ่งใหญ่จากท่านและขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ขวัญชัย บุญประดิษฐ์  
เจนจิรา จุลทะลี  
ปรัชญา ป้อมเอี่ยม

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	จ
สารบัญรูป.....	ฉ
<b>บทที่ 1 บทนำ.....</b>	<b>1</b>
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย.....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
<b>บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....</b>	<b>3</b>
2.1 การแปลงเชิงอนุพันธ์.....	3
2.1.1 การดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์.....	5
2.1.2 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของ คานแบบไม่เอกรูป.....	10
2.1.3 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับของ คานแบบไม่เอกรูป.....	26
2.2 การตรวจสอบและตัวอย่าง.....	34
2.2.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ.....	34
2.2.2 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ.....	47
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	54
<b>บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....</b>	<b>55</b>
<b>บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล.....</b>	<b>71</b>
<b>บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....</b>	<b>74</b>
เอกสารอ้างอิง.....	76

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1.1 ความถี่สามโหมดแรกที่ไม่มีมิติ.....	46



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ระบบการสั่นของคาน	11
2.2 การลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติไม่มีมิติที่ 1,2,3 และ 4	45
2.3 รูปแบบโหมด 1,2,3 และ 4	45
2.4 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย	
$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$	54
3.1 แผนภาพการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อนำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยของปัญหาสมการการสั่นของคาน	55
3.2 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย	
$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^9 - \left( \frac{x}{l} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$	63
3.3 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย	
$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^6 - \left( \frac{x}{l} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$	70
4.1 แรงภายนอกที่มากกระทำ $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$	71
4.2 แรงภายนอกที่มากกระทำ $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^6 - \left( \frac{x}{l} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$	72
4.3 แรงภายนอกที่มากกระทำ $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^9 - \left( \frac{x}{l} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$	72

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาการสั่นสะเทือนของคานที่ไม่คงรูปสามารถแก้ด้วยวิธีการวิเคราะห์และการประมาณการใช้วิธีการวิเคราะห์เพื่อหาผลเฉลยรูปแบบปิดของการสั่นสะเทือนแบบอิสระถูกพบในคานภายใต้แรงตามแนวแกนและภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่เรียบง่าย[1,2] ผลเฉลยรูปแบบปิดของการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับของขดลวดที่ไม่สม่ำเสมอโดยอยู่บนพื้นฐานของความยืดหยุ่นที่ไม่ใช่เนื้อเดียวกันและมีแรงดึงตามแนวขวางและทแยงมุมได้ถูกศึกษาใน[3] อย่างไรก็ตามอาจจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีที่มีความซับซ้อนในการหาผลเฉลยการวิเคราะห์ วิธีการประมาณเช่นวิธี *Rayleigh - Ritz* และ *Galerkin* ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติที่ต่ำกว่าและรูปแบบของโหมด[4,5] อย่างไรก็ตามอาจเป็นเรื่องยากที่จะหาความถี่ธรรมชาติที่สูงขึ้นและรูปแบบของโหมด เนื่องจากไม่ได้เลือกฟังก์ชันที่ยอมรับได้อย่างสมบูรณ์และถูกต้อง การใช้วิธีการประมาณเช่นวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นสะเทือนอิสระและบังคับถูกศึกษาแล้วใน[6,7] โดยวิธีดังกล่าวต้องการแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นขนาดเล็กๆ ซึ่งอาจนำไปสู่ระบบสมการขนาดใหญ่และการคำนวณที่ยุ่งยากในการหาความถี่ธรรมชาติที่สูงขึ้นและรูปแบบของโหมด

ในการศึกษาครั้งนี้ได้มีการนำการแปลงแบบใหม่ที่เรียกว่าการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้นในปี พ. ศ. 2529 แนวคิดของการแปลงเชิงอนุพันธ์ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย *Zhou* และนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า[8] ในบทความนี้ได้พิจารณาถึงปัญหาการสั่นสะเทือนของคานแบบไม่คงรูป[11] การใช้ (DTM) แก้สมการปัญหาอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์จะกลายเป็นสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิดและเงื่อนไขขอบเขตกลายเป็นสมการพีชคณิตอย่างง่ายซึ่งเหมาะสำหรับการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหาผลเฉลย นอกจากนี้หลังจากการดำเนินงานเกี่ยวกับพีชคณิตอย่างง่ายในสมการเหล่านี้ภายใต้ความถี่ธรรมชาติใดๆ โดยอนุกรมผลเฉลยของทุกๆ รูปร่างโหมดพจน์ใดๆ เหล่านี้จะถูกนำเสนอในรูปของกราฟที่แทนการสั่นสะเทือนของคานภายใต้ความถี่ธรรมชาติที่สอดคล้องกัน สุดท้ายจะยกตัวอย่างปัญหาของการสั่นสะเทือนของคานแบบไม่คงรูปที่มีแรงภายนอกที่ถูกกำหนดอยู่ในรูปของ  $f(x,t)$  และตรวจสอบความถูกต้องและประสิทธิภาพของวิธีการที่นำมาใช้

### 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อศึกษาที่มาสมการคาน
- 2) ศึกษาเกี่ยวกับ บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์กลายเป็นสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิดและเงื่อนไขขอบเขตการเป็นสมการพีชคณิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 3) ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาค่าการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบอิสระและแบบบังคับของคานแบบไม่เอกรูปที่มีแรงภายนอกอยู่ในรูปของฟังก์ชันของ  $x$  และ  $t$
- 4) เขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยของสมการภายใต้ความถี่ธรรมชาติซึ่งใช้เพื่อหาผลเฉลย (shape mode) ที่สอดคล้องกัน

### 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) ศึกษาการแก้ปัญหาค่าการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบอิสระและแบบบังคับของคานไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองถูกยึดแบบยึดหยุ่นโดยวางบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกน
- 2) ศึกษาภายใต้เงื่อนไขขอบเขตและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของคานแบบอิสระและแบบบังคับ
- 3) ศึกษาการหาผลเฉลยสมการพีชคณิตแบบเวียนบังเกิดและอนุกรมผลเฉลยรูปแบบปิดของทุกๆ รูปแบบของโหมดภายใต้ความถี่ธรรมชาติใดๆ
- 4) ศึกษาการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบอิสระและแบบบังคับของคานแบบไม่เอกรูปที่มีแรงภายนอกอยู่ในรูปของฟังก์ชันของ  $x$  และ  $t$

### 1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

- 1) ค้นคว้าและศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีและรูปแบบสมการคาน
- 2) ศึกษาภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการของคาน
- 3) ศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าการสั่นแบบอิสระและแบบบังคับของคานในรูปแบบแบบไม่เอกรูปที่มีแรงภายนอกอยู่ในรูปของฟังก์ชันของ  $x$  และ  $t$
- 4) ศึกษาการดำเนินงานเกี่ยวกับพีชคณิตอย่างง่ายภายใต้ความถี่ธรรมชาติพจน์ที่  $i$  และอนุกรมผลเฉลยรูปแบบปิดของทุกๆ รูปร่างพจน์ที่  $i$  เพื่อการตอบสนองแบบไดนามิก

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การวิเคราะห์ของคานไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองถูกยึดแบบยึดหยุ่นโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์มีประโยชน์สำหรับผู้ที่ต้องการนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางด้านต่างๆ อาทิเช่น งานทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และสิ่งก่อสร้างต่างๆ และเป็นประโยชน์สำหรับผู้ศึกษาในด้านนี้ต่อไป

## บทที่ 2

### ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับสำหรับคานาหน้าตัดแปรเปลี่ยนโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งได้ทำการศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อต่อไปนี้

#### 2.1 การแปลงเชิงอนุพันธ์ (The differential transformations)

2.1.1 การดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (Some basic mathematical operations)

2.1.2 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของคานาแบบไม่เอกรูป (Using differential transformations to analyze the free vibrations problem of non-uniform beams)

2.1.3 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับของคานาแบบไม่เอกรูป (Using differential transformations to analyze the forced vibrations problem of non-uniform beams)

#### 2.2 การตรวจสอบและตัวอย่าง (Verification and example)

2.2.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration)

2.2.2 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration)

#### 2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 การแปลงเชิงอนุพันธ์ (The differential transformations)

เพื่อที่จะแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนโดยการแปลงเชิงอนุพันธ์โดยทฤษฎีพื้นฐานจะถูกกล่าวไว้โดยย่อในส่วนนี้ การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $y(\xi)$  คือนิยามดังต่อไปนี้

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} \quad (1)$$

ในสมการ (1) ,  $y(\xi)$  เป็นฟังก์ชันตั้งต้นและ  $\bar{Y}(k)$  เป็นฟังก์ชันการแปลงซึ่งเรียกว่า T-function การแปลงเชิงอนุพันธ์ผกผันของ  $\bar{Y}(k)$  คือนิยามดังต่อไปนี้

$$y(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \bar{Y}(k) \quad (2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$y(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} \quad (3)$$

สมการ (3) อนุমানได้ว่าแนวความคิดของการแปลงเชิงอนุพันธ์ได้มาจากการกระจายตัวอนุกรมเทย์เลอร์ในการศึกษานี้เราใช้ตัวพิมพ์เล็กเพื่อแสดงฟังก์ชันตั้งต้นและแถบเหนือตัวพิมพ์ใหญ่ที่จะแทนฟังก์ชันการแปลง (T-function)

จากนิยามของสมการ (1) และ (2) มันได้รับการพิสูจน์ได้อย่างง่ายว่าฟังก์ชันการแปลงสอดคล้องกับการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานต่อไปนี้ :

Original function

T - function

$$y(\xi) = u(\xi) \pm v(\xi) \quad \bar{Y}(k) = \bar{U}(k) \pm \bar{V}(k) \quad (4)$$

$$y(\xi) = cw(\xi) \quad \bar{Y}(k) = c\bar{W} \quad (5)$$

$$y(\xi) = \frac{dw(\xi)}{d\xi} \quad \bar{Y}(k) = (k+1)\bar{W}(k+1) \quad (6)$$

$$y(\xi) = \frac{d^j w(\xi)}{d\xi^j} \quad \bar{Y}(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j)\bar{W}(k+j) \quad (7)$$

$$y(\xi) = u(\xi)v(\xi) \quad \bar{Y}(k) = \sum_{r=0}^k \bar{U}(r)\bar{V}(k-r) \quad (8)$$

$$y(\xi) = \xi^j \quad \bar{Y}(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (9)$$

ในการใช้งานจริงฟังก์ชัน  $y(\xi)$  จะแสดงในรูปอนุกรมจำกัด และสมการ (2) สามารถเขียนเป็น

$$y(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k) \quad (10)$$

สมการ (10) อนุমানได้ว่า  $\sum_{k=m+1}^{\infty} \xi^k \bar{Y}(k)$  มีขนาดเล็กน้อย ในความเป็นจริง  $m$  จะถูกกำหนดจากการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติสำหรับปัญหานี้

### 2.1.1 การดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ (Some basic mathematical operations)

ทฤษฎีบทที่ (4) ถ้า  $y(\xi) = u(\xi) \pm v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \bar{U}(k) \pm \bar{V}(k)$

พิสูจน์ จงแสดงว่า ถ้า  $y(\xi) = u(\xi) \pm v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \bar{U}(k) \pm \bar{V}(k)$  เป็นจริง

จากสมการ (1)

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} [u(\xi) \pm v(\xi)] \right]_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} u(\xi) \right]_{\xi=0} \pm \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} v(\xi) \right]_{\xi=0} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\bar{Y}(k) = \bar{U}(k) \pm \bar{V}(k)$$

สรุปได้ว่า เมื่อ  $y(\xi) = u(\xi) \pm v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \bar{U}(k) \pm \bar{V}(k)$  เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ (5) ถ้า  $y(\xi) = cw(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = c\bar{W}(k)$  ;  $c \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ จงแสดงว่า ถ้า  $y(\xi) = cw(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = c\bar{W}(k)$  ;  $c \in \mathbb{R}$  เป็นจริง

จากสมการ (1)

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} cw(\xi) \right]_{\xi=0} \\ &= \frac{c}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} w(\xi) \right]_{\xi=0} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\bar{Y}(k) = c\bar{W}(k) \text{ เมื่อ } c \in \mathbb{R}$$

สรุปได้ว่า เมื่อ  $y(\xi) = cw(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = c\bar{W}(k)$  ;  $c \in \mathbb{R}$  เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ (6) ถ้า  $y(\xi) = \frac{dw(\xi)}{d\xi}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)\bar{W}(k+1)$

พิสูจน์ จงแสดงว่า ถ้า  $y(\xi) = \frac{dw(\xi)}{d\xi}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)\bar{W}(k+1)$  เป็นจริง

จากสมการ (1)

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$$

นั่นคือ

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \left( \frac{dw(\xi)}{d\xi} \right) \right]_{\xi=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} w(\xi) \right]_{\xi=0}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} w(\xi) \right]_{\xi=0}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!} \left[ \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} w(\xi) \right]_{\xi=0}$$

$$= (k+1) \cdot \bar{W}(k+1)$$

จะได้ว่า  $\bar{Y}(k) = (k+1)\bar{W}(k+1)$

สรุปได้ว่า ถ้า  $y(\xi) = \frac{dw(\xi)}{d\xi}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)\bar{W}(k+1)$  เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ (7) ถ้า  $y(\xi) = \frac{d^j w(\xi)}{d\xi^j}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j)\bar{W}(k+j)$

พิสูจน์ จงแสดงว่า  $y(\xi) = \frac{d^j w(\xi)}{d\xi^j}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j)\bar{W}(k+j)$  เป็นจริง

จากสมการ (1)

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$$

นั่นคือ

$$\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \left( \frac{d^j w(\xi)}{d\xi^j} \right) \right]_{\xi=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+j} w(\xi)}{d\xi^{k+j}} \right]_{\xi=0} \\
&= \frac{(k+j)!}{(k+j)!} \left[ \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+j} w(\xi)}{d\xi^{k+j}} \right] \right]_{\xi=0} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+j)(k)!}{(k+j)!} \left[ \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+j} w(\xi)}{d\xi^{k+j}} \right] \right]_{\xi=0} \\
&= (k+1)(k+2)\dots(k+j) \left[ \frac{1}{(k+j)!} \left[ \frac{d^{k+j} w(\xi)}{d\xi^{k+j}} \right] \right]_{\xi=0} \\
&= (k+1)(k+2)\dots(k+j) \bar{W}(k+j)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\bar{Y}(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j) \bar{W}(k+j)$$

สรุปได้ว่า  $y(\xi) = \frac{d^j w(\xi)}{d\xi^j}$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j) \bar{W}(k+j)$  เป็นจริง

สูตรของไลบ์นิทซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^k(uv) = \binom{k}{k} u^{(k)} v + \binom{k}{k-1} u^{(k-1)} v' + \binom{k}{k-2} u^{(k-2)} v'' + \dots + u^{(k)} v \quad (7.1)$$

พิสูจน์ โดยใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ บน  $k$

ให้  $P(k)$  แทนสมการ (7.1)

จะได้  $P(1)$  คือ  $D(uv) = u'v + uv'$  เป็นจริง

และ ถ้า  $P(m)$  เป็นจริง นั่นคือ

$$D^m(uv) = u^{(m)} v + \binom{m}{1} u^{(m-1)} v' + \binom{m}{2} u^{(m-2)} v'' + \dots + \binom{m}{m} u^{(m)} v$$

$$\text{จะได้ว่า } D(D^m(uv)) = D\left(u^{(m)} v + \binom{m}{1} u^{(m-1)} v' + \binom{m}{2} u^{(m-2)} v'' + \dots + \binom{m}{m} u^{(m)} v\right)$$

$$D^{m+1}(uv) = (u^{(m)} v' + v u^{(m+1)}) + \binom{m}{1} (u^{(m-1)} v'' + v' u^{(m)}) + \binom{m}{2} (u^{(m-2)} v''' + v'' u^{(m-1)}) + \dots +$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& \binom{m}{m-1} (u'v^{(m)} + v^{(m-1)}u'') + \binom{m}{m} (uv^{(m+1)} + v^{(m)}u') \\
&= u^{(m)}v' + vu^{(m+1)} + \binom{m}{1} u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{1} v'u^{(m)} + \binom{m}{2} u^{(m-2)}v''' + \\
& \binom{m}{2} v''u^{(m-1)} + \dots + \binom{m}{m-1} u'v^{(m)} + \binom{m}{m-1} v^{(m-1)}u'' + \\
& \binom{m}{m} uv^{(m+1)} + \binom{m}{m} v^{(m)}u' \\
&= u^{(m+1)}v + \binom{m}{0} u^{(m)}v' + \binom{m}{1} v'u^{(m)} + \binom{m}{1} u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{2} v''u^{(m-1)} + \dots + \\
& \binom{m}{m-1} u'v^{(m)} + \binom{m}{m} v^{(m)}u'
\end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}$  จะได้ว่า

$$D^{m+1}(uv) = u^{(m+1)}v + \binom{m+1}{1} u^{(m)}v' + \binom{m+1}{2} u^{(m-1)}v'' + \dots + \binom{m+1}{m+1} uv^{(m+1)}$$

นั่นคือ  $P(m+1)$  จริง เมื่อ  $P(m)$  เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์  $P(k)$  เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ (8) ถ้า  $y(\xi) = u(\xi)v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \sum_{r=0}^k \bar{U}(r)\bar{V}(k-r)$

พิสูจน์ จะได้ว่า ถ้า  $y(\xi) = u(\xi)v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \sum_{r=0}^k \bar{U}(r)\bar{V}(k-r)$  เป็นจริง

$$\text{จากสมการ (1)} \quad \bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$$

$$\text{แทนค่า } y(\xi) = u(\xi)v(\xi) \text{ ใน (1) จะได้ } \bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} (u(\xi)v(\xi)) \right]_{\xi=0}$$

จากสูตรไบนอมิซ

$$D^k(uv) = \binom{k}{k} u v^{(k)} + \binom{k}{k-1} u' v^{(k-1)} + \binom{k}{k-2} u'' v^{(k-2)} + \dots + u^{(k)} v$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า  $D^k(uv) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^r v^{k-r}$  โดยที่  $\binom{k}{r} = \frac{k!}{(k-r)!r!}$

$$\begin{aligned}\bar{Y}(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \sum_{r=0}^k \frac{k!}{(k-r)!r!} u^{(r)}(\xi) v^{(k-r)}(\xi) \right]_{\xi=0} \\ &= \sum_{r=0}^k \left[ \frac{1}{r!} u^{(r)}(\xi) \cdot \frac{1}{(k-r)!} v^{(k-r)}(\xi) \right]_{\xi=0}\end{aligned}$$

