ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

OLSEN-RENNEI-GOEL PRODUCT OF MATRICES OVER A COMUTATIVE SEMIRING

นาเดีย ศิริหงษ์

มาริษา สอนรมย์

วิศิษฎ์ชัย อินเดีย

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

OLSEN-RENNEI-GOEL PRODUCT OF MATRICES OVER A COMUTATIVE SEMIRING

NADEA SIRIHONG

MARISA SORNROM

VISITCHAI INDIA

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

IN APPLIED MATHEMATICS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

(Olsen-Rennie-Goel Product of Matrices over a Commutative Semiring)

ชื่อนักศึกษา นาเดีย ศิริหงษ์ รหัสนักศึกษา 57050082

มาริษา สอนรมย์ รหัสนักศึกษา 57050112

วิศิษฎ์ชัย อินเดีย รหัสนักศึกษา 57050134

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต คณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการ	ลายมือชื่อ
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

(Olsen-Rennie-Goel Product of Matrices over a Commutative Semiring)

ชื่อนักศึกษา นาเดีย ศิริหงษ์ รหัสนักศึกษา 57050082

มาริษา สอนรมย์ รหัสนักศึกษา 57050112

วิศิษฏ์ชัย อินเดีย รหัสนักศึกษา 57050134

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนิยามและพิจารณาศึกษาสมบัติต่างๆของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่สมบัติเชิงพีชคณิต และสมบัติการคูณแบบผสม

__คำสำคัญ__ ผลคูณโครเนคเคอร์ ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอล เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

Title	Olsen-Rennie-Goel Product of Matrices over a Commutative Semiring
Students	Miss.Nadea Sirihong Student ID 57050082
	Miss.Marisa Sornrom Student ID 57050112
	Mr.Visitchai Indea Student ID 57050134
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2560
Adivisor	Assist.Prof.Dr.Pattrawut Chansagiam

Abstract

The purpose of special problem is to define and to investigate properties of Olsen-Rennie-Goel product of matrices over a commutative semiring such as algebraic and mixed multiplication properties

Keywords: Kronecker product, Olsen-Rennie-Goel product of matrices over a commutative semiring.

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาวิจัยค้นคว้าอิสระนี้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ที่ได้ให้ ความเมตตา กรุณา สั่งสอนวิชาความรู้ จากสถาบันแห่งนี้ สถาบันที่ให้โอกาสให้ข้าพเจ้าได้มาศึกษาเล่าเรียน

กราบขอบพระคุณอาจารย์ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ โดยให้คำปรึกษา คำแนะนำ และช่วยหาวิธีทางการแก้ไขปัญหาอุปสรรคต่างๆที่เกิดขึ้น ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางด้านการศึกษา หรือปัญหาทางด้านการทำงาน ตั้งแต่เริ่มทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ จนสำเร็จขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ประธานกรรมการปัญหาพิเศษและท่านอาจารย์ ผศ.ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ที่กรุณารับเป็นกรรมการปัญหาพิเศษและได้สละเวลาดำเนินการสอบปัญหาพิเศษครั้งนี้ ทั้งได้กรุณาให้คำแนะนำและชี้แนะแนวทางจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้มีความสมบูณร์มากยิ่งขึ้น

ท้ายนี้ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู ตลอดจนส่งเสริมการศึกษา และให้กำลังใจเป็นอย่างดี อีกทั้งขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ให้การสนับสนุนและช่วยเหลือด้วยดีเสมอมา และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้ศึกษาค้นคว้าได้นำมาอ้างอิงในการทำวิจัย จนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

นางสาวนาเดีย ศิริหงษ์

นางสาวมาริษา สอนรมย์

นายวิศิษฎ์ชัย อินเดีย

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ผลคูณโครเนคเคอร์ เป็นการคูณเมทริกซ์ในรูปแบบหนึ่งซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ ได้มาจากชื่อ Leopold Kronecker นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยสาหรับแต่ละเมทริกซ์จริง

$A = [a_{ij}]$ ขนาด $m \times n$ และ B ขนาด $p \times q$ เรานิยาม

$$A \otimes B = [a_{ij}B]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ A⊗Bเป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i, j)เป็น $a_{ij}B$ (ดูเพิ่มเติมได้จาก [1] และ ([3]) ผลคูณโครเนคเคอร์ได้นำมาใช้อย่างกว้างขวางในทฤษฎีระบบ แคลคูลัสเมทริกซ์ สมการเมทริกซ์ ฟิสิกส์ สถิติ วิทยาการคอมพิวเตอร์ และสายงานเฉพาะด้านอื่นๆ

ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์
ได้นำเสนอในงานวิจัย[5] Efficient Automatic Differrentiation of Matrix Functions

บทนิยาม ให้ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ และ $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ผลคูณโอเซน เรนนี่ โกเอลของ A และ B

นิยามโดย $A \boxtimes B = [A \otimes B_1 \ldots A \otimes B_q]$

$$A \boxtimes B \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ผลคูณโอเซนเรนนี่โกเอลของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \boxtimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะพัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์โดยจะขยายโดยการศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ให้นิยามของ ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ (Olsen-Rennie-Goel Product of Product over a Commutative Semiring)

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ให้บทนิยามของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอล ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากกึ่งริงสลับที่
2. ศึกษาสมบัติพีชคณิตของผลคูณดังกล่าว

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโอเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การคูณ การสลับเปลี่ยน รอยเมทริกซ์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ฝึกฝนทักษะและกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
2. พัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอล ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
3. เป็นพื้นฐานในการทาวิจัยและศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษานิยามและสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker Product) และผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ (Olsen-Rennie-Goel Product of Product over a Commutative Semiring)
2. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกึ่งริง (Semiring) และกึ่งริงสลับที่ (Commutative Semiring)
3. ศึกษาสมบัติพื้นฐานและตัวอย่างของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่
4. ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ให้นิยามของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ (Olsen-Rennie-Goel Product of Product over a Commutative Semiring)
5. พิจารณาสมบัติพีชคณิตของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ (Olsen-Rennie-Goel Product of Product over a Commutative Semiring)
6. จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ

ตารางที่ 1.1 ตารางขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน(ปี2560-2561)									
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
2.ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกึ่งริงและกึ่งริงสลับที่										
3.ศึกษาความรู้พื้นฐานและตัวอย่างของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
4.ศึกษาสมบัติพื้นฐานของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ										
5.ให้นิยามของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
6.พิจารณาสมับติพีชคณิตของผลคูณของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่										
7.จัดทำเอกสารและนำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในการศึกษาสมบัติของผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอล ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เรา จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐาน ได้แก่ กรุป ริง กึ่งริงสลับที่ เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ และผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

2.1 กรุปและริง

บทนิยาม 2.1.1 ให้ G เป็นเซตไม่ว่างและ *เป็นการดำเนินการทวิภาคบน Gพิจารณาสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$

(2) มีสมาชิก eใน G ซึ่ง

$$a * e = e * a = a \ \ \forall a \in G$$

เราเรียก e ว่าสมาชิกเอกลักษณ์ (identity element) ของ G ภายใต้ $*$

(3) สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน G จะหาสมาชิก b ใน G ที่ทำให้

$$a * b = b * a = e$$

เราเรียก b ว่าตัวผกผัน (inverse)ของ a

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อที่ (1) เราเรียก $(G,*)$ ว่า กึ่งกรุป

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อที่ (1) และ*(2)* เราเรียก$(G,*)$ ว่า โมนอยด์

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อที่ (1) ,*(2)* และสมบัติสลับที่ เราเรียก$(G,*)$ ว่า โมนอยด์สลับที่

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อที่ (1) ,*(2)* และ *(3)* เราเรียก $(G,*)$ ว่า กรุป

ถ้า $*$ มีสมบัติข้อที่ (1) ,*(2)* ,*(3)* และสมบัติสลับที่ เราเรียก $(G,*)$ ว่า กรุปอาบีเลียน

<u>**บทนิยาม 2.1.2**</u> เราเรียก $(R,+,\cdot)$ ว่า ริง ถ้า

R เป็นเซตไม่ว่าง $+,\cdot$ เป็นตัวดำเนินการทวิภาคบน R ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $(R,+)$ เป็นกรุปอาบีเลียน

