

ความถูกต้องอันดับสองและสามของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิง
เส้นอันดับสี่โดยใช้วิธีผลต่างอันตะ

THE SECOND AND THIRD ORDER OF ACCURACY OF
FOURTH-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE SECOND AND THIRD ORDER OF ACCURACY OF
FOURTH-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD



WARARAT YASAN
WIRINANSIRI BUMRUNG
ADCHARAPORN LUEANGCHAROENLAP

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

ความถูกต้องอันดับสองและสามของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่โดยใช้วิธีผลต่างอันดับ

The Second and Third Order of Accuracy of Fourth-Order Linear Ordinary Differential Equations Using The Finite Difference Method

ชื่อนักศึกษา

นางสาว วรรัตน์ ยะสาร รหัสนักศึกษา 57050127
นางสาว วิรินันศิริ บำรุง รหัสนักศึกษา 57050133
นางสาว อัจฉราพร เหลืองเจริญลาภ รหัสนักศึกษา 57050166

ปริญญา

วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา

2560

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ.ดร.กนกณัฐรุช วัฒนแจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อาจารย์พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.เดชา สมณะ กรรมการ	
ผศ.ดร.กนกณัฐรุช วัฒนแจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในของคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังขอสงวนสิทธิ์ในการนำ回去

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ความถูกต้องอันดับสองและสามของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่โดยใช้วิธีผลต่างอันดับ		
ชื่อนักศึกษา	นางสาว วรรัตน์ ยะสาร	รหัสนักศึกษา	57050127
	นางสาว วิรินันศิริ บำรุง	รหัสนักศึกษา	57050133
	นางสาว อัจฉราพร เหลืองเจริญลาภ	รหัสนักศึกษา	57050166
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์		
คณะ	วิทยาศาสตร์		
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)		
ปีการศึกษา	2560		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กนกณัฐรุช วัฒนแจ่มศรี		

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ทั้งในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ โดยประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับสำหรับปัญหาค่าขอบที่มีความถูกต้องแม่นยำถึงอันดับสองและอันดับสาม ในที่นี้ผู้วิจัยได้แบ่งระเบียบวิธีผลต่างอันดับออกเป็น 3 วิธีย่อย คือ วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง ซึ่งใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

คำสำคัญ : ปัญหาค่าขอบ ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ ความถูกต้องแม่นยำอันดับสองและสาม

Title	The Second and Third Order of Accuracy of Fourth-Order Linear Ordinary Differential Equations Using The Finite Differential The Finite Difference Method		
Students	Miss. Wararat Yasan	Student ID	57050127
	Miss. Wirinansiri Bumrung	Student ID	57050133
	Miss. Adcharaporn Lueangcharoenlap	Student ID	57050166
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)		
Department	Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2017		
Advisor	Asst. Prof. Dr. Kanognudge Wattanachamsri		

Abstract

In this research, we use the finite difference method to solve linear fourth order ordinary differential equations in both homogeneous and non-homogeneous from of equations with the second and third order of accuracy. Since each problem is proper with different approaches. Here the finite difference method is divided into three different technique. Six-point forward difference method, six-point backward difference method and six-point central difference method. We use a mathematical program to find the numerical solution. The solutions are compared with analytical results.

Keywords: Boundary Value Problem Finite Difference Method Ordinary Differential Equation Fourth-order Order of accuracy second and third

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยการให้ความช่วยเหลือแนะนำของ ผศ.ดร.กนกณัฐษ์ วัฒนแจ่มศรี ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำข้อคิดเห็นตรวจสอบ และแก้ไขร่างปัญหาพิเศษ มาโดยตลอด ผู้เขียนจึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์พรชัย ชัยสนธิ ที่กรุณาให้เกียรติเป็นประธาน โดยมี ผศ.ดร.เดชา สมณะ เป็นกรรมการในการสอบปัญหาพิเศษ ซึ่งได้กรุณาตรวจแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และให้คำปรึกษาแนะนำในทุก ๆ ด้าน รวมถึงเจ้าหน้าที่บัณฑิตทุกท่านที่ให้ความสะดวกด้านอำนวยความสะดวก และประสานงาน ในการทำปัญหาพิเศษให้ผู้เขียนตลอดมาตลอดจนค้นคว้าหาข้อมูลในการจัดทำปัญหาพิเศษของผู้เขียนครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ท้ายนี้ผู้เขียนขอน้อมรำลึกถึงอำนาจบารมีของคุณพระศรีรัตนตรัย และสิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลายที่อยู่ในสากลโลก อันเป็นที่พึ่งให้ผู้เขียนมีสติปัญญาในการจัดทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้เขียนขอให้เป็นกตเวทิตาแต่บิดา มารดา ครอบครัวของผู้เขียน ตลอดจนผู้เขียนหนังสือ และบทความต่าง ๆ ที่ให้ความรู้แก่ผู้เขียนจนสามารถให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

วรรัตน์ ยะสาร

วรินันศิริ บำรุง

อัฉรภาพร เหลืองเจริญลาภ

สารบัญ

บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....	2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์และปัญหาค่าขอบ.....	4
2.2 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์.....	6
2.2.1 บทนิยามของอนุกรมเทย์เลอร์.....	6
2.2.2 ทฤษฎีบทของอนุกรมเทย์เลอร์.....	7
2.2.3 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์.....	8
2.3 การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation).....	9
2.4 วิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method).....	16
2.5 ค่าคลาดเคลื่อน (Error).....	19
2.6 สัญกรณ์โอใหญ่ (Big O Notation).....	21
2.7 อันดับความแม่นยำ.....	22
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	23
3.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์.....	23
3.1.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	23
3.1.1.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	23
3.1.1.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	27
3.1.1.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีก 30

สารบัญ(ต่อ)

3.1.1.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	33
3.1.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง	36
3.1.2.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง	36
3.1.2.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง	40
3.1.2.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง	43
3.1.2.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง	46
3.1.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง	49
3.1.3.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง	49
3.1.3.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง.....	53
3.1.3.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง	57
3.1.3.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง.....	60
3.2 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างอันดับ.....	64
3.2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	64
3.2.2 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง.....	67
3.2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง	70
บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล.....	73
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	105
เอกสารอ้างอิง.....	106

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h)$	13
2.2 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h)$	13
2.3 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$	14
2.4 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$	14
2.5 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$	15
2.6 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^4)$	15
4.1 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$	74
4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$	74
4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)	75
4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)	76
4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$	76
4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)	77
4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)	78

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.4 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับ80	80
4.5 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$81	81
4.5 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ)82	82
4.6 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$82	82
4.6 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)83	83
4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$83	83
4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)84	84
4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)85	85
4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)86	86
4.8 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับ88	88
4.9 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$89	89

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.9 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ).....	90
4.10 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$	90
4.10 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ).....	91
4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$	91
4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	92
4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	93
4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	94
4.12 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับ.....	96
4.13 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$	97
4.13 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ).....	98
4.14 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$	98

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.14 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ).....	99
4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$	99
4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	100
4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	101
4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ).....	102
4.16 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันตะ.....	104

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยสูตรผลต่างข้างหน้า สูตรผลต่างย้อนหลัง และ สูตรผลต่างกลาง.....	9
2.2 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างข้างหน้า	10
2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างย้อนหลัง.....	11
2.4 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างตรงกลาง.....	11
4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	79
4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง	79
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง.....	80
4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า	87
4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง	87
4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง.....	87
4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	95
4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง	95
4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง.....	95
4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า.....	103
4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง.....	103
4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง	103

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในแขนงต่าง ๆ ดังเช่นที่เราจะได้พบเห็นในหนังสือทั่วไป ส่วนใหญ่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ ความเข้าใจในสมการเหล่านี้มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งที่จะนำไปสู่การเลือกใช้ระเบียบวิธีที่ถูกต้องเหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหานั้น ก่อนทำความเข้าใจสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ เราจำเป็นต้องเข้าใจความหมายของค่าอนุพันธ์ (derivative) ซึ่งเราเคยศึกษากันมาบ้างแล้วในวิชาแคลคูลัส ค่าอนุพันธ์บ่งถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามต่อตัวแปรต้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามารถจำแนกตามประเภทของตัวแปรอิสระได้เป็น 2 ประเภท คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และตัวแปรอิสระที่มากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญบางปัญหายากสำหรับการหาผลเฉลยจริงหรือไม่สามารถหาผลเฉลยจริงได้จึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข ในที่นี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีผลต่างอันดับในการหาผลเฉลยตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองและความถูกต้องแม่นยำอันดับสาม

ในทางคณิตศาสตร์ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเป็นวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ในการศึกษานี้ได้สนใจเฉพาะการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ โดยวิธีการหาผลเฉลย คือ แทนค่าอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์แล้วสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในขั้นตอนสุดท้ายทำการเปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลขและวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนเพื่อให้เห็นว่าวิธีการหาผลเฉลยมีประสิทธิภาพและถูกต้องแม่นยำ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสองและอันดับสาม
- 2) สร้างขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์สำหรับหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) สมการเชิงอนุพันธ์ที่ศึกษาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่
- 2) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ศึกษาเป็นสมการที่ศึกษาด้านโดเมนแบบ 1 มิติ โดยที่ $a < x < b$
- 3) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ที่ได้มีเพียงคำตอบเดียว

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ศึกษาวิธีเชิงตัวเลข โดยเฉพาะระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่
- 2) สามารถนำความรู้ทางด้านวิธีเชิงตัวเลขมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ได้
- 3) ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ จากการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่
- 4) สามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับงานวิจัยขั้นสูงต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

- 1) กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ
- 2) ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา
- 3) ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ด้วยวิธีเชิงตัวเลข คือ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ
- 4) นำความรู้และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่และประยุกต์ใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์
- 5) สรุปผลงานวิจัย
- 6) จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนอผลงานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

12 เดือน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน/ ระยะเวลา	ระยะเวลาในการดำเนินงาน											
	ปี พ.ศ.2560					ปี พ.ศ.2561						
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.
1.กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ												
2.ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา												
3.ศึกษาการหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลข คือ ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ												
4.นำความรู้และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการหาผลเฉลย												
5.ประยุกต์ใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์												
6.สรุปผลการวิจัย												
7.จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนอ												

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์และปัญหาค่าขอบ

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (derivative) หรือค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตาม (dependent variable) หนึ่งตัว หรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระ (independent variable) หนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัว

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์สามัญ (ordinary derivative) ของตัวแปรตามหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) อันดับ n คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

หรือ
$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

โดย f เป็นฟังก์ชันของ $n+2$ ตัวแปร $x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n (linear differential equation of order n) คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ที่มีรูปแบบ

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = R(x) \quad (\Delta)$$

เมื่อ $a_0(x) \neq 0$ และ $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), R(x)$ คือ ฟังก์ชันของ x เท่านั้น และนิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งของจำนวนจริง และ x, y เป็นตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ตามลำดับ

ในกรณีที่ $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ เป็นค่าคงตัว เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (constant coefficients) ในกรณีที่ค่าเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันของ x จะเรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร (variable coefficients) เราเรียกสมการที่ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป (Δ) ได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (non-linear differential equation)

ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) คือ ปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n คือ $f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ และเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ที่กำหนดค่าของ y และ/หรือ ค่าอนุพันธ์ของ y ณ จุดของตัวแปรอิสระ x ที่อยู่ที่จุดขอบสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''') \text{ สำหรับ } a < x < b$$

ที่มีเงื่อนไขขอบ $y(a) = \alpha_1$ และ $y(b) = \beta_1$ และ $y'(a) = \alpha_2$ และ $y'(b) = \beta_2$

จะเรียกว่า ปัญหาค่าขอบ

เงื่อนไขขอบแบ่งออกเป็น 3 แบบ คือ

1. เงื่อนไขขอบดิริชเลท (Dirichlet Boundary Condition) คือ เงื่อนไขขอบที่ทราบค่าของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าที่จุดขอบ

ตัวอย่าง รูปแบบเงื่อนไขขอบดิริชเลท คือ $y(a) = \alpha$ และ $y(b) = \beta$

2. เงื่อนไขขอบนอยมันน์ (Neumann Boundary Condition) คือ เงื่อนไขขอบที่ประกอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า

ตัวอย่าง รูปแบบเงื่อนไขขอบนอยมันน์ คือ $y'(a) = \alpha$ และ $y'(b) = \beta$

3. เงื่อนไขขอบโรบิน (Robin Boundary Condition) คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันและผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าที่จุดขอบ

ตัวอย่าง รูปแบบเงื่อนไขขอบโรบิน คือ

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3$$

2.2 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งวิธีอนุกรมเทย์เลอร์เป็นวิธีการประมาณค่าที่นิยมนำมาใช้ในทางวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ การประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์นั้นจะต้องเพิ่มพจน์การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์เพื่อให้ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งอย่างแม่นยำและรวดเร็ว ต่อไปนี้จะพูดถึงทฤษฎีบทและบทนิยามของอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

2.2.1 บทนิยามของอนุกรมเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f และอนุพันธ์ทุกอันดับของ f มีค่าที่จุด a อนุกรมกำลังในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** ของ f รอบจุด a ถ้า $a=0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคลอริน** หมายเหตุ เมื่อให้ $f^{(0)}(a) = f(a)$ เราจะเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ในรูปแบบทั่วไปได้เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

บทนิยาม 2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด $x=a$ ถึงอันดับที่ n เรากล่าวว่า $P_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n** ของ f กระจายรอบจุด $x=a$ ก็ต่อเมื่อ

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

และสามารถเขียนได้ในรูป $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

ในกรณีที่ $a=0$ เราอาจเรียกพหุนามเทย์เลอร์ว่า **พหุนามแมคลอริน** ของ f กระจายในกำลังของ x

2.2.2 ทฤษฎีบทของอนุกรมเทย์เลอร์

ทฤษฎีบท 2.1 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอันดับอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ หาค่าได้บนช่วงเปิด I และให้ $x, a \in I$ แล้วค่าของ $f(x)$ คือ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

โดยที่ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ และเรียกว่า เศษเหลือ และเรียกสมการดังกล่าวว่า

สูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือดีกรี n ของ f ณ จุด a

พิจารณาสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือ

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= P_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $f(x)$ คือ ค่าจริง

$P_n(x)$ คือ ค่าประมาณ

และ $R_n(x)$ คือ เศษเหลือ

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริงและค่าประมาณ คือ

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน}$$

จะได้ว่า $R_n(x)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ นั่นคือ $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ การละพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ ออกจากสมการจะส่งผลให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนขึ้นเสมอ หรือ จะเรียกเศษเหลือ $R_n(x)$ ที่ถูกละทิ้งจากการประมาณค่าว่า ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) ซึ่งมักจะแสดงในรูปของอันดับ คือ $O((x-a)^{n+1})$

2.2.3 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ จะพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์ที่ละพจน์เรื่อยๆ ดังนั้นจะพิจารณาเฉพาะพจน์แรกของอนุกรม ได้ดังนี้ จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (2.1)$$

สมการ (2.1) เรียกว่า ค่าประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าคงที่ แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นค่าคงที่ เราจะต้องเพิ่มพจน์อนุกรมเทย์เลอร์ไปเรื่อยๆ ต่อไปคือ จะประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ 2 พจน์ จะได้ค่าฟังก์ชันดังนี้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (2.2)$$

สมการ (2.2) เรียกว่า ค่าประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง ต่อไปคือ จะประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ 3 พจน์ จะได้ค่าฟังก์ชันดังนี้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (2.3)$$

สมการ (2.3) เรียกว่า ค่าประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง นั่นคือเราสามารถที่จะเพิ่มพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ไปเรื่อยๆ เพื่อที่เราอาจจะคำนวณค่าประมาณที่มีอันดับสูงขึ้น ดังนั้น จะได้ค่าประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ n ดังนี้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n \quad (2.4)$$

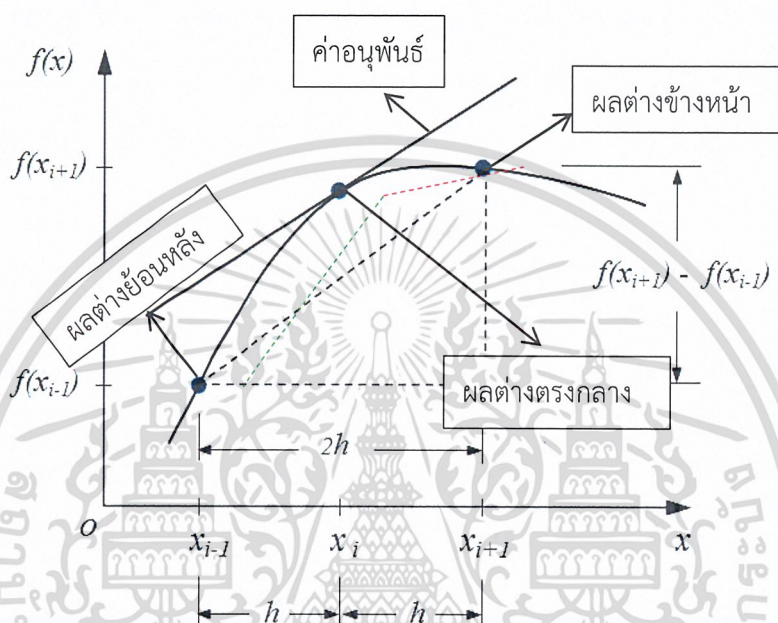
โดยจะกำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ สมการ (2.4) จะเขียนใหม่ได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n \quad (2.5)$$

หมายเหตุ h คือ ความกว้างของช่วง $[x_i, x_{i+1}]$

2.3 การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลขในงานวิจัยนี้ จะแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ สูตรผลต่างข้างหน้า สูตรผลต่างย้อนหลัง และสูตรผลต่างตรงกลาง โดยที่ $h = x_{i+1} - x_i$ เป็นความกว้างของช่วงที่มีค่าเท่ากันทุก i ซึ่ง $i=1,2,3,\dots,n$ ค่าอนุพันธ์บ่งบอกถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามต่อตัวแปรต้น ดังเช่นอธิบายโดยรูปดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยสูตรผลต่างข้างหน้า สูตรผลต่างย้อนหลัง และสูตรผลต่างกลาง

ที่มา : <http://cste.sut.ac.th/articles/?p=41>

ในวิชาแคลคูลัสนั้นหากกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ เราสามารถหาค่าอนุพันธ์โดยใช้สูตรต่างๆ เช่น ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนาม ดังนี้

$$y = f(x) = x^n \quad (2.5)$$

เราสามารถหาค่าอนุพันธ์ได้โดยตรง คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} \quad (2.6)$$

แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ไม่น่าอยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการหาค่าอนุพันธ์ ดังเช่นในตัวอย่างที่ยกขึ้นมาี้ ดังนั้น โดยปกติเราจะทำการหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณ ซึ่งสามารถทำได้โดยสะดวก เริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบ ดังนี้

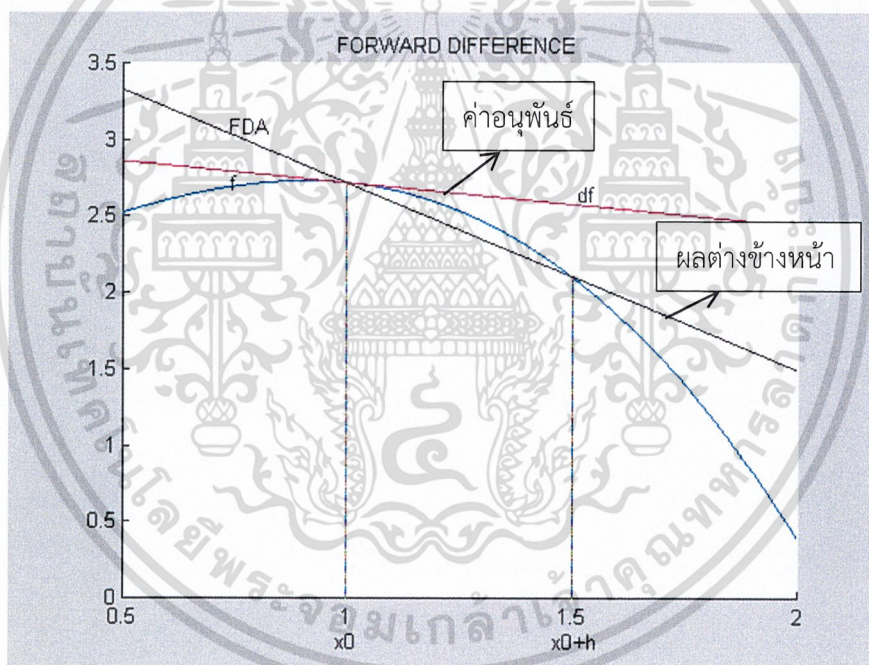
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการ $f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots$ แนะนำให้นำไปใช้ประโยชน์ (2.8) การคำนวณค่าอนุพันธ์ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย h แทนช่วงระหว่างตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (the first derivative) ที่ตำแหน่ง x_i ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์นี้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.9)$$

$$\text{หรือเขียนได้ว่า } f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (2.10)$$

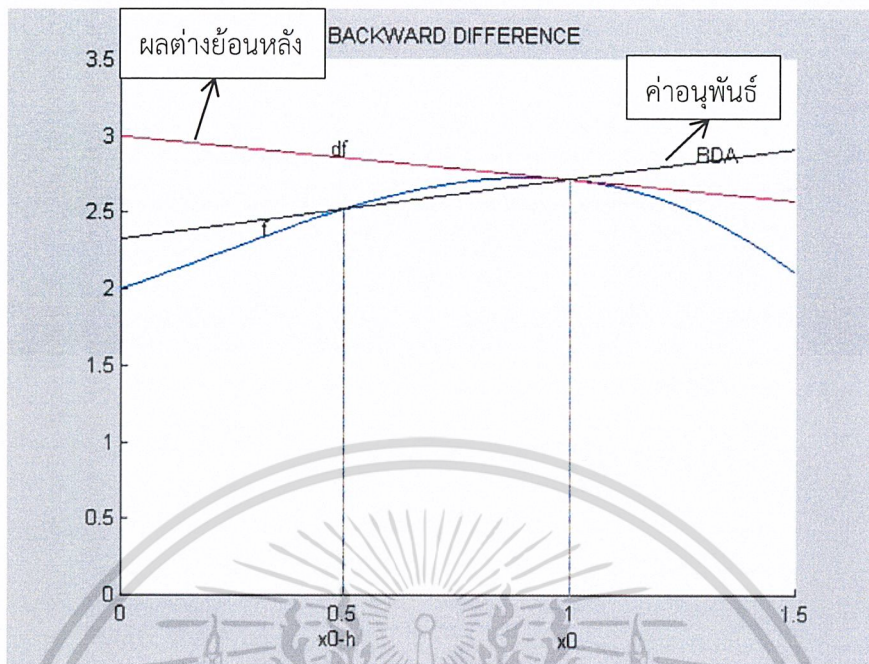
โดย $O(h)$ แสดงถึงค่าความผิดพลาดอันดับ h ที่เกิดขึ้น สมการ (2.8) นี้ บางครั้งเรียกว่าเป็นสมการผลต่างข้างหน้าอันดับหนึ่ง (first forward difference) ที่เรียกว่าเป็นผลต่างข้างหน้าก็เพราะว่าเราใช้ข้อมูลของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ลักษณะของค่าอนุพันธ์โดยประมาณที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์ที่หาได้จากนิยามซึ่งต่อไปจะเรียกว่าค่าอนุพันธ์ ได้แสดงในรูปที่ 2.2



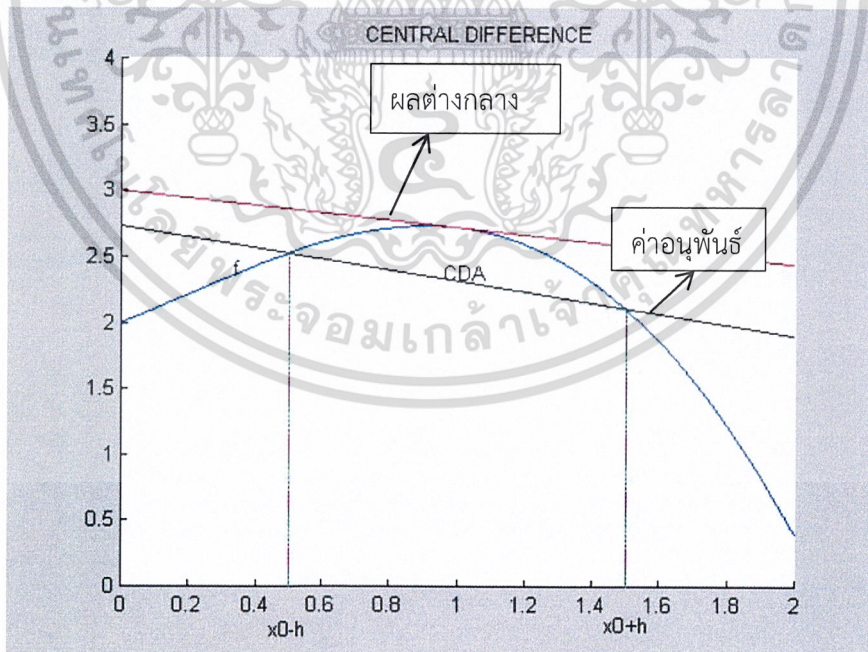
รูปที่ 2.2 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างข้างหน้า

ที่มา : <http://slideplayer.com/slide/NUMERICAL DIFFERENTIATION or DIFFERENCE APPROXIMATION> Used to evaluate derivatives of a function using the functional values at grid points.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างย้อนหลัง
 ที่มา : <http://slideplayer.com/slide/NUMERICAL DIFFERENTIATION or DIFFERENCE APPROXIMATION> Used to evaluate derivatives of a function using the functional values at grid points.



รูปที่ 2.4 การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยสูตรผลต่างกลาง
 ที่มา : <http://slideplayer.com/slide/NUMERICAL DIFFERENTIATION or DIFFERENCE APPROXIMATION> Used to evaluate derivatives of a function using the functional values at grid points.

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่หรือใช้งานทางการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้ง แต่หาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i-1} ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (2.11)$$

ซึ่งนำไปสู่ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (2.12)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (2.13)$$

สมการ (2.11) นี้สามารถนำไปใช้คำนวณค่าอนุพันธ์โดยประมาณได้เป็นสมการผลต่างย้อนหลังอันดับที่หนึ่ง (the first order backward difference) ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์ข้างหน้าและค่าอนุพันธ์ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 และ 2.3

หากเราเอาสมการ (2.11) ไปลบออกจากสมการ (2.8) เราจะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (2.14)$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) - \dots \quad (2.15)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.16)$$

สมการ (2.16) นี้ เรียกว่าเป็นสมการผลต่างตรงกลาง (central difference) ที่ให้ค่าความผิดพลาดอันดับ h^2 ซึ่งต่างจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในสมการของสองแบบที่แล้วซึ่งอยู่ในอันดับ h ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นจากสมการผลต่างตรงกลางนี้ได้เปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 2.4 ในการหาค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไป เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เราสามารถดำเนินการในทำนองเดียวกัน โดยเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ที่ใช้คำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i+2} จากค่าต่าง ๆ ที่ x_i ดังนี้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + (2h)f'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.17)$$

หากเราเอา 2 คูณเข้ากับสมการ (2.8) แล้วลบออกจากสมการ (2.17) นี้ จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \dots \quad (2.18)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมืออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งก่อให้เกิดสมการค่าอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (2.19)$$

สมการ (2.19) นี้เรียกว่าสมการผลต่างข้างหน้าอันดับที่สอง (second forward difference) สมการค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้กระบวนการในทำนองเดียวกัน รวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของการแบ่งย่อยข้างหน้า ย้อนหลัง และกลาง ได้สรุปในตารางที่ 2.1-2.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.1 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h)$

$f'(x_i) = \frac{[f(x_{i+1}) - f(x_i)]}{h}$
$f''(x_i) = \frac{[f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)]}{h^2}$
$f'''(x_i) = \frac{[f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)]}{h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)]}{h^4}$

ตารางที่ 2.2 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h)$

$f'(x_i) = \frac{[f(x_i) - f(x_{i-1})]}{h}$
$f''(x_i) = \frac{[f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]}{h^2}$
$f'''(x_i) = \frac{[f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})]}{h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})]}{h^4}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.3 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$f'(x_i) = \frac{[f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]}{2h}$
$f''(x_i) = \frac{[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))]}{h^2}$
$f'''(x_i) = \frac{[f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))]}{2h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))]}{h^4}$

ค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในตารางที่ 2.1-2.3 ประกอบด้วยค่าความผิดพลาด เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยการใช้ผลต่างข้างหน้าดังแสดงในสมการ และในตารางที่ 2.1 มีค่าความผิดพลาด $O(h)$ ซึ่งสามารถเพิ่มความถูกต้องของค่าอนุพันธ์ที่ได้โดยเริ่มจากสมการ (2.9)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2} f''(x_i) + O(h^2) \quad (2.20)$$

แล้วแทนค่าอนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (2.21) ลงในสมการนี้แล้วจัดพจน์ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \quad (2.21)$$

สมการของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ได้ใหม่นี้มีความถูกต้องสูงขึ้น เนื่องจากมีความผิดพลาดอันดับ h^2 กระบวนการที่ประกอบด้วยขั้นตอนในลักษณะเช่นนี้สามารถนำไปสร้างค่าอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ เพื่อให้มีความถูกต้องที่สูงขึ้นได้ ทั้งในแบบวิธีผลต่างข้างหน้า ย้อนหลัง และกลาง ดังแสดงในตารางที่ 2.4-2.6 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.4 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยข้างหน้าด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$f'(x_i) = \frac{[f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)]}{2h}$
$f''(x_i) = \frac{[-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)]}{2h^3}$
$f'''(x_i) = \frac{[-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)]}{2h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)]}{h^4}$

เอกสารนี้เป็นทรัพย์สินทางปัญญาของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ห้ามนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.5 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยย้อนหลังด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$

$f'(x_i) = \frac{[3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]}{2h}$
$f''(x_i) = \frac{[2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})]}{h^2}$
$f'''(x_i) = \frac{[5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})]}{2h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})]}{h^4}$

ตารางที่ 2.6 ค่าอนุพันธ์จากการแบ่งย่อยกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^4)$

$f'(x_i) = \frac{[-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]}{12h}$
$f''(x_i) = \frac{[-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})]}{12h^2}$
$f'''(x_i) = \frac{[-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})]}{8h^3}$
$f^{(4)}(x_i) = \frac{[-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})]}{6h^4}$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

ที่ $x=1.0$ โดยใช้ $h=0.1$ ด้วยวิธีการผลต่างข้างหน้า $O(h)$, วิธีการผลต่างย้อนหลัง $O(h)$ และวิธีการผลต่างกลาง $O(h^2)$ และเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยจริง

อนุพันธ์ของ f คือ

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$

ดังนั้น ค่าอนุพันธ์ที่ $x=1.0$ คือ

$$f'(x=1.0) = 6(1.0)^2 - 10(1.0) + 3 = -1.0$$

เมื่อเราใช้ $h=0.1$ ดังนั้น

$$x_{i-1} = 0.9; f(x_{i-1}) = 1.108$$

$$x_i = 1.0; f(x_i) = 1.000$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ $x_{i+1} = 1.1; f(x_{i+1}) = 0.912$ นั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น จะได้ค่าอนุพันธ์โดยประมาณและร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ (ϵ_a)

ดังนี้

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีการผลต่างแบบไปข้างหน้า

$$f'(1.0) = \frac{0.912 - 1.000}{0.1} = -0.88 \quad ; \epsilon_a = 9.65\%$$

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีการผลต่างแบบย้อนหลัง

$$f'(1.0) = \frac{1.000 - 1.108}{0.1} = -1.08 \quad ; \epsilon_a = 10.8\%$$

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีการผลต่างแบบตรงกลาง

$$f'(1.0) = \frac{0.912 - 1.108}{0.2} = -0.98 \quad ; \epsilon_a = 21.5\%$$

จากผลลัพธ์ของค่าอนุพันธ์ที่ได้จากวิธีผลต่างในแบบต่าง ๆ เราจะเห็นได้ว่า ค่าอนุพันธ์โดยวิธีการผลต่างกลางมีค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณสูงกว่าค่าอนุพันธ์ที่ได้โดยวิธีการผลต่างไปข้างหน้าและย้อนหลัง ซึ่งสอดคล้องกับความเข้าใจจากในขั้นต้น

2.4 วิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงระเบียบวิธีผลต่างอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ สมการทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ คือ

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''') \quad ; \quad a < x < b$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อ f อยู่ในรูปแบบ

$$f(x, y, y', y'', y''') = p(x)y'''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x)$$

และเงื่อนไขขอบ

$$y(a) = \alpha_1 \quad \text{และ} \quad y(b) = \beta_1 \quad \text{และ} \quad y'(a) = \alpha_2 \quad \text{และ} \quad y'(b) = \beta_2$$

เริ่มต้นจากการแบ่งจำนวนช่วง (a, b) ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน นิยามการแบ่งโดย $x_i = a + ih$

สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots, N$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{N}$ เรียกว่า ความกว้างของช่วง (step size)

ดังนั้น จุดปลายช่วงย่อยของการแบ่ง คือ $x_0 = a$ และ $x_N = b$

และจุดตัดภายในช่วงย่อย คือ $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จาก

$$y^{(4)}(x_i) = p(x_i)y'''' + q(x_i)y'' + r(x_i)y' + s(x_i)y + t(x_i) \quad (2.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางด้วยความผิดพลาด $O(h^2)$ จะได้

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ } f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสอง คือ } f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสาม คือ } f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{2h^3} + O(h^2)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสี่ คือ } f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^4} + O(h^2)$$

สำหรับการพิจารณาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y ณ จุด x สามารถเขียนสมการจากค่าอนุพันธ์ข้างต้น ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน $y(x_i)$ ได้ คือ

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ } y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.23)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสอง คือ } y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (2.24)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสาม คือ } y'''(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) - 2y(x_{i-1}) - y(x_{i-2}))}{2h^3} + O(h^2) \quad (2.25)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์อันดับสี่ คือ } y^{(4)}(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 4y(x_{i+1}) + 6y(x_i) - 4y(x_{i-1}) + y(x_{i-2}))}{h^4} + O(h^2) \quad (2.26)$$

นำสมการ (2.23) - (2.26) แทนลงในสมการ (2.22)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{y(x_{i+2}) - 4y(x_{i+1}) + 6y(x_i) - 4y(x_{i-1}) + y(x_{i-2}))}{h^4} + O(h^2) \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + 2y(x_{i-1}) - y(x_{i-2}))}{2h^3} + O(h^2) \right] + q(x_i) \left[\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \right] \\ & \quad + r(x_i) \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \right] + s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ตัด $O(h^2)$ ออกจากสมการ (2.27) ได้

$$\begin{aligned} & \left[\frac{y(x_{i+2}) - 4y(x_{i+1}) + 6y(x_i) - 4y(x_{i-1}) + y(x_{i-2}))}{h^4} \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + 2y(x_{i-1}) - y(x_{i-2}))}{2h^3} \right] + q(x_i) \left[\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \right] + r(x_i) \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right] \\ & \quad + s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

กำหนดให้ $y(x_i) = y_i, p(x_i) = p_i, r(x_i) = r_i, s(x_i) = s_i, t(x_i) = t_i$ สมการ (2.28) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} \right] = p_i \left[\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} \right] + q_i \left[\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right] + r_i \left[\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right] \\ & \quad + s_i y_i + t_i \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2.29) นำ $2h^4$ คูณตลอด จะได้

$$2y_{i+2} - 8y_{i+1} + 12y_i - 8y_{i-1} + 2y_{i-2} = p_i h \left[y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2} + 2q_i h^2 [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] \right] \\ + r_i h^3 [y_{i+1} - y_{i-1}] + 2s_i y_i h^4 + 2t_i h^4 \quad (2.30)$$

