การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATIONS OF BINOMIAL DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS

กาญจนศิริ เกษแก้ว
ชลธิชา คงทะเล
ณัฏฐนิชา ศรีประสิทธิ์
ดวงฤทัย เสถียรรัตน์

ปัญหาพิเศษนี้นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2561

EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATIONS OF BINOMIAL DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS

KANJANASIRI KESKEAW
CHONTHICHA KONGTHALAE
NATTANICHA SRIPRASIT
DUANGRUTHAI SATIANRAT

A SPECIAL PROBLEM SUMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED STATISTICS)
DEPARTMENT OF STATISTICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2018

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATIONS OF BINOMIAL DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกาญจนศิริ เกษแก้ว รหัสนักศึกษา 58051186 นางสาวชลธิชา คงทะเล รหัสนักศึกษา 58051207 นางสาวณัฏฐนิชา ศรีประสิทธิ์ รหัสนักศึกษา 58051215 นางสาวดวงฤทัย เสถียรรัตน์ รหัสนักศึกษา 58051227
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ภาควิชา	สถิติ
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2561

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.สมศรี บัณฑิตวิไล ประธานกรรมการ	
ผศ.ชูใจ คูหารัตนไชย กรรมการ	
ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร อาจารย์ที่ปรึกษาและกรรมการ	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกาญจนศิริ เกษแก้ว รหัสนักศึกษา 58051186
	นางสาวชลธิชา คงทะเล รหัสนักศึกษา 58051207
	นางสาวณัฏฐนิชา ศรีประสิทธิ์ รหัสนักศึกษา 58051215
	นางสาวดวงฤทัย เสถียรรัตน์ รหัสนักศึกษา 58051227
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ภาควิชา	สถิติ
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2561
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงพารามิเตอร์ของประชากร (p) หรือค่าความน่าจะเป็นที่จะได้รับความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยใช้ตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงทวินาม ที่มีค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 สำหรับการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงขนาดตัวอย่าง (n) คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100) และกำหนดระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% โดยใช้โปรแกรมอาร์ และทำซ้ำ 1,000 รอบในแต่ละสถานการณ์โดยการประมาณค่าแบบจุดจะพิจารณาการประมาณค่าด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงจะพิจารณาการประมาณค่าด้วย ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW)

ผลการวิจัยพบว่า

การประมาณค่าแบบจุด พบว่าส่วนใหญ่วิธีของเบส์ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) น้อยที่สุด ยกเว้นเมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.7 และ 0.9 ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100) สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(MSE) น้อยที่สุด เมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(MSE) น้อยที่สุด เมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

การประมาณค่าแบบช่วงพบว่าส่วนใหญ่วิธีของเบส์จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) แคบที่สุด ยกเว้นเมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ส่วนใหญ่วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) แคบที่สุดของแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษาที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) แคบที่สุด เมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.9 ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

คำสำคัญ : การแจกแจงทวินาม การประมาณค่าแบบจุด การประมาณค่าแบบช่วง ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เบส์ มอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

Title	EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATIONS OF BINOMIAL DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS
Students	Miss.KANJANASIRI KESKEAW Student ID 58051186 Miss.CHONTHICHA KONGTHALAE Student ID 58051207 Miss.NATTANICHA SRIPRASIT Student ID 58051215 Miss.DUANGRUTHAI SATIANRAT Student ID 58051227
Degree	Bachelor of Science (Applied Statistics)
Department	Statistics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2018
Advisor	Asst.Prof.Dr. Autcha Araveeporn

Abstract

The objective of this research is to compare the point and interval estimations of the population parameter (p) or probability of success in each experiment based on binomial distribution by maximum likelihood, Bayes' and Markov Chain Monte Carlo methods. The prior distribution of Bayes' method is defined by beta distribution. The data samples are generated from binomial distribution with the population parameter (p) as 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 and 0.9. For point and interval estimation, size of the sample are the small sample sizes (n = 10 and 20), medium sample sizes (n = 30 and 50) and large sample sizes (n = 70 and 100). There are confidance level are 90%, 95% and 99%. The simulated data is generated by R program and replicated 1,000 times for about situation. The criterion of point estimation is the process of mean squared error. The interval estimation is considered by a confidence coefficient and average interval length.

The results of this research are summarized as follow :

For the point estimation, the most estimators from the Bayes' method are the minimum mean squared error except at p = 0.1, 0.7 and 0.9 at the large sample sizes (n = 100). The maximum likelihood is the minimum mean squared error at p = 0.1 at the large sample sizes (n = 100). The Markov Chain Monte Carlo methods is the minimum mean squared error at p= 0.7 and 0.9 at the large sample sizes (n = 100).

For the interval estimations, the most estimators from the Bayes'. method are shown the minimum value of average interval except at the small sample sizes (n = 10 and 20). The most estimators from Markov Chain Monte Carlo method are shown the minimum value of average interval length in each 90% 95% and 99%. The maximum likelihood method is presented the minimum of the average interval length on p= 0.9 at the small sample sizes (n = 10) with the confidence interval 99%.

Keywords : Binomial Distribution, the point estimations, the interval estimations, Maximum Likelihood, Bayes', Markov Chain Monte Carlo

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีและมีความถูกต้องในเนื้อหา เนื่องด้วยได้รับความอนุเคราะห์จาก ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร ผู้ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา รวมถึงเป็นผู้ให้คำแนะนำ คำปรึกษา เอื้อเฟื้อเอกสารที่เกี่ยวข้องต่างๆ และหนังสืออ้างอิงที่ใช้ในการจัดทำงานวิจัยนี้ ตลอดจนตรวจทานงานวิจัย และติดตามการทำวิจัยทุกขั้นตอนจนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์ จึงขอกราบขอบพระคุณด้วยความเคารพเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณ ผศ.ชูใจ คูหารัตนไชย และ ผศ.ดร.สมศรี บัณฑิตวิไล ผู้ซึ่งเป็นคณะกรรมการที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่อง ตลอดจนแก้ไขข้อผิดพลาดเพิ่มเติม ทำให้ปัญหาพิเศษเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์และบุคลากรภาควิชาสถิติประยุกต์ทุกท่าน ที่ได้มอบความรู้และคำแนะนำ รวมถึงความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ มาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณบิดามารดา และครอบครัวของผู้จัดทำปัญหาพิเศษ ที่ให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้เสมอมา และขอขอบคุณพี่ๆเพื่อนๆน้องๆทุกคนที่ให้คำปรึกษา ช่วยเหลือในการทำงานมาโดยตลอด จนกระทั่งปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

กาญจนศิริ เกษแก้ว
ชลธิชา คงทะเล
ณัฏฐนิชา ศรีประสิทธิ์
ดวงฤทัย เสถียรรัตน์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ประชากร (Population) หมายถึง หน่วยของข้อมูลทั้งหมดที่ต้องการศึกษา โดยประชากรในการวิจัยมี 2 ประเภทคือ ประชากรที่มีจำนวนนับได้แน่นอน (Finite Population) และประชากรที่มีจำนวนนับได้ไม่แน่นอน (Infinite Population) งานวิจัยส่วนใหญ่ การเก็บข้อมูลจากทุกหน่วยของประชากรมาศึกษาทำได้ยาก หรือไม่สามารถศึกษาประชากรทั้งหมดได้ จึงต้องสุ่มเลือกประชากรบางส่วนมาศึกษา เรียกว่า ตัวอย่าง (Sample) โดยใช้สถิติเชิงอ้างอิงหรือสถิติอนุมาน (Inferential Statistics) เป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ในการประมาณค่าจากกลุ่มตัวอย่างแล้วนำมาสรุปภาพรวมของประชากร ประกอบด้วย 2 รูปแบบคือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parametric Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Testing Hypothesis)

การประมาณค่า คือการใช้ข้อมูลตัวอย่างประมาณค่าพารามิเตอร์หรือลักษณะของประชากร การประมาณค่าทางสถิติสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือการประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