(2) $a\cdot(b\cdot C)=(a\cdot b)\cdot c \ \ \forall\, a,b,c\epsilon R$

(3) สำหรับทุกๆ $a,b,c\epsilon R$

$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางซ้าย

$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$ สมบัติการแจกแจงทางขวา

2.2 บทนิยามและตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่

<u>บทนิยาม 2.2.1</u> เซต L จะเรียกว่า กึ่งริงสลับที่ ซึ่งเขียนในรูป $(L,+,\cdot,0,1)$ เมื่อสอดคล้องกับการดำเนินทวิภาคสองอย่างควบคู่กัน โดยมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $(L,+,0)$ เป็นโนอยด์สลับที่ โดยมี 0 เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $+$

(2) $(L,\cdot,1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่โดยมี 1 เป็นเอกลักษณ์ ภายใต้การดำเนินการ $\cdot$

(3) สำหรับทุกๆ $(\mathrm{a,b,c}\in \mathrm{L})$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$$

(4) $0\cdot r=0=r\cdot 0 \quad \forall\, r\epsilon L$

(5) $0\neq 1$

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> $[0,2]$ ภายใต้การดำเนินการ

$a+b=\max\{a,b\}$ และ $a\cdot b=\min\{a,b\}$ สำหรับ $a,b\,\epsilon\ [0,2]$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $([0,2],+,0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $([0,2],+0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

-มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c\,\epsilon[0,2]$ จะได้

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= a+\max\{b,c\} \\ &= \max\{a,\max\{b,c\}\} \\ &= \max\{a,b,c\} \\ (a+b)+c &= \max\{a,b\}+c \\ &= \max\{\max\{b,c\},c\} \\ &= \max\{\mathrm{a,b,c}\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a+(b+c)=(a+b)+c$

- มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $0\epsilon[0,2]$ จะได้ว่า

$$\mathrm{x}+0=\max\{x,0\}=\mathrm{x} \quad \forall\, x\epsilon[0,2]$$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ a, b ∈[0,2]

$$a + b = \max\{a, b\} = \max\{b, a\} = b + a$$

2. $([0,2],\cdot,2)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ a, b, c ∈[0,2] จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot \min\{b, c\} \\ &= \min\{a, \min\{b, c\}\} \\ &= \min\{a, b, c\} \\ (a \cdot b) \cdot c &= \min\{a, b\} \cdot c \\ &= \min\{\min\{a, b\}, c\} \\ &= \min\{a, b, c\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

-มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $2 \in [0,2]$ จะได้ว่า

$x \cdot 2 = \min\{x, 2\} = x \ \ \forall\, x \in [0,2]$

ดังนั้น 2 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

-มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ a, b ∈[0,2] จะได้

$$a \cdot b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \cdot a$$

3. การคูณ $(\cdot)$ สารถกระจายเหนือการบวก $(+)$ สำหรับแต่ละ a, b, c ∈[0,2] จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot \max\{b, c\} \\ &= \min\{a, \max\{b, c\}\} \\ &= \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} \\ &= \min\{a, b\} + \min\{a, c\} \\ &= a \cdot (b + c) \\ (a + b) \cdot c) &= \max\{a, b\} \cdot c \\ &= \min\{\max\{a, b\}, c\} \\ &= \max\{\min\{a, c\}, \min\{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}\} \\ &= \min\{a, c\} + \min\{b, c\} \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \end{aligned}$$

4. $(0 \cdot r) = 0 = \mathrm{r} \cdot 0 \qquad \forall r \in [0,2]$

เนื่องจาก 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $0 \cdot r = \min\{0, r\} = 0 = \min\{r, 0\} = r \cdot 0$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ 0 และเอกลักษณ์การคูณคือ 2

จะเห็นว่า เอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $([0,2],+,\cdot\ 0,2)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> $[\alpha,\beta]$ โดยที่ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ภายใต้การดำเนินการ
$a+b=\max\{a,b\}$ และ $a\cdot b=\min\{a,b\}$ สำหรับ $a,b\in[\alpha,\beta]$
เป็นกึ่งริงสลับที่

<u>บทพิสูจน์</u> จะแสดงว่า $([\alpha,\beta],+,\cdot,\alpha,\beta)$ เป็นกึ่งสลับที่

1. $([\alpha,\beta],+,\alpha)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

-มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c\in[\alpha,\beta]$ จะได้

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= a+\max\{b,c\} \\ &= \max\{a,\max\{b,c\}\} \\ &= \max\{a,b,c\} \\ (a+b)+c &= \max\{a,b\}+c \\ &= \max\{\max\{b,c\},c\} \\ &= \max\{a,b,c\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a+(b+c)=(a+b)+c$

- มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $\alpha\in[\alpha,\beta]$ จะได้ว่า

$$x+\alpha=\max\{x,\alpha\}=x \quad \forall\, x\in[\alpha,\beta]$$

ดังนั้น α เป็นเอกลักษณ์การบวก

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ a, b $\in[\alpha,\beta]$ จะได้

$$a+b=\max\{a,b\}=\max\{\mathrm{b},\mathrm{a}\}=b+a$$

2. $([\alpha,\beta],\cdot,\beta)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

- มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a,b,c\in[\alpha,\beta]$ จะได้

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot c) &= a\cdot\min\{b,c\} \\ &= \min\{a,\min\{b,c\}\} \\ &= \min\{a,b,c\} \\ (a\cdot b)\cdot c &= \min\{a,b\}\cdot c \\ &= \min\{\min\{a,b\},c\} \\ &= \min\{a,b,c\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

-มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $\beta\in[\alpha,\beta]$ จะได้ว่า

$$x\cdot\beta=\min\{x,\beta\}=x\ \ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$$

ดังนั้น β เป็นเอกลักษณ์การคูณ

-มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in [\alpha, \beta]$ จะได้

$$a \cdot b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \cdot a$$

3. การคูณ $(\cdot)$ สารถกระจายเหนือการบวก$(+)$ สำหรับแต่ละ $a, b, c \in [0,2]$ จะได้

$$\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= a \cdot \max\{b, c\} \\
&= \min\{a, \max\{b, c\}\} \\
&= \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} \\
&= \min\{a, b\} + \min\{a, c\} \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\
(a + b) \cdot c &= \max\{a, b\} \cdot c \\
&= \min\{\max\{a, b\}, c\} \\
&= \max\{\min\{a, c\}, \min\{b, c\}\} \\
&= \min\{a, c\} + \min\{b, c\} \\
&= (a \cdot b) + (a \cdot c)
\end{aligned}$$

4. $(\alpha \cdot r) = \alpha = r \cdot \alpha \qquad \forall r \in [\alpha, \beta]$

เนื่องจาก α เป็นเอกลักษณ์การบวก

จะได้ว่า $\alpha \cdot r = \min\{\alpha, r\} = \alpha = \min\{r, \alpha\} = r \cdot \alpha$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ α และเอกลักษณ์การคูณคือ β

จะเห็นว่า เอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $([\alpha, \beta], +, \cdot\ \alpha, \beta)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่าง 2.2.4 $\mathbb{N} \cup \{0\}$เมื่อ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \begin{Bmatrix} \operatorname{lcm}(a, b)\ , a, b \in \mathbb{N} \\ 0 \qquad\qquad ,\text{กรณีอื่น} \end{Bmatrix}$$

$$a \cdot b = \begin{Bmatrix} 0 \qquad\qquad , a = b = 0 \\ \gcd(a, b)\ \ ,\text{กรณีอื่น} \end{Bmatrix}$$

เป็นกึ่งริงสลับที่

การพิสูจน์ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 1, 0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับตัวคูณร่วมน้อยและตัวหารร่วมมากดังนี้

<u>บทนิยาม</u> ให้ $a, b \in \mathbb{Z}-\{0\}$ จำนวนนับ m จะกล่าวว่าเป็น ตัวคูณร่วมน้อย (least common multiple) ของ a และ b ซึ่งเขียนแทนด้วย $\operatorname{lcm}(a, b)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $a|m$ และ $b\,|m$

(2) สำหรับจำนวนนนับ m' ใดๆ ซึ่ง $a|m'$ และ $b|m'$ จะได้ว่า $m|m'$

<u>บทนิยาม</u> ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดย

a และ b ไม่เป็น 0 พร้อมกัน จำนวนนับ d จะกล่าวว่าเป็น ตัวหารร่วมมาก (greatest common divisor) ของ a และ b ซึ่ง เขียนแทนด้วย $\operatorname{gcd}(a, b)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $d|a$ และ $d|b$

(2) สำหรับจำนวนนับd' ใดๆ ซึ่ง $d'|a$ และ $d'|b$ จะได้ว่า $d'|d$

<u>สมบัติการสลับที่</u>

$$\operatorname{lcm}(a, b) = \operatorname{lcm}(b, a)$$
$$\operatorname{gcd}(a, b) = \operatorname{gcd}(b, a)$$

