ผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสาม
กับสัมประสิทธิ์อนุกรมกำลัง

POWER SERIES SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER SERIES COEFFICIENTS

นิพพิชฌน์ ปัญญา

พงศกร รูปสม

อภิวัฒน์ ขั้วกลาง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

POWER SERIES SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER SERIES COEFFICIENTS

NIPPICH PANYA

PONGSAKORN ROOPSOM

APHIWAT KHUAKLANG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสามกับสัมประสิทธิ์อนุกรมกำลัง
	POWER SERIES SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER SERIES COEFFICIENTS
ชื่อนักศึกษา	นาย นิพพิชฌน์ ปัญญา รหัสนักศึกษา 57050086
	นาย พงศกร รูปสม รหัสนักศึกษา 57050098
	นาย อภิวัฒน์ ขั้วกลาง รหัสนักศึกษา 57050156
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการคุมสอบ	ลายมือชื่อ
ดร. งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล ประธานกรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการ	
ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสาม กับสัมประสิทธิ์อนุกรมกำลัง
	POWER SERIES SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER SERIES COEFFICIENTS
ชื่อนักศึกษา	นาย นิพพิชฌน์ ปัญญา รหัสนักศึกษา 57050086
	นาย พงศกร รูปสม รหัสนักศึกษา 57050098
	นาย อภิวัฒน์ ขั้วกลาง รหัสนักศึกษา 57050156
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

บทคัดย่อ

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่ในบางครั้งไม่สามารถหาผลเฉลยจริงได้ ในปัญหาพิเศษนี้เราจะใช้อนุกรมกำลังในการประมาณหาค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามโดยสมมติว่าผลเฉลยและสัมประสิทธิ์ของสมการสามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมกำลังได้และเมื่อทำการเขียนสมการในรูปของเมทริกซ์ ดังนั้นเราจะได้เมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังของผลเฉลย ทำให้เราสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงได้

คำสำคัญ: สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสาม อนุกรมกำลัง เมทริกซ์ อนุกรมเทย์เลอร์

Title	POWER SERIES SOLUTION OF THIRD-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POWER SERIES COEFFICIENTS
Students	Mr. NIPPICH PANYA Student ID 57050086
	Mr. PONGSAKORN ROOPSOM Student ID 57050098
	Mr. APHIWAT KHUAKLANG Student ID 57050156
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2017
Advisor	Assist.Prof.Dr.Kanognudge Wuttanachamsri

Abstract

In mathematics the solutions of ordinary differential equations sometimes cannot be found, especially, when the coefficients are not constants. In this project we apply power series to find the approximated solutions of the third order linear ordinary differential equations. The solutions are approximated by power series. We rewrite the equations in matrix forms. The solution of the system which is in a matrix form is the coefficient of the power series .

Keywords: power series, third-order linear differential equations, matrix form, taylor series

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเนื่องจากได้รับความกรุณาจาก ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ซึ่งได้ให้คำแนะนำและตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆมาโดยตลอด คณะผู้จัดทำรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณา และกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้ด้วย

กราบขอบพระคุณ ดร. งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล และดร. วรรณพร สรรประเสริฐ ประธานกรรมการและกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ตลอดจนอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่คอยอบรมสั่งสอนและประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่างๆให้แก่คณะผู้จัดทำตลอดมารวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ค่อยช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ช่วยสนับสนุนและห่วงใยด้วยดีเสมอมา ตลอดจนเพื่อนๆ และท่านผู้เกี่ยวข้องที่มิได้กล่าวนามข้างต้นซึ่งมีส่วนช่วยในการทำปัญหาพิเศษ จนบรรลุผลสำเร็จด้วยดี

นิพพิชฌน์ ปัญญา

พงศกร รูปสม

อภิวัฒน์ ขั้วกลาง

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

การศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีการศึกษาอย่างกว้างทางในด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ ฟิสิกส์ อุตุนิยมวิทยา และทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ โดยหนึ่งในปัญหาที่มักพบบ่อยคือ ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ซึ่งสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่และมีรูปแบบทั่วไปของสมการคือ

$$a_n(x)\,\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}(x)+a_{n-1}\left(x\right)y^{(\mathrm{n}-1)}(x)+\ldots+a_1\left(x\right)y'(x)+a_0\left(x\right)y(x)=f(x)$$

ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์โดยที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่นั้น มีหลายวิธีเช่น วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ วิธีแปรผันพารามิเตอร์ และในบางสมการนั้นไม่สามารถหาค่าจริงได้ ซึ่ง ซีเซอร์ และ เคซาน [4] ได้พัฒนาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์อันดับสองโดยใช้พหุนามเทย์เลอร์มาเป็นตัวประมาณค่าซึ่งคณะผู้วิจัยเห็นว่าวิธีการนี้ได้ผลเฉลยที่ค่อนข้างยอมรับได้ คณะผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ในอันดับที่สูงขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษารูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่

2. ศึกษาการหาค่าประมาณของผลเฉลยโดยใช้อนุกรมกำลัง

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1. ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่และสามารถกระจายในรูปของอนุกรมกำลังได้

2. ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังได้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าได้รับ

สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามแบบไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่ได้

1.5 แผนการดำเนินการ

การดำเนินงาน	เดือน									
	ส.ค. 60	ก.ย. 60	ต.ค. 60	พ.ย. 60	ธ.ค. 60	ม.ค. 61	ก.พ. 61	มี.ค. 61	เม.ย. 61	พ.ค. 61
หาอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ปรึกษาเรื่องที่สนใจ	↔									
ค้นคว้าและศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจ	↔	↔								
วางแผนการวิจัย		↔								
บทที่ 1 บทนำ		↔								
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง		↔	↔							
บทที่ 3 การหาผลเฉลย			↔	↔	↔					
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล			↔	↔	↔	↔	↔	↔		
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ								↔		
จัดทำรูปเล่ม								↔		
ตรวจสอบและนำเสนอ									↔	↔

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 อนุกรมกำลัง (Power Series) และอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงนิยามของอนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ และตัวอย่างการนำอนุกรมกำลังของฟังก์ชันที่กำหนดให้ [3]

นิยาม 2.1 อนุกรมกำลัง

กำหนดให้ x เป็นตัวแปรค่าของจำนวนจริงและ a_n เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก n ที่เป็นจำนวนนับโดยเรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ เรียกว่า **อนุกรมกำลัง** อนุกรมกำลังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้คือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ โดยเรียกค่าคงตัว a ว่าศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง เราจะเรียกอนุกรมกำลังในรูปแบบนี้ว่า อนุกรมกำลังรอบจุด a

ต่อไปนี้เราจะกล่าวถึงที่มาของอนุกรมเทย์เลอร์จากอนุกรมกำลังต่อไปนี้

กำหนดให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a) \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots \\
f'''(x) &= 6a_3 + 24a_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-a) + \ldots$$

เมื่อแทน $x = a$ จะได้ $f(a) = a_0$

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= a_1 \\
f''(a) &= 2!a_2 \\
f'''(a) &= 3!a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(a) &= n!a_n
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

เราจะเรียกอนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

ว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)** หรือเขียนอยู่ในรูป $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

ถ้า $a = 0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคคลอริน** (Maclaurin Series)

ตัวอย่าง 2.1 จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ e^x

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$

ดังนั้น $f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \ f^{(n)}(0) = 1$$

ดังนั้น $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ $(1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

วิธีทำ $f(x) = (1+x)^{\alpha} \quad , \quad f(0) = 1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad , \quad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad , \ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

ดังนั้น $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \quad ,|x|<1$$

เราเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมทวินาม (Binomial Series)**

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n

<u>นิยาม 2.2</u> [1] สมการเชิงอนุพันธ์เป็น **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ถ้า

(1) ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1

(2) ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

(3) ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)**

<u>นิยาม 2.3</u> สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นสามัญอันดับที่ n (linear ordinary differential equations of order n) คือสมการที่สามารถเขียนในรูป

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)y=Q(x) \ \text{ โดยที่ } \ a_n(x)\neq 0$$

ต่อไปนี้คือตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับต่างๆ

$$y'+kx \qquad =0 \quad ;k \text{ คือค่าคงที่}$$

$$y''+4y'+4 \qquad =0$$

$$D^2y-6Dy+9y=e^x\operatorname{cosec}^3 x$$

$$y^{(4)}+2xy \qquad =4x^2$$

ในขณะที่สมการต่อไปนี้

$$x^2y''-3x(y')y'+y=4x^3=0$$

$$\left(x+\cos y\right)y'+y+4x^3 \ =0$$

ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น และเรียกสมการเหล่านี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น (nonlinear ordinary differential equation)

2.3 เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร เมทริกซ์เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ช่วยให้หาผลเฉลยได้ง่ายขึ้นโดยการเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) แล้วใช้การดำเนินการตามแถวเปลี่ยนเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวหรือรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Row Echelon Form of reduced Row-Echelon Form) เพื่อง่ายต่อการหาผลเฉลยต่อไป เราจะนิยามเมทริกซ์แต่งเติม [2] ดังนี้