นั่นคือ  $\bar{Y}(k) = \sum_{r=0}^k \bar{U}(r) \bar{V}(k-r)$

สรุปได้ว่า ถ้า  $y(\xi) = u(\xi)v(\xi)$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \sum_{r=0}^k \bar{U}(r) \bar{V}(k-r)$  เป็นจริง

ทฤษฎีบทที่ (9) ถ้า  $y(\xi) = \xi^j$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า ถ้า  $y(\xi) = \xi^j$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$  เป็นจริง

จากสมการ (1)  $\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} y(\xi) \right]_{\xi=0}$

แทนค่า  $y(\xi) = \xi^j$  ใน (1) จะได้ว่า  $\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \xi^j \right]_{\xi=0}$

แบ่งเป็นกรณี ดังนี้

กรณี  $j = k$  ;  $\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \xi^j \right]_{\xi=0}$   
 $= \frac{1}{k!} \cdot k!$

$$\bar{Y}(k) = 1$$

กรณี  $j \neq k$  ; แบ่งเป็นสองกรณีย่อยคือ

กรณี  $j < k$  ;  $\bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \xi^j \right]_{\xi=0}$

$$= \frac{1}{k!} \cdot (0)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\bar{Y}(k) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{กรณี } j > k; \quad \bar{Y}(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\xi^k} \xi^j \right]_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot [j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot (j-k) \cdot \xi^{j-k-1}]_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot [j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot (j-k) \cdot (0)^{j-k-1}] \end{aligned}$$

$$\bar{Y}(k) = 0$$

สรุปได้ว่า ถ้า  $y(\xi) = \xi^j$  แล้ว  $\bar{Y}(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$  เป็นจริง

### 2.1.2 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบอิสระของคานแบบไม่เอกรูป (Using differential transformations to analyze the free vibrations problem of non-uniform beams)

สำหรับคาน *Bernoulli-Euler* ไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองถูกยึดแบบยึดหยุ่นที่ความยาวจำกัด  $\ell$  วางตัวอยู่บนฐานความยืดหยุ่นที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและให้แรงยึดตามแนวขวางและทแยงมุมตามที่แสดงในรูปที่ 2.1 การตอบสนองแบบไดนามิก  $V(x,t)$  สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x) V(x,t) \\ + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), \quad x \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (11)$$

โดยที่  $E(x), I(x), \rho(x), A(x)$  และ  $K^*(x)$  เป็นโมดูลัสความยืดหยุ่น, โมเมนต์ความเฉื่อย, มวลต่อหน่วยปริมาตร, พื้นที่หน้าตัดและค่าโมดูลัสของรากฐานของ *Winkler* หรือฟังก์ชันการตอบสนองพิจารณาพฤติกรรมของดินอิลาสติก ประกอบไปด้วยระบบของสปริงที่มีค่าคงที่  $k$  และสิ่งที่สำคัญอย่างหนึ่งของแบบจำลองดินแบบ *Winkler* คือการเปลี่ยนตำแหน่ง ซึ่งจะเกิดขึ้นทันทีที่ภายใต้ที่มีน้ำหนักมากระทำ และนอกเหนือจากพื้นที่ดังกล่าวค่าเปลี่ยนตำแหน่งจะเท่ากับศูนย์ ตามลำดับ  $N(x)$  และ  $P(x,t)$  เป็นแรงดึงตามแนวแกนและแรงกระตุ้นฮาร์มอนิกตามขวางตามลำดับ ถ้าคานอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกน  $N_0$  แล้ว  $N(x)$  เป็นฟังก์ชันค่าคงที่  $N(x) = N_0$  ถ้าคานอยู่ภายใต้การกระจายของแรง  $g(x)$  ตามแนวแกน  $x$  แล้ว  $N(x) = \int_x^{\ell} g(\eta) d\eta$  เงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขตที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

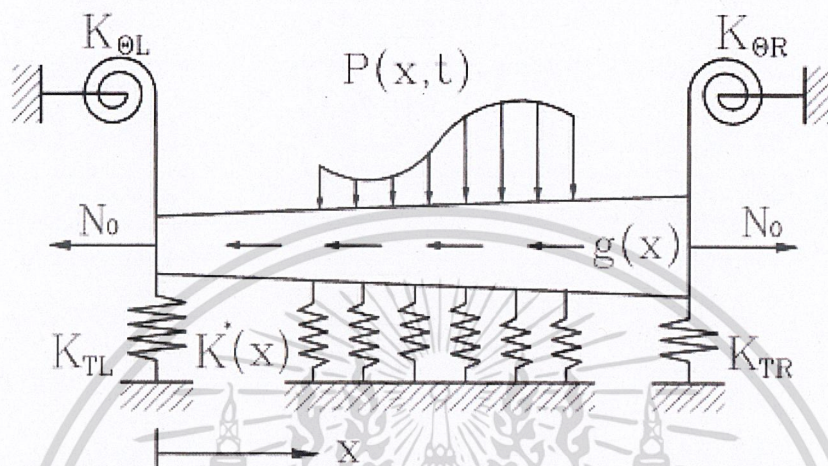
$$V(x,0) = V_0(x) \quad \text{และ} \quad \partial V(x,0) / \partial t = \dot{V}_0(x) \quad (12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และที่  $x=0$

$$E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = K_{\theta L} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = K_{TL} V(x,t) \quad (14)$$



รูปที่ 2.1 ระบบการสั่นของคาน

ที่  $x=l$

$$E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -K_{\theta R} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = K_{TR} V(x,t) \quad (16)$$

ตามลำดับที่  $V_0(x)$  และ  $\dot{V}_0(x)$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดเริ่มต้น  $K_{\theta L}, K_{TL}, K_{\theta R}, K_{TR}$  คือการหมุนและค่าคงตัวสปริงจากการเคลื่อนแบบเลื่อนที่สปริงที่ปลายด้านซ้ายและด้านขวาของคานตามลำดับ

สำหรับการสั่นอิสระ  $P(x,t)=0$  คานจะสั่นแบบฮาร์โมนิกในหนึ่งของโหมดธรรมชาติ  $V(x,t) = Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)$

สมการ (11) และสมการ (13)-(16) สามารถแสดงได้ดังนี้

จากสมการ (11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x)V(x,t) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), x \in (0, l)$$

แทน  $V(x,t) = Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \neq 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) + \rho(x)A(x) \frac{d^2 Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) + \rho(x)A(x)Y(x) \frac{d^2 (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) + \rho(x)A(x)Y(x) \frac{d(-a_1 \omega \sin \omega t + a_2 \omega \cos \omega t)}{dt} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) + \rho(x)A(x)Y(x)(-a_1 \omega^2 \cos \omega t - a_2 \omega^2 \sin \omega t) = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

เนื่องจากการสั่นอิสระ  $P(x,t) = 0$  นั่นคือ

$$(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) = 0, x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 = 0, x \in (0, \ell)$$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 = 0, x \in (0, \ell) \quad (17)$$

ที่  $x=0$  แทน  $V(x,t) = Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \neq 0$  ในสมการ (13) และ (14) จะได้สมการ (18) และ (19)

$$E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = K_{\Theta L} \frac{dY(x)}{dx} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = -K_{TL} Y(x) \quad (19)$$

ที่  $x=\ell$  แทน  $V(x,t) = Y(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \neq 0$  ในสมการ (15) และ (16) จะได้สมการ (20) และ (21)

$$E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = -K_{\Theta R} \frac{dY(x)}{dx} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = K_{TR} Y(x) \quad (21)$$

แนะนำปริมาณที่ไม่มีมิติต่อไปนี้จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\ell} & \beta_{\Theta L} &= \frac{K_{\Theta L} \ell}{E(0)I(0)} \\ y(\xi) &= \frac{Y(x)}{\ell} & \beta_{\Theta R} &= \frac{K_{\Theta R} \ell}{E(\ell)I(\ell)} \\ b(\xi) &= \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} & \beta_{TL} &= \frac{K_{TL} \ell^3}{E(0)I(0)} \\ n(\xi) &= \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} & \beta_{TR} &= \frac{K_{TR} \ell^3}{E(\ell)I(\ell)} \\ k^*(\xi) &= \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} & \gamma_R &= \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \Big|_{\xi=1} \\ q(\xi) &= \frac{\rho(x)A(x)}{\rho(0)A(0)} & \eta_R &= \frac{N(\ell)\ell^2}{E(\ell)I(\ell)} \\ \Lambda^2 &= \frac{\rho(0)A(0)\omega^2 \ell^4}{E(0)I(0)} \end{aligned} \quad (22)$$

สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตสามารถถูกเขียนใหม่ในรูปแบบที่ไม่มีมิติต่อไปนี้ :

จากสมการ (17)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dY(x)}{dx} \right] + K^*(x)Y(x) - \rho(x)A(x)Y(x)\omega^2 = 0, x \in (0, \ell)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก  $y(\xi) = \frac{Y(x)}{\ell}$  จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)\ell}{dx} \right] + K^*(x)y(\xi)\ell - \rho(x)A(x)y(\xi)\ell\omega^2 = 0, x \in (0, \ell) \quad (17.1)$$

พิจารณาสมการ (17.1) พจน์  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)\ell}{dx} \right]$

แทน  $x = \xi\ell$  ในสมการ (17.1)

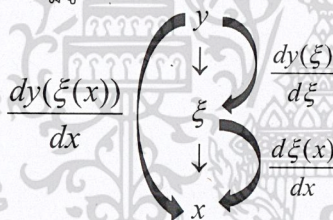
จะได้ว่า  $\frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)\ell}{d\xi \ell} \right]$

นั่นคือ

$$\frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2 \ell} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] + y(\xi) [K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2] = 0, x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^2} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)}{\ell} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right] + y(\xi) [K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2] = 0, x \in (0, \ell)$$

หรือจากแผนภาพลูกโซ่



จากลูกโซ่  $\frac{dy(\xi(x))}{dx} = \frac{dy(\xi(x))}{d\xi(x)} \cdot \frac{d\xi(x)}{dx}$  เนื่องจาก  $\frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{d(\frac{x}{\ell})}{dx} = \frac{1}{\ell}$

จะได้ว่า  $\frac{dy(\xi(x))}{dx} = \frac{dy(\xi(x))}{d\xi(x)} \cdot \frac{1}{\ell}$  (17.2)

take  $\frac{d}{dx}$  ทั้งสองข้างของสมการ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(\xi(x))}{dx^2} &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dy(\xi(x))}{d\xi(x)} \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{d\xi(x)} \left( \frac{dy(\xi(x))}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{d\xi(x)} \left( \frac{1}{\ell} \cdot \frac{dy(\xi(x))}{d\xi(x)} \right) \\ &= \frac{1}{\ell^2} \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (17.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ (17.2) และ (17.3) แทนในสมการ (17.1) จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell} \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] + K^*(x)y(\xi)\ell - \rho(x)A(x)y(\xi)\ell\omega^2 = 0, x \in (0, \ell)$$

แทน  $x = \xi\ell$

$$\frac{d^2}{d(\xi\ell)^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell} \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi\ell} \left[ N(x) \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] + K^*(x)y(\xi)\ell - \rho(x)A(x)y(\xi)\ell\omega^2 = 0, x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{d\xi} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^3} \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\ell} N(x) \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] + K^*(x)y(\xi)\ell - \rho(x)A(x)y(\xi)\ell\omega^2 = 0, x \in (0, \ell)$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  และ  $\ell^3$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right] + y(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(x)A(x)\ell^4\omega^2}{E(0)I(0)} \right] = 0, x \in (0, \ell)$$

จาก  $q(\xi) = \frac{\rho(x)A(x)}{\rho(0)A(0)}$ ,  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$ ,  $n(\xi) = \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)}$ ,  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)}$

และ  $\Lambda^2 = \frac{\rho(0)A(0)\omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22)

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

(23)

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (24) และ (25) โดยใช้เงื่อนไข (18)-(19)

จากสมการ (18)  $E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = K_{OL} \frac{dY(x)}{dx}$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  นั่นคือ

$$E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} = K_{OL} \frac{dy(\xi)\ell}{d\xi \ell}$$

$$E(x)I(x) \frac{1}{\ell} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) = K_{OL} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

$$E(x)I(x) \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) = K_{OL} \ell \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \frac{K_{\text{ol}}\ell}{E(0)I(0)} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

จาก  $\beta_{\text{ol}} = \frac{K_{\text{ol}}\ell}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22) และ  $x=0$  นั่นคือ

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \beta_{\text{ol}} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} - \beta_{\text{ol}} \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (24)$$

และจากสมการ (19)  $\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = -K_{\text{TL}} Y(x)$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi\ell} \left[ E(x)I(x) \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2 \ell^2} \right) \ell \right] - N(x) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi\ell} \right) \ell = -K_{\text{TL}} y(\xi)\ell$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^2} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - N(x) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) = -K_{\text{TL}} y(\xi)\ell$$

นำ  $\ell^2$  และ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{-K_{\text{TL}} y(\xi)\ell^3}{E(0)I(0)}$$

จาก  $\beta_{\text{TL}} = \frac{K_{\text{TL}}\ell^3}{E(0)I(0)}$ ,  $n(\xi) = \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22) และ  $x=0$  นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) = -\beta_{\text{TL}} y(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) + \beta_{\text{TL}} y(\xi) = 0$$

$$\left[ b(\xi) \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) \right] + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) + \beta_{\text{TL}} y(\xi) = 0$$

$$\left[ \frac{E(0)I(0)}{E(0)I(0)} \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) \right] + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) + \beta_{\text{TL}} y(\xi) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) + \beta_{TL} y(\xi) = 0 \quad (25)$$

ดังนั้น ที่  $\xi = 0$  มีสมการเงื่อนไขคือ สมการ (24) และ (25)

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (26) และ (27) โดยใช้เงื่อนไข (20)-(21)

$$\text{จากสมการ (20)} \quad E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = -K_{OR} \frac{dY(x)}{dx}$$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  จะได้ว่า

$$E(x)I(x) \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2 \ell^2} \right) = -K_{OR} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi \ell} \right)$$

นำ  $\frac{1}{E(\ell)I(\ell)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)\ell^2} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) = \frac{-K_{OR}}{E(\ell)I(\ell)\ell} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

จาก  $\beta_{OR} = \frac{K_{OR}\ell}{E(\ell)I(\ell)}$  ในสมการ (22) และ  $x = \ell$  นั่นคือ

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = -\beta_{OR} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)$$

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \beta_{OR} \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (26)$$

และจากสมการ (21)  $\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = K_{TR} Y(x)$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi \ell} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} \right] - N(x) \frac{dy(\xi)\ell}{d\xi \ell} = K_{TR} y(\xi)\ell$$

นำ  $\frac{1}{E(\ell)I(\ell)}$  และ  $\ell^2$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{N(x)\ell^2}{E(\ell)I(\ell)} \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{K_{TR} y(\xi)\ell^3}{E(\ell)I(\ell)}$$

จาก  $\beta_{TR} = \frac{K_{TR}\ell^3}{E(\ell)I(\ell)}$ ,  $\eta_R = \frac{N(\ell)\ell^2}{E(\ell)I(\ell)}$ ,  $\gamma_R = \frac{b'(\xi)}{b(\xi)} \Big|_{\xi=1}$  ในสมการ (22) และ  $x = \ell$

นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{b(\xi)}{b(\xi)} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) = \beta_{TR} y(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \frac{b(\xi)}{b(\xi)} \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} y(\xi) = 0$$

$$\left[ \frac{b(\xi)}{b(\xi)} \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d b(\xi)}{d\xi b(\xi)} \right] - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} y(\xi) = 0$$

$$\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \gamma_R - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} y(\xi) = 0 \quad (27)$$

ดังนั้น ที่  $\xi=1$  มีสมการเงื่อนไขคือ สมการ (26) และ (27)

กำหนด  $\lambda = \Lambda^2$  การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (23) และใช้สมการ (4)-(8)

จากสมการ (23)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d b(\xi)}{d\xi} \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d n(\xi)}{d\xi} \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \lambda] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d b(\xi)}{d\xi} \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d n(\xi)}{d\xi} \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \lambda] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

$$\left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \frac{d b(\xi)}{d\xi} \right] + \left[ \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2 b(\xi)}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d n(\xi)}{d\xi} \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \lambda] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[ \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] \\ + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \lambda] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

$$\left[ 2 \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] \\ + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + [k^*(\xi) y(\xi) - q(\xi) y(\xi) \cdot \lambda] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

กำหนดให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (28) เป็นจริง และให้  $z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}$ ,

$$p(\xi) = \frac{d^2 b(\xi)}{d\xi^2}, L(\xi) = \frac{dy(\xi)}{d\xi}, s(\xi) = \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2}, w(\xi) = \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3}, r(\xi) = \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4},$$

$m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$  จะได้ว่า

$$\left[ 2z(\xi) \cdot w(\xi) \right] + \left[ b(\xi) \cdot r(\xi) + s(\xi) \cdot p(\xi) \right] + \left[ n(\xi) \cdot s(\xi) + l(\xi) \cdot m(\xi) \right] \\ + k^*(\xi) y(\xi) - q(\xi) y(\xi) \cdot \lambda = 0, \xi \in (0, \ell)$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$2 \sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r) \bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) \bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r) \bar{S}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) \bar{S}(r) \\ + \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r) \bar{L}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r) \bar{Y}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r) \bar{Y}(r) \cdot \lambda = 0$$

จากสมการ (5), (6) และ (7)

$$2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1) (r+1)(r+2)(r+3) \bar{Y}(r+3) \\ + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) (r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{Y}(r+4) \\ + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2) (r+1)(r+2) \bar{Y}(r+2) \\ + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) (r+1)(r+2) \bar{Y}(r+2) + \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1) (r+1) \bar{Y}(r+1) \\ + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r) \bar{Y}(r) - \sum_{r=0}^k \lambda \bar{Q}(k-r) \bar{Y}(r) = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{Y}(r+4) \\
 & + 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{Y}(r+3) \\
 & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\
 & + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) + \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{Y}(r+1) \\
 & + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r)\bar{Y}(r) - \sum_{r=0}^k \lambda\bar{Q}(k-r)\bar{Y}(r) = 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

โดยที่  $\bar{B}(k)$ ,  $\bar{N}(k)$ ,  $\bar{K}^*(k)$ ,  $\bar{Q}(k)$  และ  $\bar{Y}(k)$  เป็นฟังก์ชันการแปลงของ  $b(\xi)$ ,  $n(\xi)$ ,  $k(\xi)$ ,  $q(\xi)$  และ  $y(\xi)$  ตามลำดับ สมการ (28) เป็นสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิด ซึ่งเหมาะสำหรับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับหาผลเฉลย

ใช้สมการ (1), เงื่อนไขขอบเขต (24) และ (25)

$$\text{จากสมการ (1), (24) และ (25) } \bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0}, \quad \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} - \beta_{OL} \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0$$

$$\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TL} y(\xi) = 0$$

แทน  $k=1$  และ  $k=2$  ในสมการ (1) นั่นคือ

$$\bar{Y}(1) = \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0}$$

$$\bar{Y}(1) = \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0}$$

และ

$$\bar{Y}(2) = \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0}$$

$$2\bar{Y}(2) = \left[ \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0}$$

$$\text{แทน } 2\bar{Y}(2) = \left[ \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]_{\xi=0}, \quad \bar{Y}(1) = \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0} \text{ ในสมการ (24) จะได้ว่า}$$

$$2\bar{Y}(2) - \beta_{OL} \bar{Y}(1) = 0 \tag{29}$$

และ  $k=0$ ,  $k=3$  นั่นคือ

$$\bar{Y}(0) = \frac{1}{0!} [y(\xi)]_{\xi=0}$$

$$\bar{Y}(0) = [y(\xi)]_{\xi=0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\bar{Y}(3) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right]_{\xi=0}$$

และ

$$6\bar{Y}(3) = \left[ \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right]_{\xi=0}$$

แทน  $\bar{Y}(0) = [y(\xi)]_{\xi=0}$ ,  $6\bar{Y}(3) = \left[ \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right]_{\xi=0}$  ในสมการ (25) จะได้ว่า

$$\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + n(\xi) \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TL} y(\xi) = 0$$

$$6\bar{Y}(3) + 2\bar{Y}(2) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + n(\xi) \bar{Y}(1) - \beta_{TL} \bar{Y}(0) = 0$$

เนื่องจากที่  $\xi = 0$  จะได้ว่า

$$6\bar{Y}(3) + 2 \frac{db(0)}{d\xi} \bar{Y}(2) + n(0) \bar{Y}(1) + \beta_{TL} \bar{Y}(0) = 0 \quad (30)$$

ใช้สมการ (10), เงื่อนไขขอบเขต (26) และ (27)

จากสมการ (10), (26) และ (27)  $y(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)$ ,  $\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \beta_{OR} \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0$  และ

$$\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \gamma_R - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} y(\xi) = 0$$

แทนสมการ (10) ในสมการ (26) นั่นคือ

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \beta_{OR} \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0$$

$$\frac{d^2 \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi^2} + \beta_{OR} \frac{d \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi} = 0$$

$$\sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) \frac{d^2 \xi^k}{d\xi^2} + \beta_{OR} \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) \frac{d \xi^k}{d\xi} = 0$$

$$\sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) k(k-1) \xi^{k-2} + \beta_{OR} \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) k \xi^{k-1} = 0$$

เนื่องจากที่  $\xi = 1$  จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^m k(k-1) \bar{Y}(k) + \beta_{OR} \sum_{k=0}^m k \bar{Y}(k) = 0 \quad (31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และแทนสมการ (10) ในสมการ (27) นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \gamma_R - \eta_R \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} y(\xi) &= 0 \\ \left( \frac{d^3 \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi^2} \right) \gamma_R - \eta_R \left( \frac{d \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi} \right) - \beta_{TR} \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k) &= 0 \\ \left( \frac{\sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) d^3 \xi^k}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{\sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) d^2 \xi^k}{d\xi^2} \right) \gamma_R - \eta_R \left( \frac{\sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) d \xi^k}{d\xi} \right) - \beta_{TR} \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k) &= 0 \\ \left( \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) k(k-1)(k-2) \xi^{k-3} \right) + \left( \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) k(k-1) \xi^{k-2} \right) \gamma_R \\ - \eta_R \left( \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) k \xi^{k-1} \right) - \beta_{TR} \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากที่  $\xi = 1$  จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^m k(k-1)(k-2) \bar{Y}(k) + \gamma_R \sum_{k=0}^m k(k-1) \bar{Y}(k) - \eta_R \sum_{k=0}^m k \bar{Y}(k) - \beta_{TR} \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) = 0 \quad (32)$$

สมการ (29)-(32) เป็นสมการพีชคณิตที่เหมาะสมสำหรับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับหาผลเฉลย ให้

$$\bar{Y}(0) = s \quad (33)$$

$$\bar{Y}(1) = z \quad (34)$$

แก้สมการ (29) และ (30) โดยแทนสมการ (33), (34) ในสมการ (29), (30) นั่นคือ

$$\begin{aligned} 2\bar{Y}(2) - \beta_{OL} z &= 0 \\ \bar{Y}(2) &= \frac{\beta_{OL}}{2} z \end{aligned} \quad (35)$$

และ

$$\begin{aligned} 6\bar{Y}(3) + 2 \frac{db(0)}{d\xi} \frac{\beta_{OL} z}{2} + n(0)z + \beta_{TL} s &= 0 \\ \bar{Y}(3) &= -\frac{\beta_{TL} s}{6} - \frac{n(0)z}{6} - \frac{1}{6} \frac{db(0)}{d\xi} \beta_{OL} z \\ &= -\frac{\beta_{TL}}{6} s - \left[ \frac{\beta_{TL}}{6} \frac{db(0)}{d\xi} + \frac{n(0)}{6} \right] z \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\frac{\beta_{TL}}{6} s - \left[ \frac{\beta_{TL}}{6} \frac{db(0)}{d\xi} + \frac{n(0)}{6} \right] z \quad (36)$$

แทนสมการ (33)-(36) และ  $k=0$  ในสมการ (28)

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \bar{B}(-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{Y}(r+4) \\ & + 2 \sum_{r=0}^k (-r+1)\bar{B}(-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{Y}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k (-r+1)(-r+2)\bar{B}(-r+2)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{N}(-r)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) + \sum_{r=0}^k (-r+1)\bar{N}(-r+1)(r+1)\bar{Y}(r+1) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(-r)\bar{Y}(r) = \sum_{r=0}^k \lambda \bar{Q}(-r)\bar{Y}(r) \\ & \bar{B}(0)24\bar{Y}(4) + 2[\bar{B}(1)6\bar{Y}(3)] + [2\bar{B}(2)2\bar{Y}(2)] + [\bar{N}(0)2\bar{Y}(2)] \\ & + \bar{N}(1)\bar{Y}(1) + \bar{K}^*(0)\bar{Y}(0) = \lambda \bar{Q}(0)\bar{Y}(0) \end{aligned} \quad (36.1)$$

และแทนสมการ (33)-(36) ใน (36.1) นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \bar{B}(0)24\bar{Y}(4) + 2 \left[ \bar{B}(1)6 \left( \frac{\beta_{TL}}{6} s - \left[ \frac{\beta_{TL}}{6} \frac{db(0)}{d\xi} + \frac{n(0)}{6} \right] z \right) \right] \\ & + \left[ 2\bar{B}(2)2 \left( \frac{\beta_{OL}}{2} z \right) \right] + \left[ \bar{N}(0)2 \left( \frac{\beta_{OL}}{2} z \right) \right] + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s = \lambda \bar{Q}(0)s \\ & 2 \left[ \bar{B}(1) \left( \beta_{TL}s - z\beta_{TL} \frac{db(0)}{d\xi} - zn(0) \right) \right] + [2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z)] + [\bar{N}(0)(\beta_{OL}z)] \\ & + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s - \lambda \bar{Q}(0)s = -\bar{B}(0)24\bar{Y}(4) \\ & \left[ 2\bar{B}(1)\beta_{TL}s - 2\bar{B}(1)z\beta_{TL} \frac{db(0)}{d\xi} - 2\bar{B}(1)zn(0) \right] + [2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z)] \\ & + [\bar{N}(0)(\beta_{OL}z)] + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s - \lambda \bar{Q}(0)s = -\bar{B}(0)24\bar{Y}(4) \\ & \lambda \bar{Q}(0)s - 2\bar{B}(1)\beta_{TL}s - \bar{K}^*(0)s + 2\bar{B}(1)z\beta_{TL} \frac{db(0)}{d\xi} + 2\bar{B}(1)zn(0) \\ & - 2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z) - \bar{N}(0)(\beta_{OL}z) - \bar{N}(1)z = \bar{B}(0)24\bar{Y}(4) \\ & [\lambda \bar{Q}(0) - 2\bar{B}(1)\beta_{TL} - \bar{K}^*(0)]s \\ & + \left[ 2\bar{B}(1)\beta_{TL} \frac{db(0)}{d\xi} + 2\bar{B}(1)n(0) - 2\bar{B}(2)(\beta_{OL}) - \bar{N}(0)(\beta_{OL}) - \bar{N}(1) \right] z \\ & = \bar{B}(0)24\bar{Y}(4) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\lambda \bar{Q}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{B}(1)\beta_{TL}}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{K}^*(0)}{24\bar{B}(0)} \right] s \\ & + \left[ \frac{\bar{B}(1)\beta_{TL}}{12\bar{B}(0)} \frac{db(0)}{d\xi} + \frac{\bar{B}(1)n(0)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{B}(2)(\beta_{oL})}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(0)(\beta_{oL})}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(1)}{24\bar{B}(0)} \right] z = \bar{Y}(4) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \bar{Y}(4) = & \left[ \frac{\lambda \bar{Q}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\beta_{TL}\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{K}^*(0)}{24\bar{B}(0)} \right] s \\ & + \left[ \frac{\beta_{oL}\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} \frac{db(0)}{d\xi} + \frac{n(0)\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\beta_{oL}\bar{B}(2)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\beta_{oL}\bar{N}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(1)}{24(0)} \right] z \end{aligned} \quad (37)$$

ตามขั้นตอนการเวียนเกิดแบบเดียวกันเรากำหนด  $\bar{Y}(m)$  พจน์ที่  $m$  โดยที่  $m$  ถูกกำหนดโดยการลู่เข้าของความถี่ธรรมชาติตามที่อธิบายไว้ในภายหลัง

แทน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(m)$  ในสมการ (31) และ (32) จะได้

$$f_{j1}^{(m)}(\lambda)s + f_{j2}^{(m)}(\lambda)z = 0, \quad j=1,2 \quad (38)$$

โดยที่  $f_{j1}^{(m)}(\lambda), f_{j2}^{(m)}(\lambda)$  เป็นพหุนามของ  $\lambda$  สอดคล้องกับ  $m$  โดยสมการ (38) จะได้สมการความถี่ดังนี้

$$\begin{vmatrix} f_{11}^{(m)}(\lambda) & f_{12}^{(m)}(\lambda) \\ f_{21}^{(m)}(\lambda) & f_{22}^{(m)}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

แก้สมการ (39) ด้วย  $\lambda = \Lambda^2$  จะได้

$$\Lambda = \Lambda_i^{(m)}, \quad i=1,2 \quad (40)$$

$\Lambda_i^{(m)}$  คือค่าประมาณของความถี่ธรรมชาติที่ไม่มีมิติพจน์ที่  $i$  สอดคล้องกับ  $m$  และโดยที่  $\varepsilon$  เป็นค่าเล็ก ๆ ที่ถูกกำหนดจากสมการต่อไปนี้

$$|\Lambda_i^{(m)} - \Lambda_i^{(m-1)}| \leq \varepsilon \quad (41)$$

โดยที่  $\Lambda_i^{(m-1)}$  คือ ค่าประมาณของความถี่ธรรมชาติที่ไม่มีมิติพจน์ที่  $i$  สอดคล้องกับ  $m-1$  โดยที่  $\varepsilon$  เป็นค่าเล็ก ๆ ที่เรากำหนดจากสมการ (41) จะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี

**กรณีที่ 1 :** ถ้าสมการ (41) เป็นจริงแล้ว  $\Lambda_i^{(m)}$  คือ ความถี่ธรรมชาติที่ไม่มีมิติพจน์ที่  $i$  ของ  $\Lambda$ , แทน  $\Lambda_i$  ในสมการ (38) จะได้ว่า

$$z = cs, \quad c \text{ คือค่าคงที่} \quad (42)$$

แทน  $\Lambda_i$  และสมการ (42) ใน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(m)$  และใช้สมการ (10) จะได้

$$y_i(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}^*(k) \quad (43)$$

โดยที่  $\bar{Y}(k)$  คือ  $\bar{Y}(k)$  ซึ่ง  $\Lambda$  และ  $z$  ถูกแทนด้วย  $\Lambda$ , และ  $cs$  และ  $y_i(\xi)$  เป็นรูปแบบโหมดพจน์ที่  $i$  ที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติไม่มีมิติ  $\Lambda$ , นอกจากนี้โดย  $\xi = x/l$  จะได้ว่า

$$Y_i(x) = y_i\left(\frac{x}{l}\right) \quad (44)$$

ซึ่งฟังก์ชันเจาะจงบรรทัดฐาน (normalized eigenfunction) หรือ Relative magnitude (ขนาดความสัมพันธ์) พจน์ที่  $i$  คือ

$$\hat{y}_i(x) = \frac{y_i(x)}{\int_0^l |y_i(x)| dx} \quad (44.1)$$

**กรณีที่ 2:** ถ้าสมการ (41) ไม่เป็นจริง ขั้นตอนต่อไปควรจะทำซ้ำจนกว่าความถี่ธรรมชาติไม่มีมิติพจน์ที่  $i$  และรูปร่างของโหมดพจน์ที่  $i$  จะถูกพบ

ขั้นตอนที่ 1: แทน  $m$  ด้วย  $m+1$

ขั้นตอนที่ 2: ทำขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ในสมการ (39)-(44.1) อีกครั้ง

วิธีการที่นำมาใช้ในส่วนนี้มีความเกี่ยวข้องกับการคำนวณมาก การคำนวณพีชคณิตเหล่านี้สามารถทำได้อย่างรวดเร็วโดยใช้ซอฟต์แวร์คำนวณเชิงสัญลักษณ์ นอกจากนี้โดยวิธีการที่เสนอข้างต้น ความถี่ธรรมชาติพจน์ที่  $i$  ใดๆ และสามารถหาผลเฉลยรูปแบบปิดของรูปร่าง ฟังก์ชันพจน์ที่  $i$  ของคานไม่เอกรูปที่ปลายทั้ง 2 ข้างถูกยึดไว้แบบยึดหยุ่นที่อยู่บนรากฐานแบบยึดหยุ่นแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกัน และอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกน

โดยรูปร่างโหมดฟังก์ชันการตอบสนองต่อการสั่นสะเทือนแบบอิสระจะแสดงดังต่อไปนี้

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \quad (45)$$

โดยที่ค่าคงที่  $a_1$  และ  $a_2$  ถูกกำหนดโดยเงื่อนไขเริ่มต้น (12)

### 2.1.3 ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับของคานแบบไม่เอกรูป (Using differential transformations to analyze the forced vibrations problem of non-uniform beams)

ในการพิจารณาแรงสั่นสะเทือน กำหนดให้แรงกระตุ้นแบบฮาร์มอนิกเกิดจากคลื่นตามขวาง คือ  $P(x,t) = P_0(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)$

ผลเฉลยในสภาวะการแก้ปัญหาสมการของสภาวะคงที่ของสมการ (11) จะถูกแสดงโดย

$V(x,t) = U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)$  โดยที่  $\bar{\omega}$  คือความถี่กระตุ้น

นอกจากนี้การแทน  $V(x,t)$  ในสมการ (11) จะได้

จากสมการ (11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x)I(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x)V(x,t) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

แทน  $V(x,t) = U(x)(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)}{dx} \right] + K^*(x)U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) + \rho(x)A(x) \frac{d^2 U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) \frac{dU(x)}{dx} \right] + K^*(x)U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) + \rho(x)A(x)U(x) \frac{d^2 (b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t)}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) \frac{dU(x)}{dx} \right] + K^*(x)U(x)(b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t) + \rho(x)A(x)U(x) \frac{d(-b_1 \omega \sin \omega t + b_2 \omega \cos \omega t)}{dt} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) + \rho(x)A(x)U(x) \left( -b_1 \omega^2 \cos \omega t - b_2 \omega^2 \sin \omega t \right) \\ & = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) - \rho(x)A(x)U(x) \omega^2 \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \\ & = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) - \rho(x)A(x)U(x) \omega^2 \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \\ & = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

เนื่องจากการสั่นแบบบังคับ  $P(x,t) = P_0(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right)$  นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) - \rho(x)A(x)U(x) \omega^2 \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right) \\ & = P_0(x) \left( b_1 \cos \bar{\omega}t + b_2 \sin \bar{\omega}t \right), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] + K^*(x)U(x) - \rho(x)A(x)U(x) \omega^2 \\ & = P_0(x), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) - \rho(x)A(x) \bar{\omega}^2 U(x) = P_0(x) \end{aligned} \quad (46)$$

ในเทอมของปริมาณที่ไม่มีมิติที่กำหนดไว้ในสมการ (22)

$$\text{และ } P_0(\xi) = \frac{P_0(x)\ell^3}{E(0)I(0)}, \quad u(\xi) = \frac{U(x)}{\ell}, \quad \bar{\Lambda}^2 = \frac{\rho(0)A(0)\bar{\omega}^2 \ell^4}{E(0)I(0)} \quad (47)$$

จาก  $U(x) = u(\xi)\ell$  และ  $P_0(x) = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}$  ในสมการ (47) แทนในสมการ (46)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right] \\ + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\omega^2 = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \tag{46.1}$$

พิจารณาสมการ (46.1) พจน์  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right]$  แทน  $x = \xi\ell$

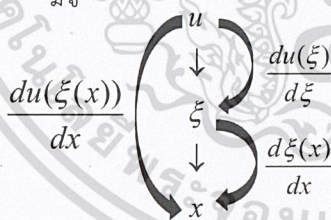
จะได้ว่า  $\frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{d\xi \ell} \right]$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2 \ell} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + u(\xi) \left[ K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2 \right] = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^3} \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)}{\ell} \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ + u(\xi) \left[ K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2 \right] = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

หรือจากแผนภาพกฎลูกโซ่



จากกฎลูกโซ่  $\frac{du(\xi(x))}{dx} = \frac{du(\xi(x))}{d\xi(x)} \cdot \frac{d\xi(x)}{dx}$  เนื่องจาก  $\frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{d(\frac{x}{\ell})}{dx} = \frac{1}{\ell}$

จะได้ว่า  $\frac{du(\xi(x))}{dx} = \frac{du(\xi(x))}{d\xi(x)} \cdot \frac{1}{\ell}$  (46.2)

take  $\frac{d}{dx}$  ทั้งสองข้างของสมการ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(\xi(x))}{dx^2} &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{du(\xi(x))}{d\xi(x)} \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{d\xi(x)} \left( \frac{du(\xi(x))}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{d\xi(x)} \left( \frac{1}{\ell} \cdot \frac{du(\xi(x))}{d\xi(x)} \right) \\ &= \frac{1}{\ell^2} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (46.3)$$