<u>บทพิสูจน์</u> เห็นได้ชัดว่า การหา ห.ร.ม และ ค.ร.น. มีสมบัติการสลับที่

<u>สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม</u>

$$\operatorname{lcm}(a, \operatorname{lcm}(b, c)) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a, b), c)$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $k = \operatorname{lcm}(a, \operatorname{lcm}(b, c))$

จะได้ $a|k$ และ $\operatorname{lcm}(b, c)$

ให้ $l = \operatorname{lcm}(b, c))$ จะได้ $b|l$ และ $c|l$

จะเห็นว่า $a|k, b|k$ และ $c|k$

ทำให้ได้ว่า $\operatorname{lcm}(a, b)|k$ และ $c|k$

ดังนั้น $\operatorname{lcm}\big(a, \operatorname{lcm}(b, c)\big) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a, b), c)$

$$\operatorname{gcd}(a, \operatorname{gcd}(b, c)) = \operatorname{gcd}(\operatorname{gcd}(a, b)\,, c)$$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $d = \operatorname{gcd}(a, \operatorname{gcd}(b, c))$ จะได้ $d|a$ และ $d|\operatorname{gcd}(b, c)$

ให้ $l = \operatorname{gcd}(b, c)$ จะได้ $l|b$ และ $l|c$

จะเห็นว่า $d|a, d|b$ และ $d|c$

ทำให้ได้ว่า $d|\operatorname{gcd}(a, b)$ และ $d|c$

ดังนั้น $\operatorname{gcd}(a, \operatorname{gcd}(b, c)) = \operatorname{gcd}(\operatorname{gcd}(a, b)\,, c)$

สมบัติการกระจาย

$$\mathrm{lcm}(a,\mathrm{gcd}(b,c)) = \mathrm{gcd}\big(\mathrm{lcm}(a,b),\mathrm{lcm}(a,c)\big)$$

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปของการพิสูจน์ ให้ $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k$ เป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของ $\mathrm{a, b, c}$ ซึ่ง

$$a = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$$
$$b = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right)$$
$$c = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$$

โดยที่ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับทุก $1 \leq i \leq k$

จะได้ $\mathrm{lcm}(a,\mathrm{gcd}(b,c)) = \mathrm{lcm}\left(a, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)$

$$= \mathrm{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\beta_i,\beta\gamma_i\}}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{\alpha_i,\min\{\beta_i,\gamma_i\}\}}$$

$$\mathrm{gcd}\big(\mathrm{lcm}(a,b),\mathrm{lcm}(a,c)\big) = \mathrm{gcd}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\alpha_i,\beta_i\}}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\max\{\alpha_i,\beta_i\},\max\{\alpha_i,\gamma_i\},\}}$$

จากตัวอย่าง 2.2.3

จะได้ว่า$\max\{a,\min\{b,c\}\} = \min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}$

นั่นคือ

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\alpha_i,min\{\beta_i,\gamma_i\}\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\alpha_i,min\{\beta_i,\gamma_i\}\}}$$

ดังนั้น $\mathrm{lcm}(a,\mathrm{gcd}(b,c)) = \mathrm{gcd}\big(\mathrm{lcm}(a,b),\mathrm{lcm}(a,c)\big)$

$$\mathrm{gcd}(a,\mathrm{lcm}(b,c)) = \mathrm{lcm}\big(\mathrm{gcd}(a,b),\mathrm{gcd}(a,c)\big)$$

บทพิสูจน์ โดยไมเสียนัยทั่วไปของการพิสูจน์ให้ $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots p_k$ เป็นตัวประกอบเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของ a, b, c ซึ่ง

$$a = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)$$
$$b = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}\right)$$

$$c = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma_i}\right)$$

โดยที่ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i,$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สำหรับทุก $1 \leq i \leq k$

จะได้ $\gcd(a, \operatorname{lcm}(b, c)) \quad = \gcd\left(a, \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\beta_i,\gamma_i\}}\right)$

$$= \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{\beta_i,\beta\gamma_i\}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{min\{\alpha_i, max\{\beta_i,\gamma_i\}\}}$$

$$\operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c)) = \operatorname{lcm}\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{min\{\alpha_i,\beta_i\}}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{min\{\alpha_i,\gamma_i\}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{min\{\alpha_i,\beta_i\}, min\{\alpha_i,\gamma_i\},\}}$$

<u>จากตัวอย่าง 2.2.3</u> จะได้ว่า$\min\{a, \max\{b,c\}\} = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

นั่นคือ

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{min\{\alpha_i, max\{\beta_i,\gamma_{i,}\}\}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{max\{min,\{\alpha_i,\beta_i\}, min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}}$$

ดังนั้น $\gcd\big(a, \operatorname{lcm}(b,c)\big) = \operatorname{lcm}(\gcd(a,b), \gcd(a,c))$

<u>พิสูจน์</u> ของ <u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> จะแสดงว่า $((\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 1, 0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

-มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้

<u>กรณี 1</u> $a = 0$ หรือ $b = 0$ หรือ $c = 0$

$$a + (b + c) \quad = 0 = (a + b) + c$$

<u>กรณี 2</u> $a, b, c \neq 0$

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + \operatorname{lcm}(b,c) \\ &= \operatorname{lcm}\big(a, \operatorname{lcm}(b,c)\big) \\ &= \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b), c) \\ &= \operatorname{lcm}(a,b) + c \\ &= (a + b) + c \end{aligned}$$

-มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้ $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

กรณี $\mathrm{x} = 0$ จะได้ $x + 1 = \mathrm{lcm}(0,1) = 0 = x$

กรณี $x \neq 0$ จะได้ $x + 1 = \mathrm{lcm}(x, 1) = x$

ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การบวก

-มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้

$$\begin{aligned} a + b &= \mathrm{lcm}(a, b) \\ &= \mathrm{lcm}(a, b) \\ &= b + a \end{aligned}$$

2. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot, 0)$ เป็นโมนอยด์สลับที่

-มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้

<u>กรณี 1</u> $a = b = c = 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot 0 = 0$$
$$(a \cdot b) \cdot c = 0 \cdot c = 0$$

<u>กรณี 2</u> $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \mathrm{gcd}(b, c) = \mathrm{gcd}(b, c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{gcd}(0, b) \cdot c = b \cdot c = \mathrm{gcd}(b, c)$$

<u>กรณี 3</u> $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \mathrm{gcd}(0, c) = a \cdot c = \mathrm{gcd}(a, c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{gcd}(a, 0) \cdot c = a \cdot c = \mathrm{gcd}(a, c)$$

<u>กรณี 4</u> $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \mathrm{gcd}(b, 0) = a \cdot b = \mathrm{gcd}(a, b)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{gcd}(a, b) \cdot 0 = \mathrm{gcd}(a, b)$$

<u>กรณี 5</u> $a = 0, b = 0, c \neq 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = 0 \cdot \mathrm{gcd}(0, c) = 0 \cdot c = c$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{gcd}(0,0) \cdot c = 0 \cdot c = c$$

<u>กรณี 6</u> $a = 0, b \neq 0, c = 0$

$$a \cdot (b \cdot c) = 0 \cdot \mathrm{gcd}(b, 0) = 0 \cdot b = b$$
$$(a \cdot b) \cdot c = \mathrm{gcd}(0, b) \cdot 0 = b \cdot 0 = b$$

กรณี 7 $a \neq 0, b = 0, c = 0$

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot \gcd(0,0) = a \cdot 0 = a$
$(a \cdot b) \cdot c = \gcd(\mathrm{a}, 0) \cdot 0 = \mathrm{a} \cdot 0 = \mathrm{a}$

กรณี 8 $a, b, c \neq 0$

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot c) &= a \cdot \gcd(b, c) \\
&= \gcd(a, \gcd(b, c)) \\
&= \gcd(\gcd(a, b), c) \\
&= \gcd(a, b) \cdot \mathrm{c} \\
&= (a \cdot b) \cdot c
\end{aligned}
$$

-มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้ $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

กรณี $x = 0$ จะได้ $x \cdot 0 = 0 = x$

กรณี $x \neq 0$ จะได้ $x \cdot 0 = \gcd(x, 0) = x$

ดังนั้น 0 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้

$$a \cdot b = \gcd(a, b) = \gcd(b, a) = b \cdot a$$

3. การคูณ $(\cdot)$ กระจายเหนือการบวก $(+)$ สำหรับแต่ละ $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้

กรณีที่ 1 $b = 0, c = 0$ จะได้

$a \cdot (b + c) = a \cdot 0 = 0$
$(a + b) \cdot c = 0 \cdot c = 0$
$(a \cdot b) + (a \cdot c) = 0 + 0 = 0$
$(a \cdot c) + (b \cdot c) = 0 + 0 = 0$