การประมาณค่าแบบจุด เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรด้วยค่าเพียงค่าเดียว การประมาณค่าแบบนี้อาจจะมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์หรืออาจมีโอกาสที่จะได้ค่าที่คลาดเคลื่อนไปจากค่าพารามิเตอร์ได้มาก ทั้งนี้อยู่กับหน่วยตัวอย่างที่นำมาวิเคราะห์ โดยการประมาณค่าแบบจุดจะมีวิธีการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ได้หลายวิธี เช่นวิธีโมเมนต์ (The Moments Method) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method) วิธีไคกำลังสองต่ำสุด (The Minimum Chi-Square Method) วิธีกำลังสองต่ำสุด (The Least Squares Method) วิธีของเบส์ (Bayes' Method) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo) วิธีระยะห่างต่ำสุด วิธีมินิแม็กซ์ วิธีของพิทแมนเป็นต้น โดยตัวประมาณค่าจะต้องมีคุณสมบัติ คือ ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness) ความคงเส้นคงวา (Consistency) ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency) ความพอเพียง (Sufficiency) (สายชล, 2554 ; อโนทัย, 2539)

การประมาณค่าแบบช่วง จะอาศัยค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างและการแจกแจงความน่าจะเป็นในการสร้างขอบเขตบนและขอบเขตล่าง และบอกว่าตัวที่เราประมาณค่าอยู่ระหว่างช่วงใด

ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วง จะได้ค่าครอบคลุมพารามิเตอร์ที่เราต้องการประมาณและสามารถบอกค่าความน่าจะเป็นหรือเปอร์เซ็นต์ของค่าความเชื่อมั่นได้ว่าค่าพารามิเตอร์ที่เราประมาณแบบช่วงนั้นจะครอบคลุมค่าด้วยความเชื่อมั่นเท่าใด

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method) เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายและสามารถตรวจสอบคุณสมบัติของตัวประมาณค่าได้ คือ ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness) ความคงเส้นคงวา (Consistency) ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency) ความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance) และความพอเพียง (Sufficiency) โดยเป็นการหาตัวประมาณค่าที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) มีค่าสูงสุด ซึ่งต้องทราบตัวพารามิเตอร์และการแจกแจง

วิธีของเบส์ (Bayes' Method) เป็นการพิจารณารูปแบบการแจกแจงของค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นหรือเรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (Prior Distribution Function) ร่วมกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Distribution Function) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อกำหนดข้อมูลซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันที่แจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution Function) ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงก่อนนี้จะถูกกำหนดโดยประสบการณ์ส่วนตัวของแต่ละบุคคล เมื่อได้ทำการทดลองก็จะมีข้อสนเทศใหม่ขึ้นส่งผลให้การแจกแจงความน่าจะเป็นเปลี่ยนแปลง (ฝันจิต, 2537) โดยมีการศึกษาการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินามด้วยวิธีการของเบส์ เมื่อการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตา (Beta Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น (0.5,0.5), (1,1), (2,2) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 ที่ช่วงความเชื่อมั่น 90% และ95% โดยพิจารณาค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น (มานะชัย, 2557)

วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo) เป็นวิธีที่นิยมใช้เมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของตัวแปรสุ่ม โดยประกอบด้วยการสุ่มตัวอย่างของตัวแปรจากวิธีมาร์คอฟ เชน (Markor Chain) จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน และทำการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs Sampling) จากนั้นทำการประมาณค่าด้วยมอนติคาร์โล (Monte Carlo) จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (อัชฌา, 2555)

โดยมีงานวิจัยเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงปัวซง และได้ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าเฉลี่ยแบบช่วงของการแจกแจงปกติ (Araveeporn, 2015) การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่กล่าวมาจะใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ โดยนำเทคนิคดังกล่าวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน (Thetkham and Araveeporn, 2016) การศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าความเชื่อถือได้ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ โดยใช้ข้อมูล Type-II Censoring โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ (Kumar and Tomer, 2016) และการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (อัญมณี, 2561)

ข้อมูลโดยทั่วไปจะมีลักษณะเป็นตัวแปรสุ่มโดยแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มใดๆ และค่าของตัวแปรสุ่มเป็นค่าที่ได้จากการนับ มีการแจกแจงที่สำคัญคือ การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution) และการแจกแจงปัวซง (Poisson Distribution) และตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นช่วงของจำนวนจริงและค่าของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเป็นค่าที่ได้จากการชั่ง ตวง วัด มีการแจกแจงที่สำคัญคือ การแจกแจงปรกติ (Normal Distribution) การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) และการแจกแจงบีตา (Beta Distribution)

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามโดยสนใจตัวแปรสุ่ม X ที่แทนจำนวนครั้งความสำเร็จที่ได้จากการทดลอง n ครั้ง โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ p เมื่อ n คือการทดลองซ้ำๆกันในสภาวะเดียวกันอย่างเป็นอิสระและ p คือ ความน่าจะเป็นที่จะสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง สำหรับการแจกแจงทวินามสามารถนำไปใช้ประยุกต์ใช้ได้ในด้านอุตสาหกรรม ด้านการแพทย์ ด้านวิทยาศาสตร์เป็นต้น ซึ่งการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงที่ได้นั้นจะมีความแม่นยำขึ้นอยู่กับวิธีการประมาณและปัจจัยอื่นๆ เช่น ขนาดของตัวอย่าง ค่าของพารามิเตอร์ และการกำหนดช่วงความเชื่อมั่น

จากแนวคิดดังกล่าวผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบจุด และแบบช่วงของการแจกแจงทวินามด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆ และเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 วิธี

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์และช่วงความเชื่อมั่น สำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีการประมาณค่า 3 วิธี คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.3.2 กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงทวินาม โดยที่ x แทน จำนวนครั้งความสำเร็จที่ได้จากการทดลอง n ครั้ง โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ p เมื่อ n คือ การทดลองซ้ำๆกันในสภาวะเดียวกันอย่างเป็นอิสระ และ p คือ ความน่าจะเป็นที่จะได้รับสิ่งที่สนใจในการทดลองแต่ละครั้ง โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ; x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X) = np$

ค่าความแปรปรวนตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X) = np(1-p)$

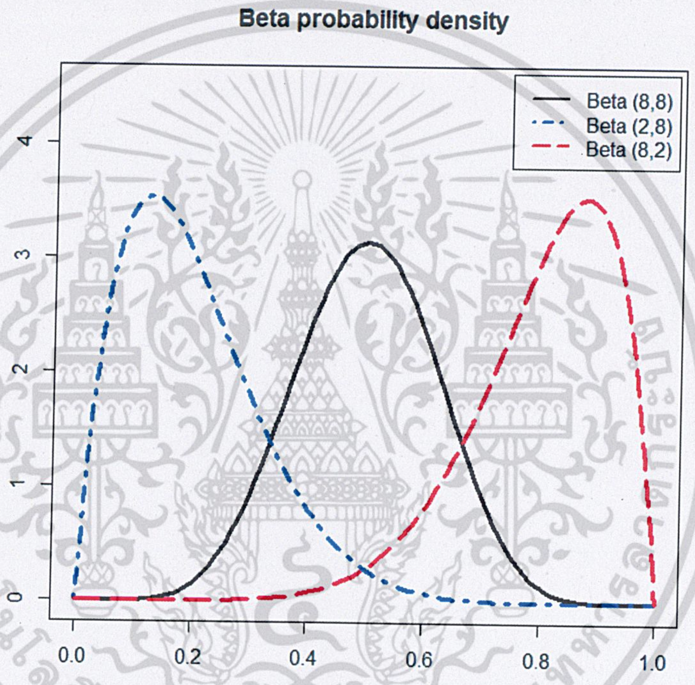
1.3.3 กำหนดฟังก์ชันการแจกแจงก่อนให้มีการแจกแจงบีตา ที่มีพารามิเตอร์ a และ b โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ; 0<x<1,\ a>0,\ b>0 \\ 0 & ; x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$

