อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตและการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น โดยใช้การแปลงลาปลาซ

CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVES AND SOLVING LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING LAPLACE TRANSFORMATION

กาญจนาพร ตาลศรี
จารุวรรณ ว่องไววิริยะ
ณัชชารัณ ยานะกิจ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVES AND SOLVING LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING LAPLACE TRANSFORMATION

KANJANAPORN TANSRI
JARUWAN WONGWAIWIRIYA
NUTCHARUN YANAKIT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตและการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น โดยใช้การแปลงลาปลาซ
CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVES AND SOLVING LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING LAPLACE TRANSFORMATION

ชื่อนักศึกษา นางสาวกาญจนาพร ตาลศรี รหัสนักศึกษา 57050013
นางสาวจารุวรรณ ว่องไววิริยะ รหัสนักศึกษา 57050025
นางสาวณัชชารัณ ยานะกิจ รหัสนักศึกษา 57050044

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2560

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร. กาญจนา คำนึงกิจ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร. อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการ	
ผศ.ดร. ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นโดยการแปลงลาปลาซ

ชื่อนักศึกษา นางสาวกาญจนาพร ตาลศรี รหัสนักศึกษา 57050013
นางสาวจารุวรรณ ว่องไววิริยะ รหัสนักศึกษา 57050025
นางสาวณัชชารัณ ยานะกิจ รหัสนักศึกษา 57050044

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2560

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต และพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นในรูปแบบ

1) สมการแบบไม่เอกพันธ์ในรูป ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$
2) สมการการกวัดแกว่งเชิงเศษส่วนประกอบ

โดยการใช้การแปลงลาปลาซ เราได้ผลเฉลยของสมการดังกล่าวในรูปฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์

คำสำคัญ : ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์ สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Caputo Fractional Derivatives and Solving Linear Fractional Differential Equations by Using Laplace Transformation
Students	Miss Kanjanaporn Tansri Student ID 57050013
	Miss Jaruwan Wongwaiwiriya Student ID 57050025
	Miss Nutcharun Yanakit Student ID 57050044
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2017
Advisor	Asst.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam

Abstract

This special problem is a study of the Rie-mann Liouville fractional integrals, Caputo fractional derivatives, and investigate the following linear fractional differential equations :

1) the non-homogeneous equation in the form ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$
2) the composite fractional oscillation eaquation.

By using Laplace transformation, we obtain the exact solutions for both equations in terms of Mittag-Leffler functions.

Keywords : Caputo fractional derivative, Linear Fractional Differential Equations, Rie-mann Liouville fractional integral.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือเป็นอย่างสูงจากบุคคลผู้มีพระคุณหลายท่านดังนี้

ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา และสมาชิกในครอบครัวทุกท่านผู้ซึ่งอยู่เบื้องหลังคอยอบรมสั่งสอน ให้ความอบอุ่นและเป็นกำลังใจในการจัดทำปัญหาพิเศษมาตลอด

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษาในการทำหัวข้อปัญหาพิเศษที่ได้ให้คำปรึกษาและคำแนะนำต่างๆอย่างใกล้ชิดและเสนอแนวทางแก้ปัญหา รวมถึงการตรวจสอบและแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้มีความสมบูรณ์เพิ่มมากขึ้น

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ และ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษที่ให้คำแนะนำและชี้แจงจุดบกพร่องที่ควรแก้ไข ช่วยตรวจสอบเพิ่มความสมบูรณ์ ให้กับปัญหาพิเศษฉบับนี้ สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ซึ่งให้ความรู้ทางวิชาการและความรู้อันเป็นพื้นฐานทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ ที่เอื้อต่อการทำปัญหาพิเศษเล่มนี้ จนทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

อนึ่ง คณะผู้จัดทำหวังว่าปัญหาพิเศษเล่มนี้จะมีประโยชน์อยู่ไม่น้อย จึงขอมอบส่วนดีทั้งหมดนี้ให้แก่ เหล่าคณาจารย์ที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาจนทำให้ผลงานปัญหาพิเศษนี้เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่เกี่ยวข้อง สำหรับข้อบกพร่องต่างๆที่อาจจะเกิดขึ้นนั้น คณะผู้จัดทำขอน้อมรับผิดแต่เพียงผู้เดียว และยินดีที่จะรับฟังคำชี้แนะจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์แก่การปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาให้ดียิ่งขึ้นต่อไป

กาญจนาพร ตาลศรี
จารุวรรณ ว่องไววิริยะ
ณัชชารัณ ยานะกิจ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....ข
กิตติกรรมประกาศ.....ค
สารบัญ.....ง
สารบัญตาราง.....ฉ
สารบัญรูป.....ช
สัญลักษณ์/คำย่อ.....ซ
บทที่1 บทนำ.....1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ.....2
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ.....2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....2
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....2
บทที่2 ความรู้พื้นฐาน.....4
2.1 ฟังก์ชันพิเศษ.....4
2.2 ปริพันธ์จำกัดเขต.....8
2.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ.....11
2.4 ผลการแปลงลาปลาซ.....14
2.5 อนุกรมกำลัง.....20
บทที่3 ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์.....22
3.1 ปริพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์-ลียูวิลล์ เมื่อขอบเขตล่างเป็นศูนย์.....23
3.2 ปริพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์-ลียูวิลล์ เมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์.....32
บทที่4 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต.....38
4.1 บทนิยามและสมบัติของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต.....38
4.2 การหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันที่สำคัญ.....39
4.3 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต.....44

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

บทที่5 สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น.....49

5.1 สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ในรูปแบบของ ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$.....49

5.2 สมการการกวัดแกว่งเชิงเศษส่วนประกอบ.....51

บทที่6 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....55

6.1 สรุปผลงานวิจัย.....55

6.2 ข้อเสนอแนะ.....55

เอกสารอ้างอิง.....56

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่1 แสดงระยะเวลาการดำเนินงานตามแผนงาน 3

ตารางที่2 สรุปสูตรการแปลงลาปลาซ.....16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่1 ผลรวมรีมันน์.....8
รูปที่2 ปริพันธ์จำกัดเขต.....10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์/คำย่อ

สัญลักษณ์/คำย่อ	คำอธิบาย
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\gamma(s,x)$	ฟังก์ชันแกมมาไม่สมบูรณ์ด้านล่าง
$\psi(x)$	ฟังก์ชันไดแกมมา
$B_x(a,b)$	ฟังก์ชันเบต้าไม่สมบูรณ์
$E_{\alpha,\beta}(z)$	ฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ 2 ตัวแปร
$D_c^{-p} f(x)$	อินทิกรัลเชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์
$D_c^{p} f(x)$	อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์
${}^{c}D_a^{p} f(x)$	อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในทางคณิตศาสตร์สมการเชิงอนุพันธ์มีบทบาทสำคัญอย่างมาก เนื่องจากเป็นสิ่งที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับศาสตร์หลายแขนง ไม่ว่าจะเป็นด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ควรที่จะศึกษาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์มาก่อน โดยในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นจะศึกษาในรูปแบบของอันดับที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ดังนั้นจะไม่ครอบคลุมถึงอันดับที่เป็นจำนวนใดๆที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ทำให้มีบางปัญหาที่ไม่สามรถหาผลเฉลยได้ ทำให้เกิดข้อสงสัยว่าการหาอนุพันธ์ที่อันดับไม่เป็นจำนวนเต็มนั้นมีหรือไม่ แล้วถ้ามีมีนิยามอย่างไร จึงเป็นที่มาของการศึกษาในครั้งนี้

โดยทั่วไปตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $D = \frac{d}{dx}$ เป็นที่คุ้นเคยกันดีในวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับฟังก์ชัน f ที่เหมาะสม และอันดับที่ n จะเขียนแทนโดย $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ในปีค.ศ. 1695 L'Hopital เกิดข้อสงสัยว่าอันดับสามารถเป็นจำนวนที่เป็นเศษส่วนได้หรือไม่ หลังจากนั้นแคลคูลัสเชิงเศษส่วนจึงเป็นที่สนใจอย่างแพร่หลายในหมู่นักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงหลายท่านไม่ว่าจะเป็น Euler, Laplace, Caputo, Fourier, Abel, Liouville and Riemann

ในปัจจุบันมีนักคณิตศาสตร์สมัยใหม่หลายท่านที่สนใจและทำการศึกษาเกี่ยวกับแคลคูลัสเชิงเศษส่วน (Fractional Calculus) แต่แนวคิดที่มีชื่อเสียงและนิยมใช้กันมากที่สุดคือแนวคิดของรีมันน์ ลียูวิลล์ (Riemann-Liouville) ดังนั้นในปัญหาพิเศษนี้จะใช้ปริพันธ์เชิงเศษส่วนภายใต้แนวคิดของรีมันน์ ลียูวิลล์ ซึ่งจะขยายไปสู่อนุพันธ์เชิงเศษส่วนภายใต้แนวคิดของคาปูโต (Caputo) เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1) ศึกษาแนวคิดของอนุพันธ์และปริพันธ์ที่อันดับไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนนับ

2) ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อันดับของการหาอนุพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนนับ

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1) อินทิกรัลที่พิจารณาเป็นอินทิกรัลในแนวคิดของ รีมันน์-ลียูวิลล์
2) อนุพันธ์ที่พิจารณาเป็นอนุพันธ์ในแนวคิดของคาปูโต
3) สมการเชิงอนุพันธ์ที่พิจารณาเป็นแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
4) การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว โดยใช้การแปลงลาปลาซ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้เพิ่มพูนความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์และสมการเชิงอนุพันธ์ที่อันดับไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนนับ
2) ได้พัฒนาทักษะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
3) เป็นแนวทางในการศึกษาต่อในระดับสูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริพันธ์รีมันน์และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
2) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันพิเศษ
3) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงลาปลาซ
4) ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริพันธ์เชิงเศษส่วนในแนวคิดของรีมันน์-ลียูวิลล์
5) ศึกษาบทนิยามและสมบัติของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในแนวคิดของคาปูโต
6) หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนแบบเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวโดยใช้การแปลงลาปลาซ
7) จัดทำเอกสาร
8) นำเสนอปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่1 แสดงระยะเวลาการดำเนินงานตามแผนงาน

ขั้นตอนในการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2560					ปี 2561				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานในฟังก์ชันพิเศษ										
2. ศึกษาความรู้พื้นฐาน										
3. ศึกษานิยาม และทฤษฎีบทของปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบ รีมันน์-ลียูวิลล์										
4. ศึกษานิยาม และทฤษฎีบท ของอนุพันธ์ เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต										
5. ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นโดยผลการแปลงลาปลาซ										
6. จัดทำเอกสาร										
7. นำเสนอปัญหาพิเศษ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่2
ความรู้พื้นฐาน

2.1 ฟังก์ชันพิเศษ (Special Function)

2.1.1 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma Function)

บทนิยาม 2.1.1 ฟังก์ชันแกมมา $\Gamma: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันแกมมา

ทฤษฎีบท 2.1.2 [3]

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , x > 0$ (2.2)

2) $\Gamma(x) = (x-1)! \quad , x \in \mathbb{N}$ (2.3)