กรณีที่ 2 $b \neq 0, c \neq 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b + c) &= a \cdot \operatorname{lcm}(b, c) \\
&= \gcd(a, \operatorname{lcm}(b, c)) \\
&= \operatorname{lcm}(\mathrm{b}, \mathrm{c}) \\
(a + b) \cdot c &= 0 \cdot c = 0 \\
(a \cdot b) + (a \cdot c) &= b + c \\
&= \operatorname{lcm}(b, c) \\
(a \cdot c) + (b \cdot c) &= c + \gcd(b, c) \\
&= \operatorname{lcm}(c, \gcd(b, c)) \\
&= c
\end{aligned}
$$

กรณี $a \neq 0$

<u>กรณีที่1</u> $b = 0, c = 0$ จะได้

$$a \cdot (b + c) = a \cdot 0 = a$$
$$(a + b) \cdot c = 0 \cdot 0 = 0$$
$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a + a = a$$
$$(a \cdot c) + (b \cdot c) = a + 0 = 0$$

<u>กรณีที่2</u> $b \neq 0, c \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= \gcd(a, \mathrm{lcm}(b, c)) \\ &= \mathrm{lcm}(\gcd(a, b), \gcd(a, c)) \\ &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= \gcd(\mathrm{lcm}(a, b), c) \\ &= \gcd(c, \mathrm{lcm}(a, b) \\ &= \mathrm{lcm}(\gcd, (a, c), \gcd(b, c)) \\ &= (a \cdot c) + (b \cdot c)) \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 3</u> $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot 0 = a \\ (a \cdot b) + (a \cdot c) &= \gcd(0,0) + \gcd(a, c) \\ &= a + \gcd(a, c) \\ &= \mathrm{lcm}(a, \gcd(a, c)) \\ &= \gcd(\mathrm{lcm}(a, a), \mathrm{lcm}(a \cdot c)) \\ &= \gcd(a, \mathrm{lcm}(a, c)) \\ &= a \\ (a + b) \cdot c &= 0 \cdot c = c \\ (a \cdot c) + (b \cdot c) &= \gcd(a, c) + \gcd(0, c) \\ &= \gcd(a, c) + c \\ &= \mathrm{lcm}(\gcd(a, c), c) \\ &= \gcd(\mathrm{lcm}(a, c), \mathrm{lcm}(c, c)) \\ &= \gcd(\mathrm{lcm}(a, c), c) \\ &= c \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 4</u> $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot 0 = a \\ (a + b) \cdot c &= \mathrm{lcm}(a, b) \\ (a \cdot b) + (a \cdot c) &= \gcd(a, b) + a \\ &= \mathrm{lcm}(\gcd(a, b), a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + (a \cdot c) &= \gcd(a, c) + \gcd(b, c) \\ &= a + b \\ &= \mathrm{lcm}(a, b) \end{aligned}$$

4. $1 \cdot r = 1 = r \cdot 1 \quad \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
   เนื่องจาก *1* เป็นเอกลักษณ์การบวก
   จะได้ว่า $1 \cdot r = \gcd(1, r) = 1 = \gcd(r, 1)$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ 1 และเอกลักษณ์การคูณคือ 0
   จะเห็นว่าเอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ
   สรุปได้ว่า $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 1, 0)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ เรานิยาม

$$a \oplus b = \min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \le b \\ b, & a \ge b \end{cases}$$

กำหนด $\min\{a, \infty\} = a$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

สำหรับแต่ละ$a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ เรานิยาม

$$a \oplus b = \begin{cases} ab, & ab \in \mathbb{R}^+ \\ \infty, & a = \infty \text{ หรือ } b = \infty \end{cases}$$

จะได้ว่า $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \odot, \infty, 1)$เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \odot, \infty, 1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

1. $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \infty)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

กรณี 1 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (\min\{b, c\}) \\ &= \min\{a, \min\{b, c\}\} \\ &= \min\{\min\{a, b\}, c\} \\ &= \min\{a, b\} \oplus c \\ &= (a \oplus b) \oplus c \end{aligned}$$

กรณี 2 $a = \infty,\ \ b, c \in \mathbb{R}^+$

$$a \oplus (b \oplus c) = \infty \oplus \min\{b, c\}$$

$$= \min\{\infty, \min\{b, c\}\}$$

$$= \min\{b, c\}$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \min\{a, b\} \oplus c$$

$$= b \oplus c$$

$$= \min\{b, c\}$$

กรณี 3 $b = \infty,\ \ a, c \in \mathbb{R}^+$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \min\{b, c\}$$

$$= a \oplus c$$

$$= \min\{a, c\}$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \min\{a, b\} \oplus c$$

$$= a \oplus c$$

$$= \min\{a, c\}$$

กรณี 4 $c = \infty,\ \ a, b \in \mathbb{R}^+$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \min\{b, c\}$$

$$= a \oplus b$$

$$= \min\{a, b\}$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \min\{a, b\} \oplus \infty$$

$$= \min\{\min\{a, b\}, \infty\}$$

$$= \min\{a, b\}$$

กรณี 5 $a = \infty, b = \infty, c = \infty$

$$a \oplus (b \oplus c) = \min\{\infty, \min\{\infty, \infty\}\} = \infty$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \min\{\min\{\infty, \infty\}, \infty\} = \infty$$

- มีเอกลักษณ์การบวก

พิจารณา $\infty \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

$$x \oplus \infty = \min\{x, \infty\} = \mathrm{x} \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

ดังนั้น ∞ เป็นลักษณ์การบวก

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

$$a \oplus b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \oplus a$$

2. $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \odot, 1)$ เป็นโมนอยด์สลับที่
   - มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม สำหรับแต่ละ $\mathrm{a, b, c} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

<u>กรณี 1</u> $\mathrm{a, b, c} \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \odot c) = a \odot bc = a(bc) = (ab)c = ab \odot c = (a \odot b) \odot c$$

<u>กรณี 2</u> $a = \infty, b = \infty, c = \infty$

$$a \odot (b \odot c) = \infty = (a \odot b) \odot c$$

- มีเอกลักษณ์การคูณ

พิจารณา $1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

$$1 \odot b = ab = ba = b \odot a \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- มีสมบัติสลับที่ สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

$$a \odot b = ab = ba = b \odot a$$

3. การคูณ$(\odot)$ การกระจายเหนือการบวก $(\oplus)$ สำหรับแต่ละ $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ จะได้

กรณี $\mathrm{a} = \infty$

<u>กรณี 1</u> $\mathrm{b, c} \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \oplus c) \qquad = \infty \odot (b \oplus c) = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \qquad = (\infty \odot b) \oplus (\infty \odot c)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

$$(a \oplus b) \odot c \quad = \min\{\infty, \mathrm{b}\} \odot c = bc$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (\infty \odot \mathrm{c}) \oplus (\mathrm{b} \odot c)$$

$$= \infty \oplus bc$$

$$= \min\{\infty, bc\}$$

$$= bc$$

<u>กรณี 2</u> $b = \infty, c \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \oplus c) \quad = \infty \odot (\infty \oplus c) = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot c)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \infty$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, \infty\} \odot c = \infty \odot c = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (\infty \odot c) \oplus (\infty \odot c)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

<u>กรณี 3</u> $b \in \mathbb{R}^+, c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (b \oplus \infty) = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad = (\infty \odot b) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, \mathrm{b}\} \odot \infty = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (\infty \odot \infty) \oplus (\mathrm{b} \odot \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

<u>กรณี 4</u> $b = \infty, c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = \infty \odot (\infty \oplus \infty) = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

$$(a \oplus b) \odot c = \min\{\infty, \infty\} \odot \infty = \infty$$

$$(a \odot c) \oplus (b \odot c) = (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \min\{\infty, \infty\}$$

$$= \infty$$

กรณี $a \in \mathbb{R}^+$

<u>กรณี 1</u> $b, c \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{b, c\}$$

$$= a(\min\{b, c\})$$

$$= \min\{ab, ac\}$$

$$= ab \oplus ac$$

$$= (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

$$(a \oplus b) \odot c = (\min\{ab\})c$$

$$= \min\{ac, bc\}$$

$$= ac \oplus bc$$

$$= (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

<u>กรณี 2</u> $b = \infty, c \in \mathbb{R}^+$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{\infty, c\} = a \odot c = ac$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a \odot \infty) \oplus (a \odot c)$$

$$= \infty \oplus ac$$

$$= \min\{\infty, ac\} = ac$$

$$= ac$$

<u>กรณี 3</u> $b \in \mathbb{R}^+, c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{\mathrm{b}, \infty\} = a \odot c = ab$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a \odot \infty) \oplus (a \odot \infty)$$

$$= ab \oplus \infty$$

$$= \min\{ab, \infty\}$$

$$= ab$$

<u>กรณี 4</u> $b = \infty, c = \infty$

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot \min\{\infty, \infty\} = a \odot \infty = \infty$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a \odot \infty) \oplus (a \odot \infty)$$

$$= \infty \oplus \infty$$

$$= \infty$$

4. $\infty \cdot r = \infty = r \cdot \infty \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