<u>นิยาม 2.4</u> ถ้านำสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวของแต่ละสมการมาเขียนเรียงแถวลำดับในรูปแบบของเมทริกซ์ โดยให้สมการที่ 1, 2 และ 3 อยู่ในแนวนอนที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ และเมื่อใส่เครื่องหมาย | กั้นระหว่างส่วนสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวจะเรียกเมทริกซ์ลักษณะนี้ว่า **เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาระบบสมการซึ่งมี 3 สมการ 4 ตัวแปร ดังนี้

$$x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \tag{2.1}$$

$$x_2+x_4=2 \tag{2.2}$$

$$x_1-x_2+x_4=3 \tag{2.3}$$

จะได้ว่าเมทริกซ์แต่งเติมคือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

โดยที่ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ได้มาจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเรียกว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ได้มาจากเทอมค่าคงตัวของสมการ เรียกว่าเวกเตอร์ค่าคงตัว

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

2.4 วิธีการลดรูปตามแถว (row operation)

เป็นวิธีการลดรูปของเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย ต้องอาศัยการดำเนินการ 3 อย่างในการลดรูปเมทริกซ์ ดังนี้

1. การคูณเมทริกซ์แถวใดแถวหนึ่งด้วยค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์

2. การสลับกันระหว่างแถวสองแถวใดๆของเมทริกซ์

3. การบวกแถวหนึ่งของเมทริกซ์ด้วยผลคูณแถวอื่นกับค่าคงตัวใดๆ

ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างในการลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลย

<u>ตัวอย่าง 2.3</u>

กำหนดระบบสมการ

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= 9 \\ -x+3y &= -4 \\ 2x-5y+5z &= 17 \end{aligned}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

ต่อไปเราจะทำการลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมดังนี้

1. บวกแถวแรกเข้ากับแถวที่สอง

$$R_2+R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

2. แถวที่สามบวกกับ -2 คูณแถวที่หนึ่ง

$$R_3-2R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

3. บวกแถวที่สามเข้ากับแถวที่สอง

$$R_3+R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

4. คูณแถวที่สามด้วย $\frac{1}{2}$

ดังนั้นจะได้ว่า $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad (2.4)$$

จะเห็นว่าสมการ (2.4) เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย นั่นคือ

$$z=2 \qquad (2.5)$$

$$y+3z=5 \qquad (2.6)$$

และ $$x-2y+3z=9 \qquad (2.7)$$

แทนค่า z ใน (2.6) จะได้ $y=-1$

แทนค่า y และ z ในสมการที่ (2.7) จะได้ $x=1$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการนี้คือ $x=1,\ \ y=-1$ และ $z=2$

2.5 การหาผลเฉลยของระบบสมการ เมื่อเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเมทริกซ์ผกผัน

ทฤษฎีบท2.5 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $\mathbf{A}$ ใดๆถ้า $\mathbf{A}(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = (\det\mathbf{A})I = (\operatorname{adj}\mathbf{A})\mathbf{A}$ และ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ แล้วเมทริกซ์ผกผันของ $\mathbf{A}$ หาได้จาก $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}\mathbf{A}$

กำหนดให้ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ เป็นระบบสมการของ n สมการและ n ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด $n \times n$

ให้ $\mathbf{X}$ และ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์แนวตั้งโดยที่ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ถ้า $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{A}^{-1}$ หาค่าได้

จาก $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ เมื่อคูณทั้ง 2 ข้างด้วย $\mathbf{A}^{-1}$ จะได้ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

นั่นคือ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \left(\dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}\mathbf{A}\right)\mathbf{B}$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{A}) & C_{21}(\mathbf{A}) & \cdots & C_{n1}(\mathbf{A}) \\ C_{12}(\mathbf{A}) & C_{22}(\mathbf{A}) & \cdots & C_{n2}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n}(\mathbf{A}) & C_{2n}(\mathbf{A}) & \cdots & C_{nn}(\mathbf{A}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ฉะนั้น จะหาค่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ได้ดังนี้

$$x_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\left[b_1C_{11}(\mathbf{A}) + b_2C_{22}(\mathbf{A}) + \ldots + b_nC_{n1}(\mathbf{A})\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\left[b_1C_{12}(\mathbf{A}) + b_2C_{22}(\mathbf{A}) + \ldots + b_nC_{n2}(\mathbf{A})\right]$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\left[b_1C_{1n}(\mathbf{A}) + b_2C_{2n}(\mathbf{A}) + \ldots + b_nC_{nn}(\mathbf{A})\right]$$

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามโดยที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่และเป็นสมการไม่เอกพันธ์ และต้องการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวโดยการสมมติว่าผลเฉลยและสัมประสิทธิ์ของสมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังได้ ซึ่งก่อนหน้านี้มีงานวิจัยได้หาผลเฉลยสมการอันดับสอง [4] และเราจะทำการขยายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$S(x)y'''(x)+P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=f(x) \tag{3.1}$$

โดยที่ $S(x), P(x), Q(x), R(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถกระจายโดยใช้อนุกรมกำลังบนโดเมนที่กำหนดให้และสอดคล้องกับโดยเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&a_0y^{(i)}(a)+b_0y^{(i)}(b)+c_0y^{(i)}(c)=\lambda_0, \quad i=0 \text{ หรือ } 1 \text{ หรือ } 2\\
&a_1y^{(i)}(a)+b_1y^{(i)}(b)+c_1y^{(i)}(c)=\lambda_1, \quad i=0 \text{ หรือ } 1 \text{ หรือ } 2\\
&a_2y^{(i)}(a)+b_2y^{(i)}(b)+c_2y^{(i)}(c)=\lambda_2, \quad i=0 \text{ หรือ } 1 \text{ หรือ } 2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

โดยที่ $a \le c \le b$ และสัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i และ λ_i เป็นค่าคงที่ สำหรับ $i=0, 1, 2$

3.1 ความสัมพันธ์พื้นฐาน

สมมติให้ $y(x)$ สามารถกระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังได้ดังนี้

$$y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r(x-c)^r$$

โดยที่ a_r เป็นค่าคงที่ใดๆ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $y(x)$ คือ

$$y^{(n)}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^{(n)}(x-c)^r$$

โดยที่เลขยกกำลัง (n) ของ a_r ไม่ใช่อนุพันธ์อันดับที่ n ของ a_r แต่ $a_r^{(n)}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของ y ดังต่อไปนี้

เนื่องจาก

$$y(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots + a_N(x-c)^N$$

ดังนั้น $$y'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N$$

หรือเขียนในรูป

$$y'(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(x-c) + a_2^{(1)}(x-c)^2 + a_3^{(1)}(x-c)^3 + \ldots + a_N^{(1)}(x-c)^N$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= a_1 \\ a_1^{(1)} &= 2a_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1}^{(1)} &= Na_N \\ a_N^{(1)} &= (N+1)a_{N+1} \end{aligned}$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดของสัมประสิทธิ์ระหว่าง $y(x)$ และ $y'(x)$ คือ

$$a_r^{(1)} = (r+1)a_{r+1}, \ \ r = 0, 1, 2, ..., N$$

พิจารณาในทำนองเดียวกันกับ $y(x)$ และ $y^{(2)}(x)$ จะได้ $a_r^{(2)} = (r+1)a_{r+1}^{(1)}, \ \ r = 0, 1, 2, ..., N$

ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดของสัมประสิทธิ์ของ $y^{(n)}(x)$ และ $y^{(n+1)}(x)$ จะได้ว่า

$$a_r^{(n+1)} = (r+1)a_{r+1}^{(n)} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots \ , r = 0, 1, 2, \ldots, N \qquad (3.3)$$

ต่อไปนี้เราจะทำการเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.3) ในรูปเมททริกซ์ดังนี้

เมื่อ $n = 0$ สามารถเขียนสมการ (3.3) ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N-1}^{(1)} \\ a_N^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

ให้

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$\mathbf{A}^{(0)}=\left[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N\right]^T$ และ $\mathbf{A}^{(n)}=\left[a_0^{(n)} \quad a_1^{(n)} \quad \dots \quad a_N^{(n)}\right]^T, n=1, 2, 3, ..., N$

ดังนั้นจากสมการ (3.3) เราจะได้ว่า

$$\mathbf{A}^{(n+1)}=\mathbf{MA}^{(n)}, \quad n=1, 2, 3, ..., N \tag{3.5}$$

จากความสัมพันธ์ (3.5) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(1)}&=\mathbf{MA}^{(0)}\\ \mathbf{A}^{(2)}&=\mathbf{MA}^{(1)}=\mathbf{M}^2\mathbf{A}^{(0)}\\ \mathbf{A}^{(3)}&=\mathbf{MA}^{(2)}=\mathbf{M}^3\mathbf{A}^{(0)}\\ &\vdots\\ \mathbf{A}^{(n)}&=\mathbf{MA}^{(n-1)}=\mathbf{M}^n\mathbf{A}^{(0)}\end{aligned} \tag{3.6}$$