บทนิยาม 2.1.3 ฟังก์ชันแกมมาไม่สมบูรณ์ด้านล่าง $\gamma(s,x)$ กำหนดโดย [3]

$$\gamma(s,x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt \tag{2.4}$$

และฟังก์ชันแกมมาไม่สมบูรณ์ด้านบน $\Gamma(s,x)$ กำหนดโดย [4]

$$\Gamma(s,x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \tag{2.5}$$

ฟังก์ชันแกมมาและฟังก์ชันแกมมาไม่สมบูรณ์ มีความสัมพันธ์กันโดย [3,5]

1) $\gamma(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^s e^{-x} x^k}{s(s+1)\ldots(s+n)} = x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s+k+1)}$ (2.6)

2) $\lim_{x\to\infty} \gamma(s,x) = \Gamma(s)$ (2.7)

3) $\gamma(s,x) + \Gamma(s,x) = \Gamma(s)$ (2.8)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.1.4 ฟังก์ชันไดแกมมา (Digamma function) $\psi(x)$ กำหนดโดย [3]

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{2.9}$$

โดย $-\psi(1) = \gamma = \Gamma'(1) \simeq 0.5772157$

2.1.2 ฟังก์ชันเบต้า (Beta Function)

บทนิยาม 2.1.5 ฟังก์ชันเบต้า $B(x,y)$ กำหนดโดย

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad ; x > 0, y > 0 \tag{2.10}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเบต้า

ทฤษฎีบท 2.1.6 [3]

1) ฟังก์ชันเบต้ามีสมบัติการสมมาตร ดังนั้น $B(x,y) = B(y,x)$ (2.11)

2) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (2.12)

บทนิยาม 2.1.7 ฟังก์ชันเบต้าไม่สมบูรณ์ $B_\tau(x,y)$ กำหนดโดย

$$B_\tau(x,y) = \int_0^\tau t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad ; 0 < \tau < 1 \tag{2.13}$$

ทฤษฎีบท 2.1.8 [7]

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} \ln x \, dx = B(\mu,\nu)(\psi(\mu) - \psi(\mu+\nu)) \tag{2.14}$$

2.1.3 ฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ (Mittage-Leffler function)

บทนิยาม 2.1.9 [3,4]

ฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์หนึ่งตัวแปรเสริม (one-parameter Mittage-Leffler) กำหนดโดย

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0 \tag{2.15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์สองตัวแปรเสริม (two-parameter Mittage-Leffler) กำหนดโดย

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad ,\alpha>0\,,\beta>0 \tag{2.16}$$

สำหรับ $\alpha=1$ และ $\beta=1$ จะเขียนได้ว่า

$$E_{1,1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x \tag{2.17}$$

กรณีเฉพาะที่น่าสนใจของฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ ได้แก่ฟังก์ชันที่เราคุ้นเคยกันดี ดังต่อไปนี้

1) $E_{2,1}(x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\cosh(x)$ (2.18)

2) $E_{2,2}(x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(x)}{x}$ (2.19)

3) $E_{2,1}(-x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-x^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1^k)x^{2k}}{(2k)!}=\cos(x)$ (2.20)

4) $E_{2,2}(-x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-x^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1^k)x^{2k+1}}{x(2k+1)!}=\frac{\sin(x)}{x}$ (2.21)

จากฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$E_{\alpha,\beta}(x)=xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)+\frac{1}{\Gamma(\beta)} \tag{2.22}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\beta E_{\alpha,\beta+1}(x)+\alpha x\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta+1}(x) \tag{2.23}$$

อนุพันธ์อันดับที่ m ของฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ สามารถหาค่าได้จาก

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)\right]=x^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(x^\alpha) \quad ,\beta-m>0\,,m=0,1,\ldots \tag{2.24}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การอินทิเกรตของฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ สามารถหาค่าได้จาก

$$\int_0^x E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}dt = x^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda x^\alpha) \tag{2.25}$$

จาก (2.19)จะมีกรณีเฉพาะที่สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^1 (x-t)^{v-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}dt = x^{\beta+v-1}E_{\alpha,\beta+v}(\lambda x^\alpha)\,, v>0 \tag{2.26}$$

จาก (2.20)จะได้สมการในรูปแบบอื่นๆดังนี้

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}e^{at}dt = x^p E_{1,p+1}(ax) \qquad , p>0 \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\cosh(at)\,dt = x^p\,E_{2,p+1}((ax)^2) \qquad , p>0 \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\sinh(at)\,dt = ax^p\,E_{2,p+2}((ax)^2) \qquad , p>0 \tag{2.29}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 ปริพันธ์จำกัดเขต (The Definite Integral)

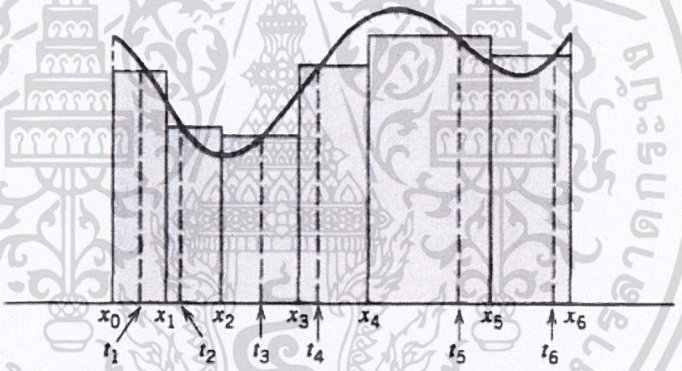
บทนิยาม 2.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ Δ เป็นการแบ่งส่วน (partition) ของ $[a,b]$ ซึ่งประกอบด้วยจุดแบ่งดังนี้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

โดยที่ Δx_i เป็นความกว้างของช่วงย่อยที่ i และถ้า c_i เป็นจุดใดๆในช่วงย่อยที่ i แล้วเรียกผลบวก

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad ,x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

ว่า ***ผลบวกรีมันน์*** ของ f สำหรับการแบ่งส่วน Δ



รูปที่1 ผลรวมรีมันน์

สำหรับการแบ่งส่วน $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เรียกค่ามากที่สุดของ $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$

ว่า ***นอร์ม*** (norm) ของการแบ่งส่วน Δ ใช้สัญลักษณ์แทนโดย$\|\Delta\|$ นั่นคือ $\|\Delta\|$ ค่ามากที่สุดของ $\{\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ ถ้า Δx_i มีขนาดเท่ากันทุกช่วงย่อยที่ i แล้ว

$$\|\Delta\| = \frac{b-a}{n} \quad \text{หรือ} \quad \frac{b-a}{\|\Delta\|} = n$$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์นี้ จะเห็นว่าถ้า $\|\Delta\| \to 0$ แล้ว $n \to \infty$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และลิมิตของผลบวกรีมันน์ของ f หาค่าได้ แล้ว f หาปริพันธ์ได้ (integrable) บน $[a,b]$ แทนโดย

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

เรียกลิมิตนี้ว่า ***ปริพันธ์จำกัดเขต*** ของ f จาก a ถึง b เรียกจำนวน a และ b ว่าลิมิตล่าง (lower limit) และลิมิตบน (upper limit) ของการหาปริพันธ์ตามลำดับ

สำหรับการแบ่งส่วน $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ถ้า มีขนาดเท่ากันทุกช่วงย่อยที่ i

โดยที่ $\Delta x_i = \Delta x = \|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$

ดังนั้นค่าลิมิต $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ จะมีความหมายเดียวกันกับ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

ในบางครั้งจึงพบว่าการนิยามปริพันธ์จำกัดเขต อยู่ในรูป

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว f หาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$

บทนิยาม 2.2.4 1. ถ้า f นิยามที่ $x = a$ แล้ว

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. ถ้า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

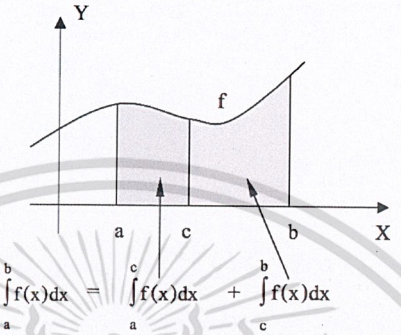
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบท 2.2.5 ถ้า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ $a<c<b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$



รูปที่ 2 ปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบท 2.2.6 ถ้า f และ g หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ k เป็นค่าคงตัวแล้ว สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^c f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

หมายเหตุ ข้อ2. สามารถขยายไปสู่การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายๆฟังก์ชันในจำนวนจำกัดได้ เช่น

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)\pm h(x)]dx=\int_a^c f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx\pm\int_a^b h(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.2.7 1. ถ้า f หาปริพันธ์ได้และไม่เป็นฟังก์ชันลบบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

2. ถ้า f และ g หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ $f(x)\leq g(x)$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง มาแล้ว ซึ่งฟังก์ชัน f และช่วง $[a,b]$ ที่เราพิจารณา มีสมบัติว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a,b]$ กล่าวคือ มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $|f(x)| \le M$ ทุก $x \in [a,b]$

ในหัวข้อนี้เราจะขยายแนวคิดในเรื่องนี้ไปสู่กรณีที่ช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์ หรือฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงของการอินทิเกรต ซึ่งเราจะเรียกอินทิกรัลประเภทนี้ว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) เราสามารถจำแนกอินทิกรัลไม่ตรงแบบได้เป็น 3 ชนิด คือ

1. อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ a เป็นจำนวนจริงและ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[a,t]$ ทุก t ซึ่ง $t > a$

ถ้า $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้าและเราจะเรียกค่าของ $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ ว่าค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ และถ้า $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่ออก

บทนิยาม 2.3.2 ให้ b เป็นจำนวนจริงและ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[t,b]$ ทุก t ซึ่ง $t < b$

ถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ลู่เข้าและเราจะเรียกค่าของ $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ ว่าค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ และถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ทุกจำนวนจริง a และ b ซึ่ง $a<b$

ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ และ $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้าและค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบคือ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$

และถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ หรือ $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

2. อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงของการอินทิเกรต

บทนิยาม 2.3.4 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$ และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ หรือ $-\infty$ โดยที่ f มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[t,b]$ ทุก t ซึ่ง $a<t<b$

ถ้า $\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ลู่เข้าและเราจะเรียกค่าของ $\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx$ ว่าค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ และถ้า $\lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ลู่ออก

บทนิยาม 2.3.5 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$ และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{t\to b^-} f(x)=\infty$ หรือ $-\infty$ โดยที่ f มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[a,t]$ ทุก t ซึ่ง $a<t<b$

ถ้า $\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ลู่เข้า และเราจะเรียกค่าของ $\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ ว่าค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ และถ้า $\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ ไม่มีค่า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ลู่ออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.6 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$ และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ หรือ $-\infty$ และ $\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$ หรือ $-\infty$ โดยที่ มี $c\in(a,b)$ ที่ทำให้ f มีขอบเขตและอินทิเกรตได้บน $[s,c]$ และ $[c,t]$ ทุก s,t ซึ่ง $a<s<c$ และ $c<t<b$

ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\int_c^b f(x)\,dx$ ลู่เข้า เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่เข้าและค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบคือ $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ และถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^c f(x)\,dx$ และ $\int_c^b f(x)\,dx$ ลู่ออก เราจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)\,dx$ ลู่ออก

3.อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์และฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงของการอินทิเกรต

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ช่วงของการอินทิเกรตเป็นช่วงอนันต์และฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบนช่วงของการอินทิเกรต

สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดนี้เราจะพิจารณาโดยแบ่งช่วงการอินทิเกรตออกเป็นช่วงย่อยๆ โดยที่อินทิกรัลบนแต่ละช่วงย่อยเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่งหรือชนิดที่สอง ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบบนแต่ละช่วงย่อยลู่เข้า เราจะได้ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่เข้าและถ้ามีอินทิกรัลไม่ตรงแบบบนช่วงย่อยใดลู่ออก เราจะได้ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ลู่ออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)

บทนิยาม 2.4.1 ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace Transform)

ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดบนช่วง $[0,\infty)$ **ผลการแปลงลาปลาซ** ของ f คือฟังก์ชัน F ที่กำหนดโดย

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

สำหรับทุกค่า s ที่ทำให้อินทิกรัลไม่ตรงแบบหาค่าได้

บทนิยาม 2.4.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง (Piecewise Continuous Functions)

ฟังก์ชัน $f(t)$ จะกล่าวว่า **ต่อเนื่องเป็นช่วง** บนช่วง $[a,b]$ ถ้าช่วง $[a,b]$ สามารถแบ่งออกเป็นช่วงย่อยๆ ที่มีจำนวนจำกัด โดยที่แต่ละช่วงย่อยมีคุณสมบัติดังนี้

1. f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดที่เป็นจุดภายในของช่วงนั้นๆ
2. $f(t)$ หาค่าลิมิตได้เมื่อ t เข้าใกล้จุดปลายของช่วงนั้นๆ จากจุดภายใน

เราจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องเป็นช่วงสำหรับ $t \geq 0$ ถ้า f ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วงย่อยของ $[0,\infty)$ ทุกช่วงที่เป็นช่วงปิด ดังนั้นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงจะไม่ต่อเนื่องที่จุดบางจุดซึ่งมีจำนวนจำกัดและที่จุดเหล่านี้ค่าของฟังก์ชันจะกำหนดโดย $f(c+) - f(c-)$ เมื่อ

$$f(c+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c+\epsilon) \quad \text{และ} \quad f(c-) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c-\epsilon)$$

บทนิยาม 2.4.3 ฟังก์ชัน f จะกล่าวว่ามี **อันดับเลขชี้กำลัง** (exponential order) α เมื่อ $t \to +\infty$ ถ้ามีจำนวนที่ไม่เป็นลบ $M, \alpha,$ และ T ที่ทำให้

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{สำหรับ } t \geq T$$

ตัวอย่าง 2.4.4 $f(t) = e^{5t}sin2t$ มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น 5 เพราะว่า

$$|e^{5t}sin2t| \leq e^{5t}$$

โดยมี $M = 1, \alpha = 5$ และ T เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบใดๆ ในขณะที่ $g(t) = e^{t^2}$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอันดับเลขชี้กำลังเพราะว่า $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-\alpha t} = +\infty$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.4.5 การแปลงเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ (Linearity of the Laplace Transform)

ถ้า $f(t), g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงของอันดับชี้กำลังบน $[0, \infty)$ และ a, b เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้ว

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

สำหรับทุกค่า s ที่ทำให้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f และ g หาค่าได้

ทฤษฎีบท 2.4.6 การมีจริงของผลการแปลงลาปลาซ (Existence of Laplace Transforms)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงสำหรับ $t \geq 0$ และมีอันดับเลขชี้กำลัง α เมื่อ $t \to +\infty$ แล้วผลการแปลงลาปลาซ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ หาค่าได้ นอกจากนี้เราสามารถกล่าวให้ชัดเจนได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง แล้ว $F(s)$ หาค่าได้สำหรับทุกค่า $s > \alpha$

ทฤษฎีบท 2.4.7 การมีเพียงหนึ่งเดียวของผลการแปลงลาปลาซ (Uniqueness of Laplace Transform)

ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ สอดคล้องกับสมมุติฐานของทฤษฎีบท2.4.4 ดังนั้นผลการแปลงลาปลาซ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ และ $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ หาค่าได้ และถ้า $F(s) = G(s)$ สำหรับทุกค่า $s > \alpha$ แล้ว $f(t) = g(t)$ บนช่วง $[0, \infty)$ ที่ทำให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากทฤษฎีบท2.4.7 จะได้ว่า **ไม่มี** ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันใดๆ ที่ต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ ที่มีผลการแปลงลาปลาซเหมือนกัน ดังนั้นถ้า $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ บางฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง แล้วฟังก์ชัน $f(t)$ จะเป็นฟังก์ชันเดียวที่สามารถหาได้ ดังนั้นจะก่อให้เกิดนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4.8 ถ้า $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ แล้วจะเรียก $f(t)$ ว่า ***ผลการแปลงลาปลาซผกผัน*** **(Inverse Laplace Transform)** ของ $F(s)$ จะเขียนแทนด้วย

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.4.9 ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงของช่วง $[0,\infty)$ แล้ว**สังวัฒนาการ (Convolution)** ของ fและ g เป็นฟังก์ชันซึ่งเขียนแทนด้วย $(f*g)(t)$ หรือ $f(t)*g(t)$ คือฟังก์ชันที่กำหนดโดยอินทิกรัลดังนี้

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงหา $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลย $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t(a-s)}dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{t(a-s)}}{(a-s)}\Big|_{t=0}^{t=b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{e^{b(a-s)}}{a-s}-\frac{1}{a-s}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{a-s} & \text{ถ้า } a-s<0\\ \text{ลู่ออก} & \text{ถ้า } a-s>0\end{cases}$$

ดังนั้น $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}\ ,\ s>a$ (1)

สำหรับกรณีที่พิเศษคือ $a=0$ แทนค่าใน (1) ได้

$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}\ ,\ s>0$ #

ตัวอย่าง 2.4.11 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$

ผลเฉลย โดยใช้ทฤษฎีบทสังวัฒนาการ (Convolution)

ให้ $f(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$ ดังนั้น $F(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=e^t\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s)^2}\right\}=te^t$

และ $F(u)=ue^u$

ให้ $g(s)=\frac{1}{s+3}$ ดังนั้น $G(t)=3e^{-3t}$ และ $G(t-u)=e^{-3(t-u)}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\cdot g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du$

จะได้ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+3)}\right\} = \int_0^t (ue^u)(e^{-3(t-u)})du$

$$= \int_0^t (ue^u)(e^{-3t+3u})du$$

$$= \int_0^t (ue^u)(e^{-3t}\cdot e^{3u})du$$

$$= \int_0^t ue^{-3t}e^{4u}du$$

$$= e^{-3t}\int_0^t ue^{4u}du$$

$$= e^{-3t}\left[\left(\frac{ue^{4u}}{4} - \frac{e^{4u}}{16}\right)\frac{t}{0}\right]$$

$$= e^{-3t}\left[\left(\frac{te^{4t}}{4} - \frac{e^{4t}}{16}\right) - \left(\frac{0e^0}{4} - \frac{0e^0}{16}\right)\right]$$

$$= e^{-3t}\left[\frac{te^{4t}}{4} - \frac{e^{4t}}{16} + \frac{1}{16}\right]$$

$$= \frac{te^t}{4} - \frac{e^t}{16} + \frac{e^{-3t}}{16}$$

$$= \frac{te^t}{4} - \frac{e^t}{16} + \frac{1}{16e^{3t}}$$ #

ทฤษฎีบท 2.4.12 ทฤษฎีบทการเลื่อน (Shifting Theorem)

ถ้า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ หาค่าได้สำหรับ $s > \alpha$ แล้ว $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$ หาค่าได้สำหรับ $s > \alpha + c$ และ

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}f(t)\}$$

ทฤษฎีบท 2.4.13 สำหรับค่าคงตัว a และ b

$$\mathcal{L}^{-1}[\,aF(S) + bG(s)] = a\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\,\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

เมื่อ F และ G เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f และ g

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.4.14 ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงของอันดับชี้กำลัง ที่มีการแปลงลาปลาซเป็น $f(s)$ และ $g(s)$ ตามลำดับ นั่นคือ $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ และ $\mathcal{L}\{G(t)\} = g(s)$ แล้วจะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\right\} = f(s) \cdot g(s)$$

ทฤษฎีบท 2.4.15

กรณีอนุพันธ์อันดับ1

สมมติให้ $f(t)$ ต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบนช่วง $[0, \infty)$ และ $f'(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ แล้ว $\mathcal{L}[f'(t)]$ หาค่าได้และ

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

กรณีอนุพันธ์อันดับ2

สมมติให้ $f(t)$ และ $f'(t)$ ต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบนช่วง $[0, \infty)$ และ $f''(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ แล้ว $\mathcal{L}[\, f''(t)\,]$ หาค่าได้และ

$$\mathcal{L}[\, f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

กรณีทั่วไปสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ n

ถ้า $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ ต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบนช่วง $[0, \infty)$ และ $f^{(n)}(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ แล้ว $\mathcal{L}[\, f^{(n)}(t)\,]$ หาค่าได้และ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\, f^{(n)}(t)\right] &= s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.4.16 ถ้า $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$, a , $b \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว

1) $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$ และ $\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f(t) * g(t)$

2) $\mathcal{L}[f^n(t)] = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(o)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2 สรุปสูตรการแปลงลาปลาซ n, p, a, b, c เป็นค่าคงตัว

	$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$	$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$
1	1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
4	$cos\ at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
5	t^p , $p > 0$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $s > 0$
6	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 อนุกรมกำลัง (Power Series)

บทนิยาม 2.5.1 ให้ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ เป็นจำนวนจริง และ x เป็นตัวแปรค่าของจำนวนจริง แล้ว

อนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$

เรียกว่า **อนุกรมกำลังศูนย์กลางที่ c**

เรียก a_n เมื่อ $n = 0,1,2, \ldots$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง**

ทฤษฎีบท 2.5.2 กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ เป็นอนุกรมกำลังจะได้ว่าหนึ่งในสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. อนุกรมดังกล่าวลู่เข้าเมื่อ $x = c$ เท่านั้น $(R = 0)$
2. อนุกรมดังกล่าวลู่เข้าสำหรับ x ทุกๆค่า $(R = \infty)$
3. มีจำนวนเต็มบวก R ที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้าเมื่อ $|x-c| < R$ และลู่ออกเมื่อ $|x-c| > R$

เราเรียกค่า R ว่าเป็น**รัศมีของการลู่เข้า** (radius of convergence)

ทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุกรมกำลังที่มีศูนย์กลางที่ c ได้ หรือถ้า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad , |x-c| < R$$

จะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์เป็น $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

เมื่อแทนค่า a_n ลงไปในสมการจะได้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

อนุกรมกำลังดังกล่าวเรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series)** ของ f รอบจุด c

ถ้าค่า $c = 0$ อนุกรมดังกล่าวยังมีชื่อพิเศษขึ้นมาอีกว่าเป็น **อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's Series)**

หมายเหตุ เมื่อให้ $f^{(0)}(c) = f(c)$ เราจะเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ได้เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \cos x$ จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ $f(x)$

ผลเฉลย อนุกรมแมคคลอรินของ $f(x)$ เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \sin x & f^{(3)}(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมแมคคลอรินของ $f(x)$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n)}}{(2n)!}x^{2n}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \sin x$ จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ $f(x)$

ผลเฉลย เนื่องจาก $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$

$$-\sin x = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$$

อนุกรมแมคคลอรินของ $f(x) = \sin x$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่3

ปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์

(Riemann-Liouville Fractional Integration)