   เนื่องจาก ∞ เป็นเอกลักษณ์การบวก

   จะได้ว่า $(\infty) \odot r = (\infty)r = \infty = r(\infty) = r \odot (\infty)$

5. เอกลักษณ์การบวกคือ ∞ และ เอกลักษณ์การคูณคือ 1

   จะเห็นว่าเอกลักษณ์การบวกไม่เท่ากับเอกลักษณ์การคูณ

สรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \oplus, \odot, \infty, 1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่างที่ 2.2.6 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n จะได้ว่า $\mathbb{Z}_n$ ภายใต้การบวก คูณปกติ เป็นกึ่งริงสลับที่

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot, \overline{0}, \overline{1})$เป็นกึ่งริงสลับที่

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_n$ เป็นจริง

จะได้ว่า $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot, \overline{0}, \overline{1})$ เป็นกึ่งริง

และภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ มีสมบัติการสลับที่

สรุปได้ว่า$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot, \overline{0}, \overline{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

2.3 สมบัติผลรวมในกึงริงสลับที่

(1) $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

บทพิสูจน์ โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$

เมื่อ $n = 1$จะได้ $P(1)$

$$= \sum_{i=1}^{1}(X_i + Y_i) = X_i + Y_i \quad = \sum_{i=1}^{1} X_i + \sum_{i=1}^{1} Y_i$$

ดังนั้น $P(1)$เป็นจริง

ให้ $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ สมมติ $\mathrm{P(n)}$เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

ต้องการพิสูจน์ว่า $p(n+1)$เป็นจริง

จะได้ $\sum_{i=1}^{n+1}(X_i + Y_i)$

$= (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \cdots + (X_n + n) + (X_{n+1} + Y_{n+1})$

$= [(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \ldots + (X_n + n)] + (X_{n+1} + Y_{n+1})$

$= \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + (X_{n+1} + Y_{n+1})$

$= \left[\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1}\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_{n+1}\right]$

$= \sum_{i=1}^{n+1} X_i + \sum_{i=1}^{n+1} Y_i$

ดังนั้น $P(n+1)$เป็นจริง

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} aX_i = a\sum_{i=1}^{n} X_i$

<u>บทพิสูจน์</u>

$$\sum_{i=1}^{n} aX_i = aX_1 + aX_2 + \ldots + aX_n$$
$$= a(X_1 + X_2 + \ldots X_n)$$
$$= a\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(3) $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $m \in \mathbb{N}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$

ให้ $P(n)$ แทน $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$จะได้ $P(1)$แทน

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{1} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m} a_i = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

ดังนั้น $P(1)$เป็นจริง

ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมตี $P(n)$เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n+1)$เป็นจริง

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{(n+1)j}) \\
&= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{mj}) + \sum_{j=1}^{m} a_{(n+1)j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{(n+1)j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathrm{P}(\mathrm{n}+1)$เป็นจริง

$$\therefore \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{n=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

บทที่3

เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

3.1 การดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

<u>บทนิยาม 3.1.1</u> เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ กำหนดให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ และ $M_n(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L สำหรับแต่ละ $m, n \in \mathbb{N}$

ถ้า $A \in M_{m,n}(L)$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i = 1,2, \dots, m$ และ $j = 1,2, \dots, n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{m,n}$ หรือ $A = [a_{ij}]$

ในกรณีที่ $m = n$ เราจะเขียน $M_{m,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$

มีสมบัติเกี่ยวกับการดำเนินการของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ดังนี้

<u>บทนิยาม 3.1.2</u> สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ เรานิยาม

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = ([0,2], +, \cdot, 0, 2)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\ \{a, b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1.3 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.7 & 1.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $$A + B = \begin{bmatrix} \max\{0,1.7\} & \max\{1.3,1.1\} \\ \max\{0,2.0.5\} & \max\{1,0.5\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.7 & 1.3 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(L)$$

<u>บทนิยาม 3.1.3</u> สำหรับแต่ละ $\mathrm{A} = [\mathrm{a_{ij}}] \in \mathrm{M_{m,n}}(\mathrm{L})$ *และ* $\mathrm{B} = [\mathrm{b_{ij}}] \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathrm{L})$ เรานิยาม

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right] M_{m,p}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = (\mathbb{Z}_3, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1})$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_{2,3}(L) \text{ และ } B = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \in M_{3,1}(L)$$

$$\text{จะได้} \quad AB = \begin{bmatrix} (\bar{0})(\bar{1}) + (\bar{0})(\bar{2}) + (\bar{1})(\bar{1}) \\ (\bar{2})(\bar{1}) + (\bar{1})(\bar{2}) + (\bar{1})(\bar{1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{0} + \bar{0} + \bar{1} \\ \bar{2} + \bar{2} + \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{bmatrix} \in M_{2,1}(L)$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.4</u> $M_n(L)$ เป็นกึ่งริง

<u>บทนิยาม 3.1.5</u> สำหรับแต่ละ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ และ $k \in L$ เรานิยาม

$$kA = [ka_{ij}] \in M_{m,n}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = (\mathbb{R}^+ qq \cup \{\infty\}, +, \cdot, 0, 1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = min\{a, b\} \text{ และ } a \cdot b = ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 5.95 & 1 \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \in M_2(L) \text{ และ } k = 5$$

$$\text{จะได้} \quad kA = 5 \begin{bmatrix} 5.95 & 1 \\ \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(5.95) & 5(1) \\ 5(\infty) & 5(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.75 & 5 \\ \infty & 0 \end{bmatrix} \in M_2(L)$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.6</u> ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ L ซึ่งมีขนาดที่ทำให้การดำเนินการต่างๆในแต่ละข้อต่อไปนี้มีวามหมาย และให้ $k, p \in L$

(1) $k(A + B) = kA + kB$

(2) $(k + p)A = kA + pA$

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

บทนิยาม 3.1.7 ถ้า $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(L)$ แล้วการสลับเปลี่ยนของ A แทนด้วย A^T ซึ่ง

$$A^T = [a_{ji}] \in M_{n,m}(L)$$

ตัวอย่าง กำหนด $L = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot, 0, 1)$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

ทฤษฎีบท 3,1,8 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์เหนือ L ซึ่งมีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อมีความหมาย จะได้ว่า

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$ สำหรับ $k \in L$

(4) $(AB)^T = A^T B^T$

(5) ถ้า $A = [A_{ij}]$ แล้ว $A^T = [(A_{ij})^T]$

บทนิยาม 3.1.9 รอยของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}] \in M_n(L)$ คือ ผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $L=(\mathbb{Z}_5,+,\cdot,\bar{0},\bar{1})$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

ให้ $A=\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{3} & \bar{0}\\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{3}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1}\end{bmatrix}\in M_3(L)$

จะได้ $tr(A)=\bar{2}+\bar{4}+\bar{1}=\bar{2}$

ทฤษฎีบท 3.1.10 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(L)$ และ $k\in L$ จะได้ว่า

(1) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

(2) $tr(kA)=ktr(A)$

ทฤษฎีบท 3.1.11 สำหรับแต่ละ $A,B\in M_n(L)$ จะได้ว่า

(1) $tr(AB)=tr(BA)$

(2) $tr(A^T)=tr(A)$

(3) $tr(A^TA)=tr(AA^T)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$

3.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $A\in M_{m,n}(L)$ และ $B\in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโคเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A\otimes B=[a_{ij}B]_{ij}\in M_{mp,nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i,j) ของ $A\otimes B$ คือ $a_{ij}B$ สำหรับ $i=1,\ldots,m$ และ $j=1,\ldots,n$

ตัวอย่าง กำหนด $L=(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot,0,1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\begin{cases} lcm(a,b) & ,a,b\in\mathbb{N}\\ 0 & ,\text{กรณีอื่น}\end{cases}$$

$$a \cdot b \quad = \begin{cases} 0 & , a = b = 0 \\ gcd(a,b) & , \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(L)$

