การไหลของของไหลพีซีแอลในปอดมนุษย์
โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ

FLUID FLOW OF PCL FLUID IN LUNGS HUMAN
BY ASYMPTOTIC EXPANSION

ศุภมิตร สวนเกษม

อมรัตน์ พิมโคตร

อินทุกร ธรรมธร

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

FLUID FLOW OF PCL FLUID IN LUNGS HUMAN

BY ASYMPTOTIC EXPANSION

SUPAMIT SUANKASEM

AMARAT PIMKOTE

INTUKORN THAMMATHON

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2017

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การไหลของของไหลพีซีแอลในปอดมนุษย์โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ Fluid Flow of PCL Fluid in Lungs Human by Asymptotic Expansion
ชื่อนักศึกษา	นายศุภมิตร สวนเกษม รหัสนักศึกษา 57050141 นางสาวอมรัตน์ พิมโคตร รหัสนักศึกษา 57050159 นางสาวอินทุกร ธรรมธร รหัสนักศึกษา 57050171
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ประธานกรรมการ	สิริพร
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	[illegible]

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การไหลของของไหลพีซีแอลในปอดมนุษย์โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ
ชื่อนักศึกษา	นายศุภมิตร สวนเกษม รหัสนักศึกษา 57050141
	นางสาวอมรัตน์ พิมโคตร รหัสนักศึกษา 57050159
	นางสาวอินทุกร ธรรมธร รหัสนักศึกษา 57050171
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2560
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี

บทคัดย่อ

เนื่องจากในชีวิตประจำวันมนุษย์เราต้องหายใจเข้าและออกตลอดเวลา ซึ่งในขณะที่หายใจเข้า ร่างกายอาจได้รับฝุ่นละอองเข้ามาด้วย ในขณะเดียวกันร่างกายของคนเราก็จะมีระบบที่ช่วยในการจับฝุ่นละออง โดยการสร้างเมือกขึ้นมาจับฝุ่นละอองเหล่านั้น แล้วทำการขับฝุ่นละอองออกโดยการพัดโบกของเส้นขนที่เรียงอยู่บนเนื้อเยื่อบุผิว ชั้นที่มีเส้นขนอยู่เรียกว่า ชั้นเพอร์ริซิเลียรี่เลเยอร์ (พีซีแอล) ในชั้นนี้จะมีของไหลอยู่ด้วยเรียกว่า ของไหลพีซีแอล เราต้องการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลที่อยู่ในชั้นพีซีแอลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขน โดยประยุกต์ใช้วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับกับสมการสโตกส์บริงแมน และใช้โปรแกรม MATLAB ทำการวาดกราฟเพื่อแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอลที่หาได้

คำสำคัญ : สมการสโตกส์บริงแมน การกระจายเชิงเส้นกำกับเข้าคู่

Title	Fluid Flow of PCL Fluid in Lungs Human by Asymptotic Expansion
Students	Mr.Supamit Suankasem Student ID 57050141
	Miss Amarat Pimkote Student ID 57050159
	Miss Intukorn Thammathon Student ID 57050171
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematic)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2017
Advisor	Asst.Prof.Dr.Kanognudge Wuttanachamsri

Abstract

Each day, while a human breathes in and out, some dust may get into his/her body. In the same time, the human body has an innate immune system to remove the strange particles out of the body. To expel the debris, the goblet cells lining in the epithelium of the respiratory system in the human body secrete mucus to catch the particles and then mucus resides on the tip of cilia. The body gets rid of the mucus by the movement of cilia where the layer containing cilia is named Periciliary Layer (PCL). The fluid in the PCL is called PCL fluid. In this study, we find the velocity of the PCL fluid due to the movement of cilia by applying the method of matched asymptotic expansions to the Stokes-Brinkman equation. The result may be employed to be a boundary condition of the free-fluid layer above the cilia used to calculate the bottom boundary of the mucus layer to find the velocity of mucus, which can help physicians to treat respiratory patients, and plot graph of Stokes-Brinkman equation solutions by MATLAB.

Keywords : Stokes-Brinkman Equation, Matched Asymptotic Expansion

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องการไหลของของไหลพีซีแอลในปอดมนุษย์โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ สามารถทำสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.กนกณัฏฐ์ วัฒนแจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่คอยให้คำปรึกษาและชี้แนวทางในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องและแก้ไขเกี่ยวกับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นอย่างดี

คณะผู้จัดทำจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และญาติพี่น้องทุกๆท่านที่เป็นกำลังใจสำคัญอย่างยิ่งที่ทำให้คณะผู้จัดทำทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้ต่างๆ และขอบคุณเพื่อนๆทุกคน ที่มีส่วนช่วยเหลือในด้านต่างๆเกี่ยวกับปัญหาพิเศษ อีกทั้งสอบถามความคืบหน้าของโปรเจคอยู่เสมอ

ศุภมิตร สวนเกษม
อมรัตน์ พิมโคตร
อินทุกร ธรรมธร

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.. ก

บทคัดย่อภาอังกฤษ.. ข

กิตติกรรมประกาศ.. ค

สารบัญ.. ง

สารบัญตาราง.. จ

สารบัญรูปภาพ.. ฉ

บทที่ 1 บทนำ.. 1

1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ.. 1

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ.. 2

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ.. 2

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ.. 2

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้.. 2

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน.. 3

บทที่ 2 แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง.. 4

2.1 กลศาสตร์ของของไหล.. 4

2.1.1 นิยามของของไหล.. 4

2.1.2 ความหนาแน่น.. 5

2.1.3 ความดัน.. 5

2.1.4 การจำแนกประเภทของการไหล.. 5

2.1.5 ความสามารถในการบีบอัดตัวของไหล.. 7

2.1.6 กฎการอนุรักษ์มวล.. 7

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 2 แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

2.1.7 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม 7

2.2 ความเร็วเชิงมุม 8

2.2.1 การหมุน ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม 8

2.3 วิธีการไร้มิติ 10

2.4 การกระจายเชิงเส้นกำกับ 11

บทที่ 3 วิธีการไร้มิติของสมการสโตกส์บริงแมน 24

วิธีการไร้มิติของสมการสโตกส์บริงแมน 24

บทที่ 4 วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับของสมการสโตกส์บริงแมน 28

สมการบริงแมน 28

กรณีที่ 1 $\varepsilon \ll 1$ 28

กรณีที่ 2 $\varepsilon \gg 1$ 33

วิธีที่ 1 34

วิธีที่ 1.1 (เทอมที่ 1 = เทอมที่ 3) 35

วิธีที่ 1.2 (เทอมที่ 1 = เทอมที่ 2) 44

วิธีที่ 2 51

สมการสโตกส์ 56

กราฟของสมการบริงแมน 60

กราฟของสมการสโตกส์ 67

กราฟของสมการสโตกส์บริงแมน 69

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.. 70

สรุปผล.. 70

ข้อเสนอแนะ.. 70

เอกสารอ้างอิง.. 71

สารบัญตาราง

ตารางที่ | หน้า

1.1 ตารางแสดงระยะเวลาแผนการดำเนินการ........ 3

2.1 ตารางแสดงตัวแปร พารามิเตอร์ และมิติของตัวแปรและพารามิเตอร์เหล่านั้น........ 10

3.1 ตัวแปรพารามิเตอร์........ 25

4.1 ค่าของตัวแปร........ 58

4.2 ค่าของ $a_1, a_2, ..., a_8 \times 10^5$ 58

4.3 ตัวแปรที่ใช้สำหรับทุกมุม θ 58

4.4 ค่าของ ε 59

4.5 ค่าของตัวแปรในสมการสโตกส์........ 67

4.6 ค่าของตัวแปรที่ใช้สำหรับทุกมุม θ ในสมการสโตกส์........ 68

สารบัญรูปภาพ

รูปที่ หน้า

1.1 ระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ 1
1.2 หลอดลมที่ตัดตามขวาง 1
1.3 ส่วนหนึ่งของหลอดลม 1
2.1 ความแตกต่างระหว่างของเหลวกับก๊าซ 4
2.2 ลักษณะของความดันที่กระทำบนพื้นที่ 5
2.3 ความแตกต่างระหว่างของไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้กับของไหลที่บีบอัดตัวได้ 7
2.4 การหมุนของแท่งวัตถุรอบแกนมุม zz' 8
2.5 การหมุนหนังสือ 90 องศาสองครั้งที่ไม่เหมือนกัน 8
2.6 แผ่นกลมในระนาบ xy หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω 9
2.7 ผลเฉลยจริง ผลเฉลยอันดับศูนย์ และผลเฉลยอันดับหนึ่งเมื่อ $\alpha = 0, \beta = 2$ 17
2.8 แสดงให้เห็นผลเฉลยอันดับศูนย์และผลเฉลยจริงเมื่อ ค่า $\varepsilon = 0.05$ 23
3.1 แสดงขอบเขตของเงื่อนไขของปัญหา 25
4.1 กราฟแสดงความเร็วของเส้นขนที่มุม $50^\circ - 90^\circ$ 59
4.2 กราฟแสดงความเร็วของของไหล (วิธีที่ 1.1) 60
4.3 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 0$ 60
4.4 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 0.5$ 61
4.5 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 1$ 61
4.6 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 10$ 62
4.7 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 50$ 62
4.8 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{12} = 100$ 63
4.9 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 0$ 63

สารบัญรูปภาพ (ต่อ)

รูปที่ หน้า

4.10 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 0.5$ 64

4.11 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 1$ 64

4.12 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 10$ 65

4.13 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 50$ 65

4.14 กราฟแสดงความเร็วของของไหล โดยที่ $k_{14} = 100$ 66

4.15 กราฟแสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหล โดยที่ $k_{12} = 1$ 66

4.16 กราฟแสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหล โดยที่ $k_{12} = 100$ 67

4.17 กราฟแสดงความเร็วในบริเวณชั้นของสมการสโตกส์.......... 68

4.18 กราฟแสดงแนวโน้มของค่า c ในสมการสโตกส์.......... 69

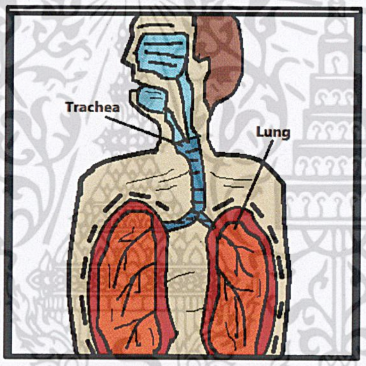
4.19 กราฟแสดงความเร็วในบริเวณชั้นของสมการสโตกส์บริงแมน.......... 69

บทที่ 1
บทนำ

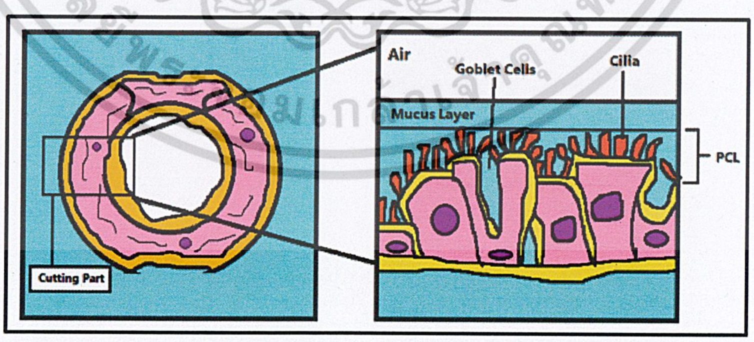
1.1 ความสำคัญของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากในชีวิตประจำวันมนุษย์เราต้องหายใจเข้าและออกตลอดเวลา ซึ่งในขณะที่หายใจเข้าร่างกายอาจได้รับสิ่งสกปรกอย่างฝุ่นละอองเข้ามาด้วย ในร่างกายของคนเราก็จะมีระบบที่ช่วยในการจับฝุ่นละอองนั้น ระบบนี้เรียกว่า ระบบภูมิคุ้มกันที่มีมาแต่กำเนิด (Innate Immune System) เป็นระบบภูมิคุ้มกัน ที่จะสร้างเมือกขึ้นมาจับฝุ่นละอองเหล่านั้นแล้วทำการขับฝุ่นละอองออกโดยการพัดโบกของเส้นขน

รูปที่ 1.1 แสดงระบบทางเดินหายใจของมนุษย์ จากนั้นตัดตามขวางของหลอดลมแสดงดังรูปที่ 1.2 เมื่อทำการตัดส่วนของหลอดลมจะได้ดังรูปที่ 1.3 ซึ่งชั้นที่มีเส้นขนเส้นเล็ก ๆ อยู่เรียกว่า ชั้นเพอร์ริซิเลียรี่เลเยอร์ (Periciliary Layer (PCL)) ที่ช่วยในการพัดเมือกออกจากร่างกาย และในชั้นพีซีแอล (PCL) นี้ จะมีของเหลวอยู่ซึ่งมีความหนืดคล้ายน้ำเรียกว่า ของไหลพีซีแอล ในปัญหาพิเศษนี้ต้องการหาความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion)



รูปที่ 1.1 ระบบทางเดินหายใจของมนุษย์



รูปที่ 1.2 หลอดลมที่ตัดตามขวาง รูปที่ 1.3 ส่วนหนึ่งของหลอดลม

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

เพื่อคำนวณหาความเร็วของของไหลพีซีแอล (PCL) อันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนเพื่อกำจัดสิ่งแปลกปลอมออกจากร่างกายของมนุษย์

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาปัญหาบนโดเมน 1 มิติ
2) ของไหลเป็นของไหลแบบอัดไม่ได้
3) ความพรุน (porousity) เป็นค่าคงที่
4) ความดันมีค่าคงที่ในแนวนอนหรือไม่เปลี่ยนแปลงในแนวแกน x

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานของปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมเนื้อหาเรื่องการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion)
2) ศึกษาวิธีการไร้มิติ (dimensionless method) และประยุกต์ใช้วิธีการไร้มิติกับสมการสโตกส์บริงแมน (Stokes-Brinkman Equations)
3) ประยุกต์ใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion) กับสมการสโตกส์บริงแมน (Stokes-Brinkman Equations)
4) ศึกษาโปรแกรม MATLAB เพื่อใช้ในการสร้างกราฟ (plot graph) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
5) ออกแบบรายงาน และรูปแบบรายงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้ความรู้เกี่ยวกับวิธีการไร้มิติ (dimensionless method) และการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion)
2) ได้รับความรู้เกี่ยวกับรูปแบบคำสั่งต่างๆและวิธีการใช้โปรแกรม MATLAB ขั้นสูง

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงระยะเวลาแผนการดำเนิน

กิจกรรม	ระยะเวลาการดำเนินการ										
	ปี 2560						ปี 2561				
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1) ศึกษาค้นคว้าวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ											
2) ศึกษาค้นคว้าเรื่องวิธีการไร้มิติ											
3) ศึกษาค้นคว้าเรื่องสมการสโตกส์บริงแมน และเงื่อนไขขอบ (Boudary condition)											
4) ศึกษาโปรแกรม MATLAB											
5) ใช้โปรแกรม MATLAB ในการเขียนกราฟ											
6) จัดทำรูปเล่มและเสนอผลงาน											

บทที่ 2
แนวคิดทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราจะแนะนำถึงนิยามของของไหล ความหนาแน่น การจำแนกประเภทของของไหล กฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม วิธีการไร้มิติและการกระจายเชิงเส้นกำกับ

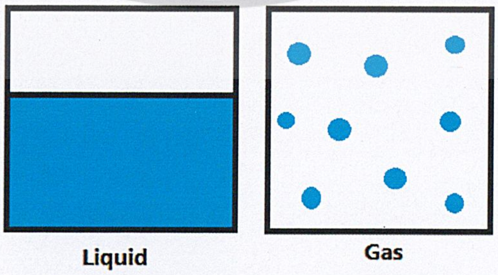
2.1 กลศาสตร์ของของไหล

2.1.1 นิยามของของไหล

ของไหล (Fluid) หมายถึง สสารที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้อย่างต่อเนื่อง เมื่อถูกกระทำด้วยแรงเค้นเฉือน (shearing stress) ซึ่งนั่นหมายความว่า เมื่อใดที่แรงเค้นเฉือนมากระทำของไหลจะเกิดการขยับตัวและเปลี่ยนรูปร่างไป เช่น เมื่อเทของไหลลงในภาชนะ ของไหลจะเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างต่อเนื่องไปชั่วขณะหนึ่ง เป็นเพราะรูปร่างของของไหลในขณะนั้นไม่สอดคล้องกับรูปร่างของภาชนะ จึงทำให้เกิดแรงเค้นเฉือนขึ้นภายในของเหลว กระบวนการปรับตัวนี้จะดำเนินต่อเนื่องไปจนกระทั่งแรงเค้นเฉือนหายไป ซึ่งก็คือสภาวะที่ของไหลมีรูปร่างเหมือนกับภาชนะบริเวณผิวสัมผัสระหว่างของไหลกับภาชนะจะมีแต่แรงเค้นตั้งฉากเท่านั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ในขณะที่ของไหลเคลื่อนที่จะต้องมีแรงเค้นเฉือนเกิดขึ้นในทางตรงกันข้าม หากของไหลไม่มีการเคลื่อนที่สภาวะนั้นจะไม่มีแรงเค้นเฉือนกระทำอยู่เลย ของไหลสามารถคงรูปอยู่ได้ในสองสถานะนั่นคือ ของเหลว และก๊าซ

ของเหลว (Liquid) มีรูปร่างไม่แน่นอนเปลี่ยนแปลงได้ ตามภาชนะที่บรรจุ แต่จะมีขอบเขตแบ่งระหว่างตัวมันเองกับของไหลอื่นอย่างชัดเจนเรียกว่า “ผิวอิสระ” (Free surface) ตัวอย่างเช่นถ้านำของเหลวที่บรรจุอยู่ในภาชนะแล้วตั้งไว้บนโลก ของเหลวชนิดนั้นจะมีผิวอิสระที่แบ่งระหว่างตัวมันเองกับอากาศ และผิวอิสระนั้นจะวางตัวในแนวราบเสมอ นอกจากนี้ของเหลวยังมีคุณสมบัติที่ยากต่อการบีบอัด เนื่องจากระยะห่างระหว่างโมเลกุลค่อนข้างน้อย (มากกว่าของแข็ง แต่น้อยกว่า ก๊าซ)

ก๊าซ (Gas) มีรูปร่างไม่แน่นอนเปลี่ยนแปลงได้ตามภาชนะที่บรรจุโดยมี ลักษณะแพร่กระจายไปทั่วภาชนะไม่มีผิวอิสระ และถูกบีบอัดได้ง่ายกว่าของเหลว เนื่องจากมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่าของเหลว



รูปที่ 2.1 ความแตกต่างระหว่างของเหลวกับก๊าซ

2.1.2 ความหนาแน่น (Density or Mass Density)

ความหนาแน่น หมายถึง มวลของของไหล (mass) ในหนึ่งหน่วยปริมาตร (Volume) สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคือ “ ρ ” (อ่านว่า โร-rho)

$$\rho = \frac{Mass}{Volume} = \frac{m}{V} \text{ หน่วยของความหนาแน่นคือ } M/L^3 \tag{2.1}$$

ความหนาแน่นของของไหลจะไม่คงที่โดยจะเปลี่ยนแปลงไปตามอุณหภูมิและความดัน เช่นที่อุณหภูมิ $4^{\circ}c$ ความดัน 1 บรรยากาศ น้ำในสถานะของเหลวจะมีความหนาแน่นเท่ากับ $1{,}000$ กก./ลบ.ม. ซึ่งเป็นสภาวะที่น้ำมีความหนาแน่นมากที่สุดเมื่อเทียบกับที่อุณหภูมิและความดันอื่น

2.1.3 ความดัน (Pressure)