ผลที่ได้คือสมการ (3.6) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(0)}$ ของ $y(x)$ และสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n)}$ ของ $y^{(n)}(x)$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{A}^{(0)}=\mathbf{A}$

3.2 ขั้นตอนการหาผลเฉลย

ในการหาผลเฉลยของสมการ (3.1) เราสมมติว่าสัมประสิทธิ์ของสมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S(x)&=\sum_{i=0}^{N}s_i(x-c)^i \qquad & P(x)&=\sum_{i=0}^{N}p_i(x-c)^i\\ Q(x)&=\sum_{i=0}^{N}q_i(x-c)^i \qquad & R(x)&=\sum_{i=0}^{N}r_i(x-c)^i\end{aligned} \tag{3.7}$$

โดยที่ $S(x)$, $Q(x)$, $P(x)$ และ $R(x)$ เป็นพหุนามอันดับที่ N

แทนค่าสมการ (3.7) ในสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{N}\left[s_i(x-c)^i y''' + p_i(x-c)^i y'' + q_i(x-c)^i y' + r_i(x-c)^i y\right] = f(x) \tag{3.8}$$

พิจารณา $\sum_{i=0}^{N} r_i(x-c)^i y$ ในสมการ (3.8) เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{N} r_i(x-c)^i y = r_0 y + r_1(x-c)y + r_2(x-c)^2 y + \ldots + r_N(x-c)^N y \tag{3.9}$$

และ $$y = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_N(x-c)^N$$

นำ y เข้าไปแทนในสมการที่ (3.9) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} r_i(x-c)^i y = {} & r_0\left(a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_N(x-c)^N\right) \\ & + r_1(x-c)\left(a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_N(x-c)^N\right) \\ & + r_2(x-c)^2\left(a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_N(x-c)^N\right) \\ & + \ldots + r_N(x-c)^N\left(a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_N(x-c)^N\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

เขียนสมการที่ (3.10) ในรูปเมทริกซ์จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{N} r_i(x-c)^i y = r_0\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

$$+r_1\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

$$+r_2\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$+r_n\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

พิจารณาพจน์ $\sum_{i=0}^{N} q_i(x-c)^i$ ในสมการ (3.8) เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{N} q_i(x-c)^i y' = q_0 y' + q_1(x-c)y' + q_2(x-c)^2 y' + \ldots + q_N(x-c)^N y' \qquad (3.11)$$

และ $y' = a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N$

นำ y' ไปแทนในสมการที่ (3.11) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} q_i(x-c)^i y' = \;& q_0\left(a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N\right)\\ & +q_1(x-c)\left(a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N\right)\\ & +q_2(x-c)^2\left(a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N\right)\\ & +\ldots + q_N(x-c)^N\left(a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + Na_N(x-c)^{N-1} + (N+1)a_{N+1}(x-c)^N\right)\end{aligned}$$

ซึ่งเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\sum_{i=0}^{N} q_i(x-c)^i y' = q_0\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

$$+q_1\begin{bmatrix}(x-c) & (x-c)^2 & \ldots & (x-c)^N & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{N-1}\\ a_N\end{bmatrix}$$

$$+q_2\left[(x-c)^2 \quad (x-c)^3 \quad \ldots \quad (x-c)^N \quad 0 \quad 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$+q_n\left[(x-c)^n \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$=q_0\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+q_1\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+q_2\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$+q_n\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

พิจารณาพจน์ $\sum_{i=0}^{N} p_i (x-c)^i y''$ ในสมการ (3.8) เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{N} p_i (x-c)^i y'' = p_0 y'' + p_1 (x-c) y'' + p_2 (x-c)^2 y'' + \ldots + p_N (x-c)^N y'' \qquad (3.12)$$

และ
$$y'' = 2a_2 + 6a_3 (x-c) + 12a_4 (x-c)^2 + \ldots + (N-1) N a_N (x-c)^{N-2}$$

นำ y'' ไปแทนใน (3.12) ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} p_i (x-c)^i y'' = \; & p_0 \left(2a_2 + 6a_3 (x-c) + \ldots + (N-1) N a_N (x-c)^{N-2}\right) \\ & + p_1 (x-c)\left(2a_2 + 6a_3 (x-c) + \ldots + (N-1) N a_N (x-c)^{N-2}\right) \\ & + p_2 (x-c)^2 \left(2a_2 + 6a_3 (x-c) + \ldots + (N-1) N a_N (x-c)^{N-2}\right) \\ & + \ldots + p_N (x-c)^N \left(2a_2 + 6a_3 (x-c) + \ldots + (N-1) N a_N (x-c)^{N-2}\right)\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{N} p_i (x-c)^i y'' = p_0 \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+ p_1 \begin{bmatrix} (x-c) & (x-c)^2 & \ldots & (x-c)^N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+ p_2 \begin{bmatrix} (x-c)^2 & (x-c)^3 & \ldots & (x-c)^N & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$+p_n\left[(x-c)^n \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$= p_0\left[1 \;\; (x-c) \;\; (x-c)^2 \;\; \cdots \;\; (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+p_1\left[1 \;\; (x-c) \;\; (x-c)^2 \;\; \cdots \;\; (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+p_2\left[1 \;\; (x-c) \;\; (x-c)^2 \;\; \cdots \;\; (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\dots$

$$+p_N\left[1 \;\; (x-c) \;\; (x-c)^2 \;\; \cdots \;\; (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

พิจารณาพจน์ $\sum_{i=0}^{N} s_i (x-c)^i y'''$ ในสมการ (3.8) เนื่องจาก

$$\sum_{i=0}^{N} s_i (x-c)^i y''' = s_0 y''' + s_1 (x-c) y''' + s_2 (x-c)^2 y''' + \ldots + s_N (x-c)^N y''' \tag{3.13}$$

และ

$$y''' = 6a_3 + 24a_4 (x-c) + \ldots + (N-2)(N-1) N a_N (x-c)^{N-3}$$

นำ y''' ไปแทนในสมการที่ (3.13) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} s_i (x-c)^i y''' &= s_0 \left(6a_3 + 24a_4 (x-c) + \ldots + (N-2)(N-1) N a_N (x-c)^{N-3}\right) \\
&+ s_1 (x-c)\left(6a_3 + 24a_4 (x-c) + \ldots + (N-2)(N-1) N a_N (x-c)^{N-3}\right) \\
&+ s_2 (x-c)^2\left(6a_3 + 24a_4 (x-c) + \ldots + (N-2)(N-1) N a_N (x-c)^{N-3}\right) \\
&+ \ldots + s_N (x-c)^N\left(6a_3 + 24a_4 (x-c) + \ldots + (N-2)(N-1) N a_N (x-c)^{N-3}\right)
\end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{N} s_i (x-c)^i y''' = s_0 \begin{bmatrix} 1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+ s_1 \begin{bmatrix} (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+ s_2 \begin{bmatrix} (x-c)^2 & (x-c)^3 & \cdots & (x-c)^N & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$+s_N\left[(x-c)^n \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$=s_0\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+s_1\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$+s_2\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

$+\dots$

$$+s_N\left[1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \cdots \quad (x-c)^N\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-4} \\ a_{N-3} \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}$$

กำหนดให้

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

ดังนั้น $\mathbf{C}_p = \left[C_{ij} \right] = \begin{cases} 1; & \text{สำหรับ} \quad i - j = p \\ 0; & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

โดยที่ $\mathbf{M}$ นิยามตามสมการ (3.4)

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

และ

$$\mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (N-3)(N-2)(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (N-2)(N-1)N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

กำหนดให้ $\mathbf{X} = \left[1 \;\; (x-c) \;\; (x-c)^2 \;\; \dots \;\; (x-c)^N \right]$

ดังนั้นจะได้
$$(x-c)^p \, y^{(s)}(x) = \mathbf{X}\mathbf{C}_p\mathbf{M}^s\mathbf{A} \tag{3.14}$$

สำหรับ $p = 0, 1, 2, \dots, N$, $s = 0, 1, 2, 3$ และ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)}$

ในทำนองเดียวกันสมมติว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ (3.1) สามารถกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมกำลังได้ดังนี้

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N} f_r (x-c)^r$$

ดังนั้น

$$f(x)=f_0(x-c)^0+f_1(x-c)^1+f_2(x-c)^2+\ldots+f_n(x-c)^N$$
$$=\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \cdots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_N\end{bmatrix}$$

เขียน $f(x)$ ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$f(x)=\mathbf{XF} \tag{3.15}$$

โดยที่

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_0 & f_1 & \cdots & f_N\end{bmatrix}^T \tag{3.16}$$

แทนสมการ (3.14) และ (3.15) ลงในสมการ (3.8) ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{N}\left[s_i\mathbf{XC}_i\mathbf{M}^3\mathbf{A}+p_i\mathbf{XC}_i\mathbf{M}^2\mathbf{A}+q_i\mathbf{XC}_i\mathbf{MA}+r_i\mathbf{XC}_i\mathbf{A}\right]=\mathbf{XF}$$
$$\mathbf{X}\sum_{i=0}^{N}\left[s_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^3+p_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^2+q_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}+r_i\mathbf{C}_i\right]\mathbf{A}=\mathbf{XF}$$

โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนั้น
$$\sum_{i=0}^{N}\left[s_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^3+p_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^2+q_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}+r_i\mathbf{C}_i\right]\mathbf{A}=\mathbf{F} \tag{3.17}$$

ให้

$$\mathbf{W}=\sum_{i=0}^{N}\left[s_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^3+p_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}^2+q_i\mathbf{C}_i\mathbf{M}+r_i\mathbf{C}_i\right] \tag{3.18}$$

จะได้ว่า

$$\mathbf{WA}=\mathbf{F} \tag{3.19}$$

ดังนั้นเมทริกซ์แต่งเติมของสมการ (3.15) คือ

$$\left[\mathbf{W}|\mathbf{F}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f_0\\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & f_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & f_N\end{array}\right] \tag{3.20}$$

ต่อไปเราพิจารณาเงื่อนไขสมการ (3.2)

เนื่องจาก

$$y^{(0)}(x)=\sum_{r=0}^{N}a_r(x-c)^r$$

$$=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots+a_N(x-c)^N$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \ldots & (x-c)^N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (x-c) & (x-c)^2 & \ldots & (x-c)^N\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

$$y^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2(x-c) & \ldots & N(x-c)^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

$$y^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6(x-c) & \ldots & N(N-1)(x-c)^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A}$$

ดังนั้น $y^{(i)}(a)$, $y^{(i)}(b)$ และ $y^{(i)}(c)$ โดยที่ $i=0,1,2$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(c)&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(0)}(a)&=\begin{bmatrix}1 & h & h^2 & \ldots & h^N\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(0)}(b)&=\begin{bmatrix}1 & k & k^2 & \ldots & k^N\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(1)}(c)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(1)}(a)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2h & \ldots & Nh^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(1)}(b)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2k & \ldots & Nk^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(2)}(c)&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & \ldots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(2)}(a)&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6h & \ldots & N(N-1)h^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A}\\
y^{(2)}(b)&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6k & \ldots & N(N-1)k^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A}
\end{aligned}\qquad(3.21)$$

โดยที่ $h=a-c$ และ $k=b-c$ จากสมการ(3.2) สมมติว่าเงื่อนไขกำหนดดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
a_0 y^{(0)}(a) + b_0 y^{(0)}(b) + c_0 y^{(0)}(c) &= \lambda_0 \\
a_1 y^{(1)}(a) + b_1 y^{(1)}(b) + c_1 y^{(1)}(c) &= \lambda_1 \\
a_2 y^{(2)}(a) + b_2 y^{(2)}(b) + c_2 y^{(2)}(c) &= \lambda_2
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

โดยการแทนสมการ (3.21) ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_0\begin{bmatrix}1 & h & h^2 & \dots & h^N\end{bmatrix}\mathbf{A} + b_0\begin{bmatrix}1 & k & k^2 & \dots & k^N\end{bmatrix}\mathbf{A} + c_0\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_0 \\
a_1\begin{bmatrix}0 & 1 & 2h & \dots & Nh^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A} + b_1\begin{bmatrix}0 & 1 & 2k & \dots & Nk^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A} + c_1\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_1 \\
a_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6h & \dots & N(N-1)h^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A} + b_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6k & \dots & N(N-1)k^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A} & \\
+ c_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & \dots & 0\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_2
\end{aligned}
$$

ทำการจัดรูปดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\left(a_0\begin{bmatrix}1 & h & h^2 & \dots & h^N\end{bmatrix} + b_0\begin{bmatrix}1 & k & k^2 & \dots & k^N\end{bmatrix} + c_0\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\right)\mathbf{A} &= \lambda_0 \\
\left(a_1\begin{bmatrix}0 & 1 & 2h & \dots & Nh^{N-1}\end{bmatrix} + b_1\begin{bmatrix}0 & 1 & 2k & \dots & Nk^{N-1}\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}\right)\mathbf{A} &= \lambda_1 \\
\left(\begin{aligned} a_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6h & \dots & N(N-1)h^{N-2}\end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6k & \dots & N(N-1)k^{N-2}\end{bmatrix} \\ + c_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & \dots & 0\end{bmatrix}\end{aligned}\right)\mathbf{A} &= \lambda_2
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}a_0 + b_0 + c_0 & a_0 h + b_0 k & a_0 h^2 + b_0 h^2 & \cdots & a_0 h^N + b_0 h^N\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_0 \\
\begin{bmatrix}0 & a_1 + b_1 + c_1 & 2a_1 h + 2b_1 k & \cdots & a_1 N h^{N-1} + b_1 N k^{N-1}\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_1 \\
\begin{bmatrix}0 & 0 & 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 & 6a_2 h + 6b_2 k & \cdots & a_2 N(N-1)h^{N-2} + b_2 N(N-1)k^{N-2}\end{bmatrix}\mathbf{A} &= \lambda_2
\end{aligned}
$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$
\mathbf{UA} = \lambda_0, \qquad \mathbf{VA} = \lambda_1, \qquad \mathbf{ZA} = \lambda_2
$$

โดยที่

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix}u_0 & u_1 & \dots & u_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_0 + b_0 + c_0 & a_0 h + b_0 k & a_0 h^2 + b_0 h^2 & \cdots & a_0 h^N + b_0 h^N\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{V} = \begin{bmatrix}v_0 & v_1 & \dots & v_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & a_1 + b_1 + c_1 & 2a_1 h + 2b_1 k & \cdots & a_1 N h^{N-1} + b_1 N k^{N-1}\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{Z} = \begin{bmatrix}z_0 & z_1 & \dots & z_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 & 6a_2 h + 6b_2 k & \cdots & a_2 N(N-1)h^{N-2} + b_2 N(N-1)k^{N-2}\end{bmatrix}
$$

หรือเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{U}|\lambda_0\right] &= \left[u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_N|\lambda_0\right] \\
\left[\mathbf{V}|\lambda_1\right] &= \left[v_0 \quad v_1 \quad \dots \quad v_N|\lambda_1\right] \\
\left[\mathbf{Z}|\lambda_2\right] &= \left[z_0 \quad z_1 \quad \dots \quad z_N|\lambda_2\right]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

โดยที่ u_j, v_j, z_j เป็นค่าคงที่ ทำการตัด 3 แถวล่าง $n-1$ ถึง $n+1$ ของเมทริกซ์ (3.20) จะได้

$$\overline{\mathbf{W}}^* = \left[\begin{array}{cccc|c}
w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & f_0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & \cdots & w_{N-3,N} & f_{N-3} \\
u_0 & u_1 & \cdots & u_N & \lambda_0 \\
v_0 & v_2 & \cdots & v_N & \lambda_1 \\
z_0 & z_3 & \cdots & z_N & \lambda_2
\end{array}\right] \tag{3.24}$$

กำหนดให้

$$\mathbf{W}^* = \begin{bmatrix}
w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
w_{N-3,0} & w_{N-3,1} & \cdots & w_{N-3,N} \\
u_0 & u_1 & \cdots & u_N \\
v_0 & v_2 & \cdots & v_N \\
z_0 & z_3 & \cdots & z_N
\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-3} \\ \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ถ้าตัวกำหนดของ $\mathbf{W}^* \neq 0$ จะได้ $\mathbf{A} = \left(\mathbf{W}^*\right)^{-1}\mathbf{F}^*$ ซึ่งตัวอย่างของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสาม โดยใช้วิธีที่กล่าวมาแล้วข้างต้น จะกล่าวตัวอย่างในบทถัดไป

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในหัวข้อนี้คณะผู้วิจัยได้ใช้ขั้นตอนวิธีจากบทที่ 3 มาประมาณค่าผลเฉลยและทำการเปรียบเทียบผลเฉลยประมาณ $y(x)$ ที่ได้กับผลเฉลยจริง $y^*(x)$ และได้ทำการหาค่าคลาดเคลื่อน พร้อมทั้ง plot graph เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยประมาณที่ได้ด้วย

<u>ตัวอย่าง 4.1</u> พิจารณา $y''' + y'' + y' + y = xe^x, \quad x \in (0,2)$

$$y(0)=1, \quad y(2)=0, \quad y'(0)=0$$

ซึ่งมีผลเฉลยจริงคือ $y^*(x) = -0.3184e^{-x} + 1.6934\cos x - 0.1934\sin x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^x \qquad (4.1)$

<u>วิธีทำ</u> กำหนด $N=5$, เนื่องจาก $a=0,\ b=2$ และ $c=1$ ดังนั้น $h=a-c=-1,\ k=b-c=1$ ตามลำดับและอนุกรมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $c=1$ คือ $S(x)=1, P(x)=1, Q(x)=1$ และ $R(x)=1$

เนื่องจาก $S(x)=\sum_{i=0}^{N} s_i (x-1)^i \qquad P(x)=\sum_{i=0}^{N} p_i (x-1)^i$