สมการ (2.30) จัดรูปใหม่ จะได้

$$(2 + p_i h)y_{i-2} + (-8 - 2p_i h - 2q_i h^2 + r_i h^3)y_{i-1} + (12 + 4q_i h^2 - 2s_i h^4)y_i \\ + (-8 + 2p_i h - 2q_i h^2 - r_i h^3)y_{i+1} + (2 - p_i h)y_{i+2} = 2t_i h^2 \quad (2.31)$$

จากสมการ (2.31) กำหนดให้

$$v_1 = (2 + p_i h)$$

$$v_2 = (-8 - 2p_i h - 2q_i h^2 + r_i h^3)$$

$$v_3 = (12 + 4q_i h^2 - 2s_i h^4)$$

$$v_4 = (-8 + 2p_i h - 2q_i h^2 - r_i h^3)$$

$$v_5 = (2 - p_i h)$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเมทริกซ์ $Ay = B$ ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 y_1 - v_2 y_0 + 2t_1 h^2 \\ -v_1 y_0 + 2t_1 h^2 \\ 2t_1 h^2 \\ \vdots \\ 2t_1 h^2 \\ -v_5 y_N + 2t_1 h^2 \\ -v_4 y_{N-1} - v_5 y_{N+1} + 2t_1 h^2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y^{(4)}(x) - 5y'''(x) + 3y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) - 6 = 0 \text{ สำหรับ } 0 < x < 1$$

และมีเงื่อนไขขอบ คือ $y(0) = 1$ และ $y(1) = 0.5382$ และ $y'(0) = 3$ และ $y'(1) = 4$

วิธีทำ กำหนดให้ $N = 10$

เริ่มจากการแบ่งช่วง $(0,1)$ ออกเป็น $N = 10$ ช่วงย่อย จะได้ $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$

จากโจทย์จะได้ว่า $p(x) = 5, q(x) = -3, r(x) = 2, s(x) = -4, t(x) = 6$

และจากเงื่อนไขขอบจะได้ว่า $y_0 = 1$ และ $y_{10} = 0.5382$

และ y_{-1} หาได้จาก $y'(0) = 3$ จะได้ว่า $\frac{y_0 - y_{-1}}{h} = 3 \rightarrow y_{-1} = y_0 - 3h = 1 - 3(0.1) = 0.7$

และ y_{11} หาได้จาก $y'(1) = 4$ จะได้ว่า $\frac{y_{11} - y_{10}}{h} = 4 \rightarrow y_{11} = y_{10} + 4h = 0.5382 + 4(0.1) = 0.9382$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสูตรวิธีผลต่างอันดับ

$$\begin{bmatrix} v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 y_{-1} - v_2 y_0 + 2t_1 h^2 \\ -v_1 y_0 + 2t_2 h^2 \\ 2t_3 h^2 \\ \vdots \\ 2t_N h^2 \\ -v_3 y_N + 2t_N h^2 \\ -v_4 y_N - v_5 y_{N+1} + 2t_N h^2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 y_{-1} - v_2 y_0 + 2t_1 h^2 \\ -v_1 y_0 + 2t_2 h^2 \\ 2t_3 h^2 \\ 2t_4 h^2 \\ 2t_5 h^2 \\ 2t_6 h^2 \\ 2t_7 h^2 \\ -v_5 y_{10} + 2t_8 h^2 \\ -v_4 y_{10} - v_5 y_{11} + 2t_9 h^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5(0.7) - (-8.9380)(1) + 2(6)(0.1)^2 \\ -2.5(1) + 2(6)(0.1)^2 \\ 2(6)(0.1)^2 \\ 2(6)(0.1)^2 \\ 2(6)(0.1)^2 \\ 2(6)(0.1)^2 \\ 2(6)(0.1)^2 \\ -1.5(0.5382) + 2(6)(0.1)^2 \\ -(-6.9420)(0.5382) - 1.5(0.9382) + 2(6)(0.1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 & -6.9420 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -8.9380 & 11.8808 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.3080 \\ -2.3800 \\ 0.0360 \\ 0.0360 \\ 0.0360 \\ 0.0360 \\ 0.0360 \\ -0.6873 \\ 2.5989 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 ค่าคลาดเคลื่อน (Error)

ค่าคลาดเคลื่อน คือ ความแตกต่างกันระหว่างค่าจริงกับค่าที่ได้จากการประมาณ แต่ก็ยังสามารถเกิดจากสาเหตุอื่นได้ดังต่อไปนี้

2.5.1 สาเหตุของค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนนั้นเกิดขึ้นได้จากหลายสาเหตุ ซึ่งอธิบายได้โดยสังเขปดังต่อไปนี้

2.5.1.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error)

ในบางวิธีที่ใช้หาผลเฉลย จะต้องทอนขั้นตอนการคำนวณที่มีจำนวนเป็นอนันต์ ให้เหลือขั้นตอนที่มีจำนวนจำกัด เพื่อให้คำนวณได้ง่ายขึ้น เช่น การคำนวณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ เราได้ใช้จำนวนพจน์ที่อยู่ในช่วงแรกของสมการอยู่จำนวนหนึ่ง คือ $p_n(x)$ โดยส่วนที่เหลือนั้นได้ถูกตัดทิ้งไป คือ $R_n(x)$ จึงเกิดค่าคลาดเคลื่อนจากพจน์ที่ถูกตัดทิ้งไป

2.5.1.2 ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-Off Error)

เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นทุกครั้งเมื่อใช้เลขทศนิยม (Decimal) ในการคำนวณเลขคณิต และเป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดทอนตัวเลขในการคำนวณ สาเหตุมาจากความจำกัดของพื้นที่ของเครื่องคำนวณ

2.5.2 บทนิยามของค่าคลาดเคลื่อน (Error Definition)

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริง ค่าประมาณ คือ

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน}$$

หรือ

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน} = \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}$$

สัญลักษณ์ของค่าคลาดเคลื่อน คือ $|E_t|$

บทนิยาม 2.3 ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ $|E_t|$

$$|E_t| = |\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}|$$

2.6 สัญกรณ์โอใหญ่ (Big Oh Notation)

สัญกรณ์โอใหญ่ คือ เป็นสัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชัน โดยระบุเป็นขนาด (magnitude) ของฟังก์ชันในพจน์ของฟังก์ชันอื่นที่โดยทั่วไปซับซ้อนน้อยกว่า สัญกรณ์โอใหญ่เป็นหนึ่งในสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับ หรืออาจเรียกว่า สัญกรณ์ของลันเดา หรือ สัญกรณ์ของ บัคแมนน์-ลันเดา (ตั้งชื่อตามเอ็ดมุนด์ ลันเดาและเพาล์ บัคแมนน์) สัญกรณ์โอใหญ่ใช้ในการเขียนเพื่อประมาณพจน์ในคณิตศาสตร์ ประยุกต์ใช้ในวิทยาการคอมพิวเตอร์เพื่อใช้อธิบายความเร็วประมาณในการทำงานของโปรแกรมในกรณีต้องประมวลผลข้อมูลจำนวนมาก และใช้เพื่ออธิบายประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีหรือโครงสร้างข้อมูลนั้น ๆ ในหัวข้อนี้จะทำให้บทนิยามสัญกรณ์โอใหญ่ และ นิยาม l2-norm ดังนี้

ที่มา : <https://th.wikipedia.org/wiki/สัญกรณ์โอใหญ่>

บทนิยาม 2.4 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$f(x) \in O(g(x)) \text{ เมื่อ } x \rightarrow \infty$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ c และ x_0 ที่ทำให้

$$|f(x)| \leq c|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \geq x_0$$

ที่มา : <https://th.wikipedia.org/wiki/สัญกรณ์โอใหญ่>

บทนิยาม 2.5 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ เมื่อ } x \geq x_0$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $d > 0$ และ c ที่ซึ่ง

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x-a| < d$$

ที่มา : <https://th.wikipedia.org/wiki/สัญกรณ์โอใหญ่>

บทนิยาม 2.6 l2-norm

ให้ $v \in V$, Norm ของ v เขียนแทนด้วย $\|v\|$

กำหนดให้ $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ จะได้ว่า

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

จะเรียกสมการดังกล่าวว่า l2-norm(Euclidean norm)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 อันดับความแม่นยำ

ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขบ่งบอกถึงอัตราการลู่เข้าของค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขของผลเฉลยค่าจริงในสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยเชิงตัวเลขในสมการเชิงอนุพันธ์จะบอกถึง อันดับความแม่นยำ n ถ้าค่าคลาดเคลื่อน E เป็นค่าคลาดเคลื่อนกับขนาดความกว้างของช่วงย่อย h ยกกำลัง n จะได้ว่า

$$E(h) = Ch^n$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ และ สัญลักษณ์โอใหญ่ที่ใช้แทนความแม่นยำอันดับที่ n ของวิธีเชิงตัวเลข คือ $O(h^n)$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ โดยเริ่มจากการสร้างสูตรการหาอนุพันธ์ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลังและวิธีผลต่างหกจุดกลาง รวมไปถึงการประมาณค่าอนุพันธ์โดยระเบียบวิธีผลต่างอันดับสี่ทั้ง 3 วิธี ซึ่งจะกล่าวดังต่อไปนี้

3.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์

สำหรับฟังก์ชัน f เมื่อกระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x = a_0$ จะทำให้ได้ว่า

$$f(x) = f(a_0) + f'(a_0)(x-a_0) + \frac{f''(a_0)}{2!}(x-a_0)^2 + \frac{f'''(a_0)}{3!}(x-a_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}(x-a_0)^n + \dots$$

3.1.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

3.1.1.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่ f จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x+h), (x+2h), (x+3h), (x+4h), (x+5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) จะเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!}f^{(6)}(x) + O(h^7)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{6!}f^{(6)}(x) + O(h^7)$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{(3h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(3h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{(3h)^6}{6!}f^{(6)}(x) + O(h^7)$$

$$f(x+4h) = f(x) + 4hf'(x) + \frac{(4h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(4h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(4h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(4h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{(4h)^6}{6!}f^{(6)}(x) + O(h^7)$$

$$f(x+5h) = f(x) + 5hf'(x) + \frac{(5h)^2}{2!}f''(x) + \frac{(5h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(5h)^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{(5h)^5}{5!}f^{(5)}(x) + \frac{(5h)^6}{6!}f^{(6)}(x) + O(h^7)$$

(*)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_1 f(x) + b_1 f(x+h) + c_1 f(x+2h) + d_1 f(x+3h) + e_1 f(x+4h) + g_1 f(x+5h) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1) f(x) + (b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1) h f'(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{4}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{720} b_1 + \frac{4}{45} c_1 + \frac{81}{80} d_1 + \frac{256}{45} e_1 + \frac{3125}{144} g_1 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.2)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1 = 0 \quad (3.3)$$

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1 = \frac{1}{h} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{9}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 4c_1 + 9d_1 + 16e_1 + 25g_1 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 8c_1 + 27d_1 + 64e_1 + 125g_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 16c_1 + 81d_1 + 256e_1 + 625g_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 32c_1 + 243d_1 + 1024e_1 + 3125g_1 = 0 \quad (3.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.5) - (3.4); \quad 2c_1 + 6d_1 + 12e_1 + 20g_1 = -\frac{1}{h} \quad (3.9)$$

$$(3.9) \div 2; \quad c_1 + 3d_1 + 6e_1 + 10g_1 = -\frac{1}{2h} \quad (3.10)$$

$$(3.6) - (3.5); \quad 4c_1 + 18d_1 + 48e_1 + 100g_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$(3.11) \div 2; \quad 2c_1 + 9d_1 + 24e_1 + 50g_1 = 0 \quad (3.12)$$

$$(3.10) \times 2; \quad 2c_1 + 6d_1 + 12e_1 + 20g_1 = -\frac{1}{h} \quad (3.13)$$

$$(3.12) - (3.13); \quad 3d_1 + 12e_1 + 30g_1 = \frac{1}{h} \quad (3.14)$$

$$(3.14) \div 3; \quad d_1 + 4e_1 + 10g_1 = \frac{1}{3h} \quad (3.15)$$

$$(3.7) - (3.6); \quad 8c_1 + 54d_1 + 192e_1 + 500g_1 = 0 \quad (3.16)$$

$$(3.16) \div 2; \quad 4c_1 + 27d_1 + 96e_1 + 250g_1 = 0 \quad (3.17)$$

$$(3.12) \times 2; \quad 4c_1 + 18d_1 + 48e_1 + 100g_1 = 0 \quad (3.18)$$

$$(3.17) - (3.18); \quad 9d_1 + 48e_1 + 150g_1 = 0 \quad (3.19)$$

$$(3.19) \div 3; \quad 3d_1 + 16e_1 + 50g_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$(3.15) \times 3; \quad 3d_1 + 12e_1 + 30g_1 = \frac{1}{h} \quad (3.21)$$

$$(3.20) - (3.21); \quad 4e_1 + 20g_1 = -\frac{1}{h} \quad (3.22)$$

$$(3.22) \div 4; \quad e_1 + 5g_1 = -\frac{1}{4h} \quad (3.23)$$

$$(3.8) - (3.7); \quad 16c_1 + 162d_1 + 768e_1 + 2500g_1 = 0 \quad (3.24)$$

$$(3.24) \div 2; \quad 8c_1 + 81d_1 + 384e_1 + 1250g_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$(3.17) \times 2; \quad 8c_1 + 54d_1 + 192e_1 + 500g_1 = 0 \quad (3.26)$$

$$(3.25) - (3.26); \quad 27d_1 + 192e_1 + 750g_1 = 0 \quad (3.27)$$

$$(3.27) \div 3; \quad 9d_1 + 64e_1 + 250g_1 = 0 \quad (3.28)$$

$$(3.15) \times 3; \quad 9d_1 + 48e_1 + 150g_1 = 0 \quad (3.29)$$

$$(3.28) - (3.29); \quad 16e_1 + 100g_1 = 0 \quad (3.30)$$

$$(3.22) \times 4; \quad 16e_1 + 80g_1 = -\frac{4}{h} \quad (3.31)$$

$$(3.30) - (3.31); \quad 20g_1 = \frac{4}{h} \quad (3.32)$$

$$g_1 = \frac{1}{5h}$$

นำ g_1 ไปแทนใน (3.23)

$$e_1 + 5\left(\frac{1}{5h}\right) = -\frac{1}{4h}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ e_1, g_1 ไปแทนใน (3.15)

$$d_1 + 4\left(-\frac{5}{4h}\right) + 10\left(\frac{1}{5h}\right) = \frac{1}{3h}$$

$$d_1 = \frac{10}{3h}$$

นำ d_1, e_1, g_1 ไปแทนใน (3.10)

$$c_1 + 3\left(\frac{10}{3h}\right) + 6\left(-\frac{5}{4h}\right) + 10\left(\frac{1}{5h}\right) = -\frac{1}{2h}$$

$$c_1 = -\frac{5}{h}$$

นำ c_1, d_1, e_1, g_1 ไปแทนใน (3.4)

$$b_1 + 2\left(-\frac{5}{h}\right) + 3\left(\frac{10}{3h}\right) + 4\left(-\frac{5}{4h}\right) + 5\left(\frac{1}{5h}\right) = \frac{1}{h}$$

$$b_1 = \frac{5}{h}$$

นำ b_1, c_1, d_1, e_1, g_1 ไปแทนใน (3.3)

$$a_1 + \frac{5}{h} - \frac{5}{h} + \frac{10}{3h} - \frac{5}{4h} + \frac{1}{5h} = 0$$

$$a_1 = -\frac{137}{60h}$$

$$\therefore (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, g_1) = \left(-\frac{137}{60h}, \frac{5}{h}, -\frac{5}{h}, \frac{10}{3h}, -\frac{5}{4h}, \frac{1}{5h}\right)$$

จะได้ $f'(x) = -\frac{137}{60h}f(x) + \frac{5}{h}f(x+h) - \frac{5}{h}f(x+2h) + \frac{10}{3h}f(x+3h) - \frac{5}{4h}f(x+4h) + \frac{1}{5h}f(x+5h)$

$$f'(x) = \frac{-137f(x) + 300f(x+h) - 300f(x+2h) + 200f(x+3h) - 75f(x+4h) + 12f(x+5h)}{60h}$$

ค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(\frac{1}{720}b_1 + \frac{4}{45}c_1 + \frac{81}{80}d_1 + \frac{256}{45}e_1 + \frac{3125}{144}g_1\right)h^6, f^{(6)}(x) = O(h^5)$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหักจุดข้างหน้า คือ

$$y'(x_i) = \frac{-137y(x_i) + 300y(x_{i+1}) - 300y(x_{i+2}) + 200y(x_{i+3}) - 75y(x_{i+4}) + 12y(x_{i+5})}{60h} + O(h^5) \quad (3.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.1.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x+h), (x+2h), (x+3h), (x+4h), (x+5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (*)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_1 f(x) + b_1 f(x+h) + c_1 f(x+2h) + d_1 f(x+3h) + e_1 f(x+4h) + g_1 f(x+5h) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1) f(x) + (b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1) h f'(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{4}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{720} b_1 + \frac{4}{45} c_1 + \frac{81}{80} d_1 + \frac{256}{45} e_1 + \frac{3125}{144} g_1 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.35)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1 = 0 \quad (3.36)$$

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{9}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 = \frac{1}{h^2} \rightarrow b_1 + 4c_1 + 9d_1 + 16e_1 + 25g_1 = \frac{2}{h^2} \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 8c_1 + 27d_1 + 64e_1 + 125g_1 = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 16c_1 + 81d_1 + 256e_1 + 625g_1 = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 32c_1 + 243d_1 + 1024e_1 + 3125g_1 = 0 \quad (3.41)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.38) - (3.37); \quad 2c_2 + 6d_2 + 12e_2 + 20g_2 = \frac{2}{h^2} \quad (3.42)$$

$$(3.42) \div 2; \quad c_2 + 3d_2 + 6e_2 + 10g_2 = \frac{1}{h^2} \quad (3.43)$$

$$(3.39) - (3.38); \quad 4c_2 + 18d_2 + 48e_2 + 100g_2 = -\frac{2}{h^2} \quad (3.44)$$

$$(3.44) \div 2; \quad 2c_2 + 9d_2 + 24e_2 + 50g_2 = -\frac{1}{h^2} \quad (3.45)$$

$$(3.43) \times 2; \quad 2c_2 + 6d_2 + 12e_2 + 20g_2 = \frac{2}{h^2} \quad (3.46)$$

$$(3.45) - (3.46); \quad 3d_2 + 12e_2 + 30g_2 = -\frac{3}{h^2} \quad (3.47)$$

$$(3.47) \div 3; \quad d_2 + 4e_2 + 10g_2 = -\frac{1}{h^2} \quad (3.48)$$

$$(3.29) - (3.28); \quad 8c_2 + 54d_2 + 192e_2 + 500g_2 = 0 \quad (3.49)$$

$$(3.49) \div 2; \quad 4c_2 + 27d_2 + 96e_2 + 250g_2 = 0 \quad (3.50)$$

$$(3.43) \times 4; \quad 4c_2 + 12d_2 + 24e_2 + 40g_2 = \frac{4}{h^2} \quad (3.51)$$

$$(3.50) - (3.51); \quad 15d_2 + 72e_2 + 210g_2 = -\frac{4}{h^2} \quad (3.52)$$

$$(3.52) \div 3; \quad 5d_2 + 24e_2 + 70g_2 = -\frac{4}{3h^2} \quad (3.53)$$

$$(3.48) \times 5; \quad 5d_2 + 20e_2 + 50g_2 = \frac{5}{h^2} \quad (3.54)$$

$$(3.53) - (3.54); \quad 4e_2 + 20g_2 = \frac{11}{3h^2} \quad (3.55)$$

$$(3.55) \div 2; \quad e_2 + 5g_2 = \frac{11}{12h^2} \quad (3.56)$$

$$(3.41) - (3.40); \quad 16c_2 + 162d_2 + 768e_2 + 2500g_2 = 0 \quad (3.57)$$

$$(3.57) \div 2; \quad 8c_2 + 81d_2 + 384e_2 + 1250g_2 = 0 \quad (3.58)$$

$$(3.45) \times 4; \quad 8c_2 + 36d_2 + 96e_2 + 200g_2 = -\frac{4}{h^2} \quad (3.59)$$

$$(3.58) - (3.59); \quad 45d_2 + 288e_2 + 1050g_2 = \frac{4}{h^2} \quad (3.60)$$

$$(3.60) \div 3; \quad 15d_2 + 96e_2 + 350g_2 = \frac{4}{3h^2} \quad (3.61)$$

$$(3.53) \times 3; \quad 15d_2 + 72e_2 + 210g_2 = -\frac{4}{h^2} \quad (3.62)$$

$$(3.61) - (3.62); \quad 24e_2 + 140g_2 = \frac{16}{3h^2} \quad (3.63)$$

$$(3.63) \div 4; \quad 6e_2 + 35g_2 = \frac{4}{3h^2} \quad (3.64)$$

$$(3.56) \times 6; \quad 6e_2 + 30g_2 = \frac{11}{2h^2} \quad (3.65)$$

$$(3.64) - (3.65); \quad 5g_2 = -\frac{25}{6h^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น $g_2 = -\frac{5}{6h^2}$ อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ g_2 ไปแทนใน (3.56)

$$e_2 + 5\left(-\frac{5}{6h^2}\right) = \frac{11}{12h^2}$$

$$e_2 = \frac{61}{12h^2}$$

นำ e_2, g_2 ไปแทนใน (3.48)

$$d_2 + 4\left(\frac{61}{12h^2}\right) + 10\left(-\frac{5}{6h^2}\right) = -\frac{1}{h^2}$$

$$d_2 = -\frac{13}{h^2}$$

นำ d_2, e_2, g_2 ไปแทนใน (3.43)

$$c_2 + 3\left(-\frac{13}{h^2}\right) + 6\left(\frac{61}{12h^2}\right) + 10\left(-\frac{5}{6h^2}\right) = \frac{1}{h^2}$$

$$c_2 = \frac{107}{6h^2}$$

นำ c_2, d_2, e_2, g_2 ไปแทนใน (3.37)

$$b_2 + 2\left(\frac{107}{6h^2}\right) + 3\left(-\frac{13}{h^2}\right) + 4\left(\frac{61}{12h^2}\right) + 5\left(-\frac{5}{6h^2}\right) = 0$$

$$b_2 = -\frac{77}{6h^2}$$

นำ b_2, c_2, d_2, e_2, g_2 ไปแทนใน (3.36)

$$a_2 + \left(-\frac{77}{6h^2}\right) + \frac{107}{6h^2} + \left(-\frac{13}{h^2}\right) + \frac{61}{12h^2} + \left(-\frac{5}{6h^2}\right) = 0$$

$$a_2 = \frac{15}{4h^2}$$

$$\therefore (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, g_2) = \left(\frac{15}{4h^2}, -\frac{77}{6h^2}, \frac{107}{6h^2}, -\frac{13}{h^2}, \frac{61}{12h^2}, -\frac{5}{6h^2}\right)$$

$$\text{จะได้ } f''(x) = \frac{15}{4h^2} f(x) - \frac{77}{6h^2} f(x+h) + \frac{107}{6h^2} f(x+2h) - \frac{13}{h^2} f(x+3h) + \frac{61}{12h^2} f(x+4h) - \frac{5}{6h^2} f(x+5h)$$

$$f''(x) = \frac{45f(x) - 154f(x+h) + 214f(x+2h) - 156f(x+3h) + 61f(x+4h) - 10f(x+5h)}{12h^2}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน คือ } \left(\frac{1}{720}b_2 + \frac{4}{45}c_2 + \frac{81}{80}d_2 + \frac{256}{45}e_2 + \frac{3125}{144}g_2\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^4)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า คือ

$$y''(x_i) = \frac{45y(x_i) - 154y(x_{i+1}) + 214y(x_{i+2}) - 156y(x_{i+3}) + 61y(x_{i+4}) - 10y(x_{i+5})}{12h^2} + O(h^4) \quad (3.66)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.1.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

การหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x+h), (x+2h), (x+3h), (x+4h), (x+5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (*)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_1 f(x) + b_1 f(x+h) + c_1 f(x+2h) + d_1 f(x+3h) + e_1 f(x+4h) + g_1 f(x+5h) \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1) f(x) + (b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1) h f'(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{4}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{720} b_1 + \frac{4}{45} c_1 + \frac{81}{80} d_1 + \frac{256}{45} e_1 + \frac{3125}{144} g_1 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.68)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1 = 0 \quad (3.69)$$

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1 = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{9}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 4c_1 + 9d_1 + 16e_1 + 25g_1 = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 = \frac{1}{h^3} \rightarrow b_1 + 8c_1 + 27d_1 + 64e_1 + 125g_1 = \frac{6}{h^3} \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 16c_1 + 81d_1 + 256e_1 + 625g_1 = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 32c_1 + 243d_1 + 1024e_1 + 3125g_1 = 0 \quad (3.74)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.71)-(3.70); \quad 2c_3 + 6d_3 + 12e_3 + 20g_3 = 0 \quad (3.75)$$

$$(3.75) \div 2; \quad c_3 + 3d_3 + 6e_3 + 10g_3 = 0 \quad (3.76)$$

$$(3.72)-(3.71); \quad 4c_3 + 18d_3 + 48e_3 + 100g_3 = \frac{6}{h^3} \quad (3.77)$$

$$(3.76) \times 4; \quad 4c_3 + 12d_3 + 24e_3 + 40g_3 = 0 \quad (3.78)$$

$$(3.77)-(3.78); \quad 6d_3 + 24e_3 + 60g_3 = \frac{6}{h^3} \quad (3.79)$$

$$(3.79) \div 6; \quad d_3 + 4e_3 + 10g_3 = \frac{1}{h^3} \quad (3.80)$$

$$(3.73)-(3.72); \quad 8c_3 + 54d_3 + 192e_3 + 500g_3 = -\frac{6}{h^3} \quad (3.81)$$

$$(3.81) \div 2; \quad 4c_3 + 27d_3 + 96e_3 + 250g_3 = -\frac{3}{h^3} \quad (3.82)$$

$$(3.82)-(3.78); \quad 15d_3 + 72e_3 + 210g_3 = -\frac{3}{h^3} \quad (3.83)$$

$$(3.83) \div 3; \quad 5d_3 + 24e_3 + 70g_3 = -\frac{1}{h^3} \quad (3.84)$$

$$(3.80) \times 5; \quad 5d_3 + 20e_3 + 50g_3 = \frac{5}{h^3} \quad (3.85)$$

$$(3.84)-(3.85); \quad 4e_3 + 20g_3 = -\frac{6}{h^3} \quad (3.86)$$

$$(3.86) \div 4; \quad e_3 + 5g_3 = -\frac{3}{2h^3} \quad (3.87)$$

$$(3.74)-(3.73); \quad 16c_3 + 162d_3 + 768e_3 + 2500g_3 = 0 \quad (3.88)$$

$$(3.88) \div 2; \quad 8c_3 + 81d_3 + 384e_3 + 1250g_3 = 0 \quad (3.89)$$

$$(3.77) \times 2; \quad 8c_3 + 36d_3 + 96e_3 + 200g_3 = \frac{12}{h^3} \quad (3.90)$$

$$(3.89)-(3.90); \quad 45d_3 + 288e_3 + 1050g_3 = -\frac{12}{h^3} \quad (3.91)$$

$$(3.91) \div 3; \quad 15d_3 + 96e_3 + 350g_3 = -\frac{4}{h^3} \quad (3.92)$$

$$(3.84) \times 3; \quad 15d_3 + 72e_3 + 210g_3 = -\frac{3}{h^3} \quad (3.93)$$

$$(3.92)-(3.93); \quad 24e_3 + 140g_3 = -\frac{1}{h^3} \quad (3.94)$$

$$(3.94) \div 4; \quad 6e_3 + 35g_3 = -\frac{1}{4h^3} \quad (3.95)$$

$$(3.87) \times 6; \quad 6e_3 + 30g_3 = -\frac{9}{h^3} \quad (3.96)$$

$$(3.95)-(3.96); \quad 5g_3 = \frac{35}{4h^3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น $g_3 = \frac{7}{4h^3}$ อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ g_3 ไปแทนใน (3.87)

$$e_3 + 5\left(\frac{7}{4h^3}\right) = -\frac{3}{2h^3}$$

$$e_3 = -\frac{41}{4h^3}$$

นำ e_3, g_3 ไปแทนใน (3.80)

$$d_3 + 4\left(-\frac{41}{4h^3}\right) + 10\left(\frac{7}{4h^3}\right) = \frac{1}{h^3}$$

$$d_3 = \frac{49}{2h^3}$$

นำ d_3, e_3, g_3 ไปแทนใน (3.76)

$$c_3 + 3\left(\frac{49}{2h^3}\right) + 6\left(-\frac{41}{4h^3}\right) + 10\left(\frac{7}{4h^3}\right) = 0$$

$$c_3 = -\frac{59}{2h^3}$$

นำ c_3, d_3, e_3, g_3 ไปแทนใน (3.70)

$$b_3 + 2\left(-\frac{59}{2h^3}\right) + 3\left(\frac{49}{2h^3}\right) + 4\left(-\frac{41}{4h^3}\right) + 5\left(\frac{7}{4h^3}\right) = 0$$

$$b_3 = \frac{71}{4h^3}$$

นำ b_3, c_3, d_3, e_3, g_3 ไปแทนใน (3.69)

$$a_3 + \frac{71}{4h^3} + \left(-\frac{59}{2h^3}\right) + \frac{49}{2h^3} + \left(-\frac{41}{4h^3}\right) + \frac{7}{4h^3} = 0$$

$$a_3 = -\frac{17}{4h^3}$$

$$\therefore (a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, g_3) = \left(-\frac{17}{4h^3}, \frac{71}{4h^3}, -\frac{59}{2h^3}, \frac{49}{2h^3}, -\frac{41}{4h^3}, \frac{7}{4h^3}\right)$$

จะได้ $f'''(x) = -\frac{17}{4h^3}f(x) + \frac{71}{4h^3}f(x+h) - \frac{59}{2h^3}f(x+2h) + \frac{49}{2h^3}f(x+3h) - \frac{41}{4h^3}f(x+4h) + \frac{7}{4h^3}f(x+5h)$

$$f'''(x) = -\frac{17f(x) + 71f(x+h) - 118f(x+2h) + 98f(x+3h) - 41f(x+4h) + 7f(x+5h)}{4h^3}$$

ค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(\frac{1}{720}b_3 + \frac{4}{45}c_3 + \frac{81}{80}d_3 + \frac{256}{45}e_3 + \frac{3125}{144}g_3\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^3)$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหักจุดข้างหน้า คือ

$$y'''(x_i) = \frac{17y(x_i) + 71y(x_{i+1}) - 118y(x_{i+2}) + 98y(x_{i+3}) - 41y(x_{i+4}) + 7y(x_{i+5})}{4h^3} + O(h^3) \quad (3.97)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.1.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

การหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x+h), (x+2h), (x+3h), (x+4h), (x+5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (*)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_1 f(x) + b_1 f(x+h) + c_1 f(x+2h) + d_1 f(x+3h) + e_1 f(x+4h) + g_1 f(x+5h) \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1) f(x) + (b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1) h f''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{4}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{720} b_1 + \frac{4}{45} c_1 + \frac{81}{80} d_1 + \frac{256}{45} e_1 + \frac{3125}{144} g_1 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.99)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + g_1 = 0 \quad (3.100)$$

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 + 4e_1 + 5g_1 = 0 \quad (3.101)$$

$$\frac{1}{2} b_1 + 2c_1 + \frac{9}{2} d_1 + 8e_1 + \frac{25}{2} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 4c_1 + 9d_1 + 16e_1 + 25g_1 = 0 \quad (3.102)$$

$$\frac{1}{6} b_1 + \frac{4}{3} c_1 + \frac{9}{2} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{125}{6} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 8c_1 + 27d_1 + 64e_1 + 125g_1 = 0 \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{24} b_1 + \frac{2}{3} c_1 + \frac{27}{8} d_1 + \frac{32}{3} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = \frac{1}{h^4} \rightarrow b_1 + 16c_1 + 81d_1 + 256e_1 + 625g_1 = \frac{24}{h^4} \quad (3.104)$$

$$\frac{1}{120} b_1 + \frac{4}{15} c_1 + \frac{81}{40} d_1 + \frac{128}{15} e_1 + \frac{625}{24} g_1 = 0 \rightarrow b_1 + 32c_1 + 243d_1 + 1024e_1 + 3125g_1 = 0 \quad (3.105)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.102) - (3.101); \quad 2c_4 + 6d_4 + 12e_4 + 20g_4 = 0 \quad (3.106)$$

$$(3.106) \div 2; \quad c_4 + 3d_4 + 6e_4 + 10g_4 = 0 \quad (3.107)$$

$$(3.103) - (3.102); \quad 4c_4 + 18d_4 + 48e_4 + 100g_4 = 0 \quad (3.108)$$

$$(3.108) \div 2; \quad 2c_4 + 9d_4 + 24e_4 + 50g_4 = 0 \quad (3.109)$$

$$(3.107) \times 2; \quad 2c_4 + 6d_4 + 12e_4 + 20g_4 = 0 \quad (3.110)$$

$$(3.109) - (3.110); \quad 3d_4 + 12e_4 + 30g_4 = 0 \quad (3.111)$$

$$(3.111) \div 3; \quad d_4 + 4e_4 + 10g_4 = 0 \quad (3.112)$$

$$(3.104) - (3.103); \quad 8c_4 + 54d_4 + 192e_4 + 500g_4 = \frac{24}{h^4} \quad (3.113)$$

$$(3.113) \div 2; \quad 4c_4 + 27d_4 + 96e_4 + 250g_4 = \frac{12}{h^4} \quad (3.114)$$

$$(3.109) \times 2; \quad 4c_4 + 18d_4 + 48e_4 + 100g_4 = 0 \quad (3.115)$$

$$(3.114) - (3.115); \quad 9d_4 + 48e_4 + 150g_4 = \frac{12}{h^4} \quad (3.116)$$

$$(3.116) \div 3; \quad 3d_4 + 16e_4 + 50g_4 = \frac{4}{h^4} \quad (3.117)$$

$$(3.112) \times 3; \quad 3d_4 + 12e_4 + 30g_4 = 0 \quad (3.118)$$

$$(3.117) - (3.118); \quad 4e_4 + 20g_4 = \frac{4}{h^4} \quad (3.119)$$

$$(3.119) \div 4; \quad e_4 + 5g_4 = \frac{1}{h^4} \quad (3.120)$$

$$(3.105) - (3.104); \quad 16c_4 + 162d_4 + 768e_4 + 2500g_4 = -\frac{24}{h^4} \quad (3.121)$$

$$(3.121) \div 2; \quad 8c_4 + 81d_4 + 384e_4 + 1250g_4 = -\frac{12}{h^4} \quad (3.122)$$

$$(3.114) \times 2; \quad 8c_4 + 54d_4 + 192e_4 + 500g_4 = \frac{24}{h^4} \quad (3.123)$$

$$(3.122) - (3.123); \quad 27d_4 + 192e_4 + 750g_4 = -\frac{36}{h^4} \quad (3.124)$$

$$(3.124) \div 3; \quad 9d_4 + 64e_4 + 250g_4 = -\frac{12}{h^4} \quad (3.125)$$

$$(3.117) \times 3; \quad 9d_4 + 48e_4 + 150g_4 = \frac{12}{h^4} \quad (3.126)$$

$$(3.125) - (3.126); \quad 16e_4 + 100g_4 = -\frac{24}{h^4} \quad (3.127)$$

$$(3.127) \div 4; \quad 4e_4 + 25g_4 = -\frac{6}{h^4} \quad (3.128)$$

$$(3.120) \times 4; \quad 4e_4 + 20g_4 = \frac{4}{h^4} \quad (3.129)$$

$$(3.128) - (3.129); \quad 5g_4 = -\frac{10}{h^4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$g_4 = -\frac{2}{h^4}$$

นำ g_4 ไปแทนใน (3.120)

$$\begin{aligned} e_4 + 5\left(-\frac{2}{h^4}\right) &= \frac{1}{h^4} \\ e_4 &= \frac{11}{h^4} \end{aligned}$$

นำ e_4, g_4 ไปแทนใน (3.112)

$$\begin{aligned} d_4 + 4\left(\frac{11}{h^4}\right) + 10\left(-\frac{2}{h^4}\right) &= 0 \\ d_4 &= -\frac{24}{h^4} \end{aligned}$$