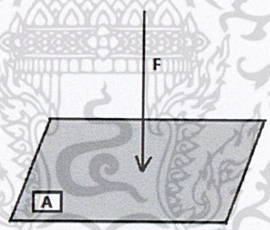
ความดัน หมายถึง แรงที่กระทำในหนึ่งหน่วยพื้นที่ (หน่วย คือ FL^{-2} หรือ $ML^{-1}T^{-2}$) เมื่อ F คือแรง (force) L คือความยาว (length) และ T คือเวลา (Time) ดังนั้นถ้า dF คือแรงที่กระทำบนพื้นที่เล็กๆ dA บนพื้นที่ A ความดันจะมีค่าเป็น

$$P = \frac{dF}{dA} \tag{2.2}$$

แต่ถ้าความดันที่กระทำมีค่าสม่ำเสมอเท่ากันทั้งพื้นที่ A ความดันจะมีค่าเป็น

$$P = \frac{F}{A} \tag{2.3}$$

หน่วยของความดันในระบบ SI คือ นิวตัน/ตารางเมตร $\left(N/m^2\right)$



รูปที่ 2.2 ลักษณะของความดันที่กระทำบนพื้นที่

2.1.4 การจำแนกประเภทของการไหล (Flow classification)

เนื่องจากคุณสมบัติหลายประการของของไหลสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ตามสภาพแวดล้อม (เช่น อุณหภูมิ ความดัน เป็นต้น) และเวลา ในสภาพปัญหาหนึ่งๆ ถึงแม้การไหลจะเกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่พฤติกรรมของการไหลอาจไม่เหมือนกัน ดังนั้นการวิเคราะห์ จึงจำเป็นต้องคำนึงถึงสมมติฐานที่สอดคล้องกับสภาพปัญหานั้น ๆ จากพฤติกรรมการไหลที่แตกต่างกันนี้เราสามารถแบ่งประเภทของการไหลโดยพิจารณาได้จากหลายหลักเกณฑ์ แต่ในเรื่องนี้จะกล่าวถึงการแบ่งประเภทการไหลโดยพิจารณาใน 5 หลักเกณฑ์ ดังนี้

- ของไหลจริง และของไหลอุดมคติ (Real Fluid and Ideal Fluid)

ในสนามการไหลของของไหลจริง (Real Fluid) จะมีผลกระทบจากความหนืด ซึ่งจะทำให้เกิดแรงเค้นเฉือนขึ้นระหว่างอนุภาคของของไหลเมื่ออนุภาคของไหลมีความเร็วแตกต่างกัน ส่วนของไหลอุดมคติ (Ideal Fluid) เป็นการไหลที่สมมติให้ของไหลไม่มีผลกระทบเนื่องจากความหนืด (การ

ไหลที่ไม่เกิดขึ้นจริง) ดังนั้นในสนามการไหลจะไม่เกิดแรงเค้นเฉือนระหว่างอนุภาคของของไหล และความเร็วของอนุภาคของไหลจะเท่ากัน เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์โดยส่วนมากเมื่อกล่าวถึงการไหลจะหมายถึงการไหลอุดมคติที่ไม่มีผลกระทบเนื่องจากความหนืด และความเร็วคงที่ในบริเวณที่พิจารณา

- พิจารณาจากคุณสมบัติในการบีบอัดของของไหล (Compressibility)

หากของไหลอัดตัวได้ (Compressible Fluid) เคลื่อนที่ในสนามการไหลเมื่อความดันเปลี่ยนแปลงไปปริมาตรของของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลง การวิเคราะห์อัตราการไหลจึงมี ความซับซ้อนมากขึ้น ในทางตรงกันข้ามหากของไหลอัดตัวไม่ได้ (Incompressible Fluid) เคลื่อนที่ในสนามการไหล ของไหลจะมีปริมาตรคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของความดัน ในการวิเคราะห์อัตราการไหลจะมีความซับซ้อนน้องลง โดยส่วนมากของไหลมีสถานะเป็นของเหลวจะถือว่าของไหลนั้นเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้

- พิจารณาจากการเปรียบเทียบกับเวลา

เมื่อพิจารณาที่จุดใดจุดหนึ่งในสนามการไหล หากในช่วงเวลาที่วิเคราะห์ค่าของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะถือว่าการไหลนั้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา หรือที่เราเรียกว่า การไหลสม่ำเสมอ (Steady Flow) ในทางตรงกันข้าม หากในช่วงเวลาที่วิเคราะห์ค่าของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องมีการเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดจะถือว่า การไหลนั้นแปรเปลี่ยนตามเวลา หรือที่เราเรียกว่า การไหลไม่สม่ำเสมอ (Unsteady Flow)

- พิจารณาจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล

หากพิจารณาจากเส้นทางการเคลื่อนตัวของอนุภาคของไหลในสนามการไหล เราสามารถแบ่งประเภทการไหลได้เป็น 2 ลักษณะคือ

- การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) อนุภาคของของไหลจะเคลื่อนที่อย่างเป็นระเบียบ ไปตามเส้นทางที่แน่นอน (เคลื่อนที่ไปตาม Streamline) สภาพการไหลไม่มีความปั่นป่วน การไหลประเภทนี้มักจะเกิดกับการไหลของของไหลที่มีความหนืดสูง หรือการไหลที่มีความเร็วต่ำมากๆ

- การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) อนุภาคของของไหลที่เคลื่อนที่อย่างไม่เป็นระเบียบอนุภาคของของไหลมีเส้นทางการเคลื่อนที่ไม่แน่นอน สภาพการไหลในสนามการไหลมีความปั่นป่วนการไหลประเภทนี้มักเกิดกับของไหลที่มีความหนืดต่ำ หรือการไหลที่มีความเร็วสูง

- พิจารณาจากลักษณะการเคลื่อนตัวของอนุภาคของไหล

หากพิจารณาจากลักษณะของการเคลื่อนตัวของอนุภาคของของไหล สามารถแบ่งได้ 2 ลักษณะคือ

- การไหลแบบหมุน (Rotational Flow) คือการไหลที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ไปพร้อมกับการหมุน

- การไหลแบบไม่หมุน (Irrotational Flow) คือการไหลที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ไปแต่ไม่มีการหมุน

โดยส่วนมากในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลจะสมมติให้การไหลเป็นแบบไม่หมุน (Irrotational Flow)

2.1.5 ความสามารถในการบีบอัดตัวของไหล (Compressibility)

ในสภาพความเป็นจริงสสารทุกชนิดจะมีความยืนหยุ่น นั่นหมายความว่าสสารสามารถขยายตัว หรือหดตัวภายใต้สภาวะที่แตกต่างกัน ซึ่งในของไหลเมื่อถูกบีบอัด (มีการเปลี่ยนแปลงความดัน) ปริมาตรของไหลจะเปลี่ยนแปลงไป ส่งผลให้ความหนาแน่นเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ความสามารถในการเปลี่ยนแปลงปริมาตรนี้ถูกเรียกว่า สามารถในการบีบอัดตัว ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของของไหลแต่ละชนิด โดยจะเปรียบได้กับความยืดหยุ่นในของแข็ง (Modulus) แต่ในของเหลวนั้นค่าความยืดหยุ่น (ความสามารถในการบีบอัดตัว) จะอยู่ในรูปของค่า "Bulk Modulus" (k) โดยหาได้จาก

$$k = \frac{-dp}{dV/V} \tag{2.4}$$

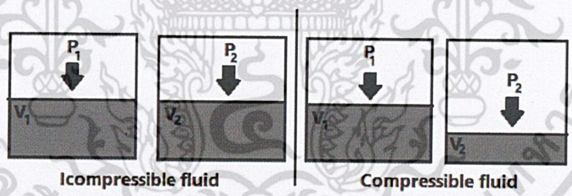
เมื่อ dp = การเปลี่ยนแปลงความดัน

dV = การเปลี่ยนแปลงปริมาตร

V = ปริมาตร

ในกลศาสตร์ของของไหล หากพิจารณาความสามารถในการบีบอัดตัวของของไหล เราจะสามารถจำแนกของไหลออกเป็น 2 ประเภทคือ

- ของไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ หรือบีบอัดตัวได้น้อยมาก (Incompressible fluid) เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของความดัน ความหนาแน่นของของไหลประเภทนี้จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากจนสามารถละทิ้งได้ ของไหลประเภทนี้ส่วนใหญ่อยู่ในสถานะของเหลว
- ของไหลที่บีบอัดตัวได้ (Compressible fluid) คือของไหลที่มีความหนาแน่นไม่คงที่เมื่อความดันเปลี่ยนแปลงไป ของไหลประเภทนี้ส่วนใหญ่อยู่ในสถานะก๊าซ



รูปที่ 2.3 ความแตกต่างระหว่างของไหลที่บีบอัดตัวไม่ได้ กับของไหลที่บีบอัดตัวได้

2.1.6 กฎการอนุรักษ์มวล (Conservation Laws of mass)

ระบุว่าสำหรับระบบปิดใด ๆ การโอนทั้งหมดของสสารและพลังงาน (ซึ่งทั้งสองมีมวล) มวลของระบบต้องคงที่เมื่อเวลาผ่านไปเป็นมวลระบบไม่สามารถเปลี่ยนแปลงปริมาณหากยังไม่ได้เพิ่มหรือลบออก ดังนั้นปริมาณของมวลคือ "การอนุรักษ์" กล่าวคือ มวลรวมของสารตั้งต้นหรือวัสดุเริ่มต้นจะต้องเท่ากับมวลรวมของผลิตภัณฑ์

2.1.7 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation laws of momentum)

โมเมนตัมมีสมบัติพิเศษนั่นก็คือจะถูกอนุรักษ์อยู่เสมอ (ไม่เพิ่มขึ้น และในขณะเดียวกันก็ไม่ลดหายไป) แม้แต่ในการชน พลังงานจลน์นั้นจะไม่ถูกอนุรักษ์ในการชน ถ้าการชนนั้นเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น

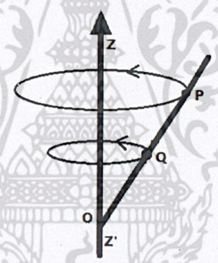
เนื่องจากการคงตัวของของโมเมนตัมที่กล่าวมาแล้ว จึงทำให้สามารถนำไปคำนวณความเร็วที่ไม่ทราบค่าภายหลังการชนได้

กล่าวคือการชนกันของสองอนุภาค โดยผลรวมของโมเมนตัมก่อนการชนจะต้องเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมหลังการชนเสมอ

2.2 ความเร็วเชิงมุม (Angular velocity)

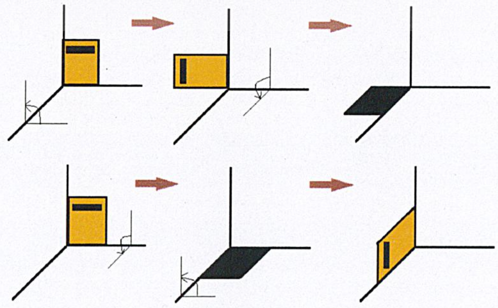
2.2.1 การหมุน ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม

การหมุน เช่นการหมุนของแท่งวัตถุรอบแกนหมุนแกนหนึ่ง หมายถึง ส่วนต่างๆ ของแท่งวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกนหมุน โดยมีระยะห่างจากแกนหมุนเท่าเดิม เช่นการเคลื่อนที่ของจุด P และ Q บนแท่งที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมไปรอบแกนหมุนและครบรอบพร้อมกันหากการหมุนเป็นไปอย่างสม่ำเสมอและ T เป็นเวลาครบรอบอัตราเร็วเชิงมุมของการหมุน คือ $\omega = 2\pi / T$ โดยปกติหน่วยของ ω คือ เรเดียนต่อวินาที (rad/s) สังเกตได้ว่าจุด O ซึ่งอยู่บนแกนหมุนจะไม่เคลื่อนที่ ω เป็นขนาดของปริมาณเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุม หลักสากลนิยมถือว่า ทิศของแกนหมุนที่เป็นไปตามกฎไขควงมือขวา เป็นทิศของ ω นั่นคือ เมื่อกำมือขวาให้นิ้วชี้ถึงนิ้วก้อยโค้งไปตามการหมุน หัวแม่มือที่ตั้งขึ้นจะชี้ไปทางทิศของความเร็วเชิงมุม ซึ่งในรูปเป็นทิศจาก Z' ไปทาง Z



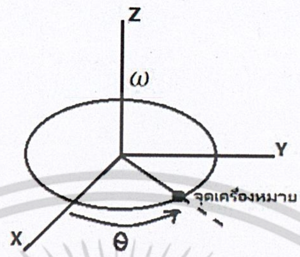
รูปที่ 2.4 การหมุนของแท่งวัตถุรอบแกนหมุน ZZ'

สำหรับมุมทั้งหมดของการหมุนที่มีค่าหนึ่งๆ มีปัญหาที่จะนับว่าเป็นปริมาณเวกเตอร์ เนื่องจากว่าการหมุนสองครั้งรอบสองแกนเมื่อสลับลำดับกันจะได้ผลไม่เหมือนกัน เช่น การหมุนหนังสือรอบแกน x ไป 90° แล้วตามด้วยการหมุนรอบแกน y ไป 90° ได้ผลไม่เหมือนการหมุนรอบแกน y ก่อนแล้วตามด้วยการหมุนรอบแกน x ดังรูป 2.5 แสดงว่าการหมุนสองครั้งไม่เป็นไปตามหลักของการบวกเวกเตอร์ซึ่งควรสลับลำดับกันได้



รูปที่ 2.5 การหมุนหนังสือ 90° สองครั้งที่ไม่เหมือนกัน

อย่างไรก็ตาม หากเราจะจำกัดการหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งที่แน่นอน คือไม่เปลี่ยนทิศของแกนหมุนในช่วงแรกของการศึกษานี้ (ในทำนองเดียวกับการศึกษาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงก่อน) เช่น การหมุนรอบแกน Z ซึ่งคงที่ ดังเช่นการหมุนของแผ่นกลมบางรอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางดังรูป 2.6 ซึ่งก็คือการหมุนของทรงกระบอกตันบางรอบแกนของทรงกระบอกเอง (body axis ของทรงกระบอก)



รูปที่ 2.6 แผ่นกลมในระนาบ xy หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งดังรูป 2.6 วางในระนาบ xy หมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบที่จุดศูนย์กลาง (หมุนรอบแกน z) ด้วยความเร็วเชิงมุม ω เช่น $\omega = 0.5$ เรเดียนต่อวินาที หมายถึงมุมที่จุดเครื่องหมายที่เคลื่อนที่ไปจากแกน x ในการหมุนเป็นมุม 0.5 เรเดียนในเวลาหนึ่งวินาที ค่าความเร็วเชิงมุมในที่นี้จึงอาจหมายถึง ค่าความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา โดยที่

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.5}$$

เมื่อ ω เป็นความเร็วเชิงมุมของวัตถุที่หมุนรอบแกนหมุนมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที (rad/s) $\Delta\theta$ เป็นที่วัตถุกวาดไปในช่วงเวลา Δt ปกติมีหน่วยเป็นเรเดียนในการเคลื่อนที่แบบหมุนของวัตถุโดยทั่วไปแกนหมุนอาจเปลี่ยนทิศได้ และมีปัญหาในการที่จะนับว่ามุม $\Delta\theta$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ดังได้กล่าวมาแล้ว แต่การหมุนโดยไม่มีการเปลี่ยนทิศของแกนหมุน $\Delta\theta$ เป็นปริมาณเพิ่มหรือลดและไม่มีปัญหาที่จะนับเป็นเวกเตอร์ ซึ่งอาจเรียกว่า การกระจัดเชิงมุม ทิศของการกระจัดหาได้จากการใช้กฎไขควงมือขวาเช่นเดียวกับทิศของ ω อย่างไรก็ตามไม่นิยมเขียนเครื่องหมายเวกเตอร์เหนือค่ามุมใช้เพียงค่าบวกและลบแสดงทิศคล้ายการเคลื่อนที่บนเส้นตรง ความเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งคือ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.6}$$

ในการหมุนของวัตถุดังกล่าว วัตถุอาจจะหมุนโดยมีความเร็วเชิงมุมไม่คงตัว กล่าวได้ว่ามีความเร่งเชิงมุม (α) ซึ่งหมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุม ดังสมการ

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{2.7}$$

และความเร่งเชิงมุมขณะใดหนึ่งคือ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.8}$$

ถ้าการหมุนของวัตถุมีความเร็วเชิงมุมต้นที่เวลา $t=0$ เป็น ω_0 ที่เวลา T ใดๆ มี $\Delta t = t-0 = t$ มีความเร็วเชิงมุมเป็น ω ในช่วงเวลานั้นความเร่งเชิงมุมคงที่เท่ากับ α จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบหมุน เมื่อพิจารณาขนาดของปริมาณต่าง ๆ จะได้

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \tag{2.9}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{2.10}$$

เมื่อพิจารณาการกระจัดเชิงมุม โดยใช้ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย

$$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \tag{2.11}$$

เมื่อนำ t จาก (2.9) แทนใน (2.11) จะได้

$$\theta = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}\frac{(\omega - \omega_0)}{\alpha}$$

$$= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \tag{2.12}$$

เมื่อนำ t จาก (2.10) แทนใน (2.12) จะได้

$$\theta = \frac{\omega_0 + (\omega_0 + \alpha t)t}{2}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{2.13}$$

2.3 วิธีการไร้มิติ (dimensionless method)

วิธีการไร้มิติเป็นวิธีการเปลี่ยนหน่วยของตัวแปรต่าง ๆ ให้มีหน่วยเป็น 1 ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นแบบจำลองจำนวนประชากรของหนอน (spruce budworm) [5] ซึ่งมีสมการเป็นดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - \frac{BP^2}{A^2 + P^2} \tag{2.14}$$

โดยที่ $P(0) = P_D$ โดยที่ t แทนเวลา และ P แทนจำนวนประชากรของหนอน

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงตัวแปร พารามิเตอร์ และมิติของตัวแปรและพารามิเตอร์เหล่านั้น

ตัวแปร	มิติ	พารามิเตอร์	มิติ
t	τ	k	$1/\tau$
P	ρ	N	ρ
		A	ρ
		B	ρ/τ
		P_D	ρ

จากนั้นสร้างตัวแปรใหม่ โดยกำหนดให้

$$u=\frac{P}{A},s=\frac{Bt}{A}$$

ใช้กฎลูกโซ่แบ่งสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{du}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=A\frac{du}{ds}\cdot\frac{B}{A}=B\frac{du}{ds}$$

จากพจน์ $kP\left(1-\frac{P}{N}\right)$ จะได้เป็น $kAu\left(1-\frac{Au}{N}\right)$ และพจน์ $\frac{BP^2}{A^2+P^2}$ จะได้เป็น $\frac{Bu^2}{1+u^2}$

ดังนั้นจากสมการ (2.14) จะได้เป็น

$$B\frac{du}{ds}=kAu\left(1-\frac{Au}{N}\right)-\frac{Bu^2}{1+u^2}$$

นำ B หารตลอด

$$\frac{du}{ds}=\frac{kA}{B}u\left(1-\frac{u}{N/A}\right)-\frac{u^2}{1+u^2} \tag{2.15}$$

จากสมการ (2.15) ทำให้ได้พารามิเตอร์ใหม่ที่มีหน่วยเป็น 1 นั่นคือ

$$u\,,s\,,a=\frac{kA}{B},\;b=\frac{N}{A}$$

สมการ (2.15) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{du}{ds}=\alpha u\left(1-\frac{u}{\beta}\right)-\frac{u^2}{1+u^2} \tag{2.16}$$

ซึ่งเป็นสมการที่ตัวแปรทุกตัวมีหน่วยเป็น 1 วิธีการนี้เรียกว่า วิธีการไร้มิติ

2.4 การกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion)