ค่าความแปรปรวนตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

กำหนดค่าพารามิเตอร์ให้มีรูปแบบสมมาตร เบ้ขวา และเบ้ซ้าย โดยมีค่าพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ $(8,8)$ $(2,8)$ $(8,2)$ ตามลำดับ



รูปที่ 1.1 การแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ $(8,8)$ $(2,8)$ $(8,2)$

1.3.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9

1.3.5 ขนาดตัวอย่าง (n) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ100)

1.3.6 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับ คือ 90%, 95% และ 99%

1.3.7 โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เขียนโดยโปรแกรมอาร์เวอร์ชั่น 3.5.1 ซึ่งทำการทดลองซ้ำ (m) 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

1.3.8 เกณฑ์ที่ใช้ในการวิจัย

1. การประมาณค่าแบบจุด จะพิจารณาการประมาณค่าด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) เป็นค่าวัดความถูกต้องโดยค่า MSE น้อยการประมาณค่ายิ่งแม่นยำ

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{m}(p-\hat{p}_i)^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(e_i)^2}{m}$$

2. การประมาณค่าแบบช่วง จะพิจารณาการประมาณค่าด้วยค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW)

คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(\hat{c})$ เพื่อตรวจสอบว่าค่าประมาณแบบช่วงที่คำนวณได้คลุมค่าพารามิเตอร์ p มากน้อยเพียงใด ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จะสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$c_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}} \le \hat{c} \le c_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}$$

โดยที่ α^* คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้เท่ากับ 0.05

$\hat{c}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี

c_0 คือ ค่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

m คือ จำนวนครั้งของการทดลองซ้ำ เท่ากับ 1,000

ซึ่งสามารถคำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ได้ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น } (\hat{c}) = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นคลุมค่าพารามิเตอร์ } p}{m}$$

ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) โดยคำนวณจากช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น

$$\text{ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(U_i - L_i)}{m}$$

เมื่อ L_i และ U_i คือ ค่า ขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i

เปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี ถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดจะถือว่าเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมที่สุด ทั้งนี้ใน

การเปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะเปรียบเทียบเฉพาะในกรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น (โสรัจจะ จุฑาภรณ์ และประสิทธิ์, 2559)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถเลือกใช้วิธีการประมาณค่าได้อย่างเหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ของการแจกแจงทวินาม

1.4.2 เป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยเพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่า เมื่อการแจกแจงก่อนมีพารามิเตอร์แตกต่างกันในการแจกแจงรูปแบบอื่นๆ

1.5 นิยามศัพท์

1.5.1 ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) หมายถึง ช่วงที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งคำนวณได้จากค่าตัวอย่างสุ่ม

1.5.2 ความกว้างเฉลี่ยของช่วง (Average Width Of The Confidence Interval) หมายถึง ค่าเฉลี่ยของความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าตัวอย่างสุ่มในสถานการณ์เดียวกัน

1.5.3 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) หมายถึง วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวหนึ่งหรือหลายตัวของประชากรที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มมีค่าสูงสุด

1.5.4 ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) หมายถึง ตัวประมาณของพารามิเตอร์ของประชากรที่หาได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มมีค่าสูงสุด

1.5.5 ตัวประมาณเบส์ภายหลัง (Posterior Bayes' Estimator) ของ $h(p)$ หมายถึง ค่าคาดหมายของ $h(p)$ ที่ได้มาจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

1.5.6 การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) หมายถึง ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Θ โดยที่ Θ คือพารามิเตอร์ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น

1.5.7 การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Θ เมื่อกำหนดให้ $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ โดยที่ Θ คือพารามิเตอร์ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาครั้งนี้จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งมีรายละเอียดของการแจกแจงทางสถิติ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และสถิติที่ใช้ในงานวิจัย ดังนี้

2.1 การแจกแจงที่ใช้ในงานวิจัย

2.1.1 การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงทวินาม โดยที่ x แทน จำนวนครั้งความสำเร็จที่ได้จากการทดลอง n ครั้ง โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ p เมื่อ n คือ การทดลองซ้ำๆกันในสภาวะเดียวกันอย่างเป็นอิสระ และ p คือ ความน่าจะเป็นที่จะได้รับสิ่งที่สนใจในการทดลองแต่ละครั้ง โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ; x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X) = np$

ค่าความแปรปรวนตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X) = np(1-p)$

2.1.2 การแจกแจงบีตา (Beta Distribution)

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ a และ b โดย มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & ; 0 < x < 1,\ a > 0,\ b > 0 \\ 0 & ; x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$

ค่าความแปรปรวนตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

2.2 ทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

2.2.1 การประมาณค่า

การประมาณค่า คือการใช้ข้อมูลตัวอย่างประมาณค่าพารามิเตอร์หรือลักษณะของประชากร การประมาณค่าทางสถิติสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือการประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

2.2.1.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

นิยามที่ 2.1 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ตัวประมาณ (Estimation) ของ θ ฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ค่าประมาณ (Estimate) ของ θ คือ ค่าหนึ่งของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ ของ θ (สายชล, 2554)

การประมาณค่าแบบจุด เป็นการประมาณค่าโดยใช้สถิติจากตัวอย่างมาเป็นตัวแทนพารามิเตอร์ (Parameter) ของประชากรนั้นๆ โดยทั่วไปแล้วลักษณะของค่าสถิติ (Statistics) จะมีลักษณะเดียวกันกับประชากรแต่จะต่างกันที่ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งค่าที่ได้จะขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่สุ่มได้ หากกลุ่มตัวอย่างที่ทำการสุ่มมาเป็นตัวแทนที่ดี ค่าที่ได้จากการประมาณค่าก็จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์ หรือมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อย แต่อย่างไรก็ตามการประมาณค่าแบบจุดนี้โอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยวิธีนี้จะสูงมาก อีกทั้งยังไม่สามารถกำหนดค่าความเชื่อมั่นของการประมาณค่าได้ ดังนั้นวิธีการนี้จึงไม่ค่อยนิยมใช้มากนัก แต่อาจถูกนำมาใช้เมื่อต้องการประมาณค่าประชากรอย่างง่าย

2.2.1.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

นิยามที่ 2.2 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ โดยที่ θ เป็นจำนวนจริงให้ $L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ และ $U(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ เป็นสถิติที่ $L(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le U(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ทุกจุดสังเกต $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S และ $P[L(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le g(\theta) \le U(x_1,x_2,\ldots,x_n)] = 1-\alpha$ โดยที่ α ไม่ขึ้นอยู่กับ θ เราเรียกช่วงสุ่ม (Random Interval) $[L(x_1,x_2,\ldots,x_n), U(x_1,x_2,\ldots,x_n)]$ ว่าช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ($100(1-\alpha)\%$ Confidence Interval) ของ $g(\theta)$ และเรียก $(1-\alpha)$ ว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) หรือระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level)

นิยามที่ 2.3 ถ้า $L(x_1,x_2,...,x_n)$ และ $U(x_1,x_2,...,x_n)$ เป็นสถิติที่ $P\left[g(\theta)<L(x_1,x_2,...,x_n)\right]$ $=\frac{\alpha}{2}=P\left[g(\theta)>U(x_1,x_2,...,x_n)\right]$ แล้วเรียกช่วง $\left[L(x_1,x_2,...,x_n),U(x_1,x_2,...,x_n)\right]$ ว่าช่วงความเชื่อมั่นศูนย์กลางขนาด $100(1-\alpha)\%$ ($100(1-\alpha)\%$ Central Confidence Interval) ของ $g(\theta)$ (ประชุม, 2553)