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{N} q_i (x-1)^i \qquad R(x)=\sum_{i=0}^{N} r_i (x-1)^i$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละอนุกรม

$$s_0 = 1, s_1 = \ldots = s_5 = 0$$
$$p_0 = 1, \mathrm{p}_1 = \ldots = p_5 = 0$$
$$q_0 = 1, \mathrm{q}_1 = \ldots = q_5 = 0$$
$$r_0 = 1, \mathrm{r}_1 = \ldots = r_5 = 0$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สร้างเมทริกซ์ $\mathbf{W}$

จาก (3.18) และ (3.19) จะได้ว่า $\left[\mathbf{C}_0\mathbf{M}^3 + \mathbf{C}_0\mathbf{M}^2 + \mathbf{C}_0\mathbf{M} + \mathbf{C}_0\right]\mathbf{A} = \mathbf{F}$

$$\left(\mathbf{C}_0\begin{bmatrix}0&0&0&6&0&0\\0&0&0&0&24&0\\0&0&0&0&0&60\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\mathbf{C}_0\begin{bmatrix}0&0&2&0&0&0\\0&0&0&6&0&0\\0&0&0&0&12&0\\0&0&0&0&0&20\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\mathbf{C}_0\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\mathbf{C}_0\right)\mathbf{A}=\mathbf{F}$$

ดังนั้น $$\mathbf{WA}=\begin{bmatrix}1&1&2&6&0&0\\0&1&2&6&24&0\\0&0&1&3&12&60\\0&0&0&1&4&20\\0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{bmatrix} \quad (4.2)$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> พิจารณา $\mathbf{F}$

เนื่องจาก $f(x)=xe^x$ ทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน e^x รอบจุด $c=1$

จะได้ว่า $e^x \approx e+e(x-1)+\dfrac{e(x-1)^2}{2!}+\ldots$

เนื่องจาก $x=(x-1)+1$

ดังนั้น $$f(x)=\left[e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+\frac{e}{4!}(x-1)^4\right]\left[(x-1)+1\right]$$

$$=e+2e(x-1)+\frac{3e}{2}(x-1)^2+\frac{2e}{3}(x-1)^3+\frac{5e}{24}(x-1)^4\,\frac{e}{20}(x-1)^5$$

จากสมการ (3.16) จะได้ $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}2.7183 & 5.4366 & 4.0773 & 1.8122 & 0.5663 & 0.1359\end{bmatrix}^T \quad (4.3)$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> พิจารณาเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

เนื่องจาก $c=1$ ดังนั้น

$$y^{(0)}(x)=\begin{bmatrix}1 & (x-1) & (x-1)^2 & (x-1)^3 & (x-1)^4 & (x-1)^5\end{bmatrix}$$
$$y^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2(x-1) & 3(x-1)^2 & 4(x-1)^3 & 5(x-1)^4\end{bmatrix}$$
$$y^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6(x-1) & 12(x-1)^2 & 20(x-1)^3\end{bmatrix}$$

จากเงื่อนไข

$y(0)=1$ จะได้ $a_0=1, b_0=0, c_0=0$ ดังนั้น $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ และ $\lambda_0=1$

ดังนั้น $\mathbf{UA}=1$ $\quad (4.4)$

$y(2)=0$ จะได้ $a_1=0, b_1=1, c_1=0$ ดังนั้น $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $\lambda_1=0$

ดังนั้น $\mathbf{VA}=0$ $\quad (4.5)$

$y'(0)=0$ จะได้ $a_2=1, b_2=0, c_2=0$ ดังนั้น $\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5\end{bmatrix}$ และ $\lambda_2=0$

ดังนั้น $\mathbf{ZA}=0$ $\quad (4.6)$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ตัด 3 แถวล่าง แถวที่ $n-1$ ถึง $n+1$ ของ (4.2) และ (4.3) แล้วนำ (4.4), (4.5) และ (4.6) ไปแทน และแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{W}^*\mathbf{A}=\mathbf{F}^*$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 6 & 24 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 12 & 60\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.7183\\ 5.4366\\ 4.0774\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

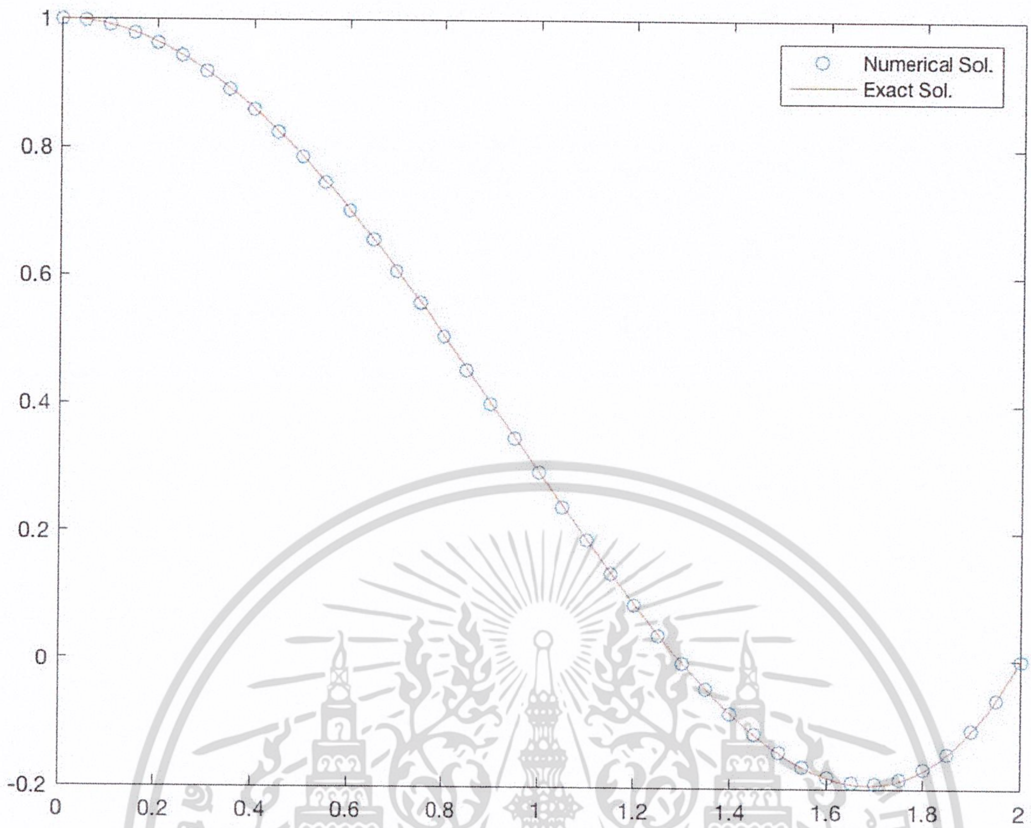
$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2928\\ -1.0684\\ 0.0817\\ 0.5552\\ 0.1255\\ 0.0137\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $y(\mathrm{x})=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4+a_5(x-1)^5$

$$=0.2928-1.0684(x-1)+0.0817(x-1)^2+0.5552(x-1)^3$$

$$+0.1255(x-1)^4+0.0137(x-1)^5 \quad (4.7)$$

รูปที่ 4.1 แสดงผลเฉลย $y(x)$ ที่หาได้เทียบกับผลเฉลยจริง $y^*(x)$ ดังสมการ (4.7) จะเห็นว่าเส้นกราฟใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมาก



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงค่าจริงและค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.1

หาค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ norm

$$\left\| y^*(x) - y(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{40} \left(y_i^*(x) - y_i(x) \right)^2} = 0.0118$$

N	4	5	6	7	8	9	10
Error	0.1159	0.0118	0.0141	0.0011	$2.4514x10^{-4}$	$6.6369x10^{-5}$	$7.7260x10^{-5}$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าคลาดเคลื่อนของตัวอย่างที่ 4.1

ในตัวอย่างที่ 4.2-4.4 เราจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่ และมีทั้งสมการที่เป็นเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ ดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.2</u> พิจารณา $y''' + x^2 y'' - y = e^x(x^3 + 2x^2 + 3), \qquad x \in (1,3)$

$$y(1) = e, \quad y(3) = 3e^3, \quad y'(1) = 2e$$

ซึ่งมีผลเฉลยจริงคือ $y^*(x) = e^{x+\ln x}$ (4.8)

<u>วิธีทำ</u> กำหนด $N = 5,$ เนื่องจาก $a = 1, b = 3$ และ $c = 2$ ดังนั้น $h = a - c = -1,\ k = b - c = 1$ ตามลำดับและอนุกรมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $c = 2$ คือ

$S(x) = 1,\ P(x) = x^2 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4,\ Q(x) = 0$ และ $R(x) = -1$

เนื่องจาก $S(x) = \sum_{i=0}^{N} s_i (x-1)^i \qquad P(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i (x-1)^i$