ในหัวข้อนี้เราจะอธิบายถึงวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งที่นิยมนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อสมการนั้นมีตัวแปรที่ถูกรบกวนอยู่ โดยจะยกตัวอย่างเพื่อให้เห็นภาพที่ชัดเจนดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 1</u> พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ [3]

$$\frac{dy}{dx}+\varepsilon y=0 \quad ;y(0)=1\,;\varepsilon\ll 1 \tag{2.17}$$

จากการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion) สมมติว่าผลเฉลยสามารถกระจายได้ดังนี้

$$y=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots \tag{2.18}$$

แทน (2.18) ใน (2.17) จะได้ว่า

$$\left[\frac{dy_0}{dx}+\varepsilon\frac{dy_1}{dx}+\varepsilon^2\frac{dy_2}{dx}+\ldots\right]+\varepsilon\left[y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots\right]=0$$

$$\frac{dy_0}{dx}+\varepsilon\frac{dy_1}{dx}+\varepsilon^2\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\varepsilon y_0+\varepsilon^2 y_1+\varepsilon^3 y_2+\ldots=0$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\varepsilon^0; \frac{dy_0}{dx} = 0 \quad (2.19)$$

$$\varepsilon^1; \frac{dy_1}{dx} + y_0 = 0 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^2; \frac{dy_2}{dx} + y_1 = 0 \quad (2.21)$$

จาก (2.19) จะได้ว่า

$$y_0 = K_0 \quad (2.22)$$

โดยที่ K_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

แทน (2.22) ใน (2.20) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{dy_1}{dx} + K_0 = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -K_0$$

$$y_1 = -K_0 x + K_1 \quad (2.23)$$

โดยที่ K_1 เป็นค่าคงที่ใดๆ

แทน (2.23) ใน (2.21) จะได้ว่า

$$\frac{dy_2}{dx} - K_0 x + K_1 = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} = K_0 x - K_1$$

$$y_2 = \frac{K_0 x^2}{2} - K_1 x + K_2 \quad (2.24)$$

โดยที่ K_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ

จากเงื่อนไข $y(0) = 1$ แทนลงใน (2.18)

$$1 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \ldots$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนั้น

$$y_0(0) = 1 \quad (2.25)$$

$$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=\ldots=0 \tag{2.26}$$

แทน (2.25) ใน (2.22) ทำให้ได้ว่า

$$K_0=1 \tag{2.27}$$

แทน (2.26) ใน (2.23) , (2.24) จะได้ว่า

$$K_1=0\ ,K_2=0 \tag{2.28}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.17) คือ

$$y(x)=1+\varepsilon(-x)+\varepsilon^2\left(\frac{x^2}{2}\right)+\ldots$$

$$y(x)=1-\varepsilon x+\varepsilon^2\frac{x^2}{2}+\ldots \tag{2.29}$$

ต่อไปเราจะแสดงถึงตัวอย่างที่ไม่สามารถใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบข้างต้นได้ เช่น สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์ข้างหน้าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับสองเป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าเป็นจำนวนบวกที่น้อยมาก

<u>ตัวอย่าง 2</u> สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง [3]

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y\ =\ 0\quad;\varepsilon\ll 1 \tag{2.30}$$

เงื่อนไข

$$x=0\ \ ;y=\alpha \tag{2.31a}$$

$$x=1\ \ ;\ y=\beta \tag{2.31b}$$

และเมื่อใช้วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion) ได้ดังนี้

$$y(x\ ;\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots \tag{2.32}$$

นำสมการ (2.32) แทนลงในสมการ (2.30) ทำให้ได้ว่า

$$\varepsilon\left(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots\right)''+\left(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots\right)'+\left(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots\right)=0\ ;\varepsilon\ll 1$$

$$\varepsilon\, y_0''(x)+\varepsilon^2 y_1''(x)+\ldots+y_0'(x)+\varepsilon y_1'(x)+\ldots+y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots=0\ ;\varepsilon\ll 1$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของ ε

$$\varepsilon^0;y_0'(x)+y_0(x)=0 \tag{2.33}$$

$$\varepsilon^1;y_0''(x)+y_1'(x)+y_1(x)=0 \tag{2.34}$$

$$\varepsilon^2; y_1''(x)=0 \tag{2.35}$$

สมการ (2.33) คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งอันดับน้อยกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (2.30) อยู่ 1 ดังนั้นต้องมี 1 เงื่อนไขที่ถูกตัดทิ้ง สมมติให้เงื่อนไขขอบเขตที่ $x=0$ ถูกตัดทิ้ง ผลเฉลยที่ได้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(1)=\beta$ คือ

จาก (2.33) แก้สมการหา y_0 (โดยใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงอนุพันธ์สามัญ) ได้ดังนี้

จาก $$y'_0+y_0=0$$

สมการช่วย คือ $$r+1=0$$

$$r=-1$$

ผลเฉลยคือ $$y_0=c_0e^{-x}$$

โดยที่ c_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

ต้องหา c_0 โดยใช้เงื่อนไข (2.31b) นั่นคือ $y=\beta$ ที่ $x=1$

จะได้ $$y_0(1)=\beta$$

แทนในผลเฉลย $$y_0=c_0e^{-x}$$

$$\beta=c_0e^{-x}$$

$$\beta=\frac{c_0}{e}$$

จะได้ $$c_0=\beta e$$

แทน c_0 ในผลเฉลย $$y_0=\beta ee^{-x}$$

จะได้ $$y_0=\beta e^{1-x} \tag{a}$$

แทน (a) ในสมการ (2.34) และหาค่า y_1 เมื่อค่าขอบ คือ $y_1(1)=0, y_2(1)=0$ ดังนี้

จาก (2.34) $$\frac{dy_1}{dx}+y_1=-\frac{d^2y_0}{dx^2}$$

ดังนั้น $$y_1'+y_1=-\left(\beta e^{1-x}\right)''$$

$$y_1'+y_1=-\beta ee^{-x} \tag{b}$$

สมการช่วยคือ $$r+1=0$$

$$r=-1$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $$y_c = c_1 e^{-x}$$

โดยที่ c_1 เป็นค่าคงที่ใดๆ

ในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ โดยกำหนดให้

$$y_p = A_1 x e^{-x} \tag{2.36}$$

โดยที่ A_1 เป็นค่าคงที่ใดๆ

ดังนั้น $$y_p' = -A_1 x e^{-x} + A_1 e^{-x} \tag{2.37}$$

แทนค่า (2.36) และ (2.37) ใน (a) ทำให้ได้ว่า

$$-A_1 x e^{-x} + A_1 e^{-x} + A_1 x e^{-x} = -\beta e e^{-x}$$

$$A_1 e^{-x} = -\beta e e^{-x}$$

$$A_1 = -\beta e$$

ดังนั้น $$y_p = -\beta x e e^{-x}$$

เนื่องจากว่า $$y = y_c + y_p$$

ดังนั้น $$y = c_1 e^{-x} - \beta x e e^{-x}$$

จากเงื่อนไข $$y_1(1) = 0$$

$$0 = c_1 e^{-1} - \beta(1) e e^{-1}$$

$$0 = (c_1 - \beta e) e^{-1}$$

$$c_1 = \beta e$$

$$y_1 = \beta e e^{-x} - \beta x e e^{-x} \tag{c}$$

ดังนั้น $$y_1(x) = \beta(1-x) e^{1-x} \tag{2.38}$$

นำสมการ (a) และ (c) แทนในสมการ (2.32) ดังนั้น ผลเฉลย คือ

$$y(x;\varepsilon) = \beta e^{1-x} + \varepsilon\beta(1-x) e^{1-x} + O(\varepsilon^2) \tag{2.39}$$

ดังนั้น $$y(0;\varepsilon) = \beta e^{1-0} + \varepsilon\beta(1-0) e^{1-0}$$

$$= \beta e^1 + \varepsilon\beta(1) e^1$$

$$= \beta(1+\varepsilon) e^1 \neq \alpha \tag{2.40}$$

สังเกตว่าสมการ (2.40) ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.31a) ต่อไปเราจะทำการหาผลเฉลยจริงเพื่อแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่หาได้จากวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับข้างต้นต้องมีการปรับปรุงแก้ไขเมื่อเทียบกับผลเฉลยจริง สังเกตว่าจากสมการ (2.30) เราสามารถหาผลเฉลยจริงได้ดังนี้

จาก (2.30) $$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0$$

สมการช่วยคือ $$\varepsilon r^2 + r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $$y_c = c_2 e^{\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}(x)} + c_3 e^{\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}(x)}$$

โดยที่ c_2, c_3 เป็นค่าคงที่ใดๆ

เมื่อ $$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \tag{2.41}$$

จะได้ $$y_c = c_2 e^{s_1(x)} + c_3 e^{s_2(x)} \tag{2.42a}$$

แทนเงื่อนไข $y(1) = \beta$ และ $y(0) = \alpha$ ใน y_c ดังนี้

$$\beta = c_2 e^{s_1} + c_3 e^{s_2} \tag{2.42b}$$

$$\alpha = c_2 + c_3 \tag{2.42c}$$

คูณสมการ (2.41c) ด้วย e^{s_1} $$e^{s_1}\alpha = c_2 e^{s_1} + c_3 e^{s_1}$$
(2.42d)

นำ (2.42b) − (2.42d) ; $$\beta - e^{s_1}\alpha = c_3 e^{s_2} - c_3 e^{s_1}$$

$$\beta = c_3 e^{s_2} - c_3 e^{s_1} + \alpha e^{s_1}$$

$$\beta = \alpha e^{s_1} + c_3\left(e^{s_2} - e^{s_1}\right)$$

ดังนั้น $$c_3 = \frac{\beta - \alpha e^{s_1}}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

แทน c_3 ใน (2.42c) ; $$\alpha = c_2 + \frac{\beta - \alpha e^{s_1}}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

$$c_2 = \alpha - \frac{\beta - \alpha e^{s_1}}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

$$c_2 = \frac{\alpha\left(e^{s_2} - e^{s_1}\right) - \left(\beta - \alpha e^{s_1}\right)}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

$$c_2 = \frac{\alpha e^{s_2} - \alpha e^{s_1} - \beta + \alpha e^{s_1}}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

ดังนั้น
$$c_2 = \frac{\alpha e^{s_2} - \beta}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

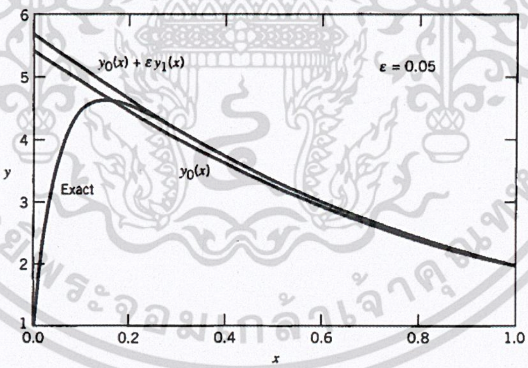
แทน c_2, c_3 ลงใน (2.42a) ทำให้ได้ว่า

$$y_c = c_2 e^{s_1(x)} + c_3 e^{s_2(x)}$$

$$y_c = \left(\frac{\alpha e^{s_2} - \beta}{e^{s_2} - e^{s_1}}\right) e^{s_1(x)} + \left(\frac{\beta - \alpha e^{s_1}}{e^{s_2} - e^{s_1}}\right) e^{s_2(x)}$$

$$y_c = \frac{\alpha e^{s_2} e^{s_1(x)} - \beta e^{s_1(x)} + \beta e^{s_2(x)} - \alpha e^{s_1} e^{s_2(x)}}{e^{s_2} - e^{s_1}}$$

ดังนั้น
$$y_{exact} = \frac{e^{s_1(x)}\left(\alpha e^{s_2} - \beta\right) + e^{s_2(x)}\left(\beta - \alpha e^{s_1}\right)}{e^{s_2} - e^{s_1}} \qquad (2.43)$$



รูปที่ 2.7 ผลเฉลยจริง ผลเฉลยอันดับศูนย์ (a) และ ผลเฉลยอันดับหนึ่ง (2.39) เมื่อ $\alpha = 0, \beta = 2$

จากรูปที่ 2.7 สังเกตว่า ผลเฉลยอันดับหนึ่ง (สมการ 2.38) ตอบสนองกับผลเฉลยจริงได้ดีกว่าอันดับศูนย์และผลเฉลยทั้งสองอันดับไม่สอดคล้องกันเงื่อนไขที่ $x = 0$ ลักษณะปัญหาแบบนี้เรียกว่าผลเฉลยชั้นขอบ (boundary layer solution)

เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงที่เห็นได้ชัดที่ชั้นขอบ เราจำเป็นต้องสร้างตัวแปรใหม่เพื่อขยายบริเวณชั้นขอบ ซึ่งจะแสดงให้เห็นขั้นตอนโดยการใช้ผลเฉลยชั้นนอก (outer solution) และผลเฉลยชั้นใน (inner solution) เข้ามาช่วยโดยประยุกต์ใช้กับตัวอย่างสมการ (2.30) และ (2.31) ดังนี้

ผลเฉลยชั้นนอก (Outer Solutions)

ตัวอย่างปัญหาสมการ (2.30) การหาผลเฉลยชั้นนอก (outer solution) ทำเช่นเดียวกับที่กล่าวไปแล้วข้างต้น ยกเว้นบริเวณที่ใกล้จุดกำเนิด นั่นคือผลเฉลยชั้นนอกสามารถเขียนกระจายได้ดังนี้

$$y^{(o)}(x;\varepsilon) = y_0{}^{(o)}(x) + \varepsilon y_1{}^{(o)}(x) + \ldots \tag{2.44}$$

โดยที่ $y_0^{(o)}(x) = y_0(x)$ และ $y_1^{(o)}(x) = y_1(x)$

นั่นคือ
$$y_0{}^{(o)}(x) = \beta e^{1-x} \tag{2.45}$$

และ
$$y_1{}^{(o)} = \beta(1-x)e^{1-x} \tag{2.46}$$

โดยที่ตัวชี้กำลัง (o) มาจากคำว่า Outer Solution

ผลเฉลยชั้นใน (Inner Solutions)

ผลเฉลยชั้นนอก (outer solution) ที่หาได้ก่อนหน้านี้ยังไม่สอดคล้องกับค่าขอบที่ $x=0$ ต่อไปเราต้องการทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นสอดคล้องกับค่าขอบที่ $x=0$ ซึ่งจะมีวิธีการหาที่เรียกว่า ผลเฉลยชั้นใน (inner solution) ดังต่อไปนี้ กำหนดให้

$$x^* = \frac{x}{\varepsilon^n} \tag{2.47}$$

ดังนั้น
$$x = x^*\varepsilon^n \tag{d}$$

จาก (2.30)
$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad ;\varepsilon \ll 1 \tag{e}$$

แทน (d) ใน (e) จะได้ว่า
$$\varepsilon\frac{d^2y^{(i)}}{d\left(x^*\varepsilon^n\right)^2} + \frac{dy^{(i)}}{d\left(x^*\varepsilon^n\right)} + y^{(i)} = 0 \quad ;\varepsilon \ll 1$$

โดยที่ยกกำลัง (i) หมายถึง Inner Solution

นำ ε^{2n-1} คูณตลอด

จะได้
$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^{*2}\varepsilon^{2n-1}}\varepsilon^{2n-1} + \frac{dy^{(i)}}{d\left(x^*\varepsilon^n\right)}\varepsilon^{2n-1} + y^{(i)}\left(\varepsilon^{2n-1}\right) = 0$$

$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^{*2}} + \varepsilon^{n-1}\frac{dy^{(i)}}{dx^*} + \varepsilon^{2n-1}y^{(i)} = 0 \tag{2.48}$$

สมมติ $y^{(i)}\left(x^*;\varepsilon\right)$ มีการกระจายเชิงเส้นดังนี้

$$y^{(i)}\left(x^*;\varepsilon\right) = y_0{}^{(i)}\left(x^*\right) + \varepsilon y_1{}^{(i)}\left(x^*\right) + \ldots \tag{2.49}$$

จากสมการ (2.33) จะเห็นว่าอนุพันธ์อันดับสองของ $y_0(x)$ หายไป แต่สมการตั้งต้น (2.30) มีอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นเราจำเป็นต้องมีอนุพันธ์อันดับสองในสมการ เพื่อหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับค่าขอบที่กำหนดให้ ซึ่งจะมีวิธีการทำดังนี้

จาก (2.48)
$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^{*2}}+\varepsilon^{n-1}\frac{dy^{(i)}}{dx^*}+\varepsilon^{2n-1}y^{(i)}=0$$

ถ้ากำหนดให้
$$2n-1=0$$

(การสร้างสมดุลระหว่างพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับสองกับพจน์ที่ไม่มีอนุพันธ์)

$$2n=1$$

ดังนั้น
$$n=\frac{1}{2} \tag{2.50}$$

แทน n ค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.48) จะได้ว่า

$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^{*2}}+\varepsilon^{-1/2}\frac{dy^{(i)}}{dx^*}+y^{(i)}=0 \tag{2.51}$$

แทนสมการ (2.49) ในสมการ (2.51) จะได้

$$\left(y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots\right)''+\varepsilon^{-1/2}\left(y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots\right)'$$
$$+y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots=0$$

$$y_0^{(i)''}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)''}\left(x^*\right)+\ldots+\varepsilon^{-1/2}y_0^{(i)'}\left(x^*\right)+\varepsilon^{1/2}y_1^{(i)'}\left(x^*\right)+\ldots+y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots=0$$

ε ที่กำลังน้อยที่สุดคือ $\varepsilon^{-1/2}$ จะได้

$$\frac{dy_0^{(i)}}{dx^*}=0 \tag{2.52}$$

$$y_0^{(i)}=c_4$$

เมื่อ c_4 เป็นค่าคงที่ใดๆ

ทำให้ได้ว่า $y_0^{(x)}\left(x^*\right)$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะผลเฉลยชั้นขอบ (boundary layer solution) ต้องมีการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็ว เนื่องจากค่าขอบทั้งสองข้างมีค่าไม่เท่ากัน $(\alpha=0,\beta=2)$ ดังนั้น การหาค่า n ข้างต้นจึงเป็นไปไม่ได้ในการหาผลเฉลยที่ถูกต้อง เราจึงทำการสร้างสมดุลระหว่างพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับสองกับพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ทำให้ได้ว่า

$$n-1=0$$

$$n=1 \tag{2.53}$$

แทน $n=1$ ใน (2.48) จะได้

$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^{*2}}+\frac{dy^{(i)}}{dx^{*}}+\varepsilon y^{(i)} = 0 \tag{2.54}$$

แทนค่า (2.49) ใน (2.54) จะได้ว่า

$$\left(y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots\right)''+\left(y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots\right)'$$

$$+\varepsilon\left(y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots\right)=0$$

$$y_0^{(i)''}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)''}\left(x^*\right)+\ldots+y_0^{(i)'}\left(x^*\right)+\varepsilon y_1^{(i)'}\left(x^*\right)+\ldots+\varepsilon y_0^{(i)}\left(x^*\right)+\varepsilon^2 y_1^{(i)}\left(x^*\right)+\ldots=0$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\varepsilon^0; y_0^{(i)''}\left(x^*\right)+y_0^{(i)'}\left(x^*\right)=0$$

$$y_0^{(i)''}+y_0^{(i)'}=0$$

$$\varepsilon^1; y_1^{(i)''}\left(x^*\right)+y_1^{(i)'}\left(x^*\right)+y_0^{(i)}\left(x^*\right)=0$$

$$y_1^{(i)''}+y_1^{(i)'}+y_0^{(i)}=0$$

$$\varepsilon^2; y_1^{(i)}\left(x^*\right)=0$$

$$y_1^{(i)}=0$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2y_0^{(i)}}{d\left(x^*\right)^2}+\frac{dy_0^{(i)}}{dx^*}=0 \tag{2.55}$$

และ
$$\frac{d^2y_1^{(i)}}{d\left(x^*\right)^2}+\frac{dy_1^{(i)}}{dx^*}+y_0^{(i)}=0 \tag{2.56}$$

จากสมการ (2.49) และเงื่อนไข (2.31a) ทำให้ได้ว่า

$$y_0^{(i)}\left(0;\varepsilon\right)=y_0^{(i)}\left(0\right)+\varepsilon y_1^{(i)}\left(0\right)+\ldots=\alpha$$