การประมาณค่าแบบช่วง วิธีนี้เป็นการใช้ตัวประมาณค่าแบบจุดเป็นค่าเริ่มต้นในการประมาณค่าประชากรหรือค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ให้มีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ซึ่งจะพบว่าการประมาณค่าด้วยวิธีการนี้มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า โดยอาศัยการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของการประมาณจะประกอบไปด้วย

1. ขีดจำกัดของการประมาณ สร้างโดยอาศัยการแจกแจงของค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่าง เช่น การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยการประมาณค่าจะบอกถึงขีดจำกัดของการประมาณ ที่ประกอบไปด้วยขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบน

2. ระดับความเชื่อมั่น การสร้างช่วงความเชื่อมั่นต้องบอกว่ามีโอกาสของความถูกต้องร้อยละเท่าใด กำหนดโดยใช้โอกาสความถูกต้องเป็น $1-\alpha$ และมีโอกาสผิดพลาดเป็น α หรือเรียกว่าระดับนัยสำคัญ

2.2.2 ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem)

เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบใดๆก็ตามที่มีความแปรปรวนเป็นค่าจำกัด ค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปรกติ นั่นคือ

ให้ $x_1,x_2,...,x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกัน โดยมีค่าเฉลี่ย $E(x_i)=\mu$ และความแปรปรวน $Var(x_i)=\sigma^2<\infty$

ให้ $Z_n=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/n}$ เมื่อ $\bar{x}=\frac{x_1,x_2,...,x_n}{n}$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ $(n\to\infty)$ จะได้ว่า Z_n ลู่เข้าในเชิงการแจกแจงสู่ตัวแปรสุ่ม Z ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปรกติมาตรฐาน (สุชาดา, 2534)

2.3 สถิติที่ใช้ในงานวิจัย

2.3.1 วิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method)

การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการที่ใช้กันมาก และเป็นวิธีที่ง่าย เพราะวิธีนี้เป็นการหาตัวประมาณค่าที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) มีค่าสูงสุด ตัวประมาณค่าที่หาได้จากวิธีการนี้เรียกว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (น้อมจิต, 2553)

การประมาณค่าแบบจุด

กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม มีพารามิเตอร์ p โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x;p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} & ;\ x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ;\ x \ \text{มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จากฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นจะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\left(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(n-x)}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\left(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) \end{aligned}$$

ตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p หาได้จาก

$$\ln L(p) = \ln\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + (n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{p-1} = 0$$

$$0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (p-1) + p(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{p(p-1)}$$

$$0 = \frac{n^2 p - \sum_{i=1}^{n} x_i}{p(p-1)}$$

$$0 = n^2 p - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$n^2 p = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$$

และจะได้ $\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial^2 p} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} + \frac{(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{(p-1)^2} < 0$ แสดงว่าค่าประมาณที่ได้มีค่าสูงสุด

ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p คือ $\hat{p}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$

เมื่อพิจารณาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p คือ $\hat{p}_{MLE}$ ในรูปแบบการแจกแจงทวินาม มีคุณสมบัติของตัวประมาณดังนี้

1. ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator)

ถ้าพิจารณาค่าคาดหมายของ $\hat{\theta}$ จะเห็นได้ว่าถ้าค่าคาดหมายของการแจกแจงจากตัวอย่างของ $\hat{\theta}$ มีค่าเท่ากับพารามิเตอร์ θ พอดี แสดงว่าจุดกลางของการแจกแจงของตัวประมาณอยู่ ณ จุดที่เป็นค่าจริง ดังนั้น คุณสมบัติประการหนึ่งของตัวประมาณที่ควรพิจารณา คือ ความไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์

นิยามที่ 2.4 ให้ $\hat{\theta} = t(x_1,...,x_n)$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) ของ θ แล้วจะได้ว่า $E(\hat{\theta}) = \theta$

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ n, p จาก $x_i \sim Binomial(n,p)$ เมื่อ $i = 1,2,...,n$, $0 < p < 1$ เมื่อทราบค่า n

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}_{MLE}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n^2}\right) E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= \left(\frac{1}{n^2}\right) nE(x) \\
&= \left(\frac{1}{n^2}\right) n \cdot np \\
&= p
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ p

2. ความคงเส้นคงวา (Consistency)

โดยปกติการคำนวณหาค่าของตัวประมาณ T สำหรับประมาณ $\tau(\theta)$ ใดๆมักจะคำนวณจากข้อมูลที่สังเกตในตัวอย่างสุ่มขนาด n ดังนั้นถ้าขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นแล้วค่าของตัวประมาณ T ที่ได้ควรจะมีค่าเข้าใกล้ค่า $\tau(\theta)$ มากยิ่งขึ้น นั้นคือ ค่าประมาณที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อเพิ่มขนาดของตัวอย่างสุ่มและถ้าเป็นไปได้ถ้าเพิ่มขนาดตัวอย่างได้มากจนเท่ากับขนาดของประชากร ตัวสถิติ T ก็จะมีค่าเท่ากับค่าของ $\tau(\theta)$ เราจะเรียกคุณสมบัตินี้ว่า ความคงเส้นคงวา (Consistency) ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยามที่ 2.5 ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา (Consistency) ของ θ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$$

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ n, p จาก $x_i \sim Binomial(n,p)$

ค่าคาดหมายของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p

$$E(\hat{p}_{MLE}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right)$$

$$= p$$

จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{p}_{MLE}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} p$$

$$= p$$

ความแปรปรวนของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p

$$Var(\hat{p}_{MLE}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^4} nVar(x)$$

$$= \frac{1}{n^4} n(np(1-p))$$

$$= \frac{p(1-p)}{n^2}$$

จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{p}_{MLE}) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n^2}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของ p

3. ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ (Efficiency Estimator)

นิยามที่ 2.6 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ แล้วประสิทธิภาพของ $\hat{\theta}$ คือ

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1/I(\theta)}{Var(\hat{\theta})}$$

นิยามที่ 2.7 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ และ $e(\hat{\theta}) = 1$ แล้ว $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ (Efficiency Estimator) หรือตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (Most Efficiency Estimator) ของ θ

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ $\boldsymbol{n, p}$ จาก $x_i \sim Binomial(n, p)$

เนื่องจาก
$$f(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{aligned}
ln\, f(x;n,p) &= ln\binom{n}{x} + ln\, p^x + ln(1-p)^{n-x} \\
&= ln\binom{n}{x} + x\, ln\, p + (n-x)\, ln(1-p) \\
\frac{\partial}{\partial p} ln\, f(x;n,p) &= \frac{x}{p} - \frac{(n-x)}{(1-p)} \\
&= \frac{x(1-p)-(n-x)p}{p(1-p)} \\
&= \frac{x-np}{p(1-p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial lnf(x;n,p)}{\partial p}\right]^2 &= E\left[\left(\frac{x-np}{p(1-p)}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{p^2(1-p)^2} E(x-np)^2 \\
&= \frac{1}{p^2(1-p)^2} \cdot np(1-p) \\
&= \frac{n}{p(1-p)}
\end{aligned}$$

$$I(p) = nE\left[\frac{\partial lnf(x;n,p)}{\partial p}\right]^2$$

$$= \frac{n^2}{p(1-p)}$$

และ $$Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right) = \frac{p(1-p)}{n^2}$$

เพราะฉะนั้น $$e(\hat{p}) = \frac{1/I(p)}{Var(\hat{p})}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\dfrac{n^2}{p(1-p)}}}{\dfrac{p(1-p)}{n^2}}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n^2} \cdot \frac{n^2}{p(1-p)}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดของ p

4. ความพอเพียง (Sufficiency)

ในกรณีที่ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega$ และ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าของ θ การที่จะแสดงว่า $\hat{\theta}$ เป็นสถิติที่มีความพอเพียงของ θ หรือไม่นั้นสามารถแสดงโดยใช้นิยามของสถิติที่มีความพอเพียงดังนี้