นำ (46.2) และ (46.3) แทนในสมการ (46.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\omega^2 = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

แทน  $x = \xi\ell$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d(\xi\ell)^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi\ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\omega^2 = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^3} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\ell} N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\omega^2 = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}, x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  และ  $\ell^3$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ + u(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(x)A(x)\ell^4\omega^2}{E(0)I(0)} \right] = P_0(\xi), \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จาก  $q(\xi) = \frac{\rho(x)A(x)}{\rho(0)A(0)}$ ,  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$ ,  $n(\xi) = \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)}$ ,  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)}$

และ  $\bar{\Lambda}^2 = \frac{\rho(0)A(0)\omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22) และสมการ (47)

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ b(\xi) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ n(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] + \left[ k^*(\xi) - \bar{\Lambda}^2 q(\xi) \right] u(\xi) = P_0(\xi), \xi \in (0, 1)$$

(48)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์กับสมการ (48) และจากสมการ (4)-(8) นั่นคือ

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0(\xi)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0(\xi)$$

$$\left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) \right] + \left[ \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) + \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0(\xi)$$

$$\left[ \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \frac{d}{d\xi} b(\xi) + \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0(\xi)$$

$$\left[ 2 \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] + \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] + \left[ k^*(\xi) u(\xi) - q(\xi) u(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0(\xi)$$

กำหนดให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (49) เป็นจริง และให้  $z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}$ ,

$$p(\xi) = \frac{d^2 b(\xi)}{d\xi^2}, L(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}, s(\xi) = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}, w(\xi) = \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3}, r(\xi) = \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4},$$

$m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & [2z(\xi) \cdot w(\xi)] + [b(\xi) \cdot r(\xi) + s(\xi) \cdot p(\xi)] + [n(\xi) \cdot s(\xi) + l(\xi) \cdot m(\xi)] \\ & + k^*(\xi) u(\xi) - q(\xi) u(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 = p_0(\xi), \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r) \bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) \bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r) \bar{S}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) \bar{S}(r) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r) \bar{L}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r) \bar{u}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r) \bar{u}(r) \cdot \bar{\Lambda}^2 = \bar{P}_0(k) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (5),(6) และ (7)

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4) \\
& + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) + \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1)(r+1) \bar{U}(r+1) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r) \bar{U}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = \bar{P}_0(k)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4) \\
& + 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3) \\
& + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) + \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1)(r+1) \bar{U}(r+1) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(k-r) \bar{U}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = \bar{P}_0(k)
\end{aligned} \tag{49}$$

โดยที่  $\bar{P}_0(k)$  คือ การแปลงฟังก์ชันของ  $P_0(\xi)$

โดยทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ในสมการ (33)-(36) โดยใช้สมการ (29) และ (30) โดย  $\bar{U}$  จะถูกแทนที่ด้วย  $\bar{U}$  จะได้  $\bar{U}(0), \bar{U}(1), \bar{U}(2)$  และ  $\bar{U}(3)$  แทนค่าเหล่านี้และ  $k=0$  ในสมการ (49) แทน  $k=0$  ในสมการ (49) นั่นคือ

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \bar{B}(-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4) \\
& + 2 \sum_{r=0}^k (-r+1) \bar{B}(-r+1)(r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3) \\
& + \sum_{r=0}^k (-r+1)(-r+2) \bar{B}(-r+2)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{N}(-r)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) + \sum_{r=0}^k (-r+1) \bar{N}(-r+1)(r+1) \bar{U}(r+1) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{K}^*(-r) \bar{U}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(-r) \bar{U}(r) = \bar{P}_0(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{B}(0)24\bar{U}(4) + 2[\bar{B}(1)6\bar{U}(3)] + [2\bar{B}(2)2\bar{U}(2)] + [\bar{N}(0)2\bar{U}(2)] \\ & + \bar{N}(1)\bar{U}(1) + \bar{K}^*(0)\bar{U}(0) - \bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0)\bar{U}(0) = \bar{P}_0(k) \end{aligned} \quad (49.1)$$

และแทนสมการ (33)-(36) ใน (49.1) นั่นคือ

$$\begin{aligned} & 2\left[\bar{B}(1)6\left(\frac{\beta_{TL}}{6}s - \left[\frac{\beta_{TL}}{6}\frac{db(0)}{d\xi} + \frac{n(0)}{6}\right]z\right)\right] \\ & + \left[2\bar{B}(2)2\left(\frac{\beta_{OL}}{2}z\right)\right] + \left[\bar{N}(0)2\left(\frac{\beta_{OL}}{2}z\right)\right] \\ & + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s - \bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0)s = \bar{P}_0(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\left[\bar{B}(1)\left(\beta_{TL}s - z\beta_{TL}\frac{db(0)}{d\xi} + zn(0)\right)\right] + \left[2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z)\right] \\ & + \left[\bar{N}(0)(\beta_{OL}z)\right] + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s \\ & - \bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0)s + \bar{B}(0)24\bar{U}(4) = \bar{P}_0(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[2\bar{B}(1)\beta_{TL}s - 2\bar{B}(1)z\beta_{TL}\frac{db(0)}{d\xi} + 2\bar{B}(1)zn(0)\right] \\ & + \left[2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z)\right] + \left[\bar{N}(0)(\beta_{OL}z)\right] + \bar{N}(1)z + \bar{K}^*(0)s \\ & - \bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0)s + \bar{B}(0)24\bar{U}(4) - \bar{P}_0(k) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0)s + 2\bar{B}(1)\beta_{TL}s + \bar{K}^*(0)s - 2\bar{B}(1)z\beta_{TL}\frac{db(0)}{d\xi} \\ & + 2\bar{B}(1)zn(0) - 2\bar{B}(2)(\beta_{OL}z) \\ & + \bar{N}(0)(\beta_{OL}z) + \bar{N}(1)z - \bar{P}_0(k) = -\bar{B}(0)24\bar{U}(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left[\bar{\Lambda}^2\bar{Q}(0) - 2\bar{B}(1)\beta_{TL} - \bar{K}^*(0)\right]s \\ & - \left[2\bar{B}(1)\beta_{TL}\frac{db(0)}{d\xi} - 2\bar{B}(1)n(0) - 2\bar{B}(2)(\beta_{OL}) - \bar{N}(0)(\beta_{OL}) - \bar{N}(1)\right]z \\ & - \bar{P}_0(k) = -\bar{B}(0)24\bar{U}(4) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\left[ \frac{\bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{B}(1)\beta_{TL}}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{K}^*(0)}{24\bar{B}(0)} \right]_s$$

$$-\left[ \frac{\bar{B}(1)\beta_{TL}}{12\bar{B}(0)} \frac{db(0)}{d\xi} - \frac{\bar{B}(1)n(0)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{B}(2)(\beta_{oL})}{12\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(0)(\beta_{oL})}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(1)}{24\bar{B}(0)} \right]_z - \frac{\bar{P}_0(k)}{24\bar{B}(0)} = -\bar{U}(4)$$

จะได้ว่า

$$\bar{U}(4) = \left[ \frac{\beta_{TL}\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} + \frac{\bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{K}^*(0)}{24\bar{B}(0)} \right]_s$$

$$+ \left[ \frac{\beta_{oL}\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} \frac{db(0)}{d\xi} - \frac{n(0)\bar{B}(1)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\beta_{oL}\bar{B}(2)}{12\bar{B}(0)} - \frac{\beta_{oL}\bar{N}(0)}{24\bar{B}(0)} - \frac{\bar{N}(1)}{24\bar{B}(0)} \right]_z + \frac{\bar{P}_0(0)}{24\bar{B}(0)} \quad (50)$$

ทำขั้นตอนการเวียนเกิดแบบเดียวกัน  $m^*$  จะคำนวณได้ถึงพจน์  $m$  ของ  $\bar{U}(m)$  โดยถูกกำหนดจากสมการต่อไปนี้

$$m \leq m^* \quad (51)$$

โดยที่  $m^*$  เป็นกำลังที่สูงที่สุดในฟังก์ชันโหมดพจน์ที่  $i$  นอกจากนี้  $i$  จะถูกกำหนดโดย

$$\bar{\Lambda} \leq \Lambda_i \quad (52)$$

โดยที่  $\Lambda_i$  เป็นความถี่ธรรมชาติพจน์ที่  $i$

แทน  $\bar{U}(1) - \bar{U}(m)$  ในสมการ (31) และ (32)  $\bar{Y}$  จะถูกแทนที่ด้วย  $\bar{U}$  จะได้

$$f(s, z) = 0 \quad (53)$$

$$g(s, z) = 0 \quad (54)$$

แก้สมการ (53) และ (54) พร้อมกัน จะได้

$$s = s^* \quad (55)$$

$$z = z^* \quad (56)$$

โดยที่  $s^*$  และ  $z^*$  เป็นค่าคงที่ แทนสมการ (55) และ (56) ใน  $\bar{U}(1) - \bar{U}(m)$  และใช้สมการ (10) จะได้

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{U}^*(k) \quad (57)$$

โดยที่  $\bar{U}^*(k)$  คือ  $\bar{U}(k)$  มี  $s$  และ  $z$  ถูกแทนที่ด้วย  $s^*$  และ  $z^*$

โดย  $\xi = x/l$  จะได้

$$U(x) = u\left(\frac{x}{l}\right) \quad (58)$$

นอกจากนี้ ผลเฉลยสภาวะคงที่ของสมการ (11) แสดงได้ดังนี้

$$\psi(x, t) = U(x) (b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t) \quad (59)$$

วิธีการที่นำมาใช้ในส่วนนี้มีความเกี่ยวข้องกับการคำนวณมาก การคำนวณพีชคณิตเหล่านี้สามารถทำได้อย่างรวดเร็วโดยใช้ซอฟต์แวร์คำนวณเชิงสัญลักษณ์

## 2.2 การตรวจสอบและตัวอย่าง (Verification and example)

เพื่อแสดงให้เห็นถึงวิธีการที่นำมาใช้ในการศึกษานี้และเปรียบเทียบผลการคำนวณกับงานก่อนหน้า [3,6] ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนอิสระและบังคับของคานาหมุนที่มีความกว้างคงที่และความลึกที่แตกต่างกันเชิงเส้น คานาหมุนถูกตรึงที่  $x=0$  และคุณสมบัติของวัสดุและแรงกระตุ้นที่กระจายอยู่ในแนวขวางถูกกำหนดโดย

$$E(x)I(x) = E(0)I(0)\left(1 - 0.5\frac{x}{\ell}\right)^3 \quad (60)$$

$$\rho(x)A(x) = \rho(0)A(0)\left(1 - 0.5\frac{x}{\ell}\right) \quad (61)$$

$$P(x,t) = P_0^* \left[ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \right] \sin \bar{\omega}t \quad (62)$$

โดยที่  $E(x), I(x), \rho(x), A(x)$  เป็นโมดูลัสความยืดหยุ่น, โมเมนต์ความเฉื่อย, มวลต่อปริมาตรของหน่วยและพื้นที่ตัดขวางที่  $x=0$  ตามลำดับ ดังนั้น แรงเหวี่ยงคือ

$$N(x) = \int_x^l \rho(\xi)A(\xi)\Omega^2\xi d\xi \quad (63)$$

จากสมการ (61) จะได้ว่า  $\rho(x)A(x) = \rho(0)A(0)\left(1 - 0.5\frac{x}{\ell}\right)$  และใน  $x=\xi$  แทนในสมการ (63)

นั่นคือ

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_x^l \rho(0)A(0)\left(1 - 0.5\frac{\xi}{\ell}\right)\Omega^2\xi d\xi \\ &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \int_x^l \left(1 - 0.5\frac{\xi}{\ell}\right)\xi d\xi \end{aligned} \quad (63.1)$$

โดยที่  $\Omega$  คือความเร็วในการหมุน มีการศึกษากรณีสองกรณีคือการสั่นสะเทือนแบบอิสระและการสั่นสะเทือนแบบบังคับดังนี้

### 2.2.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration)

ใช้สมการ (60), (61), (63), (22) และ สมการ (23)

จากสมการ (23)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right] + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

แทนสมการ (60), (22) ใน (23) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \left(1 - 0.5 \frac{x}{l}\right)^3 \cdot \left(\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-N(x) \ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right) \right] \\ + y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (63.2)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} N(x) &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \int_x^l \left(1 - 0.5 \frac{\xi}{l}\right) \xi d\xi \\ &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \int_x^l \left(\xi - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{l}\right) d\xi \\ &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{l} \right) \Big|_{x=\xi}^l \\ &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left[ \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\ell^3}{l}\right) - \left(\frac{\xi^2 \ell^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3 \ell^3}{l}\right) \right] \\ &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left[ \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6} \ell^2\right) - \left(\frac{\xi^2 \ell^2}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 \ell^2\right) \right] \end{aligned} \quad (63.3)$$

นำสมการ (63.3) แทนในสมการ (63.2) นั่นคือ

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \left(1 - 0.5 \frac{x}{l}\right)^3 \cdot \left(\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0) A(0) \Omega^2 \left[ \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6} \ell^2\right) - \left(\frac{\xi^2 \ell^2}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 \ell^2\right) \right] \ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right) \right]$$

$$+ y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - 0.5\xi)^3 \cdot \left(\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0) A(0) \Omega^2 \left[ \left(\frac{\ell^4}{2} - \frac{1}{6} \ell^4\right) - \left(\frac{\xi^2 \ell^4}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 \ell^4\right) \right]}{E(0)I(0)} \cdot \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right) \right]$$

$$+ y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - 0.5\xi)^3 \cdot \left(\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0) A(0) \Omega^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right)^3 \ell^4}{E(0)I(0)} \cdot \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right) \right]$$

$$+ y(\xi) [k^*(\xi) - q(\xi) \cdot \Lambda^2] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \cdot \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \right]$$

$$+ y(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(x)A(x)}{\rho(0)A(0)} \cdot \Lambda^2 \right] = 0, \xi \in (0, \ell)$$

เนื่องจาก  $K^*(x) = 0$  เป็นค่าคงที่ ให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (64) เป็นจริง

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi) y(\xi) = 0, \xi \in (0, 1)$$

(64)

โดยที่

$$\alpha^2 = \frac{\rho(0)A(0)\Omega^2 \ell^4}{E(0)I(0)}$$

(65)

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (66) และ (67) โดยใช้เงื่อนไข (18)-(19)

$$\text{จากสมการ (18) } E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = K_{oL} \frac{dY(x)}{dx}$$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  นั่นคือ

$$E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{d(\xi\ell)^2} = K_{oL} \frac{dy(\xi)\ell}{d\xi\ell}$$

$$E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2 \ell} = K_{oL} \frac{dy(\xi)}{d\xi}$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \frac{K_{oL}\ell}{E(0)I(0)} \frac{dy(\xi)}{d\xi}$$

จาก  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$  และ  $\beta_{oL} = \frac{K_{oL}\ell}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22)

$$\text{จะได้ว่า } b(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \beta_{oL} \frac{dy(\xi)}{d\xi} \quad (18.1)$$

และจากสมการ (19)  $\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = -K_{TL} Y(x)$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$ ,  $x = \xi\ell$  และ  $N(x) = \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4$

จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = -K_{TL} y(\xi)\ell$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi \ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \frac{\rho(0)A(0)}{E(0)I(0)} \Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{-K_{TL}}{E(0)I(0)} y(\xi)\ell$$

โดยที่  $\alpha^2 = \frac{\rho(0)A(0)\Omega^2 \ell^4}{E(0)I(0)}$

นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi \ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{-K_{TL}}{E(0)I(0)} y(\xi)\ell$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{K_{TL}}{E(0)I(0)} y(\xi)\ell + \frac{d}{d\xi \ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{K_{TL}}{E(0)I(0)\ell^2} y(\xi)\ell^3 + \frac{d}{d\xi \ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\ell^2} \left[ \frac{K_{TL}}{E(0)I(0)} y(\xi)\ell^3 + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \right]$$

จาก  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$  และ  $\beta_{TL} = \frac{K_{TL}\ell^3}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22)

$$\text{จะได้ว่า } \alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\ell^2} \left[ \beta_{TL} y(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \right] \quad (19.1)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (18.1) และ (19.1) ที่  $\xi = 0$  มีสมการเงื่อนไขคือ สมการ (66) และ (67)

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (66)$$

$$y(\xi) = 0 \quad (67)$$

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (68) และ (69) โดยใช้เงื่อนไข (20)-(21)

$$\text{จากสมการ (20)} \quad E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} = -K_{OR} \frac{dY(x)}{dx}$$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$  และ  $x = \xi\ell$  นั่นคือ

$$E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)\ell}{d(\xi\ell)^2} = -K_{OR} \frac{dy(\xi)\ell}{d\xi\ell}$$

$$E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2 \ell} = -K_{OR} \frac{dy(\xi)}{d\xi}$$

นำ  $\frac{1}{E(\ell)I(\ell)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \frac{-K_{OR}\ell}{E(\ell)I(\ell)} \frac{dy(\xi)}{d\xi}$$

จาก  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$  และ  $\beta_{OR} = \frac{K_{OR}\ell}{E(\ell)I(\ell)}$  ในสมการ (22)

$$\text{จะได้ว่า } b(\xi) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = -\beta_{OR} \frac{dy(\xi)}{d\xi} \quad (20.1)$$

และจากสมการ (21)  $\frac{d}{dx} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] - N(x) \frac{dY(x)}{dx} = K_{TR} Y(x)$

แทน  $Y(x) = y(\xi)\ell$ ,  $x = \xi\ell$  และ  $N(x) = \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4$

จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi\ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = K_{TR} y(\xi)\ell$$

นำ  $\frac{1}{E(\ell)I(\ell)}$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi\ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \frac{\rho(0)A(0)}{E(\ell)I(\ell)} \Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{K_{TR}}{E(\ell)I(\ell)} y(\xi)\ell$$

โดยที่  $\alpha^2 = \frac{\rho(0)A(0)\Omega^2 \ell^4}{E(0)I(0)}$

นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi\ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \left[ \alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{K_{TR}}{E(\ell)I(\ell)} y(\xi)\ell$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{-K_{TR}}{E(\ell)I(\ell)} y(\xi)\ell + \frac{d}{d\xi\ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right]$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{-K_{TR}}{E(\ell)I(\ell)\ell^2} y(\xi)\ell^3 + \frac{d}{d\xi\ell^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} \right]$$

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\ell^2} \left[ \frac{-K_{TR}}{E(\ell)I(\ell)} y(\xi)\ell^3 + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(\ell)I(\ell)} \frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} \right] \right]$$