นำ d_4, e_4, g_4 ไปแทนใน (3.107)

$$\begin{aligned} c_4 + 3\left(-\frac{24}{h^4}\right) + 6\left(\frac{11}{h^4}\right) + 10\left(-\frac{2}{h^4}\right) &= 0 \\ c_4 &= \frac{26}{h^4} \end{aligned}$$

นำ c_4, d_4, e_4, g_4 ไปแทนใน (3.101)

$$\begin{aligned} b_4 + 2\left(\frac{26}{h^4}\right) + 3\left(-\frac{24}{h^4}\right) + 4\left(\frac{11}{h^4}\right) + 5\left(-\frac{2}{h^4}\right) &= 0 \\ b_4 &= -\frac{14}{h^4} \end{aligned}$$

นำ b_4, c_4, d_4, e_4, g_4 ไปแทนใน (3.100)

$$\begin{aligned} a_4 + \left(-\frac{14}{h^4}\right) + \frac{26}{h^4} + \left(-\frac{24}{h^4}\right) + \frac{11}{h^4} + \left(-\frac{2}{h^4}\right) &= 0 \\ a_4 &= \frac{3}{h^4} \end{aligned}$$

$$\therefore (a_4, b_4, c_4, d_4, e_4, g_4) = \left(\frac{3}{h^4}, -\frac{14}{h^4}, \frac{26}{h^4}, -\frac{24}{h^4}, \frac{11}{h^4}, \frac{2}{h^4}\right)$$

$$\text{จะได้ } f^{(4)}(x) = \frac{3}{h^4}f(x) - \frac{14}{h^4}f(x+h) + \frac{26}{h^4}f(x+2h) - \frac{24}{h^4}f(x+3h) + \frac{11}{h^4}f(x+4h) - \frac{2}{h^4}f(x+5h)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3f(x) - 14f(x+h) + 26f(x+2h) - 24f(x+3h) + 11f(x+4h) - 2f(x+5h)}{h^4}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน คือ } \left(\frac{1}{720}b_4 + \frac{4}{45}c_4 + \frac{81}{80}d_4 + \frac{256}{45}e_4 + \frac{3125}{144}g_4\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^2)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{3y(x_i) - 14y(x_{i+1}) + 26y(x_{i+2}) - 24y(x_{i+3}) + 11y(x_{i+4}) - 2y(x_{i+5})}{h^4} + O(h^2) \quad (3.130)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง

3.1.2.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x-h), (x-2h), (x-3h), (x-4h), (x-5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) จะเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f(x-5h) &= f(x) - 5hf'(x) + \frac{(5h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(5h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(5h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(5h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(5h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + O(h^7) \\ f(x-4h) &= f(x) - 4hf'(x) + \frac{(4h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(4h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(4h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(4h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(4h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + O(h^7) \\ f(x-3h) &= f(x) - 3hf'(x) + \frac{(3h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(3h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(3h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(3h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(3h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + O(h^7) \\ f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + O(h^7) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(6)}(x) + O(h^7) \\ f(x) &= f(x) \end{aligned}$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_5 f(x-5h) + b_5 f(x-4h) + c_5 f(x-3h) + d_5 f(x-2h) + e_5 f(x-h) + g_5 f(x) \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_5 + b_5 + c_5 + d_5 + e_5 + g_5) f(x) + (-5a_5 - 4b_5 - 3c_5 - 2d_5 - e_5) hf'(x) \\ &\quad + \left(\frac{25}{2} a_5 + 8b_5 + \frac{9}{2} c_5 + 2d_5 + \frac{1}{2} e_5 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{125}{6} a_5 - \frac{32}{3} b_5 - \frac{9}{2} c_5 - \frac{4}{3} d_5 - \frac{1}{6} e_5 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{625}{24} a_5 + \frac{32}{3} b_5 + \frac{27}{8} c_5 + \frac{2}{3} d_5 + \frac{1}{24} e_5 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{625}{24} a_5 - \frac{128}{15} b_5 - \frac{81}{40} c_5 - \frac{4}{15} d_5 - \frac{1}{120} e_5 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{3125}{144} a_5 + \frac{512}{15} b_5 + \frac{81}{80} c_5 + \frac{4}{45} d_5 + \frac{1}{720} e_5 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.132)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกานำไปใช้

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_5 + b_5 + c_5 + d_5 + e_5 + g_5 = 0 \quad (3.133)$$

$$-5a_5 - 4b_5 - 3c_5 - 2d_5 - e_5 = \frac{1}{h} \quad (3.134)$$

$$\frac{25}{2}a_5 + 8b_5 + \frac{9}{2}c_5 + 2d_5 + \frac{1}{2}e_5 = 0 \rightarrow 25a_5 + 16b_5 + 9c_5 + 4d_5 + e_5 = 0 \quad (3.135)$$

$$-\frac{125}{6}a_5 - \frac{32}{3}b_5 - \frac{9}{2}c_5 - \frac{4}{3}d_5 - \frac{1}{6}e_5 = 0 \rightarrow -125a_5 - 64b_5 - 27c_5 - 8d_5 - e_5 = 0 \quad (3.136)$$

$$\frac{625}{24}a_5 + \frac{32}{3}b_5 + \frac{27}{8}c_5 + \frac{2}{3}d_5 + \frac{1}{24}e_5 = 0 \rightarrow 625a_5 + 256b_5 + 81c_5 + 16d_5 + e_5 = 0 \quad (3.137)$$

$$-\frac{625}{24}a_5 - \frac{128}{15}b_5 - \frac{81}{40}c_5 - \frac{4}{15}d_5 - \frac{1}{120}e_5 = 0 \rightarrow -3125a_5 - 1024b_5 - 243c_5 - 32d_5 - e_5 = 0 \quad (3.138)$$

แก้สมการ

$$(3.134) + (3.135); \quad 20a_5 + 12b_5 + 6c_5 + 2d_5 = \frac{1}{h} \quad (3.139)$$

$$(3.139) \div 2; \quad 10a_5 + 6b_5 + 3c_5 + d_5 = \frac{1}{2h} \quad (3.140)$$

$$(3.135) + (3.136); \quad -100a_5 - 48b_5 - 18c_5 - 4d_5 = 0 \quad (3.141)$$

$$(3.141) \div 2; \quad -50a_5 - 24b_5 - 9c_5 - 2d_5 = 0 \quad (3.142)$$

$$(3.140) \times 2; \quad 20a_5 + 12b_5 + 6c_5 + 2d_5 = \frac{1}{h} \quad (3.143)$$

$$(3.142) + (3.143); \quad -30a_5 - 12b_5 - 3c_5 = \frac{1}{h} \quad (3.144)$$

$$(3.144) \div 3; \quad -10a_5 - 4b_5 - c_5 = \frac{1}{3h} \quad (3.145)$$

$$(3.136) + (3.137); \quad 500a_5 + 192b_5 + 54c_5 + 8d_5 = 0 \quad (3.146)$$

$$(3.146) \div 2; \quad 250a_5 + 96b_5 + 27c_5 + 4d_5 = 0 \quad (3.147)$$

$$(3.105) \times 4; \quad 40a_5 + 24b_5 + 12c_5 + 4d_5 = \frac{2}{h} \quad (3.148)$$

$$(3.147) - (3.148); \quad 210a_5 + 72b_5 + 15c_5 = -\frac{2}{h} \quad (3.149)$$

$$(3.149) \div 3; \quad 70a_5 + 24b_5 + 5c_5 = -\frac{2}{3h} \quad (3.150)$$

$$(3.145) \times 5; \quad -50a_5 - 20b_5 - 5c_5 = \frac{5}{3h} \quad (3.151)$$

$$(3.111) + (3.112); \quad 20a_5 + 4b_5 = \frac{1}{h} \quad (3.152)$$

$$(3.152) \div 4; \quad 5a_5 + b_5 = \frac{1}{4h} \quad (3.153)$$

$$(3.137) + (3.138); \quad -2500a_5 - 768b_5 - 162c_5 - 16d_5 = 0 \quad (3.154)$$

$$(3.154) \div 2; \quad -1250a_5 - 384b_5 - 81c_5 - 8d_5 = 0 \quad (3.155)$$

$$(3.147) \times 2; \quad 500a_5 + 192b_5 + 54c_5 + 8d_5 = 0 \quad (3.156)$$

$$(3.114) + (3.115); \quad -750a_5 - 192b_5 - 27c_5 = 0 \quad (3.157)$$

$$(3.157) \div 3; \quad -250a_5 - 64b_5 - 9c_5 = 0 \quad (3.158)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้วยการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(3.145) \times 9; \quad -90a_5 - 36b_5 - 9c_5 = \frac{3}{h} \quad (3.159)$$

$$(3.159) - (3.158); \quad 160a_5 + 28b_5 = \frac{3}{h} \quad (3.160)$$

$$(3.160) \div 4; \quad 40a_5 + 7b_5 = \frac{3}{4h} \quad (3.161)$$

$$(3.153) \times 7; \quad 35a_5 + 7b_5 = \frac{7}{4h} \quad (3.162)$$

$$(3.161) - (3.162); \quad 5a_5 = -\frac{1}{h}$$

$$a_5 = -\frac{1}{5h}$$

นำ a_5 ไปแทนใน (3.153)

$$5\left(-\frac{1}{5h}\right) + b_5 = \frac{1}{4h}$$

$$b_5 = \frac{5}{4h}$$

นำ a_5, b_5 ไปแทนใน (3.145)

$$-10\left(-\frac{1}{5h}\right) - 4\left(\frac{5}{4h}\right) - c_5 = \frac{1}{3h}$$

$$c_5 = -\frac{10}{3h}$$

นำ a_5, b_5, c_5 ไปแทนใน (3.140)

$$10\left(-\frac{1}{5h}\right) + 6\left(\frac{5}{4h}\right) + 3\left(-\frac{10}{3h}\right) + d_5 = \frac{1}{2h}$$

$$c_5 = \frac{5}{h}$$

นำ a_5, b_5, c_5, d_5 ไปแทนใน (3.134)

$$-5\left(-\frac{1}{5h}\right) - 4\left(\frac{5}{4h}\right) - 3\left(-\frac{10}{3h}\right) - 2\left(\frac{5}{h}\right) - e_5 = \frac{1}{h}$$

$$e_5 = -\frac{5}{h}$$

นำ b_5, c_5, d_5, e_5, g_5 ไปแทนใน (3.133)

$$-\frac{1}{5h} + \frac{5}{4h} + \left(-\frac{10}{3h}\right) + \frac{5}{h} + \left(-\frac{5}{h}\right) + g_5 = 0$$

$$g_5 = \frac{137}{60h}$$

$$\therefore (a_5, b_5, c_5, d_5, e_5, g_5) = \left(-\frac{1}{5h}, \frac{5}{4h}, -\frac{10}{3h}, \frac{5}{h}, -\frac{5}{h}, \frac{137}{60h}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $f'(x) = -\frac{1}{5h}f(x-5h) + \frac{5}{4h}f(x-4h) - \frac{10}{3h}f(x-3h) + \frac{5}{h}f(x-2h) - \frac{5}{h}f(x-h) + \frac{137}{60h}f(x)$

$$f'(x) = \frac{-12f(x-5h) + 75f(x-4h) - 200f(x-3h) + 300f(x-2h) - 300f(x-h) + 137f(x)}{60h}$$

ค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(\frac{3125}{144}a_5 + \frac{512}{15}b_5 + \frac{81}{80}c_5 + \frac{4}{45}d_5 + \frac{1}{720}e_5\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^5)$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง คือ

$$y'(x_i) = \frac{-12y(x_{i-5}) + 75y(x_{i-4}) - 200y(x_{i-3}) + 300y(x_{i-2}) - 300y(x_{i-1}) + 137y(x_i)}{60h} + O(h^5) \quad (3.163)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x-h), (x-2h), (x-3h), (x-4h), (x-5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (**)

หาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยกำหนดให้

$$f'''(x) = a_6 f(x-5h) + b_6 f(x-4h) + c_6 f(x-3h) + d_6 f(x-2h) + e_6 f(x-h) + g_6 f(x) \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (a_6 + b_6 + c_6 + d_6 + e_6 + g_6) f(x) + (-5a_6 - 4b_6 - 3c_6 - 2d_6 - e_6) h f'(x) \\ &+ \left(\frac{25}{2} a_6 + 8b_6 + \frac{9}{2} c_6 + 2d_6 + \frac{1}{2} e_6 \right) h^2 f''(x) \\ &+ \left(-\frac{125}{6} a_6 - \frac{32}{3} b_6 - \frac{9}{2} c_6 - \frac{4}{3} d_6 - \frac{1}{6} e_6 \right) h^3 f'''(x) \\ &+ \left(\frac{625}{24} a_6 + \frac{32}{3} b_6 + \frac{27}{8} c_6 + \frac{2}{3} d_6 + \frac{1}{24} e_6 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &+ \left(-\frac{625}{24} a_6 - \frac{128}{15} b_6 - \frac{81}{40} c_6 - \frac{4}{15} d_6 - \frac{1}{120} e_6 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &+ \left(\frac{3125}{144} a_6 + \frac{512}{15} b_6 + \frac{81}{80} c_6 + \frac{4}{45} d_6 + \frac{1}{720} e_6 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.165)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_6 + b_6 + c_6 + d_6 + e_6 + g_6 = 0 \quad (3.166)$$

$$-5a_6 - 4b_6 - 3c_6 - 2d_6 - e_6 = 0 \quad (3.167)$$

$$\frac{25}{2} a_6 + 8b_6 + \frac{9}{2} c_6 + 2d_6 + \frac{1}{2} e_6 = \frac{1}{h^2} \rightarrow 25a_6 + 16b_6 + 9c_6 + 4d_6 + e_6 = \frac{2}{h^2} \quad (3.168)$$

$$-\frac{125}{6} a_6 - \frac{32}{3} b_6 - \frac{9}{2} c_6 - \frac{4}{3} d_6 - \frac{1}{6} e_6 = 0 \rightarrow -125a_6 - 64b_6 - 27c_6 - 8d_6 - e_6 = 0 \quad (3.169)$$

$$\frac{625}{24} a_6 + \frac{32}{3} b_6 + \frac{27}{8} c_6 + \frac{2}{3} d_6 + \frac{1}{24} e_6 = 0 \rightarrow 625a_6 + 256b_6 + 81c_6 + 16d_6 + e_6 = 0 \quad (3.170)$$

$$-\frac{625}{24} a_6 - \frac{128}{15} b_6 - \frac{81}{40} c_6 - \frac{4}{15} d_6 - \frac{1}{120} e_6 = 0 \rightarrow -3125a_6 - 1024b_6 - 243c_6 - 32d_6 - e_6 = 0 \quad (3.171)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.167) + (3.168); \quad 20a_6 + 12b_6 + 6c_6 + 2d_6 = \frac{2}{h^2} \quad (3.172)$$

$$(3.172) \div 2; \quad 10a_6 + 6b_6 + 3c_6 + d_6 = \frac{1}{h^2} \quad (3.173)$$

$$(3.168) + (3.169); \quad -100a_6 - 48b_6 - 18c_6 - 4d_6 = \frac{2}{h^2} \quad (3.174)$$

$$(3.174) \div 2; \quad -50a_6 - 24b_6 - 9c_6 - 2d_6 = \frac{1}{h^2} \quad (3.175)$$

$$(3.173) \times 2; \quad 20a_6 + 12b_6 + 6c_6 + 2d_6 = \frac{2}{h^2} \quad (3.176)$$

$$(3.175) + (3.176); \quad -30a_6 - 12b_6 - 3c_6 = \frac{3}{h^2} \quad (3.177)$$

$$(3.177) \div 3; \quad -10a_6 - 4b_6 - c_6 = \frac{1}{h^2} \quad (3.178)$$

$$(3.169) + (3.170); \quad 500a_6 + 192b_6 + 54c_6 + 8d_6 = 0 \quad (3.179)$$

$$(3.179) \div 2; \quad 250a_6 + 96b_6 + 27c_6 + 4d_6 = 0 \quad (3.180)$$

$$(3.173) \times 4; \quad 40a_6 + 24b_6 + 12c_6 + 4d_6 = \frac{4}{h^2} \quad (3.181)$$

$$(3.180) - (3.181); \quad 210a_6 + 72b_6 + 15c_6 = -\frac{4}{h^2} \quad (3.182)$$

$$(3.182) \div 3; \quad 70a_6 + 24b_6 + 5c_6 = -\frac{4}{3h^2} \quad (3.183)$$

$$(3.178) \times 5; \quad -50a_6 - 20b_6 - 5c_6 = \frac{5}{h^2} \quad (3.184)$$

$$(3.183) + (3.184); \quad 20a_6 + 4b_6 = \frac{11}{3h^2} \quad (3.185)$$

$$(3.185) \div 4; \quad 5a_6 + b_6 = \frac{11}{12h^2} \quad (3.186)$$

$$(3.170) + (3.171); \quad -2500a_6 - 768b_6 - 162c_6 - 16d_6 = 0 \quad (3.187)$$

$$(3.187) \div 2; \quad -1250a_6 - 384b_6 - 81c_6 - 8d_6 = 0 \quad (3.188)$$

$$(3.180) \times 2; \quad 500a_6 + 192b_6 + 54c_6 + 8d_6 = 0 \quad (3.189)$$

$$(3.188) + (3.189); \quad -750a_6 - 192b_6 - 27c_6 = 0 \quad (3.190)$$

$$(3.190) \div 3; \quad -250a_6 - 64b_6 - 9c_6 = 0 \quad (3.191)$$

$$(3.178) \times 9; \quad -90a_6 - 36b_6 - 9c_6 = \frac{9}{h^2} \quad (3.192)$$

$$(3.192) - (3.191); \quad 160a_6 + 28b_6 = \frac{9}{h^2} \quad (3.193)$$

$$(3.193) \div 4; \quad 40a_6 + 7b_6 = \frac{9}{4h^2} \quad (3.194)$$

$$(3.186) \times 7; \quad 35a_6 + 7b_6 = \frac{77}{12h^2} \quad (3.195)$$

$$(3.194) - (3.195); \quad 5a_6 = -\frac{25}{6h^2} \quad (3.196)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ a_6 ไปแทนใน (3.186)

$$5\left(-\frac{5}{6h^2}\right) + b_6 = \frac{11}{12h^2}$$

$$b_6 = \frac{61}{12h^2}$$

นำ a_6, b_6 ไปแทนใน (3.178)

$$-10\left(-\frac{5}{6h^2}\right) - 4\left(\frac{61}{12h^2}\right) - c_6 = \frac{1}{h^2}$$

$$c_6 = -\frac{13}{h^2}$$

นำ a_6, b_6, c_6 ไปแทนใน (3.173)

$$10\left(-\frac{5}{6h^2}\right) + 6\left(\frac{61}{12h^2}\right) + 3\left(-\frac{13}{h^2}\right) + d_6 = \frac{1}{h^2}$$

$$d_6 = \frac{107}{6h^2}$$

นำ a_6, b_6, c_6, d_6 ไปแทนใน (3.167)

$$-5\left(-\frac{5}{6h^2}\right) - 4\left(\frac{61}{12h^2}\right) - 3\left(-\frac{13}{h^2}\right) - 2\left(\frac{107}{6h^2}\right) - e_6 = 0$$

$$e_6 = -\frac{77}{6h^2}$$

นำ a_6, b_6, c_6, d_6, e_6 ไปแทนใน (3.166)

$$-\frac{5}{6h^2} + \frac{61}{12h^2} - \frac{13}{h^2} + \frac{107}{6h^2} - \frac{77}{6h^2} + g_6 = 0$$

$$g_6 = \frac{15}{4h^2}$$

$$\therefore (a_6, b_6, c_6, d_6, e_6, g_6) = \left(-\frac{5}{6h^2}, \frac{61}{12h^2}, -\frac{13}{h^2}, \frac{107}{6h^2}, -\frac{77}{6h^2}, \frac{15}{4h^2}\right)$$

$$\text{จะได้ } f''(x) = -\frac{5}{6h^2}f(x-5h) + \frac{61}{12h^2}f(x-4h) - \frac{13}{h^2}f(x-3h) + \frac{107}{6h^2}f(x-2h) - \frac{77}{6h^2}f(x-h) + \frac{15}{4h^2}f(x)$$

$$f''(x) = \frac{-10f(x-5h) + 61f(x-4h) - 156f(x-3h) + 214f(x-2h) - 154f(x-h) + 45f(x)}{12h^2}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนคือ } \left(\frac{3125}{144}a_6 + \frac{512}{15}b_6 + \frac{81}{80}c_6 + \frac{4}{45}d_6 + \frac{1}{720}e_6\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^4)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหุกจุดย้อนหลัง คือ

$$y''(x_i) = \frac{-10y(x_{i-5}) + 61y(x_{i-4}) - 156y(x_{i-3}) + 214y(x_{i-2}) - 154y(x_{i-1}) + 45y(x_i)}{12h^2} + O(h^4) \quad (3.197)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

การหาอนุพันธ์อันดับสามโดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x-h), (x-2h), (x-3h), (x-4h), (x-5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (**)

หาค่าอนุพันธ์อันดับสามโดยกำหนดให้

$$f'''(x) = a_7 f(x-5h) + b_7 f(x-4h) + c_7 f(x-3h) + d_7 f(x-2h) + e_7 f(x-h) + g_7 f(x) \quad (3.198)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (a_7 + b_7 + c_7 + d_7 + e_7 + g_7) f(x) + (-5a_7 - 4b_7 - 3c_7 - 2d_7 - e_7) h f'(x) \\ &\quad + \left(\frac{25}{2} a_7 + 8b_7 + \frac{9}{2} c_7 + 2d_7 + \frac{1}{2} e_7 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{125}{6} a_7 - \frac{32}{3} b_7 - \frac{9}{2} c_7 - \frac{4}{3} d_7 - \frac{1}{6} e_7 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(\frac{625}{24} a_7 + \frac{32}{3} b_7 + \frac{27}{8} c_7 + \frac{2}{3} d_7 + \frac{1}{24} e_7 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{625}{24} a_7 - \frac{128}{15} b_7 - \frac{81}{40} c_7 - \frac{4}{15} d_7 - \frac{1}{120} e_7 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{3125}{144} a_7 + \frac{512}{15} b_7 + \frac{81}{80} c_7 + \frac{4}{45} d_7 + \frac{1}{720} e_7 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.199)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_7 + b_7 + c_7 + d_7 + e_7 + g_7 = 0 \quad (3.200)$$

$$-5a_7 - 4b_7 - 3c_7 - 2d_7 - e_7 = 0 \quad (3.201)$$

$$\frac{25}{2} a_7 + 8b_7 + \frac{9}{2} c_7 + 2d_7 + \frac{1}{2} e_7 = 0 \rightarrow 25a_7 + 16b_7 + 9c_7 + 4d_7 + e_7 = 0 \quad (3.202)$$

$$-\frac{125}{6} a_7 - \frac{32}{3} b_7 - \frac{9}{2} c_7 - \frac{4}{3} d_7 - \frac{1}{6} e_7 = \frac{1}{h^3} \rightarrow -125a_7 - 64b_7 - 27c_7 - 8d_7 - e_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.203)$$

$$\frac{625}{24} a_7 + \frac{32}{3} b_7 + \frac{27}{8} c_7 + \frac{2}{3} d_7 + \frac{1}{24} e_7 = 0 \rightarrow 625a_7 + 256b_7 + 81c_7 + 16d_7 + e_7 = 0 \quad (3.204)$$

$$-\frac{625}{24} a_7 - \frac{128}{15} b_7 - \frac{81}{40} c_7 - \frac{4}{15} d_7 - \frac{1}{120} e_7 = 0 \rightarrow -3125a_7 - 1024b_7 - 243c_7 - 32d_7 - e_7 = 0 \quad (3.205)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.201) + (3.202); \quad 20a_7 + 12b_7 + 6c_7 + 2d_7 = 0 \quad (3.206)$$

$$(3.206) \div 2; \quad 10a_7 + 6b_7 + 3c_7 + d_7 = 0 \quad (3.207)$$

$$(3.202) + (3.203); \quad -100a_7 - 48b_7 - 18c_7 - 4d_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.208)$$

$$(3.208) \div 2; \quad -50a_7 - 24b_7 - 9c_7 - 2d_7 = \frac{3}{h^3} \quad (3.209)$$

$$(3.207) \times 2; \quad 20a_7 + 12b_7 + 6c_7 + 2d_7 = 0 \quad (3.210)$$

$$(3.209) + (3.210); \quad -30a_7 - 12b_7 - 3c_7 = \frac{3}{h^3} \quad (3.211)$$

$$(3.211) \div 3; \quad -10a_7 - 4b_7 - c_7 = \frac{1}{h^3} \quad (3.212)$$

$$(3.203) + (3.204); \quad 500a_7 + 192b_7 + 54c_7 + 8d_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.213)$$

$$(3.213) \div 2; \quad 250a_7 + 96b_7 + 27c_7 + 4d_7 = \frac{3}{h^3} \quad (3.214)$$

$$(3.207) \times 4; \quad 40a_7 + 24b_7 + 12c_7 + 4d_7 = 0 \quad (3.215)$$

$$(3.214) - (3.215); \quad 210a_7 + 72b_7 + 15c_7 = \frac{3}{h^3} \quad (3.216)$$

$$(3.216) \div 3; \quad 70a_7 + 24b_7 + 5c_7 = \frac{1}{h^3} \quad (3.217)$$

$$(3.212) \times 5; \quad -50a_7 - 20b_7 - 5c_7 = \frac{5}{h^3} \quad (3.218)$$

$$(3.217) + (3.218); \quad 20a_7 + 4b_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.219)$$

$$(3.219) \div 2; \quad 5a_7 + b_7 = \frac{3}{2h^3} \quad (3.220)$$

$$(3.204) + (3.205); \quad -2500a_7 - 768b_7 - 162c_7 - 16d_7 = 0 \quad (3.221)$$

$$(3.221) \div 2; \quad -1250a_7 - 384b_7 - 81c_7 - 8d_7 = 0 \quad (3.222)$$

$$(3.214) \times 2; \quad 500a_7 + 192b_7 + 54c_7 + 8d_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.223)$$

$$(3.222) + (3.223); \quad -750a_7 - 192b_7 - 27c_7 = \frac{6}{h^3} \quad (3.224)$$

$$(3.224) \div 3; \quad -250a_7 - 64b_7 - 9c_7 = \frac{2}{h^3} \quad (3.225)$$

$$(3.212) \times 9; \quad -90a_7 - 36b_7 - 9c_7 = \frac{9}{h^3} \quad (3.226)$$

$$(3.226) - (3.225); \quad 160a_7 + 28b_7 = \frac{7}{h^3} \quad (3.227)$$

$$(3.227) \div 4; \quad 40a_7 + 7b_7 = \frac{7}{4h^3} \quad (3.228)$$

$$(3.220) \times 7; \quad 35a_7 + 7b_7 = \frac{21}{2h^3} \quad (3.229)$$

$$(3.228) - (3.229); \quad 5a_7 = -\frac{35}{4h^3} \quad (3.230)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ a_7 ไปแทนใน (3.220)

$$5\left(-\frac{7}{4h^3}\right) + b_7 = \frac{3}{2h^3}$$

$$b_7 = \frac{41}{4h^3}$$

นำ a_7, b_7 ไปแทนใน (3.212)

$$-10\left(-\frac{7}{4h^3}\right) - 4\left(\frac{41}{4h^3}\right) - c_7 = \frac{1}{h^3}$$

$$c_7 = -\frac{49}{2h^3}$$

นำ a_7, b_7, c_7 ไปแทนใน (3.207)

$$10\left(-\frac{7}{4h^3}\right) + 6\left(\frac{41}{4h^3}\right) + 3\left(-\frac{49}{2h^3}\right) + d_7 = 0$$

$$d_7 = \frac{59}{2h^3}$$

นำ a_7, b_7, c_7, d_7 ไปแทนใน (3.201)

$$-5\left(-\frac{7}{4h^3}\right) - 4\left(\frac{41}{4h^3}\right) - 3\left(-\frac{49}{2h^3}\right) - 2\left(\frac{59}{2h^3}\right) - e_7 = 0$$

$$e_7 = -\frac{71}{4h^3}$$

นำ a_7, b_7, c_7, d_7, e_7 ไปแทนใน (3.200)

$$\frac{7}{4h^3} + \frac{41}{4h^3} - \frac{49}{2h^3} + \frac{59}{2h^3} - \frac{71}{4h^3} + g_7 = 0$$

$$g_7 = \frac{17}{4h^3}$$

$$\therefore (a_7, b_7, c_7, d_7, e_7, g_7) = \left(-\frac{7}{4h^3}, \frac{41}{4h^3}, -\frac{49}{2h^3}, \frac{59}{2h^3}, -\frac{71}{4h^3}, \frac{17}{4h^3}\right)$$

$$\text{จะได้ } f'''(x) = -\frac{7}{4h^3}f(x-5h) + \frac{41}{4h^3}f(x-4h) - \frac{49}{2h^3}f(x-3h) + \frac{59}{2h^3}f(x-2h) - \frac{71}{4h^3}f(x-h) + \frac{17}{4h^3}f(x)$$

$$f'''(x) = \frac{-7f(x-5h) + 41f(x-4h) - 98f(x-3h) + 118f(x-2h) - 71f(x-h) + 17f(x)}{4h^3}$$

$$\text{ค่าคลานเคลื่อน คือ } \left(\frac{3125}{144}a_7 + \frac{512}{15}b_7 + \frac{81}{80}c_7 + \frac{4}{45}d_7 + \frac{1}{720}e_7\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^3)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง คือ

$$y'''(x_i) = \frac{-7y(x_{i-5}) + 41y(x_{i-4}) - 98y(x_{i-3}) + 118y(x_{i-2}) - 71y(x_{i-1}) + 17y(x_i)}{4h^3} + O(h^3) \quad (3.231)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

การหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยผลต่างหกจุดย้อนหลัง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $x, (x-h), (x-2h), (x-3h), (x-4h), (x-5h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (**)

หาค่าอนุพันธ์อันดับสี่โดยกำหนดให้

$$f^{(4)}(x) = a_8 f(x-5h) + b_8 f(x-4h) + c_8 f(x-3h) + d_8 f(x-2h) + e_8 f(x-h) + g_8 f(x) \quad (3.232)$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= (a_8 + b_8 + c_8 + d_8 + e_8 + g_8) f(x) + (-5a_8 - 4b_8 - 3c_8 - 2d_8 - e_8) h f'(x) \\ &+ \left(\frac{25}{2} a_8 + 8b_8 + \frac{9}{2} c_8 + 2d_8 + \frac{1}{2} e_8 \right) h^2 f''(x) \\ &+ \left(-\frac{125}{6} a_8 - \frac{32}{3} b_8 - \frac{9}{2} c_8 - \frac{4}{3} d_8 - \frac{1}{6} e_8 \right) h^3 f'''(x) \\ &+ \left(\frac{625}{24} a_8 + \frac{32}{3} b_8 + \frac{27}{8} c_8 + \frac{2}{3} d_8 + \frac{1}{24} e_8 \right) h^4 f^{(4)}(x) \\ &+ \left(-\frac{625}{24} a_8 - \frac{128}{15} b_8 - \frac{81}{40} c_8 - \frac{4}{15} d_8 - \frac{1}{120} e_8 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &+ \left(\frac{3125}{144} a_8 + \frac{512}{15} b_8 + \frac{81}{80} c_8 + \frac{4}{45} d_8 + \frac{1}{720} e_8 \right) h^6 f^{(6)}(x) + O(h^7) \end{aligned} \quad (3.233)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_8 + b_8 + c_8 + d_8 + e_8 + g_8 = 0 \quad (3.234)$$

$$-5a_8 - 4b_8 - 3c_8 - 2d_8 - e_8 = 0 \quad (3.235)$$

$$\frac{25}{2} a_8 + 8b_8 + \frac{9}{2} c_8 + 2d_8 + \frac{1}{2} e_8 = 0 \rightarrow 25a_8 + 16b_8 + 9c_8 + 4d_8 + e_8 = 0 \quad (3.236)$$

$$-\frac{125}{6} a_8 - \frac{32}{3} b_8 - \frac{9}{2} c_8 - \frac{4}{3} d_8 - \frac{1}{6} e_8 = 0 \rightarrow -125a_8 - 64b_8 - 27c_8 - 8d_8 - e_8 = 0 \quad (3.237)$$

$$\frac{625}{24} a_8 + \frac{32}{3} b_8 + \frac{27}{8} c_8 + \frac{2}{3} d_8 + \frac{1}{24} e_8 = \frac{1}{h^4} \rightarrow 625a_8 + 256b_8 + 81c_8 + 16d_8 + e_8 = \frac{24}{h^4} \quad (3.238)$$

$$-\frac{625}{24} a_8 - \frac{128}{15} b_8 - \frac{81}{40} c_8 - \frac{4}{15} d_8 - \frac{1}{120} e_8 = 0 \rightarrow -3125a_8 - 1024b_8 - 243c_8 - 32d_8 - e_8 = 0 \quad (3.239)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.235) + (3.236); \quad 20a_8 + 12b_8 + 6c_8 + 2d_8 = 0 \quad (3.240)$$

$$(3.240) \div 2; \quad 10a_8 + 6b_8 + 3c_8 + d_8 = 0 \quad (3.241)$$

$$(3.236) + (3.237); \quad -100a_8 - 48b_8 - 18c_8 - 4d_8 = 0 \quad (3.242)$$

$$(3.242) \div 2; \quad -50a_8 - 24b_8 - 9c_8 - 2d_8 = 0 \quad (3.243)$$

$$(3.241) \times 2; \quad -30a_8 - 12b_8 - 3c_8 = 0 \quad (3.244)$$

$$(3.245) \div 3; \quad -10a_8 - 4b_8 - c_8 = 0 \quad (3.245)$$

$$(3.237) + (3.238); \quad 500a_8 + 192b_8 + 54c_8 + 8d_8 = \frac{24}{h^4} \quad (3.246)$$

$$(3.247) \div 2; \quad 250a_8 + 96b_8 + 27c_8 + 4d_8 = \frac{12}{h^4} \quad (3.247)$$

$$(3.241) \times 4; \quad 40a_8 + 24b_8 + 12c_8 + 4d_8 = 0 \quad (3.248)$$

$$(3.248) - (3.249); \quad 210a_8 + 72b_8 + 15c_8 = \frac{12}{h^4} \quad (3.249)$$

$$(3.250) \div 3; \quad 70a_8 + 24b_8 + 5c_8 = \frac{4}{h^4} \quad (3.250)$$

$$(3.246) \times 5; \quad -50a_8 - 20b_8 - 5c_8 = 0 \quad (3.251)$$

$$(3.251) + (3.252); \quad 20a_8 + 4b_8 = \frac{4}{h^4} \quad (3.252)$$

$$(3.253) \div 4; \quad 5a_8 + b_8 = \frac{1}{h^4} \quad (3.253)$$

$$(3.238) + (3.239); \quad -2500a_8 - 768b_8 - 162c_8 - 16d_8 = \frac{24}{h^4} \quad (3.254)$$

$$(3.255) \div 2; \quad -1250a_8 - 384b_8 - 81c_8 - 8d_8 = \frac{12}{h^4} \quad (3.255)$$

$$(3.248) \times 2; \quad 500a_8 + 192b_8 + 54c_8 + 8d_8 = \frac{24}{h^4} \quad (3.256)$$

$$(3.256) + (3.257); \quad -750a_8 - 192b_8 - 27c_8 = \frac{36}{h^4} \quad (3.257)$$

$$(3.258) \div 3; \quad -250a_8 - 64b_8 - 9c_8 = 0 \quad (3.258)$$

$$(3.246) \times 9; \quad -90a_8 - 36b_8 - 9c_8 = 0 \quad (3.259)$$

$$(3.260) - (3.259); \quad 160a_8 + 28b_8 = -\frac{12}{h^4} \quad (3.256)$$

$$(3.261) \div 4; \quad 40a_8 + 7b_8 = -\frac{3}{h^4} \quad (3.261)$$

$$(3.254) \times 7; \quad 35a_8 + 7b_8 = \frac{7}{h^4} \quad (3.262)$$

$$(3.262) - (3.263); \quad 5a_8 = -\frac{10}{h^4} \quad (3.263)$$

$$a_8 = -\frac{2}{h^4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ a_8 ไปแทนใน (3.254)

$$5\left(-\frac{2}{h^4}\right) + b_8 = \frac{1}{h^4}$$

$$b_8 = \frac{11}{h^4}$$

นำ a_8, b_8 ไปแทนใน (3.246)

$$-10\left(-\frac{2}{h^4}\right) - 4\left(\frac{11}{h^4}\right) - c_8 = 0$$

$$c_8 = -\frac{24}{h^4}$$

นำ a_8, b_8, c_8 ไปแทนใน (3.241)

$$10\left(-\frac{2}{h^4}\right) + 6\left(\frac{11}{h^4}\right) + 3\left(-\frac{24}{h^4}\right) + d_8 = 0 \in$$

$$d_8 = \frac{26}{h^4}$$

นำ a_8, b_8, c_8, d_8 ไปแทนใน (3.235)

$$-5\left(-\frac{2}{h^4}\right) - 4\left(\frac{11}{h^4}\right) - 3\left(-\frac{24}{h^4}\right) - 2\left(\frac{26}{h^4}\right) - e_8 = 0$$

$$e_8 = -\frac{14}{h^4}$$

นำ a_8, b_8, c_8, d_8, e_8 ไปแทนใน (3.234)

$$-\frac{2}{h^4} + \frac{11}{h^4} - \frac{24}{h^4} + \frac{26}{h^4} - \frac{14}{h^4} + g_8 = 0$$

$$g_8 = \frac{3}{h^4}$$

$$\therefore (a_8, b_8, c_8, d_8, e_8, g_8) = \left(-\frac{2}{h^4}, \frac{11}{h^4}, -\frac{24}{h^4}, \frac{26}{h^4}, -\frac{14}{h^4}, \frac{3}{h^4}\right)$$

$$\text{จะได้ } f^{(4)}(x) = -\frac{2}{h^4}f(x-5h) + \frac{11}{h^4}f(x-4h) - \frac{24}{h^4}f(x-3h) + \frac{26}{h^4}f(x-2h) - \frac{14}{h^4}f(x-h) + \frac{3}{h^4}f(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2f(x-5h) + 11f(x-4h) - 24f(x-3h) + 26f(x-2h) - 14f(x-h) + 3f(x)}{h^4}$$

$$\text{ค่าคลานเคลื่อน คือ } \left(\frac{3125}{144}a_8 + \frac{512}{15}b_8 + \frac{81}{80}c_8 + \frac{4}{45}d_8 + \frac{1}{720}e_8\right)h^6 f^{(6)}(x) = O(h^2)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหจุดย้อนหลัง คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{-2y(x_{i-5}) + 11y(x_{i-4}) - 24y(x_{i-3}) + 26y(x_{i-2}) - 14y(x_{i-1}) + 3y(x_i)}{h^4} + O(h^2) \quad (3.264)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