นิยามที่ 2.8 ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ถ้า $\hat{\theta} = t(x_1, ..., x_n)$ เป็นสถิติค่าหนึ่ง $\hat{\theta}$ จะเป็นสถิติพอเพียงของ θ ถ้า h, k เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ซึ่งทำให้ $f(x_1, ..., x_n;\theta) = h(\hat{\theta};\theta)k(x_1, ..., x_n)$

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ n, p จาก $x_i \sim Binomial(n, p)$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $x_1, x_2, ..., x_n$ คือ

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \left(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i} \right) \\
&= k(x_1, x_2, ..., x_n) h(\hat{p}; p)
\end{aligned}
$$

โดยที่ $k(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i}$ และ $h(\hat{p}; p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i}$

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} x_i$ เป็นสถิติพอเพียงของ p

ดังนั้น $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ เป็นเป็นสถิติพอเพียงของ p ด้วย

5. ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimator)

นิยามที่ 2.9 $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุดของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ ที่มีความแปรปรวนต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ ด้วยกัน

นิยามที่ 2.10 ถ้ากลุ่มของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $\{f(x;\theta), \theta \in \Omega\}$ เมื่อ $\Omega = \{\theta; \gamma < \theta < \delta\}$ โดยที่ λ และ δ เป็นค่าคงที่ที่ทราบค่า และ $f(x;\theta)$ สามารถเขียนในรูป

$$
f(x;\theta) = \begin{cases} s(x) g(\theta) exp\left[p(\theta) t(x) \right] & , x = a_1, a_2, a_3, ... \\ 0 & , x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}
$$

แล้ว $f(x;\theta)$ จะเป็นสมาชิกของวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family) แบบไม่ต่อเนื่องถ้า

1. $\{x : x = a_1, a_2, a_3, ...\}$ ไม่ขึ้นกับ θ เมื่อ $\gamma < \theta < \delta$
2. $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความหมายแบบต่อเนื่อง (Nontrivial Continuous Function) ของ θ เมื่อ $\gamma < \theta < \delta$
3. $t(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความหมาย (Nontrivial Function) ของ x สำหรับทุกๆค่าของ x

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ถ้าเป็นสมาชิกของวงศ์เลขชี้กำลังแล้ว $T(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} t(x_i)$ จะเป็นสถิติพอเพียงและสมบูรณ์ (Complete Sufficient Statistics) ของ θ

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ถ้า $T(x_1,...,x_n)$ จะเป็นสถิติพอเพียงและสมบูรณ์ของ θ และมีฟังก์ชัน $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ $g(\theta)$ แล้ว $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimize Variance Unbiased Estimator : MVUE) เพียงตัวเดียวของ $g(\theta)$

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE) เพียงตัวเดียวของ $g(\theta)$ แล้ว $W(T)$ จะมีอยู่ตัวเดียว

ให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ $\boldsymbol{n, p}$ จาก $x_i \sim Binomial(n,p)$

$$
\begin{aligned}
f(x;n,p) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad , x = 0,1,2,...,n \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^n (1-p)^{-x} \\
&= \binom{n}{x} e^{\ln p^x} (1-p)^n e^{\ln(1-p)^{-x}} \\
&= \binom{n}{x} e^{x\ln p} (1-p)^n e^{-x\ln(1-p)} \\
&= \binom{n}{x} (1-p)^n e^{x\ln p - x\ln(1-p)} \\
&= \binom{n}{x} (1-p)^n e^{x[\ln p - \ln(1-p)]} \\
&= s(x) g(p) exp\left[p(p) t(x)\right]
\end{aligned}
$$

โดยที่ $s(x) = \binom{n}{x}$, $g(p) = (1-p)^n$, $p(p) = \ln p - \ln(1-p)$, $t(x) = x$

1. $\{x : x = 0,1,2,...,n\}$ ไม่ขึ้นกับ p เมื่อ $0 < p < 1$

2. $p(p) \quad = \quad \begin{cases} \ln p - \ln(1-p) & ; 0 < p < 1 \\ 0 & ; p \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความหมายแบบต่อเนื่องของ p เมื่อ $0 < p < 1$

3. $t(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่มีความหมายของ x

$$g(p) = \begin{cases} (1-p)^n & ; 0 < p < 1 \\ 0 & ; p \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่

$$s(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} & ; x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ; p \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จึงสรุปได้ว่า $f(x;n,p)$ อยู่ในวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family)

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} x_i$ เป็นสถิติพอเพียงและสมบูรณ์ของ p และ $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}\right) = p$

ดังนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุดของ p

จากคุณสมบัติของตัวประมาณดังกล่าว ค่าคาดหมาย เท่ากับ $E(\hat{p}_{MLE}) = p$

เนื่องจากไม่ทราบค่า p จึงใช้ค่า $\hat{p}_{MLE}$ ในการประมาณค่า

ดังนั้น ค่าความแปรปรวน เท่ากับ $Var(\hat{p}_{MLE}) = \frac{\hat{p}_{MLE}(1-\hat{p}_{MLE})}{n^2}$

การประมาณค่าแบบช่วง

จากทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$Z = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - p}{\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - p}{\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})} < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - p < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)} < p < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)}\right) \quad = \quad 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p คือ

เมื่อ n เป็นตัวอย่างเล็ก (n = 10 และ 20)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)}$

เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ100)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MLE}\right)}$

2.3.2 วิธีของเบส์ (Bayes' Method)

วิธีของเบส์เป็นการพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงก่อนและฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $L(p)$ ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยให้ฟังก์ชันการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ a และ b หรือเขียนได้ว่า $Beta\,(a,b)$

การประมาณค่าแบบจุด

นิยามที่ 2.11 ให้ $X_1, X_2 ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มจากประชากรที่ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ $f(x_i;\theta) = f(x_i\,|\,\theta)$ โดยที่ θ คือพารามิเตอร์ของการแจกแจงและมีฟังก์ชันก่อน (Prior Distribution Function) คือ $g(\theta)$ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังหรือฟังก์ชันการแจกแจงที่ปรับปรุงแล้ว (Posterior Probability Distribution) (อัชฌา, 2558)

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่ม X กำหนดให้ $\Theta=\theta$ คือ

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta) &= f(x_1\,|\,\theta),\ldots,f(x_n\,|\,\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\theta) \end{aligned}$$

หรือพิจารณาในรูปแบบของวงศ์คู่สังยุค (Conjugate Function)

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta)g(\theta) &= f(x_1\,|\,\theta),\ldots,f(x_n\,|\,\theta)g(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\theta)g(\theta) \end{aligned}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของ θ คือ

$$\begin{aligned} h(\theta\,|\,x_1,\ldots,x_n) &= \frac{f(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta)g(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n\,|\,\theta)g(\theta)d(\theta)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\theta)g(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\theta)g(\theta)d(\theta)} \end{aligned}$$

สมมติตัวแปร $X_1, X_2 \ldots, X_n$ มีการแจกแจงทวินาม ด้วยค่าความน่าจะเป็นที่จะได้รับสิ่งที่สนใจในการทดลองแต่ละครั้ง p เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$x_i \,|\, p \sim Binomial(n, p)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่ม X เมื่อกำหนด n และ p สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n\,|\,n,p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,n,p) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\left(p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}\right) \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงก่อนให้มีการแจกแจงบีตา ที่มีพารามิเตอร์ a และ b

$$f(p\,;a,b) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,p^{a-1}(1-p)^{b-1} & ,\ 0<p<1,\ a>0,\ b>0 \\ 0 & ,\ p \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง ดังนี้

$$h(p\,|\,x_1,\ldots,x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\left(p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)\left(\frac{\Gamma(a+b)p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right)}{\int_0^1\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\left(p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)\left(\frac{\Gamma(a+b)p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\right)dp}$$

$$= \frac{\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}{\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\binom{n}{x_i}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}\cdot\frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{a-1}(1-p)^{b-1}dp}$$

$$= \frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+a-1}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}}{\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+a-1}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}dp}$$