ดังนี้

$$y_0^{(i)}\left(0\right)=\alpha \tag{2.57}$$

จาก (2.55) : $$\frac{d^2 y_0^{(i)}}{d\left(x^*\right)^2}+\frac{dy_0^{(i)}}{dx^*}=0$$

$$y_0''+y_0'=0$$

สมการช่วย คือ $$r^2+r=0$$

$$r(r+1)=0$$

$$r=0,-1$$

ดังนั้น $$y_0^{(i)}=c_5+c_6e^{-x} \tag{2.58}$$

โดยที่ c_5, c_6 เป็นค่าคงที่

จากเงื่อนไข $$y_0^{(i)}(0)=\alpha$$

ดังนั้น $$y_0^{(i)}(0)=c_5+c_6e^{-0}$$

$$\alpha=c_5+c_6e^0$$

$$\alpha=c_5+c_6$$

$$c_6=\alpha-c_5 \tag{2.59}$$

นำ (2.59) แทนใน (2.58) จะได้ผลเฉลยคือ

$$y_0^{(i)}=c_5+(\alpha-c_5)e^{-x^*} \tag{2.60}$$

เมื่อ c_5 เป็นค่าคงที่

การจับคู่ (Matching procedure)

ผลเฉลยชั้นในที่ได้จาก สมการ (2.60) มีค่าคงที่ ที่ไม่ทราบค่า c_5 การหาค่าคงที่ c_5 นั้นจะใช้วิธีการจับคู่กับผลเฉลยชั้นนอก (2.45) โดยใช้หลักการของ [Van Dyke 1975] นั่นคือ

$$\lim_{x\to 0} y^{(o)}(x;\varepsilon)=\lim_{x^*\to\infty} y^{(i)}\left(x^*;\varepsilon\right) \tag{2.61}$$

แทนสมการ (2.44) ลงใน (2.49) ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{x\to 0} y_0^{(o)}(x)=\lim_{x^*\to\infty} y_0^{(i)}(x) \tag{2.62}$$

จาก (2.60) $$y_0^{(i)}\left(x^*\right)=c_5+\left(\alpha-c_5\right)e^{-x^*}$$

ดังนั้น $$\lim_{x^*\to 0} y_0^{(i)}\left(x^*\right)=c_5 \tag{2.63}$$

และจาก (2.45) $y_0^{(o)}(x) = \beta e^{1-x}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} y_0^{(o)}(x) = \beta e^{1}$

(2.64)

ดังนั้นจาก (2.61) ทำให้ได้ว่า

$$c_5 = \beta e^{1} \tag{2.65}$$

นำ c_5 แทนใน (2.58) ทำให้ได้ผลเฉลยชั้นใน $y_0^{(i)}$ คือ

$$y_0^{(i)}\left(x^*\right) = \beta e^{1} + \left(\alpha - \beta e^{1}\right)e^{-x^*} \tag{2.66}$$

ผลเฉลยประกอบ (Composite Solutions)

เนื่องจากผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในที่ได้มีส่วนที่ร่วมกัน (common part) ที่เรียกว่า ผลเฉลยประกอบ ดังนั้นเราจำเป็นต้องลบส่วนนี้ออกเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แท้จริง ซึ่งส่วนที่ร่วมกันสามารถหาได้จากเงื่อนไข (2.61) ดังนั้นผลเฉลยประกอบ คือ

$$y_{com} = \beta e^{1} \tag{2.67}$$

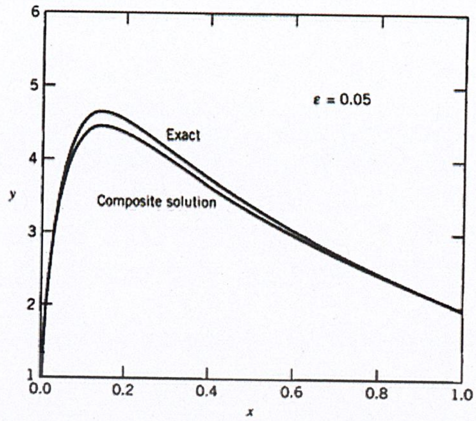
ดังนั้น

$$y = y_0^{(o)} + y_0^{(i)} - common\ \ part$$

$$y = \beta e^{1-x} + \beta e^{1} + \left(\alpha - \beta e^{1}\right)e^{-x/\varepsilon} - common\ \ part$$

$$y = \beta e^{1-x} + \beta e^{1} + \left(\alpha - \beta e^{1}\right)e^{-x/\varepsilon} - \beta e^{1}$$

จะได้ผลเฉลยคือ $$y = \beta e^{1-x} + \left(\alpha - \beta e^{1}\right)e^{-x/\varepsilon} + o(\varepsilon) \tag{2.68}$$



รูปที่ 2.8 แสดงให้เห็นผลเฉลยอันดับศูนย์และผลเฉลยจริงเมื่อ ค่า $\varepsilon = 0.05$

ในรูปที่ 2.8 เส้นที่เขียนว่า Composite Solution เมื่อเทียบกับผลเฉลยจริง (Exact Solution) แล้วจะเห็นว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

บทที่ 3

วิธีการไร้มิติของสมการสโตกส์บริงแมน

ในบทนี้เราจะประยุกต์ใช้วิธีการไร้มิติ กับสมการสโตกส์บริงแมนเพื่อเปลี่ยนหน่วยของสมการให้มีหน่วยเป็น 1 ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของของไหล ที่ใช้สำหรับปัญหานี้ คือสมการสโตกส์บริงแมน ที่ได้มาจาก [2] ดังนี้

$$\mu K^{-1}v+\frac{dp}{dx}-\frac{\mu}{\varepsilon^{l}}\frac{d^{2}v}{dy^{2}}=\rho g+\mu K^{-1}\left(\varepsilon^{l}v^{s}\right)+\frac{\mu}{\varepsilon^{l}}\frac{d^{2}v}{dy^{2}} \tag{3.1}$$

โดยที่

ตัวแปรที่ใช้ประกอบด้วย

μ	ความหนืด (dynamic viscosity) , $Pascal/s$
K^{-1}	ความสามารถของไหลผ่านตัวกลาง (inverse of permurity) , $1/(\mu m)^2$
v	ความเร็วของของเหลว , $\mu m/s$
p	ความดัน (pressure) , $N/(\mu m)^2$
ε^{l}	ความพรุน (porousity) , 1
ρ	ความหนาแน่นของวัตถุ (rho) , $g/(\mu m)^3$
g	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravity) $\mu m/s^2$
v^{s}	ความเร็วของเส้นขน (angular velocity) , rad/s^2
θ	มุมที่ระหว่างการเอียงของเส้นขนกับพื้นระนาบ , rad

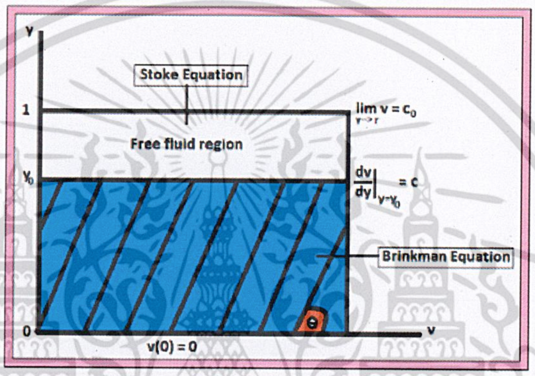
สมการ (3.1) เรียกว่าสมการบริงแมน

เมื่อไม่มีพจน์ที่ 1 และ 5 สมการ (3.1) เรียกว่าสมการสโตกส์

ดังนั้นสมการ (3.1) จึงเรียกรวมว่าสมการสโตกส์บริงแมน

ตารางที่ 3.1 ตัวพารามิเตอร์

ตัวพารามิเตอร์	คำอธิบาย	หน่วย
L	ความยาว	$[L]$
v_p	ความเร็ว	$[L/t]$
v_0^s	ความเร็วของของแข็ง	$[L/t]$
g_0	แรงโน้มถ่วงของโลก	$[L/t^2]$
p_0	ความดัน	$[M/(Lt^2)]$



รูปที่ 3.1 แสดงขอบเขตของเงื่อนไขของปัญหา

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ คือ $$v = 0 \quad \text{ที่} \quad y = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{dv}{dy} = c \quad \text{ที่} \quad y = y_0 \tag{3.3}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใดๆ สำหรับวิธีไร้มิติ (Dimensionless Method) เรากำหนดตัวพารามิเตอร์ดังตารางที่ 3.1 เมื่อเปลี่ยนหน่วยตัวแปรต่างๆให้เป็น 1 ดังนี้

กำหนดให้ $$\tilde{v} = \frac{v}{v_p},\ \tilde{v}^s = \frac{v^s}{v_0^s},\ \tilde{g} = \frac{g}{g_0},\ \tilde{p} = \frac{p}{p_0},\ \tilde{y} = \frac{y}{L},\ \tilde{x} = \frac{x}{L}$$

ดังนั้น $$\frac{d}{d\tilde{y}} = L\frac{d}{dy},\ \frac{d^2}{d\tilde{y}^2} = L^2\frac{d^2}{dy^2},\ \frac{d}{d\tilde{x}} = L\frac{d}{dx}$$

และ $$v = \tilde{v}v_p$$

$$v^s = \tilde{v}^s v_0^s$$

$$g = \tilde{g}g_0$$

$$p = \tilde{p}p_0$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{L}\frac{d}{d\tilde{y}}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{1}{L^2}\frac{d^2}{d\tilde{y}^2}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d}{d\tilde{x}}$$

จากสมการ (3.1) ทำให้ได้ว่า

$$\mu K^{-1}\left(\tilde{v}v_p\right)+\frac{1}{L}\frac{d\left(\tilde{p}p_0\right)}{d\tilde{x}}-\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{1}{L^2}\frac{d^2\left(\tilde{v}v_p\right)}{d\tilde{y}^2} = \rho\tilde{g}g_0 + \mu K^{-1}\left(\varepsilon^l\tilde{v}^s v_0^s\right)+\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{1}{L^2}\frac{d^2\left(\tilde{v}v_p\right)}{d\tilde{y}^2}$$

$$\mu K^{-1}v_p\tilde{v}-\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{2v_p}{L^2}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2} = \rho\tilde{g}g_0 + \mu K^{-1}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s - \frac{p_0}{L}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}$$

$$\frac{2v_p}{L^2}\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\mu K^{-1}v_p\tilde{v} = \frac{p_0}{L}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-\rho\tilde{g}g_0-\mu K^{-1}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s$$

นำ L^2 คูณตลอด ดังนั้น

$$2v_p\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-L^2\mu K^{-1}v_p\tilde{v} = p_0 L\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-L^2\rho\tilde{g}g_0-L^2\mu K^{-1}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s$$

นำ $2v_p$ หารตลอด ดังนั้น

$$\frac{\mu}{\varepsilon^l}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\frac{L^2}{2}\mu K^{-1}\tilde{v} = \frac{p_0 L}{2v_p}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-\frac{L^2}{2v_p}\rho\tilde{g}g_0-\frac{L^2}{2v_p}\mu K^{-1}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s$$

นำ μ หารตลอด จะได้ว่า

$$\frac{1}{\varepsilon^l}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\frac{L^2}{2}K^{-1}\tilde{v} = \frac{p_0 L}{2v_p\mu}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-\frac{L^2}{2v_p\mu}\rho\tilde{g}g_0-\frac{L^2}{2v_p}K^{-1}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s$$

$$\frac{1}{\varepsilon^l}\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\frac{1}{\frac{2K}{L^2}}\tilde{v} = \frac{p_0 L}{2v_p\mu}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-\frac{L^2}{2v_p\mu}\rho\tilde{g}g_0-\frac{L^2}{2v_p}\frac{1}{K}\varepsilon^l v_0^s\tilde{v}^s \quad (3.4)$$

กำหนดให้

$$M=\frac{1}{\varepsilon^{l}}, Da=\frac{K}{L^{2}}, F=\frac{p_0 L}{2v_p\mu}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}}-\frac{L^2}{2v_p\mu}\rho\tilde{g}g_0, G=\frac{-1}{v_p} \text{ และ } h(y)=v_0^s\tilde{v}^s$$

จากสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$M\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\frac{1}{2Da}\tilde{v}=F+\frac{G}{2MDa}h(y)$$

นำ M หารตลอด ดังนั้น

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\frac{1}{2MDa}\tilde{v}=\frac{F}{M}+\frac{G}{2M^2Da}h(y) \tag{3.5}$$

กำหนดให้

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{2MDa}\right)^{\frac{1}{2}}$$

จากสมการ (3.5) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{y}^2}-\varepsilon^2\tilde{v}=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h(y) \tag{3.6}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนคำนวณหาผลเฉลยเราจะเขียนแทน $\tilde{v}$ ด้วย v ในสมการ (3.6) ดังนี้

$$\frac{d^2v}{dy^2}-\varepsilon^2 v=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h(y) \tag{3.7}$$

สมการ (3.7) คือสมการสโตกส์บริงแมนที่ไร้มิติ ซึ่งจะถูกนำไปคำนวณหาความเร็วของของไหลพีซีแอล ในบทต่อไป

บทที่ 4

วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับของสมการสโตกส์บริงแมน

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับกับสมการสโตกส์บริงแมน โดยเริ่มจากสมการบริงแมน ที่ได้จากวิธีการไร้มิติจากบทก่อนหน้านี้

สมการบริงแมน (Brinkman Equation)

จากสมการ (3.7)

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \varepsilon^2 v = \frac{F}{M} + \varepsilon^2 \frac{G}{M} h(y)$$

เราจะทำการหาผลเฉลย v โดยแบ่งค่า ε เป็น 2 กรณีคือ $\varepsilon \ll 1$ และ $\varepsilon \gg 1$ โดยใช้วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับในการหาผลเฉลยดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $\varepsilon \ll 1$

จากการกระจายเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Expansion) ซึ่งอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$v(y) = v_0(y) + \varepsilon v_1(y) + \varepsilon^2 v_2(y) + \dots \tag{4.1}$$

นำสมการ (4.1) แทนใน (3.7) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots\right) - \varepsilon^2\left(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots\right) = \frac{F}{M} + \varepsilon^2 \frac{G}{M} h(y)$$

$$\frac{d^2 v_0}{dy^2} + \varepsilon \frac{d^2 v_1}{dy^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 v_2}{dy^2} + \dots - \varepsilon^2 v_0 - \varepsilon^3 v_1 - \varepsilon^4 v_2 - \dots = \frac{F}{M} + \varepsilon^2 \frac{G}{M} h(y)$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของ ε ดังนั้น

$$\varepsilon^0 : \frac{d^2 v_0}{dy^2} = \frac{F}{M} \tag{4.2a}$$

$$\varepsilon^1 : \frac{d^2 v_1}{dy^2} = 0 \tag{4.2b}$$

$$\varepsilon^2 : \frac{d^2 v_2}{dy^2} - v_0 = \frac{G}{M} h(y) \tag{4.2c}$$

จากสมการ (4.2a) ; $$\frac{d^2 v_0}{dy^2} = \frac{F}{M}$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_0}{dy} = \frac{F}{M} y + d_1 \tag{4.3}$$

โดยที่ d_1 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทนเงื่อนไข (3.3) : $$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0} = c$$

แทนลงใน (4.1) จะได้ว่า

$$\left.\frac{d}{dy}\left(v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots\right)\right|_{y=y_0} = c$$

$$\left.\frac{dv_0}{dy}\right|_{y=y_0} + \varepsilon \left.\frac{dv_1}{dy}\right|_{y=y_0} + \varepsilon^2 \left.\frac{dv_2}{dy}\right|_{y=y_0} + \ldots = c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^0 : \left.\frac{dv_0}{dy}\right|_{y=y_0} = c \tag{4.4a}$$

$$\varepsilon^1 : \left.\frac{dv_1}{dy}\right|_{y=y_0} = 0 \tag{4.4b}$$

$$\varepsilon^2 : \left.\frac{dv_2}{dy}\right|_{y=y_0} = 0 \tag{4.4c}$$

แทน (4.4a) ลงใน (4.3) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv_0}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{F}{M}(y_0) + d_1$$

$$c = \frac{F}{M} y_0 + d_1$$

$$d_1 = c - \frac{F}{M} y_0$$

แทน d_1 ใน (4.3) ดังนั้น

$$\frac{dv_0}{dy} = \frac{F}{M} y + c - \frac{F}{M} y_0$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$v_0 = \frac{F}{M}\frac{y^2}{2} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)y + d_2 \qquad (4.5)$$

โดยที่ d_2 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากเงื่อนไข (3.2) ; $$v(0) = 0$$

แทนลงใน (4.1) จะได้ว่า

$$v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \ldots = 0$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^0 : v_0(0) = 0 \qquad (4.6a)$$

$$\varepsilon^1 : v_1(0) = 0 \qquad (4.6b)$$

$$\varepsilon^2 : v_2(0) = 0 \qquad (4.6c)$$

แทน (4.6a) ลงใน (4.5) ดังนั้น

$$v_0(0) = d_2$$

$$d_2 = 0$$

แทน $d_2 = 0$ ใน (4.5) ทำให้ได้ว่า

$$v_0(y) = \frac{F}{M}\frac{y^2}{2} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)y \qquad (4.7)$$

ต่อไปเราจะทำการหาผลเฉลย v_1 ดังนี้

จากสมการ (4.2b) ; $$\frac{d^2 v_1}{dy^2} = 0$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_1}{dy} = d_3 \qquad (4.8)$$

โดยที่ d_3 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.4b) ลงใน (4.8) จะได้ว่า

$$0=\left.\frac{dv_1}{dy}\right|_{y=y_0}=d_3$$

ดังนั้น $$d_3=0$$

แทน $d_3=0$ ลงใน (4.8) จะได้ว่า

$$\frac{dv_1}{dy}=0$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$v_1=d_4 \tag{4.9}$$

โดยที่ d_4 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.6b) ลงใน (4.9) จะได้ว่า

$$v_1(0)=d_4$$

$$d_4=0$$

แทน $d_4=0$ ลงใน (4.9) จะได้ว่า

$$v_1(y)=0 \tag{4.10}$$

ต่อไปเราจะทำการหาผลเฉลย v_2 ดังนี้

จากสมการ (4.2c) ; $$\frac{d^2v_2}{dy^2}-v_0=\frac{G}{M}h(y) \tag{g}$$

$$\frac{d^2v_2}{dy^2}=v_0+\frac{G}{M}h(y)$$

โดยที่ $$h(y)=v_0^s\tilde{v}^s=v^s$$

จาก [8] ทำให้เราทราบว่า

$$h(y)=a_1\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^8+a_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^7+\ldots+a_8\left(\frac{y}{\sin\theta}\right) \tag{h}$$

แทนค่า (4.17) และ (h) ใน (g) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d^2v_2}{dy^2}=\frac{F}{M}\frac{y^2}{2}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)y+\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8 y}{\sin\theta}\right)$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_2}{dy}=\frac{F}{M}\frac{y^3}{6}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)\frac{y^2}{2}+\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y^9}{9}+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y^8}{8}+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y^2}{2}\right)+d_5 \quad (4.11)$$

โดยที่ d_5 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.4c) ลงใน (4.11) จะได้ว่า

$$0=\left.\frac{dv_2}{dy}\right|_{y=y_0}=\frac{F}{M}\frac{y_0^3}{6}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)\frac{{y_0}^2}{2}+\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y_0^9}{9}+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y_0^8}{8}+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y_0^2}{2}\right)+d_5$$

ดังนั้น $d_5=-\frac{F}{M}\frac{y_0^3}{6}-\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)\frac{y_0^2}{2}-\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y_0^9}{9}+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y_0^8}{8}+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y_0^2}{2}\right)$ (i)

เพื่อสะดวกต่อการเขียนและคำนวณ จึงเขียน d_5 แทนค่าทางขวามือของ (i) ในสมการ (4.1) ดังนี้

$$\frac{dv_2}{dy}=\frac{F}{M}\frac{y^3}{6}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)\frac{y^2}{2}+\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y^9}{9}+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y^8}{8}+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y^2}{2}\right)+d_5$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$v_2=\frac{F}{M}\frac{y^4}{24}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)\frac{y^3}{6}+\frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y^{10}}{90}+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y^9}{72}+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y^3}{6}\right)+d_5y+d_6$$

(4.12)