3.1.3.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-3h), (x-2h), (x-h), (x+h), (x+2h), (x+3h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) จะเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f(x-3h) &= f(x) - 3hf'(x) + \frac{(3h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(3h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(3h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(3h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(3h)^6}{6!} f^{(6)}(x) - \frac{(3h)^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \\ f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{6!} f^{(6)}(x) - \frac{(2h)^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(6)}(x) - \frac{h^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \\ f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{6!} f^{(6)}(x) + \frac{h^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + \frac{(2h)^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \\ f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{(3h)^2}{2!} f''(x) + \frac{(3h)^3}{3!} f'''(x) + \frac{(3h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{(3h)^5}{5!} f^{(5)}(x) + \frac{(3h)^6}{6!} f^{(6)}(x) + \frac{(3h)^7}{7!} f^{(7)}(x) + O(h^8) \end{aligned}$$

(***)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_0 f(x-3h) + b_0 f(x-2h) + c_0 f(x-h) + d_0 f(x+h) + e_0 f(x+2h) + g_0 f(x+3h) \quad (3.265)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + g_0) f(x) + (-3a_0 - 2b_0 - c_0 + d_0 + 2e_0 + 3g_0) hf'(x) \\ &\quad + \left(\frac{9}{2} a_0 + 2b_0 + \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} d_0 + 2e_0 + \frac{9}{2} g_0 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{9}{2} a_0 - \frac{4}{3} b_0 - \frac{1}{6} c_0 + \frac{1}{6} d_0 + \frac{4}{3} e_0 + \frac{9}{2} g_0 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{81}{40} a_0 - \frac{4}{15} b_0 - \frac{1}{120} c_0 + \frac{1}{120} d_0 + \frac{4}{15} e_0 + \frac{81}{40} g_0 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{81}{80} a_0 + \frac{4}{45} b_0 + \frac{1}{720} c_0 + \frac{1}{720} d_0 + \frac{4}{45} e_0 + \frac{81}{80} g_0 \right) h^6 f^{(6)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{243}{560} a_0 - \frac{8}{315} b_0 - \frac{1}{5040} c_0 + \frac{1}{5040} d_0 + \frac{8}{315} e_0 + \frac{243}{543} g_0 \right) h^7 f^{(7)}(x) + o(h^8) \end{aligned} \quad (3.266)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9 = 0 \quad (3.267)$$

$$-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.268)$$

$$\frac{9}{2}a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2}c_9 + \frac{1}{2}d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2}g_9 = 0 \rightarrow 9a_9 + 4b_9 + c_9 + d_9 + 4e_9 + 9g_9 = 0 \quad (3.269)$$

$$-\frac{9}{2}a_9 - \frac{4}{3}b_9 - \frac{1}{6}c_9 + \frac{1}{6}d_9 + \frac{4}{3}e_9 + \frac{9}{2}g_9 = 0 \rightarrow -27a_9 - 8b_9 - c_9 + d_9 + 8e_9 + 27g_9 = 0 \quad (3.270)$$

$$\frac{27}{8}a_9 + \frac{2}{3}b_9 + \frac{1}{24}c_9 + \frac{1}{24}d_9 + \frac{2}{3}e_9 + \frac{27}{8}g_9 = 0 \rightarrow 81a_9 + 16b_9 + c_9 + d_9 + 16e_9 + 81g_9 = 0 \quad (3.271)$$

$$-\frac{81}{40}a_9 - \frac{4}{15}b_9 - \frac{1}{120}c_9 + \frac{1}{120}d_9 + \frac{4}{15}e_9 + \frac{81}{40}g_9 = 0 \rightarrow -243a_9 - 32b_9 - c_9 + d_9 + 32e_9 + 243g_9 = 0 \quad (3.272)$$

$$\frac{81}{80}a_9 + \frac{4}{45}b_9 + \frac{1}{720}c_9 + \frac{1}{720}d_9 + \frac{4}{45}e_9 + \frac{81}{80}g_9 = 0 \rightarrow 729a_9 + 64b_9 + c_9 + d_9 + 64e_9 + 729g_9 = 0 \quad (3.273)$$

แก้สมการ

$$(3.267) + (3.268); \quad -2a_9 - b_9 + 2d_9 + 3e_9 + 4g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.274)$$

$$(3.268) + (3.269); \quad 6a_9 + 2b_9 + 2d_9 + 6e_9 + 12g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.275)$$

$$(3.275) \div 2; \quad 3a_9 + b_9 + d_9 + 3e_9 + 6g_9 = \frac{1}{2h} \quad (3.276)$$

$$(3.269) + (3.270); \quad -18a_9 - 4b_9 + 2d_9 + 12e_9 + 36g_9 = 0 \quad (3.277)$$

$$(3.277) \div 2; \quad -9a_9 - 2b_9 + d_9 + 6e_9 + 18g_9 = 0 \quad (3.278)$$

$$(3.270) + (3.271); \quad 54a_9 + 8b_9 + 2d_9 + 24e_9 + 108g_9 = 0 \quad (3.279)$$

$$(3.279) \div 2; \quad 27a_9 + 4b_9 + d_9 + 12e_9 + 54g_9 = 0 \quad (3.280)$$

$$(3.271) + (3.272); \quad -162a_9 - 16b_9 + 2d_9 + 48e_9 + 324g_9 = 0 \quad (3.281)$$

$$(3.281) \div 2; \quad -81a_9 - 8b_9 + d_9 + 24e_9 + 162g_9 = 0 \quad (3.282)$$

$$(3.272) + (3.273); \quad 486a_9 + 32b_9 + 2d_9 + 96e_9 + 972g_9 = 0 \quad (3.283)$$

$$(3.283) \div 2; \quad 243a_9 + 16b_9 + d_9 + 48e_9 + 486g_9 = 0 \quad (3.284)$$

$$(3.274) + (3.276); \quad a_9 + 3b_9 + 6e_9 + 10g_9 = \frac{3}{2h} \quad (3.285)$$

$$(3.276) \times 2; \quad 6a_9 + 2b_9 + 2d_9 + 6e_9 + 12g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.286)$$

$$(3.278) + (3.286); \quad -3a_9 + 3d_9 + 12e_9 + 30g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.287)$$

$$(3.287) \div 3; \quad -a_9 + d_9 + 4e_9 + 10g_9 = \frac{1}{3h} \quad (3.288)$$

$$(3.278) + (3.280); \quad 9a_9 + 3d_9 + 24e_9 + 90g_9 = 0 \quad (3.289)$$

$$(3.289) \div 3; \quad 3a_9 + d_9 + 8e_9 + 30g_9 = 0 \quad (3.290)$$

$$(3.280) + (3.282); \quad -27a_9 + 3d_9 + 48e_9 + 270g_9 = 0 \quad (3.291)$$

เอกสารนี้ (3.291) $\div 3$; การที่สงวนไว้สำหรับการใช้งาน $9a_9 + d_9 + 16e_9 + 90g_9 = 0$ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (3.292) การคำนวณว่า (3.282) + (3.284); อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแบบ $81a_9 + 3d_9 + 96e_9 + 810g_9 = 0$ ซึ่งเป็นเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มิ (3.293) ไปใช้

$$(3.293) \div 3; \quad 27a_9 + d_9 + 32e_9 + 270g_9 = 0 \quad (3.294)$$

$$(3.285) + (3.288); \quad 4d_9 + 10e_9 + 20g_9 = \frac{11}{6h} \quad (3.295)$$

$$(3.295) \div 2; \quad 2d_9 + 5e_9 + 10g_9 = \frac{11}{12h} \quad (3.296)$$

$$(3.288) + (3.290); \quad 4d_9 + 20e_9 + 60g_9 = \frac{1}{h} \quad (3.297)$$

$$(3.297) \div 4; \quad d_9 + 5e_9 + 15g_9 = \frac{1}{4h} \quad (3.298)$$

$$(3.290) + (3.292); \quad 4d_9 + 40e_9 + 180g_9 = 0 \quad (3.299)$$

$$(3.299) \div 4; \quad d_9 + 10e_9 + 45g_9 = 0 \quad (3.300)$$

$$(3.292) + (3.294); \quad 4d_9 + 80e_9 + 540g_9 = 0 \quad (3.301)$$

$$(3.301) \div 4; \quad d_9 + 20e_9 + 135g_9 = 0 \quad (3.302)$$

$$(3.298) - (3.296); \quad -d_9 + 5g_9 = -\frac{2}{3h} \quad (3.303)$$

$$(3.298) \times 2; \quad 2d_9 + 10e_9 + 30g_9 = \frac{1}{2h} \quad (3.304)$$

$$(3.300) - (3.304); \quad -d_9 + 15g_9 = -\frac{1}{2h} \quad (3.305)$$

$$(3.300) \times 2; \quad 2d_9 + 20e_9 + 90g_9 = 0 \quad (3.306)$$

$$(3.302) - (3.306); \quad -d_9 + 45g_9 = 0 \quad (3.307)$$

$$(3.305) - (3.303); \quad 10g_9 = \frac{1}{6h} \quad (3.308)$$

นำ g_9 ไปแทนใน (3.303)

$$-d_9 + 5\left(\frac{1}{60h}\right) = -\frac{2}{3h}$$

$$d_9 = \frac{3}{4h}$$

นำ d_9, g_9 ไปแทนใน (3.296)

$$2\left(\frac{3}{4h}\right) + 5e_9 + 10\left(\frac{1}{60h}\right) = \frac{11}{12h}$$

$$e_9 = -\frac{3}{20h}$$

นำ e_9, d_9, g_9 ไปแทนใน (3.285)

$$a_9 + 3\left(\frac{3}{4h}\right) + 6\left(-\frac{3}{20h}\right) + 10\left(\frac{1}{60h}\right) = \frac{3}{2h}$$

$$a_9 = -\frac{1}{60h}$$

นำ a_9, e_9, d_9, g_9 ไปแทนใน (3.274)

$$-2\left(-\frac{1}{60h}\right) - b_9 + 2\left(\frac{3}{4h}\right) + 3\left(-\frac{3}{20h}\right) + 4\left(\frac{1}{60h}\right) = \frac{1}{h}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ³/_{20h} กรุณาอย่าให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่าในรูปแบบใด ๆ และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(-\frac{1}{60h}\right) + \frac{3}{20h} + c_9 + \left(\frac{3}{4h}\right) + \left(-\frac{3}{20h}\right) + \frac{1}{60h} = 0$$

$$c_9 = -\frac{3}{4h}$$

$$\therefore (a_9, b_9, c_9, d_9, e_9, g_9) = \left(-\frac{1}{60h}, \frac{3}{20h}, -\frac{3}{4h}, \frac{3}{4h}, -\frac{3}{20h}, \frac{1}{60h}\right)$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = -\frac{1}{60h}f(x-3h) + \frac{3}{20h}f(x-2h) - \frac{3}{4h}f(x-h) + \frac{3}{4h}f(x+h) - \frac{3}{20h}f(x+2h) + \frac{1}{60h}f(x+3h)$$

$$f'(x) = \frac{-1f(x-3h) + 9f(x-2h) - 45f(x-h) + 45f(x+h) - 9f(x+2h) + 1f(x+3h)}{60h}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน คือ } \left(-\frac{243}{560}a_9 - \frac{8}{315}b_9 - \frac{1}{5040}c_9 + \frac{1}{5040}d_9 + \frac{8}{315}e_9 + \frac{243}{543}g_9\right)h^7 f^{(7)}(x) = O(h^6)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง คือ

$$y'(x_i) = \frac{-1y(x_{i-3}) + 9y(x_{i-2}) - 45y(x_{i-1}) + 45y(x_{i+1}) - 9y(x_{i+2}) + 1y(x_{i+3})}{60h} + O(h^6) \quad (3.309)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-3h), (x-2h), (x-h), (x+h), (x+2h), (x+3h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (***)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_9 f(x-3h) + b_9 f(x-2h) + c_9 f(x-h) + d_9 f(x+h) + e_9 f(x+2h) + g_9 f(x+3h) \quad (3.310)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9) f(x) + (-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9) h f'(x) \\ &\quad + \left(\frac{9}{2} a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2} c_9 + \frac{1}{2} d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{9}{2} a_9 - \frac{4}{3} b_9 - \frac{1}{6} c_9 + \frac{1}{6} d_9 + \frac{4}{3} e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 - \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 \right) h^6 f^{(6)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{243}{560} a_9 - \frac{8}{315} b_9 - \frac{1}{5040} c_9 + \frac{1}{5040} d_9 + \frac{8}{315} e_9 + \frac{243}{543} g_9 \right) h^7 f^{(7)}(x) + o(h^8) \end{aligned} \quad (3.311)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9 = 0 \quad (3.312)$$

$$-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9 = 0 \quad (3.313)$$

$$\frac{9}{2} a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2} c_9 + \frac{1}{2} d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2} g_9 = \frac{1}{h^2} \rightarrow 9a_9 + 4b_9 + c_9 + d_9 + 4e_9 + 9g_9 = \frac{2}{h^2} \quad (3.314)$$

$$-\frac{9}{2} a_9 - \frac{4}{3} b_9 - \frac{1}{6} c_9 + \frac{1}{6} d_9 + \frac{4}{3} e_9 + \frac{9}{2} g_9 = 0 \rightarrow -27a_9 - 8b_9 - c_9 + d_9 + 8e_9 + 27g_9 = 0 \quad (3.315)$$

$$\frac{27}{8} a_9 + \frac{2}{3} b_9 + \frac{1}{24} c_9 + \frac{1}{24} d_9 + \frac{2}{3} e_9 + \frac{27}{8} g_9 = 0 \rightarrow 81a_9 + 16b_9 + c_9 + d_9 + 16e_9 + 81g_9 = 0 \quad (3.316)$$

$$-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 - \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 = 0 \rightarrow -243a_9 - 32b_9 - c_9 + d_9 + 32e_9 + 243g_9 = 0 \quad (3.317)$$

$$\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 = 0 \rightarrow 729a_9 + 64b_9 + c_9 + d_9 + 64e_9 + 729g_9 = 0 \quad (3.318)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แกสมการ

$$(3.312) + (3.313); \quad -2a_{10} - b_{10} + 2d_{10} + 3e_{10} + 4g_{10} = 0 \quad (3.319)$$

$$(3.313) + (3.314); \quad 6a_{10} + 2b_{10} + 2d_{10} + 6e_{10} + 12g_{10} = \frac{2}{h^2} \quad (3.320)$$

$$(3.320) \div 2; \quad 3a_{10} + b_{10} + d_{10} + 3e_{10} + 6g_{10} = \frac{1}{h^2} \quad (3.321)$$

$$(3.314) + (3.315); \quad -18a_{10} - 4b_{10} + 2d_{10} + 12e_{10} + 36g_{10} = \frac{2}{h^2} \quad (3.322)$$

$$(3.322) \div 2; \quad -9a_{10} - 2b_{10} + d_{10} + 6e_{10} + 18g_{10} = \frac{1}{h^2} \quad (3.323)$$

$$(3.315) + (3.316); \quad 54a_{10} + 8b_{10} + 2d_{10} + 24e_{10} + 108g_{10} = 0 \quad (3.324)$$

$$(3.324) \div 2; \quad 27a_{10} + 4b_{10} + d_{10} + 12e_{10} + 54g_{10} = 0 \quad (3.325)$$

$$(3.316) + (3.317); \quad -162a_{10} - 16b_{10} + 2d_{10} + 48e_{10} + 324g_{10} = 0 \quad (3.326)$$

$$(3.326) \div 2; \quad -81a_{10} - 8b_{10} + d_{10} + 24e_{10} + 162g_{10} = 0 \quad (3.327)$$

$$(3.317) + (3.318); \quad 486a_{10} + 32b_{10} + 2d_{10} + 96e_{10} + 972g_{10} = 0 \quad (3.328)$$

$$(3.328) \div 2; \quad 243a_{10} + 16b_{10} + d_{10} + 48e_{10} + 486g_{10} = 0 \quad (3.329)$$

$$(3.319) + (3.321); \quad a_{10} + 3d_{10} + 6e_{10} + 10g_{10} = \frac{1}{h^2} \quad (3.330)$$

$$(3.321) + (3.323); \quad -3a_{10} + 3d_{10} + 12e_{10} + 30g_{10} = \frac{3}{h^2} \quad (3.331)$$

$$(3.331) \div 3; \quad -a_{10} + d_{10} + 4e_{10} + 10g_{10} = \frac{1}{h^2} \quad (3.332)$$

$$(3.323) + (3.325); \quad 9a_{10} + 3d_{10} + 24e_{10} + 90g_{10} = \frac{2}{h^2} \quad (3.333)$$

$$(3.333) \div 3; \quad 3a_{10} + d_{10} + 8e_{10} + 30g_{10} = \frac{2}{3h^2} \quad (3.334)$$

$$(3.325) + (3.327); \quad -27a_{10} + 3d_{10} + 48e_{10} + 270g_{10} = 0 \quad (3.335)$$

$$(3.335) \div 3; \quad -9a_{10} + d_{10} + 16e_{10} + 90g_{10} = 0 \quad (3.336)$$

$$(3.327) + (3.329); \quad 81a_{10} + 3d_{10} + 96e_{10} + 810g_{10} = 0 \quad (3.337)$$

$$(3.337) \div 3; \quad 27a_{10} + d_{10} + 32e_{10} + 270g_{10} = 0 \quad (3.338)$$

$$(3.330) + (3.332); \quad 4d_{10} + 10e_{10} + 20g_{10} = \frac{2}{h^2} \quad (3.339)$$

$$(3.339) \div 2; \quad 2d_{10} + 5e_{10} + 10g_{10} = \frac{1}{h^2} \quad (3.340)$$

$$(3.332) + (3.334); \quad 4d_{10} + 20e_{10} + 60g_{10} = \frac{11}{3h^2} \quad (3.341)$$

$$(3.341) \div 4; \quad d_{10} + 5e_{10} + 15g_{10} = \frac{11}{12h^2} \quad (3.342)$$

$$(3.334) + (3.336); \quad 4d_{10} + 40e_{10} + 180g_{10} = \frac{2}{h^2} \quad (3.343)$$

$$(3.343) \div 4; \quad d_{10} + 10e_{10} + 45g_{10} = \frac{1}{2h^2} \quad (3.344)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่น (3.345)

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาของเอกสารทุกครั้งที่มีการแก้ไข (3.346)

$$(3.342) \times 2; \quad 2d_{10} + 10e_{10} + 30g_{10} = \frac{11}{6h^2} \quad (3.347)$$

$$(3.347) - (3.340); \quad 5e_{10} + 20g_{10} = \frac{5}{6h^2} \quad (3.348)$$

$$(3.348) \div 5; \quad e_{10} + 4g_{10} = \frac{1}{6h^2} \quad (3.349)$$

$$(3.344) - (3.342); \quad 5e_{10} + 30g_{10} = -\frac{5}{12h^2} \quad (3.350)$$

$$(3.350) \div 5; \quad e_{10} + 6g_{10} = -\frac{1}{12h^2} \quad (3.351)$$

$$(3.346) - (3.344); \quad 10e_{10} + 90g_{10} = -\frac{1}{2h^2} \quad (3.352)$$

$$(3.352) \div 10; \quad e_{10} + 9g_{10} = -\frac{1}{20h^2} \quad (3.353)$$

$$(3.351) - (3.349); \quad 2g_{10} = -\frac{1}{4h^2}$$

$$g_{10} = -\frac{1}{8h^2}$$

นำ g_{10} ไปแทนใน (3.349)

$$e_{10} + 4\left(-\frac{1}{8h^2}\right) = -\frac{1}{6h^2}$$

$$e_{10} = \frac{2}{3h^2}$$

นำ e_{10}, g_{10} ไปแทนใน (3.340)

$$2d_{10} + 5\left(\frac{2}{3h^2}\right) + 10\left(-\frac{1}{8h^2}\right) = \frac{1}{h^2}$$

$$d_{10} = -\frac{13}{24h^2}$$

นำ d_{10}, e_{10}, g_{10} ไปแทนใน (3.330)

$$a_{10} + 3\left(-\frac{13}{24h^2}\right) + 6\left(\frac{2}{3h^2}\right) + 10\left(-\frac{1}{8h^2}\right) = \frac{1}{h^2}$$

$$a_{10} = -\frac{1}{8h^2}$$

นำ $a_{10}, d_{10}, e_{10}, g_{10}$ ไปแทนใน (3.319)

$$-2\left(-\frac{1}{8h^2}\right) - b_{10} + 2\left(-\frac{13}{24h^2}\right) + 3\left(\frac{2}{3h^2}\right) + 4\left(-\frac{1}{8h^2}\right) = 0$$

$$b_{10} = \frac{2}{3h^2}$$

นำ $a_{10}, b_{10}, d_{10}, e_{10}, g_{10}$ ไปแทนใน (3.312)

$$\left(-\frac{1}{8h^2}\right) + \left(\frac{2}{3h^2}\right) + c_{10} + \left(-\frac{13}{24h^2}\right) + \left(\frac{2}{3h^2}\right) + \left(-\frac{1}{8h^2}\right) = 0$$

$$c_{10} = -\frac{13}{24h^2}$$

$$\therefore (a_{10}, b_{10}, c_{10}, d_{10}, e_{10}, g_{10}) = \left(-\frac{1}{8h^2}, \frac{2}{3h^2}, -\frac{13}{24h^2}, -\frac{13}{24h^2}, \frac{2}{3h^2}, -\frac{1}{8h^2}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$f''(x) = -\frac{1}{8h^2}f(x-3h) + \frac{2}{3h^2}f(x-2h) - \frac{13}{24h^2}f(x-h) - \frac{13}{24h^2}f(x+h) + \frac{2}{3h^2}f(x+2h) - \frac{1}{8h^2}f(x+3h)$$

$$f''(x) = \frac{-3f(x-3h) + 16f(x-2h) - 13f(x-h) - 13f(x+h) + 16f(x+2h) - 3f(x+3h)}{24h^2}$$

ค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(-\frac{243}{560}a_{10} - \frac{8}{315}b_{10} - \frac{1}{5040}c_{10} + \frac{1}{5040}d_{10} + \frac{8}{315}e_{10} + \frac{243}{543}g_{10}\right)h^7 f^{(7)}(x) = O(h^5)$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง คือ

$$y''(x_i) = \frac{-3y(x_{i-3}) + 16y(x_{i-2}) - 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 16y(x_{i+2}) - 3y(x_{i+3}))}{24h^2} + O(h^5) \quad (3.354)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3.3 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

การหาอนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-3h), (x-2h), (x-h), (x+h), (x+2h), (x+3h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (***)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_9 f(x-3h) + b_9 f(x-2h) + c_9 f(x-h) + d_9 f(x+h) + e_9 f(x+2h) + g_9 f(x+3h) \quad (3.355)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9) f'(x) + (-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9) hf''(x) \\ &\quad + \left(\frac{9}{2} a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2} c_9 + \frac{1}{2} d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{9}{2} a_9 - \frac{4}{3} b_9 - \frac{1}{6} c_9 + \frac{1}{6} d_9 + \frac{4}{3} e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 + \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 \right) h^6 f^{(6)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{243}{560} a_9 - \frac{8}{315} b_9 - \frac{1}{5040} c_9 + \frac{1}{5040} d_9 + \frac{8}{315} e_9 + \frac{243}{543} g_9 \right) h^7 f^{(7)}(x) + o(h^8) \end{aligned} \quad (3.356)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9 = 0 \quad (3.357)$$

$$-3a_{10} - 2b_{10} - c_{10} + d_{10} + 2e_{10} + 3g_{10} = 0 \quad (3.358)$$

$$\frac{9}{2} a_{11} + 2b_{11} + \frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{2} d_{11} + 2e_{11} + \frac{9}{2} g_{11} = 0 \rightarrow 9a_{11} + 4b_{11} + c_{11} + d_{11} + 4e_{11} + 9g_{11} = 0 \quad (3.359)$$

$$-\frac{9}{2} a_{11} - \frac{4}{3} b_{11} - \frac{1}{6} c_{11} + \frac{1}{6} d_{11} + \frac{4}{3} e_{11} + \frac{9}{2} g_{11} = \frac{1}{h^3} \rightarrow -27a_{11} - 8b_{11} - c_{11} + d_{11} + 8e_{11} + 27g_{11} = \frac{6}{h^3} \quad (3.360)$$

$$\frac{27}{8} a_9 + \frac{2}{3} b_9 + \frac{1}{24} c_9 + \frac{1}{24} d_9 + \frac{2}{3} e_9 + \frac{27}{8} g_9 = 0 \rightarrow 81a_9 + 16b_9 + c_9 + d_9 + 16e_9 + 81g_9 = 0 \quad (3.361)$$

$$-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 - \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 = 0 \rightarrow -243a_9 - 32b_9 - c_9 + d_9 + 32e_9 + 243g_9 = 0 \quad (3.362)$$

$$\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 = 0 \rightarrow 729a_9 + 64b_9 + c_9 + d_9 + 64e_9 + 729g_9 = 0 \quad (3.363)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.358) + (3.359); \quad 6a_{11} + 2b_{11} + 2d_{11} + 6e_{11} + 12g_{11} = 0 \quad (3.364)$$

$$(3.364) \div 2; \quad 3a_{11} + b_{11} + d_{11} + 3e_{11} + 6g_{11} = 0 \quad (3.365)$$

$$(3.359) + (3.360); \quad -18a_{11} - 4b_{11} + 2d_{11} + 12e_{11} + 36g_{11} = \frac{6}{h^3} \quad (3.366)$$

$$(3.366) \div 2; \quad -9a_{11} - 2b_{11} + d_{11} + 6e_{11} + 18g_{11} = \frac{3}{h^3} \quad (3.367)$$

$$(3.365) - (3.367); \quad 12a_{11} + 3b_{11} - 3e_{11} - 12g_{11} = -\frac{3}{h^3} \quad (3.368)$$

$$(3.368) \div 3; \quad 4a_{11} + b_{11} - e_{11} - 4g_{11} = -\frac{1}{h^3} \quad (3.369)$$

$$(3.360) + (3.361); \quad 54a_{11} + 8b_{11} + 2d_{11} + 24e_{11} + 108g_{11} = \frac{6}{h^3} \quad (3.370)$$

$$(3.370) \div 2; \quad 27a_{11} + 4b_{11} + d_{11} + 12e_{11} + 54g_{11} = \frac{3}{h^3} \quad (3.371)$$

$$(3.371) - (3.365); \quad 24a_{11} + 3b_{11} + 9e_{11} + 48g_{11} = \frac{3}{h^3} \quad (3.372)$$

$$(3.372) \div 3; \quad 8a_{11} + b_{11} + 3e_{11} + 16g_{11} = \frac{1}{h^3} \quad (3.373)$$

$$(3.373) - (3.369); \quad 4a_{11} + 4e_{11} + 20g_{11} = \frac{2}{h^3} \quad (3.374)$$

$$(3.374) \div 4; \quad a_{11} + e_{11} + 5g_{11} = \frac{1}{2h^3} \quad (3.375)$$

$$(3.361) + (3.362); \quad +162a_{11} - 16b_{11} + 2d_{11} + 48e_{11} + 324g_{11} = 0 \quad (3.376)$$

$$(3.376) \div 2; \quad -81a_{11} - 8b_{11} + d_{11} + 24e_{11} + 162g_{11} = 0 \quad (3.377)$$

$$(3.377) - (3.365); \quad -84a_{11} - 9b_{11} + 21e_{11} + 156g_{11} = 0 \quad (3.378)$$

$$(3.378) \div 3; \quad -28a_{11} - 3b_{11} + 7e_{11} + 52g_{11} = 0 \quad (3.379)$$

$$(3.373) \times 3; \quad 24a_{11} + 3b_{11} + 9e_{11} + 48g_{11} = \frac{3}{h^3} \quad (3.380)$$

$$(3.379) + (3.380); \quad -4a_{11} + 16e_{11} + 100g_{11} = \frac{3}{h^3} \quad (3.381)$$

$$(3.381) \div 4; \quad -a_{11} + 4e_{11} + 25g_{11} = \frac{3}{4h^3} \quad (3.382)$$

$$(3.375) + (3.382); \quad 5e_{11} + 30g_{11} = \frac{5}{4h^3} \quad (3.383)$$

$$(3.383) \div 5; \quad e_{11} + 6g_{11} = \frac{1}{4h^3} \quad (3.384)$$

$$(3.362) + (3.363); \quad 486a_{11} + 32b_{11} + 2d_{11} + 96e_{11} + 972g_{11} = 0 \quad (3.385)$$

$$(3.385) \div 2; \quad 243a_{11} + 16b_{11} + d_{11} + 48e_{11} + 486g_{11} = 0 \quad (3.386)$$

$$(3.386) - (3.377); \quad 324a_{11} + 24b_{11} + 24e_{11} + 324g_{11} = 0 \quad (3.387)$$

$$(3.387) \div 12; \quad 27a_{11} + 2b_{11} + 2e_{11} + 27g_{11} = 0 \quad (3.388)$$

$$(3.373) \times 2; \quad 16a_{11} + 2b_{11} + 6e_{11} + 32g_{11} = \frac{2}{h^3} \quad (3.389)$$

$$(3.388) - (3.389); \quad 11a_{11} - 4e_{11} - 5g_{11} = -\frac{3}{h^3} \quad (3.390)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(3.382) \times 11; \quad -11a_{11} + 44e_{11} + 275g_{11} = \frac{33}{4h^3} \quad (3.391)$$

$$(3.390) + (3.391); \quad 40e_{11} + 270g_{11} = \frac{25}{4h^3} \quad (3.392)$$

$$(3.392) \div 10; \quad 4e_{11} + 27g_{11} = \frac{5}{8h^3} \quad (3.393)$$

$$(3.384) \times 4; \quad 4e_{11} + 24g_{11} = \frac{1}{h^3} \quad (3.394)$$

$$(3.393) - (3.394); \quad 3g_{11} = -\frac{3}{8h^3}$$

$$g_{11} = -\frac{1}{8h^3}$$

นำ g_{11} ไปแทนใน (3.384)

$$e_{11} + 6\left(-\frac{1}{8h^3}\right) = \frac{1}{4h^3}$$

$$e_{11} = \frac{1}{h^3}$$

นำ e_{11}, g_{11} ไปแทนใน (3.375)

$$a_{11} + \frac{1}{h^3} + 5\left(-\frac{1}{8h^3}\right) = \frac{1}{2h^3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{8h^3}$$

นำ a_{11}, e_{11}, g_{11} ไปแทนใน (3.369)

$$4\left(\frac{1}{8h^3}\right) + b_{11} - \frac{1}{h^3} - 4\left(-\frac{1}{8h^3}\right) = \frac{1}{h^3}$$

$$b_{11} = \frac{1}{h^3}$$

นำ $a_{11}, b_{11}, e_{11}, g_{11}$ ไปแทนใน (3.365)

$$3\left(\frac{1}{8h^3}\right) - \frac{1}{h^3} + d_{11} + 3\left(\frac{1}{h^3}\right) + 6\left(-\frac{1}{8h^3}\right) = 0$$

$$d_{11} = -\frac{13}{8h^3}$$

นำ $a_{11}, b_{11}, d_{11}, e_{11}, g_{11}$ ไปแทนใน (3.357)

$$\frac{1}{8h^3} - \frac{1}{h^3} + c_{11} - \frac{13}{8h^3} + \frac{1}{h^3} - \frac{1}{8h^3} = 0$$

$$c_{11} = \frac{13}{8h^3}$$

$$\therefore (a_{11}, b_{11}, c_{11}, d_{11}, e_{11}, g_{11}) = \left(\frac{1}{8h^3}, \frac{1}{h^3}, \frac{13}{8h^3}, -\frac{13}{8h^3}, \frac{1}{h^3}, -\frac{1}{8h^3}\right)$$

$$\text{จะได้ } f'''(x) = \frac{1}{8h^2} f(x-3h) - \frac{1}{h^3} f(x-2h) + \frac{13}{8h^3} f(x-h) - \frac{13}{8h^3} f(x+h) + \frac{1}{h^3} f(x+2h) - \frac{1}{8h^3} f(x+3h)$$

$$f'''(x) = \frac{1f(x-3h) - 8f(x-2h) + 13f(x-h) - 13f(x+h) + 8f(x+2h) - 1f(x+3h)}{8h^3}$$

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน คือ } \left(-\frac{243}{560} a_{11} - \frac{8}{315} b_{11} - \frac{1}{5040} c_{11} + \frac{1}{5040} d_{11} + \frac{8}{315} e_{11} + \frac{243}{543} g_{11}\right) h^7 f^{(7)}(x) = O(h^4)$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสามโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง คือ

$$y'''(x_i) = \frac{1y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 8y(x_{i+2}) - 1y(x_{i+3})}{8h^3} + O(h^4) \quad (3.395)$$

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่ว่ากรรมใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3.4 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

การหาอนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

กำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ x_{i+1} และ x_i เป็น 2 จุดใด ๆ ที่อยู่ติดกันบนโดเมน จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-3h), (x-2h), (x-h), (x+h), (x+2h), (x+3h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะเขียนได้ดังสมการ (***)