พิจารณาเทอม $\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+a-1}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}dp$ ในรูปแบบฟังก์ชันบีตา จะได้ว่า

$$\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+a-1}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}dp = Beta(\sum_{i=1}^{n}x_i+a, n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b)$$

$$= \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i+a)\Gamma(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b)}{\Gamma((\sum_{i=1}^{n}x_i+a)+(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b))}$$

$$= \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i+a)\Gamma(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b)}{\Gamma(a+n^2+b)}$$

ดังนั้น การแจกแจงภายหลัง คือ

$$h(p\,|\,x_1,\ldots,x_n) = \frac{\Gamma(a+n^2+b)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i+a)\Gamma(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b)}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i+a-1}(1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i+b-1}$$

เนื่องจากการแจกแจงบีตาอยู่ในรูปแบบของวงศ์คู่สังยุค (Conjugate Function) กับฟังก์ชันการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ p ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงบีตา จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังจากทฤษฎีของเบส์ คือ

$$\begin{aligned} h(p \mid x_1,\ldots,x_n) &\propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid n,p) f(p;a,b) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \left(p^{\sum_{i=1}^{n} x} (1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n} x} \right) \left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \right) \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{\sum_{i=1}^{n} x+a-1} (1-p)^{n^2-\sum_{i=1}^{n} x+b-1} \right) \end{aligned}$$

จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังพบว่า $h(p \mid x_1,\ldots,x_n) \sim Beta(\sum_{i=1}^{n} x_i + a, n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i + b)$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังของ p คือ $\hat{p}_{Bayes} = E(p \mid x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b}$

และ $Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right) = Var\left(p \mid x_1,\ldots,x_n\right) = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + a\right)\left(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i + b\right)}{\left(a+n^2+b+1\right)\left(a+n^2+b\right)^2}$

การประมาณค่าแบบช่วง

จากทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$Z = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - p}{\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - p}{\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}} < Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)} < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - p < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)} < p < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}\right) = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p คือ

เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ100)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

2.3.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo)

วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เป็นวิธีที่นิยมใช้เมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของตัวแปรสุ่ม โดยประกอบด้วยการสุ่มตัวอย่างตัวแปรจากวิธีมาร์คอฟ เชน (Markov Chain) จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน และทำการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs Sampling) จากนั้นทำการประมาณค่าด้วยมอนติคาร์โล (Monte Carlo) จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (อัชฌา, 2555)

การประมาณค่าแบบจุด

ขั้นตอนการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ประกอบด้วย

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $a^{(t)}$ และ $b^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง

2. สร้างค่าจากข้อ 1. มาจำนวน T ค่า เมื่อ $t = 1,2, \ldots , T$

3. สร้างค่า $p^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงบีตาที่ค่าพารามิเตอร์ $a^{(t)}$ และ $b^{(t)}$ จากข้อ 1.

4. สร้างกราฟเพื่อดูลักษณะการแจกแจงของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

5. คำนวณค่าเฉลี่ย ค่ากลาง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง สามารถประมาณค่า p ได้โดย $\hat{p}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)}$

โดยที่ $E(\hat{p}_{MCMC}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)}$ และ $Var(\hat{p}_{MCMC}) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(p^{(t)} - \overline{p}\right)^2$

การประมาณค่าแบบช่วง

จากทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$Z = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - p}{\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - p}{\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})} < \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - p < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})} < p < \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})}\right) = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ p คือ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MCMC}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MCMC}\right)}$

2.4 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติที่ใช้ในงานวิจัย

จงประมาณค่า จากการสุ่มข้อมูลที่มีการแจกแจงทวินามจากโปรแกรม R มา 10 ค่า ได้ดังนี้

5 4 2 6 5 3 3 4 5 3

1. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method)

วิธีทำ จากโจทย์ $n=10\ ,\ p=0.5\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 40$

$$\hat{p}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} = \frac{40}{10^2} = 0.4$$

ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p คือ 0.4

2. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีเบส์ (Bayes' Method)

2.1 วิธีของเบส์ 1 โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (8,8)$

วิธีทำ จากโจทย์ $n=10\ ,\ p=0.5\ ,\ a=8\ ,\ b=8\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 40$

$$\hat{p}_{Bayes1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b} = \frac{40+8}{8+10^2+8} = 0.4137931$$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบเบส์ 1 ของ p คือ 0.4137931

2.2 วิธีของเบส์ 2 โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (2,8)$

วิธีทำ จากโจทย์ $n=10\ ,\ p=0.5\ ,\ a=2\ ,\ b=8\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 40$

$$\hat{p}_{Bayes2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b} = \frac{40+2}{2+10^2+8} = 0.3818182$$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบเบส์ 2 ของ p คือ 0.3818182

2.3 <u>วิธีของเบส์ 3</u> โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (8,2)$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $n=10$, $p=0.5$, $a=8$, $b=2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40$

$$\hat{p}_{Bayes3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b} = \frac{40+8}{8+10^2+2} = 0.4363636$$

ดังนั้น ตัวประมาณแบบเบส์ 3 ของ p คือ 0.4363636

3. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบจุดโดยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $n=10$, $p=0.5$, $T=1000$, $p=0.3896099, 0.3975911, ..., 0.4300722$

จะได้ $\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} = 399.2549$

$$\hat{p}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} = \frac{399.2549}{1000} = 0.3992549$$

ดังนั้น ตัวประมาณมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟของ p คือ 0.3992549

<u>ผลการประมาณค่าแบบจุดโดยโปรแกรม</u>

คำสั่งโปรแกรม

```
mle    = sum(x) / n ^ 2
bayes1 = (sum(x) + a1) / (a1 + n ^ 2 + b1)
bayes2 = (sum(x) + a2) / (a2 + n ^ 2 + b2)
bayes3 = (sum(x) + a3) / (a3 + n ^ 2 + b3)
mcmc   = mean(post$p)
```

ผลคำสั่งโปรแกรม

```
mle    = 0.4
bayes1 = 0.4137931
bayes2 = 0.3818182
bayes3 = 0.4363636
mcmc   = 0.3992549
```

4. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบช่วงโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method)

วิธีทำ จากโจทย์ $n = 10$, $p = 0.5$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40$, $\alpha = 0.05$, $t_{\frac{0.05}{2}} = 2.2622$, $Var(\hat{p}_{MLE}) = 0.0024$

ขีดจำกัดของการประมาณค่า $p = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}$

$$= \frac{40}{10^2} \pm 2.2622\sqrt{0.0024}$$

$$= (0.2892, 0.5108)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการประมาณค่าสำหรับค่า p คือ $(0.2892 < p < 0.5108)$

5. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบช่วงโดยวิธีของเบส์ (Bayes' Method)

5.1 วิธีของเบส์ 1 โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (8,8)$

วิธีทำ จากโจทย์ $n = 10, p = 0.5, a = 8, b = 8$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40$, $\alpha = 0.05$, $t_{\frac{0.05}{2}} = 2.2622$, $Var(\hat{p}_{Bayes1}) = 0.002073234$

ขีดจำกัดของการประมาณค่า $p = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{p}_{Bayes1})}$

$$= \frac{40+8}{8+10^2+8} \pm 2.2622\sqrt{0.002073234}$$

$$= (0.3108, 0.5168)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการประมาณค่าสำหรับค่า p คือ $(0.3108 < p < 0.5168)$

5.2 วิธีของเบส์ 2 โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (2,8)$

วิธีทำ จากโจทย์ $n = 10, p = 0.5, a = 2, b = 8$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 40$, $\alpha = 0.05$, $t_{\frac{0.05}{2}} = 2.2622$,