จาก  $b(\xi) = \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)}$  และ  $\beta_{TR} = \frac{K_{TR}\ell^3}{E(\ell)I(\ell)}$  ในสมการ (22)

$$\text{จะได้ว่า } \alpha^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\ell^2} \left[ \beta_{TR} y(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left[ b(\xi) \frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} \right] \right] \quad (21.1)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (20.1) และ (21.1) ที่  $\xi=1$  มีสมการเงื่อนไขคือ สมการ (68) และ (69)

$$\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{d^3y(\xi)}{d\xi^3} = 0 \quad (69)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (64) โดยตรงหรือโดยสมการ (28) จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{Y}(r+4) \\ & + 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{Y}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{Y}(r+1) = \sum_{r=0}^k \lambda \bar{Q}(k-r)\bar{Y}(r) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\text{โดยที่ } \bar{B}(k) = \delta(k) - \frac{3}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{4}\delta(k-2) - \frac{1}{8}\delta(k-3),$$

$$\bar{N}(k) = \left[ \frac{1}{3}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) + \frac{1}{6}\delta(k-3) \right] \alpha^2 \text{ และ } \bar{Q}(k) = \delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-1)$$

หรือใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (64)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi) y(\xi) = 0, \quad \xi \in (0,1)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} + \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} (3)(1-0.5\xi)^2 (-0.5) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dy(\xi)}{d\xi} (3) \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^2 \left( -\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \\ & - \Lambda^2 (1-0.5\xi) y(\xi) = 0, \quad \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} (1-0.5\xi)^2 (-1.5) \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} (1-0.5\xi) (1.5) + (-1.5) (1-0.5\xi)^2 \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{dy(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] \\ & - \Lambda^2 (1-0.5\xi) y(\xi) = 0, \quad \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3) \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} (-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \\ & + \left( \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} (1.5-0.75\xi) + (-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} \right) \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{dy(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] \\ & - \Lambda^2 (1-0.5\xi) y(\xi) = 0, \quad \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3)\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}+2\frac{d^3y(\xi)}{d\xi^3}(-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \\
& +\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}(1.5-0.75\xi) \\
& -\alpha^2\left[\left(\frac{1}{27}-\frac{\xi^2}{6}+\frac{\xi^3}{18}+\frac{\xi^4}{4}-\frac{\xi^5}{6}+\frac{\xi^6}{72}+\frac{\xi^4}{8}-\frac{\xi^5}{24}+\frac{\xi^6}{216}\right)\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}\right. \\
& \left.+\frac{dy(\xi)}{d\xi}\left(-\frac{\xi}{3}+\frac{\xi^2}{6}+\xi^3-\frac{5\xi^4}{6}-\frac{7\xi^5}{12}+\frac{7\xi^6}{8}-\frac{\xi^7}{3}+\frac{\xi^8}{24}\right)\right] \\
& -\Lambda^2(1-0.5\xi)y(\xi)=0, \xi \in (0,1)
\end{aligned}$$

ให้  $b(\xi) = (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3)$ ,  $n(\xi) = \left(\frac{1}{3}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{6}\right)^3 \alpha^2$ ,  $q(\xi) = (1-0.5\xi)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \left[2\frac{d}{d\xi}b(\xi)\left(\frac{d^3y(\xi)}{d\xi^3}\right)\right] + \left[b(\xi)\cdot\left(\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}\right) + \left(\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}b(\xi)\right] \\
& - \left[n(\xi)\cdot\left(\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}\right) + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)\frac{d}{d\xi}n(\xi)\right] - [q(\xi)y(\xi)\cdot\lambda] = 0, \xi \in (0,1)
\end{aligned}$$

กำหนดให้  $z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}$ ,  $p(\xi) = \frac{d^2b(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $L(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$ ,  $s(\xi) = \frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $w(\xi) = \frac{d^3y(\xi)}{d\xi^3}$ ,

$r(\xi) = \frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}$ ,  $m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& [2z(\xi)\cdot w(\xi)] + [b(\xi)\cdot r(\xi) + s(\xi)\cdot p(\xi)] - [n(\xi)\cdot s(\xi) + l(\xi)\cdot m(\xi)] \\
& - q(\xi)y(\xi)\cdot\lambda = 0, \xi \in (0,1)
\end{aligned}$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r)\bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)\bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r)\bar{S}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)\bar{S}(r) \\
& - \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r)\bar{L}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r)\bar{Y}(r)\cdot\lambda = 0
\end{aligned}$$

จากสมการ (5),(6) และ (7)

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{Y}(r+3) \\
& + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{Y}(r+4) \\
& + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\
& - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{Y}(r+1) \\
& = \sum_{r=0}^k \lambda\bar{Q}(k-r)\bar{Y}(r)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{Y}(r+4) \\
 & + 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{Y}(r+3) \\
 & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) \\
 & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{Y}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{Y}(r+1) \\
 & = \sum_{r=0}^k \lambda \bar{Q}(k-r)\bar{Y}(r)
 \end{aligned} \tag{64.1}$$

โดยที่  $\bar{B}(k) = \delta(k) - \frac{3}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{4}\delta(k-2) - \frac{1}{8}\delta(k-3)$ ,

$$\bar{N}(k) = \left[ \frac{1}{3}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) + \frac{1}{6}\delta(k-3) \right] \alpha^2 \text{ และ } \bar{Q}(k) = \delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-1)$$

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (71) และ (72) โดยใช้สมการ (1)

จากสมการ (67)  $y(\xi) = 0$

$$\text{และจากสมการ (1) } \bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0}$$

$$\text{แทน } k=0 \text{ นั่นคือ } \bar{Y}(0) = \frac{1}{0!} \left[ \frac{d^0 y(\xi)}{d\xi^0} \right]_{\xi=0} = [y(\xi)]_{\xi=0}$$

$$\text{จากสมการ (67) จะได้ว่า } \bar{Y}(0) = 0$$

$$\text{และจากสมการ (66) } \frac{dy(\xi)}{d\xi} = 0$$

$$\text{และจากสมการ (1) } \bar{Y}(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0}$$

$$\text{แทน } k=1 \text{ นั่นคือ } \bar{Y}(1) = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d^1 y(\xi)}{d\xi^1} \right]_{\xi=0} = \left[ \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=0}$$

$$\text{จากสมการ (66) จะได้ว่า } \bar{Y}(1) = 0$$

ต่อไปนี้จะแสดงที่มาของเงื่อนไขขอบเขต (73) และ (74) โดยใช้สมการ (10)

$$\text{จากสมการ (10) } y(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k) \text{ แทนในสมการ (68)}$$

$$\text{จากสมการ (68) } \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = 0 \text{ นั่นคือ}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi^2} &= 0 \\ \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) \frac{d^2 \xi^k}{d\xi^2} &= 0\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^m k(k-1) \bar{Y}(k) = 0 \quad (73)$$

และจากสมการ (10)  $y(\xi) = \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)$  แทนในสมการ (69)

เนื่องจากสมการ (69)  $\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} = 0$  นั่นคือ

$$\begin{aligned}\frac{d^3 y(\xi)}{d\xi^3} &= 0 \\ \frac{d^3 \sum_{k=0}^m \xi^k \bar{Y}(k)}{d\xi^3} &= 0 \\ \sum_{k=0}^m \bar{Y}(k) \frac{d^3 \xi^k}{d\xi^3} &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=0}^m k(k-1)(k-2) \bar{Y}(k) = 0 \quad (74)$$

ตั้งค่า  $\alpha = 5$  และหาความถี่ธรรมชาติแบบไม่มีมิติและรูปแบบโหมดของการแสดงผลครึ่งแรก การคำนวณและผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับ  $m = 20$  ถูกกำหนดโดย

ให้

$$\bar{Y}(2) = s \quad (75)$$

$$\bar{Y}(3) = z \quad (76)$$

แทนสมการ (71), (72), (75) และ (76) และ  $k = 0$  ในสมการ (64.1) จะได้

$$Y(4) = \frac{41s}{72} + \frac{3z}{4} \quad (77)$$

แทนสมการ (71), (72), (75)-(77) และ  $k = 1$  ในสมการ (64.1) จะได้

$$Y(5) = \frac{21s}{40} + \frac{13z}{15} \quad (78)$$

แทนสมการ (71), (72), (75)-(78) และ  $k = 2$  ในสมการ (64.1) จะได้

$$Y(6) = \frac{2835z + s(985 + 9\lambda)}{3240} \quad (79)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำตามขั้นตอนการเวียนเกิดเดียวกัน เราคำนวณได้ถึงระยะเวลาเทอม  $\bar{Y}(m)$  พจน์ที่ 20  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  ในสมการ (73) และ (74) และใช้สมการ (39) จะมีสมการความถี่ดังนี้

$$6062.47 - 150.753\lambda + 0.383\lambda^2 - 2.159 \times 10^{-4}\lambda^3 + 4.742 \times 10^{-8}\lambda^4 - 5.796 \times 10^{-12}\lambda^5 + 3.939 \times 10^{-16}\lambda^6 - 9.330 \times 10^{-21}\lambda^7 + 1.777 \times 10^{-26}\lambda^8 = 0 \quad (80)$$

แก้สมการ (80) กับ  $\lambda = \Lambda^2$  และรากสมมติเรามีรากที่แท้จริงสามตัวแรก

$$\Lambda_1^{(20)} = 6.7306 \quad (81)$$

$$\Lambda_2^{(20)} = 21.770 \quad (82)$$

$$\Lambda_3^{(20)} = 51.1294 \quad (83)$$

เมื่อ  $n = 19$  โดยวิธีเดียวกับวิธี  $n = 20$  จะได้

$$\Lambda_1^{(19)} = 6.7314 \quad (84)$$

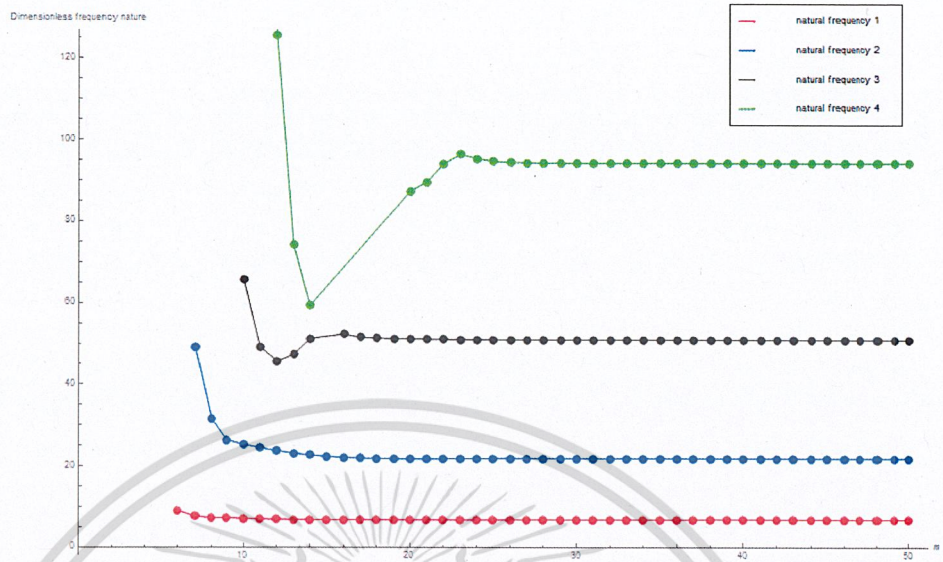
จากสมการ (81) และ (84) จะได้

$$|\Lambda_1^{(20)} - \Lambda_1^{(19)}| = 0.0008 \leq \varepsilon \quad (85)$$

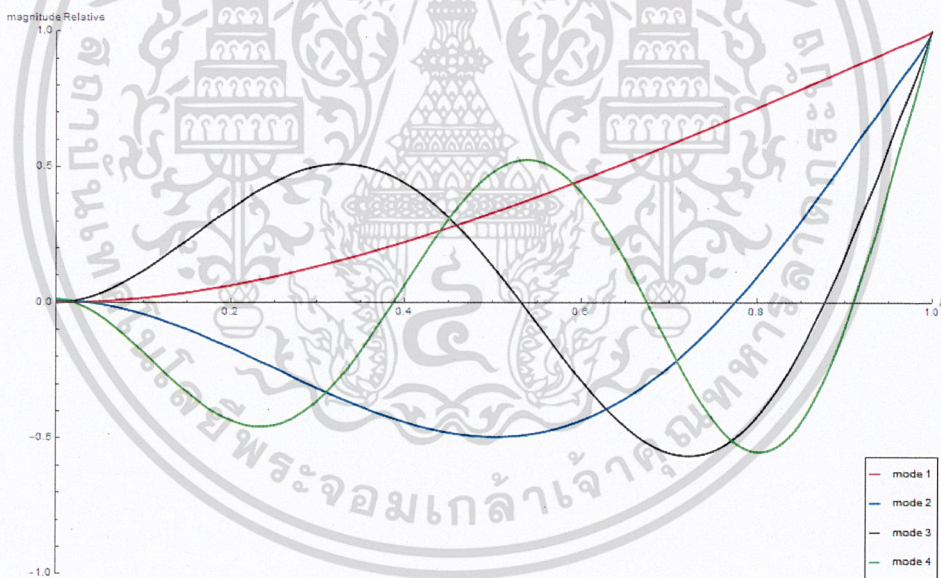
โดยที่  $\varepsilon$  เป็นค่าเล็กๆ ที่เราตั้งไว้จากสมการ (85) จะได้  $\Lambda_1 = 6.7306$  กับ  $\Lambda_1$  เป็นความถี่ธรรมชาติแรก ไม่มีมิติ แทน  $\Lambda_1$  และ  $z = cs$  ใน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  และใช้สมการ (43) จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรมแบบพหุคูณพีดีของรูปแบบโหมดแรก

$$y_1(\xi) = s(\xi^2 - 0.5633\xi^3 + 0.1470\xi^4 + 0.0368\xi^5 - 0.0630\xi^6 + 0.0148\xi^7 + 0.0030\xi^8 - 0.0048\xi^9 + 0.0008\xi^{10} + 0.0006\xi^{11} + 0.0001\xi^{12} + 0.0003\xi^{13} + 0.0002\xi^{14} + 0.0001\xi^{15} + 0.0001\xi^{16} + 0.0001\xi^{17} + 2.5066 \times 10^{-5}\xi^{18} + 9.4812 \times 10^{-6}\xi^{19} + 1.5263 \times 10^{-6}\xi^{20}) \quad (86)$$

ตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ข้างต้นสามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบโหมดได้ในรูปที่ 2.2 เมื่อเพิ่มพจน์ของ  $m$  ความถี่ธรรมชาติ  $\Lambda_1 - \Lambda_4$  จะลู่เข้าสู่ 6.7434, 21.9053, 50.9338, 94.2064 อย่างรวดเร็วแบบ 1 ต่อ 1 โดยไม่มีความผิดพลาดของถี่ใดๆ ( $\varepsilon = 0.0001$ ) ความถี่ธรรมชาติที่สมบูรณ์นำไปสู่การลู่เข้าของรูปแบบโหมดอย่างถูกต้องซึ่งจะแสดงในรูปที่ 2.3 อย่างไรก็ตามหากไม่เลือกฟังก์ชันที่ยอมรับครบถ้วนและถูกต้องอาจทำให้เกิดการผิดพลาดของรูปร่างโหมด โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการหารูปร่างโหมดที่สูงขึ้น [4] ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน อาจเกิดขึ้นได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เนื่องจากไม่ได้ปรับแต่งความละเอียดของตาข่ายหรือไม่เลือกฟังก์ชันการแก้ไขที่ถูกต้องสุดท้ายผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ ( $\alpha = 0, 2, 5$  และ 10) สอดคล้องกับงานก่อนหน้าที่ [3,6] แสดงในตารางที่ 2.1.1



รูปที่ 2.2 การดูเข้าของความถี่ธรรมชาติไม่มีมิติที่ 1, 2, 3 และ 4



รูปที่ 2.3 รูปแบบโหมด 1, 2, 3 และ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1.1 ความถี่สามโหมดแรกที่ไม่มีมิติของคาน

$$E(x)I(x) = E(0)I(0)(1 - 0.5x/\ell)^3 \text{ และ } \rho(x)A(x) = \rho(0)A(0)(1 - 0.5x/\ell)^3$$

$\alpha$	$m$	$\Lambda_1$		$\Lambda_2$		$\Lambda_3$	
		Present	Lee's result <sup>a</sup>	Present	Lee's result <sup>a</sup>	Present	Lee's result <sup>a</sup>
0	20	3.8281	3.8286	18.3753	18.3758	47.4212	47.4212
	40	3.8238	3.8237	18.3173	18.3172	47.2649	47.2648
	60	3.8238	3.8238	18.3173	18.3172	47.2648	47.2648
		3.8238 <sup>b</sup>		18.3173 <sup>b</sup>		47.2648 <sup>b</sup>	
2	20	4.4360	4.4360	18.9663	18.9663	48.1265	48.1265
	40	4.4388	4.4368	18.9366	18.9366	47.8716	47.8717
	60	4.4368	4.4368	18.9366	18.9366	47.8716	47.8717
		4.4368 <sup>b</sup>		18.9366 <sup>b</sup>		47.8716 <sup>b</sup>	
5	20	6.7306	6.7306	21.7700	21.7700	51.1294	51.1294
	40	6.7434	6.7435	21.9054	21.9053	50.9338	50.9338
	60	6.7434	6.7434	21.9053	21.9053	50.9338	50.9338
		6.7345 <sup>b</sup>		21.9053 <sup>b</sup>		50.9338 <sup>b</sup>	
10	20	11.5035	11.5034	30.0206	30.0206	59.7326	59.7326
	40	11.5016	11.5016	30.1856	30.1855	60.5681	60.5681
	60	11.5016	11.5016	30.1827	30.1828	60.5639	60.5639
		11.5015 <sup>b</sup>		30.1827 <sup>b</sup>		60.5639 <sup>b</sup>	

<sup>b</sup> The results given by Hodges et al. (1981)

<sup>a</sup> The results given by Lee et al. (1992)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2.2 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Forced vibration)

ในการพิจารณาแรงสั่นสะเทือนแบบบังคับ กำหนดให้แรงกระตุ้นแบบฮาร์มอนิกเกิดจากคลื่น

$$\text{ตามขวาง คือ } P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$$

ผลเฉลยในสภาวะการแก้ปัญหาสมการของสภาวะคงที่ของสมการ (11) จะถูกแสดงโดย

$$V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t \quad \text{โดยที่ } \bar{\omega} \text{ คือความถี่กระตุ้น}$$