โดยที่ d_6 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.6c) ลงใน (4.12) จะได้ว่า

$$v_2(0)=d_6$$

$$d_6=0$$

แทน $d_6 = 0$ ลงใน (4.12) จะได้ว่า

$$v_2(y) = \frac{F}{M}\frac{y^4}{24} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)\frac{y^3}{6} + \frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y^{10}}{90} + \frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y^9}{72} + \frac{a_3}{\sin^6\theta}\frac{y^8}{56} + \frac{a_4}{\sin^5\theta}\frac{y^7}{42} + \frac{a_5}{\sin^4\theta}\frac{y^6}{30} + \frac{a_6}{\sin^3\theta}\frac{y^5}{20} + \frac{a_7}{\sin^2\theta}\frac{y^4}{12} + \frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y^3}{6}\right) + d_5 y \qquad (4.13)$$

นำสมการ (4.7) , (4.10) และ (4.13) แทนลงใน (4.1) จะได้ผลเฉลยเป็นดังนี้

$$v(y) = \frac{F}{M}\frac{y^2}{2} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)y + \varepsilon^2\left[\frac{F}{M}\frac{y^4}{24} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)\frac{y^3}{6} + \frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y^{10}}{90} + \frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y^9}{72} + \frac{a_3}{\sin^6\theta}\frac{y^8}{56} + \frac{a_4}{\sin^5\theta}\frac{y^7}{42} + \frac{a_5}{\sin^4\theta}\frac{y^6}{30} + \frac{a_6}{\sin^3\theta}\frac{y^5}{20} + \frac{a_7}{\sin^2\theta}\frac{y^4}{12} + \frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y^3}{6}\right) + \left(-\frac{F}{M}\frac{y_0^3}{6} - \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)\frac{y_0^2}{2} - \frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}\frac{y_0^9}{9} + \frac{a_2}{\sin^7\theta}\frac{y_0^8}{8} + \dots + \frac{a_8}{\sin\theta}\frac{y_0^2}{2}\right)\right)y\right] + \dots \qquad (4.14)$$

<u>กรณีที่ 2</u> $\varepsilon \gg 1$

จากสมการ (3.7) ; $$\frac{d^2v}{dy^2} - \varepsilon^2 v = \frac{F}{M} + \varepsilon^2\frac{G}{M}h(y)$$

นำ ε^{-2} คูณตลอด จะได้ว่า

$$\varepsilon^{-2}\frac{d^2v}{dy^2} - v = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y) \qquad (4.15)$$

สังเกตในกรณี $\varepsilon \gg 1$ จะเห็นว่า $\varepsilon^{-2} \ll 1$ หรือ ε^{-2} ลู่เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น $\varepsilon^{-2}\frac{d^2v}{dy^2}$ ลู่เข้าสู่ศูนย์ ทำให้สมการ (4.15) ไม่สอดคล้องกับค่าขอบที่กำหนด ดังนั้น ในกรณีนี้เราต้องทำการหาผลเฉลย โดยการแบ่งเป็นผลเฉลยชั้นนอก(outer solution) และผลเฉลยชั้นใน (inner solution) ซึ่งการหาผลเฉลยแบบนี้เรียกว่าวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับเข้าคู่ (Method of matched asymptotic expansion) ซึ่งผลเฉลยชั้นนอก คือ

$$v^{(o)}(y) = -\frac{G}{M}h(y)$$

$$v^{(o)}(y) = \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7 + \dots + \frac{a_8}{\sin\theta}y\right) \qquad (4.16)$$

โดยที่เลขชี้กำลัง (o) หมายถึง ผลเฉลยชั้นนอก (outer solution)

จากสมการ (4.16) สังเกตว่า $v^{(o)}(0)=0$ ต่อไปเราต้องทำให้ผลเฉลยสอดคล้องกับค่าขอบ $\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$ ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 วิธี ดังนี้

<u>**วิธีที่ 1**</u>

จากผลเฉลยชั้นนอก $$v^{(o)}(y)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)$$

ต่อไปเราจะคำนวณหาผลเฉลยชั้นใน โดยรูปแบบการกระจายตัวชั้นใน เป็นดังนี้

$$v^{(i)}\left(y^*\right)=v_0^{(i)}\left(y^*\right)+\varepsilon v_1^{(i)}\left(y^*\right)+\varepsilon^2 v_2^{(i)}\left(y^*\right)+\ldots \tag{4.17}$$

ซึ่งเลขชี้กำลัง (i) หมายถึง ผลเฉลยชั้นใน (inner solution)

กำหนดให้
$$y^*=\frac{y_0-y}{\varepsilon^n}$$
$$y_0-y=y^*\varepsilon^n$$
$$y=y_0-y^*\varepsilon^n$$

จะได้ว่า
$$\frac{dv}{dy}=\frac{dv}{d\left(y_0-y^*\varepsilon^n\right)}$$

เนื่องจาก
$$\frac{dy}{dy^*}=-\varepsilon^n$$

ดังนั้น
$$\frac{dv}{dy^*}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dy^*}=-\varepsilon^n\frac{dv}{dy} \tag{j}$$

$$\frac{d^2v}{dy^{*2}}=\frac{d}{dy^*}\left(\frac{dv}{dy^*}\right)=\frac{d}{dy^*}\left(-\varepsilon^n\frac{dv}{dy}\right)$$
$$=-\varepsilon^n\frac{d}{dy^*}\left(\frac{dv}{dy}\right)$$
$$=-\varepsilon^n\left[-\varepsilon^n\frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dy}\right)\right]$$

$$\frac{d^2v}{dy^{*2}} = \varepsilon^{2n}\frac{d^2v}{dy^2}$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\frac{d^2v}{dy^{*2}}$$

จากสมการ (4.15) ดังนั้น

$$\frac{\varepsilon^{-2}}{\varepsilon^{2n}}\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} - v^{(i)} = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2n+2}}\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} - v^{(i)} = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y)$$

นำ ε^{2n+2} คูณตลอด จะได้ว่า

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} - \varepsilon^{2n+2}v^{(i)} = \varepsilon^{2n}\frac{F}{M} + \varepsilon^{2n+2}\frac{G}{M}h(y) \tag{4.18}$$

จากสมการ (4.18) ต้องการหาค่า n ซึ่งหาได้จากการนำสัมประสิทธิ์ของ ε ของเทอมที่ 1 = เทอมที่ 2 หรือเทอมที่ 1 = เทอมที่ 3

<u>วิธีที่ 1.1</u> (เทอมที่ 1 = เทอมที่ 3)

นำสัมประสิทธิ์ของ ε เทอมที่ 1 = เทอมที่ 3 จะได้ว่า

$$0 = 2n$$

$$2n = 0$$

$$n = 0$$

แทน $n = 0$ ใน (4.18) จะได้ว่า

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} - \varepsilon^2 v^{(i)} = \frac{F}{M} + \varepsilon^2\frac{G}{M}h(y) \tag{4.19}$$

เนื่องจาก $h(y) = a_1\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^8 + a_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^7 + \ldots + a_8\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)$ และ $n = 0$

จะได้ว่า $h(y^*) = \frac{a_1}{\sin^8\theta}(y_0 - y^*)^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}(y_0 - y^*)^7 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}(y_0 - y^*)$

โดยที่

$(y_0 - y^*)^2 = y_0^2 - 2y_0y^* + y^{*2}$

$$\left(y_0-y^*\right)^3=y_0^3-3y_0^2y^*+3y_0y^{*2}-y^{*3}$$

$$\left(y_0-y^*\right)^4=y_0^4-4y_0^3y^*+6y_0^2y^{*2}-4y_0y^{*3}+y^{*4}$$

$$\left(y_0-y^*\right)^5=y_0^5-5y_0^4y^*+10y_0^3y^{*2}-10y_0^2y^{*3}+5y_0y^{*4}-y^{*5}$$

$$\left(y_0-y^*\right)^6=y_0^6-6y_0^5y^*+15y_0^4y^{*2}-20y_0^3y^{*3}+15y_0^2y^{*4}-6y_0y^{*5}+y^{*6}$$

$$\left(y_0-y^*\right)^7=y_0^7-7y_0^6y^*+21y_0^5y^{*2}-35y_0^4y^{*3}+35y_0^3y^{*4}-21y_0^2y^{*5}+7y_0y^{*6}-y^{*7}$$

$$\left(y_0-y^*\right)^8=y_0^8-8y_0^7y^*+28y_0^6y^{*2}-56y_0^5y^{*3}+70y_0^4y^{*4}-56y_0^3y^{*5}+28y_0^2y^{*6}-8y_0y^{*7}+y^{*8}$$

จากสมการ (4.19) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}}-\varepsilon^2v^{(i)}=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h\left(y^*\right) \tag{4.20}$$

นำสมการ (4.17) แทนลงใน (4.20) จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dy^{*2}}\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2v_2^{(i)}+\ldots\right)-\varepsilon^2\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2v_2^{(i)}+\ldots\right)=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h\left(y^*\right)$$

$$\frac{d^2v_0^{(i)}}{dy^{*2}}+\varepsilon\frac{d^2v_1^{(i)}}{dy^{*2}}+\varepsilon^2\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}-\varepsilon^2v_0^{(i)}-\varepsilon^3v_1^{(i)}-\varepsilon^4v_2^{(i)}-\ldots=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h\left(y^*\right)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^0:\frac{d^2v_0^{(i)}}{dy^{*2}}=\frac{F}{M} \tag{4.21a}$$

$$\varepsilon^1:\frac{d^2v_1^{(i)}}{dy^{*2}}=0 \tag{4.21b}$$

$$\varepsilon^2:\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}-v^{(i)}=\frac{G}{M}h\left(y^*\right) \tag{4.21c}$$

จากสมการ (4.21a) : $$\frac{d^2v_0^{(i)}}{dy^{*2}}=\frac{F}{M}$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}=\frac{F}{M}y^*+k_1 \tag{4.22}$$

โดยที่ k_1 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากสมการ (4.17) : $$v^{(i)}\left(y^*\right)=v_0^{(i)}\left(y^*\right)+\varepsilon v_1^{(i)}\left(y^*\right)+\varepsilon^2 v_2^{(i)}\left(y^*\right)+\ldots$$

และเงื่อนไข (3.3) : $$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$$

แทน (4.17) ใน (3.3) จะได้ว่า

$$\left.\frac{d}{dy}\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2 v_2^{(i)}+\ldots\right)\right|_{y=y_0}=c$$

$$\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\left.\frac{\varepsilon dv_1^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\left.\frac{\varepsilon^2 dv_2^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\ldots=c$$

จาก (j) ทำให้ได้ว่า $$-\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\varepsilon\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\varepsilon^2\left.\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\ldots=c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^0:\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=-c \tag{4.23a}$$

$$\varepsilon^1:\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=0 \tag{4.23b}$$

$$\varepsilon^2:\left.\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=0 \tag{4.23c}$$

แทน (4.23a) ใน (4.22) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=k_1$$

$$-c=k_1$$

$$k_1=-c$$

แทน $k_1=-c$ ใน (4.22) จะได้เป็น

$$\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}=\frac{F}{M}y^*-c$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$v_0^{(i)}=\frac{F}{M}\frac{{y^*}^2}{2}-cy^*+k_2 \tag{4.24}$$

โดยที่ k_2 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากสมการ (4.21b) : $$\frac{d^2v_1^{(i)}}{dy^{*2}}=0$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}=k_3 \tag{4.25}$$

โดยที่ k_3 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.23b) ใน (4.25) จะได้

$$\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=k_3$$

$$k_3=0$$

แทน $k_3=0$ ใน (4.25) จะได้

$$\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}=0$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$v_1^{(i)}\left(y^*\right)=k_4 \tag{4.26}$$

โดยที่ k_4 เป็นค่าคงที่ใด ๆ ต่อไปเราจะทำการหา $v_2^{(i)}$ ดังนี้

จากสมการ (4.21c) ; $$\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}-v_0^{(i)}=\frac{G}{M}h\left(y^*\right)$$

$$\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}=v_0^{(i)}+\frac{G}{M}h\left(y^*\right) \tag{k}$$

แทน (4.24) ใน (k) ดังนั้น $$\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}=\frac{F}{M}\frac{y^{*2}}{2}-cy^*+k_2+\frac{G}{M}h\left(y^*\right)$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}=\frac{F}{M}\frac{y^{*3}}{6}-c\frac{y^{*2}}{2}+k_2y^*+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8y^*-8y_0^7\frac{y^{*2}}{2}+28y_0^6\frac{y^{*3}}{3}-56y_0^5\frac{y^{*4}}{4}\right.\right.$$

$$+70y_0^4\frac{y^{*5}}{5}-56y_0^3\frac{y^{*6}}{6}+28y_0^2\frac{y^{*7}}{7}-8y_0\frac{y^{*8}}{8}+\frac{y^{*9}}{9}\bigg)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\bigg(y_0^7y^*-7y_0^6\frac{y^{*2}}{2}$$

$$+21y_0^5\frac{y^{*3}}{3}-35y_0^4\frac{y^{*4}}{4}+35y_0^3\frac{y^{*5}}{5}-21y_0^2\frac{y^{*6}}{6}+7y_0\frac{y^{*7}}{7}-\frac{y^{*8}}{8}\bigg)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\bigg(y_0^6y^*$$

$$-6y_0^5\frac{y^{*2}}{2}+15y_0^4\frac{y^{*3}}{3}-20y_0^3\frac{y^{*4}}{4}+15y_0^2\frac{y^{*5}}{5}-6y_0\frac{y^{*6}}{6}+\frac{y^{*7}}{7}\bigg)+\frac{a_4}{\sin^5\theta}\bigg(y_0^5y^*$$

$$-5y_0^4\frac{y^{*2}}{2}+10y_0^3\frac{y^{*3}}{3}-10y_0^2\frac{y^{*4}}{4}+5y_0\frac{y^{*5}}{5}-\frac{y^{*6}}{6}\bigg)+\frac{a_5}{\sin^4\theta}\bigg(y_0^4y^*-4y_0^3\frac{y^{*2}}{2}$$

$$+6y_0^2\frac{y^{*3}}{3}-4y_0\frac{y^{*4}}{4}+\frac{y^{*5}}{5}\bigg)+\frac{a_6}{\sin^3\theta}\bigg(y_0^3y^*-3y_0^2\frac{y^{*2}}{2}+3y_0\frac{y^{*3}}{3}-\frac{y^{*4}}{4}\bigg)$$

$$+\frac{a_7}{\sin^2\theta}\bigg(y_0^2y^*-2y_0\frac{y^{*2}}{2}+\frac{y^{*3}}{3}\bigg)+\frac{a_8}{\sin\theta}\bigg(y_0y^*-\frac{y^{*2}}{2}\bigg)\bigg]+k_5 \qquad (4.27)$$

โดยที่ k_5 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทน (4.23c) ลงใน (4.27) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=k_5$$

$$k_5=0$$

แทน $k_5=0$ ใน (4.27) จะได้ว่า

$$\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}=\frac{F}{M}\frac{y^{*3}}{6}-c\frac{y^{*2}}{2}+k_2y^*+\frac{G}{M}\bigg[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\bigg(y_0^8y^*-4y_0^7y^{*2}+\frac{28}{3}y_0^6y^{*3}-14y_0^5y^{*4}+14y_0^4y^{*5}$$

$$-\frac{28}{3}y_0^3y^{*6}+4y_0^2y^{*7}-y_0y^{*8}+\frac{y^{*9}}{9}\bigg)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\bigg(y_0^7y^*-\frac{7}{2}y_0^6y^{*2}+7y_0^5y^{*3}-\frac{35}{4}y_0^4y^{*4}$$

$$+7y_0^3y^{*5}-\frac{7}{2}y_0^2y^{*6}+y_0y^{*7}-\frac{y^{*8}}{8}\bigg)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\bigg(y_0^6y^*-3y_0^5y^{*2}+5y_0^4y^{*3}-5y_0^3y^{*4}$$

$$+3y_0^2y^{*5}-y_0y^{*6}+\frac{y^{*7}}{7}\bigg)+\frac{a_4}{\sin^5\theta}\bigg(y_0^5y^*-\frac{5}{2}y_0^4y^{*2}+\frac{10}{3}y_0^3y^{*3}-\frac{5}{2}y_0^2y^{*4}+y_0y^{*5}$$

$$-\frac{y^{*6}}{6}\Bigg)+\frac{a_5}{\sin^4\theta}\left(y_0^4y^*-2y_0^3y^{*2}+2y_0^2y^{*3}-y_0y^{*4}+\frac{y^{*5}}{5}\right)+\frac{a_6}{\sin^3\theta}\Bigg(y_0^3y^*-\frac{3}{2}y_0^2y^{*2}$$

$$+y_0y^{*3}-\frac{y^{*4}}{4}\Bigg)+\frac{a_7}{\sin^2\theta}\left(y_0^2y^*-y_0y^{*2}+\frac{y^{*3}}{3}\right)+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0y^*-\frac{y^{*2}}{2}\right)\Bigg]$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$v_2^{(i)}\left(y^*\right)=\frac{F}{M}\frac{y^{*4}}{24}-c\frac{y^{*3}}{6}+k_2\frac{y^{*2}}{2}+\frac{G}{M}\Bigg[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\Bigg(y_0^8\frac{y^{*2}}{2}-\frac{4}{3}y_0^7y^{*3}+\frac{7}{3}y_0^6y^{*4}-\frac{14}{5}y_0^5y^{*5}$$

$$+\frac{7}{3}y_0^4y^{*6}-\frac{4}{3}y_0^3y^{*7}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*8}-y_0\frac{y^{*9}}{9}+\frac{y^{*10}}{9}\Bigg)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\Bigg(y_0^7\frac{y^{*2}}{2}-\frac{7}{6}y_0^6y^{*3}$$

$$+\frac{7}{4}y_0^5y^{*4}-\frac{7}{4}y_0^4y^{*5}+\frac{7}{6}y_0^3y^{*6}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*7}+y_0\frac{y^{*8}}{8}-\frac{y^{*9}}{72}\Bigg)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\Bigg(y_0^6\frac{y^{*2}}{2}$$

$$-y_0^5y^{*3}+\frac{5}{4}y_0^4y^{*4}-\frac{5}{6}y_0^3y^{*5}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*6}-y_0\frac{y^{*7}}{7}+\frac{y^{*8}}{56}\Bigg)+\frac{a_4}{\sin^5\theta}\Bigg(y_0^5\frac{y^{*2}}{2}-\frac{5}{6}y_0^4y^{*3}$$

$$+\frac{5}{6}y_0^3y^{*4}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*5}+y_0\frac{y^{*6}}{6}-\frac{y^{*7}}{42}\Bigg)+\frac{a_5}{\sin^4\theta}\Bigg(y_0^4\frac{y^{*2}}{2}-\frac{2}{3}y_0^3y^{*3}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*4}$$

$$-y_0\frac{y^{*5}}{5}+\frac{y^{*6}}{30}\Bigg)+\frac{a_6}{\sin^3\theta}\left(y_0^3\frac{y^{*2}}{2}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*3}+y_0\frac{y^{*4}}{4}-\frac{y^{*5}}{20}\right)$$

$$+\frac{a_7}{\sin^2\theta}\left(y_0^2\frac{y^{*2}}{2}-y_0\frac{y^{*3}}{3}+\frac{y^{*4}}{12}\right)+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0\frac{y^{*2}}{2}-\frac{y^{*3}}{6}\right)\Bigg]+k_6 \qquad (4.28)$$

โดยที่ k_6 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

การจับคู่ (Matching)

ในหัวข้อที่เราจะจับคู่ผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในโดยวิธีของ Van dyke [3] หลักการจับคู่การเทียบเท่าทางคณิตศาสตร์ คือ

$$\lim_{y\to y_0} v^{(o)}\left(y;\varepsilon\right)=\lim_{y^*\to 0} v^{(i)}\left(y^*;\varepsilon\right) \qquad (4.29)$$

$$\lim_{y\to y_0} v^{(o)}\left(\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\right)$$

$$=\lim_{y^*\to 0} v^{(i)}\left(\frac{F}{M}\frac{y^{*2}}{2}-cy^*+k_2+\varepsilon k_4+\varepsilon^2 k_6\right)$$

$$\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)=k_2+\varepsilon k_4+\varepsilon^2 k_6$$