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i (x-1)^i \qquad R(x) = \sum_{i=0}^{N} r_i (x-1)^i$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละอนุกรมคือ

$$\begin{aligned} &s_0 = 1,\ s_1 = s_2 = \ldots = s_5 = 0 \\ &p_0 = 4,\ p_1 = 4,\ p_2 = 1,\ p_3 = p_4 = p_5 = 0 \\ &q_0 = q_1 = \ldots = q_5 = 0 \\ &r_0 = -1,\ r_1 = \ldots = r_5 = 0 \end{aligned}$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สร้างเมทริกซ์ $\mathbf{W}$

จาก (3.18) และ (3.19) จะได้ว่า $[\mathbf{C}_0\mathbf{M}^3 + 4\mathbf{C}_0\mathbf{M}^2 + 4\mathbf{C}_1\mathbf{M}^2 + \mathbf{C}_2\mathbf{M}^2 - \mathbf{C}_0]\mathbf{A} = \mathbf{F}$

ดังนั้น $$\mathbf{WA} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 24 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 24 & 48 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 48 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> พิจารณา $\mathbf{F}$

เนื่องจาก $f(x) = e^x(x^3 + 2x^2 + 3)$ ทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน e^x ที่มีศูนย์กลางที่

$c = 2$

จะได้ว่า $e^x \approx e^2 + e^2(x-2) + \dfrac{e^2(x-2)^2}{2!} + \ldots$

เนื่องจาก $x^3+2x^2+3=(x-2)^3+8(x-2)^2+20(x-2)+19$

ดังนั้น $f(x)=(e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2(x-2)^2}{2!})\left[(x-2)^3+8(x-2)^2+20(x-2)+19\right]$

$$=19e^2+39e^2(x-2)+\frac{75e^2(x-2)^2}{2}+\frac{133e^2(x-2)^3}{6}+\frac{73e^2(x-2)^4}{8}+\frac{113e^2(x-2)^5}{40}$$

จากสมการ (3.16) จะได้

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}140.3921 & 288.1732 & 277.0896 & 163.7907 & 67.4251 & 20.8741\end{bmatrix}^T \qquad (4.10)$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> พิจารณาเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

เนื่องจาก $c=2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x)&=\begin{bmatrix}1 & (x-2) & (x-2)^2 & (x-2)^3 & (x-2)^4 & (x-2)^5\end{bmatrix}\\
y^{(1)}(x)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2(x-2) & 3(x-2)^2 & 4(x-2)^3 & 5(x-2)^4\end{bmatrix}\\
y^{(2)}(x)&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6(x-2) & 12(x-2)^2 & 20(x-2)^3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไข

$y(1)=e$ จะได้ $a_0=1,\ b_0=0,\ c_0=0$ ดังนั้น $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ และ $\lambda_0=e$

ดังนั้น $\mathbf{UA}=e$ $\qquad (4.11)$

$y(3)=3e^3$ จะได้ $a_1=0,\ b_1=1,\ c_1=0$ ดังนั้น $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $\lambda_1=3e^3$

ดังนั้น $\mathbf{VA}=3e^3$ $\qquad (4.12)$

$y'(1)=2e$ จะได้ $a_2=1,\ b_2=0,\ c_2=0$ ดังนั้น $\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5\end{bmatrix}$ และ $\lambda_2=2e$

ดังนั้น $\mathbf{ZA}=2e$ $\qquad (4.13)$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ตัด 3 แถวล่าง แถวที่ $n-1$ ถึง $n+1$ ของ (4.9) และ (4.10) แล้วนำ (4.11), (4.12) และ (4.13) ไปแทน และแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{W}^*\mathbf{A} = \mathbf{F}^*$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 24 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 24 & 48 & 60 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140.392 \\ 286.173 \\ 277.089 \\ e \\ 3e^3 \\ 2e \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

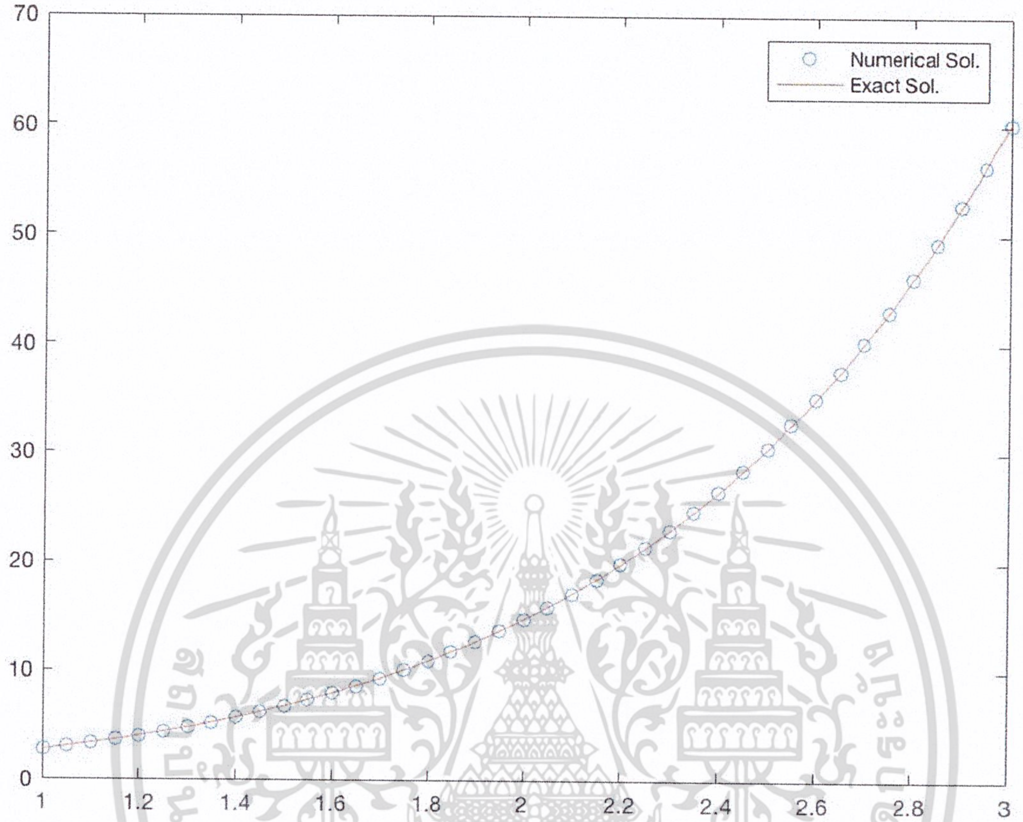
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.7768 \\ 22.2497 \\ 14.8189 \\ 6.1029 \\ 1.8917 \\ 0.4166 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $y(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + a_4(x-2)^4 + a_5(x-2)^5$

$$= 14.7768 + 22.2497(x-2) + 14.8189(x-2)^2 + 6.1029(x-2)^3$$

$$+1.8917(x-2)^4 + 0.4166(x-2)^5 \qquad (4.14)$$

รูปที่ 4.2 แสดงผลเฉลย $y(x)$ ที่หาได้เทียบกับผลเฉลยจริง $y^*(x)$ ดังสมการ (4.14) จะเห็นว่าเส้นกราฟใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมาก



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงค่าจริงและค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.2

หาค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ norm

$$\left\| y^*(x) - y(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{40} \left(y_i^*(x) - y_i(x) \right)^2} = 0.1816$$

N	4	5	6	7	8	9	10
Error	1.9800	0.1816	0.0738	0.0064	0.0018	$1.2470x10^{-4}$	$2.3141x10^{-5}$

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าคลาดเคลื่อนของตัวอย่างที่ 4.2

<u>ตัวอย่างที่ 4.3</u> พิจารณา $x^3y'''+x^2y''-xy'+y=0, \quad x\in(1,3)$

$$y(1)=1, \quad y(3)=4, \quad y'(1)=0$$

ซึ่งมีผลเฉลยจริงคือ $y^*(x)=-1.4064x+1.2941x^{1.6180}+1.1123x^{-0.6180}$ (4.15)

<u>วิธีทำ</u> กำหนด $N=10$, เนื่องจาก $a=1, b=3$ และ $c=2$ ดังนั้น $h=a-c=-1, \; k=b-c=1$ ตามลำดับและอนุกรมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $c=2$ คือ

$$S(x)=x^3=8+12(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$$
$$P(x)=x^2=4+4(x-2)+(x-2)^2$$
$$Q(x)=-x=-4-(x-2)$$
$$R(x)=1$$

เนื่องจาก $S(x)=\sum_{i=0}^{N}s_i(x-1)^i \qquad P(x)=\sum_{i=0}^{N}p_i(x-1)^i$

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{N}q_i(x-1)^i \qquad R(x)=\sum_{i=0}^{N}r_i(x-1)^i$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละอนุกรม

$$s_0=8, \; s_1=12, \; s_2=6, \; s_3=1, s_4=s_5=0$$
$$p_0=4, \; p_1=4, \; p_2=1, \; p_3=p_4=p_5=0$$
$$q_0=-4, q_1=1, q_2=\ldots=q_5=0$$
$$r_0=1, \; r_1=\ldots=r_5=0$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สร้างเมทริกซ์ $\mathbf{W}$