จะได้ A⊗B

$$= \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ 6\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} gcd(1,2) & gcd(1,4) \\ gcd(1,5) & gcd(1,1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gcd(4,2) & gcd(4,4) \\ gcd(4,5) & gcd(4,1) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} gcd(6,2) & gcd(6,4) \\ gcd(6,5) & gcd(6,1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gcd(3,2) & gcd(3,4) \\ gcd(3,5) & gcd(3,1) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบท 3.2.2 ([2])</u>

ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์เหนือ L ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

(1) $(kA)\otimes B = k(A\otimes B) = A\otimes(kB)$ สำหรับ $k \in L$

(2) $(A + B)\otimes C = (A\otimes C) + (B\otimes C)$

(3) $A\otimes(B + C) = (A\otimes B) + (A\otimes C)$

(4) $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

<u>ทฤษฎีบท 3.2.3 ([2])</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$,$B \in M_{p,q}(L)$ และ $C \in M_{r,s}(L)$

จะได้ว่า

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$$

<u>ทฤษฎีบท3.2.4 ([2])</u> ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ ถ้า A และ B หาผกผันได้ แล้ว $A \otimes B$ หาผกผันได้ และ

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

<u>ทฤษฎีบท 3.2.5 ([2])</u> ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$ จะได้ว่า

$$tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$$

<u>บทนิยาม 3.2.6</u> โครเนคเคอร์ยกกำลังของ $A \in M_{m,n}(L)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k นิยามโดย

$$(A)^{\otimes 1} = A \text{ และ } (A)^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes (k-1)} \text{ สำหรับ } k = 2,3, \ldots$$

บทที่ 4

ผลคูณโอเซนเรนนี่โกเอลของเมทริกซ์กึ่งริงสลับที่

4.1 บทนิยามและตัวอย่างของผลคูณโอเซน เรนนี่ โกเอล

ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโอเซน เรนนี่ โกเอลของ A และ B นิยามโดย

$$A \boxtimes B = [A \otimes B_1 \dots A \otimes B_q]$$

$$A \boxtimes B \in M_{mp,nq}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $(\mathbb{R}^+, +, \cdot\ ,0,1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \max\ \{a, b\} \text{ และ } a \cdot b = \min\{a, b\}$$

ให้ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{L})$

$$A \boxtimes B = \begin{bmatrix} 0 \cdot 4 & 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{0,4\} & \min\{1,4\} & \min\{0,2\} & \min\{1,2\} \\ \min\{0,0\} & \min\{1,0\} & \min\{0,1\} & \min\{1,1\} \\ \min\{2,4\} & \min\{1,4\} & \min\{2,2\} & \min\{1,2\} \\ \min\{2,0\} & \min\{1,0\} & \min\{2,1\} & \min\{1,1\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathrm{L}$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \cdot\ ,0,1)$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a + b = \begin{cases} lcm(a, b)\ , a, b \in \mathbb{N} \\ 0 \qquad\qquad , \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

$$a \cdot b \ = \begin{cases} 0 \qquad\quad , a = b = 0 \\ gcd(a, b)\ , \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \boxtimes B = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 1\cdot 1 & 3\cdot 1 & 1\cdot 1 & 3\cdot 3 & 1\cdot 3 \\ 3\cdot 5 & 1\cdot 5 & 3\cdot 2 & 1\cdot 2 & 3\cdot 4 & 1\cdot 4 \\ 2\cdot 1 & 4\cdot 1 & 2\cdot 1 & 4\cdot 1 & 2\cdot 3 & 4\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 4\cdot 5 & 2\cdot 2 & 4\cdot 2 & 2\cdot 4 & 4\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gcd(3,1) & \gcd(1,1) & \gcd(3,1) & \gcd(1,1) & \gcd(3,3) & \gcd(1,3) \\ \gcd(3,5) & \gcd(1,5) & \gcd(3,2) & \gcd(1,2) & \gcd(3,4) & \gcd(1,4) \\ \gcd(2,1) & \gcd(4,1) & \gcd(2,1) & \gcd(4,1) & \gcd(2,3) & \gcd(4,3) \\ \gcd(2,5) & \gcd(4,5) & \gcd(2,2) & \gcd(4,2) & \gcd(2,4) & \gcd(4,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4,6}(L)$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $L = ([0,1], +, \cdot, 0, 1)$ ภายใต้การดำเนินการบวก คูณปกติ

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$

$A \boxtimes B$

$$= \begin{bmatrix} 0.2\cdot 0.6 & 0.5\cdot 0.6 & 0.7\cdot 0.6 & 0.2\cdot 0.9 & 0.5\cdot 0.9 & 0.7\cdot 0.9 & 0.2\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 & 0.7\cdot 0.5 \\ 0.2\cdot 0.1 & 0.5\cdot 0.1 & 0.7\cdot 0.1 & 0.2\cdot 0.3 & 0.5\cdot 0.3 & 0.7\cdot 0.3 & 0.2\cdot 0.2 & 0.5\cdot 0.2 & 0.7\cdot 0.2 \\ 0.2\cdot 0.6 & 0.5\cdot 0.6 & 0.7\cdot 0.6 & 0.2\cdot 0.7 & 0.5\cdot 0.7 & 0.7\cdot 0.7 & 0.2\cdot 0.3 & 0.5\cdot 0.3 & 0.7\cdot 0.3 \\ 0.4\cdot 0.6 & 0.3\cdot 0.6 & 0.1\cdot 0.6 & 0.4\cdot 0.9 & 0.3\cdot 0.9 & 0.1\cdot 0.9 & 0.4\cdot 0.5 & 0.3\cdot 0.5 & 0.1\cdot 0.5 \\ 0.4\cdot 0.1 & 0.3\cdot 0.1 & 0.1\cdot 0.1 & 0.4\cdot 0.3 & 0.3\cdot 0.3 & 0.1\cdot 0.3 & 0.4\cdot 0.2 & 0.3\cdot 0.2 & 0.1\cdot 0.2 \\ 0.4\cdot 0.6 & 0.3\cdot 0.6 & 0.1\cdot 0.6 & 0.4\cdot 0.7 & 0.3\cdot 0.7 & 0.1\cdot 0.7 & 0.4\cdot 0.3 & 0.3\cdot 0.3 & 0.1\cdot 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.12 & 0.30 & 0.42 & 0.18 & 0.45 & 0.63 & 0.10 & 0.25 & 0.35 \\ 0.02 & 0.05 & 0.07 & 0.06 & 0.15 & 0.21 & 0.04 & 0.10 & 0.14 \\ 0.12 & 0.30 & 0.42 & 0.14 & 0.35 & 0.49 & 0.06 & 0.15 & 0.21 \\ 0.24 & 0.18 & 0.06 & 0.36 & 0.27 & 0.09 & 0.20 & 0.15 & 0.05 \\ 0.04 & 0.03 & 0.01 & 0.12 & 0.09 & 0.03 & 0.08 & 0.06 & 0.02 \\ 0.24 & 0.18 & 0.06 & 0.28 & 0.21 & 0.07 & 0.12 & 0.09 & 0.03 \end{bmatrix} \in M_{6,9}(L)$$

บทที่ 5

การดำเนินการเชิงพีชคณิตของผลคูณโอเซน เรนนี่ โกเอล ของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

5.1 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

<u>ทฤษฎีบท 5.1.1</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L)$, $\in M_{p,q}(L)$, $C \in M_{r,s}(L)$ จะได้ว่า

$$A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes C$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ B_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ B โดยที่ $i = 1, \dots, q$

C_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ C โดยที่ $i = 1, \dots, s$

จะได้ $A \boxtimes (B \boxtimes C) = [A \boxtimes (B \otimes C_1 \cdots B \otimes C_s)]$

$$\begin{aligned}
&= [A \boxtimes (B \otimes C_1) \cdots A \boxtimes (B \otimes C_s)] \\
&= [A \boxtimes [B_1 \otimes C_1 \cdots B_q \otimes C_1] \cdots A \boxtimes [B_1 \otimes C_s \cdots B_q \otimes C_s]] \\
&= [A \otimes (B_1 \otimes C_1) \cdots A \otimes (B_q \otimes C_1) \cdots A \otimes (B_1 \otimes C_s) \cdots A \otimes (B_q \otimes C_s)] \\
&= [(A \otimes B_1) \otimes C_1 \cdots (A \otimes B_q) \otimes C_1 \cdots (A \otimes B_1) \otimes C_s \cdots (A \otimes B_q) \otimes C_s] \\
&= \left[[(A \otimes B_1) \cdots (A \otimes B_q)] \otimes C_1 \cdots [(A \otimes B_1) \cdots (A \otimes B_q)] \otimes C_s \right] \\
&= [(A \boxtimes B) \otimes C_1 \cdots (A \boxtimes B) \otimes C_s] \\
&= (A \boxtimes B) \boxtimes C
\end{aligned}$$