โดยส่วนใหญ่ในการศึกษาแคลคูลัสนั้นจะกล่าวถึงอนุพันธ์มาก่อนปริพันธ์ แต่ในการศึกษาเกี่ยวกับแคลคูลัสเชิงเศษส่วนนั้นจะกล่าวถึงปริพันธ์เชิงเศษส่วนก่อนอนุพันธ์เชิงเศษส่วน นั่นคือ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนถูกกำหนดโดยปริพันธ์เชิงเศษส่วน ดังนั้นจำเป็นต้องทำความเข้าใจกับแนวคิดเรื่องปริพันธ์เชิงเศษส่วนก่อน

ปริพันธ์เชิงเศษส่วนมีทั้งหมด 4 แบบ คือ แบบรีมันน์, แบบลียูวิลล์, แบบรีมันน์-ลียูวิลล์ และแบบไวล์ ซึ่งทั้ง 4 แบบนั้นแตกต่างกันเพียงอย่างเดียวคือขอบเขตของการอินทิเกรต โดยแบบที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ แบบรีมันน์-ลียูวิลล์

บทนิยาม 3.1 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $J = (0, \infty)$ และหาปริพันธ์ได้บนช่วงย่อยของ $J' = [0, \infty)$ ที่มีขอบเขต จะได้ว่าปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์ ของ $f(x)$ อันดับที่ $p > 0, x > c$ [4,6]

กำหนดโดย

$$D_c^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t)\, dt$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ขอบเขตล่างของการอินทิเกรตเท่ากับ 0 จะใช้สัญลักษณ์ $D^{-p} f(x)$ แทน $D_0^{-p} f(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1 ปริพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์-ลียูวิลล์ เมื่อขอบเขตล่างเป็นศูนย์

(Riemann-Liouville fractional integration when the lower limit is zero)

ทฤษฎีบท 3.2 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $p>0, x>0$ และ $\beta>-1$ แล้ว

$$D^{-p}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(p+\beta+1)}x^{p+\beta}$$

พิสูจน์ จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x(x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}x^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x(x-t)^{p-1}t^{\beta}dt$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x\left(\frac{x-t}{x}\right)^{p-1}x^{p-1}t^{\beta}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^{p-1}x^{p-1}t^{\beta}dt$$

ให้ $u=\frac{t}{x}$ จะได้ $ux=t$

$$D^{-p}x^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-u)^{p-1}x^{p-1}(ux)^{\beta}xdu$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-u)^{p-1}x^{p-1}u^{\beta}x^{\beta}xdu$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-u)^{p-1}x^{p+\beta+1-1}u^{\beta}du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-u)^{p-1}x^{p+\beta}u^{\beta}du$$

$$=\frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{\beta}du$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

จะได้ $\mathrm{B}(\beta+1,\mathrm{p})=\int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{p-1}du$

$$D^{-p}x^{\beta}=\frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(\mathrm{p})}\mathrm{B}(\beta+1,\mathrm{p})$$

จาก $\mathrm{B}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$D^{-p}x^{\beta}=\frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(\mathrm{p})}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(p)}{\Gamma(\mathrm{p}+\beta+1)}$$

$$D^{-p}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\mathrm{p}+\beta+1)}x^{p+\beta}$$ #

บทแทรก 3.3 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของค่าคงที่

ให้ $p>0, x>0$ และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$D^{-p}k=\frac{k}{\Gamma(p+1)}x^{p}$$

พิสูจน์ จาก $D^{-p}f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}k=\dfrac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (x-t)^{p-1}kdt$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (\frac{x-t}{x})^{p-1}x^{p-1}kdt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (1-\frac{t}{x})^{p-1}x^{p-1}kdt$$

ให้ $u=\dfrac{t}{x}$ จะได้ว่า $t=ux$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D^{-p}k = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1 (1-u)^{p-1}x^{p-1}kxdu$$

$$= \frac{k}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1 (1-u)^{p-1}x^{p-1+1}du$$

$$= \frac{k}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1 (1-u)^{p-1}x^{p}du$$

$$= \frac{kx^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1 (1-u)^{p-1}du$$

$$= \frac{kx^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1 (1-u)^{p-1}\frac{d(1-u)}{-1}$$

$$= \frac{k}{\Gamma(p)}\left[\frac{(1-u)^{p-1}}{p}\right]_0^1(-1)x^p$$

$$= \frac{k}{\Gamma(p)}\left(0-\frac{1}{p}\right)(-1)x^p$$

$$= \frac{k}{p\Gamma(p)}x^p$$

จาก $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$D^{-p}k = \frac{k}{\Gamma(p+1)}x^p \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 3.4 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันกำลัง

ให้ $p>0, x>0$ และ $\alpha>0$ แล้ว

$$D^{-p}e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^p\Gamma(p)}\gamma(p,\alpha x)$$

เมื่อ γ คือ ฟังก์ชันแกมมาไม่สมบูรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}e^{\alpha x}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}e^{at}dt$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x\left(\frac{\alpha(x-t)}{\alpha}\right)^{p-1}e^{at}dt$$

ให้ $u=\alpha(x-t)$ จะได้ $\alpha t=\alpha x-u$

$$D^{-p}e^{\alpha x}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{p-1}e^{\alpha x-u}\frac{du}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}\frac{u^{p-1}}{\alpha^{p-1}}e^{\alpha x-u}\frac{du}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}u^{p-1}\alpha^{-p+1}e^{\alpha x-u}\frac{du}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}u^{p-1}\alpha^{-p}\alpha e^{\alpha x-u}\frac{du}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}u^{p-1}\alpha^{-p}e^{\alpha x}e^{-u}du$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}\int_0^{\alpha x}u^{p-1}e^{-u}du$$

จาก $\gamma(s,x)=\int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt$

$$D^{-p}e^{\alpha x}=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}\gamma(p,\alpha x) \qquad \#$$

ข้อสังเกต 3.5 การอินทิเกรตของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e^{\alpha x}$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ ได้ดังนี้

$$D^{-p}e^{\alpha x}=x^{p}\mathrm{E}_{1,p+1}(\alpha x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ $D^{-p}e^{\alpha x}=\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}\gamma(p,\alpha x)$ จาก

และ $\gamma\left(s,x\right)=x^{s}\Gamma(s)e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k}}{\Gamma(s+k+1)}$

จะได้ว่า $D^{-p}e^{\alpha x}=\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}(\alpha x)^{p}\Gamma(\mathrm{p})e^{-\alpha x}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\alpha x)^{k}}{\Gamma(s+k+1)}$

จาก $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ โดยที่ $\alpha>0$ และ $\beta>0$

$$D^{-p}e^{\alpha x}=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}(\alpha x)^{p}\Gamma(p)e^{-\alpha x}\mathrm{E}_{1,p+1}(\alpha x)$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^{p}\Gamma(p)}\alpha^{p}x^{p}\Gamma(p)e^{-\alpha x}\mathrm{E}_{1,p+1}(\alpha x)$$

$$D^{-p}e^{\alpha x}=x^{p}\mathrm{E}_{1,p+1}(\alpha x)$$ #

ทฤษฎีบท 3.6 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ให้ $p>0,x>0$ และ $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ แล้ว

(a) $D^{-p}\sin(\alpha x)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left(-(\alpha x)^{2}\right)$

(b) $D^{-p}\cos(\alpha x)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left(-(\alpha x)^{2}\right)$

พิสูจน์ (a) $D^{-p}\sin(\alpha x)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left(-(\alpha x)^{2}\right)$

จาก $D^{-p}f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}\sin(\alpha x)=\dfrac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\sin(\alpha t)dt$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t}\alpha t dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งไม่อนุญาตให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\mathrm{E}_{2,2}(-x^{2})=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-x^{2})^{k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\dfrac{\sin(\mathrm{x})}{x}$

$$D^{-p}\sin(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\mathrm{E}_{2,2}\left(-(\alpha x)^2\right)\alpha t dt$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\mathrm{E}_{2,2}\left(-(\alpha x)^2\right)t dt$$

จาก $\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\,\mathrm{t}^{\beta-1}\,dt = x^{\beta+v-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta+v}(\lambda x^{\alpha})\,,v>0$

$$D^{-p}\sin(\alpha x)=\alpha x^{2+p-1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left(-(\alpha t)^2\right)$$

$$D^{-p}\sin(\alpha x)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left(-(\alpha t)^2\right) \quad \#$$

พิสูจน์ (b) $D^{-p}\cos(\alpha x)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left(-(\alpha x)^2\right)$

จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (x-t)^{p-1}f(t)dt$

$$D^{-p}\cos(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x (x-t)^{p-1}\cos(\alpha t)dt$$

จาก $\mathrm{E}_{2,1}(-x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\cos(x)$

$$D^{-p}\cos(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\mathrm{E}_{2,1}\left(-(\alpha x)^2\right)dt$$

จาก $\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^x (x-t)^{v-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\,\mathrm{t}^{\beta-1}\,dt = x^{\beta+v-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta+v}(\lambda x^{\alpha})\,,v>0$

$$D^{-p}\cos(\alpha x)=x^{1+p-1}\mathrm{E}_{2,p+1}\left(-(\alpha x)^2\right)$$

$$D^{-p}\cos(\alpha x)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left(-(\alpha x)^2\right) \quad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.7 **การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันไฮเพอโบลิกไซน์และไฮเพอโบลิกโคไซน์**

ให้ $p>0, x>0$ และ $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$ แล้ว

(a) $D^{-p}\cosh(\alpha x)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left((\alpha x)^{2}\right)$

(b) $D^{-p}\sinh(\alpha x)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left((\alpha x)^{2}\right)$

พิสูจน์ (a) $D^{-p}\cosh(\alpha x)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left((\alpha x)^{2}\right)$

จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}\cosh(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\cosh(\alpha t)dt$

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\cosh(\alpha t)dt=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left((\alpha x)^{2}\right),\ p>0$

$\mathrm{D}^{-p}\cosh(\alpha t)=x^{p}\mathrm{E}_{2,p+1}\left((\alpha x)^{2}\right)$ #

พิสูจน์ (b) $D^{-p}\sinh(\alpha x)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left((\alpha x)^{2}\right)$

จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D^{-p}\sinh(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\sinh(\alpha t)dt$

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}\sinh(\alpha t)dt=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left((\alpha x)^{2}\right),\ p>0$

$\mathrm{D}^{-p}\sinh(\alpha t)=\alpha x^{p+1}\mathrm{E}_{2,p+2}\left((\alpha x)^{2}\right)$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.8 **การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันลอการิทึม**

ให้ $p>0$ และ $x>0$ แล้ว

$$D^{-p}\ln x=\frac{x^p}{\Gamma(p+1)}\left[\ln x-\gamma-\Psi(p+1)\right]$$

เมื่อ Ψ คือ ฟังก์ชันไดแกมมา และ $\gamma=-\Psi(1)=-\Gamma'(1)\approx 0.5772157...$

พิสูจน์ จาก $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x(x-u)^{p-1}f(u)du$

จะได้ว่า $D^{-p}\ln x=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^x(x-u)^{p-1}\ln u du$