เนื่องจาก  $V(x,t)$  มีค่าที่สอดคล้องกับค่า  $P(x,t)$

จากสมการ (11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x)I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x)V(x,t) \\ + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\text{แทน } V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x) \sin \bar{\omega} t}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x)A(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x)A(x)U(x) \frac{d^2 \sin \bar{\omega} t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega} \frac{d \cos \bar{\omega} t}{dt} = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega} t - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

เนื่องจากการสันแบบบังคับ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega} t - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t, x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^5 \right], x \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (86.1)$$

จาก  $U(x) = u(\xi)\ell$ ,  $\xi = \frac{x}{\ell}$  และ  $P_0^*(x) = \frac{P_0^*(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}$  ในสมการ (47)

แทนในสมการ (86.1)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right] \\ & + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell \bar{\omega}^2 \\ & = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^4 - (\xi)^5 \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (86.2)$$

พิจารณาสมการ (86.2) พจน์  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right]$  แทน  $x = \xi\ell$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{d\xi \ell} \right]$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2 \ell} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & + u(\xi) \left[ K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell \bar{\omega}^2 \right] = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^4 - (\xi)^5 \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^3} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)}{\ell} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) [K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2] = \frac{P_0^* [(\xi)^4 - (\xi)^5] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  และ  $\ell^3$  คูณทั้งสองข้างของสมการ นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(x)A(x)\ell^4\omega^2}{E(0)I(0)} \right] = P_0^* [(\xi)^4 - (\xi)^5], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(0)A(0)\rho(x)A(x)\ell^4\omega^2}{\rho(0)A(0)E(0)I(0)} \right] \\ & = P_0^* [(\xi)^4 - (\xi)^5], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จากสมการ (60), (61), (63.1),  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)}$  และ  $\bar{\Lambda}^2 = \frac{\rho(0)A(0)\omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$  ในสมการ (22)

และ (47) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & + [k^*(\xi) - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi)] u(\xi) = P_0^* [(\xi)^4 - (\xi)^5], \xi \in (0, 1) \end{aligned} \quad (86.3)$$

พิจารณาสมการ (63.1) เนื่องจาก

$$\begin{aligned} N(x) &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \int_x^l \left(1-0.5\frac{\xi}{\ell}\right) \xi d\xi \\ &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \int_x^l \left(\xi - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\ell}\right) d\xi \\ &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{\xi^3}{\ell} \right) \Big|_{x=\xi}^l \\ &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{\ell^3}{\ell} \right) - \left( \frac{\xi^2\ell^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{\xi^3\ell^3}{\ell} \right) \right] \\ &= \rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6}\ell^2 \right) - \left( \frac{\xi^2\ell^2}{2} - \frac{1}{6}\xi^3\ell^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (86.4)$$

นำสมการ (86.4) แทนในสมการ (86.3) นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \cdot \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] \\ & + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^4}{2} - \frac{1}{6}\ell^4 \right) - \left( \frac{\xi^2\ell^4}{2} - \frac{1}{6}\xi^3\ell^4 \right) \right]}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1-0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ (\xi)^4 - (\xi)^5 \right], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \cdot \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right) \ell^4}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1-0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ \xi^4 - \xi^5 \right], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $K^*(x) = 0$  เป็นค่าคงที่ ให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (87) เป็นจริง  
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right) \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ \xi^4 - \xi^5 \right], \xi \in (0, 1) \end{aligned} \quad (87)$$

โดยที่  $\alpha^2 = \frac{\rho(0)A(0)\Omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$

การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (87) โดยตรงหรือตามสมการ (49) จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{U}(r+4) \\ & + 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{U}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) + \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{U}(r+1) - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 Q(k-r)\bar{U}(r) = \bar{P}_0(k) \end{aligned} \quad (88)$$

โดยที่  $\bar{P}_0(k) = P_0^* [\delta(k-4) - \delta(k-5)]$  โดยให้  $P_0^* = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (87)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi) u(\xi) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0,1)$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} + \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (3)(1-0.5\xi)^2 (-0.5) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + \frac{du(\xi)}{d\xi} (3) \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^2 \left( -\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \\ & - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi) u(\xi) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (1-0.5\xi)^2 (-1.5) \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1-0.5\xi) (1.5) + (-1.5)(1-0.5\xi)^2 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] \\ & - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi) u(\xi) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (1-1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \right. \\ & \left. + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1.5 - 0.75\xi) + (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] \\ & - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi) u(\xi) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left( 1 - 1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3 \right) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + 2 \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \\ & + \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1.5 - 0.75\xi) \end{aligned} \right] \\ -\alpha^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \end{aligned} \right] \\ -\bar{\Lambda}^2 (1 - 0.5\xi) u(\xi) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0, 1)$$

ให้  $b(\xi) = (1 - 1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3)$ ,  $n(\xi) = \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right) \alpha^2$ ,  $q(\xi) = (1 - 0.5\xi)$

จะได้ว่า

$$\left[ \begin{aligned} & 2 \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] \\ & - \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] - \left[ q(\xi) u(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0, 1) \end{aligned} \right]$$

กำหนดให้  $z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}$ ,  $p(\xi) = \frac{d^2 b(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $L(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}$ ,  $s(\xi) = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $w(\xi) = \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3}$ ,

$r(\xi) = \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4}$ ,  $m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$  จะได้ว่า

$$\left[ \begin{aligned} & [2z(\xi) \cdot w(\xi)] + [b(\xi) \cdot r(\xi) + s(\xi) \cdot p(\xi)] - [n(\xi) \cdot s(\xi) + l(\xi) \cdot m(\xi)] \\ & - q(\xi) u(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 = P_0^* (\xi^4 - \xi^5), \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \right]$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r) \bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) \bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r) \bar{S}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) \bar{S}(r) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r) \bar{L}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) \cdot \bar{\Lambda}^2 = P_0^* (\xi^4 - \xi^5) \end{aligned}$$

จากสมการ (5), (6) และ (7)

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1) (r+1) (r+2) (r+3) \bar{U}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) (r+1) (r+2) (r+3) (r+4) \bar{U}(r+4) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1) (k-r+2) \bar{B}(k-r+2) (r+1) (r+2) \bar{U}(r+2) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) (r+1) (r+2) \bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1) (r+1) \bar{U}(r+1) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = P_0^* (\xi^4 - \xi^5) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{U}(r+4) \\
 & + 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{U}(r+3) \\
 & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) \\
 & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{U}(r+1) \\
 & - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r)\bar{U}(r) = \bar{P}_0(k)
 \end{aligned} \tag{87.1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยที่ } \bar{B}(k) &= \delta(k) - \frac{3}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{4}\delta(k-2) - \frac{1}{8}\delta(k-3), \\
 \bar{N}(k) &= \left[ \frac{1}{3}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) + \frac{1}{6}\delta(k-3) \right] \alpha^2 \text{ และ } \bar{Q}(k) = \delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-1) \\
 \bar{P}_0(k) &= P_0^* [\delta(k-4) - \delta(k-5)] \text{ โดยให้ } P_0^* = 1
 \end{aligned}$$

การตั้งค่า  $\alpha=5$  และ  $\bar{\Lambda}=6.0$  และ  $m=20$  โดยใช้สมการ (51) และ (52) ,  $u(\xi)$  คือถูกหาผลเฉลยเพื่อการสาริตโดยทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ในสมการ (33)-(36) แล้วแทน  $\bar{U}(0), \bar{U}(1), \bar{U}(2), \bar{U}(3)$  และ  $k=0$  ในสมการ (88) จะได้

$$\bar{U}(4) = \frac{1}{72}(41s + 54z) \tag{89}$$

ตามขั้นตอนการเวียนเกิดซ้ำเหมือนกันเรากำหนดถึงพจน์ที่ 20 ของ  $\bar{U}(20)$  และแทน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  แทนในสมการ (31) และ (32)  $\bar{Y}$  จะถูกแทนที่ด้วย  $\bar{U}$  จะได้

$$84.1416s + 157.114z = -0.09354 \tag{90}$$

$$355.361s + 676.886z = -0.59386 \tag{91}$$

แก้สมการ (90) และ (91) แล้วแทนผลที่ได้ใน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  และใช้สมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= 0.02672\xi^2 - 0.01491\xi^3 + 0.00404\xi^4 + 0.00111\xi^5 \\
 & - 0.00225\xi^6 + 0.00007\xi^7 + 0.00038\xi^8 - 0.00004\xi^9 \\
 & + 0.00006\xi^{10} + 0.00006\xi^{11} + 0.00002\xi^{12} + 0.00001\xi^{13} \\
 & + 0.07769 \times 10^{-5} \xi^{14} - 0.30786 \times 10^{-5} \xi^{15} - 0.38554 \times 10^{-5} \xi^{16} \\
 & - 0.34149 \times 10^{-5} \xi^{17} - 0.26109 \times 10^{-5} \xi^{18} - 0.17828 \times 10^{-5} \xi^{19} \\
 & - 0.11089 \times 10^{-5} \xi^{20}
 \end{aligned} \tag{92}$$

ตามขั้นตอนที่แสดงไว้ข้างต้นเส้นโค้งตอบสนองที่ปลายคานจะได้ตามที่ระบุไว้ในรูปที่ 2.4 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติเข้าใกล้ความถี่ที่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติของคาน การตอบสนองจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและกลายเป็นอนันต์เมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ



รูปที่ 2.4 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย

$$P(x, t) = P_0 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right] \sin \omega t$$

### 2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กนกวรรณ ปานช่วย, กมลทิพย์ งามอายุทจนกร และจุฑารัตน์ พิมพ์สุด [10] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าผลเฉลย ของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์ซึ่งเป็นปัญหาค่าเงาเงงด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ โดยแสดงตัวอย่างของแต่ละปัญหาภายใต้เงื่อนไขขอบที่มีสัมประสิทธิ์แตกต่างกันและแสดงฟังก์ชันเงาเงงและค่าเงาเงงในรูปของกราฟ โดยภาพรวม เราพบว่าผลลัพธ์ที่หาได้มีค่าใกล้เคียงเป็นจุดๆ กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

บุญญาพร เกิดผล [11] ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนาทฤษฎีวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ เพื่อนำมาใช้หาผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลอันดับ  $V$  และสมการเลอจองด์อันดับ  $\alpha$  และเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำโดยหาค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณและใช้กราฟซึ่งการหาผลเฉลยแม่นยำของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์หาจากวิธีของโพเรเบนอุสและวิธีอนุกรมกำลังตามลำดับ ผลเฉลยที่ได้ด้วยวิธีนี้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังมีค่าเช่นเดียวกับผลเฉลยแม่นยำ โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นี้มีขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายกว่าและได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องแม่นยำ

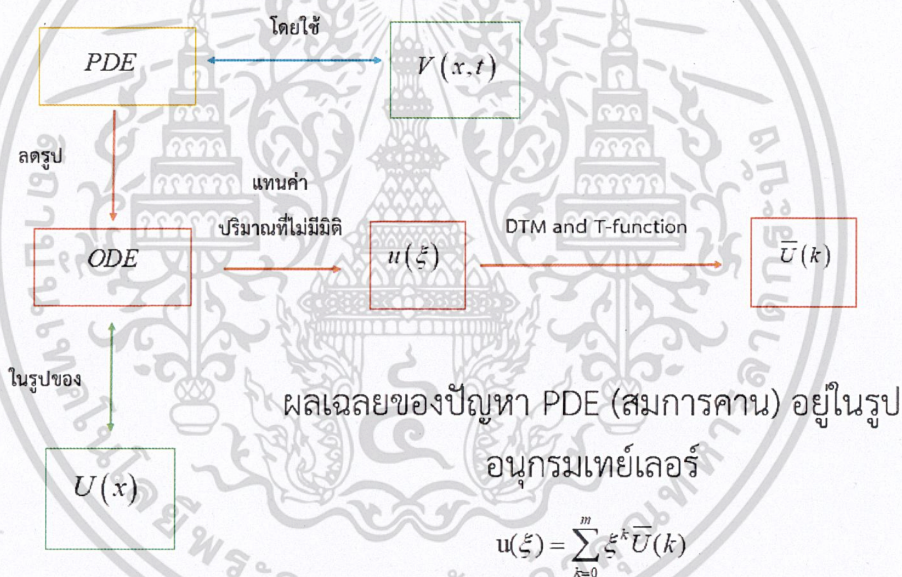
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

#### วิธีการดำเนินงานวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการแนะนำการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาการสั้นสะท้อนที่เป็นอิสระและแบบบังคับของคานไม่เอกรูป ประกอบด้วยสี่ขั้นตอนหลัก

1. แปลงสมการการสั้นของคานไม่เอกรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. จัดรูปสมการ ODE ให้อยู่ในรูปแบบที่ไม่มีมิติโดยแทนค่าปริมาณที่ไม่มีมิติลงในสมการ
3. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีมิติโดยใช้ DTM และ T-function เป็นสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิด (recursive algebraic equation)
4. จากสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิด (recursive algebraic equation) นำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยของปัญหาสมการการสั้นของคาน



รูปที่ 3.1 แผนภาพการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อนำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยของปัญหาสมการการสั้นของคาน

งานวิจัยฉบับนี้ ได้ศึกษานิยาม ทฤษฎีบท รวมถึงคุณสมบัติที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อจะพิจารณาแรงภายนอก  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$  และ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$  ที่มีค่าใกล้เคียงกับ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$  เพื่อหาอนุกรมผลเฉลยของรูปแบบปิดของรูปร่างโหมดมีค่าใกล้เคียงมากที่สุด

### ตัวอย่างที่ 3.1

ในการพิจารณาแรงสั่นสะเทือนแบบบังคับ กำหนดให้แรงกระตุ้นแบบฮาร์มอนิกเกิดจากคลื่นตามขวาง คือ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$

การแก้ปัญหасวมการในสภาวะคงที่ของสมการ (11) จะถูกแสดงโดย  $V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t$  โดยที่  $\bar{\omega}$  คือความถี่กระตุ้น

เนื่องจาก  $V(x,t)$  มีค่าที่สอดคล้องกับค่า  $P(x,t)$

จากสมการ (11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x) V(x,t) + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

แทน  $V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) I(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x) \sin \bar{\omega} t}{dx} \right] + K^*(x) U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x) A(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] + K^*(x) U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x) A(x) U(x) \frac{d^2 \sin \bar{\omega} t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) I(x) \sin \bar{\omega} t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega} t \frac{dU(x)}{dx} \right] + K^*(x) U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x) A(x) U(x) \bar{\omega} \frac{d \cos \bar{\omega} t}{dt} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)\sin \bar{\omega}t \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)\sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x)\sin \bar{\omega}t - \rho(x)A(x)U(x)\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t = P(x,t), x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

เนื่องจากการสั่นแบบบังคับ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega}t$  นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x)\sin \bar{\omega}t \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x)\sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x)\sin \bar{\omega}t - \rho(x)A(x)U(x)\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \\ & = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega}t, x \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ & + K^*(x)U(x) - \rho(x)A(x)U(x)\bar{\omega}^2 \\ & = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right], x \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (93)$$

เนื่องจาก  $U(x) = u(\xi)\ell$ ,  $\xi = \frac{x}{\ell}$  และ  $P_0(x) = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}$  ในสมการ (47) แทนใน

สมการ (93)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right] \\ & + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\bar{\omega}^2 \\ & = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (94)$$

พิจารณาสมการ (94) พจน์  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right]$  แทน  $x = \xi\ell$

จะได้ว่า  $\frac{d^2}{d\xi^2\ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2u(\xi)\ell}{d\xi^2\ell^2} \right] - \frac{d}{d\xi\ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{d\xi\ell} \right]$

นั่นคือ

$$\frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x) I(x) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2 \ell} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + u(\xi) [K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2] = \frac{P_0^* [(\xi)^9 - (\xi)^{10}] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ E(x) I(x) \frac{1}{\ell^3} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)}{\ell} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ + u(\xi) [K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\omega^2] = \frac{P_0^* [(\xi)^9 - (\xi)^{10}] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell)$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  และ  $\ell^3$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ + u(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(0)A(0)\rho(x)A(x)\ell^4\omega^2}{\rho(0)A(0)E(0)I(0)} \right] = P_0^* [(\xi)^9 - (\xi)^{10}], \xi \in (0, \ell)$$

จากสมการ (60), (61), (63.1),  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)}$  และ  $\bar{\Lambda}^2 = \frac{\rho(0)A(0)\omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ + [k^*(\xi) - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi)] u(\xi) = P_0^* [(\xi)^9 - (\xi)^{10}], \xi \in (0, 1) \quad (95)$$

พิจารณาสมการ (63.1) เนื่องจาก

$$N(x) = \rho(0)A(0)\Omega^2 \int_x^l \left( 1 - 0.5 \frac{\xi}{\ell} \right) \xi d\xi \\ = \rho(0)A(0)\Omega^2 \int_x^l \left( \xi - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\ell} \right) d\xi \\ = \rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{\ell} \right) \Big|_{x=\xi}^l \\ = \rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\ell^3}{\ell} \right) - \left( \frac{\xi^2 \ell^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3 \ell^3}{\ell} \right) \right] \\ = \rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^2}{2} - \frac{1}{6} \ell^2 \right) - \left( \frac{\xi^2 \ell^2}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 \ell^2 \right) \right] \quad (96)$$

นำสมการ (96) แทนในสมการ (95) นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \cdot \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] \\ & + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0)A(0)\Omega^2 \left[ \left( \frac{\ell^4}{2} - \frac{1}{6}\ell^4 \right) - \left( \frac{\xi^2\ell^4}{2} - \frac{1}{6}\xi^3\ell^4 \right) \right]}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1-0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \cdot \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0)A(0)\Omega^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \ell^4}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1-0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $K^*(x) = 0$  เป็นค่าคงที่ ให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (97) เป็นจริง

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0, 1) \end{aligned} \quad (97)$$