ดังนั้น

$$k_2+\varepsilon k_4+\varepsilon^2 k_6=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right) \qquad (4.30)$$

ดังนั้น

$$v^{(i)}\left(y^*\right)=\frac{F}{M}\frac{y^{*2}}{2}-cy^*$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{F}{M}\frac{y^{*4}}{24}-c\frac{y^{*3}}{6}+k_2\frac{y^{*2}}{2}+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8\frac{y^{*2}}{2}-\frac{4}{3}y_0^7y^{*3}+\frac{7}{3}y_0^6y^{*4}-\frac{14}{5}y_0^5y^{*5}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{7}{3}y_0^4y^{*6}-\frac{4}{3}y_0^3y^{*7}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*8}-y_0\frac{y^{*9}}{9}+\frac{y^{*10}}{9}\right)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0^7\frac{y^{*2}}{2}-\frac{7}{6}y_0^6y^{*3}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{4}y_0^5y^{*4}-\frac{7}{4}y_0^4y^{*5}+\frac{7}{6}y_0^3y^{*6}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*7}+y_0\frac{y^{*8}}{8}-\frac{y^{*9}}{72}\right)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\left(y_0^6\frac{y^{*2}}{2}\right.$$

$$\left.-y_0^5y^{*3}+\frac{5}{4}y_0^4y^{*4}-\frac{5}{6}y_0^3y^{*5}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*6}-y_0\frac{y^{*7}}{7}+\frac{y^{*8}}{56}\right)+\frac{a_4}{\sin^5\theta}\left(y_0^5\frac{y^{*2}}{2}-\frac{5}{6}y_0^4y^{*3}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{6}y_0^3y^{*4}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*5}+y_0\frac{y^{*6}}{6}-\frac{y^{*7}}{42}\right)+\frac{a_5}{\sin^4\theta}\left(y_0^4\frac{y^{*2}}{2}-\frac{2}{3}y_0^3y^{*3}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*4}\right.$$

$$\left.-y_0\frac{y^{*5}}{5}+\frac{y^{*6}}{30}\right)+\frac{a_6}{\sin^3\theta}\left(y_0^3\frac{y^{*2}}{2}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*3}+y_0\frac{y^{*4}}{4}-\frac{y^{*5}}{20}\right)$$

$$\left.\left.+\frac{a_7}{\sin^2\theta}\left(y_0^2\frac{y^{*2}}{2}-y_0\frac{y^{*3}}{3}+\frac{y^{*4}}{12}\right)+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0\frac{y^{*2}}{2}-\frac{y^{*3}}{6}\right)\right]\right]+k_2+\varepsilon k_4+\varepsilon^2 k_6$$

$$v^{(i)}\left(y^*\right)=\frac{F}{M}\frac{y^{*2}}{2}-cy^*$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{F}{M}\frac{y^{*4}}{24}-c\frac{y^{*3}}{6}+k_2\frac{y^{*2}}{2}+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8\frac{y^{*2}}{2}-\frac{4}{3}y_0^7y^{*3}+\frac{7}{3}y_0^6y^{*4}-\frac{14}{5}y_0^5y^{*5}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{7}{3}y_0^4y^{*6}-\frac{4}{3}y_0^3y^{*7}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*8}-y_0\frac{y^{*9}}{9}+\frac{y^{*10}}{9}\right)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0^7\frac{y^{*2}}{2}-\frac{7}{6}y_0^6y^{*3}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{4}y_0^5y^{*4}-\frac{7}{4}y_0^4y^{*5}+\frac{7}{6}y_0^3y^{*6}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*7}+y_0\frac{y^{*8}}{8}-\frac{y^{*9}}{72}\right)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\left(y_0^6\frac{y^{*2}}{2}\right.$$

$$\left.-y_0^5y^{*3}+\frac{5}{4}y_0^4y^{*4}-\frac{5}{6}y_0^3y^{*5}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*6}-y_0\frac{y^{*7}}{7}+\frac{y^{*8}}{56}\right)+\frac{a_4}{\sin^5\theta}\left(y_0^5\frac{y^{*2}}{2}-\frac{5}{6}y_0^4y^{*3}\right.$$

$$\left.+\frac{5}{6}y_0^3y^{*4}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*5}+y_0\frac{y^{*6}}{6}-\frac{y^{*7}}{42}\right)+\frac{a_5}{\sin^4\theta}\left(y_0^4\frac{y^{*2}}{2}-\frac{2}{3}y_0^3y^{*3}+\frac{1}{2}y_0^2y^{*4}\right.$$

$$\left.-y_0\frac{y^{*5}}{5}+\frac{y^{*6}}{30}\right)+\frac{a_6}{\sin^3\theta}\left(y_0^3\frac{y^{*2}}{2}-\frac{1}{2}y_0^2y^{*3}+y_0\frac{y^{*4}}{4}-\frac{y^{*5}}{20}\right)$$

$$\left.\left.+\frac{a_7}{\sin^2\theta}\left(y_0^2\frac{y^{*2}}{2}-y_0\frac{y^{*3}}{3}+\frac{y^{*4}}{12}\right)+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0\frac{y^{*2}}{2}-\frac{y^{*3}}{6}\right)\right]\right]$$

$$+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+...+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right) \tag{4.31}$$

และจากการจับคู่ทำให้ได้ว่า

$$v_{com}=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+...+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)$$

ซึ่ง com หมายถึง ส่วนประกอบร่วมกัน (common part)

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ หาได้จากการนำผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในมาบวกกัน และลบออกด้วยส่วนประกอบร่วมกัน นั่นคือ

$$v(y)=v^{(o)}(y)+v^{(i)}(y)-v_{com}$$

$$v(y)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+...+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)+\frac{F}{M}\frac{(y_0-y)^2}{2}-c(y_0-y)$$

$$+\varepsilon^{2}\left[\frac{F}{M}\frac{(y_0-y)^4}{24}-c\frac{(y_0-y)^3}{6}+k_2\frac{(y_0-y)^2}{2}+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8\frac{(y_0-y)^2}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}y_0^7(y_0-y)^3+\ldots-y_0\frac{(y_0-y)^9}{9}+\frac{(y_0-y)^{10}}{9}\right)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0^7\frac{(y_0-y)^2}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{7}{6}y_0^6(y_0-y)^3+\ldots+y_0\frac{(y_0-y)^8}{8}-\frac{(y_0-y)^9}{72}\right)+\ldots$$

$$\left.\left.+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0\frac{(y_0-y)^2}{2}-\frac{(y_0-y)^3}{6}\right)\right]\right]$$

$$+\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)$$

$$-\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)+\ldots$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการบริงแมน คือ

$$v(y)=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)+\frac{F}{M}\frac{(y_0-y)^2}{2}-c(y_0-y)$$

$$+\varepsilon^{2}\left[\frac{F}{M}\frac{(y_0-y)^4}{24}-c\frac{(y_0-y)^3}{6}+k_2\frac{(y_0-y)^2}{2}+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8\frac{(y_0-y)^2}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}y_0^7(y_0-y)^3+\ldots-y_0\frac{(y_0-y)^9}{9}+\frac{(y_0-y)^{10}}{9}\right)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0^7\frac{(y_0-y)^2}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{7}{6}y_0^6(y_0-y)^3+\ldots+y_0\frac{(y_0-y)^8}{8}-\frac{(y_0-y)^9}{72}\right)+\ldots$$

$$\left.\left.+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0\frac{(y_0-y)^2}{2}-\frac{(y_0-y)^3}{6}\right)\right]\right]+\ldots \qquad (4.32)$$

จะเห็นว่า $\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0} \neq c$ และ $v(0) \neq 0$

มองอีกนัยหนึ่งคือ $y^* = \frac{y_0 - y}{\varepsilon^0}$ ถ้าต้องการให้ $y_0 - y \gg \varepsilon$ หรือ $y_0 - y \gg 1$ นั่นเอง ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ $y_0 < 1$ และ $0 < y < y_0$ ดังนั้น การเลือก $n = 0$ เป็นไปไม่ได้ เราจึงทำวิธีที่ 1.2 คือการเท่ากันของกำลังของ ε ของเทอมที่ 1 กับเทอมที่ 2 ของสมการ (4.18)

วิธีที่ 1.2 (เทอมที่ 1 = เทอมที่ 2)

นำสัมประสิทธิ์ของ ε เทอมที่ 1 = เทอมที่ 2 จะได้ว่า

$$0 = 2n + 2$$

$$2(n+1) = 0$$

$$n = -1$$

แทน $n = -1$ ใน (4.18) จะได้ว่า

$$\frac{d^2 v^{(i)}}{dy^{*2}} - v^{(i)} = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y) \tag{4.33}$$

เนื่องจาก $$h(y) = a_1\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^8 + a_2\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^7 + \ldots + a_8\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)$$

และ $$y = y_0 - y^*\varepsilon^n$$

$$n = -1 \ , \ y = y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}$$

จะได้ว่า $$h(y^*) = \frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)^7 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)$$

โดยที่

$$\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)^2 = y_0^2 - 2y_0\frac{y^*}{\varepsilon} + \frac{y^{*2}}{\varepsilon^2}$$

$$\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)^3 = y_0^3 - 3y_0^2\frac{y^*}{\varepsilon} + 3y_0\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2} - \frac{y^{*3}}{\varepsilon^3}$$

$$\left(y_0 - \frac{y^*}{\varepsilon}\right)^4 = y_0^4 - 4y_0^3\frac{y^*}{\varepsilon} + 6y_0^2\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2} - 4y_0\frac{y^{*3}}{\varepsilon^3} + \frac{y^{*4}}{\varepsilon^4}$$

$$\left(y_0-\frac{y^*}{\varepsilon}\right)^5=y_0^5-5y_0^4\frac{y^*}{\varepsilon}+10y_0^3\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2}-10y_0^2\frac{y^{*3}}{\varepsilon^3}+5y_0\frac{y^{*4}}{\varepsilon^4}-\frac{y^{*5}}{\varepsilon^5}$$

$$\left(y_0-\frac{y^*}{\varepsilon}\right)^6=y_0^6-6y_0^5\frac{y^*}{\varepsilon}+15y_0^4\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2}-20y_0^3\frac{y^{*3}}{\varepsilon^3}+15y_0^2\frac{y^{*4}}{\varepsilon^4}-6y_0\frac{y^{*5}}{\varepsilon^5}+\frac{y^{*6}}{\varepsilon^6}$$

$$\left(y_0-\frac{y^*}{\varepsilon}\right)^7=y_0^7-7y_0^6\frac{y^*}{\varepsilon}+21y_0^5\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2}-35y_0^4\frac{y^{*3}}{\varepsilon^3}+35y_0^3\frac{y^{*4}}{\varepsilon^4}-21y_0^2\frac{y^{*5}}{\varepsilon^5}+7y_0\frac{y^{*6}}{\varepsilon^6}-\frac{y^{*7}}{\varepsilon^7}$$

$$\left(y_0-\frac{y^*}{\varepsilon}\right)^8=y_0^8-8y_0^7\frac{y^*}{\varepsilon}+28y_0^6\frac{y^{*2}}{\varepsilon^2}-56y_0^5\frac{y^{*3}}{\varepsilon^3}+70y_0^4\frac{y^{*4}}{\varepsilon^4}-56y_0^3\frac{y^{*5}}{\varepsilon^5}+28y_0^2\frac{y^{*6}}{\varepsilon^6}$$

$$-8y_0\frac{y^{*7}}{\varepsilon^7}+\frac{y^{*8}}{\varepsilon^8}$$

จากสมการ (4.33) จะได้ว่า

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}}-v^{(i)}=\varepsilon^{-2}\frac{F}{M}+\frac{G}{M}h\left(y^*\right) \tag{4.34}$$

นำสมการ (4.17) แทนลงใน (4.34) จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dy^{*2}}\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2 v_2^{(i)}+\ldots\right)-\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2 v_2^{(i)}+\ldots\right)=\varepsilon^{-2}\frac{F}{M}+\frac{G}{M}h\left(y^*\right)$$

$$\frac{d^2v_0^{(i)}}{dy^{*2}}+\varepsilon\frac{d^2v_1^{(i)}}{dy^{*2}}+\varepsilon^2\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}+..-v_0^{(i)}-\varepsilon v_1^{(i)}-\varepsilon^2 v_2^{(i)}-\ldots=\varepsilon^{-2}\frac{F}{M}+\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}\left(y_0^8\right.\right.$$

$$\left.-8y_0^7\frac{y^*}{\varepsilon}+\ldots+\frac{y^{*8}}{\varepsilon^8}\right)+\frac{a_2}{\sin^7\theta}\left(y_0^7-7y_0^6\frac{y^*}{\varepsilon}+\ldots-\frac{y^{*7}}{\varepsilon^7}\right)+\frac{a_3}{\sin^6\theta}\left(y_0^6-6y_0^5\frac{y^*}{\varepsilon}+\ldots+\frac{y^{*6}}{\varepsilon^6}\right)$$

$$\left.+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}\left(y_0-\frac{y^*}{\varepsilon}\right)\right]$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^0:\frac{d^2v_0^{(i)}}{dy^{*2}}-v_0^{(i)}=\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \tag{4.35a}$$

$$\varepsilon^1:\frac{d^2v_1^{(i)}}{dy^{*2}}-v_1^{(i)}=0 \tag{4.35b}$$

$$\varepsilon^2:\frac{d^2v_2^{(i)}}{dy^{*2}}-v_2^{(i)}=0 \tag{4.35c}$$

สมการช่วยของ (4.35a) คือ $$r^2 - 1 = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$r = \pm 1$$

จะได้

$$\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_c = k_7 e^{y^*} + k_8 e^{-y^*} \tag{4.36}$$

โดยที่ k_7, k_8 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

เนื่องจากสมการ (4.35a) เป็นสมการไม่เอกพันธ์ ต่อไปเราจะคำนวณหา $\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p$ โดยใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

สมมติ $$\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p = A_1 \tag{4.37}$$

โดยที่ A_1 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*} = 0$$

และทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างอีกครั้ง จะได้ว่า

$$\frac{d^2 v_0^{(i)}}{dy^{*2}} = 0 \tag{ l }$$

แทน (l) ในสมการ (4.35a) จะได้

$$0 - A_1 = \frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta} y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta} y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta} y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta} y_0\right]$$

$$A_1 = -\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta} y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta} y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta} y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta} y_0\right]$$

แทน A_1 ในสมการ (4.37) จะได้

$$\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p = -\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta} y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta} y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta} y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta} y_0\right] \tag{4.38}$$

ซึ่ง $v_0^{(i)}\left(y^*\right)=\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_c+\left(v_0^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p$ ทำให้ได้ว่า

$$v_0^{(i)}\left(y^*\right)=k_7e^{y^*}+k_8e^{-y^*}-\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \quad (4.39)$$

จากเงื่อนไข (3.3) : $\left.\dfrac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$

แทน (4.17) ใน (3.3) จะได้ว่า

$$\left.\frac{d}{dy}\left(v_0^{(i)}+\varepsilon v_1^{(i)}+\varepsilon^2v_2^{(i)}+\ldots\right)\right|_{y=y_0}=c$$

$$\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\left.\frac{\varepsilon dv_1^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\left.\frac{\varepsilon^2dv_2^{(i)}}{dy}\right|_{y=y_0}+\ldots=c$$

$$-\varepsilon\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\varepsilon^2\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\varepsilon^3\left.\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}-\ldots=c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\varepsilon^1:\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=0 \quad (4.40a)$$

$$\varepsilon^2:\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=0 \quad (4.40b)$$

$$\varepsilon^3:\left.\frac{dv_2^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=0 \quad (4.40c)$$

จากสมการ (4.39) ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}=k_7e^{y^*}-k_8e^{-y^*} \quad (m)$$

แทนเงื่อนไข (4.40a) ใน (m) จะได้

$$\left.\frac{dv_0^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0}=k_7-k_8$$

$$0=k_7-k_8$$

$$k_7=k_8$$

แทน $k_7 = k_8$ ลงใน (4.39) ดังนั้น

$$v_0^{(i)}\left(y^*\right) = k_8\left(e^{y^*} + e^{-y^*}\right) - \frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \qquad (4.41)$$

ต่อไปเราจะทำการหา $v_1^{(i)}$

จากสมการ (4.35b) : $$\frac{d^2 v_1^{(i)}}{dy^{*2}} - v_1^{(i)} = 0$$

สมการช่วยคือ $$r^2 - 1 = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$r = \pm 1$$

จะได้

$$v_1^{(i)}\left(y^*\right) = k_9 e^{y^*} + k_{10} e^{-y^*} \qquad (4.42)$$

โดยที่ k_9, k_{10} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของ (4.42) จะได้ว่า

$$\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*} = k_9 e^{y^*} - k_{10} e^{-y^*} \qquad (\text{n})$$

แทนเงื่อนไข (4.40b) ใน (n) จะได้

$$\left.\frac{dv_1^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0} = k_9 - k_{10}$$

$$0 = k_9 - k_{10}$$

$$k_9 = k_{10}$$

แทน $k_9 = k_{10}$ ลงใน (4.42) ดังนั้น

$$v_1^{(i)}\left(y^*\right) = k_{10} e^{y^*} + k_{10} e^{-y^*}$$

$$v_1^{(i)}\left(y^*\right) = k_{10}\left(e^{y^*} + e^{-y^*}\right) \qquad (4.43)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$v_2^{(i)}\left(y^*\right) = k_{11}\left(e^{y^*} + e^{-y^*}\right) \qquad (4.44)$$

โดยที่ k_{11} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ดังนั้น ผลเฉลยชั้นในคือ

$$v^{(i)}\left(y^*\right)=k_8\left(e^{y^*}+e^{-y^*}\right)-\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

$$+k_{10}\left(e^{y^*}+e^{-y^*}\right)+k_{11}\left(e^{y^*}+e^{-y^*}\right)+\ldots$$

$$v^{(i)}\left(y^*\right)=k_{12}\left(e^{y^*}+e^{-y^*}\right)-\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]+\ldots \tag{4.45}$$

$$v^{(i)}\left(y\right)=k_{12}\left(e^{(y_0-y)\varepsilon}+e^{-(y_0-y)\varepsilon}\right)+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

$$+\ldots \tag{4.46}$$

เนื่องจาก $\varepsilon \gg 1$ ดังนั้น $1 \ll \left(y_0-y\right)\varepsilon$ ทำให้ได้ผลเฉลยชั้นใน คือ

$$v^{(i)}\left(y\right)=k_{12}e^{-(y_0-y)\varepsilon}+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]+\ldots \tag{4.47}$$

เนื่องจากในผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในจะมีส่วนประกอบร่วมกัน (common part) ซึ่งหาได้จากวิธีการจับคู่ (Matching)

การจับคู่ (Matching)

หลักการจับคู่โดยวิธีของ Van dyke [3] คือ

$$\lim_{y\to y_0} v^{(o)}\left(y;\varepsilon\right)=\lim_{y^*\to\infty} v^{(i)}\left(y^*;\varepsilon\right) \tag{4.48}$$

$$\lim_{y\to y_0}\left[\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\right]=$$

$$\lim_{y^*\to\infty}\left[k_{12}e^{-y^*}+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\right]$$

$$\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)=$$

$$\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)$$

จะได้ว่าส่วนประกอบร่วมกัน (common part) คือ

$$v_{com}=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right) \tag{4.49}$$

ซึ่ง com หมายถึง ส่วนประกอบร่วมกัน (common part)

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ หาได้จากการนำผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในมาบวกกัน และลบออกด้วยส่วนประกอบร่วมกัน นั่นคือ

$$v(y)=v^{(o)}(y)+v^{(i)}(y)-v_{com}$$

$$\begin{aligned}v(y)=&\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\\&+k_{12}e^{-(y_0-y)\varepsilon}+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]\\&-\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการบริงแมน คือ

$$v(y)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)+k_{12}e^{-(y_0-y)\varepsilon} \tag{4.50}$$