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = a_9 f(x-3h) + b_9 f(x-2h) + c_9 f(x-h) + d_9 f(x+h) + e_9 f(x+2h) + g_9 f(x+3h) \quad (3.396)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9) f(x) + (-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9) hf'(x) \\ &\quad + \left(\frac{9}{2} a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2} c_9 + \frac{1}{2} d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^2 f''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{9}{2} a_9 - \frac{4}{3} b_9 - \frac{1}{6} c_9 + \frac{1}{6} d_9 + \frac{4}{3} e_9 + \frac{9}{2} g_9 \right) h^3 f'''(x) \\ &\quad + \left(-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 - \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 \right) h^5 f^{(5)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 \right) h^5 f^{(6)}(x) \\ &\quad + \left(-\frac{243}{560} a_9 - \frac{8}{315} b_9 - \frac{1}{5040} c_9 + \frac{1}{5040} d_9 + \frac{8}{315} e_9 + \frac{243}{543} g_9 \right) h^7 f^{(7)}(x) + o(h^8) \end{aligned} \quad (3.397)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a_9 + b_9 + c_9 + d_9 + e_9 + g_9 = 0 \quad (3.398)$$

$$-3a_9 - 2b_9 - c_9 + d_9 + 2e_9 + 3g_9 = 0 \quad (3.399)$$

$$\frac{9}{2} a_9 + 2b_9 + \frac{1}{2} c_9 + \frac{1}{2} d_9 + 2e_9 + \frac{9}{2} g_9 = 0 \rightarrow 9a_9 + 4b_9 + c_9 + d_9 + 4e_9 + 9g_9 = 0 \quad (3.400)$$

$$-\frac{9}{2} a_9 - \frac{4}{3} b_9 - \frac{1}{6} c_9 + \frac{1}{6} d_9 + \frac{4}{3} e_9 + \frac{9}{2} g_9 = 0 \rightarrow -27a_9 - 8b_9 - c_9 + d_9 + 8e_9 + 27g_9 = 0 \quad (3.401)$$

$$\frac{27}{8} a_9 + \frac{2}{3} b_9 + \frac{1}{24} c_9 + \frac{1}{24} d_9 + \frac{2}{3} e_9 + \frac{27}{8} g_9 = \frac{1}{h^4} \rightarrow 81a_9 + 16b_9 + c_9 + d_9 + 16e_9 + 81g_9 = \frac{24}{h^4} \quad (3.402)$$

$$-\frac{81}{40} a_9 - \frac{4}{15} b_9 - \frac{1}{120} c_9 + \frac{1}{120} d_9 + \frac{4}{15} e_9 + \frac{81}{40} g_9 = 0 \rightarrow -243a_9 - 32b_9 - c_9 + d_9 + 32e_9 + 243g_9 = 0 \quad (3.403)$$

$$\frac{81}{80} a_9 + \frac{4}{45} b_9 + \frac{1}{720} c_9 + \frac{1}{720} d_9 + \frac{4}{45} e_9 + \frac{81}{80} g_9 = 0 \rightarrow 729a_9 + 64b_9 + c_9 + d_9 + 64e_9 + 729g_9 = 0 \quad (3.404)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แก้สมการ

$$(3.399) + (3.400); \quad 6a_{12} + 2b_{12} + 2d_{12} + 6e_{12} + 12g_{12} = 0 \quad (3.405)$$

$$(3.405) \div 2; \quad 3a_{12} + b_{12} + d_{12} + 3e_{12} + 6g_{12} = 0 \quad (3.406)$$

$$(3.398) + (3.399); \quad -2a_{12} - b_{12} + 2d_{12} + 3e_{12} + 4g_{12} = 0 \quad (3.407)$$

$$(3.400) + (3.401); \quad -18a_{12} - 4b_{12} + 2d_{12} + 12e_{12} + 36g_{12} = 0 \quad (3.408)$$

$$(3.408) \div 2; \quad -9a_{12} - 2b_{12} + d_{12} + 6e_{12} + 18g_{12} = 0 \quad (3.409)$$

$$(3.401) + (3.402); \quad 54a_{12} + 8b_{12} + 2d_{12} + 24e_{12} + 108g_{12} = \frac{24}{h^4} \quad (3.410)$$

$$(3.410) \div 2; \quad 27a_{12} + 4b_{12} + d_{12} + 12e_{12} + 54g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.411)$$

$$(3.402) + (3.403); \quad -162a_{12} - 16b_{12} + 2d_{12} + 48e_{12} + 324g_{12} = \frac{24}{h^4} \quad (3.412)$$

$$(3.412) \div 2; \quad -81a_{12} - 8b_{12} + d_{12} + 24e_{12} + 162g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.413)$$

$$(3.403) + (3.404); \quad 486a_{12} + 32b_{12} + 2d_{12} + 96e_{12} + 972g_{12} = 0 \quad (3.414)$$

$$(3.414) \div 2; \quad 243a_{12} + 16b_{12} + d_{12} + 48e_{12} + 486g_{12} = 0 \quad (3.415)$$

$$(3.406) + (3.407); \quad a_{12} + 3d_{12} + 6e_{12} + 10g_{12} = 0 \quad (3.416)$$

$$(3.407) \times 2; \quad -4a_{12} - 2b_{12} + 4d_{12} + 6e_{12} + 8g_{12} = 0 \quad (3.417)$$

$$(3.409) - (3.417); \quad -5a_{12} - 3d_{12} + 10g_{12} = 0 \quad (3.418)$$

$$(3.409) + (3.411); \quad 9a_{12} + 3d_{12} + 24e_{12} + 90g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.419)$$

$$(3.419) \div 3; \quad 3a_{12} + d_{12} + 8e_{12} + 30g_{12} = \frac{4}{h^4} \quad (3.420)$$

$$(3.411) + (3.413); \quad -27a_{12} + 3d_{12} + 48e_{12} + 270g_{12} = \frac{36}{h^4} \quad (3.421)$$

$$(3.421) \div 3; \quad -9a_{12} + d_{12} + 16e_{12} + 90g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.422)$$

$$(3.413) + (3.415); \quad 81a_{12} + 3d_{12} + 96e_{12} + 810g_{12} = \frac{24}{h^4} \quad (3.423)$$

$$(3.423) \div 3; \quad 27a_{12} + d_{12} + 32e_{12} + 270g_{12} = \frac{8}{h^4} \quad (3.424)$$

$$(3.416) \times 4; \quad 4a_{12} + 12d_{12} + 24e_{12} + 40g_{12} = 0 \quad (3.425)$$

$$(3.420) - (3.425); \quad 5a_{12} - 9d_{12} + 50g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.426)$$

$$(3.420) \times 2; \quad 18a_{12} + 6d_{12} + 48e_{12} + 180g_{12} = \frac{24}{h^4} \quad (3.427)$$

$$(3.427) - (3.422); \quad 45a_{12} + 3d_{12} - 90g_{12} = -\frac{12}{h^4} \quad (3.428)$$

$$(3.428) \div 3; \quad 15a_{12} + d_{12} - 30g_{12} = -\frac{4}{h^4} \quad (3.429)$$

$$(3.422) \times 2; \quad -54a_{12} + 6d_{12} + 96e_{12} + 540g_{12} = \frac{72}{h^4} \quad (3.430)$$

$$(3.423) - (3.430); \quad 135a_{12} - 3d_{12} + 270g_{12} = -\frac{48}{h^4} \quad (3.431)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใด (3.432) การค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(3.418) + (3.426); \quad -12d_{12} + 60g_{12} = \frac{12}{h^4} \quad (3.433)$$

$$(3.433) \div 12; \quad -d_{12} + 5g_{12} = \frac{1}{h^4} \quad (3.434)$$

$$(3.426) \times 3; \quad 15a_{12} - 27d_{12} + 150g_{12} = \frac{36}{h^4} \quad (3.435)$$

$$(3.435) - (3.429); \quad -28d_{12} + 180g_{12} = \frac{40}{h^4} \quad (3.436)$$

$$(3.436) \div 4; \quad -7d_{12} + 45g_{12} = \frac{10}{h^4} \quad (3.437)$$

$$(3.429) \times 3; \quad 45a_{12} + 3d_{12} - 90g_{12} = -\frac{12}{h^4} \quad (3.438)$$

$$(3.438) - (3.432); \quad 4d_{12} - 180g_{12} = \frac{4}{h^4} \quad (3.439)$$

$$(3.439) \div 4; \quad d_{12} - 45g_{12} = \frac{1}{h^4} \quad (3.440)$$

$$(3.434) \times 7; \quad -7d_{12} + 35g_{12} = \frac{7}{h^4} \quad (3.441)$$

$$(3.437) - (3.441); \quad 10g_{12} = \frac{3}{h^4}$$

$$g_{12} = \frac{3}{10h^4}$$

นำ g_{12} ไปแทนใน (3.434)

$$-d_{12} + 5\left(\frac{3}{10h^4}\right) = \frac{1}{h^4}$$

$$d_{12} = \frac{1}{2h^4}$$

นำ g_{12}, d_{12} ไปแทนใน (3.426)

$$5a_{12} + 9\left(\frac{1}{2h^4}\right) + 50\left(\frac{3}{10h^4}\right) = \frac{12}{h^4}$$

$$a_{12} = \frac{3}{10h^4}$$

นำ a_{12}, d_{12}, g_{12} ไปแทนใน (3.416)

$$\left(\frac{3}{10h^4}\right) + 3\left(\frac{1}{2h^4}\right) + 6e_{12} + 10\left(\frac{3}{10h^4}\right) = 0$$

$$e_{12} = -\frac{4}{5h^4}$$

นำ $a_{12}, d_{12}, e_{12}, g_{12}$ ไปแทนใน (3.406)

$$3\left(\frac{3}{10h^4}\right) + b_{12} + \left(\frac{1}{2h^4}\right) + 3\left(-\frac{4}{5h^4}\right) + 6\left(\frac{3}{10h^4}\right) = 0$$

$$b_{12} = -\frac{4}{5h^4}$$

นำ $a_{12}, b_{12}, d_{12}, e_{12}, g_{12}$ ไปแทนใน (3.398)

$$\left(\frac{3}{10h^4}\right) + \left(-\frac{4}{5h^4}\right) + c_{12} + \left(\frac{1}{2h^4}\right) + \left(-\frac{4}{5h^4}\right) + \left(\frac{3}{10h^4}\right) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_{12} = \frac{1}{2h^4}$$

$$\therefore (a_{12}, b_{12}, c_{12}, d_{12}, e_{12}, g_{12}) = \left(\frac{3}{10h^4}, -\frac{4}{5h^4}, \frac{1}{2h^4}, \frac{1}{2h^4}, -\frac{4}{5h^4}, \frac{3}{10h^4} \right)$$

จะได้

$$f^{(4)}(x) = \frac{3}{10h^4} f(x-3h) - \frac{4}{5h^4} f(x-2h) + \frac{1}{2h^4} f(x-h) + \frac{1}{2h^4} f(x+h) - \frac{4}{5h^4} f(x+2h) + \frac{3}{10h^4} f(x+3h)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3f(x-3h) - 8f(x-2h) + 5f(x-h) + 5f(x+h) - 8f(x+2h) + 3f(x+3h)}{10h^4}$$

ค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(-\frac{243}{560}a_{12} - \frac{8}{315}b_{12} - \frac{1}{5040}c_{12} + \frac{1}{5040}d_{12} + \frac{8}{315}e_{12} + \frac{243}{543}g_{12} \right) h^7 f^{(7)}(x) = O(h^3)$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{3y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 5y(x_{i-1}) + 5y(x_{i+1}) - 8y(x_{i+2}) + 3y(x_{i+3}))}{10h^4} + O(h^3) \quad (3.442)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างอันดับ

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ ดังนี้

$$y^{(4)}(x_i) = p(x_i)y'''(x_i) + q(x_i)y''(x_i) + r(x_i)y'(x_i) + s(x_i)y(x_i) + t(x_i) ; a < x < b$$

เงื่อนไขปัญหาค่าขอบ $y(a) = \alpha_1$ และ $y(b) = \beta_1$ และ $y'(a) = \alpha_2$ และ $y'(b) = \beta_2$ เริ่มต้นจากการแบ่งจำนวนช่วงปิด (a, b) ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน นิยามการแบ่งโดย $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots, N$ เมื่อ $h = \frac{b-a}{N}$ เรียกว่า ระดับขั้นหรือช่วงกว้าง ดังนั้น จุดปลายช่วงย่อยของการแบ่ง $x_0 = \alpha$ คือ และ $x_N = \beta$ และจุดตัดภายในช่วงย่อย คือ $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$

3.2.1 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.22) คือ

$$y^{(4)}(x_i) = p(x_i)y'''(x_i) + q(x_i)y''(x_i) + r(x_i)y'(x_i) + s(x_i)y(x_i) + t(x_i)$$

จากสมการ (3.33) ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i) = \frac{-137y(x_i) + 300y(x_{i+1}) - 300y(x_{i+2}) + 200y(x_{i+3}) - 75y(x_{i+4}) + 12y(x_{i+5})}{60h} + O(h^5)$$

จากสมการ (3.66) ค่าอนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i) = \frac{45y(x_i) - 154y(x_{i+1}) + 214y(x_{i+2}) - 156y(x_{i+3}) + 61y(x_{i+4}) - 10y(x_{i+5})}{12h^2} + O(h^4)$$

จากสมการ (3.97) ค่าอนุพันธ์อันดับสาม คือ

$$y'''(x_i) = \frac{17y(x_i) + 71y(x_{i+1}) - 118y(x_{i+2}) + 98y(x_{i+3}) - 41y(x_{i+4}) + 7y(x_{i+5})}{4h^3} + O(h^3)$$

จากสมการ (3.130) ค่าอนุพันธ์อันดับสี่ คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{3y(x_i) - 14y(x_{i+1}) + 26y(x_{i+2}) - 24y(x_{i+3}) + 11y(x_{i+4}) - 2y(x_{i+5})}{h^4} + O(h^2)$$

นำสมการ (3.33), (3.66), (3.97), (3.130) แทนลงในสมการ (2.22) จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y(x_i) - 14y(x_{i+1}) + 26y(x_{i+2}) - 24y(x_{i+3}) + 11y(x_{i+4}) - 2y(x_{i+5})}{h^4} + O(h^2) \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{17y(x_i) + 71y(x_{i+1}) - 118y(x_{i+2}) + 98y(x_{i+3}) - 41y(x_{i+4}) + 7y(x_{i+5})}{4h^3} + O(h^3) \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{45y(x_i) - 154y(x_{i+1}) + 214y(x_{i+2}) - 156y(x_{i+3}) + 61y(x_{i+4}) - 10y(x_{i+5})}{12h^2} + O(h^4) \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-137y(x_i) + 300y(x_{i+1}) - 300y(x_{i+2}) + 200y(x_{i+3}) - 75y(x_{i+4}) + 12y(x_{i+5})}{60h} + O(h^5) \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \end{aligned} \quad (3.443)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัด $o(h^5), o(h^4), o(h^3), o(h^2)$ ออกจากสมการ (3.443)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y(x_i) - 14y(x_{i+1}) + 26y(x_{i+2}) - 24y(x_{i+3}) + 11y(x_{i+4}) - 2y(x_{i+5})}{h^4} \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{17y(x_i) + 71y(x_{i+1}) - 118y(x_{i+2}) + 98y(x_{i+3}) - 41y(x_{i+4}) + 7y(x_{i+5})}{4h^3} \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{45y(x_i) - 154y(x_{i+1}) + 214y(x_{i+2}) - 156y(x_{i+3}) + 61y(x_{i+4}) - 10y(x_{i+5})}{12h^2} \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-137y(x_i) + 300y(x_{i+1}) - 300y(x_{i+2}) + 200y(x_{i+3}) - 75y(x_{i+4}) + 12y(x_{i+5})}{60h} \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \quad (3.444) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $y(x_i) = y_i, p(x_i) = p_i, q(x_i) = q_i, r(x_i) = r_i, s(x_i) = s_i, t(x_i) = t_i$ สมการ (3.444) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y_i - 14y_{i+1} + 26y_{i+2} - 24y_{i+3} + 11y_{i+4} - 2y_{i+5}}{h^4} \right] \\ &= p_i \left[\frac{17y_i + 71y_{i+1} - 118y_{i+2} + 98y_{i+3} - 41y_{i+4} + 7y_{i+5}}{4h^3} \right] \\ &+ q_i \left[\frac{45y_i - 154y_{i+1} + 214y_{i+2} - 156y_{i+3} + 61y_{i+4} - 10y_{i+5}}{12h^2} \right] \\ &+ r_i \left[\frac{-137y_i + 300y_{i+1} - 300y_{i+2} + 200y_{i+3} - 75y_{i+4} + 12y_{i+5}}{60h} \right] + s_i y_i + t_i \quad (3.445) \end{aligned}$$

นำ $60h^4$ คูณตลอดจะได้

$$\begin{aligned} & 180y_i - 840y_{i+1} + 1560y_{i+2} - 1440y_{i+3} + 660y_{i+4} - 120y_{i+5} \\ &= 255hp_i y_i + 1065hp_i y_{i+1} - 1770hp_i y_{i+2} + 1470hp_i y_{i+3} - 615hp_i y_{i+4} + 105hp_i y_{i+5} \\ &+ 225h^2 q_i y_i - 770h^2 q_i y_{i+1} + 1070h^2 q_i y_{i+2} - 780h^2 q_i y_{i+3} + 305h^2 q_i y_{i+4} \\ &- 50h^2 q_i y_{i+5} - 137h^3 r_i y_i + 300h^3 r_i y_{i+1} - 300h^3 r_i y_{i+2} + 200h^3 r_i y_{i+3} \\ &- 75h^3 r_i y_{i+4} + 12h^3 r_i y_{i+5} + 60h^3 s_i y_i + 60h^4 t_i \quad (3.446) \end{aligned}$$

สมการ (3.446) จัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} & (180 - 255hp_i - 225h^2 q_i + 137h^3 r_i - 60h^4 s_i) y_i + (-840 - 1065hp_i + 770h^2 q_i - 300h^3 r_i) y_{i+1} \\ &+ (1560 + 1770hp_i - 1070h^2 q_i + 300h^3 r_i) y_{i+3} + (-1440 - 1470hp_i + 780h^2 q_i - 200h^3 r_i) y_{i+3} \\ &+ (660 + 615hp_i - 305h^2 q_i + 75h^3 r_i) y_{i+4} + (-120 - 105hp_i + 50h^2 q_i - 12h^3 r_i) y_{i+5} = 60h^4 t_i \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$z_1 = 180 - 255hp_i - 225h^2q_i + 137h^3r_i - 60h^4s_i$$

$$z_2 = -840 - 1065hp_i + 770h^2q_i - 300h^3r$$

$$z_3 = 1560 + 1770hp_i - 1070h^2q_i + 300h^3r$$

$$z_4 = -1440 - 1470hp_i + 780h^2q_i - 200h^3r$$

$$z_5 = 660 + 615hp_i - 305h^2q_i + 75h^3r$$

$$z_6 = -120 - 105hp_i + 50h^2q_i - 12h^3r$$

จะได้ว่า

$$z_1y_i + z_2y_{i+1} + z_3y_{i+2} + z_4y_{i+3} + z_5y_{i+4} + z_6y_{i+5} = 60h^4t_i \quad ; \quad i = -1, 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.447)$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

จากสมการ (3.447) สามารถเขียนในอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60h^4t_{-1} - z_1y_{-1} - z_2y_0 \\ 60h^4t_0 - z_1y_0 \\ 60h^4t_1 \\ 60h^4t_2 \\ 60h^4t_3 \\ \vdots \\ 60h^4t_i \\ \vdots \\ 60h^4t_{N-1} - z_4y_N - z_5y_{N+1} - z_6y_{N+2} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.22) คือ

$$y^{(4)}(x_i) = p(x_i)y'''(x_i) + q(x_i)y''(x_i) + r(x_i)y'(x_i) + s(x_i)y(x_i) + t(x_i)$$

จากสมการ (3.163) ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i) = \frac{-12y(x_{i-5}) + 75y(x_{i-4}) - 200y(x_{i-3}) + 300y(x_{i-2}) - 300y(x_{i-1}) + 137y(x_i)}{60h} + O(h^5)$$

จากสมการ (3.197) ค่าอนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i) = \frac{-10y(x_{i-5}) + 61y(x_{i-4}) - 156y(x_{i-3}) + 214y(x_{i-2}) - 154y(x_{i-1}) + 45y(x_i)}{12h^2} + O(h^4)$$

จากสมการ (3.231) ค่าอนุพันธ์อันดับสาม คือ

$$y'''(x_i) = \frac{-7y(x_{i-5}) + 41y(x_{i-4}) - 98y(x_{i-3}) + 118y(x_{i-2}) - 71y(x_{i-1}) + 17y(x_i)}{4h^3} + O(h^3)$$

จากสมการ (3.264) ค่าอนุพันธ์อันดับสี่ คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{-2y(x_{i-5}) + 11y(x_{i-4}) - 24y(x_{i-3}) + 26y(x_{i-2}) - 14y(x_{i-1}) + 3y(x_i)}{h^4} + O(h^2)$$

นำสมการ (3.163), (3.197), (3.231), (3.264) แทนลงในสมการ (2.22) จะได้

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-2y(x_{i-5}) + 11y(x_{i-4}) - 24y(x_{i-3}) + 26y(x_{i-2}) - 14y(x_{i-1}) + 3y(x_i)}{h^4} + O(h^2) \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{-7y(x_{i-5}) + 41y(x_{i-4}) - 98y(x_{i-3}) + 118y(x_{i-2}) - 71y(x_{i-1}) + 17y(x_i)}{4h^3} + O(h^3) \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{-10y(x_{i-5}) + 61y(x_{i-4}) - 156y(x_{i-3}) + 214y(x_{i-2}) - 154y(x_{i-1}) + 45y(x_i)}{12h^2} + O(h^4) \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-12y(x_{i-5}) + 75y(x_{i-4}) - 200y(x_{i-3}) + 300y(x_{i-2}) - 300y(x_{i-1}) + 137y(x_i)}{60h} + O(h^5) \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \end{aligned} \quad (3.448)$$

ตัด $O(h^5), O(h^4), O(h^3), O(h^2)$ ออกจากสมการ (3.448)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-2y(x_{i-5}) + 11y(x_{i-4}) - 24y(x_{i-3}) + 26y(x_{i-2}) - 14y(x_{i-1}) + 3y(x_i)}{h^4} \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{-7y(x_{i-5}) + 41y(x_{i-4}) - 98y(x_{i-3}) + 118y(x_{i-2}) - 71y(x_{i-1}) + 17y(x_i)}{4h^3} \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{-10y(x_{i-5}) + 61y(x_{i-4}) - 156y(x_{i-3}) + 214y(x_{i-2}) - 154y(x_{i-1}) + 45y(x_i)}{12h^2} \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-12y(x_{i-5}) + 75y(x_{i-4}) - 200y(x_{i-3}) + 300y(x_{i-2}) - 300y(x_{i-1}) + 137y(x_i)}{60h} \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \end{aligned} \quad (3.449)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้ $y(x_i) = y_i, p(x_i) = p_i, q(x_i) = q_i, r(x_i) = r_i, s(x_i) = s_i, t(x_i) = t_i$ สมการ (3.449) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-2y_{i-5} + 11y_{i-4} - 24y_{i-3} + 26y_{i-2} - 14y_{i-1} + 3y_i}{h^4} \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{-7y_{i-5} + 41y_{i-4} - 98y_{i-3} + 118y_{i-2} - 71y_{i-1} + 17y_i}{4h^3} \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{-10y_{i-5} + 61y_{i-4} - 156y_{i-3} + 214y_{i-2} - 154y_{i-1} + 45y_i}{12h^2} \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-12y_{i-5} + 75y_{i-4} - 200y_{i-3} + 300y_{i-2} - 300y_{i-1} + 137y_i}{60h} \right] + s_i y_i + t_i \end{aligned} \quad (3.450)$$

นำ $60h^4$ คูณตลอดจะได้

$$\begin{aligned} & [-120y_{i-5} + 660y_{i-4} - 1440y_{i-3} + 1560y_{i-2} - 840y_{i-1} + 180y_i] \\ &= [-105hp_i y_{i-5} + 615hp_i y_{i-4} - 1470hp_i y_{i-3} + 1770hp_i y_{i-2} - 1065hp_i y_{i-1} + 255hp_i y_i] \\ &+ [-50h^2 q_i y_{i-5} + 305h^2 q_i y_{i-4} - 780h^2 q_i y_{i-3} + 1070h^2 q_i y_{i-2} - 770h^2 q_i y_{i-1} + 225h^2 q_i y_i] \\ &+ [-12h^3 r_i y_{i-5} + 75h^3 r_i y_{i-4} - 200h^3 r_i y_{i-3} + 300h^3 r_i y_{i-2} - 300h^3 r_i y_{i-1} + 137h^3 r_i y_i] \\ &+ 60h^4 s_i y_i + 60h^4 t_i \end{aligned} \quad (3.451)$$

สมการ (3.451) จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & (-120 + 105hp_i + 50h^2 q_i + 12h^3 r_i) y_{i-5} + (660 - 615hp_i - 305h^2 q_i - 75h^3 r_i) y_{i-4} \\ &+ (-1440 + 1470hp_i + 780h^2 q_i + 200h^3 r_i) y_{i-3} + (1560 - 1770hp_i - 1070h^2 q_i - 300h^3 r_i) y_{i-2} \\ &+ (-840 + 1065hp_i + 770h^2 q_i + 300h^3 r_i) y_{i-1} + (180 - 255hp_i - 225h^2 q_i - 137h^3 r_i - 60h^4 s_i) y_i = 60h^4 t_i \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$m_1 = -120 + 105hp_i + 50h^2 q_i + 12h^3 r_i$$

$$m_2 = 660 - 615hp_i - 305h^2 q_i - 75h^3 r_i$$

$$m_3 = -1440 + 1470hp_i + 780h^2 q_i + 200h^3 r_i$$

$$m_4 = 1560 - 1770hp_i - 1070h^2 q_i - 300h^3 r_i$$

$$m_5 = -840 + 1065hp_i + 770h^2 q_i + 300h^3 r_i$$

$$m_6 = 180 - 255hp_i - 225h^2 q_i - 137h^3 r_i - 60h^4 s_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$m_1 y_{i-5} + m_2 y_{i-4} + m_3 y_{i-3} + m_4 y_{i-2} + m_5 y_{i-1} + m_6 y_i = 60h^4 t_i \quad ; i = 3, 4, 5, \dots, N-1 \quad (3.452)$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

สมการ (3.313) สามารถเขียนในอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60h^4 t_3 - m_1 y_2 - m_2 y_1 - m_3 y_0 \\ 60h^4 t_4 - m_1 y_1 - m_2 y_0 \\ 60h^4 t_5 - m_1 y_0 \\ 60h^4 t_6 \\ 60h^4 t_7 \\ \vdots \\ 60h^4 t_i \\ \vdots \\ 60h^4 t_{N-1} - m_5 y_N - m_6 y_{N+1} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.22) คือ

$$y^{(4)}(x_i) = p(x_i)y'''(x_i) + q(x_i)y''(x_i) + r(x_i)y'(x_i) + s(x_i)y(x_i) + t(x_i)$$

จากสมการ (3.309) ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i) = \frac{-1y(x_{i-3}) + 9y(x_{i-2}) - 45y(x_{i-1}) + 45y(x_{i+1}) - 9y(x_{i+2}) + 1y(x_{i+3})}{60h} + O(h^6)$$

จากสมการ (3.354) ค่าอนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i) = \frac{-3y(x_{i-3}) + 16y(x_{i-2}) - 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 16y(x_{i+2}) - 3y(x_{i+3})}{24h^2} + O(h^5)$$

จากสมการ (3.395) ค่าอนุพันธ์อันดับสาม คือ

$$y'''(x_i) = \frac{1y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 8y(x_{i+2}) - 1y(x_{i+3})}{8h^3} + O(h^4)$$

จากสมการ (3.442) ค่าอนุพันธ์อันดับสี่ คือ

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{3y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 5y(x_{i-1}) + 5y(x_{i+1}) - 8y(x_{i+2}) + 3y(x_{i+3})}{10h^4} + O(h^3)$$

นำสมการ (3.309), (3.354), (3.395), (3.442) แทนลงในสมการ (3.22)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 5y(x_{i-1}) + 5y(x_{i+1}) - 8y(x_{i+2}) + 3y(x_{i+3})}{10h^4} + O(h^3) \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{1y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 8y(x_{i+2}) - 1y(x_{i+3})}{8h^3} + O(h^4) \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{-3y(x_{i-3}) + 16y(x_{i-2}) - 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 16y(x_{i+2}) - 3y(x_{i+3})}{24h^2} + O(h^5) \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-1y(x_{i-3}) + 9y(x_{i-2}) - 45y(x_{i-1}) + 45y(x_{i+1}) - 9y(x_{i+2}) + 1y(x_{i+3})}{60h} + O(h^6) \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \quad (3.453) \end{aligned}$$

ตัด $O(h^6), O(h^5), O(h^4), O(h^3)$ ออกจากสมการ (3.453)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 5y(x_{i-1}) + 5y(x_{i+1}) - 8y(x_{i+2}) + 3y(x_{i+3})}{10h^4} \right] \\ &= p(x_i) \left[\frac{1y(x_{i-3}) - 8y(x_{i-2}) + 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 8y(x_{i+2}) - 1y(x_{i+3})}{8h^3} \right] \\ &+ q(x_i) \left[\frac{-3y(x_{i-3}) + 16y(x_{i-2}) - 13y(x_{i-1}) - 13y(x_{i+1}) + 16y(x_{i+2}) - 3y(x_{i+3})}{24h^2} \right] \\ &+ r(x_i) \left[\frac{-1y(x_{i-3}) + 9y(x_{i-2}) - 45y(x_{i-1}) + 45y(x_{i+1}) - 9y(x_{i+2}) + 1y(x_{i+3})}{60h} \right] \\ &+ s(x_i)y(x_i) + t(x_i) \quad (3.454) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้ $y(x_i) = y_i, p(x_i) = p_i, q(x_i) = q_i, r(x_i) = r_i, s(x_i) = s_i, t(x_i) = t_i$ สมการ (3.454) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3y_{i-3} - 8y_{i-2} + 5y_{i-1} + 5y_{i+1} - 8y_{i+2} + 3y_{i+3}}{10h^4} \right] \\ &= p_i \left[\frac{1y_{i-3} - 8y_{i-2} + 13y_{i-1} - 13y_{i+1} + 8y_{i+2} - 1y_{i+3}}{8h^3} \right] \\ &+ q_i \left[\frac{-3y_{i-3} + 16y_{i-2} - 13y_{i-1} - 13y_{i+1} + 16y_{i+2} - 3y_{i+3}}{24h^2} \right] \\ &+ r_i \left[\frac{-1y_{i-3} + 9y_{i-2} - 45y_{i-1} + 45y_{i+1} - 9y_{i+2} + 1y_{i+3}}{60h} \right] + s_i y_i + t_i \end{aligned} \quad (3.455)$$

นำ $120h^4$ คูณตลอดจะได้

$$\begin{aligned} & [36y_{i-3} - 96y_{i-2} + 60y_{i-1} + 60y_{i+1} - 96y_{i+2} + 36y_{i+3}] \\ &= [15hp_i y_{i-3} - 120hp_i y_{i-2} + 195hp_i y_{i-1} - 195hp_i y_{i+1} + 120hp_i y_{i+2} - 15hp_i y_{i+3}] \\ &+ [-15h^2 q_i y_{i-3} + 80h^2 q_i y_{i-2} - 65h^2 q_i y_{i-1} - 65h^2 q_i y_{i+1} + 80h^2 q_i y_{i+2} - 15h^2 q_i y_{i+3}] \\ &+ [-2h^3 r_i y_{i-3} + 18h^3 r_i y_{i-2} - 90h^3 r_i y_{i-1} + 90h^3 r_i y_{i+1} - 18h^3 r_i y_{i+2} + 2h^3 r_i y_{i+3}] \\ &+ 120h^4 s_i y_i + 120h^4 t_i \end{aligned} \quad (3.456)$$

สมการ (3.456) จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & [36 - 15hp_i + 15h^2 q_i + 2h^3 r_i] y_{i-3} + [-96 + 120hp_i - 80h^2 q_i - 18h^3 r_i] y_{i-2} \\ &+ [60 - 195hp_i + 65h^2 q_i + 90h^3 r_i] y_{i-1} + [-120h^4 s_i] y_i + [60 + 195hp_i + 65h^2 q_i - 90h^3 r_i] y_{i+1} \\ &+ [-96 - 120hp_i - 80h^2 q_i + 18h^3 r_i] y_{i+2} + [36 + 15hp_i + 15h^2 q_i - 2h^3 r_i] y_{i+3} = 120h^4 t_i \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$w_1 = 36 - 15hp_i + 15h^2 q_i + 2h^3 r_i$$

$$w_2 = -96 + 120hp_i - 80h^2 q_i - 18h^3 r_i$$

$$w_3 = 60 - 195hp_i + 65h^2 q_i + 90h^3 r_i$$

$$w_4 = -120h^4 s_i$$

$$w_5 = 60 + 195hp_i + 65h^2 q_i - 90h^3 r_i$$

$$w_6 = -96 - 120hp_i - 80h^2 q_i + 18h^3 r_i$$

$$w_7 = 36 + 15hp_i + 15h^2 q_i - 2h^3 r_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$w_1 y_{i-3} + w_2 y_{i-2} + w_3 y_{i-1} + w_4 y_i + w_5 y_{i+1} + w_6 y_{i+2} + w_7 y_{i+3} = 120h^4 t_i ; i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (3.457)$$

สามารถเขียนได้ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

สมการ (3.457) สามารถเขียนในอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120h^4 t_1 - w_1 y_{-2} - w_2 y_{-1} - w_3 y_0 \\ 120h^4 t_2 - w_1 y_{-1} - w_2 y_0 \\ 120h^4 t_3 - w_1 y_0 \\ 120h^4 t_4 \\ 120h^4 t_5 \\ \vdots \\ 120h^4 t_i \\ \vdots \\ 120h^4 t_{N-1} - w_5 y_N - w_6 y_{N+1} - w_7 y_{N+2} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในบทนี้จะคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ของปัญหาค่าขอบโดยวิธีผลต่างอันดับ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง โดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย หลังจากนั้นนำผลเฉลยเชิงตัวเลขของแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องโดยได้แสดงอยู่ในรูปแบบของตารางและกราฟ

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่สามารถหาผลเฉลยจริงได้โดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ เพื่อต้องการตรวจสอบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีผลต่างอันดับทั้ง 3 วิธี

ตัวอย่างที่ 4.1 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่

$$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 0 ; 0 < x < 1$$

สำหรับปัญหาค่าขอบ $y(0)=1, y'(0)=2, y(1)=0.4248, y'(1)=3$

วิธีทำ โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ คือ

$$y^{(4)} = p(x)y'''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x) \text{ จากโจทย์จะได้ว่า } y^{(4)} = 10y'' - 9y \text{ ดังนั้น}$$

$p(x)=0, q(x)=10, r(x)=0, s(x)=-9, t(x)=0$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $(0,1)$ ออกเป็น N ช่วงย่อย จะได้

ค่า h คือ ความกว้างของช่วงต่าง ๆ ฉะนั้น จึงแบ่งช่วงย่อยออกเป็น 20, 40 และ 100 ให้ได้ตามความกว้างของช่วง คือ $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}$ ตามลำดับ แล้วใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการหาผลเฉลยเชิง

ตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับจะแสดงในรูปแบบของตารางและกราฟ ดังนี้

จากผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าผลเฉลยจริง คือ

$$y = (e^{-x}e^1(2500e^1 - 5343e^2 + 6250e^3 + 4314e^4 + 6250e^5 - 5343)) / (2500(3e^2 - 3e^4 + e^6 - 1)) - (e^{3x}(5343e^1 - 6250e^2 - 3219e^3 + 1250)) / (2500e^2 - 1)(e^4 - 2e^2 + 1) - (e^x(1250e^2 - 10,686e^1 + 2157e^3 + 12,500e^4 + 2157e^5 + 1250)) / (2500(e^2 - 1)e^4 - 2e^2 + 1) - (e^{-3x}(1250e^4 - 4281e^3 + 2157e^5 + 3750e^6)) / (2500(e^2 - 1)(e^4 - 2e^2 + 1))$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.1 วิธีผลต่างอันดับโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง

ผู้วิจัยจะพิจารณาวิธีผลต่างอันดับโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.1 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.0763	1.0491	0.0272	1.0763	1.0837	0.0074	1.0763	0.9083	0.1680
2	1.1107	1.0565	0.0542	1.1107	1.1428	0.0321	1.1107	0.9937	0.1170
3	1.1105	1.0299	0.0806	1.1105	1.1743	0.0638	1.1105	0.9707	0.1398
4	1.0820	0.9763	0.1057	1.0820	1.1782	0.0962	1.0820	0.8622	0.2199
5	1.0310	0.9020	0.1290	1.0310	1.1564	0.1255	1.0310	0.9334	0.0976
6	0.9623	0.8124	0.1499	0.9623	1.1121	0.1498	0.9623	0.8175	0.1448
7	0.8806	0.7126	0.168	0.8806	1.0489	0.1683	0.8806	0.7454	0.1352
8	0.7899	0.6073	0.1826	0.7899	0.9706	0.1807	0.7899	0.7840	0.0059
9	0.6941	0.5010	0.1931	0.6941	0.8813	0.1873	0.6941	0.6201	0.0740
10	0.5968	0.3980	0.1988	0.5968	0.7851	0.1884	0.5968	0.6097	0.0129
11	0.5016	0.3026	0.1990	0.5016	0.6861	0.1845	0.5016	0.5982	0.0966
12	0.4122	0.2189	0.1933	0.4122	0.5883	0.1761	0.4122	0.4412	0.0290
13	0.3323	0.1513	0.1810	0.3323	0.4960	0.1637	0.3323	0.4913	0.1590
14	0.2658	0.1039	0.1619	0.2658	0.4136	0.1478	0.2658	0.4299	0.1640
15	0.2170	0.0808	0.1362	0.2170	0.3458	0.1288	0.2170	0.3347	0.1177
16	0.1906	0.0859	0.1047	0.1906	0.2977	0.1070	0.1906	0.4280	0.2373
17	0.1918	0.1222	0.0696	0.1919	0.2748	0.0830	0.1919	0.3439	0.15210
18	0.2266	0.1916	0.0350	0.2266	0.2835	0.0569	0.2266	0.3557	0.1291
19	0.3017	0.2938	0.0079	0.3017	0.3308	0.0291	0.3017	0.4753	0.1737
20	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0

ตารางที่ 4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.0439	1.0373	0.0066	1.0439	1.0459	0.002	1.0439	1.0269	0.0170
2	1.0763	1.0631	0.0132	1.0763	1.0852	0.0088	1.0763	1.0501	0.0262

ตารางที่ 4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
3	1.0983	1.0785	0.0198	1.0983	1.1166	0.0184	1.0983	1.0699	0.0284
4	1.1107	1.0842	0.0265	1.1107	1.1398	0.0291	1.1107	1.0693	0.0414
5	1.1145	1.0814	0.0331	1.1145	1.1544	0.0400	1.1145	1.0732	0.0413
6	1.1105	1.0708	0.0396	1.1105	1.1610	0.0505	1.1105	1.0678	0.0426
7	1.0994	1.0533	0.0461	1.0994	1.1597	0.0603	1.0994	1.0490	0.0504
8	1.0820	1.0296	0.0524	1.0820	1.1512	0.0692	1.0820	1.0382	0.0439
9	1.0590	1.0003	0.0587	1.0590	1.1361	0.0771	1.0590	1.0129	0.0461
10	1.0310	0.9663	0.0647	1.0310	1.1149	0.0839	1.0310	0.9835	0.0475
11	0.9986	0.9280	0.0706	0.9986	1.0883	0.0897	0.9986	0.9605	0.0380
12	0.9623	0.8862	0.0762	0.9623	1.0568	0.0945	0.9623	0.9213	0.0411
13	0.9228	0.8413	0.0816	0.9228	1.0211	0.0983	0.9228	0.8870	0.0358
14	0.8806	0.7940	0.0866	0.8806	0.9818	0.1012	0.8806	0.8536	0.0270
15	0.8361	0.7447	0.0914	0.8361	0.9394	0.1032	0.8361	0.8067	0.0294
16	0.7899	0.6941	0.0958	0.7899	0.8944	0.1045	0.7899	0.7710	0.0189
17	0.7424	0.6426	0.0998	0.7424	0.8474	0.1050	0.7424	0.7293	0.0131
18	0.6941	0.5907	0.1033	0.6941	0.7989	0.1049	0.6941	0.6811	0.0130
19	0.6454	0.5390	0.1064	0.6454	0.7494	0.1041	0.6454	0.6455	0.0001
20	0.5968	0.4878	0.1089	0.5968	0.6995	0.1027	0.5968	0.5989	0.0021
21	0.5487	0.4378	0.1109	0.5487	0.6495	0.1008	0.5487	0.5549	0.0062
22	0.5016	0.3894	0.1122	0.5016	0.5999	0.0983	0.5016	0.5202	0.0185
23	0.4560	0.3431	0.1128	0.4560	0.5514	0.0954	0.4560	0.4734	0.0174
24	0.4122	0.2995	0.1127	0.4122	0.5043	0.0921	0.4122	0.4377	0.0254
25	0.3708	0.2591	0.1117	0.3708	0.4592	0.0884	0.3708	0.4048	0.0340
26	0.3323	0.2225	0.1099	0.3323	0.4166	0.0843	0.3323	0.3639	0.0316
27	0.2971	0.1901	0.1070	0.2971	0.3770	0.0799	0.2971	0.3390	0.0419
28	0.2658	0.1626	0.1032	0.2658	0.3409	0.0751	0.2658	0.3104	0.0446
29	0.2389	0.1407	0.0982	0.2389	0.3090	0.0701	0.2389	0.2818	0.0428
30	0.2170	0.1249	0.0921	0.2170	0.2818	0.0647	0.2170	0.2694	0.0523
31	0.2007	0.1159	0.0848	0.2007	0.2599	0.0592	0.2007	0.2494	0.0487
32	0.1906	0.1143	0.0763	0.1906	0.2440	0.0533	0.1906	0.2391	0.0485
33	0.1874	0.1208	0.0667	0.1874	0.2347	0.0473	0.1874	0.2410	0.0536
34	0.1919	0.1359	0.0559	0.1919	0.2329	0.0410	0.1919	0.2364	0.0446
35	0.2046	0.1603	0.0443	0.2046	0.2393	0.0346	0.2046	0.2496	0.0450
36	0.2266	0.1944	0.0323	0.2266	0.2546	0.0280	0.2266	0.2692	0.0425
37	0.2587	0.2383	0.0204	0.2587	0.2799	0.0212	0.2587	0.2882	0.0296
38	0.3017	0.2919	0.0098	0.3017	0.3160	0.0143	0.3017	0.3298	0.0281
39	0.3567	0.3546	0.0022	0.3567	0.3639	0.0072	0.3567	0.3726	0.0159

ตารางที่ 4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
40	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0

ตารางที่ 4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.0190	1.0180	0.0010	1.0190	1.0193	0.0003	1.0190	1.0159	0.0031
2	1.0361	1.0340	0.0021	1.0361	1.0376	0.0015	1.0361	1.0311	0.0050
3	1.0513	1.0482	0.0031	1.0513	1.0545	0.0032	1.0513	1.0453	0.0059
4	1.0647	1.0605	0.0041	1.0647	1.0699	0.0052	1.0647	1.0558	0.0089
5	1.0763	1.0712	0.0052	1.0763	1.0837	0.0074	1.0763	1.0667	0.0096
6	1.0863	1.0801	0.0062	1.0863	1.0959	0.0096	1.0863	1.0754	0.0109
7	1.0947	1.0874	0.0072	1.0947	1.1065	0.0118	1.0947	1.0814	0.0132
8	1.1015	1.0932	0.0083	1.1015	1.1155	0.0140	1.1015	1.0883	0.0132
9	1.1068	1.0975	0.0093	1.1068	1.1230	0.0162	1.1068	1.0920	0.0148
10	1.1107	1.1003	0.0104	1.1107	1.1290	0.0183	1.1107	1.0945	0.0162
11	1.1132	1.1018	0.0114	1.1132	1.1335	0.0202	1.1132	1.0974	0.0158
12	1.1144	1.1019	0.0125	1.1144	1.1365	0.0221	1.1144	1.0967	0.0177
13	1.1143	1.1008	0.0135	1.1143	1.1382	0.0239	1.1143	1.0963	0.0180
14	1.1130	1.0984	0.0145	1.1130	1.1386	0.0257	1.1130	1.0952	0.0178
15	1.1105	1.0949	0.0156	1.1105	1.1377	0.0273	1.1105	1.0910	0.0195
16	1.1068	1.0902	0.0166	1.1068	1.1356	0.0288	1.1068	1.0880	0.0188
17	1.1021	1.0845	0.0176	1.1021	1.1324	0.0302	1.1021	1.0830	0.0191
18	1.0964	1.0778	0.0187	1.0964	1.1280	0.0316	1.0964	1.0762	0.0202
19	1.0897	1.070	0.0197	1.0897	1.1226	0.0329	1.0897	1.0706	0.0191
20	1.0820	1.0613	0.0207	1.0820	1.1161	0.0341	1.0820	1.0622	0.0198
21	1.0734	1.0518	0.0217	1.0734	1.1086	0.0352	1.0734	1.0534	0.0200
22	1.0640	1.0413	0.0227	1.0640	1.1002	0.0362	1.0640	1.0452	0.0188
23	1.0538	1.0301	0.0237	1.0538	1.0909	0.0372	1.0538	1.0339	0.0198
24	1.0427	1.0181	0.0246	1.0427	1.0808	0.0380	1.0427	1.0237	0.0190
25	1.0310	1.0053	0.0256	1.0310	1.0698	0.0389	1.0310	1.0128	0.0182
26	1.0185	0.9919	0.0266	1.0185	1.0581	0.0396	1.0185	0.9995	0.0190
27	1.0054	0.9778	0.0275	1.0054	1.0457	0.0403	1.0054	0.9879	0.0175

ตารางที่ 4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
28	0.9916	0.9631	0.0285	0.9916	1.0325	0.0409	0.9916	0.9743	0.0173
29	0.9772	0.9478	0.0294	0.9772	1.0187	0.0415	0.9772	0.9597	0.0175
30	0.9623	0.9320	0.0303	0.9623	1.0043	0.0420	0.9623	0.9467	0.0156
31	0.9469	0.9157	0.0312	0.9469	0.9893	0.0424	0.9469	0.9309	0.0160
32	0.9310	0.8989	0.0321	0.9310	0.9738	0.0428	0.9310	0.9157	0.0153
33	0.9146	0.8816	0.0330	0.9146	0.9577	0.0431	0.9146	0.9010	0.0136
34	0.8978	0.8640	0.0338	0.8978	0.9412	0.0434	0.8978	0.8836	0.0142
35	0.8806	0.8459	0.0347	0.8806	0.9243	0.0437	0.8806	0.8679	0.0127
36	0.8631	0.8275	0.0355	0.8631	0.9069	0.0438	0.8631	0.8515	0.0115
37	0.8452	0.8089	0.0363	0.8452	0.8892	0.0440	0.8452	0.8333	0.0118
38	0.8270	0.7899	0.0371	0.8270	0.8711	0.0441	0.8270	0.8172	0.0098
39	0.8086	0.7707	0.0379	0.8086	0.8527	0.0441	0.8086	0.7992	0.0093
40	0.7899	0.7513	0.0386	0.7899	0.8340	0.0441	0.7899	0.7809	0.0090
41	0.7710	0.7317	0.0393	0.7710	0.8151	0.0441	0.7710	0.7642	0.0068
42	0.752	0.7119	0.0401	0.7520	0.7960	0.0440	0.7520	0.7450	0.0069
43	0.7328	0.6920	0.0407	0.7328	0.7767	0.0439	0.7328	0.7270	0.0058
44	0.7135	0.6721	0.0414	0.7135	0.7572	0.0438	0.7135	0.7095	0.0040
45	0.6941	0.6520	0.0420	0.6941	0.7376	0.0436	0.6941	0.6898	0.0042
46	0.6746	0.6320	0.0426	0.6746	0.7180	0.0433	0.6746	0.6723	0.0023
47	0.6551	0.6119	0.0432	0.6551	0.6982	0.0431	0.6551	0.6539	0.0012
48	0.6356	0.5919	0.0438	0.6356	0.6784	0.0428	0.6356	0.6344	0.0012
49	0.6162	0.5719	0.0443	0.6162	0.6587	0.0425	0.6162	0.6172	0.0011
50	0.5968	0.5520	0.0448	0.5968	0.6389	0.0421	0.5968	0.5982	0.0014
51	0.5775	0.5322	0.0452	0.5775	0.6192	0.0418	0.5775	0.5795	0.0021
52	0.5583	0.5126	0.0457	0.5583	0.5996	0.0413	0.5583	0.5625	0.0043
53	0.5392	0.4931	0.0461	0.5392	0.5801	0.0409	0.5392	0.5433	0.0041
54	0.5203	0.4739	0.0464	0.5203	0.5607	0.0404	0.5203	0.5258	0.0055
55	0.5016	0.4549	0.0467	0.5016	0.5416	0.0399	0.5016	0.5088	0.0072
56	0.4832	0.4362	0.0470	0.4832	0.5226	0.0394	0.4832	0.4900	0.0069
57	0.4650	0.4177	0.0473	0.4650	0.5039	0.0389	0.4650	0.4739	0.0089
58	0.4471	0.3996	0.0475	0.4471	0.4854	0.0383	0.4471	0.4568	0.0097
59	0.4295	0.3819	0.0476	0.4295	0.4672	0.0377	0.4295	0.4393	0.0098
60	0.4122	0.3645	0.0477	0.4122	0.4494	0.0371	0.4122	0.4242	0.0120
61	0.3954	0.3476	0.0478	0.3954	0.4319	0.0365	0.3954	0.4074	0.0121
62	0.3789	0.3311	0.0478	0.3789	0.4147	0.0358	0.3789	0.3917	0.0128
63	0.3629	0.3151	0.0478	0.3629	0.3981	0.0352	0.3629	0.3776	0.0147
64	0.3473	0.2996	0.0477	0.3473	0.3818	0.0345	0.3473	0.3616	0.0142

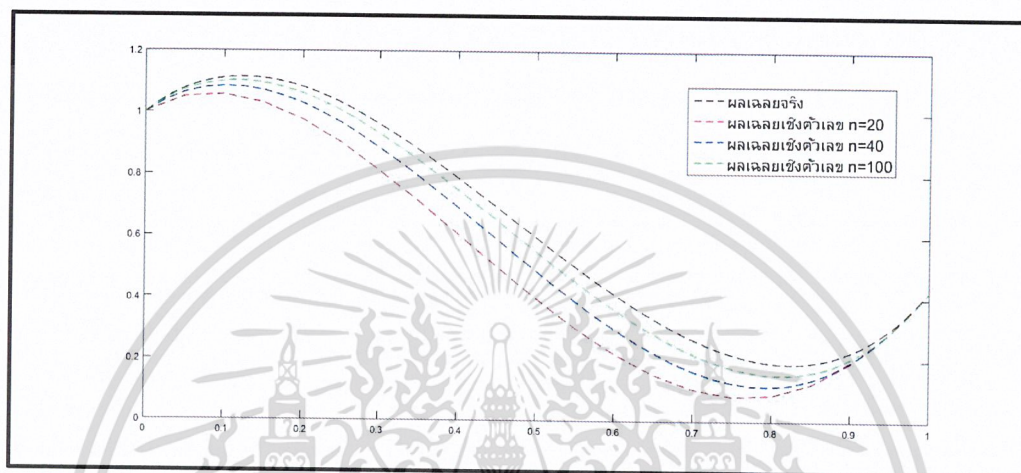
ตารางที่ 4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
65	0.3323	0.2847	0.0476	0.3323	0.3661	0.0338	0.3323	0.3479	0.0156
66	0.3178	0.2704	0.0474	0.3178	0.3508	0.0330	0.3178	0.3346	0.0168
67	0.3039	0.2567	0.0471	0.3039	0.3362	0.0323	0.3039	0.3202	0.0163
68	0.2905	0.2437	0.0468	0.2905	0.3221	0.0315	0.2905	0.3087	0.0181
69	0.2778	0.2314	0.0465	0.2778	0.3086	0.0307	0.2778	0.2963	0.0184
70	0.2658	0.2198	0.0460	0.2658	0.2958	0.0299	0.2658	0.2842	0.0183
71	0.2545	0.2090	0.0455	0.2545	0.2836	0.0291	0.2545	0.2746	0.0201
72	0.2439	0.1990	0.0450	0.2439	0.2722	0.0283	0.2439	0.2636	0.0196
73	0.2341	0.1898	0.0444	0.2341	0.2616	0.0274	0.2341	0.2543	0.0201
74	0.2252	0.1815	0.0437	0.2252	0.2517	0.0266	0.2252	0.2466	0.0214
75	0.2170	0.1742	0.0429	0.2170	0.2427	0.0257	0.2170	0.2375	0.0205
76	0.2098	0.1678	0.0420	0.2098	0.2346	0.0248	0.2098	0.2313	0.0215
77	0.2035	0.1624	0.0411	0.2035	0.2274	0.0239	0.2035	0.2255	0.0220
78	0.1982	0.1581	0.0401	0.1982	0.2212	0.0230	0.1982	0.2192	0.0210
79	0.1939	0.1549	0.0390	0.1939	0.2159	0.0221	0.1939	0.2162	0.0223
80	0.1906	0.1529	0.0378	0.1906	0.2117	0.0211	0.1906	0.2124	0.0217
81	0.1885	0.152	0.0365	0.1885	0.2086	0.0202	0.1885	0.2096	0.0211
82	0.1875	0.1524	0.0351	0.1875	0.2067	0.0192	0.1875	0.2097	0.0222
83	0.1877	0.1540	0.0336	0.1877	0.2059	0.0182	0.1877	0.2085	0.0208
84	0.1891	0.1571	0.0321	0.1891	0.2063	0.0172	0.1891	0.2099	0.0208
85	0.1919	0.1615	0.0304	0.1919	0.2081	0.0162	0.1919	0.2129	0.0211
86	0.1959	0.1673	0.0286	0.1959	0.2111	0.0152	0.1959	0.2152	0.0193
87	0.2014	0.1747	0.0267	0.2014	0.2156	0.0142	0.2014	0.2210	0.0196
88	0.2083	0.1835	0.0247	0.2083	0.2214	0.0131	0.2083	0.2272	0.0189
89	0.2167	0.1940	0.0226	0.2167	0.2288	0.0121	0.2167	0.2338	0.0171
90	0.2266	0.2062	0.0204	0.2266	0.2377	0.0110	0.2266	0.2441	0.0175
91	0.2382	0.2201	0.0181	0.2382	0.2482	0.0100	0.2382	0.2539	0.0157
92	0.2514	0.2357	0.0157	0.2514	0.2603	0.0089	0.2514	0.2657	0.0143
93	0.2664	0.2531	0.0133	0.2664	0.2742	0.0078	0.2664	0.2805	0.0141
94	0.2831	0.2723	0.0108	0.2831	0.2898	0.0067	0.2831	0.2946	0.0115
95	0.3017	0.2934	0.0083	0.3017	0.3073	0.0056	0.3017	0.3121	0.0104
96	0.3222	0.3164	0.0058	0.3222	0.3267	0.0045	0.3222	0.3315	0.0093
97	0.3447	0.3411	0.0036	0.3447	0.3481	0.0034	0.3447	0.3510	0.0063
98	0.3692	0.3676	0.0017	0.3692	0.3715	0.0023	0.3692	0.3746	0.0054
99	0.3959	0.3956	0.0004	0.3959	0.3971	0.0011	0.3959	0.3990	0.0031
100	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0	0.4248	0.4248	0

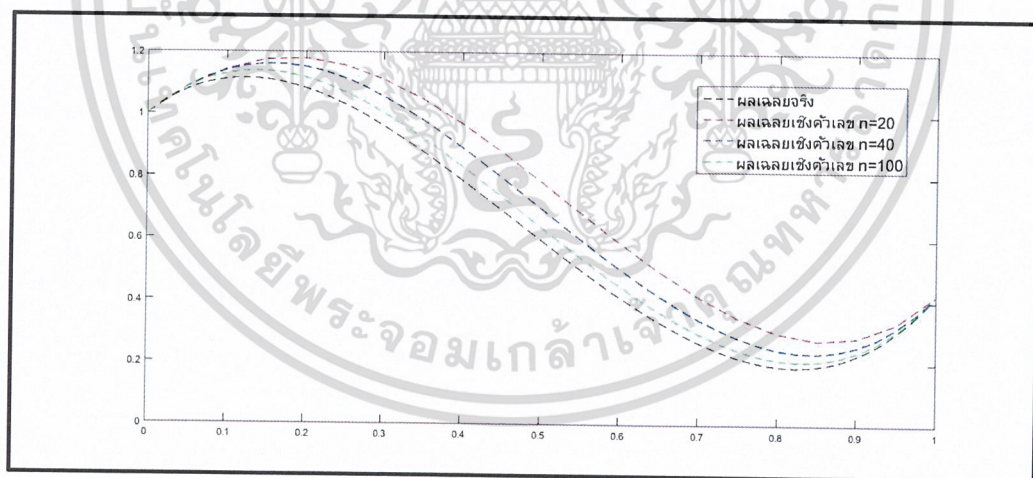
เอกสารนี้เป็นของสงวนลิขสิทธิ์สำหรับอาจารย์ ดร. อภิชาติ อภิสิทธิ์ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 4.1 - 4.3 สำหรับสมการผลต่างอันดับ ผู้วิจัยได้แบ่งความกว้างของช่วงออกเป็น 20, 40 และ 100 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง ที่ความกว้างของช่วงเป็น 100 มีแนวโน้มเข้าใกล้กับผลเฉลยจริงมากกว่าช่วงอื่น ดังนั้น ถ้าแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้นผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้น ดังกราฟรูปที่ 4.1 - 4.3

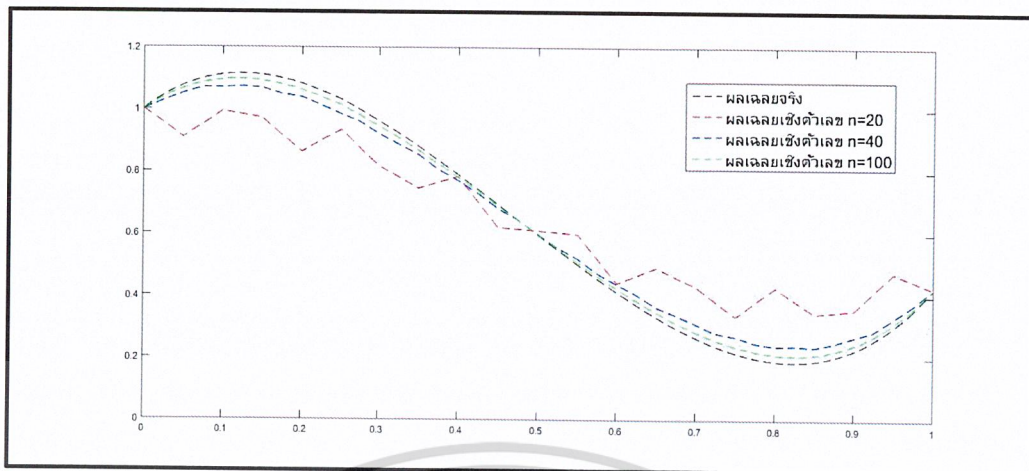


รูปที่ 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า



รูปที่ 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

4.1.2 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับสี่

ผู้วิจัยจะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่โดยวิธีผลต่างอันดับสี่ มีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.4 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับสี่

ความกว้างของช่วง	ค่าคลาดเคลื่อน		
	วิธีผลต่างหกจุดกลาง	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า	วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง
$h = \frac{1}{20}$	0.6056	0.6086	0.5803
$h = \frac{1}{40}$	0.2230	0.4919	0.4638
$h = \frac{1}{100}$	0.1494	0.3344	0.3132

จากตารางที่ 4.10 เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM จากสมการวิธีผลต่างอันดับสี่เปรียบเทียบกัน เห็นได้ชัดว่าวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลางมีความเหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง เนื่องจากมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ และจากรูปที่ 4.3 จะเห็นชัดว่าวิธีผลต่างหกจุดกลางเมื่อแบ่งความกว้างของช่วงมากยิ่งขึ้น กราฟผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟผลเฉลยจริงมากกว่ารูปที่ 4.1 และ รูปที่ 4.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 9e^{2x} + 2 ; 0 < x < 1$$

สำหรับปัญหาค่าขอบ $y(0) = 3, y'(0) = 2, y(1) = 4, y'(1) = 3$

วิธีทำ โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ คือ $y^{(4)} = p(x)y'' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x)$ จากโจทย์จะได้ว่า $y^{(4)} = 2y'' - y + (9e^{2x} + 2)$ ดังนั้น $p(x) = 0, q(x) = 2, r(x) = 0, s(x) = -1, t(x) = 9e^{2x} + 2$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $(0, 1)$ ออกเป็น N ช่วงย่อย จะได้ค่า h คือ ความกว้างของช่วงต่าง ๆ ฉะนั้น จึงแบ่งช่วงย่อยออกเป็น 20, 40 และ 100 ให้ได้ตามความกว้างของช่วง คือ $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}$ ตามลำดับ แล้วใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับจะแสดงในรูปแบบของตารางและกราฟ ดังนี้

จากผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าผลเฉลยจริง คือ

$$y = e^{2x} - 3xe^{2x} + (x(3e^{2x} + 2))/4 - xe^x(e^{-x}/2 - (9e^x)/4) + (xe^{-x}(5e^1 - 6e^3 + e^5))/(e^4 - 6e^2 + 1) - (e^1(e^2 - 3))/(e^4 - 3219e^3 + 1250)/(2500(e^2 - 1)(e^4 - 2e^2 + 1)) - (e^x 1250e^2 - 6e^2 + 1) + (e^{-x}e^1(e^2 - 3))/(e^4 - 6e^2 + 1) - (xe^1e^x(e^4 - 8e^2 + 11))/(e^4 - 6e^2 + 1) + 2$$

4.2.1 วิธีผลต่างอันดับโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง

ผู้วิจัยจะพิจารณาวิธีผลต่างอันดับโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.5 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
1	3.0921	3.0820	0.0101	3.0921	3.0942	0.0021	3.0921	3.0227	0.0695
2	3.1695	3.1480	0.0216	3.1695	3.1793	0.0098	3.1695	3.1289	0.0407
3	3.2337	3.1998	0.0339	3.2337	3.2538	0.0201	3.2337	3.1824	0.0513
4	3.2861	3.2395	0.0466	3.2861	3.3172	0.0310	3.2861	3.2050	0.0812
5	3.3283	3.2691	0.0593	3.3283	3.3698	0.0414	3.3283	3.3050	0.0234
6	3.3618	3.2904	0.0714	3.3618	3.4125	0.0506	3.3618	3.3175	0.0443
7	3.3882	3.3057	0.0825	3.3882	3.4464	0.0582	3.3882	3.3554	0.0329
8	3.4091	3.3170	0.0920	3.4091	3.4730	0.0639	3.4091	3.4348	0.0257
9	3.4261	3.3266	0.0995	3.4261	3.4940	0.0678	3.4261	3.4233	0.0029

ตารางที่ 4.5 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
10	3.4412	3.3368	0.1044	3.4412	3.5111	0.0699	3.4412	3.4834	0.0422
11	3.4562	3.3500	0.1062	3.4562	3.5265	0.0702	3.4562	3.5335	0.0773
12	3.4732	3.3687	0.1045	3.4732	3.5421	0.0689	3.4732	3.5229	0.0496
13	3.4944	3.3956	0.0988	3.4944	3.5603	0.0659	3.4944	3.6041	0.1097
14	3.5223	3.4332	0.0891	3.5223	3.5837	0.0614	3.5223	3.6286	0.1062
15	3.5596	3.4842	0.0754	3.5596	3.6148	0.0553	3.5596	3.6463	0.0867
16	3.6091	3.5509	0.0582	3.6091	3.6567	0.0476	3.6091	3.7445	0.1355
17	3.6741	3.6353	0.0387	3.6741	3.7125	0.0384	3.6741	3.7630	0.0889
18	3.7582	3.7387	0.0194	3.7582	3.7857	0.0275	3.7582	3.8350	0.0769
19	3.8653	3.8610	0.0043	3.8653	3.8801	0.0148	3.8653	3.9513	0.0859
20	4	4	0	4	4	0	4	4	0

ตารางที่ 4.6 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
1	3.0480	3.0457	0.0023	3.0480	3.0486	0.0006	3.0480	3.0389	0.0091
2	3.0921	3.0873	0.0049	3.0921	3.0949	0.0028	3.0921	3.0820	0.0102
3	3.1326	3.1250	0.0076	3.1326	3.1384	0.0059	3.1326	3.1204	0.0122
4	3.1695	3.1590	0.0105	3.1695	3.1789	0.0094	3.1695	3.1511	0.0184
5	3.2032	3.1896	0.0136	3.2032	3.2162	0.0130	3.2032	3.1875	0.0157
6	3.2337	3.2169	0.0168	3.2337	3.2504	0.0167	3.2337	3.2153	0.0184
7	3.2613	3.2412	0.0201	3.2613	3.2814	0.0201	3.2613	3.2405	0.0208
8	3.2861	3.2627	0.0234	3.2861	3.3095	0.0233	3.2861	3.2699	0.0162
9	3.3084	3.2816	0.0268	3.3084	3.3347	0.0263	3.3084	3.2889	0.0195
10	3.3283	3.2981	0.0302	3.3283	3.3572	0.0289	3.3283	3.3107	0.0176
11	3.3461	3.3124	0.0337	3.3461	3.3773	0.0312	3.3461	3.3327	0.0134
12	3.3618	3.3248	0.0370	3.3618	3.3951	0.0332	3.3618	3.3457	0.0162
13	3.3758	3.3355	0.0403	3.3758	3.4108	0.0350	3.3758	3.3650	0.0108
14	3.3882	3.3447	0.0435	3.3882	3.4246	0.0364	3.3882	3.3800	0.0082
15	3.3992	3.3526	0.0466	3.3992	3.4368	0.0375	3.3992	3.3900	0.0092
16	3.4091	3.3596	0.0495	3.4091	3.4475	0.0384	3.4091	3.4071	0.0019
17	3.4180	3.3657	0.0522	3.4180	3.4570	0.0390	3.4180	3.4164	0.0016

ตารางที่ 4.6 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
18	3.4261	3.3714	0.0547	3.4261	3.4656	0.0394	3.4261	3.4264	0.0002
19	3.4338	3.3769	0.0569	3.4338	3.4734	0.0396	3.4338	3.4411	0.0073
20	3.4412	3.3824	0.0588	3.4412	3.4807	0.0395	3.4412	3.4473	0.0061
21	3.4486	3.3882	0.0604	3.4486	3.4879	0.0393	3.4486	3.4592	0.0106
22	3.4562	3.3946	0.0616	3.4562	3.4950	0.0388	3.4562	3.4719	0.0156
23	3.4643	3.4020	0.0623	3.4643	3.5025	0.0381	3.4643	3.4783	0.0140
24	3.4732	3.4106	0.0626	3.4732	3.5105	0.0373	3.4732	3.4935	0.0203
25	3.4831	3.4207	0.0624	3.4831	3.5194	0.0363	3.4831	3.5053	0.0221
26	3.4944	3.4328	0.0617	3.4944	3.5295	0.0351	3.4944	3.5157	0.0212
27	3.5074	3.4471	0.0603	3.5074	3.5411	0.0337	3.5074	3.5350	0.0276
28	3.5223	3.4640	0.0583	3.5223	3.5546	0.0322	3.5223	3.5483	0.0260
29	3.5396	3.4839	0.0557	3.5396	3.5702	0.0306	3.5396	3.5663	0.0267
30	3.5596	3.5073	0.0523	3.5596	3.5883	0.0287	3.5596	3.5906	0.0310
31	3.5826	3.5343	0.0482	3.5826	3.6093	0.0267	3.5826	3.6093	0.0267
32	3.6091	3.5656	0.0434	3.6091	3.6336	0.0245	3.6091	3.6377	0.0287
33	3.6394	3.6015	0.0380	3.6394	3.6616	0.0222	3.6394	3.6686	0.0292
34	3.6741	3.6422	0.0318	3.6741	3.6937	0.0196	3.6741	3.6975	0.0234
35	3.7135	3.6883	0.0252	3.7135	3.7304	0.0169	3.7135	3.7389	0.0254
36	3.7582	3.7398	0.0184	3.7582	3.7722	0.0140	3.7582	3.7793	0.0211
37	3.8086	3.7970	0.0116	3.8086	3.8195	0.0108	3.8086	3.8236	0.0150
38	3.8653	3.8598	0.0056	3.8653	3.8728	0.0075	3.8653	3.8803	0.0150
39	3.9289	3.9277	0.0012	3.9289	3.9328	0.0039	3.9289	3.9349	0.0060
40	4	4	0	4	4	0	4	4	0

ตารางที่ 4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	3	3	0	3	3	0	3	3	0
1	3.0197	3.0193	0.0003	3.0197	3.0198	0.0001	3.0197	3.0182	0.0015
2	3.0387	3.0380	0.0007	3.0387	3.0392	0.0005	3.0387	3.0368	0.0019
3	3.0571	3.0561	0.0011	3.0571	3.0582	0.0010	3.0571	3.0547	0.0024
4	3.0749	3.0735	0.0015	3.0749	3.0766	0.0017	3.0749	3.0713	0.0037
5	3.0921	3.0903	0.0019	3.0921	3.0945	0.0024	3.0921	3.0885	0.0036

ตารางที่ 4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
6	3.1087	3.1065	0.0023	3.1087	3.1119	0.0031	3.1087	3.1043	0.0044
7	3.1248	3.1221	0.0027	3.1248	3.1287	0.0039	3.1248	3.1195	0.0052
8	3.1402	3.1371	0.0032	3.1402	3.1449	0.0046	3.1402	3.1353	0.0050
9	3.1552	3.1515	0.0036	3.1552	3.1605	0.0053	3.1552	3.1492	0.0059
10	3.1695	3.1655	0.0041	3.1695	3.1756	0.0061	3.1695	3.1633	0.0062
11	3.1834	3.1788	0.0046	3.1834	3.1901	0.0067	3.1834	3.1773	0.0060
12	3.1967	3.1917	0.0050	3.1967	3.2041	0.0074	3.1967	3.1897	0.0070
13	3.2095	3.2040	0.0055	3.2095	3.2176	0.0080	3.2095	3.2028	0.0067
14	3.2219	3.2158	0.0060	3.2219	3.2305	0.0086	3.2219	3.2150	0.0068
15	3.2337	3.2272	0.0066	3.2337	3.2429	0.0092	3.2337	3.2262	0.0075
16	3.2451	3.2380	0.0071	3.2451	3.2549	0.0098	3.2451	3.2382	0.0069
17	3.2560	3.2484	0.0076	3.2560	3.2663	0.0103	3.2560	3.2487	0.0073
18	3.2665	3.2584	0.0081	3.2665	3.2773	0.0108	3.2665	3.2589	0.0075
19	3.2765	3.2679	0.0087	3.2765	3.2878	0.0113	3.2765	3.2697	0.0069
20	3.2861	3.2769	0.0092	3.2861	3.2979	0.0118	3.2861	3.2787	0.0074
21	3.2954	3.2856	0.0098	3.2954	3.3076	0.0122	3.2954	3.2882	0.0072
22	3.3042	3.2939	0.0103	3.3042	3.3168	0.0126	3.3042	3.2975	0.0067
23	3.3126	3.3017	0.0109	3.3126	3.3256	0.0130	3.3126	3.3054	0.0072
24	3.3207	3.3092	0.0114	3.3207	3.334	0.0134	3.3207	3.3142	0.0065
25	3.3283	3.3164	0.0120	3.3283	3.3421	0.0137	3.3283	3.3221	0.0063
26	3.3357	3.3232	0.0125	3.3357	3.3497	0.0140	3.3357	3.3292	0.0065
27	3.3427	3.3296	0.0131	3.3427	3.3570	0.0143	3.3427	3.3371	0.0056
28	3.3494	3.3357	0.0136	3.3494	3.3640	0.0146	3.3494	3.3437	0.0057
29	3.3558	3.3416	0.0142	3.3558	3.3707	0.0149	3.3558	3.3502	0.0055
30	3.3618	3.3471	0.0148	3.3618	3.3770	0.0151	3.3618	3.3572	0.0046
31	3.3676	3.3523	0.0153	3.3676	3.3830	0.0154	3.3676	3.3627	0.0049
32	3.3732	3.3573	0.0159	3.3732	3.3887	0.0156	3.3732	3.3689	0.0043
33	3.3784	3.3620	0.0164	3.3784	3.3942	0.0157	3.3784	3.3748	0.0036
34	3.3834	3.3665	0.0169	3.3834	3.3993	0.0159	3.3834	3.3796	0.0038
35	3.3882	3.3707	0.0175	3.3882	3.4043	0.0161	3.3882	3.3854	0.0028
36	3.3928	3.3748	0.0180	3.3928	3.4090	0.0162	3.3928	3.3902	0.0025
37	3.3971	3.3786	0.0185	3.3971	3.4134	0.0163	3.3971	3.3946	0.0025
38	3.4013	3.3822	0.0190	3.4013	3.4177	0.0164	3.4013	3.4000	0.0013
39	3.4053	3.3857	0.0196	3.4053	3.4218	0.0165	3.4053	3.4039	0.0014
40	3.4091	3.3890	0.0201	3.4091	3.4257	0.0166	3.4091	3.4082	0.0009
41	3.4127	3.3922	0.0205	3.4127	3.4294	0.0166	3.4127	3.4129	0.0001
42	3.4163	3.3952	0.0210	3.4163	3.4329	0.0167	3.4163	3.4162	0.0001