โดยที่  $\alpha^2 = \frac{\rho(0)A(0)\Omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (97)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0, 1) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} + \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} (3)(1-0.5\xi)^2 (-0.5) \right] \\ & - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} + \frac{du(\xi)}{d\xi} (3) \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^2 \left( -\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] \\ & - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0, 1) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[ \begin{aligned} & (1-0.5\xi)^3 \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (1-0.5\xi)^2 (-1.5) \\ & + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1-0.5\xi)(1.5) + (-1.5)(1-0.5\xi)^2 \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \end{aligned} \right] \\ -\alpha^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \end{aligned} \right] \\ -\Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0,1) \end{array}$$

$$\left[ \begin{aligned} & (1-1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \\ & + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1.5 - 0.75\xi) + (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \end{aligned} \right] \\ -\alpha^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \end{aligned} \right] \\ -\Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0,1) \end{array}$$

$$\left[ \begin{aligned} & (1-1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} + 2 \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5 + 1.5\xi - 0.375\xi^2) \\ & + \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} (1.5 - 0.75\xi) \end{aligned} \right] \\ -\alpha^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \end{aligned} \right] \\ -\Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^9 - (\xi)^{10} \right], \xi \in (0,1) \end{array}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ให้ } b(\xi) = (1 - 1.5\xi + 0.75\xi^2 - 0.125\xi^3), n(\xi) = \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right)^3 \alpha^2, q(\xi) = (1 - 0.5\xi)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[ 2 \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right] \\ & - \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] - [q(\xi)u(\xi) \cdot \lambda] \\ & = P_0^* [(\xi)^9 - (\xi)^{10}], \xi \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{กำหนดให้ } z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}, p(\xi) = \frac{d^2 b(\xi)}{d\xi^2}, l(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}, s(\xi) = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}, w(\xi) = \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3},$$

$$r(\xi) = \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4}, m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\begin{aligned} & [2z(\xi) \cdot w(\xi)] + [b(\xi) \cdot r(\xi) + s(\xi) \cdot p(\xi)] = [n(\xi) \cdot s(\xi) + l(\xi) \cdot m(\xi)] \\ & - q(\xi)u(\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 = P_0^* (\xi^9 - \xi^{10}), \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r) \bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) \bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r) \bar{S}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) \bar{S}(r) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r) \bar{L}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) \cdot \bar{\Lambda}^2 = P_0^* (\xi^9 - \xi^{10}) \end{aligned}$$

จากสมการ (5), (6) และ (7)

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1) (r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) (r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2) (r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) (r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1) (r+1) \bar{U}(r+1) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = P_0^* (\xi^9 - \xi^{10}) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)\bar{U}(r+4) \\
 & + 2\sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3)\bar{U}(r+3) \\
 & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2)\bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) \\
 & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2)\bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1)\bar{N}(k-r+1)(r+1)\bar{U}(r+1) \\
 & - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r)\bar{U}(r) = \bar{P}_0(k)
 \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยที่ } \bar{B}(k) &= \delta(k) - \frac{3}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{4}\delta(k-2) - \frac{1}{8}\delta(k-3), \\
 \bar{N}(k) &= \left[ \frac{1}{3}\delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-2) + \frac{1}{6}\delta(k-3) \right] \alpha^2 \text{ และ } \bar{Q}(k) = \delta(k) - \frac{1}{2}\delta(k-1) \\
 \bar{P}_0(k) &= P_0^* [\delta(k-9) - \delta(k-10)] \text{ โดยให้ } P_0^* = 1
 \end{aligned}$$

การตั้งค่า  $\alpha = 5$  และ  $\bar{\Lambda} = 6.0$  และ  $m = 20$  โดยใช้สมการ (51) และ (52),  $u(\xi)$  คือถูกหาผลเฉลยเพื่อการสาธิตโดยทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ในสมการ (33)-(36) แล้วแทน  $\bar{U}(0), \bar{U}(1), \bar{U}(2), \bar{U}(3)$  และ  $k = 0$  ในสมการ (98) จะได้

$$\bar{U}(4) = \frac{1}{72}(41s + 54z) \tag{99}$$

ตามขั้นตอนการเวียนเกิดซ้ำเหมือนกันเรากำหนดถึงพจน์ที่ 20 ของ  $\bar{U}(20)$  และแทน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  แทนในสมการ (73) และ (74)  $\bar{Y}$  จะถูกแทนที่ด้วย  $\bar{U}$  จะได้

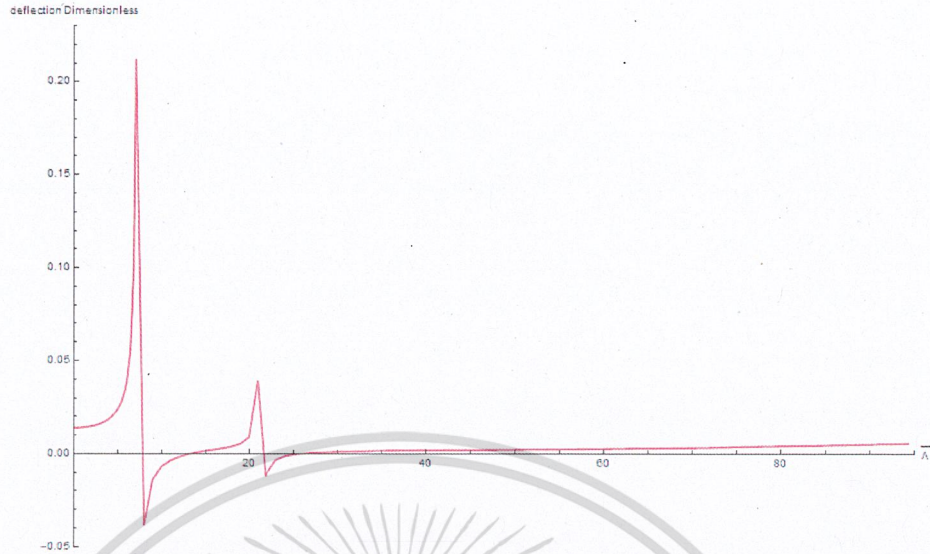
$$84.1416s + 157.114z = -0.0152862 \tag{100}$$

$$407.814s + 782.945z = -0.755945 \tag{101}$$

แก้สมการ (100) และ (101) แล้วแทนผลที่ได้ใน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  และใช้สมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \xi^2(0.0591665 - 0.0317837\xi + 0.00985426\xi^2 + 0.00351655\xi^3 \\
 & - 0.00390673\xi^4 + 0.0010015\xi^5 + 0.000770086\xi^6 - 0.000084975\xi^7 \\
 & + 0.00013662\xi^8 + 0.0000782133\xi^9 - 4.65922 \times 10^{-6}\xi^{10} - 0.0000137022\xi^{11} \\
 & - 0.0000183971\xi^{12} - 0.0000190352\xi^{13} - 0.0000150336\xi^{14} - 0.000105157\xi^{15} \\
 & - 6.7196 \times 10^{-6}\xi^{16} - 3.89538 \times 10^{-6}\xi^{17} - 2.02477 \times 10^{-6}\xi^{18})
 \end{aligned} \tag{102}$$

ตามขั้นตอนที่แสดงไว้ข้างต้นเส้นโค้งตอบรับการสั่นสะเทือนที่ปลายคานจะได้ตามที่ระบุไว้ในรูปที่ 3.2 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติเข้าใกล้ความถี่ที่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติของคาน การตอบสนองจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและกลายเป็นอนันต์เมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ



รูปที่ 3.2 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย

$$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^9 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$$

### ตัวอย่างที่ 3.2

ในการพิจารณาแรงสั่นสะเทือนแบบบังคับ กำหนดให้แรงกระตุ้นแบบฮาร์มอนิกเกิดจากคลื่น

ตามขวาง คือ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$

การแก้ปัญหасวมการในสภาวะคงที่ของสมการ (11) จะถูกแสดงโดย  $V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t$

โดยที่  $\bar{\omega}$  คือความถี่กระตุ้น

เนื่องจาก  $V(x,t)$  มีค่าที่สอดคล้องกับค่า  $P(x,t)$

จากสมการ (11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] + K^*(x) V(x,t) + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

แทน  $V(x,t) = U(x) \sin \bar{\omega} t$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x) I(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x) \sin \bar{\omega} t}{dx} \right] + K^*(x) U(x) \sin \bar{\omega} t + \rho(x) A(x) \frac{d^2 U(x) \sin \bar{\omega} t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega}t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega}t + \rho(x)A(x)U(x) \frac{d^2 \sin \bar{\omega}t}{dt^2} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega}t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega}t + \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega} \frac{d \cos \bar{\omega}t}{dt} = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega}t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega}t - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t = P(x,t), x \in (0, \ell)$$

เนื่องจากการสันแบบบังคับ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega}t$  นั่นคือ

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \sin \bar{\omega}t \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \sin \bar{\omega}t \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) \sin \bar{\omega}t - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \\ = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega}t, x \in (0, \ell)$$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] \\ + K^*(x)U(x) - \rho(x)A(x)U(x) \bar{\omega}^2 \\ = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right], x \in (0, \ell) \quad (103)$$

เนื่องจาก  $U(x) = u(\xi)\ell$ ,  $\xi = \frac{x}{\ell}$  และ  $P_0(x) = \frac{P_0(\xi)E(0)I(0)}{\ell^3}$  ในสมการ (47)

แทนในสมการ (103)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right] \\ & + K^*(x)u(\xi)\ell - \rho(x)A(x)u(\xi)\ell\bar{\omega}^2 \\ & = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (104)$$

พิจารณาสมการ (104) พจน์  $\frac{d^2}{dx^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{dx} \right]$  แทน  $x = \xi\ell$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)\ell}{d\xi^2 \ell^2} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)\ell}{d\xi \ell} \right]$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2 \ell^2} \left[ E(x)I(x) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2 \ell} \right] - \frac{d}{d\xi \ell} \left[ N(x) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & + u(\xi) \left[ K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\bar{\omega}^2 \right] = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ E(x)I(x) \frac{1}{\ell^3} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)}{\ell} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ K^*(x)\ell - \rho(x)A(x)\ell\bar{\omega}^2 \right] = \frac{P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right] E(0)I(0)}{\ell^3}, \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

นำ  $\frac{1}{E(0)I(0)}$  และ  $\ell^3$  คูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{E(x)I(x)}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right) \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \cdot \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \right] \\ & + u(\xi) \left[ \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)} - \frac{\rho(0)A(0)\rho(x)A(x)\ell^4\bar{\omega}^2}{\rho(0)A(0)E(0)I(0)} \right] = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0, \ell) \end{aligned}$$

จากสมการ (60), (61), (63.1),  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x)\ell^4}{E(0)I(0)}$  และ  $\bar{\Lambda}^2 = \frac{\rho(0)A(0)\omega^2\ell^4}{E(0)I(0)}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-N(x)\ell^2}{E(0)I(0)} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\ & + \left[ k^*(\xi) - \bar{\Lambda}^2 (1-0.5\xi) \right] u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0, 1) \end{aligned} \quad (105)$$

พิจารณาสมการ (63.1) เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \int_x^l \left(1 - 0.5 \frac{\xi}{l}\right) \xi d\xi \\
 &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \int_x^l \left(\xi - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{l}\right) d\xi \\
 &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{l}\right) \Big|_{x=\xi l}^l \\
 &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left[\left(\frac{l^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{l^3}{l}\right) - \left(\frac{\xi^2 l^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{\xi^3 l^3}{l}\right)\right] \\
 &= \rho(0) A(0) \Omega^2 \left[\left(\frac{l^2}{2} - \frac{1}{6} l^2\right) - \left(\frac{\xi^2 l^2}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 l^2\right)\right] \tag{106}
 \end{aligned}$$

นำสมการ (106) แทนในสมการ (105) นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - 0.5\xi)^3 \cdot \left(\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] \\
 &+ \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0) A(0) \Omega^2 \left[\left(\frac{l^4}{2} - \frac{1}{6} l^4\right) - \left(\frac{\xi^2 l^4}{2} - \frac{1}{6} \xi^3 l^4\right)\right]}{E(0) I(0)} \cdot \left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\right) \right] \\
 &+ u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1 - 0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0, l) \\
 &\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - 0.5\xi)^3 \cdot \left(\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2}\right) \right] + \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{-\rho(0) A(0) \Omega^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right)^3 l^4}{E(0) I(0)} \cdot \left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\right) \right] \\
 &+ u(\xi) \left[ k^*(\xi) - (1 - 0.5\xi) \cdot \bar{\Lambda}^2 \right] = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0, l)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $K^*(x) = 0$  เป็นค่าคงที่ ให้  $k^*(\xi) = \frac{K^*(x) l^4}{E(0) I(0)} = 0$  ทำให้สมการ (107) เป็นจริง

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - 0.5\xi)^3 \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left(\frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right)^3 \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \\
 &- \bar{\Lambda}^2 (1 - 0.5\xi) u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0, 1) \tag{107}
 \end{aligned}$$

โดยที่  $\alpha^2 = \frac{\rho(0) A(0) \Omega^2 l^4}{E(0) I(0)}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ของสมการ (107)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right] - \frac{d}{d\xi} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \alpha^2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} + \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} (3)(1-0.5\xi)^2 (-0.5) \right] - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3 \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} + \frac{du(\xi)}{d\xi} (3) \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^2 \left( -\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

$$\left[ (1-0.5\xi)^3 \frac{d^4u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} (1-0.5\xi)^2 (-1.5) \right] + \left[ \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} (1-0.5\xi)(1.5) + (-1.5)(1-0.5\xi)^2 \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} \right] - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

$$\left[ (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3) \frac{d^4u(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \right] + \left[ \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} (1.5-0.75\xi) + (-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} \right] - \alpha^2 \left[ \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \right] - \Lambda^2 (1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

$$\left[ \begin{aligned} & (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3) \frac{d^4u(\xi)}{d\xi^4} + 2 \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} (-1.5+1.5\xi-0.375\xi^2) \\ & + \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} (1.5-0.75\xi) \end{aligned} \right]$$

$$-\alpha^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{27} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^3}{18} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi^5}{6} + \frac{\xi^6}{72} + \frac{\xi^4}{8} - \frac{\xi^5}{24} + \frac{\xi^6}{216} \right) \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \frac{du(\xi)}{d\xi} \left( -\frac{\xi}{3} + \frac{\xi^2}{6} + \xi^3 - \frac{5\xi^4}{6} - \frac{7\xi^5}{12} + \frac{7\xi^6}{8} - \frac{\xi^7}{3} + \frac{\xi^8}{24} \right) \end{aligned} \right]$$

$$-\Lambda^2(1-0.5\xi)u(\xi) = P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

ให้  $b(\xi) = (1-1.5\xi+0.75\xi^2-0.125\xi^3)$ ,  $n(\xi) = \left( \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right)^3$ ,  $q(\xi) = (1-0.5\xi)$

จะได้ว่า

$$\left[ 2 \frac{d}{d\xi} b(\xi) \left( \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} \right) \right] + \left[ b(\xi) \cdot \left( \frac{d^4u(\xi)}{d\xi^4} \right) + \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} b(\xi) \right]$$

$$- \left[ n(\xi) \cdot \left( \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi} n(\xi) \right] - [q(\xi)u(\xi) \cdot \lambda]$$

$$= P_0^* \left[ (\xi)^6 - (\xi)^7 \right], \xi \in (0,1)$$

กำหนดให้  $z(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}$ ,  $p(\xi) = \frac{d^2b(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $l(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}$ ,  $s(\xi) = \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}$ ,  $w(\xi) = \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3}$ ,

$r(\xi) = \frac{d^4u(\xi)}{d\xi^4}$ ,  $m(\xi) = \frac{dn(\xi)}{d\xi}$  จะได้ว่า

$$\left[ 2z(\xi) \cdot w(\xi) \right] + \left[ b(\xi) \cdot r(\xi) + s(\xi) \cdot p(\xi) \right] - \left[ n(\xi) \cdot s(\xi) + l(\xi) \cdot m(\xi) \right]$$

$$- q(\xi)u(\xi) \cdot \Lambda^2 = P_0^* (\xi^6 - \xi^7), \xi \in (0,1)$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$2 \sum_{r=0}^k \bar{Z}(k-r) \bar{W}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) \bar{R}(r) + \sum_{r=0}^k \bar{P}(k-r) \bar{S}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) \bar{S}(r)$$

$$- \sum_{r=0}^k \bar{M}(k-r) \bar{L}(r) - \sum_{r=0}^k \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) \cdot \Lambda^2 = P_0^* (\xi^6 - \xi^7)$$

จากสมการ (5),(6) และ (7)

$$2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1) (r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3)$$

$$+ \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r) (r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4)$$

$$+ \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2) (r+1)(r+2) \bar{U}(r+2)$$

$$- \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r) (r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1) (r+1) \bar{U}(r+1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = P_0^* (\xi^6 - \xi^7)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^k \bar{B}(k-r)(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) \bar{U}(r+4) \\ & + 2 \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{B}(k-r+1)(r+1)(r+2)(r+3) \bar{U}(r+3) \\ & + \sum_{r=0}^k (k-r+1)(k-r+2) \bar{B}(k-r+2)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{N}(k-r)(r+1)(r+2) \bar{U}(r+2) - \sum_{r=0}^k (k-r+1) \bar{N}(k-r+1)(r+1) \bar{U}(r+1) \\ & - \sum_{r=0}^k \bar{\Lambda}^2 \bar{Q}(k-r) \bar{U}(r) = \bar{P}_0(k) \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } \bar{B}(k) &= \delta(k) - \frac{3}{2} \delta(k-1) + \frac{3}{4} \delta(k-2) - \frac{1}{8} \delta(k-3), \\ \bar{N}(k) &= \left[ \frac{1}{3} \delta(k) - \frac{1}{2} \delta(k-2) + \frac{1}{6} \delta(k-3) \right] \alpha^2 \text{ และ } \bar{Q}(k) = \delta(k) - \frac{1}{2} \delta(k-1) \\ \bar{P}_0(k) &= P_0^* [\delta(k-9) - \delta(k-10)] \text{ โดยให้ } P_0^* = 1 \end{aligned}$$