จาก (3.18) และ (3.19) จะได้ว่า

$$[8\mathbf{C}_0\mathbf{M}^3+12\mathbf{C}_1\mathbf{M}^3+6\mathbf{C}_2\mathbf{M}^3+\mathbf{C}_3\mathbf{M}^3+4\mathbf{C}_0\mathbf{M}^2+4\mathbf{C}_1\mathbf{M}^2+\mathbf{C}_2\mathbf{M}^2-4\mathbf{C}_0\mathbf{M}-\mathbf{C}_1\mathbf{M}+\mathbf{C}_0]\mathbf{A}=\mathbf{F}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{WA}=\begin{bmatrix}1&-4&8&48&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&96&192&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&48&336&480&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&176&800&960&0&0&0&0\\0&0&0&0&33&420&1560&1680&0&0&0\\0&0&0&0&0&76&816&2688&2688&0&0\\0&0&0&0&0&0&145&1400&4256&4032&0\\0&0&0&0&0&0&0&246&2208&6336&5760\\0&0&0&0&0&0&0&0&385&3276&9000\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&568&4640\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&801\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9\\a_{10}\end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> พิจารณา $\mathbf{F}$

เนื่องจากตัวอย่างที่ (4.3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ ดังนั้น $f(x)=0$

จากสมการ (3.16) จะได้ $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^T$ (4.17)

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> พิจารณาเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

เนื่องจาก $c=3$ ดังนั้น

$$y^{(0)}(x)=\begin{bmatrix}0 & (x-2) & (x-2)^2 & (x-2)^3 & (x-2)^4 & (x-2)^5 & \dots & (x-2)^{10}\end{bmatrix}$$
$$y^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2(x-2) & 3(x-2)^2 & 4(x-2)^3 & 5(x-2)^4 & \dots & 10(x-2)^9\end{bmatrix}$$
$$y^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6(x-2) & 12(x-2)^2 & 20(x-2)^3 & \dots & 90(x-2)^8\end{bmatrix}$$

จากเงื่อนไข

$y(1)=1$ จะได้ $a_0=1, b_0=0, c_0=0$ ดังนั้น $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}0&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1&-1&1\end{bmatrix}$

และ $\lambda_0=1$

ดังนั้น $\mathbf{UA}=1$ (4.18)

$y(3)=4$ จะได้ $a_1=0, b_1=1, c_1=0$ ดังนั้น $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$ และ $\lambda_1=4$

ดังนั้น $\mathbf{VA}=4$ (4.19)

$y'(1)=0$ จะได้ $a_2=1, b_2=0, c_2=0$ ดังนั้ $\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0&1&-2&3&-4&5&-6&7&-8&9&-10\end{bmatrix}$

และ $\lambda_2=0$

ดังนั้น $\mathbf{ZA}=0$ (4.20)

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ตัด 3 แถวล่าง แถวที่ $n-1$ ถึง $n+1$ ของ (4.16) และ (4.17) แล้วนำ (4.18), (4.19) และ (4.20) ไปแทน และแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{W}^*\mathbf{A}=\mathbf{F}^*$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 96 & 192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 48 & 336 & 480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 176 & 800 & 960 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 33 & 420 & 1560 & 1680 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 76 & 816 & 2688 & 2688 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 145 & 1400 & 4256 & 4032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 246 & 2208 & 6336 & 5760 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8169 \\ 1.5309 \\ 0.6670 \\ -0.0214 \\ 0.0107 \\ -0.0068 \\ 0.0039 \\ -0.0021 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

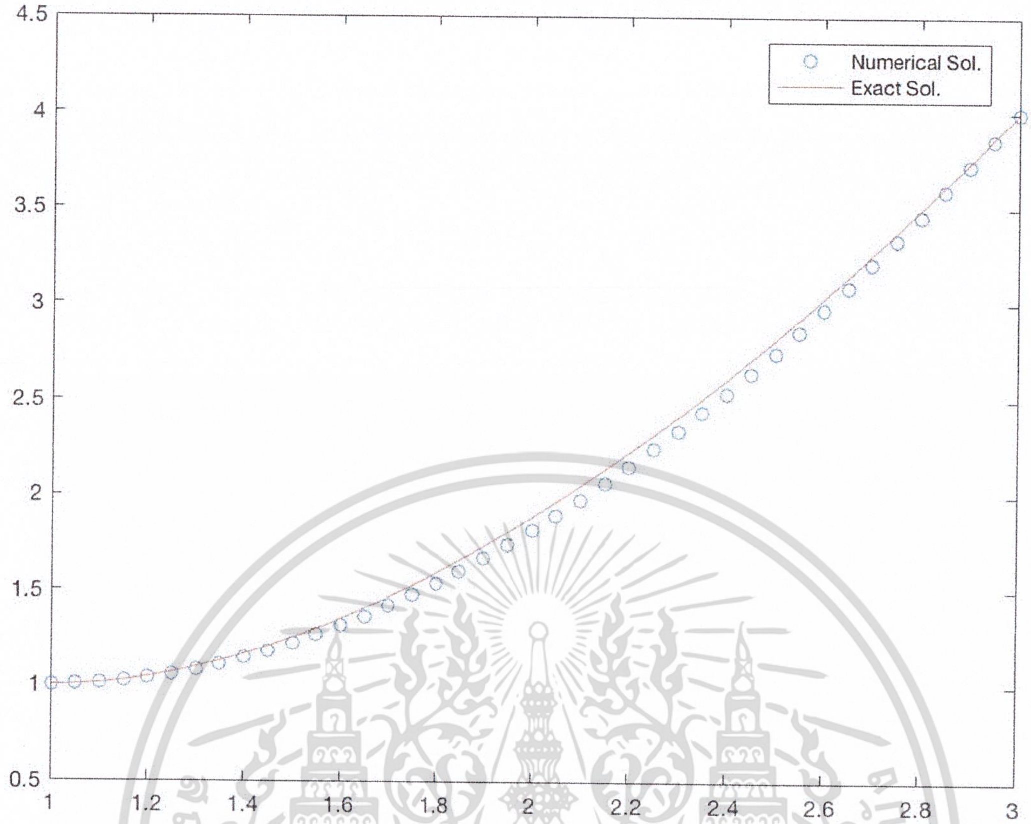
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8169 \\ 1.5309 \\ 0.6670 \\ -0.0214 \\ 0.0107 \\ -0.0068 \\ 0.0039 \\ -0.0021 \\ 0.0011 \\ -0.0006 \\ 0.0003 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$y(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3+a_4(x-2)^4+a_5(x-2)^5+a_6\left(x-2\right)^6+a_7\left(x-2\right)^7$$
$$+a_8\left(x-2\right)^8+a_9\left(x-2\right)^9+a_{10}\left(x-2\right)^{10}$$

$$=1.8169+1.5309(x-2)+0.6670(x-2)^2-0.0214(x-2)^3+0.0107(x-2)^4-0.0068(x-2)^5$$
$$+0.0039(x-2)^6-0.0021(x-2)^7+0.0011(x-2)^8-0.0006(x-2)^9$$
$$+0.0003(x-2)^{10} \tag{4.21}$$

รูปที่ 4.3 แสดงผลเฉลย $y(x)$ ที่หาได้เทียบกับผลเฉลยจริง $y^*(x)$ ดังสมการ (4.21) จะเห็นว่าเส้นกราฟใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมาก



รูปที่ 4.3 กราฟแสดงค่าจริงและค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.3

หาค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ norm

$$\left\| y^*(x) - y(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{40} \left(y_i^*(x) - y_i(x) \right)^2} = 0.3169$$

N	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Error	0.4399	0.3823	0.3609	0.3379	0.3286	0.3204	0.3169	0.3141	0.3128

ตารางที่ 4.3 แสดงค่าคลาดเคลื่อนของตัวอย่างที่ 4.3

<u>ตัวอย่าง 4.4</u> พิจารณา $x^5y'''+x^3y''+xy'+y=x^2e^x(x^5+6x^4+5x^3-4x^2-x+3), \quad x\in(-1,1)$

$$y(-1)=e^{-1}, \quad y(1)=e, \quad y'(-1)=-3e^{-1}$$

ซึ่งมีผลเฉลยจริงคือ $y^*(x)=x^2e^x$ (4.22)

<u>วิธีทำ</u> กำหนด $N=10$, เนื่องจาก $a=-1, b=1$ และ $c=0$ ดังนั้น $h=a-c=-1, k=b-c=1$ ตามลำดับและอนุกรมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $c=0$ คือ $S(x)=x^5, P(x)=x^3, Q(x)=x$ และ $R(x)=1$

เนื่องจาก $S(x)=\sum_{i=0}^{N}s_i(x-1)^i \qquad P(x)=\sum_{i=0}^{N}p_i(x-1)^i$

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{N}q_i(x-1)^i \qquad R(x)=\sum_{i=0}^{N}r_i(x-1)^i$$