5.2 ความสัมพันธ์กับการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์

<u>ทฤษฎีบท 5.2.1</u> ให้ $A, B \in M_{m,n}(L), C \in M_{r,s}(L)$ จะได้ว่า

$$(A + B) \boxtimes C = (A \boxtimes C) + (B \boxtimes C)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ C_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ C โดยที่ $i = 1, 2, \dots, s$

จะได้ $(A + B) \boxtimes C = [(A + B) \otimes C_1 \cdots (A + B) \otimes C_s]$

$$= [(A \otimes C_1) + (B \otimes C_1) \cdots (A \otimes C_s) + (B \otimes C_s)]$$

$= [A \otimes C_1 \cdots A \otimes C_s] + [B \otimes C_1 \cdots B \otimes C_s]$

$= (A \boxtimes C) + (B \boxtimes C)$

<u>ทฤษฎีบท 5.2.2</u> ให้ $A \in M_{r,s}(L),\ B, C \in M_{m,n}(L)$ จะได้ว่า

$$A \boxtimes (B + C) = (A \boxtimes B) + (A \boxtimes C)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ B_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ B โดยที่ $i = 1, \ldots, n$

C_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ C โดยที่ $i = 1, \ldots, n$

จะได้ $A \boxtimes (B + C) = [A \otimes (B_1 + C_1) \cdots A \otimes (B_n + C_n)]$

$= [(A \otimes B_1) + (A \otimes C_1) \cdots (A \otimes B_n) + (A \otimes C_n)]$

$= [A \otimes B_1 \cdots A \otimes B_n] + [A \otimes C_1 \cdots A \otimes C_n]$

$= (A \boxtimes B) + (A \boxtimes C)$

<u>ทฤษฎีบท 5.2.3</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ B_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ B_i โดยที่ $i = 1,2, \ldots, q$

จะได้ $A \boxtimes (kB) = [A \otimes (kB_1) \cdots A \otimes (kB_q)]$

$= \left[k(A \otimes B_1) \cdots k\left(A \otimes B_q\right)\right]$

$= k[A \otimes B_1 \cdots A \otimes B_q]$

$= k(A \boxtimes B)$

จาก $(kA) \boxtimes B \quad = \left[kA \otimes B_1 \cdots kA \otimes B_q\right]$

$= \left[k(A \otimes B_1) \cdots k\left(A \otimes B_q\right)\right]$

$= k[A \otimes B_1 \cdots A \otimes B_q]$

$= k(A \boxtimes B)$

5.3 ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลที่เกี่ยวกับเมทริกซ์เมทริกซ์เอกลักษณ์

<u>ทฤษฎีบท 5.3.1</u> $I_p \boxtimes I_m = \begin{bmatrix} E_{11}^{m\times p} & E_{21}^{m\times p} \dots & E_{m1}^{m\times p} \\ E_{12}^{m\times p} & E_{22}^{m\times p} & E_{m2}^{m\times p} \\ & \vdots & \\ E_{1p}^{m\times p} & E_{2p}^{m\times p} & E_{mp}^{m\times p} \end{bmatrix}$

<u>พิสูจน์</u>

$$
I_p \boxtimes I_m = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 1 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 1 & 0 & 0\dots & 0 & & 1 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 1 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 1 & 0\dots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 1 & 0\dots & 0 \\
 & \vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots & \\
0 & 0 & 0\dots & 1 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 1 & & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & & 0 & 0 & 0\dots & 1
\end{bmatrix}
$$

<u>ทฤษฎีบท 5.3.2</u> $(I_p \boxtimes I_m)^{\mathrm{T}} = I_m \boxtimes I_p$

<u>พิสูจน์</u>

$$
(I_p \boxtimes I_m)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}
E_{n}^{m\times p} & E_{12}^{m\times p} \cdots & E_{m1}^{m\times p} \\
E_{12}^{m\times p} & E_{22}^{m\times p} \cdots & E_{22} \\
\vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\
E_{1p}^{m\times p} & E_{2p}^{m\times p} \cdots & E_{mp}^{m\times p}
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
(E_{n}^{m\times p})^T & (E_{12}^{m\times p})^T \cdots & (E_{1p}^{m\times p})^T \\
(E_{12}^{m\times p})^T & (E_{22}^{m\times p})^T \cdots & (E_{2p}^{m\times p})^T \\
\vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\
(E_{m1}^{m\times p})^T & (E_{m2}^{m\times p})^T \cdots & (E_{mp}^{m\times p})^T
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
E_{11}^{p\times m} & E_{21}^{p\times m} \cdots & E_{p1}^{p\times m} \\
E_{12}^{p\times m} & E_{22}^{p\times m} \cdots & E_{p2}^{p\times m} \\
\vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\
E_{1m}^{p\times m} & E_{2m}^{p\times m} \cdots & E_{pm}^{p\times m}
\end{bmatrix}
$$

$$= I_m \boxtimes I_p$$

<u>ทฤษฎีบท 5.3.3</u> $(I_p \boxtimes I_m)^{\mathrm{T}}(I_p \boxtimes I_m) = I_{pm}$

<u>พิสูจน์</u> $(I_p \boxtimes I_m)^{\mathrm{T}}(I_p \boxtimes I_m) = (I_m \boxtimes I_p)(I_p \boxtimes I_m)$

สังเกตว่า $E_{ij}^{m\times n}\, E_{kl}^{p\times q} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } j\neq k \\ E_{jk5}^{m\times q} & \text{ถ้า } j=k \end{cases}$

จะได้ $(I_p \boxtimes I_m)^{\mathrm{T}}(I_p \boxtimes I_m)$

$$= \begin{bmatrix} E_{11}^{p\times m} & E_{21}^{p\times m} \cdots & E_{p1}^{p\times m} \\ E_{12}^{p\times m} & E_{22}^{p\times m} \cdots & E_{p2}^{p\times m} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ E_{1m}^{p\times m} & E_{2m}^{p\times m} \cdots & E_{pm}^{p\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^{m\times p} & E_{21}^{m\times p} \cdots & E_{m1}^{m\times p} \\ E_{12}^{m\times p} & E_{22}^{m\times p} \cdots & E_{m2} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ E_{1p}^{m\times p} & E_{2p}^{m\times p} \cdots & E_{mp}^{m\times p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{11}^{p\times p} + E_{22}^{p\times p} + \ldots + E_{pp}^{p\times p} & 0+0+\ldots+0 & 0+0+\ldots+0 \\ 0+0+\ldots+0 & E_{11}^{p\times p} + E_{22}^{p\times p} + \ldots + E_{pp}^{p\times p} \cdots & 0+0+\ldots+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0+0+\ldots+0 & 0+0+\ldots+o & E_{11}^{p\times p} + E_{22}^{p\times p} + \ldots + E_{pp}^{p\times p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_p \end{bmatrix}$$

$$= I_{pm}$$

5.4 ความสัมพันธ์กับผลคูณโครเนคเคอร์

<u>ทฤษฎีบท 5.4.1</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ จะได้ว่า

$$(A \otimes B)(I_n \boxtimes I_q) = A \boxtimes B$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \ldots a_{1n}B \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}B & \ldots a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}^{n\times q} & \ldots E_{n1}^{n\times q} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ E_{1q}^{n\times q} & \ldots \; E_{nq}^{n\times q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}BE_{11} + \cdots + a_{1n}BE_{1q} \cdots a_{11}BE_{n1} + \cdots + a_{1n}BE_{nq} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}BE_{11} + \cdots + a_{mn}BE_{1q} \cdots a_{m1}BE_{n1} + \cdots + a_{mn}BE_{nq} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (col_1(a_{11}B)\ 0 \ldots 0) + \cdots + (0 \ldots 0\ \ col_1(a_{1n}B)) \cdots (\ col_n\ (a_nB)\ 0 \ldots 0) + \cdots + (0 \ldots 0\ col_n(a_{1n}B)) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (col_1(a_{m1}B) 0 \ldots 0) + \cdots + (0 \ldots 0\ \ col_1(a_{mn}B)) \cdots (col_n\ (a_mB)\ 0 \ldots 0\ ) + \cdots + (0 \ldots 0\ col_n(a_{mn}B)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} col_1(a_{11}B) \ \cdots\ col_1(a_{1n}B) \ \cdots\ col_n\ (a_{11}B) \ \cdots col_n(a_{1n}B) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ col_1(a_{m1}B) \cdots\ col_1(a_{mn}B) \cdots\ col_n\ (a_{m1}B) \cdots col_n(a_{mn}B) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}col_1B & \cdots & a_{1n}col_1B & \cdots & a_{11}col_qB & \cdots a_{1n}col_qB \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}col_1B & \cdots & a_{mn}col_1B & \cdots & a_{m1}col_qB & \ldots a_{mn}col_qB \end{bmatrix}$$