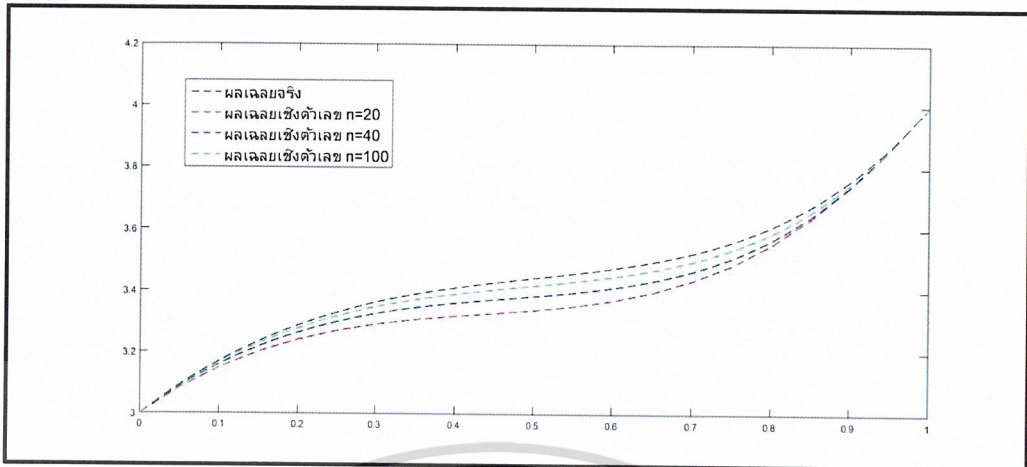
ตารางที่ 4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
43	3.4197	3.3982	0.0215	3.4197	3.4364	0.0167	3.4197	3.4205	0.0008
44	3.4230	3.4010	0.0219	3.4230	3.4397	0.0167	3.4230	3.4245	0.0015
45	3.4261	3.4038	0.0224	3.4261	3.4429	0.0167	3.4261	3.4276	0.0014
46	3.4293	3.4065	0.0228	3.4293	3.4460	0.0167	3.4293	3.4318	0.0026
47	3.4323	3.4091	0.0232	3.4323	3.4490	0.0167	3.4323	3.4351	0.0028
48	3.4353	3.4117	0.0236	3.4353	3.4520	0.0166	3.4353	3.4384	0.0030
49	3.4383	3.4143	0.0240	3.4383	3.4549	0.0166	3.4383	3.4425	0.0042
50	3.4412	3.4169	0.0243	3.4412	3.4577	0.0165	3.4412	3.4454	0.0042
51	3.4442	3.4195	0.0247	3.4442	3.4606	0.0165	3.4442	3.4489	0.0048
52	3.4471	3.4221	0.0250	3.4471	3.4635	0.0164	3.4471	3.4528	0.0057
53	3.4501	3.4248	0.0253	3.4501	3.4664	0.0163	3.4501	3.4556	0.0055
54	3.4531	3.4276	0.0256	3.4531	3.4693	0.0162	3.4531	3.4596	0.0065
55	3.4562	3.4304	0.0258	3.4562	3.4723	0.0160	3.4562	3.4633	0.0070
56	3.4594	3.4333	0.0261	3.4594	3.4753	0.0159	3.4594	3.4664	0.0070
57	3.4627	3.4364	0.0263	3.4627	3.4784	0.0158	3.4627	3.4708	0.0081
58	3.4660	3.4396	0.0265	3.4660	3.4817	0.0156	3.4660	3.4742	0.0082
59	3.4695	3.4429	0.0266	3.4695	3.4850	0.0155	3.4695	3.478	0.0085
60	3.4732	3.4465	0.0267	3.4732	3.4885	0.0153	3.4732	3.4827	0.0095
61	3.4770	3.4502	0.0268	3.4770	3.4922	0.0151	3.4770	3.4863	0.0093
62	3.4811	3.4542	0.0269	3.4811	3.4960	0.0149	3.4811	3.491	0.0099
63	3.4853	3.4583	0.0269	3.4853	3.5000	0.0147	3.4853	3.4959	0.0106
64	3.4897	3.4628	0.0270	3.4897	3.5043	0.0145	3.4897	3.5000	0.0103
65	3.4944	3.4675	0.0269	3.4944	3.5087	0.0143	3.4944	3.5057	0.0112
66	3.4994	3.4725	0.0269	3.4994	3.5135	0.0141	3.4994	3.5108	0.0114
67	3.5047	3.4779	0.0268	3.5047	3.5185	0.0138	3.5047	3.5159	0.0113
68	3.5102	3.4836	0.0266	3.5102	3.5238	0.0136	3.5102	3.5225	0.0122
69	3.5161	3.4896	0.0265	3.5161	3.5294	0.0133	3.5161	3.5281	0.0120
70	3.5223	3.4961	0.0263	3.5223	3.5354	0.0131	3.5223	3.5345	0.0122
71	3.5289	3.5029	0.0260	3.5289	3.5417	0.0128	3.5289	3.5419	0.0129
72	3.5359	3.5102	0.0257	3.5359	3.5484	0.0125	3.5359	3.5484	0.0124
73	3.5434	3.5180	0.0254	3.5434	3.5556	0.0122	3.5434	3.5563	0.0129
74	3.5512	3.5262	0.0250	3.5512	3.5631	0.0119	3.5512	3.5644	0.0132
75	3.5596	3.5350	0.0246	3.5596	3.5711	0.0116	3.5596	3.5722	0.0126
76	3.5684	3.5443	0.0241	3.5684	3.5796	0.0113	3.5684	3.5817	0.0133
77	3.5777	3.5541	0.0236	3.5777	3.5886	0.0109	3.5777	3.5908	0.0131
78	3.5876	3.5646	0.0230	3.5876	3.5982	0.0106	3.5876	3.6003	0.0127
79	3.5980	3.5757	0.0224	3.5980	3.6083	0.0102	3.5980	3.6113	0.0133

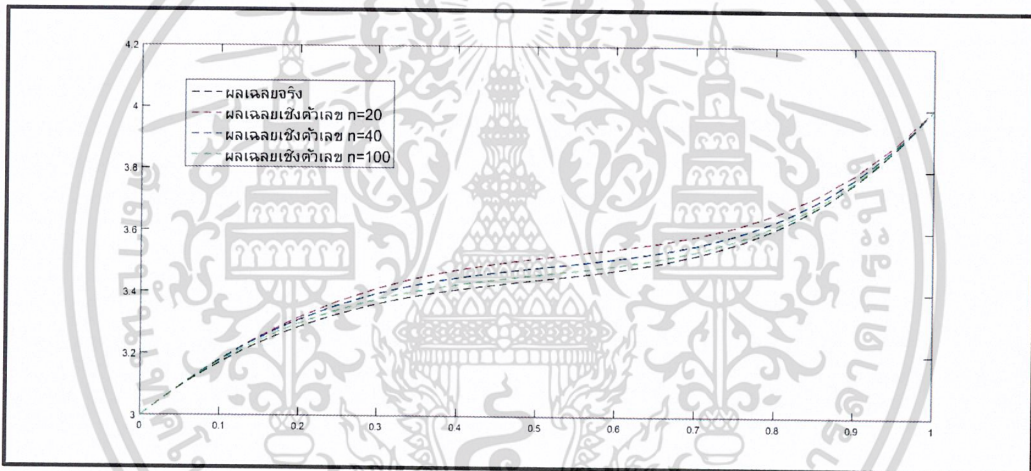
ตารางที่ 4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
80	3.6091	3.5874	0.0217	3.6091	3.6189	0.0099	3.6091	3.6217	0.0126
81	3.6207	3.5998	0.0210	3.6207	3.6302	0.0095	3.6207	3.6333	0.0125
82	3.633	3.6128	0.0202	3.6330	3.6421	0.0091	3.6330	3.6458	0.0128
83	3.646	3.6267	0.0193	3.6460	3.6547	0.0087	3.6460	3.6579	0.0119
84	3.6597	3.6412	0.0184	3.6597	3.6680	0.0083	3.6597	3.6717	0.0121
85	3.6741	3.6566	0.0175	3.6741	3.6820	0.0079	3.6741	3.6859	0.0118
86	3.6892	3.6728	0.0164	3.6892	3.6967	0.0075	3.6892	3.7001	0.0109
87	3.7052	3.6899	0.0153	3.7052	3.7122	0.0070	3.7052	3.7163	0.0111
88	3.7220	3.7078	0.0142	3.7220	3.7286	0.0066	3.7220	3.7323	0.0103
89	3.7396	3.7267	0.0130	3.7396	3.7457	0.0061	3.7396	3.7492	0.0095
90	3.7582	3.7465	0.0117	3.7582	3.7638	0.0056	3.7582	3.7678	0.0096
91	3.7776	3.7672	0.0104	3.7776	3.7827	0.0051	3.7776	3.7860	0.0084
92	3.7980	3.7890	0.0090	3.7980	3.8026	0.0046	3.7980	3.8059	0.0078
93	3.8194	3.8118	0.0076	3.8194	3.8235	0.0041	3.8194	3.8269	0.0075
94	3.8419	3.8357	0.0062	3.8419	3.8454	0.0036	3.8419	3.8479	0.0060
95	3.8653	3.8606	0.0047	3.8653	3.8683	0.0030	3.8653	3.8710	0.0057
96	3.8899	3.8866	0.0033	3.8899	3.8924	0.0024	3.8899	3.8946	0.0047
97	3.9156	3.9136	0.0020	3.9156	3.9175	0.0019	3.9156	3.9189	0.0032
98	3.9425	3.9416	0.0010	3.9425	3.9438	0.0013	3.9425	3.9454	0.0029
99	3.9706	3.9704	0.0002	3.9706	3.9713	0.0006	3.9706	3.972	0.0013
100	4	4	0	4	4	0	4	4	0

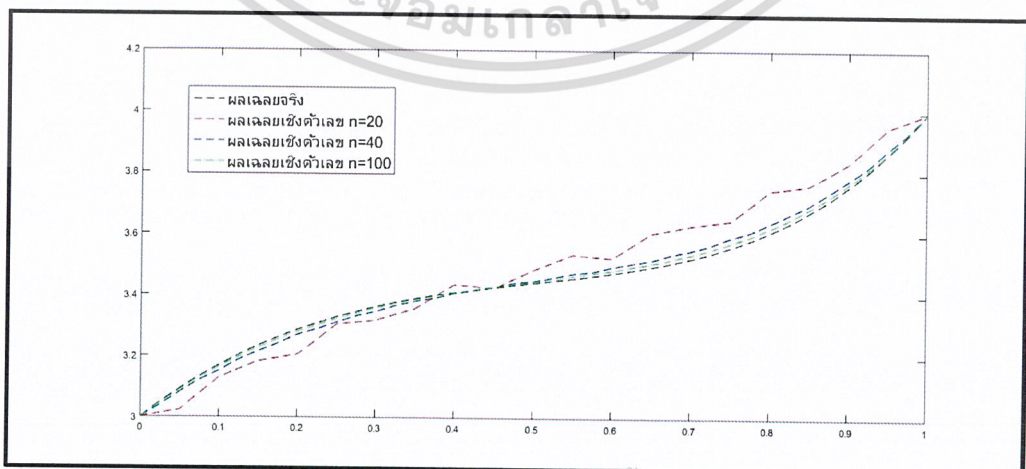
จากตารางที่ 4.1 - 4.3 สำหรับสมการผลต่างอันตะ ผู้วิจัยได้แบ่งความกว้างของช่วงออกเป็น 20, 40 และ 100 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง ที่ความกว้างของช่วงเป็น 100 มีแนวโน้มเข้าใกล้กับผลเฉลยจริงมากกว่าช่วงอื่น ดังนั้น ถ้าแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้นผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้น ดังกราฟรูปที่ 4.4 - 4.6



รูปที่ 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า



รูปที่ 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รูปที่ 4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับสอง

ผู้วิจัยจะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ โดยวิธีผลต่างอันดับสอง มีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.8 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับสอง

ความกว้างของช่วง	ค่าคลาดเคลื่อน		
	วิธีผลต่างหกจุดกลาง	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า	วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง
$h = \frac{1}{20}$	0.3171	0.3154	0.2198
$h = \frac{1}{40}$	0.1139	0.2644	0.1790
$h = \frac{1}{100}$	0.0789	0.1822	0.1219

จากตารางที่ 4.8 เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM จากสมการวิธีผลต่างอันดับสองเปรียบเทียบกัน เห็นได้ชัดว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลางมีความเหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง เนื่องจากมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ และจากรูป 4.6 จะเห็นชัดว่าวิธีผลต่างหกจุดกลางเมื่อแบ่งความกว้างของช่วงมากยิ่งขึ้น กราฟผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟผลเฉลยจริงมากกว่ารูปที่ 4.4 และรูปที่ 4.5

ตัวอย่างที่ 4.3 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่

$$y^{(4)} + 4y''' - 26y'' - 60y' + 225y = e^x \cos(x); \quad 0 < x < 1$$

สำหรับปัญหาค่าขอบ $y(0)=1, y'(0)=2, y(1)=5, y'(1)=3$

วิธีทำ โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่

$$\text{คือ } y^{(4)} = p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x)$$

จากโจทย์จะได้ว่า $y^{(4)} = -4y''' + 26y'' + 60y' - 225y + (e^x \cos(x))$

ดังนั้น $p(x) = -4, q(x) = 26, r(x) = 60, s(x) = -225, t(x) = e^x \cos(x)$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $(0,1)$ ออกเป็น N ช่วงย่อย จะได้ค่า h คือ ความกว้างของช่วงต่าง ๆ ฉะนั้น จึงแบ่งช่วงย่อยออกเป็น 20, 40 และ 100 ให้ได้ตามความกว้างของช่วง คือ $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}$ ตามลำดับ แล้วใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันตะจะแสดงในรูปแบบของตารางและกราฟ ดังนี้

จากผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าผลเฉลยจริง คือ

$$y = (e^x(22 \cos(x) - 21 \sin(x) + 40x \cos(x) - 20x \sin(x))) / 6,400 + (e^x(362 \cos(x) + 85 \sin(x) - 888x \cos(x) - 148x \sin(x))) / 350,464 + (xe^x(6 \cos(x) + \sin(x))) / 2368 - (xe^x 2 \cos(x) - \sin(x))) / 320 + (e^{3x}(787,175e^5 - 2,216,736e^8 + 581,825(e^{13} - 661 \cos(1)e^6 - 563 \cos(1)e^{14} + 673e^6 \sin(1) + 156e^{14} \sin(1) + 34,072))) / (34,225(e^{16} - 66e^8 + 1)) - (e^{-5x}(32,016e^3 + 581,825e^8 - 34,072e^{11} - 661 \cos(1)e^1 - 563 \cos(1)e^9 + 673e^1 \sin(1) + 159e^9 \sin(1) + 787,175)) / (34,225(e^{16} - 66e^8 + 1)) - (xe^{3x}(7,255,700e^5 - 1,943,903e^8 + 410,700e^{13} - 6102 \cos(1)e^6 - 410 \cos(1)e^{14} + 6161e^6 \sin(1) + 55e^{14} \sin(1) + 33,815)) / (34,225(e^{16} - 66e^8 + 1)) + (xe^{-5x}e^3(31,759e^3 - 4,243,900e^8 + 238,761e^{11} - 814 \cos(1)e^1 + 4,094 \cos(1)e^9 + 77e^1 \sin(1) - 1,217e^9 \sin(1) + 958,300)) / (34,225(e^{16} - 66e^8 + 1))$$

4.3.1 วิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง

ผู้วิจัยจะพิจารณาวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.9 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.1004	1.1514	0.0510	1.1004	1.0997	0.0007	1.1004	1.0940	0.0064
2	1.2049	1.3388	0.1339	1.2049	1.2003	0.0047	1.2049	1.1973	0.0076
3	1.3175	1.5523	0.2349	1.3175	1.3034	0.0141	1.3175	1.3132	0.0043

ตารางที่ 4.9 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
4	1.4410	1.7858	0.3448	1.4410	1.4113	0.0297	1.4410	1.4291	0.0119
5	1.5776	2.0352	0.4576	1.5776	1.5263	0.0513	1.5776	1.5716	0.0059
6	1.7288	2.2979	0.5691	1.7288	1.6507	0.0781	1.7288	1.7237	0.0052
7	1.8958	2.57200	0.6762	1.8958	1.7869	0.1089	1.8958	1.8813	0.0145
8	2.0793	2.8554	0.7761	2.0793	1.9370	0.1423	2.0793	2.0797	0.0003
9	2.2796	3.1457	0.8661	2.2796	2.1030	0.1767	2.2796	2.2703	0.0093
10	2.4967	3.4399	0.9431	2.4967	2.2868	0.2099	2.4967	2.4834	0.0134
11	2.7300	3.7337	1.0036	2.7300	2.4902	0.2398	2.7300	2.7389	0.0089
12	2.9783	4.0216	1.0432	2.9783	2.7144	0.2640	2.9783	2.9597	0.0186
13	3.2398	4.2966	1.0568	3.2398	2.9602	0.2796	3.2398	3.2381	0.0017
14	3.5115	4.5498	1.0382	3.5115	3.2277	0.2839	3.5115	3.5273	0.0157
15	3.7895	4.7707	0.9812	3.7895	3.5157	0.2738	3.7895	3.7610	0.0285
16	4.0681	4.9476	0.8795	4.0681	3.8210	0.2470	4.0681	4.0978	0.0297
17	4.3398	5.0678	0.7280	4.3398	4.1375	0.2023	4.3398	4.3539	0.0140
18	4.5949	5.1200	0.5251	4.5949	4.4540	0.1409	4.5949	4.5730	0.0218
19	4.8204	5.0967	0.2763	4.8204	4.7517	0.0688	4.8204	4.9080	0.0876
20	5	5	0	5	5	0	5	5	0

ตารางที่ 4.10 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.0500	1.0610	0.0111	1.0500	1.0500	0	1.0500	1.0511	0.0011
2	1.1004	1.1316	0.0312	1.1004	1.1003	0.0002	1.1004	1.1004	0.0001
3	1.1519	1.2104	0.0585	1.1519	1.1509	0.0010	1.1519	1.1532	0.0013
4	1.2049	1.2965	0.0916	1.2049	1.2022	0.0027	1.2049	1.2073	0.0024
5	1.2600	1.3890	0.1290	1.2600	1.2545	0.0055	1.2600	1.2615	0.0015
6	1.3175	1.4873	0.1698	1.3175	1.3080	0.0095	1.3175	1.3218	0.0043
7	1.3777	1.5907	0.2130	1.3777	1.3631	0.0146	1.3777	1.3820	0.0043
8	1.4410	1.6990	0.2580	1.4410	1.4200	0.0210	1.4410	1.4452	0.0042
9	1.5075	1.8117	0.3042	1.5075	1.4791	0.0284	1.5075	1.5154	0.0078
10	1.5776	1.9286	0.3510	1.5776	1.5406	0.0369	1.5776	1.5838	0.0063
11	1.6513	2.0494	0.3981	1.6513	1.6048	0.0464	1.6513	1.6592	0.0079
12	1.7288	2.1739	0.4450	1.7288	1.6720	0.0568	1.7288	1.7399	0.0111

ตารางที่ 4.10 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
13	1.8103	2.3018	0.4916	1.8103	1.7423	0.0679	1.8103	1.8185	0.0082
14	1.8958	2.4331	0.5373	1.8958	1.8162	0.0797	1.8958	1.9082	0.0124
15	1.9855	2.5676	0.5821	1.9855	1.8936	0.0918	1.9855	1.9989	0.0135
16	2.0793	2.7049	0.6256	2.0793	1.9750	0.1043	2.0793	2.0899	0.0106
17	2.1774	2.8449	0.6675	2.1774	2.0605	0.1169	2.1774	2.1946	0.0172
18	2.2796	2.9872	0.7076	2.2796	2.1502	0.1294	2.2796	2.2942	0.0146
19	2.3861	3.1317	0.7455	2.3861	2.2445	0.1416	2.3861	2.4001	0.0140
20	2.4967	3.2778	0.7810	2.4967	2.3434	0.1534	2.4967	2.5181	0.0214
21	2.6114	3.4250	0.8136	2.6114	2.4470	0.1644	2.6114	2.6260	0.0146
22	2.7300	3.5730	0.8430	2.7300	2.5556	0.1745	2.7300	2.7490	0.0189
23	2.8524	3.7210	0.8686	2.8524	2.6691	0.1833	2.8524	2.8762	0.0238
24	2.9783	3.8683	0.8899	2.9783	2.7876	0.1907	2.9783	2.9927	0.0143
25	3.1076	4.0140	0.9064	3.1076	2.9112	0.1964	3.1076	3.1327	0.0251
26	3.2398	4.1571	0.9173	3.2398	3.0397	0.2001	3.2398	3.2629	0.0231
27	3.3746	4.2966	0.9219	3.3746	3.1730	0.2016	3.3746	3.3900	0.0154
28	3.5115	4.4310	0.9195	3.5115	3.3110	0.2005	3.5115	3.5426	0.0311
29	3.6500	4.5590	0.9089	3.6500	3.4533	0.1967	3.6500	3.6690	0.0190
30	3.7895	4.6788	0.8894	3.7895	3.5995	0.1900	3.7895	3.8088	0.0193
31	3.9291	4.7888	0.8597	3.9291	3.7489	0.1802	3.9291	3.9635	0.0344
32	4.0681	4.8868	0.8187	4.0681	3.9008	0.1673	4.0681	4.0805	0.0124
33	4.2054	4.9707	0.7653	4.2054	4.0541	0.1513	4.2054	4.2319	0.0266
34	4.3398	5.0383	0.6984	4.3398	4.2075	0.1323	4.3398	4.3714	0.0316
35	4.4702	5.0872	0.6170	4.4702	4.3594	0.1108	4.4702	4.4763	0.0061
36	4.5949	5.1153	0.5204	4.5949	4.5075	0.0873	4.5949	4.6305	0.0356
37	4.7123	5.1208	0.4086	4.7123	4.6494	0.0629	4.7123	4.7324	0.0202
38	4.8204	5.1028	0.2824	4.8204	4.7816	0.0388	4.8204	4.8243	0.0039
39	4.9172	5.0616	0.1444	4.9172	4.9001	0.0170	4.9172	4.9588	0.0417
40	5	5	0	5	5	0	5	5	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1.0200	1.0216	0.0016	1.0200	1.0200	0	1.0200	1.0200	0
2	1.0400	1.0446	0.0047	1.0400	1.0400	0.0001	1.0400	1.0398	0.0002
3	1.0600	1.0691	0.0091	1.0600	1.0601	0.0001	1.0600	1.0598	0.0002
4	1.0801	1.0949	0.0148	1.0801	1.0802	0.0001	1.0801	1.0799	0.0003
5	1.1004	1.1220	0.0216	1.1004	1.1004	0.0001	1.1004	1.0999	0.0005
6	1.1208	1.1503	0.0295	1.1208	1.1206	0.0002	1.1208	1.1204	0.0004
7	1.1415	1.1798	0.0383	1.1415	1.1410	0.0005	1.1415	1.1408	0.0006
8	1.1624	1.2103	0.0480	1.1624	1.1615	0.0009	1.1624	1.1615	0.0008
9	1.1835	1.2420	0.0585	1.1835	1.1821	0.0014	1.1835	1.1827	0.0008
10	1.2049	1.2746	0.0697	1.2049	1.2029	0.0020	1.2049	1.2038	0.0011
11	1.2267	1.3082	0.0815	1.2267	1.2239	0.0028	1.2267	1.2255	0.0012
12	1.2488	1.3428	0.0940	1.2488	1.2451	0.0037	1.2488	1.2476	0.0013
13	1.2713	1.3783	0.107	1.2713	1.2666	0.0048	1.2713	1.2697	0.0016
14	1.2942	1.4146	0.1204	1.2942	1.2882	0.0060	1.2942	1.2926	0.0016
15	1.3175	1.4518	0.1343	1.3175	1.3102	0.0073	1.3175	1.3157	0.0018
16	1.3412	1.4898	0.1485	1.3412	1.3324	0.0089	1.3412	1.3392	0.0021
17	1.3655	1.5286	0.1631	1.3655	1.3549	0.0105	1.3655	1.3634	0.0020
18	1.3901	1.5681	0.1780	1.3901	1.3778	0.0124	1.3901	1.3878	0.0024
19	1.4153	1.6085	0.1931	1.4153	1.4009	0.0144	1.4153	1.4127	0.0026
20	1.4410	1.6495	0.2085	1.4410	1.4245	0.0165	1.4410	1.4385	0.0025
21	1.4672	1.6913	0.2241	1.4672	1.4484	0.0188	1.4672	1.4642	0.0030
22	1.4940	1.7337	0.2398	1.4940	1.4727	0.0213	1.4940	1.4909	0.0030
23	1.5213	1.7769	0.2556	1.5213	1.4974	0.0239	1.5213	1.5182	0.0031
24	1.5491	1.8207	0.2716	1.5491	1.5225	0.0266	1.5491	1.5456	0.0036
25	1.5776	1.8652	0.2876	1.5776	1.5481	0.0295	1.5776	1.5741	0.0035
26	1.6066	1.9103	0.3037	1.6066	1.5741	0.0325	1.6066	1.6029	0.0037
27	1.6362	1.9561	0.3198	1.6362	1.6006	0.0357	1.6362	1.6322	0.0041
28	1.6665	2.0024	0.3360	1.6665	1.6275	0.0390	1.6665	1.6625	0.004
29	1.6973	2.0494	0.3521	1.6973	1.6550	0.0423	1.6973	1.6929	0.0044
30	1.7288	2.0970	0.3682	1.7288	1.6830	0.0458	1.7288	1.7243	0.0046
31	1.7609	2.1452	0.3843	1.7609	1.7115	0.0494	1.7609	1.7564	0.0045
32	1.7937	2.1940	0.4003	1.7937	1.7405	0.0531	1.7937	1.7886	0.0050
33	1.8271	2.2434	0.4163	1.8271	1.7701	0.0569	1.8271	1.8221	0.0050
34	1.8611	2.2933	0.4322	1.8611	1.8003	0.0608	1.8611	1.8560	0.0051
35	1.8958	2.3437	0.4479	1.8958	1.8311	0.0647	1.8958	1.8902	0.0056
36	1.9312	2.3947	0.4636	1.9312	1.8624	0.0687	1.9312	1.9258	0.0054

ตารางที่ 4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

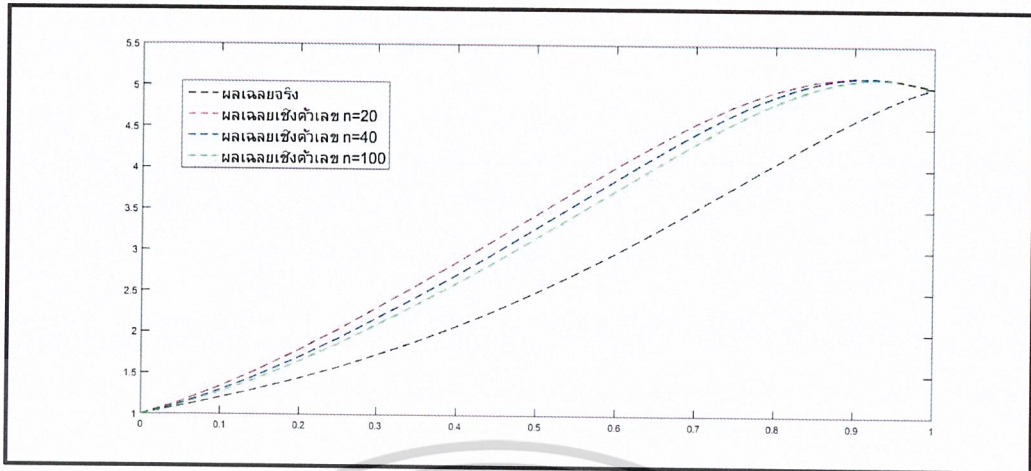
ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
37	1.9672	2.4463	0.4791	1.9672	1.8944	0.0728	1.9672	1.9615	0.0057
38	2.0039	2.4984	0.4945	2.0039	1.9270	0.0769	2.0039	1.9978	0.0061
39	2.0413	2.5509	0.5097	2.0413	1.9602	0.0810	2.0413	2.0355	0.0058
40	2.0793	2.6040	0.5247	2.0793	1.9941	0.0852	2.0793	2.0729	0.0064
41	2.1180	2.6576	0.5395	2.1180	2.0286	0.0894	2.1180	2.1116	0.0065
42	2.1574	2.7116	0.5542	2.1574	2.0638	0.0936	2.1574	2.1511	0.0063
43	2.1975	2.7661	0.5686	2.1975	2.0997	0.0977	2.1975	2.1904	0.0070
44	2.2382	2.8210	0.5828	2.2382	2.1363	0.1019	2.2382	2.2315	0.0068
45	2.2796	2.8764	0.5967	2.2796	2.1736	0.1060	2.2796	2.2727	0.0069
46	2.3217	2.9321	0.6104	2.3217	2.2116	0.1101	2.3217	2.3142	0.0075
47	2.3645	2.9882	0.6238	2.3645	2.2503	0.1142	2.3645	2.3574	0.0070
48	2.4079	3.0448	0.6368	2.4079	2.2898	0.1182	2.4079	2.4003	0.0076
49	2.4520	3.1016	0.6496	2.4520	2.3299	0.1221	2.4520	2.4441	0.0079
50	2.4967	3.1588	0.6620	2.4967	2.3709	0.1259	2.4967	2.4893	0.0074
51	2.5421	3.2162	0.6741	2.5421	2.4125	0.1296	2.5421	2.5339	0.0082
52	2.5882	3.2739	0.6858	2.5882	2.4550	0.1332	2.5882	2.5801	0.0080
53	2.6348	3.3319	0.6970	2.6348	2.4982	0.1366	2.6348	2.6270	0.0078
54	2.6821	3.3900	0.7079	2.6821	2.5422	0.1399	2.6821	2.6734	0.0087
55	2.7300	3.4483	0.7183	2.7300	2.5869	0.1431	2.7300	2.7219	0.0081
56	2.7785	3.5068	0.7282	2.7785	2.6324	0.1461	2.7785	2.7701	0.0084
57	2.8276	3.5653	0.7377	2.8276	2.6788	0.1489	2.8276	2.8186	0.0091
58	2.8773	3.6239	0.7466	2.8773	2.7258	0.1515	2.8773	2.8691	0.0082
59	2.9276	3.6825	0.7549	2.9276	2.7737	0.1539	2.9276	2.9185	0.0090
60	2.9783	3.7411	0.7627	2.9783	2.8223	0.1560	2.9783	2.9692	0.0091
61	3.0297	3.7995	0.7699	3.0297	2.8717	0.1579	3.0297	3.0213	0.0084
62	3.0815	3.8579	0.7764	3.0815	2.9219	0.1596	3.0815	3.0719	0.0096
63	3.1338	3.9160	0.7822	3.1338	2.9729	0.1609	3.1338	3.1248	0.0090
64	3.1866	3.9739	0.7873	3.1866	3.0246	0.1620	3.1866	3.1778	0.0087
65	3.2398	4.0314	0.7916	3.2398	3.0770	0.1628	3.2398	3.2299	0.0099
66	3.2934	4.0886	0.7952	3.2934	3.1302	0.1633	3.2934	3.2848	0.0087
67	3.3475	4.1453	0.7979	3.3475	3.1841	0.1634	3.3475	3.3382	0.0092
68	3.4018	4.2015	0.7997	3.4018	3.2387	0.1632	3.4018	3.3920	0.0098
69	3.4565	4.2571	0.8005	3.4565	3.2939	0.1626	3.4565	3.4481	0.0085
70	3.5115	4.3120	0.8004	3.5115	3.3499	0.1617	3.5115	3.5018	0.0097
71	3.5668	4.3661	0.7993	3.5668	3.4064	0.1603	3.5668	3.5574	0.0094
72	3.6222	4.4193	0.7970	3.6222	3.4636	0.1586	3.6222	3.6139	0.0084
73	3.6779	4.4715	0.7937	3.6779	3.5214	0.1565	3.6779	3.6679	0.0100

ตารางที่ 4.11 ผลเฉลี่ยจริงและผลเฉลี่ยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

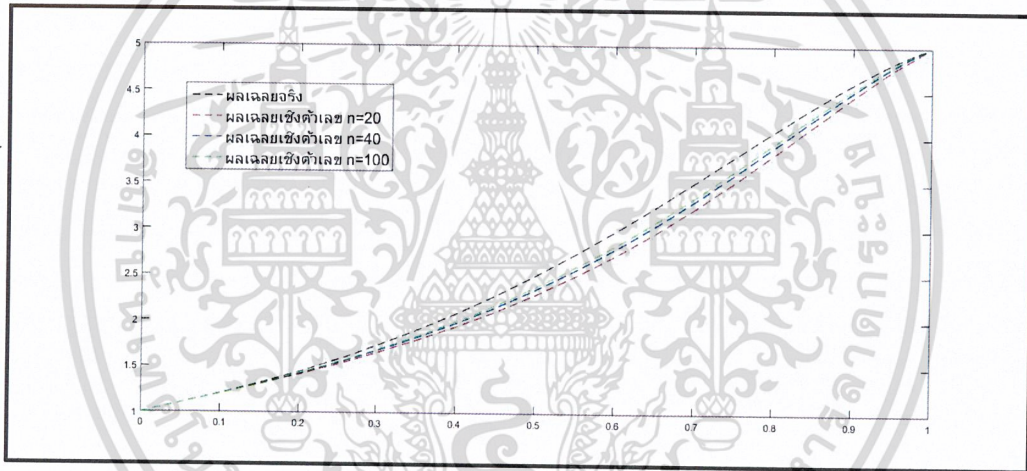
ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลี่ย จริง	ผลเฉลี่ย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลี่ย จริง	ผลเฉลี่ย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลี่ย จริง	ผลเฉลี่ย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
74	3.7336	4.5227	0.7891	3.7336	3.5796	0.1540	3.7336	3.7249	0.0087
75	3.7895	4.5727	0.7832	3.7895	3.6384	0.1511	3.7895	3.7810	0.0085
76	3.8454	4.6214	0.7760	3.8454	3.6976	0.1477	3.8454	3.8355	0.0099
77	3.9012	4.6687	0.7675	3.9012	3.7572	0.1440	3.9012	3.8934	0.0079
78	3.9570	4.7144	0.7574	3.9570	3.8172	0.1398	3.9570	3.9482	0.0088
79	4.0126	4.7585	0.7458	4.0126	3.8774	0.1352	4.0126	4.0034	0.0092
80	4.0681	4.8007	0.7326	4.0681	3.9379	0.1302	4.0681	4.0610	0.0071
81	4.1232	4.8410	0.7177	4.1232	3.9984	0.1248	4.1232	4.1143	0.0090
82	4.1781	4.8791	0.7011	4.1781	4.0591	0.1190	4.1781	4.1701	0.0080
83	4.2325	4.9150	0.6825	4.2325	4.1197	0.1128	4.2325	4.2259	0.0066
84	4.2865	4.9484	0.6620	4.2865	4.1801	0.1063	4.2865	4.2777	0.0088
85	4.3398	4.9792	0.6394	4.3398	4.2403	0.0995	4.3398	4.3335	0.0063
86	4.3925	5.0072	0.6147	4.3925	4.3001	0.0924	4.3925	4.3861	0.0064
87	4.4445	5.0322	0.5877	4.4445	4.3595	0.0850	4.4445	4.4367	0.0078
88	4.4956	5.0540	0.5584	4.4956	4.4182	0.0774	4.4956	4.4910	0.0046
89	4.5458	5.0723	0.5266	4.5458	4.4761	0.0697	4.5458	4.5395	0.0062
90	4.5949	5.0871	0.4922	4.5949	4.5330	0.0619	4.5949	4.5888	0.0061
91	4.6428	5.0980	0.4552	4.6428	4.5888	0.0540	4.6428	4.6398	0.0030
92	4.6895	5.1049	0.4154	4.6895	4.6432	0.0462	4.6895	4.6837	0.0058
93	4.7347	5.1075	0.3728	4.7347	4.6961	0.0386	4.7347	4.7312	0.0035
94	4.7784	5.1057	0.3273	4.7784	4.7472	0.0312	4.7784	4.7766	0.0018
95	4.8204	5.0994	0.2789	4.8204	4.7962	0.0242	4.8204	4.8158	0.0046
96	4.8606	5.0883	0.2277	4.8606	4.8429	0.0177	4.8606	4.8602	0.0004
97	4.8988	5.0726	0.1737	4.8988	4.8870	0.0119	4.8988	4.8979	0.0009
98	4.9349	5.0523	0.1174	4.9349	4.9281	0.0068	4.9349	4.9327	0.0023
99	4.9687	5.0279	0.0592	4.9687	4.9659	0.0028	4.9687	4.9715	0.0028
100	5	5	0	5	5	0	5	5	0