ให้ $x=\frac{u}{t}$ จะได้ $u=xt$

$$D^{-p}\ln x=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(x-xt)^{p-1}\ln(xt)d(xt)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1\left(x(1-t)\right)^{p-1}\ln(xt)xdt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1x^{p-1}(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln(xt)xdt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1x^px^{-1}(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln(xt)xdt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1x^px^{-1+1}(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln(xt)dt$$

$$=\frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln(xt)dt$$

$$=\frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\int_0^1(1-\mathrm{t})^{p-1}\left(\ln x+\ln t\right)dt$$

$$=\frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\left[\int_0^1(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln x dt+\int_0^1(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln t dt\right]$$

$$=\frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\left[\ln x\int_0^1(1-t)^{p-1}\frac{d(1-t)}{-1}+\int_0^1(1-\mathrm{t})^{p-1}\ln t dt\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\left[\ln x\left[-\left(\frac{(1-t)^p}{p} \right) \right]_0^1 + \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{p-1} \ln t dt \right]$$

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\left[\ln x\left(0 + \frac{1}{p} \right) + \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{p-1} \ln t dt \right]$$

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})}\left[\ln x\left(\frac{1}{p} \right) + \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{p-1} \ln t dt \right]$$

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \ln x\left(\frac{1}{p} \right) + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{p-1} \ln t dt$$

จาก $\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{v-1} \ln x dx = \mathrm{B}(\mu, v)\left[\Psi(\mu) - \Psi(\mu+v) \right]$

$$D^{-p} \ln x = \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \ln x\left(\frac{1}{p} \right) + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \mathrm{B}(1, \mathrm{p})\left[\Psi(1) - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

จาก $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$

$$D^{-p} \ln x = \frac{x^p p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \ln x\left(\frac{1}{p} \right) + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \mathrm{B}(1, \mathrm{p})\left[\Psi(1) - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \ln x + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \mathrm{B}(1, \mathrm{p})\left[\Psi(1) - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

จาก $\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$D^{-p} \ln x = \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \ln x + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p})} \frac{\Gamma(1)\Gamma(p)}{\Gamma(p+1)}\left[\Psi(1) - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

$$= \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \ln x + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)}\left[\Psi(1) - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

จาก $\gamma = -\Psi(1)$

$$D^{-p} \ln x = \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)} \ln x + \frac{x^p}{\Gamma(\mathrm{p}+1)}\left[-\gamma - \Psi(\mathrm{p}+1) \right]$$

$$D^{-p} \ln x = \frac{x^p}{\Gamma(p+1)}\left[\ln x - \gamma - \Psi(p+1) \right] \quad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ปริพันธ์เชิงเศษส่วนโดยรีมันน์-ลียูวิลล์ เมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์

(Riemann-Liouville fractional integration when the lower limit is non-zero)

ทฤษฎีบท 3.9 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์

ให้ $p > 0, x > c > 0$ และ $\beta > -1$ แล้ว

$$D_c^{-p}\, x^{\beta} = \frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(p)}\, B_{\tau}(p, \beta+1)$$

โดยที่ $\tau = \frac{x-c}{x}$ และ $B_{\tau}(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเบต้าไม่สมบูรณ์ (incomplete Beta function)

พิสูจน์ จาก $D_c^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t)\, dt$

จะได้ว่า $D_c^{-p} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1}\, t^{\beta}\, dt$

กำหนดให้ $t = x(1-u)$, $dt = -x\,du$

$$D_c^{-p} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} \left(x - x(1-u)\right)^{p-1} \left(x(1-u)\right)^{\beta} x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} \left(x - (x-xu)\right)^{p-1} \left(x(1-u)\right)^{\beta} x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} (xu)^{p-1}\, x^{\beta} (1-u)^{\beta}\, x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\frac{x-c}{x}} (xu)^{p-1}\, x^{\beta} (1-u)^{\beta}\, x\, du$$

$$= \frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(p)} \int_0^{\tau} u^{p-1} (1-u)^{\beta}\, du$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_c^{-p}x^{\beta}=\frac{x^{p+\beta}}{\Gamma(p)}B_{\tau}(p,\beta+1) \qquad \#$$

ข้อสังเกต 3.10 ให้ $p>0$, $x>c>0$ และ $\beta>-1$ แล้ว

$$D_c^{-p}(x-c)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+p+1)}(x-c)^{p+\beta}$$

พิสูจน์ จาก $D_c^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}f(t)dt$

จะได้ว่า $D_c^{-p}(x-c)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}(t-c)^{\beta}\,dt$

กำหนดให้ $t=x-u(x-c)$, $dt=-(x-c)du$

$$D_c^{-p}(x-c)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-(x-(x-c)u)^{p-1}(x-(x-c)u-c)^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-x+(x-c)u)^{p-1}(x-xu+cu-c)^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1((x-c)u)^{p-1}(x(1-u)-c(1-u))^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-c)^{p-1}u^{p-1}((1-u)(x-c))^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-c)^{p-1}u^{p-1}((1-u)(x-c))^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-c)^{p}(x-c)^{-1}u^{p-1}(1-u)^{\beta}(x-c)^{\beta}(x-c)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(x-c)^{p}(x-c)^{-1}u^{p-1}(1-u)^{\beta}(x-c)^{\beta}(x-c)du$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (x-c)^{p+\beta} (x-c)^{1-1} u^{p-1} (1-u)^{\beta} \, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (x-c)^{p+\beta} \; u^{p-1} (1-u)^{\beta} \, du$$

$$= \frac{(x-c)^{p+\beta}}{\Gamma(p)} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{\beta} \, du$$

จาก $\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

จะได้ว่า $D_c^{-p}(x-c)^{\beta} = \frac{(x-c)^{p+\beta}}{\Gamma(p)} B(p, \beta+1)$

จาก $\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

จะได้ว่า $D_c^{-p}(x-c)^{\beta} = \frac{(x-c)^{p+\beta}}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(p+\beta+1)}$

$$D_c^{-p}(x-c)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+p+1)}(x-c)^{p+\beta} \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 3.11 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันกำลังเมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์

ให้ $p > 0, x > c$ และ $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ แล้ว

$$D_c^{-p} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^p \Gamma(p)} \gamma(p, \alpha(x-c))$$

พิสูจน์ จาก $D_c^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} f(t) dt$

จะได้ว่า $D_c^{-p} e^{\alpha x} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x (x-t)^{p-1} \; e^{\alpha x} \, dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^x \left[\frac{\alpha(x-t)}{\alpha}\right]^{p-1} e^{\alpha x} \, dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้ $u=\alpha(x-t)$, $t=\dfrac{\alpha x-u}{\alpha}$, $dt=\dfrac{du}{\alpha}$

$$D_c^{-p}\,e^{\alpha x}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha(x-c)}\frac{u^{p-1}}{\alpha^{p-1}}\;e^{\alpha\left[\frac{\alpha x-u}{\alpha}\right]}\;\frac{du}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha(x-c)}\frac{u^{p-1}}{\alpha^{p-1+1}}\;e^{\alpha x-u}\;du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\alpha(x-c)}\frac{u^{p-1}}{\alpha^{p}}\;e^{\alpha x}\;e^{-u}\;du$$

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^p\Gamma(p)}\int_0^{\alpha(x-c)}u^{p-1}\;e^{-u}\;du$$

$$D_c^{-p}e^{\alpha x}=\frac{e^{\alpha x}}{a^p\Gamma(p)}\gamma\left(p,a(x-c)\right)$$ #

ทฤษฎีบท 3.12 การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันกำลังเมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์ ได้ดังนี้

ให้ $p>0$, $x>c$ และ $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ แล้ว

$$D_c^{-p}e^{\alpha x}=e^{\alpha c}(x-c)^pE_{1,p-1}(\alpha(x-c))$$

พิสูจน์ จาก $D_c^{-p}f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}\,f(t)\,dt$

จะได้ว่า $D_c^{-p}\,e^{\alpha x}=\dfrac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}\;e^{\alpha t}\;dt$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}\;e^{\alpha t}\,e^{\alpha c-\alpha c}\;dt$$

$$=\frac{e^{\alpha c}}{\Gamma(p)}\int_c^x(x-t)^{p-1}\;e^{\alpha t}\,e^{-\alpha c}\;dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\frac{e^{\alpha c}}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}\ \ e^{\alpha(t-c)}\ dt$$

$$=\frac{e^{\alpha c}}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha(t-c))^k}{\Gamma(k+1)}\ dt$$

$$=\frac{e^{\alpha c}}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1)}\int_c^x (x-t)^{p-1}(t-c)^k\ dt$$

$$=e^{\alpha c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1)}\frac{1}{\Gamma(p)}\int_c^x (x-t)^{p-1}(t-c)^k\ dt$$

$$=e^{\alpha c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1)}D_c^{-p}(x-c)^k$$

$$=e^{\alpha c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+p+1)}(x-c)^{p+k}$$

$$=e^{\alpha c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\Gamma(k+p+1)}(x-c)^p(x-c)^k$$

$$=e^{\alpha c}(x-c)^p\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\alpha^k(x-c)^k}{\Gamma(k+p+1)}$$

$$=e^{\alpha c}(x-c)^p\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(\alpha(x-c))^k}{\Gamma(k+p+1)}$$

$$D_c^{-p}e^{\alpha x}=e^{\alpha c}(x-c)^p E_{1,p-1}(\alpha(x-c)) \qquad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.13 **การอินทิเกรตเชิงเศษส่วนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อขอบเขตล่างไม่เป็นศูนย์**

ให้ $p > 0$, $x > c$ และ $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ แล้ว

(a) $D_c^{-p} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha c)\,(x-c)^p E_{2,p+1}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$
$+ \alpha \cos(\alpha c)\,(x-c)^{p+1} E_{2,p+2}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$

(b) $D_c^{-p} \cos(\alpha x) = \cos(\alpha c)\,(x-c)^p E_{2,p+1}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$
$- \alpha \sin(\alpha c)(x-c)^{p-1} E_{2,p+2}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$

(c) $D_c^{-p} \sinh(\alpha x) = \sinh(\alpha c)\,(x-c)^p E_{2,p+1}\left(\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$
$+ \alpha \cosh(\alpha c)(x-c)^{p+1} E_{2,p+2}\left(\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$

(d) $D_c^{-p} \cosh(\alpha x) = \cosh(\alpha c)\,(x-c)^p E_{2,p+1}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$
$+ \alpha \sinh(\alpha c)(x-c)^{p-1} E_{2,p+2}\left(-\left(\alpha(x-c)\right)^2\right)$

ในการพิสูจน์ จะใช้ **ทฤษฎีบท 3.12** ร่วมกับข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต
(Caputo Fractional Derivative)

4.1 บทนิยามและสมบัติของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $J=(0,\infty)$ และหาปริพันธ์ได้บนช่วงย่อยของ $J'=[0,\infty)$ ที่มีขอบเขต และ $p>0, n\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $n-1\le p<n$ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตอันดับที่ p ของ $f(x)$ กำหนดโดย [8,11]

$$ {}^{c}D_a^p f(x) = D_a^{-(n-p)} D^n f(x) \tag{4.1}$$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f^{(n)}(t)\,dt \tag{4.2}$$

ทฤษฎีบท 4.1.2 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $J=(0,\infty)$ และหาปริพันธ์ได้บนช่วงย่อยของ $J'=[0,\infty)$ ที่มีขอบเขต และ $p>0, n\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $n-1\le p<n$ เมื่อ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$ {}^{c}D_a^p\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right) = \lambda\, {}^{c}D_a^p f(x) + \mu\, {}^{c}D_a^p g(x) \tag{4.3}$$