จากเงื่อนไข (3.2) ; $\qquad v(0)=0$

แทนเงื่อนไข (3.2) ลงในสมการ (4.50) จะได้เป็น

$$v(0)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}(0)^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}(0)^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}(0)\right)+k_{12}e^{-(y_0-0)\varepsilon}$$

$$0=k_{12}e^{-y_0\varepsilon}$$

ซึ่ง $e^{-y_0\varepsilon}$ ลู่เข้าหาศูนย์ ทำให้ได้ว่า k_{12} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

และจากเงื่อนไข (3.3) ; $\qquad \left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$

นำสมการ (4.50) มาหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y+\frac{a_8}{\sin\theta}\right)+\varepsilon k_{12}e^{-(y_0-y)\varepsilon}$$

แทนเงื่อนไข (3.3) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7 + \frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0 + \frac{a_8}{\sin\theta}\right) + \varepsilon k_{12}$$

$$c = \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7 + \frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0 + \frac{a_8}{\sin\theta}\right) + \varepsilon k_{12}e^{-(y_0-y)\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} c = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7 + \frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0 + \frac{a_8}{\sin\theta}\right)\right) + \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\varepsilon k_{12}}{e^{(y_0-y)\varepsilon}}$$

ดังนั้น
$$c = \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7 + \frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0 + \frac{a_8}{\sin\theta}\right) \qquad (4.51)$$

k_{12} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

<u>วิธีที่ 2</u>

จากผลเฉลยชั้นนอก (4.16) $v^{(o)}(y) = \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y\right)$

เราจะหาผลเฉลยชั้นใน จากสมการ (4.15)

$$\varepsilon^{-2}\frac{d^2v}{dy^2} - v = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y)$$

และจาก $\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\frac{d^2v}{dy^{*2}}$ ซึ่ง $n = -1$

ดังนั้น
$$\frac{d^2v}{dy^2} = \varepsilon^2\frac{d^2v}{dy^{*2}} \qquad (o)$$

แทน (o) ลงใน (4.15) จะได้

$$\frac{d^2v}{dy^{*2}} - v = \varepsilon^{-2}\frac{F}{M} + \frac{G}{M}h(y^*) \qquad (4.52)$$

เนื่องจาก $\varepsilon \gg 1$ จะได้ว่า $\frac{d^2v}{dy^{*2}} - v = \frac{G}{M}h(y^*)$ นั่นคือ

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} - v^{(i)} = \frac{G}{M}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right) \qquad (4.53)$$

สมการช่วยของ (4.53) คือ $r^2 - 1 = 0$

$$r^2 = 1$$

$$r = \pm 1$$

จะได้

$$\left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_c = k_{13}e^{y^*} + k_{14}e^{-y^*} \tag{4.54}$$

โดยที่ k_{13}, k_{14} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

เนื่องจากสมการ (4.53) เป็นสมการไม่เอกพันธ์ ต่อไปเราจะคำนวณหา $\left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p$ โดยใชวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

สมมติ $$\left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p = A_2 \tag{4.55}$$

โดยที่ A_2 เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv^{(i)}}{dy^*} = 0$$

และทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างอีกครั้ง จะได้ว่า

$$\frac{d^2v^{(i)}}{dy^{*2}} = 0 \tag{p}$$

แทน (p) ในสมการ (4.53) จะได้

$$0 - A_2 = \frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

$$A_2 = -\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

แทน A_2 ในสมการ (4.55) จะได้

$$\left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p = -\frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \tag{4.56}$$

ซึ่ง $v^{(i)}\left(y^*\right) = \left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_c + \left(v^{(i)}\left(y^*\right)\right)_p$ ทำให้ได้ว่า

$$v^{(i)}\left(y^*\right) = k_{13}e^{y^*} + k_{14}e^{-y^*} - \frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \tag{4.57}$$

จากเงื่อนไข (3.3) : $$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0} = c$$

และจาก (j) ; $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon^n \frac{dv}{dy^*}$ ซึ่ง $n=-1$

ดังนั้น $$\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{dv}{dy^*} \tag{q}$$

แทน (q) ลงใน (3.3) จะได้ $$\varepsilon^2 \left.\frac{dv}{dy^*}\right|_{y^*=0} = c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ ε จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv}{dy^*}\right|_{y^*=0} = 0 \tag{4.58}$$

จากสมการ (4.57) ทำการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\frac{dv^{(i)}}{dy^*} = k_{13}e^{y^*} - k_{14}e^{-y^*} \tag{r}$$

แทน (4.58) ใน (r) จะได้

$$\left.\frac{dv^{(i)}}{dy^*}\right|_{y^*=0} = k_{13} - k_{14}$$

$$0 = k_{13} - k_{14}$$

$$k_{13} = k_{14}$$

แทน $k_{13} = k_{14}$ ลงใน (4.57) ดังนั้น

$$v^{(i)}\left(y^*\right) = k_{14}\left(e^{y^*} + e^{-y^*}\right) - \frac{G}{M}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \tag{4.59}$$

เนื่องจาก $\varepsilon \gg 1$ ดังนั้น $1 \ll \left(y_0 - y\right)\varepsilon$ ทำให้ได้ผลเฉลยชั้นใน คือ

$$v^{(i)}\left(y^*\right) = k_{14}e^{-y^*} + \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

$$v^{(i)}\left(y\right) = k_{14}e^{-(y_0-y)\varepsilon} + \frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8 + \frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7 + \frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6 + \ldots + \frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right] \tag{4.60}$$

เนื่องจากในผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในจะมีส่วนประกอบร่วมกัน (common part) ซึ่งหาได้จากวิธีการจับคู่ (Matching)

การจับคู่ (Matching)

หลักการจับคู่โดยวิธีของ Van dyke [3] สมการที่ (4.48) คือ

$$\lim_{y\to y_0} v^{(o)}\left(y;\varepsilon\right)=\lim_{y^*\to\infty} v^{(i)}\left(y^*;\varepsilon\right)$$

$$\lim_{y\to y_0}\left[\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\right]=$$

$$\lim_{y^*\to\infty}\left[k_{14}e^{-y^*}+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)\right]$$

$$\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)=$$

$$\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)$$

จะได้ว่าส่วนประกอบร่วมกัน (common part) คือ

$$v_{com}=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right) \tag{4.61}$$

ซึ่ง com หมายถึง ส่วนประกอบร่วมกัน (common part)

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ หาได้จากการนำผลเฉลยชั้นนอกและผลเฉลยชั้นในมาบวกกัน และลบออกด้วยส่วนประกอบร่วมกัน นั่นคือ

$$v(y)=v^{(o)}(y)+v^{(i)}(y)-v_{com}$$

$$v(y)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)$$

$$+k_{14}e^{-(y_0-y)\varepsilon}+\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left[\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right]$$

$$-\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y_0^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y_0^7+\frac{a_3}{\sin^6\theta}y_0^6+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y_0\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการบริงแมน คือ

$$v(y)=\frac{\varepsilon^l}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}y^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}y^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}y\right)+k_{14}e^{-(y_0-y)\varepsilon} \tag{4.62}$$

จากเงื่อนไข (3.2) ; $v(0)=0$

แทนเงื่อนไข (3.2) ลงในสมการ (4.62) จะได้เป็น

$$v(0)=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{a_1}{\sin^8\theta}(0)^8+\frac{a_2}{\sin^7\theta}(0)^7+\ldots+\frac{a_8}{\sin\theta}(0)\right)+k_{14}e^{-(y_0-0)\varepsilon}$$

$$0=k_{14}e^{-y_0\varepsilon}$$

ซึ่ง $e^{-y_0\varepsilon}$ ลู่เข้าหาศูนย์ ทำให้ได้ว่า k_{14} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

และจากเงื่อนไข (3.3) ; $\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$

นำสมการ (4.62) มาหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y+\frac{a_8}{\sin\theta}\right)+\varepsilon k_{14}e^{-(y_0-y)\varepsilon}$$

แทนเงื่อนไข (3.3) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0+\frac{a_8}{\sin\theta}\right)+\varepsilon k_{14}$$

$$c=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0+\frac{a_8}{\sin\theta}\right)+\varepsilon k_{14}e^{-(y_0-y)\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}c=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0+\frac{a_8}{\sin\theta}\right)\right)+\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\varepsilon k_{14}}{e^{(y_0-y)\varepsilon}}$$

ดังนั้น $$c=\frac{\varepsilon^{l}}{v_p}\left(\frac{8a_1}{\sin^8\theta}y_0^7+\frac{7a_2}{\sin^7\theta}y_0^6+\ldots+\frac{2a_7}{\sin^2\theta}y_0+\frac{a_8}{\sin\theta}\right) \tag{4.63}$$

k_{14} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

<u>สมการสโตกส์ (Stokes Equation)</u>

จากสมการ (3.7)

$$\frac{d^2v}{dy^2}-\varepsilon^2 v=\frac{F}{M}+\varepsilon^2\frac{G}{M}h(y)$$

สมการสโตกส์ คือ

$$\frac{d^2v}{dy^2}=\frac{F}{M} \tag{4.64}$$

เงื่อนไข
$$\frac{dv}{dy}=c \quad \text{ที่} \quad y=y_0$$

$$\lim_{y\to r}v(y)=0 \tag{4.65}$$

โดยที่ r เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากสมการ (4.64) ทำการหา v และหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$\frac{dv}{dy}=\frac{F}{M}y+k_{15} \tag{4.66}$$

โดยที่ k_{15} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

แทนเงื่อนไข (3.3) : $\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=c$ ลงใน (4.66) จะได้ว่า

$$\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=y_0}=\frac{F}{M}y_0+k_{15}$$

$$c=\frac{F}{M}y_0+k_{15}$$

$$k_{15}=c-\frac{F}{M}y_0$$

แทน k_{15} ในสมการ (4.66) จะได้

$$\frac{dv}{dy}=\frac{F}{M}y+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right) \tag{s}$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของ (s) จะได้ว่า

$$v(y)=\frac{F}{M}\frac{y^2}{2}+\left(c-\frac{F}{M}y_0\right)y+k_{16} \tag{4.67}$$

โดย k_{16} เป็นค่าคงที่ใด ๆ

เงื่อนไข (4.65) : $\lim_{y\to r} v = 0$

$$\lim_{y\to r} v = \frac{F}{M}\frac{r^2}{2} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)r + k_{16}$$

$$0 = \frac{F}{M}\frac{r^2}{2} + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)r + k_{16}$$

$$k_{16} = -\frac{F}{M}\frac{r^2}{2} - \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)r$$

แทน k_{16} ในสมการ (4.67) จะได้

$$v(y) = \frac{F}{2M}y^2 + \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)y - \frac{F}{M}\frac{r^2}{2} - \left(c - \frac{F}{M}y_0\right)r \tag{4.68}$$

ซึ่ง $F = \frac{p_0 L}{2v_p\mu}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} - \frac{L^2}{2v_p\mu}\rho\tilde{g}g_0 = \frac{L^2}{2v_p\mu}\frac{dp_0\tilde{p}}{Ld\tilde{x}} - \frac{L^2}{2v_p\mu}\rho g = \frac{L^2}{2v_p\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)$

และ $M = \frac{1}{\varepsilon^l}$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการสโตกส์ คือ

$$v(y) = \left(\frac{L^2}{2v_p\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)\frac{\varepsilon^l}{2}\right)y^2 + \left(c - \left(\frac{L^2}{2v_p\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)\frac{\varepsilon^l}{2}\right)y_0\right)y$$
$$-\left(\frac{L^2}{2v_p\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)\frac{\varepsilon^l}{2}\right)\frac{r^2}{2} - \left(c - \left(\frac{L^2}{2v_p\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)\frac{\varepsilon^l}{2}\right)y_0\right)r \tag{4.69}$$

สำหรับการประยุกต์ใช้สมการสโตกส์บริงแมนนั้น เราจะประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลของของไหลพีซีแอลอันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขน ซึ่งความเร็วของเส้นขนได้แสดงในรูปภาพที่ 4.1 ซึ่งได้ข้อมูลมาจาก [8] ซึ่ง K.Chamsri ได้ประมาณค่ามาจากข้อมูลการทดลอง โดยสร้างเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง 8 $a_1\zeta^8 + a_2\zeta^7 + \ldots + a_8\zeta^1$ โดยที่ $a_i, i = 1,2,\ldots,8$ ได้แสดงในตารางที่ 4.2

ในส่วนต่อไป เราจะทำการสร้างกราฟ (plot graph) ของผลเฉลยสมการสโตกส์บริงแมน โดยที่ค่าของตัวแปรต่างๆ ได้แสดงในตารางที่ 4.1 , 4.2 และ4.3 โดยที่ 4.1 แสดงค่าของตัวแปรที่ใช้สำหรับแต่ละมุม θ ที่เส้นขนทำมุมกับระนาบ xy ตารางที่ 4.3 แสดงค่าตัวแปรที่ใช้สร้างกราฟสำหรับทุกมุม θ เป็นดังนี้

ตารางที่ 4.1 ค่าของตัวแปรต่างๆ

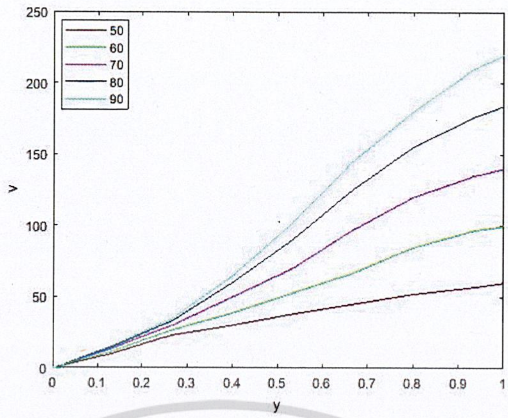
ตัวแปร / มุม θ	50°	60°	70°	80°	90°
ε^l	0.6716	0.7099	0.7331	0.7439	0.7487
y_0	0.7672	0.8683	0.9353	0.9818	1
K	0.0011	0.0016	0.0021	0.0023	0.0024

ตารางที่ 4.2 ค่าของ $a_1, a_2, ..., a_8 \times 10^5$

a_1	0.2498	0.4043	-0.4987	-0.3648	-0.5386
a_2	-1.0718	-1.6678	2.1268	1.5687	2.2148
a_3	1.9290	2.8656	-3.7102	-2.7659	-3.7309
a_4	-1.8459	-2.5945	3.4021	2.5751	3.3198
a_5	1.0133	1.3380	-1.7529	-1.3584	-1.6788
a_6	-0.3157	-0.3896	0.5012	0.4022	0.4803
a_7	0.0504	0.0585	-0.0717	-0.0593	-0.0694
a_8	-0.0023	-0.0024	0.0049	0.0044	0.0050

ตารางที่ 4.3 ตัวแปรที่ใช้สำหรับทุกมุม θ

ตัวแปร	ค่าของตัวแปร
p_0	1
L	7.5
v_p	1
μ	3×10^{-6}
$\frac{dp}{dx}$	-1
ρ	992×10^{-15}
g	9.81×10^{6}



รูปที่ 4.1 กราฟแสดงความเร็วของเส้นขนที่มุม $\theta = 50^{\circ}$ ถึง $\theta = 90^{\circ}$

เนื่องจาก $\varepsilon = \left(\dfrac{1}{2MDa}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2\left(\dfrac{1}{\varepsilon^{l}}\right)\left(\dfrac{K}{L^{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{\dfrac{2K}{\varepsilon^{l}L^{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{\varepsilon^{l}L^{2}}{2K}\right)^{\frac{1}{2}}$ ทำให้เห็นว่าค่าของ ε เป็นดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.4 ค่าของ ε

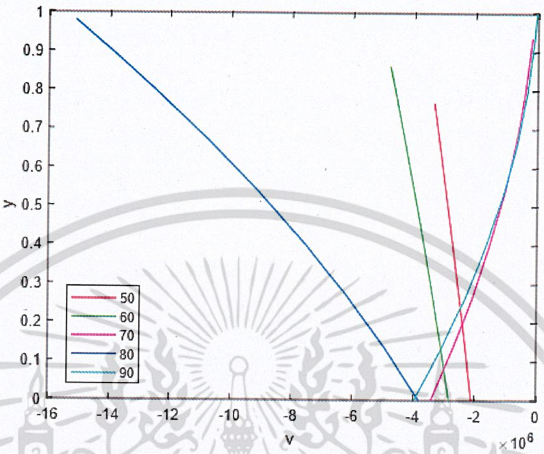
มุม θ	ค่าของ ε
50°	131.0404
60°	111.7082
70°	99.0874
80°	95.3761
90°	93.6687

จะเห็นว่า ค่าของ $\varepsilon \gg 1$ ทำให้กรณีที่ $\varepsilon \ll 1$ นั้นใช้ไม่ได้สำหรับปัญหานี้ แต่สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นที่ $\varepsilon \ll 1$ ได้

<u>กราฟของสมการบริงแมน</u>

กรณีที่ 2 $\varepsilon \gg 1$

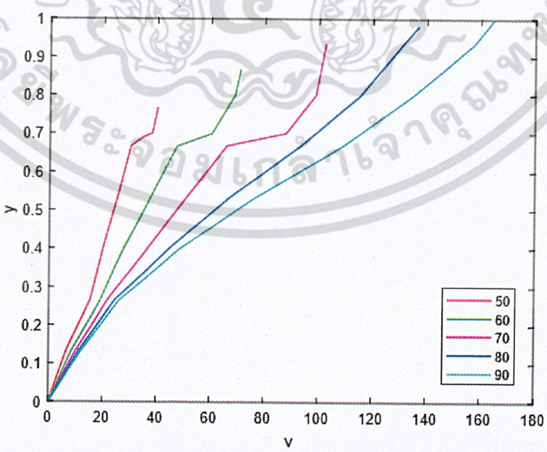
วิธีที่ 1.1 $(n=0)$



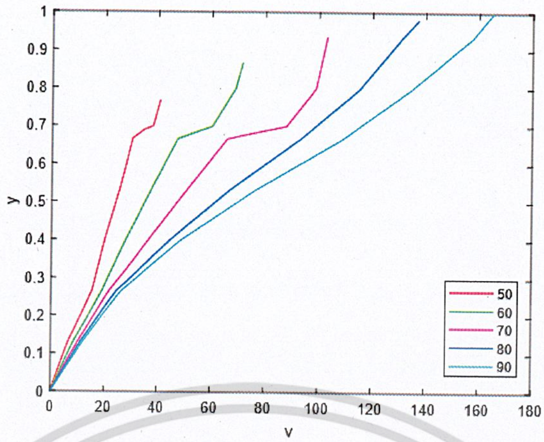
รูปที่ 4.2 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล (วิธีที่ 1.1)

จากรูปภาพที่ 4.2 จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้ไม่สอดคล้องกับค่าขอบที่กำหนด ดังนั้นกรณีที่ $n=0$ ไม่สามารถใช้ได้

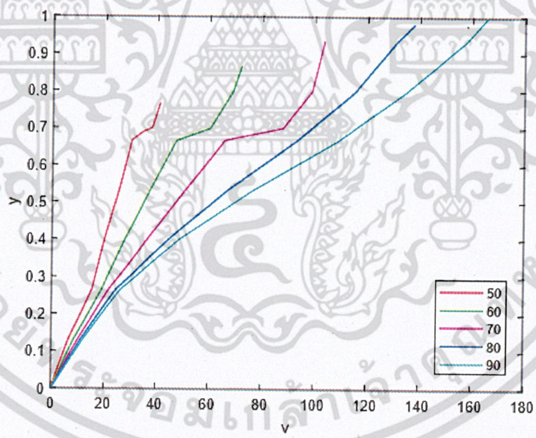
วิธีที่ 1.2 $(n=-1)$



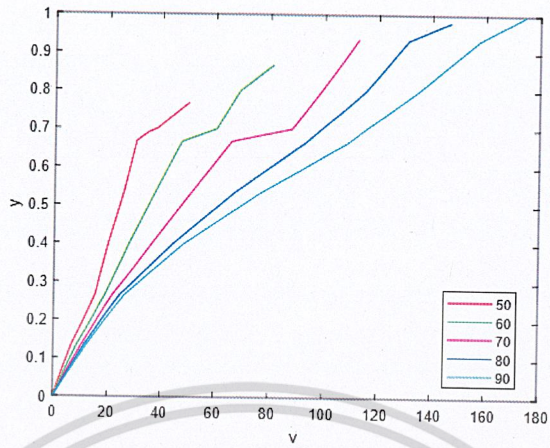
รูปที่ 4.3 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12}=0$