การตั้งค่า  $\alpha = 5$  และ  $\bar{\Lambda} = 6.0$  และ  $m = 20$  โดยใช้สมการ (51) และ (52),  $u(\xi)$  คือถูกหาผลเฉลยเพื่อการสาธิตโดยทำตามขั้นตอนเดียวกับที่แสดงไว้ในสมการ (33)-(36) แล้วแทน  $\bar{U}(0), \bar{U}(1), \bar{U}(2), \bar{U}(3)$  และ  $k=0$  ในสมการ (108) จะได้

$$\bar{U}(4) = \frac{1}{72} (41s + 54z) \quad (109)$$

ตามขั้นตอนการเวียนเกิดซ้ำเหมือนกันเรากำหนดถึงพจน์ที่ 20 ของ  $\bar{U}(20)$  และแทน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  แทนในสมการ (73) และ (74)  $\bar{Y}$  จะถูกแทนที่ด้วย  $\bar{U}$  จะได้

$$84.1416s + 157.114z = -0.03699 \quad (110)$$

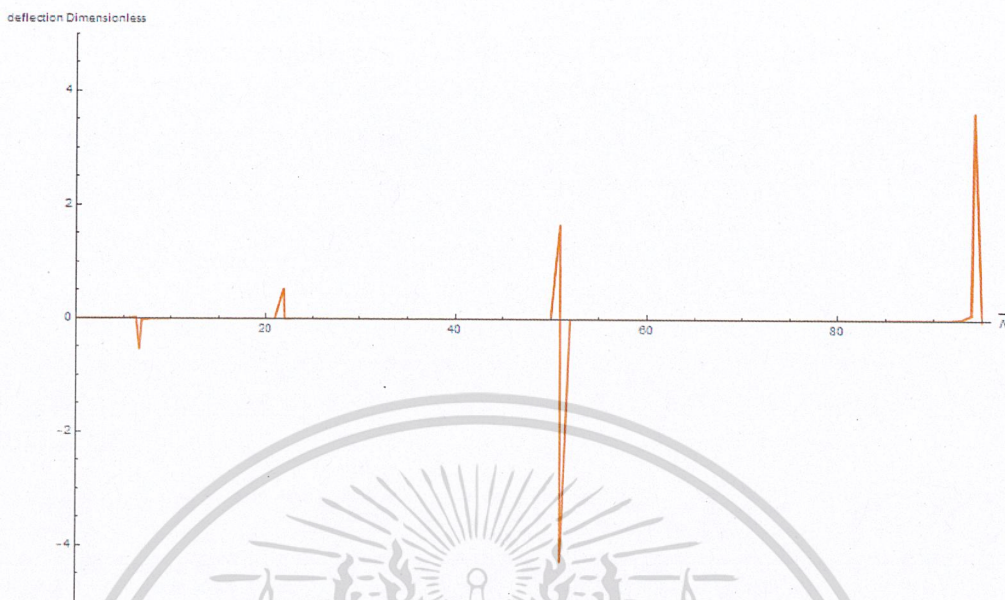
$$355.361s + 676.886z = -0.283578 \quad (111)$$

แก้สมการ (110) และ (111) แล้วแทนผลที่ได้ใน  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(20)$  และใช้สมการ (10) จะได้

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \xi^2 (0.0173905 - 0.00954887\xi + 0.00274129\xi^2 + 0.00085434\xi^3 \\ & - 0.00132927\xi^4 + 0.000151437\xi^5 - 0.0000573378\xi^6 - 0.000206294\xi^7 \\ & + 0.000131783\xi^8 + 0.0000742227\xi^9 + 0.0000269302\xi^{10} + 0.0000204348\xi^{11} \\ & - 1.23922 \times 10^{-7} \xi^{12} - 1.23922 \times 10^{-7} \xi^{13} + 2.82983 \times 10^{-6} \xi^{14} - 3.51013 \times 10^{-6} \xi^{15} \\ & - 3.15479 \times 10^{-6} \xi^{16} - 2.39402 \times 10^{-6} \xi^{17} - 1.62909 \times 10^{-6} \xi^{18}) \end{aligned} \quad (112)$$

ตามขั้นตอนที่แสดงไว้ข้างต้นเส้นโค้งตอบรับการสั่นสะเทือนที่ปลายคานจะได้ตามที่ระบุไว้ในรูปที่ 3.3 แสดงให้เห็นว่าเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติเข้าใกล้ความถี่ที่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติของคาน การตอบสนองจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและกลายเป็นอนันต์เมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 เส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย

$$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^6 - \left( \frac{x}{\ell} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

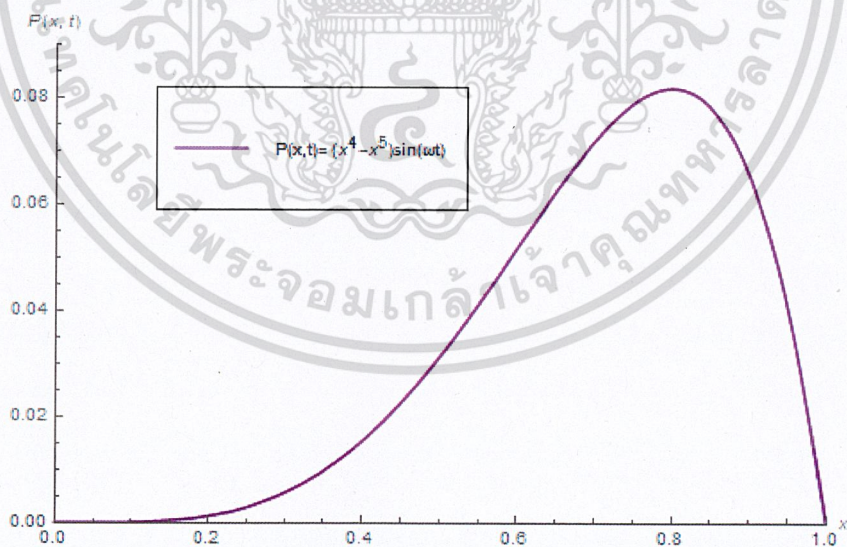
### ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

งานวิจัยฉบับนี้ ได้ทำการศึกษาวิธีแก้ไขปัญหาการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบอิสระและแบบบังคับ ของคานไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองข้างถูกยึดแบบยึดหยุ่น โดยคานวางบนฐานรากยื่นหยุ่นที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกนและแรงตามขวาง โดยศึกษานิยาม ทฤษฎีบท รวมถึงคุณสมบัติที่เป็นความรู้พื้นฐานของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์หลังจากนั้นใช้ตัวดำเนินการแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recursive algebraic equation) ซึ่งถูกนำไปใช้หาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยรูปแบบปิดภายใต้ความถี่ธรรมชาติพจน์ที่  $i$  โดยอนุกรมผลเฉลยของทุกๆ รูปร่างโหมดพจน์ที่  $i$  เหล่านี้จะถูกนำเสนอในรูปของกราฟที่แทนการสั่นสะเทือนของคานภายใต้ความถี่ธรรมชาติที่สอดคล้องกัน โดยงานของเราจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (Mathematica)

จากบทที่ 2 ได้ศึกษาการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับของคาน โดยการสั่นแบบอิสระเมื่อ  $P(x,t)=0$  จะได้ว่า ลักษณะการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ซึ่งความถี่ธรรมชาติแต่ละค่าจะทำให้รูปร่างโหมดพจน์ที่  $i$  แตกต่างกัน ดังรูปที่ 2.3

ส่วนการสั่นสะเทือนแบบบังคับของคานเป็นการสั่นสะเทือนซึ่งเกิดเนื่องจากพลังงานภายนอกกระทำกับระบบระหว่างการสั่นสะเทือน ซึ่งในบทที่ 2 ได้กำหนดค่าแรงภายนอกที่มากระทำ จะได้ว่า

$$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$$

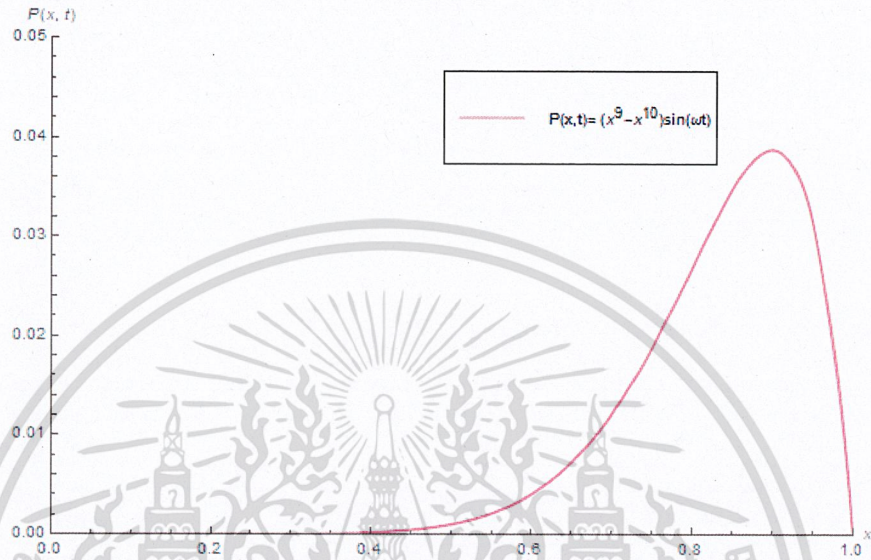


รูปที่ 4.1 แรงภายนอกที่มากระทำ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right] \sin \bar{\omega} t$

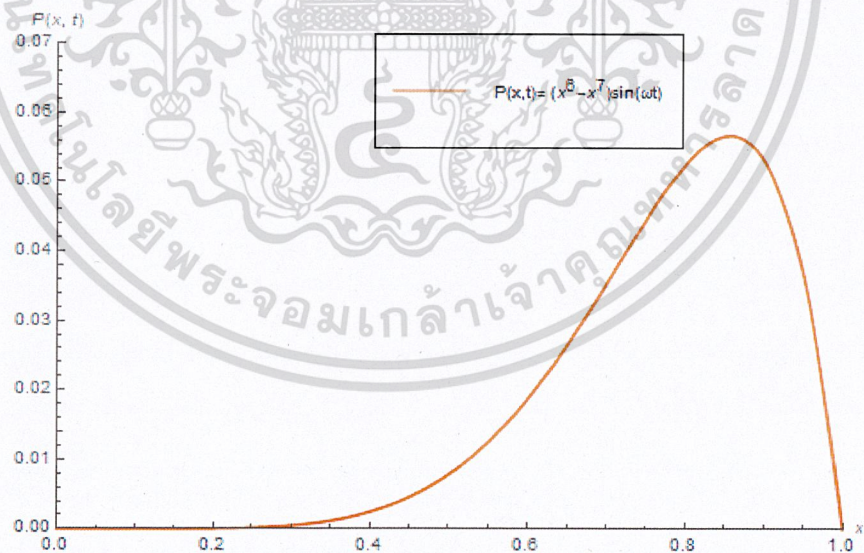
ซึ่งในงานวิจัยฉบับนี้ เราจะกำหนดค่าของแรงภายนอก 2 ค่า ให้ใกล้เคียงกับค่าแรงภายนอก  
บทที่ 2 เพื่อดูเส้นโค้งการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย ได้แก่

$$P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^9 - \left( \frac{x}{l} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t, \quad P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^6 - \left( \frac{x}{l} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$$

มีลักษณะกราฟดังนี้



รูปที่ 4.2 แรงภายนอกที่ทำการกระทำ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^6 - \left( \frac{x}{l} \right)^7 \right] \sin \bar{\omega} t$



รูปที่ 4.3 แรงภายนอกที่ทำการกระทำ  $P(x,t) = P_0^* \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^9 - \left( \frac{x}{l} \right)^{10} \right] \sin \bar{\omega} t$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 2.4 4.2 และ 4.3 เมื่อเรากำหนดค่าของแรงภายนอกที่มากจะทำให้ใกล้เคียงกันจะมีผลทำให้การสั่นของคานแบบไดนามิกในรูปที่ 2.4 3.2 และ 3.3

จากรูปที่ 2.4 โหมดแรก  $0 \leq \bar{\lambda} \leq 6.7306$

โหมดสอง  $6.7306 < \bar{\lambda} \leq 21.9059$

โหมดสาม  $21.9059 < \bar{\lambda} \leq 50.9338$

โหมดสี่  $50.9338 < \bar{\lambda} \leq 94.2063$

จะเห็นว่า ทุกโหมดมีการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจายเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนกลายเป็นอันตรธานเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ

จากรูปที่ 3.2 โหมดแรก  $0 \leq \bar{\lambda} \leq 6.7306$

โหมดสอง  $6.7306 < \bar{\lambda} \leq 21.9059$

โหมดสาม  $21.9059 < \bar{\lambda} \leq 50.9338$

โหมดสี่  $50.9338 < \bar{\lambda} \leq 94.2063$

จะเห็นว่า โหมดแรกมีการตอบสนองแบบไดนามิกเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและโหมดสองมีการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจายที่ช้าลง ส่วนโหมดสามและโหมดสี่ ไม่มีการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจาย เลยทำให้เห็นชัดเจนว่า การตอบสนองแบบไดนามิกเกิดขึ้นที่โหมดหนึ่งและโหมดสองจนกลายเป็นอันตรธานเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ

จากรูปที่ 3.3 โหมดแรก  $0 \leq \bar{\lambda} \leq 6.7306$

โหมดสอง  $6.7306 < \bar{\lambda} \leq 21.9059$

โหมดสาม  $21.9059 < \bar{\lambda} \leq 50.9338$

โหมดสี่  $50.9338 < \bar{\lambda} \leq 94.2063$

จะเห็นว่า โหมดแรก โหมดสองและโหมดสี่ มีการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจายที่ช้าลง ส่วนโหมดสาม มีการตอบสนองแบบไดนามิกด้วยคานรับแรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนกลายเป็นอันตรธานเมื่อความถี่กระตุ้นแบบไม่มีมิติตรงกับความถี่มีแนวโน้มธรรมชาติแบบไม่มีมิติ

ดังนั้น เมื่อเรากำหนดค่าของแรงภายนอกให้ใกล้เคียงกันจะมีผลทำให้การสั่นของคานแบบไดนามิกแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการแนะนำการใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาค่าการสั่นสะเทือนที่เป็นอิสระและแบบบังคับของคานาไม่เอกรูปที่ปลายทั้งสองถูกยึดแบบยึดหยุ่นโดยวางบนฐานรากยึดหยุ่นที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกันและอยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกนและแรงตามขวาง ด้วยวิธีการที่เสนอในการศึกษานี้ ผลเฉลยแบบปิดของปัญหาค่าการสั่นสะเทือนแบบอิสระและแบบบังคับของคานาไม่เอกรูป สรุปโดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้ปัญหาค่าการสั่นสะเทือนอิสระและบังคับของคานาไม่เอกรูป ประกอบด้วยสี่ขั้นตอนหลัก

1. แปลงสมการการสั่นของคานาไม่เอกรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. จัดรูปสมการ ODE ให้อยู่ในรูปแบบที่ไม่มีมิติโดยแทนค่าปริมาณที่ไม่มีมิติลงในสมการ
3. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีมิติโดยใช้ DTM และ T-function เป็นสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิด (recursive algebraic equation)
4. จากสมการพีชคณิตแบบเวียนเกิด (recursive algebraic equation) นำไปคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมผลเฉลยของปัญหาสมการการสั่นของคานา การแก้ปัญหาคานาแบบบังคับ เมื่อเรากำหนดค่าของแรงภายนอกที่ใกล้เคียงกันจะมีผลทำให้การสั่นของคานาแบบไดนามิกแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้นแรงภายนอกที่ใกล้เคียงกันอาจจะทำให้ได้ลักษณะการสั่นที่แตกต่างกันเนื่องจากแรงภายนอกอาจจะไม่เสริมแอมพลิจูด

#### 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราสามารถสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. ปัญหาพิเศษเล่มนี้ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบอิสระไว้ถึงโหมด 4 สำหรับผู้สนใจอยากศึกษาต่อแนะนำให้ทำโหมด 5 เป็นต้นไป โดยในงานนี้สมการพีชคณิตได้ทำถึง  $\bar{Y}(60)$  ของโหมดที่ 4 ไว้แล้ว เพื่อดูว่าความถี่ธรรมชาติแต่ละค่าทำให้การสั่นไม่เหมือนกัน (Mode Shape)
2. ปัญหาพิเศษเล่มนี้ได้ทำการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบบังคับไว้ถึงโหมด 4 เนื่องจาก  $\bar{Y}(20), \bar{Y}(34), \bar{Y}(36), \bar{Y}(40)$  มีความถี่ธรรมชาติที่ลู่เข้า 6.7306, 21.9059, 50.9338 และ 90.2063 ตามลำดับ โดยกราฟเส้นโค้งการตอบสนองเชิงไดนามิกจะแบ่งขอบเขตแต่ละโหมดไว้ดังนี้

$$\text{โหมดแรก } 0 \leq \bar{\Lambda} \leq 6.7306$$

$$\text{โหมดสอง } 6.7306 < \bar{\Lambda} \leq 21.9059$$

$$\text{โหมดสาม } 21.9059 < \bar{\Lambda} \leq 50.9338$$

$$\text{โหมดสี่ } 50.9338 < \bar{\Lambda} \leq 94.2063$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยแทนความถี่ธรรมชาติแต่ละค่าในผลรวม  $\bar{Y}(0) - \bar{Y}(m)$  โดย  $m = 20, 34, 36$  และ  $40$  ตามลำดับ โดยที่  $\xi = 1$  สำหรับผู้ที่สนใจอยากศึกษาการตอบสนองของคานแบบไดนามิกแนะนำให้ทำโหมต 5 เป็นต้นไป โดยศึกษาจากรายละเอียดได้ในเล่มนี้

3. สำหรับผู้สนใจอยากศึกษาการสั่นสะเทือนแบบบังคับ สามารถกำหนดแรงภายนอก  $P(x, t)$  ในรูปแบบอื่น จากผลของงานวิจัยนี้ จะสังเกตได้ว่าแรงภายนอกที่ต่างกักันเพียงเล็กน้อย มีผลทำให้การสั่นของคานแบบไดนามิกต่างกักันได้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

- [1] D. Storti, Y. Aboelnaga, **Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions.** J. Appl.Mech. 54 (1987) 311–314.
- [2] A.D. Wright, C.E. Smith, R.W. Thresher, J.C.L. Wang, **Vibration modes of centrifugally stiffened beams.** J. Appl.Mech. 49 (1982) 197–202.
- [3] S.Y. Lee, H.Y. Ke, Y.H. Kuo, **Exact solutions for the analysis of general elastically restrained nonuniform beams.** J.Appl. Mech. 59 (1992) 205–212.
- [4] A.D. Dimarogonas, S. Haddad, **Vibration for Engineers.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992, pp. 489–495.
- [5] C.L. Dym, I.H. Shames, **Solid Mechanics: A Variational Approach.** McGraw-Hill, New York, 1973.
- [6] D.H. Hodges, M.J. Rutkowski, **Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite element method.** AIAA J. 19 (1981) 1459–1466.
- [7] Y.A. Khulief, **Vibration frequencies of a rotating tapered beam with end mass.** J. Sound Vib. 134 (1989) 87–97.
- [8] J.K. Zhou, **Differential Transformation and its Applications for Electrical circuits.** Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [9] กนกวรรณ ปานช่วย,กมลทิพย์ งามอายุทธนากร และจุฑารัตน์ พิมพ์สุด 2558. การหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการควอนตัมออสซิลเลเตอร์โดยการแปลงเชิงอนุพันธ์ (On Solving the Quantum Oscillator Equation by Using the Differential Transformation). กรุงเทพฯ : สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [10] บุญญาพร เกิดผล. 2558. ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method). กรุงเทพฯ : สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [11] Shing Huei Ho, Cha'o Kuang Chen, **Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform.** Appl. Math. Modelling 22 (1998) 219-234