พิสูจน์ ${}^{c}D_a^p\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right) = {}^{c}D_a^p \lambda f(x) + {}^{c}D_a^p \mu g(x)$

$$= D_a^{-(n-p)} D^n \lambda f(x) + D_a^{-(n-p)} D^n \mu g(x)$$

$$= \lambda D_a^{-(n-p)} D^n f(x) + \mu D_a^{-(n-p)} D^n g(x)$$

$$= \lambda\, {}^{c}D_a^p f(x) + \mu\, {}^{c}D_a^p g(x) \qquad \#$$

ข้อสังเกต 4.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์ลียู-วิลล์และอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต อันดับที่ p [4,8] สามารถแสดงได้ดังนี้

- อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของปริพันธ์เชิงเศษส่วน

$$ {}^{c}D_a^p\left(D_a^{-p} f(x)\right) = f(x) \tag{4.4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- ปริพันธ์เชิงเศษส่วนของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

$$D_a^{-p}\left({}^cD_a^p f(x)\right) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \tag{4.5}$$

จาก (4.4) และ (4.5) จะได้ว่า

$${}^cD_a^p\left(D_a^{-p} f(x)\right) \neq D_a^{-p}\left({}^cD_a^p f(x)\right) \tag{4.6}$$

- อนุพันธ์เชิงเศษส่วนของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต [10]

$${}^cD_a^p\left({}^cD_a^m f(x)\right) = {}^cD_a^{p+m} f(x) \neq {}^cD_a^m\left({}^cD_a^p f(x)\right) \tag{4.7}$$

เมื่อ $n-1 \le p < n$, $n \in \mathbb{N}$ และ $m = 0,1,2,\ldots$

4.2 การหาอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันที่สำคัญ

ทฤษฎีบท 4.2.1 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของค่าคงที่

ให้ $p > 0$ และ k เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$${}^cD^p k = 0 \tag{4.8}$$

พิสูจน์ $${}^cD^p k = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^k (x-t)^{(n-p)-1} D^n k\, dt$$

เนื่องจาก $D^n k = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

จะได้ว่า $${}^cD^p k = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^k (x-t)^{(n-p)-1} (0)\, dt$$

$${}^cD^p k = 0$$

#

ทฤษฎีบท 4.2.2 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $n-1 \le p < n, n \in \mathbb{N}$ และ $x > 0$ จะได้ว่า

$${}^cD^p x^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)} \cdot x^{\beta-p} & ;\beta > n-1 \\ 0 & ;\beta \le n-1 \end{cases} \tag{4.9}$$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ให้ $n-1 \le p < n$ และ $\beta > n-1$

$${}^cD^p x^\beta = D^{-(n-p)} D^n x^\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} D^n t^\beta\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\, dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $t = t(u) = xu$ จะได้ $dt = xdu$

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}x^{\beta} = \dfrac{1}{\Gamma(n-p)}\displaystyle\int_0^1 (x-xu)^{(n-p)-1}\,\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(xu)^{\beta-n}\,xdu$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (x-xu)^{(n-p)-1}(xu)^{\beta-n}\,xdu$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (xu)^{\beta-n}\left[(1-u)x\right]^{(n-p)-1}\,xdu$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 x^{\beta-n}u^{\beta-n}(1-u)^{(n-p)-1}\,x^{n-p}\,du$$

$$= \frac{x^{\beta-p}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 u^{\beta-n}(1-u)^{(n-p)-1}\,du$$

จาก $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}x^{\beta} = \dfrac{x^{\beta-p}\Gamma(\beta+1)B(\beta-n+1,n-p)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}$

$${}^{c}D^{p}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}\cdot x^{\beta-p} \qquad \#$$

กรณีที่ 2 ให้ $\beta \le n-1$ จะได้

$${}^{c}D^{p}x^{\beta} = D^{-(n-p)}D^{n}x^{\beta}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1}D^{n}t^{\beta}\,dt$$

$${}^{c}D^{p}x^{\beta} = 0 \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 4.2.3 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันกำลัง

ให้ $n-1 \le p < n, n \in \mathbb{N}$ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$${}^{c}D^{p}e^{ax} = a^{n}x^{n-p}E_{1,n-p+1}(ax) \qquad (4.10)$$

พิสูจน์

$${}^{c}D^{p}e^{ax} = D^{-(n-p)}D^{n}e^{ax}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1}D^{n}e^{at}\,dt$$

จาก $D^{n}e^{at} = a^{n}e^{at}$

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}e^{ax} = \dfrac{1}{\Gamma(n-p)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1}a^{n}e^{at}\,dt$

$$= \frac{a^{n}}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1}e^{at}\,dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1} e^{at}dt = x^p E_{1,p+1}(ax)$

จะได้ว่า ${}^cD^p e^{ax} = a^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(ax)$ #

ทฤษฎีบท 4.2.4 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ให้ $n-1 \le p < n, n \in \mathbb{N}$ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$(a)\ {}^cD^p \sin(ax) = -\frac{1}{2} i (ia)^n x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(iax) - (-1)^n E_{1,n-p+1}(-iax)\right] \qquad (4.11)$$

$$(b)\ {}^cD^p \cos(ax) = \frac{1}{2} (ia)^n x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(iax) + (-1)^n E_{1,n-p+1}(-iax)\right] \qquad (4.12)$$

พิสูจน์ $(a)\ {}^cD^p \sin(ax) = -\frac{1}{2} i (ia)^n x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(ax) - (-1)^n E_{1,n-p+1}(-ax)\right]$

จาก $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

จะได้ว่า ${}^cD^p(\sin ax) = {}^cD^p \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$

$$= \frac{1}{2i}\left({}^cD^p e^{iax} - {}^cD^p e^{-iax}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(D^{-(n-p)} D^n e^{iax} - D^{-(n-p)} D^n e^{-iax}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} D^n e^{iat}dt - \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} D^n e^{-iat}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} (ia)^n e^{iat}dt - \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} (-ia)^n e^{-iat}dt\right]$$

$$= \frac{-i}{2}\left[\frac{(ia)^n}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{iat}dt - \frac{(-ia)^n}{\Gamma(n-p)}\int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{-iat}dt\right]$$

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1} e^{at}dt = x^p E_{1,p+1}(ax)$

จะได้ว่า ${}^cD^p(\sin ax) = \frac{-i}{2}\left[(ia)^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(iax) - (-ia)^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(-iax)\right]$

$${}^cD^p \sin(ax) = -\frac{1}{2} i (ia)^n x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(iax) - (-1)^n E_{1,n-p+1}(-iax)\right]$$

$$(b)\ {}^cD^p \cos(ax) = \frac{1}{2} (ia)^n x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(iax) + (-1)^n E_{1,n-p+1}(-iax)\right]$$

จาก $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}\left(\cos ax\right)={}^{c}D^{p}\dfrac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left({}^{c}D^{p}e^{iax}+{}^{c}D^{p}e^{-iax}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(D^{-(n-p)}D^{n}e^{iax}+D^{-(n-p)}D^{n}e^{-iax}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}D^{n}e^{iat}dt+\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}D^{n}e^{-iat}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}(ia)^{n}e^{iat}dt+\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}(-ia)^{n}e^{-iat}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(ia)^{n}}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}e^{iat}dt+\frac{(-ia)^{n}}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}e^{-iat}dt\right]$$

จาก $\dfrac{1}{\Gamma(p)}\displaystyle\int_{0}^{x}(x-t)^{p-1}e^{at}dt=x^{p}E_{1,p+1}(ax)$

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}\left(\cos ax\right)=\dfrac{1}{2}\left[(ia)^{n}x^{n-p}E_{1,n-p+1}(iax)+(-ia)^{n}x^{n-p}E_{1,n-p+1}(-iax)\right]$

${}^{c}D^{p}\cos(ax)=\dfrac{1}{2}(ia)^{n}x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(iax)+(-1)^{n}E_{1,n-p+1}(-iax)\right]$ #

ทฤษฎีบท 4.2.5 อนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโตของฟังก์ชันไซน์ไฮเพอโบลิกและโคไซน์ไฮเพอโบลิก

ให้ $n-1\le p<n, n\in\mathbb{N}$ และ $a\in\mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$(a)\ {}^{c}D^{p}\sinh(ax)=-\frac{1}{2}a^{n}x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(ax)-(-1)^{n}E_{1,n-p+1}(-ax)\right] \qquad (4.13)$$

$$(b)\ {}^{c}D^{p}\cosh(ax)=\frac{1}{2}a^{n}x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(ax)+(-1)^{n}E_{1,n-p+1}(-ax)\right] \qquad (4.14)$$

พิสูจน์ $(a)\ {}^{c}D^{p}\sinh(ax)=-\dfrac{1}{2}a^{n}x^{n-p}\left[E_{1,n-p+1}(ax)-(-1)^{n}E_{1,n-p+1}(-ax)\right]$

จาก $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

จะได้ว่า ${}^{c}D^{p}\left(\sinh ax\right)={}^{c}D^{p}\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left({}^{c}D^{p}e^{ax}-{}^{c}D^{p}e^{-ax}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(D^{-(n-p)}D^{n}e^{ax}-D^{-(n-p)}D^{n}e^{-ax}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}D^{n}e^{at}dt-\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_{0}^{x}(x-t)^{(n-p)-1}D^{n}e^{-at}dt\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} a^n e^{at} dt - \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} (-a)^n e^{-at} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^n}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{at} dt - \frac{(-a)^n}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{-at} dt \right]$$

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} e^{at} dt = x^p E_{1,p+1}(ax)$

จะได้ว่า ${}^cD^p(\sinh ax) = \frac{1}{2}\left[a^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(ax) - (-a)^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(-ax) \right]$

${}^cD^p \sinh(ax) = -\frac{1}{2} a^n x^{n-p} \left[E_{1,n-p+1}(ax) - (-1)^n E_{1,n-p+1}(-ax) \right]$ #

$(b)\ {}^cD^p \cosh(ax) = \frac{1}{2} a^n x^{n-p} \left[E_{1,n-p+1}(ax) + (-1)^n E_{1,n-p+1}(-ax) \right]$

จาก $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

จะได้ว่า ${}^cD^p(\cosh ax) = {}^cD^p \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left({}^cD^p e^{ax} + {}^cD^p e^{-ax} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(D^{-(n-p)} D^n e^{ax} + D^{-(n-p)} D^n e^{-ax} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} D^n e^{at} dt + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} D^n e^{-at} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} a^n e^{at} dt + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} (-a)^n e^{-at} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^n}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{at} dt + \frac{(-a)^n}{\Gamma(n-p)} \int_0^x (x-t)^{(n-p)-1} e^{-at} dt \right]$$

จาก $\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} e^{at} dt = x^p E_{1,p+1}(ax)$

จะได้ว่า ${}^cD^p(\cosh ax) = \frac{1}{2}\left[a^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(ax) + (-a)^n x^{n-p} E_{1,n-p+1}(-ax) \right]$

${}^cD^p \cosh(ax) = \frac{1}{2} a^n x^{n-p} \left[E_{1,n-p+1}(ax) + (-1)^n E_{1,n-p+1}(-ax) \right]$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

บทตั้ง 4.3.1 ผลการแปลงลาปลาซของปริพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์ [9]

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $p>0$ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\frac{F(s)}{s^{p}} \tag{4.15}$$

เมื่อ $F(s)=\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}$

พิสูจน์ $D^{-p}f(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x(x-t)^{p-1}f(t)\,dt$ จาก

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x(x-t)^{p-1}f(t)\,dt\right\}$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\mathcal{L}\left\{\int_0^x(x-t)^{p-1}f(t)\,dt\right\}$$