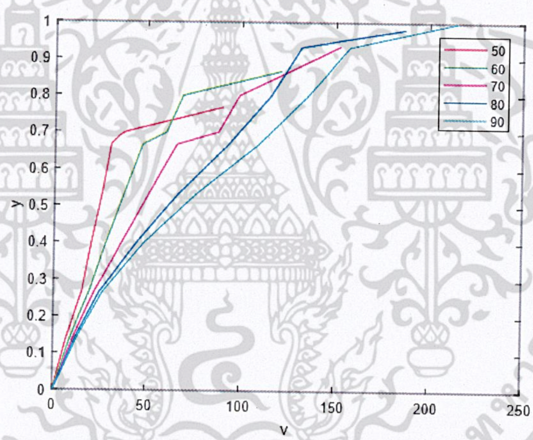
รูปที่ 4.4 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 0.5$



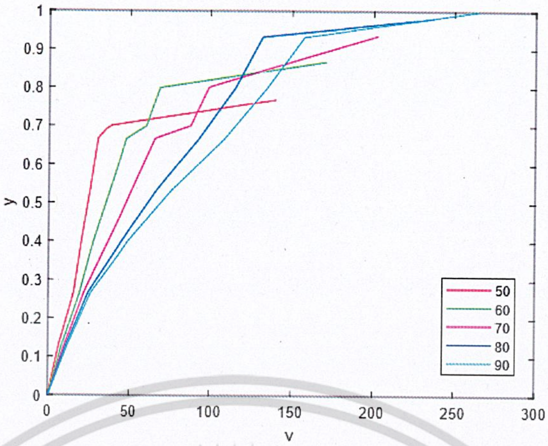
รูปที่ 4.5 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 1$



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 10$



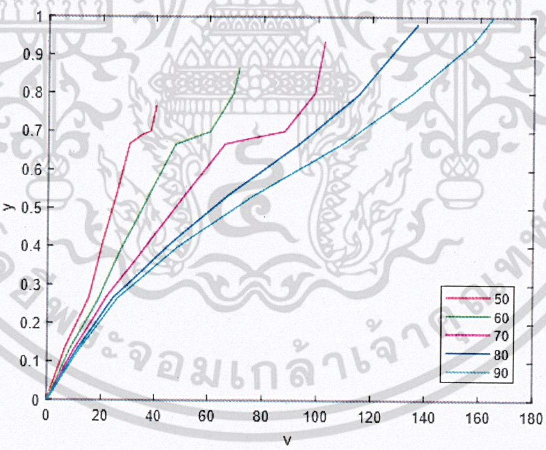
รูปที่ 4.7 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 50$



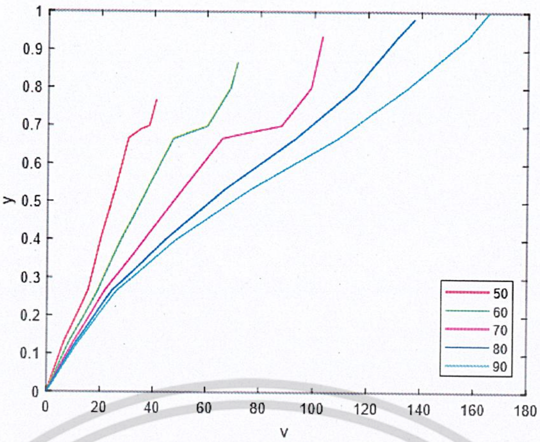
รูปที่ 4.8 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 100$

จากรูปภาพที่ 4.3 - 4.8 แสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล สำหรับมุมแต่ละองศา กรณี $n = -1$ จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับความเร็วของเส้นขนที่มีในสมการ

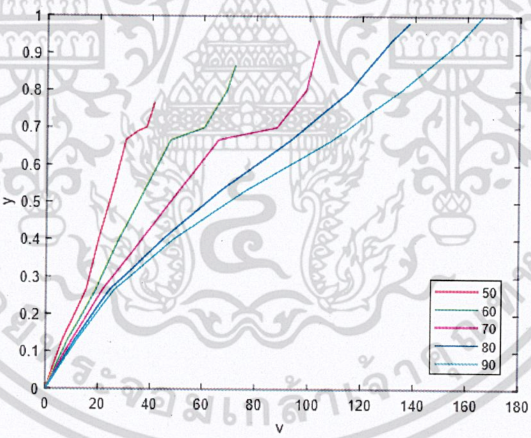
วิธีที่ 2



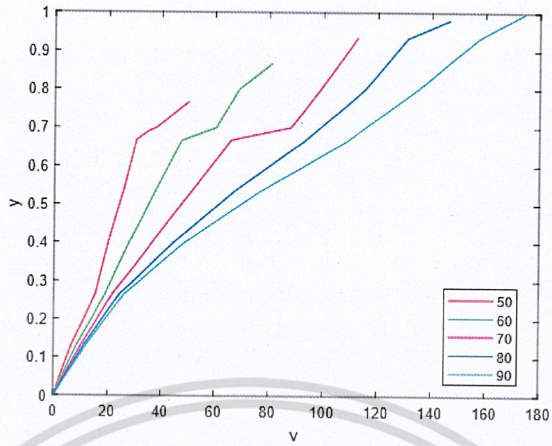
รูปที่ 4.9 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 0$



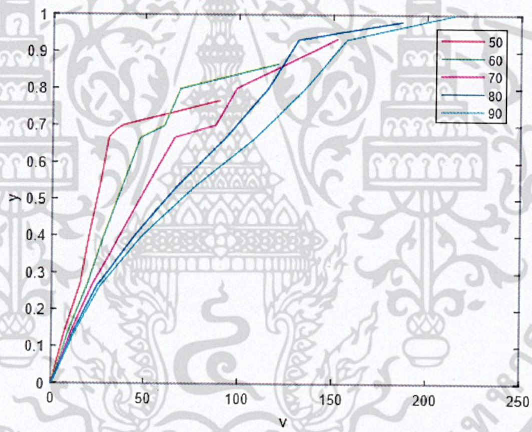
รูปที่ 4.10 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 0.5$



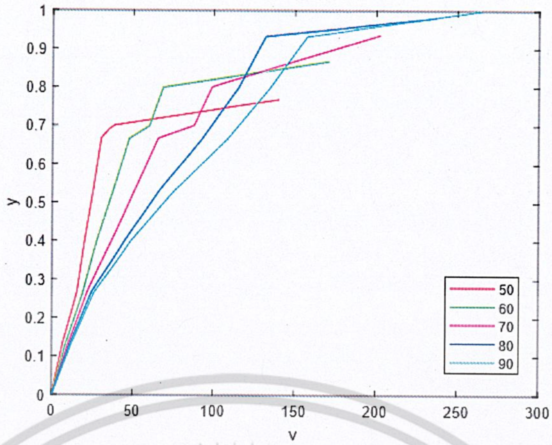
รูปที่ 4.11 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 1$



รูปที่ 4.12 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 10$



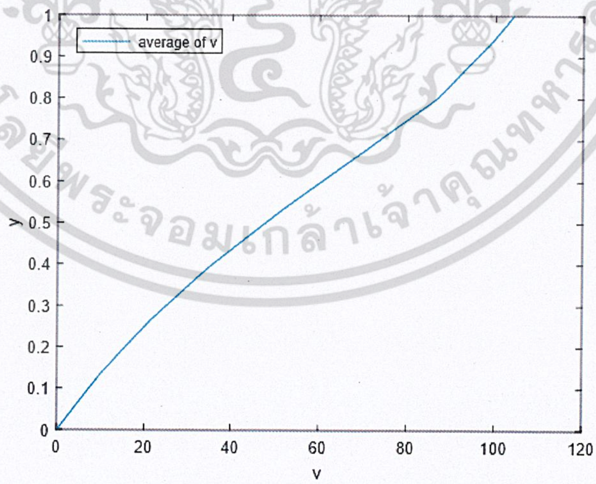
รูปที่ 4.13 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 50$



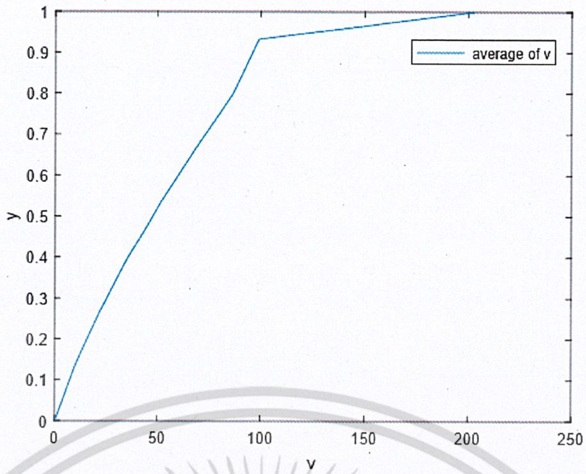
รูปที่ 4.14 กราฟแสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{14} = 100$

จากรูปภาพที่ 4.9 - 4.14 แสดงความเร็วของของไหลพีซีแอล สำหรับมุมแต่ละองศา จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับความเร็วของเส้นขนที่มีในสมการ

ต่อไปจะทำการสร้างกราฟแสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหลพีซีแอลที่มุมมีค่าตั้งแต่ 50° ถึง 90° โดยที่รูปที่ 4.15 แสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหลพีซีแอลที่ $k_{12} = 1$ โดยที่รูปที่ 4.16 แสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหลพีซีแอลที่ $k_{12} = 100$



รูปที่ 4.15 กราฟแสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 1$



รูปที่ 4.16 กราฟแสดงความเร็วเฉลี่ยของของไหลพีซีแอล โดยที่ $k_{12} = 100$

กราฟของสมการสโตกส์

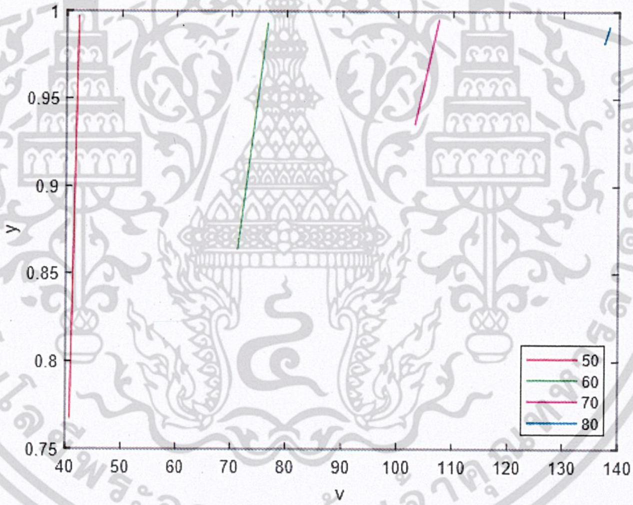
กำหนดให้ค่าของตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการสร้างกราฟ ดังตารางที่ 4.5 และ 4.6 โดยตารางที่ 4.5 แสดงค่าของตัวแปรในสมการสโตกส์ และตารางที่ 4.6 ค่าของตัวแปรที่ใช้สำหรับทุกมุม θ ในสมการสโตกส์

ตารางที่ 4.5 ค่าของตัวแปรในสมการสโตกส์

ตัวแปร / มุม θ	50°	60°	70°	80°
y_0	0.7672	0.8683	0.9353	0.9818
c	6.0242	40.6500	71.6000	103.056

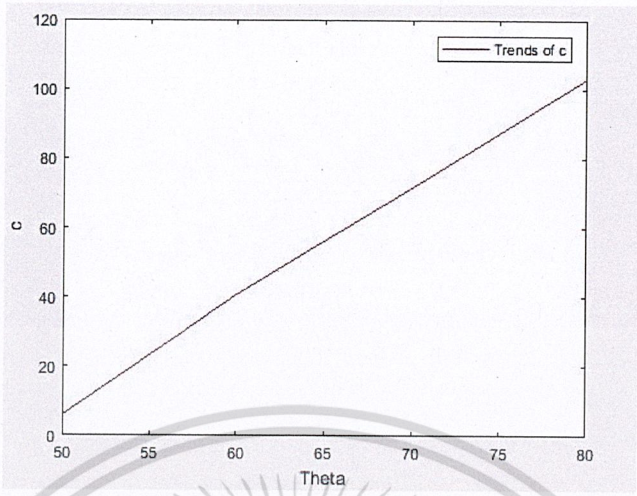
ตารางที่ 4.6 ค่าของตัวแปรที่ใช้สำหรับทุกมุม θ ในสมการสโตกส์

ตัวแปร	ค่าของตัวแปร
p_0	1
L	7.5
v_p	1
μ	3×10^3
$\frac{dp}{dx}$	-1
ρ	992×10^{-15}
g	9.81×10^6
ε^l	1
r	6



รูปที่ 4.17 กราฟแสดงความเร็วในบริเวณชั้นของสมการสโตกส์

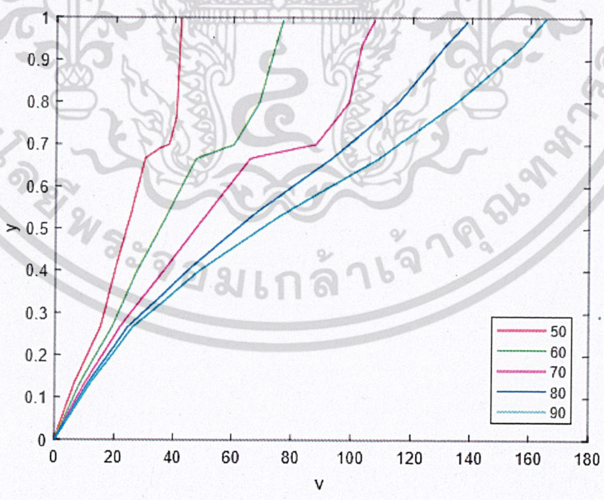
จากรูปภาพที่ 4.17 แสดงความเร็วในบริเวณชั้นของสมการสโตกส์สำหรับมุมมีค่าตั้งแต่ 50° ถึง 80° เมื่อนำกราฟของบริงแมนและสโตกส์มาต่อกัน จะได้ดังรูปภาพ 4.19 โดยที่ $k_{12} = 0.5$



รูปที่ 4.18 กราฟแสดงแนวโน้มของค่า c ในสมการสโตกส์

จากรูปภาพที่ 4.18 แสดงแนวโน้มของค่า c ในสมการสโตกส์ จะเห็นว่าค่า c มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมุม θ มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงความเร็วมีค่าเพิ่มขึ้นตามองศาที่เส้นขนทำกับพื้นราบ เนื่องจากความเร็วของเส้นขนมีค่ามากที่สุดที่ $\theta = 90^{\circ}$ ตามรูปภาพที่ 4.1

<u>กราฟของสมการสโตกส์บริงแมน</u>



รูปที่ 4.19 กราฟแสดงความเร็วในบริเวณชั้นของสมการสโตกส์บริงแมน

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

จากการศึกษาปัญหาพิเศษเรื่อง “การไหลของของไหลพีซีแอลในปอดมนุษย์โดยวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ” ซึ่งในปัญหาพิเศษนี้ต้องการหาความเร็วของของไหลพีซีแอล อันเนื่องมาจากการพัดโบกของเส้นขนเพื่อกำจัดสิ่งแปลกปลอมออกจากร่างกายของมนุษย์ โดยใช้วิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คือ สมการสโตกส์บริงแมนที่ได้มาจาก [3] และเราได้ประยุกต์ใช้วิธีการไร้มิติ เพื่อให้สมการมีหน่วยเป็น 1 หรือไม่มีหน่วยนั่นเอง และนำวิธีการกระจายเชิงเส้นกำกับมาช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย

สมการสโตกส์บริงแมนสามารถแยกออกเป็นสมการสโตกส์ และสมการบริงแมน สำหรับสมการบริงแมน เราหาผลเฉลยโดยแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 $\varepsilon \ll 1$ พบว่าไม่สามารถใช้กับปัญหานี้ได้ เนื่องจากค่าของ ε ในแต่ละมุม θ นั้นมีค่ามากกว่า 1 มาก ๆ และในกรณีที่ 2 $\varepsilon \gg 1$ คำนวณโดยมีผลเฉลยชั้นนอก และผลเฉลยชั้นใน ซึ่งการหาผลเฉลยแบบนี้เรียกว่า วิธีการการกระจายเชิงเส้นกำกับควบคู่ โดยใช้ข้อมูลดังตารางที่ 4.1 – 4.3 ในการสร้างกราฟ จะเห็นว่ากรณีที่ $n=0$ ไม่สามารถหาผลเฉลยที่ถูกต้องได้ ดังรูปภาพที่ 4.2 แต่กรณีที่ $n=-1$ นั้นจากกราฟพบว่าความเร็วของของไหลที่เส้นขนเอียงทำมุม θ ที่ขนาดมุมต่าง ๆ นั้นความเร็วเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ โดยมุม 90° จะมีความเร็วมากที่สุด ส่วนมุม 50° จะมีความเร็วน้อยที่สุด ดังรูปภาพที่ 4.3 – 4.14 และจะเห็นว่าความเร็วเฉลี่ยของของไหลที่มุมมีค่าตั้งแต่ 50° ถึง 90° นั้นเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปภาพที่ 4.15 เมื่อ $k_{12}=1$ และรูปภาพที่ 4.16 เมื่อ $k_{12}=100$ และในส่วนของสมการสโตกส์นั้น สังเกตได้ว่าความเร็วจะเพิ่มต่อไปจากสมการบริงแมน เมื่อ $k_{12}=0.5$ ดังรูปภาพที่ 4.19

จึงสรุปได้ว่าในการหาความเร็วของของไหลพีซีแอลนั้น เส้นขนที่เอียงทำมุม θ มีผลต่อขนาดของความเร็วของของไหลพีซีแอลนั่นเอง ดังแสดงในรูปภาพที่ 4.1 - 4.19 โดยใช้ข้อมูลในตารางที่ 4.1 – 4.5

ข้อเสนอแนะ

1. ประยุกต์ใช้สมการสโตกส์บริงแมนกับปัญหาการไหลของของไหลอื่น
2. ประยุกต์ใช้วิธีการอื่นในการศึกษาหาผลเฉลยของปัญหานี้

เอกสารอ้างอิง

[1] ธัญดร ออกวะลา.เอกสารประกอบการสอนวิชากลศาสตร์ของไหล[อินเทอร์เน็ต]. นครปฐม:คณ วิศวกรรมศาสตร์กำแพงแสน;2553[เข้าถึงเมื่อ 9 พ.ย. 2560]. เข้าถึงได้จาก : http://irre.ku.ac.th/v3/pdf/books/thandon/FluidMechanics.pdf

[2] K. Chamsri, Formulation of a Well-Posed Stokes-Brinkman problem with a Permeability Tensor, Journal of Mathematics, [31-10-2017].

[3] [เข้าถึงเมื่อ 12 พ.ค. 2560].เข้าถึงได้จาก : https://s3-ap-southeast-1.amazonaws.com/erbuc/files/5495_28e63df3-d475-40ee-b736-700058c32251.pdf

[4] พัชรินทร์ เหมโชติ. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีน เซอร์วิส ซัพพลาย, 2555.

[5] Junping Shi, Nondimensionalization [อินเทอร์เน็ต]. [เข้าถึงเมื่อ 2 ธ.ค. 2560].เข้าถึงได้จาก http://www.math.wm.edu/~shij/math345/notes1.pdf

[6] Chamsri, K and Schreyer, (2018). Effects of the Cilia Movement on Fluid Velocity for Fixed Domain, Manuscript in preparation.

[7] โศรฎา แข็งการ. การใช้MATLABสำหรับงานทางวิศวกรรม. ฉบับปรับปรุงครั้งที่2 นครราชสีมา: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

[8] Wattanachamsri, Ki and Schreyer, L., Effects of the cilia movement on fluid relocidy for fixed domain, To be submitted