$$= \left[A \otimes B_1 \ \cdots\ A \otimes B_q\right]$$

$$= A \boxtimes B$$

<u>ทฤษฎีบท 5.4.2</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ จะได้ว่า

$$(I_p \boxtimes I_m)(A \otimes B) = (B \boxtimes A)$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\left[(I_p \boxtimes I_m)(A \otimes B)\right]^T = (A^T \otimes B^T)\left(I_p \boxtimes I_m\right)^T$$

$$= (A^T \otimes B^T)\left(I_m \boxtimes I_p\right)$$

$$= A^T \boxtimes B^T$$

$$\left[\left[(I_p \boxtimes I_m)(A \otimes B)\right]^{T^T}\right] = [A^T \otimes B^T]^T$$

$$\left(I_p \boxtimes I_m\right)(A \otimes B) = B \boxtimes A$$

จาก $$(I_m \boxtimes I_p)(B \otimes A) = (A \boxtimes B)$$

$$(I_p \boxtimes I_m)(I_m \boxtimes I_p)(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)(A \boxtimes B)$$

$$(I_{mp})(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)(A \boxtimes B)$$

$$(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)(A \boxtimes B)$$

<u>ทฤษฎีบท 5.4.3</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ จะได้ว่า

$$(A \boxtimes B)(I_q \boxtimes I_n) = (A \otimes B)$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก $(A \otimes B)(I_n \boxtimes I_q) = A \boxtimes B$

จะได้ $(A \otimes B)(I_n \boxtimes I_q) = (A \boxtimes B)(I_q \boxtimes I_n)$

$$(A \otimes B)(I_{qn}) = (A \boxtimes B)(I_q \boxtimes I_n)$$

$$(A \otimes B) = (A \boxtimes B)(I_q \boxtimes I_n)$$

<u>ทฤษฎีบท 5.4.4</u> ให้ $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathrm{L}),\ \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{p,q}}(\mathrm{L})$

จาก $(\mathrm{I_m} \boxtimes \mathrm{I_p})(\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}) = \mathrm{A} \boxtimes \mathrm{B}$

จะได้ $(I_p \boxtimes I_m)(I_m \boxtimes I_p)(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)A \boxtimes B$

$$I_{mp}(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)(A \boxtimes B)$$

$$(B \otimes A) = (I_p \boxtimes I_m)(A \boxtimes B)$$

5.5 **ความสัมพันธ์กับเมทริกซ์ผกผัน การสลับเปลี่ยน และการคูณแบบปกติ**

<u>ทฤษฎีบท 5.5.1</u> ให้ $A \in M_m(L), B \in M_p(L)$ จะได้ว่า

$$(A \boxtimes B)^{-1} = B^{-1} \boxtimes A^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\begin{aligned}(A \boxtimes B)(B^{-1} \boxtimes A^{-1}) &= (A \otimes B)(I_m \boxtimes I_p)(B^{-1} \boxtimes A^{-1}) \\ &= (A \otimes B)(\mathrm{I_p} \boxtimes \mathrm{I_m})(I_m \boxtimes I_p)(A^{-1} \boxtimes B^{-1}) \\ &= (A \otimes B)(\mathrm{I_{mp}})(A^{-1} \boxtimes B^{-1}) \\ &= (A \otimes B)(A^{-1} \boxtimes B^{-1}) \\ &= AA^{-1} \otimes BB^{-1}\end{aligned}$$

$= I_m \otimes I_p$

$= I_{mp}$

$(B^{-1} \boxtimes A^{-1})\,(A \boxtimes B) = (I_p \boxtimes I_m)\,(A^{-1} \boxtimes B^{-1})\,(A \otimes B)\,(I_m \boxtimes I_p)$

$= (I_p \boxtimes I_m)(I_m \otimes I_p)(I_m \boxtimes I_p)$

$= (I_p \boxtimes I_m)\,(I_m \boxtimes I_p)$

<u>ทฤษฎีบท 5.5.2</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L)$ จะได้ว่า

$$(A \boxtimes B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \boxtimes A^{\mathrm{T}}$$

<u>พิสูจน์</u>

$(A \boxtimes B)^{\mathrm{T}} = ((A \otimes B)(I_m \boxtimes I_p))^{\mathrm{T}}$

$= (I_m \boxtimes I_p)^{\mathrm{T}}(A \otimes B)^{\mathrm{T}}$

$= \left(I_m \boxtimes I_p\right)^{\mathrm{T}}(A^T \otimes B^T)$

$= (I_p \boxtimes I_m)\,(A^T \otimes B^{\mathrm{T}})$

$= B^T \boxtimes A^T$

<u>ทฤษฎีบท 5.5.3</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L), C \in M_{n,r}(L), D \in M_{q,s}(L)$ จะได้ว่า

$$(A \boxtimes B)(C \boxtimes D) = (AD) \otimes (BC)$$

<u>พิสูจน์</u>

$(A \boxtimes B)(C \boxtimes D) = \left[(A \otimes B)\left(I_n \boxtimes I_q\right)\right]\left[(C \otimes D)(I_r \boxtimes I_s)\right]$

$= \left[(A \otimes B)\left(I_n \boxtimes I_q\right)(C \otimes D)\right](I_r \boxtimes I_s)$

$= (A \otimes B)(D \boxtimes C)(I_r \boxtimes I_s)$

$= (A \otimes B)(D \otimes C)$

$= AD \otimes BC$

5.6 สมบัติที่เกี่ยวกับรอยเมทริกซ์

<u>ทฤษฎีบท 5.6.1</u> ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{n,m}(L)$ จะได้ว่า

$$trace\ (A \boxtimes B) = trace(AB)$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก $$(A \boxtimes B) = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} \dots & a_{1n}b_{11} \cdots & a_{11}b_{1m} \dots & a_{1n}b_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} \dots & a_{1n}b_{n1} \cdots & a_{11}b_{nm} \dots & a_{1n}b_{nm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} \dots & a_{mn}b_{11} \cdots & a_{m1}b_{1m} \dots & a_{mn}b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{n1} \dots & a_{mn}b_{n1} \cdots & a_{m1}b_{nm} \dots & a_{mn}b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$trace(A \boxtimes B) = a_n b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} + \dots + a_{m1}b_{1m} + \dots + a_{mn}b_{nm}$$

จาก $$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} \cdots & a_{11}b_{1m} + \dots + a_{1n}b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mn}b_{n1} \cdots & a_{m1}b_{1m} + \dots + a_{mn}b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$trace(AB) = a_{11}b_n + \dots + a_{1n}b_{n1} + \dots + a_m b_{1m} + \dots + a_{mn}b_{nm}$$

ดังนั้น $trace(A \boxtimes B) = trace(AB)$

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัย

ผลคูณโอลเซน-เรนนี่-โกเอลของเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่มีสมบัติดังนี้

1. สมบัติ การกระจายเหนือการบวกทางซ้ายและทางขวา

2. ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณ

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

4. ความสัมพันธ์กับรอยของเมทริกซ์

5. สมบัติการคูณกับเมทริกซ์เอกลักษณ์

- $(A \otimes B)\left(I_n \boxtimes I_q\right) = A \boxtimes B$
- $(I_p \boxtimes I_m)(A \otimes B) = (B \boxtimes A)$
- $(A \boxtimes B)\left(I_q \boxtimes I_n\right) = (A \otimes B)$
- $\left(I_p \boxtimes I_m\right)(A \boxtimes B) = B \otimes A$

6. สมบัติผกผัน

7. สมบัติทรานสโพส

เอกสารอ้างอิง

[1] Horn, R.A. and Johnson, C.R. 1991.Topics in matrix analysis. Cambridge. The Press Syndicate of the University of Cambridge.

[2] Stan gam, R. and Chansangiam, P. 2016. “Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring.” Thai Journal of Mathematics. 14(1): 21-38

[3] Zhang, H. and Ding, F. 2013. “On the Kronecker Products and Their Applications.” Journal of Applied Mathematics. vol. 2013. Article ID 296185. 8 pages.

[4] Olsen, Steven J. Rennie, and Vaibhava Goel.2012.”Efficient Automatic Differentiation of Matrix Functions.” Lecture Notes in Computational Science and Engineering 87, DOI 10.1007/978-3-642-30023-3 7, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012