จาก $f*g=\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt\right\}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\frac{1}{\Gamma(p)}\mathcal{L}\left\{x^{p-1}*f(x)\right\}$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\mathcal{L}\left\{x^{p-1}\right\}\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}$$

จาก $\mathcal{L}\left\{x^{p-1}\right\}=\frac{\Gamma(p-1+1)}{s^{p-1+1}}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p)}{s^{p}}F(s)$

$$\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\frac{F(s)}{s^{p}}$$ #

บทตั้ง 4.3.2 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบรีมันน์-ลียูวิลล์

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่า [4]

$$\mathcal{L}\left\{D^{p}f(x)\right\}=s^{p}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{k}\left[D^{p-k-1}f(x)\right]_{x=0} \tag{4.16}$$

พิสูจน์ จาก $D^{p}f(x)=D^{n}\left[D^{-(n-p)}f(x)\right]$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^{p}f(x)\right\}=\mathcal{L}\left\{D^{n}\left[D^{-(n-p)}f(x)\right]\right\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(x)\right\}=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{(n-k-1)}(0)$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^pf(x)\right\}=s^n\mathcal{L}\left\{D^{-(n-p)}f(x)\right\}-\sum_{k=0}^{n-1}s^kD^{n-k-1}\left[D^{-(n-p)}f(x)\right]_{x=0}$

จาก บทตั้ง 4.3.1 $\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\dfrac{F(s)}{s^p}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{D^pf(x)\right\}=s^n\dfrac{F(s)}{s^{n-p}}-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left[D^{p-k-1}f(x)\right]_{x=0}$

$\mathcal{L}\left\{D^pf(x)\right\}=s^pF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kD^{n-k-1}\left[D^{-(n-p)}f(x)\right]_{x=0}$ #

บทตั้ง 4.3.3 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์เชิงเศษส่วนแบบคาปูโต

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$

จะได้ว่า [9]

$$\mathcal{L}\left\{{}^cD^pf(x)\right\}=s^pF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}f^{(k)}(0) \tag{4.17}$$

พิสูจน์ ${}^cD^pf(x)=D^{-(n-p)}\left[D^nf(x)\right]$ จาก

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{{}^cD^pf(x)\right\}=\mathcal{L}\left\{D^{-(n-p)}\left[D^nf(x)\right]\right\}$

จาก บทตั้ง 4.3.1 $\mathcal{L}\left\{D^{-p}f(x)\right\}=\dfrac{F(s)}{s^p}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{{}^cD^pf(x)\right\}=\dfrac{\mathcal{L}\left\{D^nf(x)\right\}}{s^{n-p}}$

จาก $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(x)\right\}=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)$

จะได้ว่า $\mathcal{L}\left\{{}^cD^pf(x)\right\}=\dfrac{s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)}{s^{n-p}}$

$$=s^{-n+p}\left[s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)\right]$$

$\mathcal{L}\left\{{}^cD^pf(x)\right\}=s^pF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}f^{(k)}(0)$ #

บทตั้ง 4.3.4 ให้ $\alpha,\beta>0,a\in\mathbb{R}$ และ $s^\alpha>|a|$ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+a}\right\}=x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(-ax^\alpha\right) \tag{4.18}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}+a}\cdot\frac{1}{s^{\beta}}\right\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}(1)}{s^{\alpha}\left(1+\frac{a}{s^{\alpha}}\right)\cdot s^{\beta}}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\beta}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{s^{\beta}}}\right\}$$

จาก $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

จะได้ว่า $\frac{1}{s^{\beta}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{s^{\alpha}}}=\frac{1}{s^{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{s^{\alpha}}\right)^n \quad ;\left|\frac{-a}{s^{\alpha}}\right|<1$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{s^{\alpha n+\beta}}$$

เพราะฉนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{s^{\alpha n+\beta}}\right\}$

จาก $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\right\}=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{s^{\alpha n+\beta}}\right\}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n x^{\alpha n+\beta-1}}{s^{\alpha n+\beta}}$$

$$=x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n x^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$$

จาก $E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}\right\}=x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(-ax^{\alpha}\right)$ #

บทตั้ง 4.3.5 ให้ $\alpha\geq\beta>0, a\in\mathbb{R}$ และ $s^{\alpha-\beta}>|a|$ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^{\alpha}+as^{\beta}\right)^{n+1}}\right\}=x^{\alpha(n+1)^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)} \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ $\dfrac{1}{(1+x)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(-x)^k$ จาก

จะได้ว่า $\dfrac{1}{\left(s^{\alpha}+as^{\beta}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{\left(s^{\alpha}\right)^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^{n+1}}$; $\left|\dfrac{a}{s^{\alpha-\beta}}\right|<1$

$$=\frac{1}{\left(s^{\alpha}\right)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\left(\frac{-a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-a)^k}{s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}}$$

เพราะฉนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^{\alpha}+as^{\beta}\right)^{n+1}}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\dfrac{(-a)^k}{s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}}\right\}$

จาก $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{\alpha}}\right\}=\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^{\alpha}+as^{\beta}\right)^{n+1}}\right\}=x^{\alpha(n+1)^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\dfrac{(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)}$ #

บทตั้ง 4.3.6 ให้ $\alpha>\gamma$, $a\in\mathbb{R}$, $s^{\alpha-\beta}>|a|$, $\alpha\geq\beta>0$ และ $\left|s^{\alpha}+as^{\beta}\right|>|b|$ จะได้ว่า

(4.20) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\}=x^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\dfrac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}$

พิสูจน์ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}}\right\}$

จาก $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

จะได้ว่า $\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}}=\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{-b}{s^{\alpha}+as^{\beta}}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{\gamma}(-b)^n}{\left(s^{\alpha}+as^{\beta}\right)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(s^{\alpha}\right)^{n+1}}\cdot\frac{s^{\gamma}(-b)^n}{\left(1+\dfrac{a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^{n+1}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\dfrac{1}{(1+x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-x)^k$

จะได้ว่า $\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\left(s^{\alpha}\right)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \dfrac{(-a)^k}{s^k(\alpha-\beta)} \cdot s^{\gamma}(-b)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\gamma}(-a)^k(-b)^n}{s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k(-b)^k}{s^{-\gamma}\left(s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}\right)}$$

จาก $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{\alpha}}\right\} = \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-a)^k(-b)^k}{s^{-\gamma}\left(s^{k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)}\right)}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\} = x^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)+\alpha n} \qquad \#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้น
(Linear Fractional Differential Equations)

5.1 สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์ในรูปแบบของ ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$

ทฤษฎีบท 5.1.1 ให้ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$, $y^{(k)}(0)=b_k$, $k=0,1,...,n-1$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+\int_0^x (x-t)^{p-1}E_{p,p}\left(-a(x-t)^p\right)h(t)\,dt \qquad (5.1)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\mathcal{L}\{y(x)\}=Y(s)$, $\mathcal{L}\{h(x)\}=H(s)$

$$\mathcal{L}\{{}^{c}D^{p}y(x)\}+\mathcal{L}\{ay(x)\}=\mathcal{L}\{h(x)\}$$

$$s^pY(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}y^{(k)}(0)+aY(s)=H(s)$$

$$\left(s^p+a\right)Y(s)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}b_k+H(s)$$

$$Y(s)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}b_k}{s^p+a}+\frac{H(s)}{s^p+a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sum_{k=0}^{n-1}b_k s^{p-k-1}}{s^p+a}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s^p+a}\right\}$$

จากบทตั้ง 4.3.4 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+a}\right\}=x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(-ax^\alpha\right)$ เมื่อ $\alpha,\beta>0$, $a\in\mathbb{R}$ และ $s^\alpha>|a|$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\cdot\frac{1}{s^p+a}\right\}$

กำหนดให้ $G(s)=\frac{1}{s^p+a}$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+\mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\}$

จาก $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(x)*g(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+f(x)*g(x)$

จาก $f(x)*g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$

จะได้ว่า $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+\int_0^x g(x-t)h(t)\,dt$

จาก $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=x^{p-1}E_{p,p}\left(-ax^p\right)=g(x)$

จะได้ว่า $y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right)+\int_0^x (x-t)^{p-1}E_{p,p}\left(-a(x-t)^p\right)h(t)\,dt$ #

ตัวอย่าง 5.1.2 ${}^cD^{\frac{1}{2}}y(x)-9y(x)=x^2,\ 0\le p<1,\ y(0)=1$

จากทฤษฎีบท 5.1.1 จะได้ว่า $y(x)=E_{\frac{1}{2},1}\left(9x^{\frac{1}{2}}\right)+\int_0^x (x-t)^{\frac{-1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(9(x-t)^{\frac{1}{2}}\right)t^2\,dt$

ให้ $s=s(t)=x-t$ จะได้ว่า $y(x)=E_{\frac{1}{2},1}\left(9x^{\frac{1}{2}}\right)+\int_0^x s^{\frac{-1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(9s^{\frac{1}{2}}\right)(x-s)^2\,ds$

จาก (2.26) จะได้ว่า $y(x)=E_{\frac{1}{2},1}\left(9x^{\frac{1}{2}}\right)+\Gamma(3)x^{\frac{5}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{7}{2}}\left(9x^{\frac{1}{2}}\right)$

ข้อสังเกต 5.1.3 ให้ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ${}^cD^p y(x)+ay(x)=h(x)$, $y^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,...,n-1$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{p-1}E_{p,p}\left(-a(x-t)^p\right)h(t)\,dt \qquad (5.2)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.1.1 โดยแทนค่า $b_k=0$

ตัวอย่าง 5.1.4 ${}^cD^{\frac{4}{3}}y(x)+5y(x)=e^x,\ 1\le p<2,\ y(0)=y'(0)=0$

จากข้อสังเกต 5.1.3 จะได้ว่า $y(x)=\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(-5(x-t)^{\frac{1}{3}}\right)e^t\,dt$

ข้อสังเกต 5.1.5 ให้ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ${}^cD^p y(x)+ay(x)=0$, $y^{(k)}(0)=b_k$, $k=0,1,...,n-1$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{p,k+1}\left(-ax^p\right) \qquad (5.3)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.1.1 โดยแทนค่า $h(x)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 5.1.6 ${}^{c}D^{\frac{5}{4}}y(x)+7y(x)=0,\ y(0)=y'(0)=3,\ 1\le p<2$

จากข้อสังเกต 5.1.5 จะได้ว่า $y(x)=\sum_{k=0}^{1}3xE_{\frac{5}{4},2}\left(-7x^{\frac{5}{4}}\right)$

ข้อสังเกต 5.1.7 ให้ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นอันดับชี้กำลังบน $[0,\infty)$ และ $n-1\le p<n$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น ${}^{c}D^{p}y(x)=h(x)$, $y^{(k)}(0)=b_k, k=0,1,...,n-1$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)}h(t)\,dt \qquad (5.4)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.1.1 โดยแทนค่า $a=0$

ตัวอย่าง 5.1.8 ${}^{c}D^{\frac{5}{3}}y(x)+5y(x)=\cos x,\ 1\le p<2,\ y(0)=5$

จากข้อสังเกต 5.1.7 จะได้ว่า $y(x)=\sum_{k=0}^{1}5\frac{x}{\Gamma(k+1)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}\cos x\,dt$

5.2 สมการการกวัดแกว่งเชิงเศษส่วนประกอบ (The composite fractional oscillation equation)