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละอนุกรม

$$s_0=\ldots=s_4=0, s_5=1$$
$$p_0=\ldots=p_2, p_3=1, p_4=p_5=0$$
$$q_0=0,=p_1=1, p_2=\ldots=p_5=0$$
$$r_0=1,=r_1=\ldots=r_5=0$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> สร้างเมทริกซ์ $\mathbf{W}$

จาก (3.18) และ (3.19) จะได้ว่า $[\mathbf{C}_5\mathbf{M}^3+\mathbf{C}_3\mathbf{M}^2+\mathbf{C}_1\mathbf{M}+\mathbf{C}_0]\mathbf{A}=\mathbf{F}$ ดังนั้น

$$\mathbf{WA}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&4&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&6&5&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&6&12&6&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&24&20&7&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&60&30&8&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&120&42&9&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&210&56&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&336&72&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9\\a_{10}\end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> พิจารณา $\mathbf{F}$

เนื่องจาก $f(x)=x^2e^x(x^5+6x^4+5x^3-4x^2-x+3)$ ทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน e^x รอบจุด $c=0$

จะได้ว่า $e^x \approx 1+x+x^2+\dfrac{x^2}{2!}+...$

ดังนั้น $f(x)=3x^2+6x^3+\dfrac{17x^4}{2}+13x^5+\dfrac{125x^6}{8}+\dfrac{679x^7}{60}+\dfrac{429x^8}{80}+\dfrac{1537x^9}{840}+\dfrac{19403x^{10}}{40320}$

จากสมการ (3.16) จะได้

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & 6 & 8.5000 & 13 & 15.6250 & 11.3167 & 5.3625 & 1.8298 & 0.4812\end{bmatrix}^T \quad (4.24)$$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> พิจารณาเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

เนื่องจาก $c=0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x)&=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & x^{10}\end{bmatrix}\\
y^{(1)}(x)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 & 6x^5 & 7x^6 & 8x^7 & 9x^8 & 10x^9\end{bmatrix}\\
y^{(2)}(x)&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6x & 12x^2 & 20x^3 & 30x^4 & 42x^5 & 56x^6 & 72x^7 & 90x^8\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไข

$y(-1)=e^{-1}$ จะได้ $a_0=1, b_0=0, c_0=0$ ดังนั้น $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

และ $\lambda_0=e^{-1}$

ดังนั้น $\mathbf{UA}=e^{-1}$ $\quad (4.25)$

$y(1)=e$ จะได้ $a_1=0, b_1=1, c_1=0$ ดังนั้น $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

และ $\lambda_1=e$

ดังนั้น $\mathbf{VA}=e$ $\quad (4.26)$

$y'(-1)=-3e^{-1}$ จะได้ $a_2=1, b_2=0, c_2=0$

ดังนั้น $\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -10\end{bmatrix}$ และ $\lambda_2=-3e^{-1}$

ดังนั้น $\mathbf{ZA}=-3e^{-1}$ $\quad (4.27)$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ตัด 3 แถวล่าง แถวที่ $n-1$ ถึง $n+1$ ของ (4.23) และ (4.24) แล้วนำ (4.25), (4.26) และ (4.27) ไปแทน และแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{W}^*\mathbf{A} = \mathbf{F}^*$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 20 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 30 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 8.5000 \\ 13 \\ 15.6250 \\ 11.3167 \\ e^{-1} \\ e \\ -3e^{-1} \end{bmatrix}$$

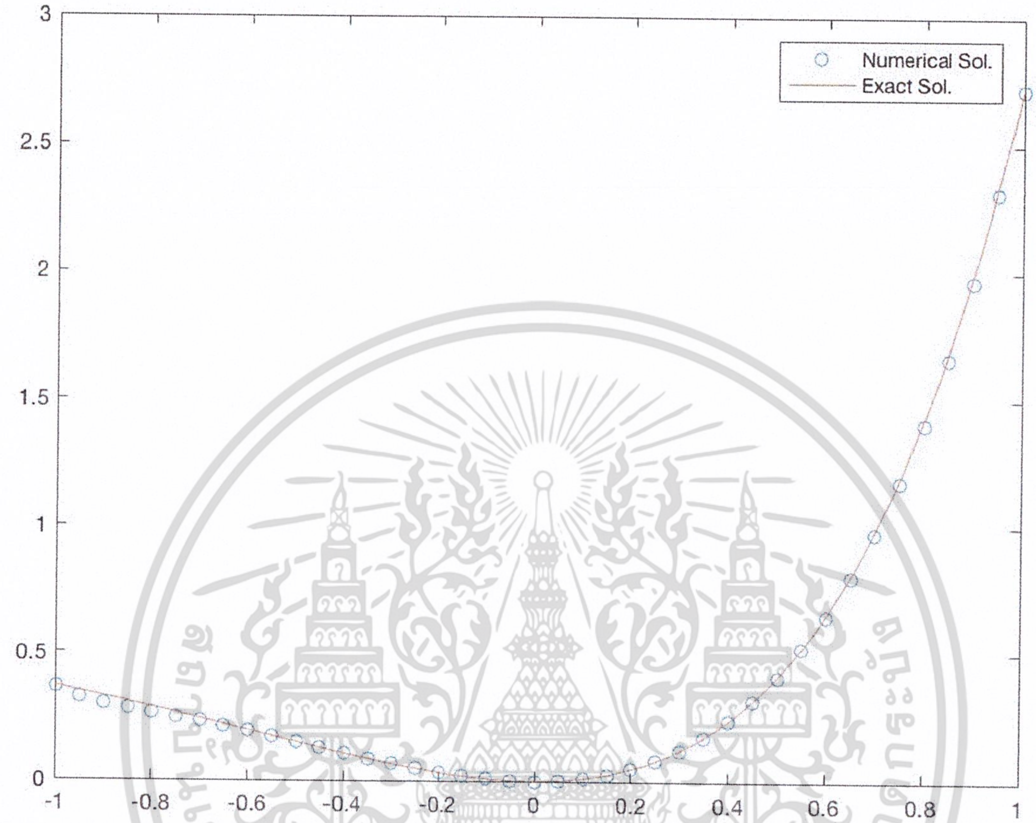
จะได้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.1667 \\ 0.0417 \\ 0.0083 \\ -0.3665 \\ 0.002 \\ 0.3679 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1(x) + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + \ldots + a_8(x)^8 + a_9(x)^9 + a_{10}(x)^{10} \\ &= x^2 + x^3 + 0.5x^4 + 0.1667x^5 + 0.0417x^6 + 0.0083x^7 - 0.3665x^8 + 0.002x^9 \\ &\quad +0.3679x^{10} \end{aligned} \qquad (4.8)$$

รูปที่ 4.4 แสดงผลเฉลย $y(x)$ ที่หาได้เทียบกับผลเฉลยจริง $y^*(x)$ ดังสมการ (4.28) จะเห็นว่าเส้นกราฟใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมาก



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงค่าจริงและค่าประมาณของตัวอย่างที่ 4.4

หาค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้ norm

$$\left\| y^*(x) - y(x) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{40} \left(y_i^*(x) - y_i(x) \right)^2} = 0.0798$$

N	5	6	7	8	9	10	11	12
Error	0.2783	0.1794	0.1426	0.1142	0.0945	0.0798	0.0685	0.0597

ตารางที่ 4.4 แสดงค่าคลาดเคลื่อนของตัวอย่างที่ 4.4

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าผลเฉลยโดยประมาณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงดังรูปที่ 4.1-4.4 และการคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนจะเห็นว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ได้มีค่าที่น้อย

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั้งที่เป็นเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์อันดับ 3 โดยใช้อนุกรมกำลังและพหุนามเทย์เลอร์มาช่วยในการประมาณ ซึ่งขั้นตอนวิธีการคำนวณของการใช้อนุกรมกำลังและอนุกรมเทย์เลอร์นั้นเป็นวิธีการที่ไม่ซับซ้อนในการคำนวณ และค่าคลาดเคลื่อนที่ได้นั้นค่อนข้างน้อยและผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงดังรูปภาพที่ 4.1-4.4 ดังนั้นวิธีการนี้จึงเป็นวิธีการที่เหมาะสมวิธีการหนึ่งในการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นทั้งที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่และไม่ใช่ค่าคงที่และได้ทั้งสมการเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์อันดับ 3

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจศึกษาวิธีการหาค่าประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ สามารถนำวิธีการนี้ไปศึกษาต่อสำหรับ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่สูงกว่าอันดับ 3 ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] พัชรินทร์ เหมโชติ. 2555. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** กรุงเทพฯ : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[2] พัชรินทร์ เหมโชติ, ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. 2555. **พีชคณิตเชิงเส้น.** กรุงเทพฯ : มีน-เซอร์วิส ซัพพลาย

[3] อนัญญา อภิชาตบุตร. 2549. **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ : บริษัทวิทยพัฒน์ จำกัด

[4] M. Sezer, C. Kesan. **Polynomial solutions of certain differential equations.** Int.J. Comput. Math. 76 (2000) 93-104.