จากตารางที่ 4.7 - 4.9 สำหรับสมการวิธีผลต่างอันตะ ผู้วิจัยได้แบ่งความกว้างของช่วงออกเป็น 20, 40 และ 100 จะเห็นได้ว่าผลเฉลี่ยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง ที่ความกว้างของช่วงเป็น 100 มีแนวโน้มเข้าใกล้กับผลเฉลี่ยจริงมากกว่าช่วงอื่น ดังนั้น ถ้าแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้นผลเฉลี่ยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลี่ยจริงมากขึ้น ดังกราฟรูปที่ 4.7 - 4.9

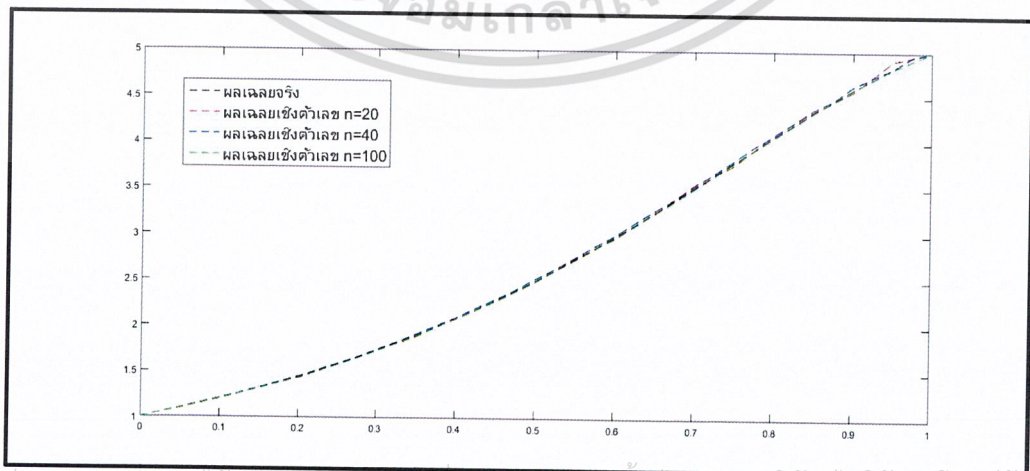
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า



รูปที่ 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง



รูปที่ 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามเผยแพร่ต่อสาธารณะและต้องอ้างอิงถึงชื่อของเอกสารที่นำมาใช้

4.3.2 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับสอง

ผู้วิจัยจะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่โดยวิธีผลต่างอันดับสอง มีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.12 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับสอง

ความกว้างของช่วง	ค่าคลาดเคลื่อน		
	วิธีผลต่างหกจุดกลาง	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า	วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง
$h = \frac{1}{20}$	0.1073	3.2149	0.7776
$h = \frac{1}{40}$	0.1139	3.9258	0.7751
$h = \frac{1}{100}$	0.0626	5.3850	0.9833

จากตารางที่ 4.12 เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM จากสมการวิธีผลต่างอันดับสองเปรียบเทียบกัน เห็นได้ชัดว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดกลางมีความเหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง เนื่องจากมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ และจากรูปที่ 4.3 จะเห็นชัดว่าวิธีผลต่างหกจุดกลางเมื่อแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้น กราฟผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟผลเฉลยจริงมากกว่ารูปที่ 4.7 และรูปที่ 4.8

ตัวอย่างที่ 4.4 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่

$$y^{(4)} + xy' = -(8 + 7x + x^3)e^x \quad ; \quad 1 < x < 2$$

$$\text{สำหรับปัญหาค่าขอบ } y(1) = 0, y'(1) = -e, y(2) = -2e^2, y'(2) = -5e^2$$

วิธีทำ โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ คือ

$$y^{(4)} = p(x)y'''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x) \quad \text{จากโจทย์จะได้ว่า } y^{(4)} = -xy - (8 + 7x + x^3)e^x \quad \text{ดังนั้น}$$

$p(x) = 0, q(x) = 0, r(x) = 0, s(x) = -x, t(x) = -(8 + 7x + x^3)e^x$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง (1,2) ออกเป็น N ช่วงย่อย จะได้ค่า h คือ ความกว้างของช่วงต่าง ๆ ฉะนั้น จึงแบ่งช่วงย่อยออกเป็น 20, 40 และ 100 ให้ได้ตามความกว้างของช่วง คือ $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}$ ตามลำดับ แล้วใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันตะจะแสดงในรูปแบบของตารางและกราฟ ดังนี้

จากผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการหาค่าผลเฉลยจริง คือ

$$y = x(1-x)e^x$$

4.4.1 วิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง

ผู้วิจัยจะพิจารณาวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.13 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.1500	-0.1380	0.0120	-0.1500	-0.1521	0.0021	-0.1500	0	0.1500
2	-0.3305	-0.2858	0.0446	-0.3305	-0.3317	0.0012	-0.3305	-0.3575	0.0270
3	-0.5448	-0.4516	0.0932	-0.5448	-0.5471	0.0023	-0.5448	-0.5495	0.0047
4	-0.7968	-0.6436	0.1532	-0.7968	-0.8045	0.0076	-0.7968	-0.7799	0.0169
5	-1.0907	-0.8704	0.2203	-1.0907	-1.1090	0.0183	-1.0907	-1.3009	0.2101
6	-1.4310	-1.1410	0.2900	-1.4310	-1.4653	0.0342	-1.4310	-1.5745	0.1434
7	-1.8226	-1.4645	0.3581	-1.8226	-1.8774	0.0547	-1.8226	-2.0692	0.2465
8	-2.2709	-1.8507	0.4202	-2.2709	-2.3495	0.0786	-2.2709	-2.7030	0.4321
9	-2.7817	-2.3095	0.4722	-2.7817	-2.8862	0.1045	-2.7817	-3.1230	0.3413
10	-3.3613	-2.8510	0.5103	-3.3613	-3.4920	0.1307	-3.3613	-3.8894	0.5281
11	-4.0165	-3.4857	0.5308	-4.0165	-4.1720	0.1555	-4.0165	-4.6175	0.6010
12	-4.7549	-4.2240	0.5309	-4.7549	-4.9319	0.1770	-4.7549	-5.2713	0.5164

เอกสารนี้เป็นเอกสารลิขสิทธิ์สงวนสำหรับการสอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรณีนำไปใช้

ตารางที่ 4.13 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{20}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
13	-5.5845	-5.0763	0.5081	-5.5845	-5.7779	0.1934	-5.5845	-6.2966	0.7121
14	-6.5140	-6.0525	0.4615	-6.5140	-6.7167	0.2027	-6.5140	-7.1501	0.6361
15	-7.5529	-7.1612	0.3917	-7.5529	-7.7558	0.2029	-7.5529	-8.1276	0.5747
16	-8.7115	-8.4095	0.3020	-8.7115	-8.9036	0.1921	-8.7115	-9.3979	0.6864
17	-10.0008	-9.8010	0.1998	-10.0008	-10.1692	0.1684	-10.0008	-10.4625	0.4616
18	-11.4329	-11.3346	0.0983	-11.4329	-11.5627	0.1298	-11.4329	-11.8424	0.4095
19	-13.0206	-13.0009	0.0197	-13.0206	-13.0949	0.0743	-13.0206	-13.3694	0.3488
20	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0

ตารางที่ 4.14 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.0714	-0.0712	0.0002	-0.0714	-0.0712	0.0003	-0.0714	-0.0283	0.0431
2	-0.1500	-0.1463	0.0037	-0.1500	-0.1477	0.0023	-0.1500	-0.1399	0.0102
3	-0.2362	-0.2261	0.0101	-0.2362	-0.2313	0.0049	-0.2362	-0.2113	0.0250
4	-0.3305	-0.3112	0.0193	-0.3305	-0.3231	0.0073	-0.3305	-0.2850	0.0454
5	-0.4332	-0.4023	0.0308	-0.4332	-0.4240	0.0091	-0.4332	-0.4288	0.0043
6	-0.5448	-0.5003	0.0445	-0.5448	-0.5347	0.0100	-0.5448	-0.5109	0.0338
7	-0.6658	-0.6058	0.0601	-0.6658	-0.6559	0.0099	-0.6658	-0.6404	0.0254
8	-0.7968	-0.7196	0.0772	-0.7968	-0.7881	0.0088	-0.7968	-0.8047	0.0078
9	-0.9383	-0.8427	0.0956	-0.9383	-0.9317	0.0065	-0.9383	-0.9126	0.0256
10	-1.0907	-0.9757	0.1151	-1.0907	-1.0874	0.0033	-1.0907	-1.0996	0.0089
11	-1.2548	-1.1195	0.1352	-1.2548	-1.2557	0.0009	-1.2548	-1.2776	0.0229
12	-1.4310	-1.2751	0.1559	-1.4310	-1.4369	0.0059	-1.4310	-1.4301	0.0009
13	-1.6201	-1.4434	0.1767	-1.6201	-1.6317	0.0116	-1.6201	-1.6687	0.0486
14	-1.8226	-1.6252	0.1974	-1.8226	-1.8406	0.0180	-1.8226	-1.8628	0.0401
15	-2.0393	-1.8216	0.2178	-2.0393	-2.0642	0.0248	-2.0393	-2.0765	0.0372
16	-2.2709	-2.0335	0.2374	-2.2709	-2.3030	0.0321	-2.2709	-2.3567	0.0858
17	-2.5181	-2.2619	0.2562	-2.5181	-2.5577	0.0396	-2.5181	-2.5787	0.0606
18	-2.7817	-2.5080	0.2737	-2.7817	-2.8290	0.0473	-2.7817	-2.8639	0.0823
19	-3.0625	-2.7728	0.2897	-3.0625	-3.1174	0.0550	-3.0625	-3.1773	0.1148
20	-3.3613	-3.0573	0.3039	-3.3613	-3.4238	0.0625	-3.3613	-3.4463	0.0850
21	-3.6790	-3.3629	0.3161	-3.6790	-3.7489	0.0699	-3.6790	-3.8050	0.1260

ตารางที่ 4.14 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{40}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
22	-4.0165	-3.6906	0.3259	-4.0165	-4.0934	0.0769	-4.0165	-4.1496	0.1330
23	-4.3748	-4.0417	0.3331	-4.3748	-4.4583	0.0834	-4.3748	-4.4870	0.1122
24	-4.7549	-4.4174	0.3375	-4.7549	-4.8442	0.0893	-4.7549	-4.9145	0.1596
25	-5.1578	-4.8191	0.3387	-5.1578	-5.2523	0.0945	-5.1578	-5.2983	0.1405
26	-5.5845	-5.2480	0.3364	-5.5845	-5.6833	0.0988	-5.5845	-5.7224	0.1379
27	-6.0362	-5.7056	0.3306	-6.0362	-6.1384	0.1022	-6.0362	-6.2116	0.1755
28	-6.5140	-6.1931	0.3209	-6.5140	-6.6184	0.1044	-6.5140	-6.6522	0.1382
29	-7.0192	-6.7121	0.3071	-7.0192	-7.1246	0.1055	-7.0192	-7.1744	0.1553
30	-7.5529	-7.2638	0.2891	-7.5529	-7.6581	0.1051	-7.5529	-7.7218	0.1689
31	-8.1166	-7.8497	0.2669	-8.1166	-8.2199	0.1033	-8.1166	-8.2430	0.1265
32	-8.7115	-8.4711	0.2404	-8.7115	-8.8114	0.0999	-8.7115	-8.8669	0.1554
33	-9.3391	-9.1291	0.2099	-9.3391	-9.4339	0.0948	-9.3391	-9.4771	0.1380
34	-10.0008	-9.8249	0.1759	-10.0008	-10.0886	0.0878	-10.0008	-10.1041	0.1033
35	-10.6982	-10.5592	0.1391	-10.6982	-10.7770	0.0788	-10.6982	-10.8280	0.1298
36	-11.4329	-11.3320	0.1008	-11.4329	-11.5006	0.0677	-11.4329	-11.5161	0.0833
37	-12.2064	-12.1431	0.0634	-12.2064	-12.2609	0.0545	-12.2064	-12.2702	0.0637
38	-13.0206	-12.9905	0.0301	-13.0206	-13.0595	0.0388	-13.0206	-13.0922	0.0715
39	-13.8772	-13.8709	0.0063	-13.8772	-13.8980	0.0207	-13.8772	-13.8829	0.0057
40	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0

ตารางที่ 4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.0277	-0.0280	0.0003	-0.0277	-0.0276	0.0001	-0.0277	-0.0220	0.0057
2	-0.0566	-0.0569	0.0004	-0.0566	-0.0559	0.0006	-0.0566	-0.0551	0.0015
3	-0.0866	-0.0868	0.0002	-0.0866	-0.0852	0.0014	-0.0866	-0.0828	0.0038
4	-0.1177	-0.1176	0.0001	-0.1177	-0.1155	0.0022	-0.1177	-0.1109	0.0068
5	-0.1500	-0.1493	0.0007	-0.1500	-0.1469	0.0031	-0.1500	-0.1481	0.0019
6	-0.1836	-0.1821	0.0015	-0.1836	-0.1796	0.0040	-0.1836	-0.1772	0.0064
7	-0.2184	-0.2159	0.0025	-0.2184	-0.2136	0.0048	-0.2184	-0.2125	0.0059
8	-0.2544	-0.2508	0.0036	-0.2544	-0.2489	0.0055	-0.2544	-0.2523	0.0022
9	-0.2918	-0.2868	0.0050	-0.2918	-0.2856	0.0062	-0.2918	-0.2845	0.0073
10	-0.3305	-0.3240	0.0065	-0.3305	-0.3237	0.0067	-0.3305	-0.3270	0.0034

ตารางที่ 4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
11	-0.3705	-0.3623	0.0082	-0.3705	-0.3633	0.0072	-0.3705	-0.3682	0.0023
12	-0.4119	-0.4019	0.0100	-0.4119	-0.4043	0.0076	-0.4119	-0.4058	0.0061
13	-0.4548	-0.4428	0.0120	-0.4548	-0.4469	0.0078	-0.4548	-0.4545	0.0003
14	-0.4990	-0.4849	0.0141	-0.4990	-0.4910	0.0080	-0.4990	-0.4970	0.0020
15	-0.5448	-0.5284	0.0164	-0.5448	-0.5367	0.0081	-0.5448	-0.5418	0.0030
16	-0.5921	-0.5732	0.0188	-0.5921	-0.5840	0.0081	-0.5921	-0.595	0.0029
17	-0.6409	-0.6195	0.0213	-0.6409	-0.6329	0.0080	-0.6409	-0.6400	0.0008
18	-0.6912	-0.6672	0.0240	-0.6912	-0.6834	0.0078	-0.6912	-0.6930	0.0018
19	-0.7432	-0.7165	0.0268	-0.7432	-0.7357	0.0075	-0.7432	-0.7490	0.0058
20	-0.7968	-0.7672	0.0296	-0.7968	-0.7897	0.0072	-0.7968	-0.7987	0.0019
21	-0.8521	-0.8195	0.0326	-0.8521	-0.8454	0.0067	-0.8521	-0.8595	0.0074
22	-0.9091	-0.8735	0.0356	-0.9091	-0.9029	0.0062	-0.9091	-0.9177	0.0085
23	-0.9679	-0.9291	0.0388	-0.9679	-0.9622	0.0056	-0.9679	-0.9741	0.0062
24	-1.0284	-0.9864	0.0420	-1.0284	-1.0234	0.0050	-1.0284	-1.0415	0.0131
25	-1.0907	-1.0455	0.0452	-1.0907	-1.0864	0.0043	-1.0907	-1.1022	0.0114
26	-1.1549	-1.1064	0.0486	-1.1549	-1.1514	0.0035	-1.1549	-1.1671	0.0122
27	-1.2210	-1.1691	0.0520	-1.2210	-1.2183	0.0027	-1.2210	-1.2394	0.0184
28	-1.2890	-1.2336	0.0554	-1.2890	-1.2872	0.0018	-1.2890	-1.3041	0.0151
29	-1.3590	-1.3002	0.0589	-1.3590	-1.3582	0.0009	-1.3590	-1.3782	0.0192
30	-1.4310	-1.3686	0.0624	-1.4310	-1.4312	0.0001	-1.4310	-1.4541	0.0231
31	-1.5051	-1.4392	0.0659	-1.5051	-1.5062	0.0012	-1.5051	-1.5250	0.0199
32	-1.5812	-1.5117	0.0695	-1.5812	-1.5835	0.0022	-1.5812	-1.6077	0.0265
33	-1.6595	-1.5865	0.0730	-1.6595	-1.6629	0.0034	-1.6595	-1.6867	0.0272
34	-1.7400	-1.6633	0.0766	-1.7400	-1.7445	0.0045	-1.7400	-1.7660	0.0260
35	-1.8226	-1.7425	0.0802	-1.8226	-1.8283	0.0057	-1.8226	-1.8559	0.0333
36	-1.9076	-1.8238	0.0837	-1.9076	-1.9145	0.0069	-1.9076	-1.9389	0.0313
37	-1.9948	-1.9075	0.0873	-1.9948	-2.0030	0.0081	-1.9948	-2.0281	0.0333
38	-2.0844	-1.9936	0.0908	-2.0844	-2.0938	0.0094	-2.0844	-2.1237	0.0393
39	-2.1765	-2.0822	0.0943	-2.1765	-2.1871	0.0107	-2.1765	-2.2124	0.0359
40	-2.2709	-2.1732	0.0977	-2.2709	-2.2829	0.0120	-2.2709	-2.3119	0.0410
41	-2.3679	-2.2667	0.1012	-2.3679	-2.3812	0.0133	-2.3679	-2.4120	0.0442
42	-2.4674	-2.3629	0.1045	-2.4674	-2.4820	0.0146	-2.4674	-2.5088	0.0415
43	-2.5695	-2.4617	0.1078	-2.5695	-2.5854	0.0160	-2.5695	-2.6179	0.0485
44	-2.6742	-2.5632	0.1110	-2.6742	-2.6915	0.0173	-2.6742	-2.7226	0.0483
45	-2.7817	-2.6675	0.1142	-2.7817	-2.8003	0.0186	-2.7817	-2.8296	0.0479
46	-2.8919	-2.7746	0.1173	-2.8919	-2.9119	0.0200	-2.8919	-2.9468	0.0549
47	-3.0049	-2.8846	0.1203	-3.0049	-3.0262	0.0213	-3.0049	-3.0571	0.0522

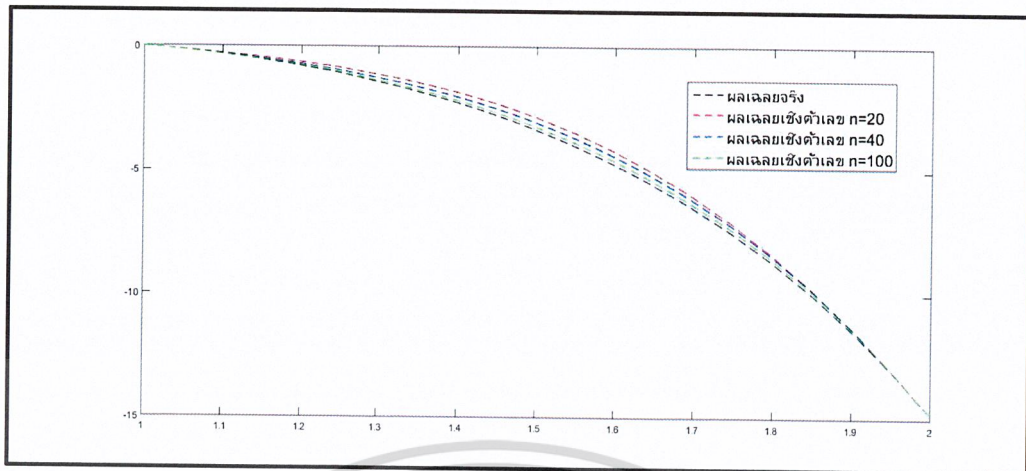
ตารางที่ 4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
48	-3.1207	-2.9976	0.1232	-3.1207	-3.1434	0.0226	-3.1207	-3.1757	0.0550
49	-3.2395	-3.1136	0.1260	-3.2395	-3.2634	0.0239	-3.2395	-3.2996	0.0600
50	-3.3613	-3.2326	0.1287	-3.3613	-3.3865	0.0252	-3.3613	-3.4177	0.0564
51	-3.4860	-3.3548	0.1312	-3.4860	-3.5125	0.0265	-3.4860	-3.5480	0.0619
52	-3.6139	-3.4802	0.1337	-3.6139	-3.6416	0.0277	-3.6139	-3.6777	0.0638
53	-3.7449	-3.6089	0.1360	-3.7449	-3.7739	0.0290	-3.7449	-3.8061	0.0612
54	-3.8791	-3.7409	0.1382	-3.8791	-3.9093	0.0302	-3.8791	-3.9471	0.0680
55	-4.0165	-3.8763	0.1402	-4.0165	-4.0479	0.0313	-4.0165	-4.0831	0.0666
56	-4.1573	-4.0152	0.1421	-4.1573	-4.1898	0.0325	-4.1573	-4.2238	0.0665
57	-4.3015	-4.1576	0.1439	-4.3015	-4.3351	0.0336	-4.3015	-4.3741	0.0726
58	-4.4491	-4.3037	0.1454	-4.4491	-4.4837	0.0346	-4.4491	-4.5180	0.0689
59	-4.6002	-4.4534	0.1468	-4.6002	-4.6359	0.0357	-4.6002	-4.6721	0.0719
60	-4.7549	-4.6069	0.1480	-4.7549	-4.7915	0.0366	-4.7549	-4.8304	0.0755
61	-4.9133	-4.7642	0.1491	-4.9133	-4.9508	0.0375	-4.9133	-4.9845	0.0712
62	-5.0753	-4.9254	0.1499	-5.0753	-5.1137	0.0384	-5.0753	-5.1518	0.0765
63	-5.2412	-5.0906	0.1505	-5.2412	-5.2804	0.0392	-5.2412	-5.3178	0.0766
64	-5.4109	-5.2599	0.1510	-5.4109	-5.4508	0.0400	-5.4109	-5.4847	0.0738
65	-5.5845	-5.4333	0.1512	-5.5845	-5.6251	0.0406	-5.5845	-5.6642	0.0797
66	-5.7621	-5.6109	0.1512	-5.7621	-5.8034	0.0413	-5.7621	-5.8387	0.0766
67	-5.9438	-5.7928	0.1510	-5.9438	-5.9856	0.0418	-5.9438	-6.0202	0.0764
68	-6.1296	-5.9791	0.1505	-6.1296	-6.1719	0.0423	-6.1296	-6.2106	0.0810
69	-6.3197	-6.1699	0.1498	-6.3197	-6.3623	0.0427	-6.3197	-6.3956	0.0759
70	-6.5140	-6.3652	0.1488	-6.5140	-6.5570	0.0430	-6.5140	-6.5926	0.0786
71	-6.7127	-6.5651	0.1476	-6.7127	-6.7559	0.0432	-6.7127	-6.7928	0.0801
72	-6.9159	-6.7698	0.1461	-6.9159	-6.9593	0.0434	-6.9159	-6.9908	0.0749
73	-7.1236	-6.9792	0.1443	-7.1236	-7.1670	0.0435	-7.1236	-7.2030	0.0794
74	-7.3359	-7.1936	0.1423	-7.3359	-7.3793	0.0434	-7.3359	-7.4132	0.0773
75	-7.5529	-7.4129	0.1400	-7.5529	-7.5962	0.0433	-7.5529	-7.6268	0.0738
76	-7.7747	-7.6373	0.1374	-7.7747	-7.8178	0.0431	-7.7747	-7.8530	0.0783
77	-8.0014	-7.8669	0.1345	-8.0014	-8.0441	0.0428	-8.0014	-8.0744	0.0730
78	-8.2330	-8.1018	0.1312	-8.2330	-8.2753	0.0423	-8.2330	-8.3053	0.0723
79	-8.4697	-8.3420	0.1277	-8.4697	-8.5115	0.0418	-8.4697	-8.5444	0.0747
80	-8.7115	-8.5877	0.1238	-8.7115	-8.7526	0.0412	-8.7115	-8.7794	0.0679
81	-8.9585	-8.8389	0.1197	-8.9585	-8.9989	0.0404	-8.9585	-9.0282	0.0696
82	-9.2109	-9.0957	0.1151	-9.2109	-9.2504	0.0395	-9.2109	-9.2795	0.0686
83	-9.4687	-9.3584	0.1103	-9.4687	-9.5072	0.0385	-9.4687	-9.5308	0.0622
84	-9.7319	-9.6268	0.1051	-9.7319	-9.7693	0.0374	-9.7319	-9.7971	0.0651

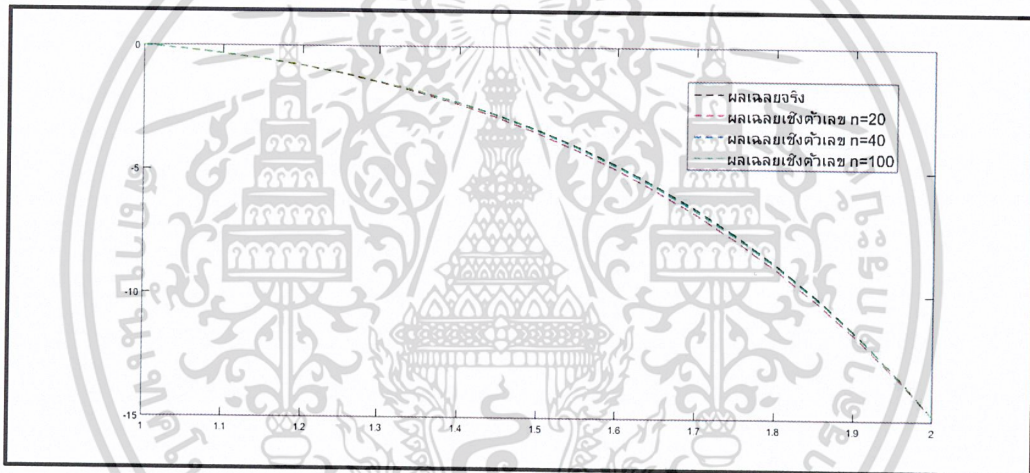
ตารางที่ 4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง กำหนด $h = \frac{1}{100}$ (ต่อ)

ค่า x	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า			วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง			วิธีผลต่างหกจุดกลาง		
	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน	ผลเฉลย จริง	ผลเฉลย เชิงตัวเลข	ค่าคลาด เคลื่อน
85	-10.0008	-9.9013	0.0995	-10.0008	-10.0370	0.0361	-10.0008	-10.0612	0.0604
86	-10.2754	-10.1818	0.0936	-10.2754	-10.3102	0.0348	-10.2754	-10.3313	0.0559
87	-10.5558	-10.4684	0.0874	-10.5558	-10.5891	0.0333	-10.5558	-10.6139	0.0581
88	-10.8421	-10.7614	0.0808	-10.8421	-10.8737	0.0316	-10.8421	-10.8926	0.0505
89	-11.1344	-11.0606	0.0738	-11.1344	-11.1643	0.0298	-11.1344	-11.1831	0.0486
90	-11.4329	-11.3664	0.0665	-11.4329	-11.4608	0.0279	-11.4329	-11.4811	0.0482
91	-11.7375	-11.6786	0.0589	-11.7375	-11.7634	0.0258	-11.7375	-11.7769	0.0394
92	-12.0485	-11.9975	0.0511	-12.0485	-12.0721	0.0236	-12.0485	-12.0882	0.0397
93	-12.3660	-12.3230	0.0430	-12.3660	-12.3872	0.0212	-12.3660	-12.4015	0.0356
94	-12.6900	-12.6552	0.0348	-12.6900	-12.7086	0.0187	-12.6900	-12.7174	0.0275
95	-13.0206	-12.9940	0.0267	-13.0206	-13.0366	0.0160	-13.0206	-13.0490	0.0283
96	-13.3581	-13.3393	0.0188	-13.3581	-13.3712	0.0131	-13.3581	-13.3785	0.0204
97	-13.7024	-13.6909	0.0115	-13.7024	-13.7125	0.0101	-13.7024	-13.7169	0.0145
98	-14.0538	-14.0484	0.0054	-14.0538	-14.0607	0.0069	-14.0538	-14.0678	0.0139
99	-14.4123	-14.4112	0.0011	-14.4123	-14.4159	0.0035	-14.4123	-14.4158	0.0035
100	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0	-14.7781	-14.7781	0

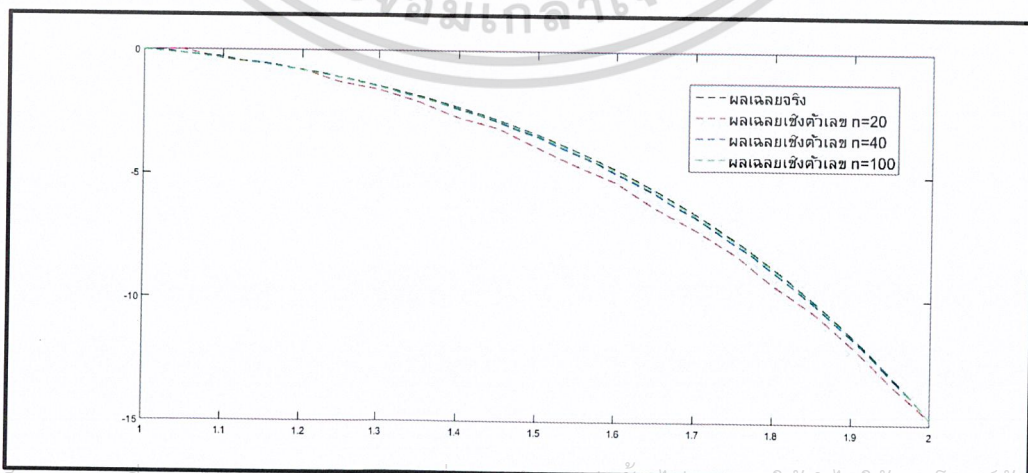
จากตารางที่ 4.13 - 4.15 สำหรับสมการวิธีผลต่างอันดับ 6 ผู้วิจัยได้แบ่งความกว้างของช่วงออกเป็น 20, 40 และ 100 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และวิธีผลต่างหกจุดกลาง ที่ความกว้างของช่วงเป็น 100 มีแนวโน้มเข้าใกล้กับผลเฉลยจริงมากกว่าช่วงอื่น ดังนั้น ถ้าแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้นผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้น ดังกราฟรูปที่ 4.10 - 4.12



รูปที่ 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า



รูปที่ 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง



รูปที่ 4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงโดยวิธีผลต่างหกจุดกลาง

4.4.2 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการผลต่างอันดับสอง

ผู้วิจัยจะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่ โดยวิธีผลต่างอันดับสอง มีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 4.16 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM ของสมการเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างอันดับสอง

ความกว้างของช่วง	ค่าคลาดเคลื่อน		
	วิธีผลต่างหกจุดกลาง	วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า	วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง
$h = \frac{1}{20}$	1.8906	1.5115	0.5491
$h = \frac{1}{40}$	0.6059	1.3624	0.3929
$h = \frac{1}{100}$	0.4921	0.9728	0.2558

จากตารางที่ 4.43 เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-NORM จากสมการวิธีผลต่างอันดับสองมาเปรียบเทียบกัน เห็นได้ว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลังมีความเหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างอันดับสองโดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างหกจุดกลาง เนื่องจากมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ และจากรูป 4.11 จะเห็นว่าวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลังเมื่อแบ่งความกว้างของช่วงมากยิ่งขึ้น กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่ารูปที่ 4.10 และรูปที่ 4.12

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสี่สำหรับปัญหาค่าขอบโดยใช้วิธีผลต่างอันดับสี่ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ

1. วิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า
2. วิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง
3. วิธีผลต่างหกจุดกลาง

เนื่องจากวิธีการประมาณค่าโดยวิธีผลต่างอันดับสี่ต้องแบ่งออกเป็นช่วงย่อยและทำการประมาณค่าหาอนุพันธ์ที่จุดย่อยเหล่านั้น โดยมีการประยุกต์เงื่อนไขขอบที่เรขาคณิตกับเงื่อนไขขอบบนอสมมาตรกัน ผู้วิจัยได้ใช้วิธีการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ และผู้วิจัยได้ทำการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขและนำผลเฉลยเชิงตัวเลขมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงในรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์โดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผลการวิจัยพบว่า วิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลางโดยใช้วิธีการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ มีความเหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง ซึ่งสอดคล้องกับผลการเปรียบเทียบจากตัวอย่างในบทที่ 4 จากตัวอย่างที่ 4.1 – 4.3 และเนื่องจากว่าวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดกลางมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดข้างหน้า และวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลัง และยังแบ่งความกว้างของช่วงมากขึ้นจะทำให้กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กับผลเฉลยจริงมากยิ่งขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยได้รวบรวมข้อสรุป คือ วิธีผลต่างหกจุดกลางจะมีผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยประมาณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากที่สุด สำหรับในกรณีโจทย์ในรูปแบบสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ดังตัวอย่างที่ 4.4 ในกระบวนการวิธีผลต่างอันดับสี่โดยวิธีผลต่างหกจุดย้อนหลังจะมีผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยประมาณใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากที่สุด เนื่องจากการกำหนดแรงภายนอกในสมการหรือฟังก์ชัน f ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีผลต่อการเลือกวิธีการที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

5.2 ข้อเสนอแนะ

สามารถพัฒนาได้โดยเปลี่ยนเงื่อนไขขอบให้มีอันดับมากกว่างานวิจัยนี้ และสามารถพัฒนารูปแบบการกำหนดจุดสมมติตามเงื่อนไขขอบที่มีอันดับมากกว่างานวิจัยนี้ อาจจะทำให้งานวิจัยนี้มีความพัฒนาสูงขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] ผศ.ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ :คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2544.
- [2] รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : มินเซอร์วิส ซัพพลาย, 2555.
- [3] Saxena, H.C. (1997). Finite-Differences and Numerical Analysis (Thirteen Revised Edition). New Delhi: S.Chand& Company Ltd.
- [4] Mathews, J.H. and Fink, K.D. (2008). Numerical Methods Using MATLAB (Fourth Edition), New Delhi: Dorling Kindersley (INDIA) Pvt.Ltd.
- [5] Fausett, L.V. (2009). Applied Numerical Analysis Using MATLAB (Second Edition). Noida: Dorling Kindersley (INDIA) Pvt.Ltd.
- [6] Venkataraman, M.K. (2004). Numerical Methods And Engineering (Revised & Enlaeged, Fifth Edition). Chennai: The National Publishing co.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้