ทฤษฎีบท 5.2.1 ให้ $m-1\le p<m$ เมื่อ $m\in\mathbb{N}$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y^{(m)}(x)+a\,{}^{c}D^{p}y(x)+by(x)=c,\ y(0)=f_0,\ y'(0)=f_1,\ y''(0)=f_2,\ \ldots,\ y^{(m-1)}(0)=f_{m-1} \qquad (5.5)$$

กรณีที่ $f_0=f_1=f_2=\ldots=f_{m-1}=0$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=cx^m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\mathcal{L}\{y(x)\}=Y(s)$

$$\mathcal{L}\left[y^{(m)}(x)\right]+a\mathcal{L}\left[{}^{c}D^{p}y(x)\right]+b\mathcal{L}\left[y(x)\right]=\mathcal{L}[c]$$

$$s^mY(s)+as^pY(s)+bY(s)=\frac{c}{s}$$

$$\left(s^m+as^p+b\right)Y(s)=\frac{c}{s}$$

$$Y(s)=\frac{cs^{-1}}{s^m+as^p+b}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=c\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-1}}{s^m+as^p+b}\right\}$$

จากบทตั้ง 4.3.6

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\gamma}}{s^{\alpha}+as^{\beta}+b}\right\}=x^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}$$

เมื่อ $\alpha>\gamma$, $a\in\mathbb{R}$, $s^{\alpha-\beta}>|a|$, $\alpha\geq\beta>0$ และ $|s^{\alpha}+as^{\beta}|>|b|$

จะได้ว่า $$y(x)=cx^m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$ #

กรณีที่ $f_0,f_1,f_2,\ldots,f_{m-1}$ เป็นจำนวนจริงใดๆ มีผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}
y(x)&=cx^m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+af_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-p+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+f_1ax^{m-p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-p+2\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+f_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1-m\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+f_1x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-m+2\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+\ldots+f_{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\\
&+f_{m-1}x^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}
\end{aligned}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\mathcal{L}\left\{y(x)\right\}=Y(s)$

$$\mathcal{L}\left[y^{(m)}(x)\right]+a\mathcal{L}\left[{}^{c}D^{p}y(x)\right]+b\mathcal{L}\left[y(x)\right]=\mathcal{L}[c]$$

$$s^mY(s)-s^{m-1}y(0)-s^{m-2}y'(0)-\ldots-sy^{(m-2)}y(0)-y^{(m-1)}(0)$$

$$+a\left[s^pY(s)-s^{p-1}y(0)-s^{p-2}y'(0)\right]+bY(s)=\frac{c}{s}$$

$$s^mY(s)-s^{m-1}f_0-s^{m-2}f_1-\ldots-sf_{m-2}-f_{m-1}+as^pY(s)-as^{p-1}f_0-as^{p-2}f_1+bY(s)=cs^{-1}$$

$$\left(s^m+as^p+b\right)Y(s)=cs^{-1}+as^{p-1}f_0+as^{p-2}+f_1s^{m-1}f_0+s^{m-2}f_1+\ldots+sf_{m-2}+f_{m-1}$$

$$Y(s)=\frac{cs^{-1}+as^{p-1}f_0+as^{p-2}f_1+s^{m-1}f_0+s^{m-2}f_1+\ldots+sf_{m-2}+f_{m-1}}{\left(s^m+as^p+b\right)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y(s)=\frac{cs^{-1}}{s^m+as^p+b}+\frac{as^{p-1}f_0}{s^m+as^p+b}+\frac{as^{p-2}f_1}{s^m+as^p+b}+\frac{s^{m-1}f_0}{s^m+as^p+b}$$
$$+\frac{s^{m-2}f_1}{s^m+as^p+b}+\ldots+\frac{sf_{m-2}}{s^m+as^p+b}+\frac{f_{m-1}}{s^m+as^p+b}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{cs^{-1}}{s^m+as^p+b}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as^{p-1}f_0}{s^m+as^p+b}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as^{p-2}f_1}{s^m+as^p+b}\right\}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{m-1}f_0}{s^m+as^p+b}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{m-2}f_1}{s^m+as^p+b}\right\}+\ldots+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sf_{m-2}}{s^m+as^p+b}\right\}$$
$$+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f_{m-1}}{s^m+as^p+b}\right\}$$

จากบทตั้ง 4.3.6

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\gamma}{s^\alpha+as^\beta+b}\right\}=x^{\alpha-\gamma-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(\alpha-\beta)+\alpha(n+1)-\gamma\right)}\cdot x^{k(\alpha-\beta)+\alpha n}$$

เมื่อ $\alpha>\gamma$, $a\in\mathbb{R}$, $s^{\alpha-\beta}>|a|$, $\alpha\geq\beta>0$ และ $|s^\alpha+as^\beta|>|b|$

จะได้ว่า $y(x)=cx^m\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$

$$+af_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-p+1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$
$$+f_1ax^{m-p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-p+2\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$
$$+f_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)+1-m\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$
$$+f_1x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-m+2\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$
$$+\ldots+\ f_{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)-1\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}$$
$$+f_{m-1}x^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^n(-a)^k}{\Gamma\left(k(m-p)+m(n+1)\right)}\cdot x^{k(m-p)+mn}\qquad\#$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อสังเกต 5.2.2 ให้ $1 \le p < 2$ จะได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้น $y''(x)+a\,{}^{c}D^{p}y(x)+by(x)=c$, $y(0)=e$, $y'(0)=f$ มีผลเฉลยคือ

$$y(x)=cx^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}}{\Gamma\left(k(2-p)+2(n+1)+1\right)}\cdot x^{k(2-p)+2n}$$
$$+e\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}}{\Gamma\left(k(2-p)+2(n+1)-1\right)}\cdot x^{k(2-p)+2n}$$
$$+eax^{2-p}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}}{\Gamma\left(k(2-p)+2(n+1)-p+1\right)}\cdot x^{k(2-p)+2n}$$
$$+fx\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}}{\Gamma\left(k(2-p)+2(n+1)\right)}\cdot x^{k(2-p)+2n}$$
$$+fax^{3-p}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-b)^{n}(-a)^{k}}{\Gamma\left(k(2-p)+2(n+1)-p+2\right)}\cdot x^{k(2-p)+2n} \quad (5.6)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 5.2.1 โดยแทนค่า $m=0$, $f_0=e$ และ $f_1=f$

ตัวอย่าง 5.2.3 $y''(x)+9\,{}^{c}D^{\frac{1}{3}}y(x)+2y(x)=25$, $y(0)=13$, $y'(0)=44$
จากข้อสังเกต 5.2.2 จะได้ว่า

$$y(x)=25x^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-2)^{n}(-9)^{k}}{\Gamma\left(k\left(\frac{5}{3}\right)+2(n+1)+1\right)}\cdot x^{\frac{5}{3}k+2n}$$
$$+44\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-2)^{n}(-9)^{k}}{\Gamma\left(k\left(\frac{5}{3}\right)+2(n+1)-1\right)}\cdot x^{\frac{5}{3}k+2n}$$
$$+117x^{\frac{5}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-2)^{n}(-9)^{k}}{\Gamma\left(k\left(\frac{5}{3}\right)+2(n+1)-p+1\right)}\cdot x^{\frac{5}{3}k+2n}$$
$$+44x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-2)^{n}(-9)^{k}}{\Gamma\left(k\left(\frac{5}{3}\right)+2(n+1)\right)}\cdot x^{\frac{5}{3}k+2n}$$
$$+396x^{\frac{8}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(-2)^{n}(-9)^{k}}{\Gamma\left(k\left(\frac{5}{3}\right)+2(n+1)-p+2\right)}\cdot x^{\frac{5}{3}k+2n}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6
สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลงานวิจัย

จากที่ผู้วิจัยได้อธิบายไว้ในข้างต้น งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาคุณสมบัติและนิยามของปริพันธ์เชิงเศษส่วนในแนวคิดของรีมันน์-ลียูวิลล์ อนุพันธ์เชิงเศษส่วนในแนวคิดของคาปูโต และการแปลงลาปลาซ โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อนำมาแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์

จากผลการวิจัยสามารถแบ่งการหาผลเฉลยออกเป็น 2 แบบ คือ

1) การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนเชิงเส้นในรูปของ ${}^{c}D^{p}y(x)+ay(x)=h(x)$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้นั้นจะอยู่ในพจน์ของฟังก์ชันมิทเทก-เลฟเฟลอร์สองตัวแปรเสริม

2) การหาผลเฉลยของสมการการกวัดแกว่งเชิงเศษส่วนประกอบ (The composite fractional oscillation equation)

$y^{(m)}(x)+a\,{}^{c}D^{p}y(x)+by(x)=c$, $y(0)=f_0$, $y'(0)=f_1$, $y''(0)=f_2$, ..., $y^{(m-1)}(0)=f_{m-1}$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้นั้นจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือกรณีที่เงื่อนไขเป็นศูนย์ และกรณีที่เงื่อนไขเป็นค่าคงตัวใดๆ โดยผลเฉลยจะอยู่ในรูปของอนุกรมและแกมมาฟังก์ชัน

นอกจากนั้นผู้วิจัยยังมีการคิดค้นกรณีเฉพาะต่างๆจากสมการหลักทั้ง 2 สมการข้างต้น เพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้งาน และได้ยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น

6.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาในหัวข้อเรื่องอนุพันธ์เชิงเศษส่วนภายใต้แนวคิดของคาปูโตเท่านั้น ดังนั้นอาจยังไม่ครอบคลุมหรือดีพอในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์ที่มีหลายหลายในปัจจุบัน ผู้วิจัยจึงขอแนะนำให้ศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับแคลคูลัสเชิงเศษส่วนภายใต้แนวคิดของนักคณิตศาสตร์ท่านอื่นๆด้วย เช่น อนุพันธ์เชิงเศษส่วนในแนวคิดของรีมันน์-ลียูวิลล์ (Riemann-Liouville) เพื่อเป็นประโยชน์ต่อไปในภายภาคหน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] Zayed Hussein Alzuheiri, (2015), **Solving of Certain Systems of Fractional Differential Equations**, Zarqa University, Jordan.

[2] David Allan Miller, (2003), **Fractional Calculas**, West Virginia university, United state.

[3] Mathai A. and Haubo H., (2008), **Special Functions for Applied Scientist**, New York : Springer science + business Media LLC.

[4] Miller K. and Ross B., (1993), **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional differential Equations**, New York : John Wiley & sons.

[5] Crompton B., (2011), **An Introduction to the Fractional Calculus and the Fractional Diffusion – Wave Equation, Unpublished Master Thesis**, university of Massachusetts Lowell.

[6] Delkhosh M., (2013), **Introduction of Derivatives and Integrals of Fractional Order and its Applications**, Applied Mathematics and Physics, Vol. 1, No. 4, 103-119.

[7] I.S. Grandshteyn and I.M. Ryzhik, (1980), **Tables of Integrals, Series and Products**, Academic Press, New York.

[8] Ishteva M., (2005), **Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator**, Unpublished Master Thesis, Karisrule(TH) University, Sofia, Bulgaria

[9] Kazen S., (2013), **Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform**, International Journal og Nonlinear Science, (Vol.16(2013) No.1, pp.3-11)

[10] Podlubny I., (1999), **Fractional differential equations**, USA: Academic Press

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[11] Weibeer M., (2005), **Efficient Numerical Methods for Fractional Diferential Equations and their Analytical Background**, Unpublished Master Thesis, Der Technischen Universitat Braunschweig

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้