$Var(\hat{p}_{Bayes2}) = 0.002126424$

ขีดจำกัดของการประมาณค่า $p = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(\hat{p}_{Bayes2})}$

$$= \frac{40+2}{2+10^2+8} \pm 2.2622\sqrt{0.002126424}$$

$$= (0.2775, 0.4861)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการประมาณค่าสำหรับค่า p คือ $(0.2775 < p < 0.4861)$

5.3 <u>วิธีของเบส์ 3</u> โดยมีพารามิเตอร์ $(a,b) = (8,2)$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $n = 10, p = 0.5, a = 8, b = 2, \sum_{i=1}^{n} x_i = 40, \alpha = 0.05, t_{\frac{0.05}{2}} = 2.2622,$

$Var(\hat{p}_{Bayes3}) = 0.002215769$

ขีดจำกัดของการประมาณค่า $p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{Bayes3})}$

$$= \frac{40+8}{8+10^2+2} \pm 2.2622\sqrt{0.002215769}$$

$$= (0.3299, 0.5428)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการประมาณค่าสำหรับค่า p คือ $(0.3299 < p < 0.5428)$

6. ตัวอย่างในการประมาณค่าแบบช่วงโดยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $n=10,\ p=0.5,\ T=1000,\ p=0.4551369, 0.3671567, \ldots, 0.4147998$

จะได้ $\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} = 401.4448$

ขีดจำกัดของการประมาณค่า $p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MCMC})}$

$$= \frac{1}{1000}(401.4448) \pm 1.96\sqrt{0.002417021}$$

$$= (0.3050867, 0.4978029)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของการประมาณค่าสำหรับค่า p คือ $(0.3050867 < p < 0.4978029)$

<u>ผลการประมาณค่าแบบช่วงโดยโปรแกรม</u>

คำสั่งโปรแกรม

```
v.mle        =  (mle*(1-mle))/n^2
lcl.mle      =  mle-z*sqrt(v.mle)
ucl.mle      =  mle+z *sqrt(v.mle)
v.bayes1     =  ((sum(x)+a1)*(n^2-sum(x)+b1))/((a1+n^2+b1+1)*(a1+n^2+b1)^2)
lcl.bayes1   =  bayes1-z*sqrt(v.bayes1)
ucl.bayes1   =  bayes1+z*sqrt(v.bayes1)
v.bayes2     =  ((sum(x)+a2)*(n^2-sum(x)+b2))/((a2+n^2+b2+1)*(a2+n^2+b2)^2)
lcl.bayes2   =  bayes2-z*sqrt(v.bayes2)
ucl.bayes2   =  bayes2+z*sqrt(v.bayes2)
v.bayes3     =  ((sum(x)+a3)*(n^2-sum(x)+b3))/((a3+n^2+b3+1)*(a3+n^2+b3)^2)
lcl.bayes3   =  bayes3-z*sqrt(v.bayes3)
ucl.bayes3   =  bayes3+z*sqrt(v.bayes3)
v.mcmc       =  var(post$p)
lcl.mcmc     =  mcmc-z*sqrt(v.mcmc)
ucl.mcmc     =  mcmc+z *sqrt(v.mcmc)
```

ผลคำสั่งโปรแกรม

```
v.mle       =  0.0024
lcl.mle     =  0.2892
ucl.mle     =  0.5108
v.bayes1    =  0.002073234
lcl.bayes1  =  0.3108
ucl.bayes1  =  0.5168
v.bayes2    =  0.002126424
lcl.bayes2  =  0.2775
ucl.bayes2  =  0.4861
v.bayes3    =  0.002215769
lcl.bayes3  =  0.3299
ucl.bayes3  =  0.5428
v.mcmc      =  0.002417021
lcl.mcmc    =  0.3050867
ucl.mcmc    =  0.4978029
```

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มานะชัย รอดชื่น (2557) ได้ทำการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินามด้วยวิธี Clopper-Pearson วิธี Wilson วิธีปกติ วิธีแบบเบส์ วิธี Clopper-Pearson แบบเบส์ วิธี Wilson แบบเบส์ และวิธีปกติแบบเบส์เมื่อการแจกแจงก่อนมีการแจกแจงบีตา(Beta Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น (0.5,0.5), (1,1), (2,2) ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5 และ 10 ที่ช่วงความเชื่อมั่น 90% และ95% โดยพิจารณาค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ และค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่น โดยใช้โปรแกรม R ในการคำนวณ พบว่าการใช้ตัวประมาณแบบเบส์ร่วมกับวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นวิธีต่างๆ สามารถทำให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมพารามิเตอร์ใกล้เคียงกับช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อใช้พารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนที่เหมาะสม และยังทำให้ค่าคาดหมายของความกว้างช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อ p มีค่าใกล้เคียงและพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนมีค่าเพิ่มขึ้น

Autcha Araveeporn (2014) ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ โดยที่กำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ โดยนำเทคนิคดังกล่าวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน พบว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ทุกกรณี แต่วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล และวิธีของเบส์ ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์เมื่อค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างมีค่ามาก แต่เมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง พบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าต่ำสุด เมื่อค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างมีค่าไม่มาก ส่วนวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล และวิธีการประมาณของเบส์ให้ค่าต่ำสุด เมื่อค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างมีค่ามาก

Autcha Araveeporn (2015) ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงของการแจกแจงปัวซง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ โดยที่กำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงเลขชี้กำลังและการแจกแจงแกมมา และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ โดยนำเทคนิคดังกล่าวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน พบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุด ภายใต้สถานการณ์ที่พารามิเตอร์มีขนาดเล็ก (0.5) สำหรับทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล จะเป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดภายใต้สถานการณ์ที่พารามิเตอร์เท่ากับ 5 เมื่อขนาดตัวอย่างมีจำนวนมาก สำหรับวิธีของเบส์ให้

ผลลัพธ์ที่ดีทุกกรณี เนื่องจากช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมพารามิเตอร์ทุกสถานการณ์ และโดยส่วนใหญ่แล้วมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

Thetkham and Autcha Araveeporn (2016) ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ โดยที่กำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ โดยนำเทคนิคดังกล่าวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน พบว่า ทั้ง 3 วิธีเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียง เมื่อค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างมีค่ามาก แต่ตัวประมาณของเบส์จะเปลี่ยนไปตามค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน จึงควรใช้วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล มาประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์

Autcha Araveeporn (2016) ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าเฉลี่ยแบบช่วงของการแจกแจงปรกติ โดยวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ เปรียบเทียบกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ โดยที่กำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงปรกติ และนำเทคนิคดังกล่าวมาประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน พบว่าวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์เป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n =5) สำหรับวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีการอื่นๆ ที่ขนาดตัวอย่างอื่นๆ วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นกว้างที่สุด แต่วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลมีประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนในวิธีของเบส์

Kumar, J. and Tomer, S.K. (2016) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าความเชื่อถือได้ของการแจกแจงทวินามเชิงลบ โดยใช้ข้อมูล Type-II Censoring โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ โดยที่กำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมาร์คอฟ เชนมอนติคาร์โลที่ประยุกต์ใช้กับวิธีของเบส์ โดยกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 50 จากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามเชิงลบด้วยค่าพารามิเตอร์ p เป็น 0.3 และ 0.5 และค่าพารามิเตอร์ r เป็น 5 และ 8 กระทำซ้ำ 3,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์พบว่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณทั้ง 2 วิธีลดลง หากค่าพารามิเตอร์ r เพิ่มขึ้น เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง n

อัญมณี กุมมาระกะ (2561) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรหรือค่าความน่าจะเป็นที่จะได้รับความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งของการแจกแจงทวินามเชิงลบแบบจุดและแบบช่วง ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล โดยใช้ตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจง

ทวินามเชิงลบที่มีค่าพารามิเตอร์ของประชากร เท่ากับ 0.2, 0.5 และ 0.8 และค่าพารามิเตอร์ r หรือจำนวนครั้งของความสำเร็จ สำหรับการประมาณค่าแบบจุดขนาดตัวอย่าง 10 (r =3, 5 และ 7) ขนาดตัวอย่าง 30 (r = 10, 15 และ 20) และขนาดตัวอย่าง 50 (r = 10, 20 และ 30) สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงขนาดตัวอย่าง 30 (r = 10, 15 และ 20) ขนาดตัวอย่าง 50 (r = 10, 20 และ 30) และขนาดตัวอย่าง 70 (r = 15, 30 และ 45) และกำหนดระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% โดยใช้โปรแกรมอาร์ และทำซ้ำ 1,000 รอบในแต่ละสถานการณ์ โดยการประมาณค่าแบบจุดจะพิจารณาจากการทดสอบสมมติฐานการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งของการทดลองของตัวอย่างกับค่าพารามิเตอร์ของประชากร โดยใช้การทดสอบทีสำหรับการประมาณค่าแบบช่วงจะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น สำหรับการประมาณค่าแบบจุดพบว่าส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ยกเว้นเมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากรเท่ากับ 0.8 และขนาดตัวอย่างมีค่า 30 ขึ้นไป สำหรับวิธีของเบส์ และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โลส่วนใหญ่ให้ค่าประมาณไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร เมื่อค่าพารามิเตอร์ของประชากรเท่ากับ 0.5 และ 0.8 โดยเฉพาะเมื่อขนาดตัวอย่างมีค่า 30 ขึ้นไป สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงในสถานการณ์ส่วนใหญ่วิธีของเบส์จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

การศึกษาครั้งนี้จะทำการเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆ และทำการพิจารณาวิธีการประมาณที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ โดยมีการวางแผนการวิจัยและวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

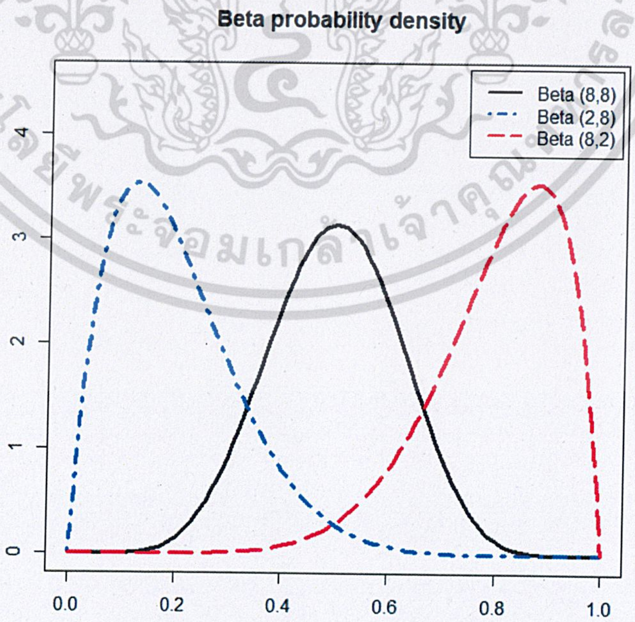
3.1 การวางแผนการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้กำหนดสถานการณ์ในการศึกษาเปรียบเทียบ ดังนี้

3.1.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9

3.1.2 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

3.1.3 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ให้มีรูปแบบสมมาตร เบ้ขวา และเบ้ซ้าย โดยมีค่าพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ $(8,8)$ $(2,8)$ $(8,2)$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ (a,b) เท่ากับ $(8,8)$ $(2,8)$ $(8,2)$

3.1.4 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับ คือ 90%, 95% และ 99%

3.1.5 คำนวณค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) เป็นค่าวัดความถูกต้อง

3.1.6 ตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและเปรียบเทียบความกว้างของการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง เพื่อหาวิธีการประมาณที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์

3.2 วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้มีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

3.2.1 จำลองข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยด้วยโปรแกรมอาร์ โดยกำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงทวินาม โดยมีค่าพารามิเตอร์ และขนาดตัวอย่างเป็นไปตามขอบเขตการวิจัย

3.2.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีการประมาณทั้ง 3 วิธี ดังนี้

3.2.2.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (The Maximum Likelihood Method)

จะได้ $\hat{p}_{MLE} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$ คือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ p

โดยมี ค่าคาดหมาย เท่ากับ $E(\hat{p}_{MLE}) = p$

เนื่องจากไม่ทราบค่า p จึงใช้ค่า $\hat{p}_{MLE}$ ในการประมาณค่า

ดังนั้น ค่าความแปรปรวน เท่ากับ $Var(\hat{p}_{MLE}) = \dfrac{\hat{p}_{MLE}(1-\hat{p}_{MLE})}{n^2}$

3.2.2.2 วิธีของเบส์ (Bayes' Method)

การแจกแจงภายหลังของ p คือ $h(p \mid x_1,\ldots,x_n) \sim Beta(\sum_{i=1}^{n} x_i + a, n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i + b)$

จะได้ $\hat{p}_{Bayes} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b}$ คือตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังของ p

โดยมี ค่าคาดหมาย เท่ากับ $E(p \mid x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a + n^2 + b}$

ค่าความแปรปรวน เท่ากับ $Var(p \mid x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + a\right)\left(n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i + b\right)}{(a + n^2 + b + 1)(a + n^2 + b)^2}$

3.2.2.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo)

จะได้ $\hat{p}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)}$ เป็นตัวประมาณมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ของ p

โดยมี ค่าคาดหมาย เท่ากับ $E(\hat{p}_{MCMC}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)}$

ค่าความแปรปรวน เท่ากับ $Var(\hat{p}_{MCMC}) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(p^{(t)} - \bar{p}\right)^2$

3.2.3 คำนวณค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) เป็นค่าวัดความถูกต้อง โดยค่า MSE ยิ่งน้อยการประมาณค่ายิ่งแม่นยำ

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{m}(p - \hat{p}_i)^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(e_i)^2}{m}$$

3.2.4 คำนวณช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณ ทั้ง 3 วิธี

3.2.4.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

เมื่อ n เป็นตัวอย่างเล็ก (n = 10 และ 20)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}$

เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{p}_{MLE})}$

3.2.4.2 วิธีของเบส์

เมื่อ n เป็นตัวอย่างเล็ก (n = 10 และ 20)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i + a}{a+n^2+b} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{Bayes}\right)}$

3.2.4.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MCMC}\right)}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^{(t)} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var\left(\hat{p}_{MCMC}\right)}$

3.2.5 คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงจะพิจารณาการประมาณค่าด้วย ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW)

คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(\hat{c})$ เพื่อตรวจสอบว่าค่าประมาณแบบช่วงที่คำนวณได้คลุมค่าพารามิเตอร์ p มากน้อยเพียงใด ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จะสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$c_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}} \le \hat{c} \le c_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}$$

โดยที่ α คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้เท่ากับ 0.05

$\hat{c}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแต่ละวิธี

c_0 คือ ค่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

m คือ จำนวนครั้งของการทดลองซ้ำ เท่ากับ 1,000

สามารถคำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ได้ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น } (\hat{c}) = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นคลุมค่าพารามิเตอร์ } p}{m}$$

ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) โดยคำนวณจากช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น

$$\text{ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(U_i - L_i)}{m}$$

เมื่อ L_i และ U_i คือ ค่า ขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i

เปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นของแต่ละวิธีถ้าวิธีการประมาณใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด จะถือว่า เป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมที่สุด ทั้งนี้ในการเปรียบเทียบค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจะเปรียบเทียบเฉพาะในกรณีที่วิธีการประมาณให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น (โสรัจจะ จุฑาภรณ์ และประสิทธิ์, 2559)

3.2.6 การเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทำการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ว่ามีค่าอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด (c_0) อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้

$$H_0 : cc = c_0$$
$$H_1 : cc \neq c_0$$

โดยที่ $$Z = \frac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}}$$

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $\frac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$. หรือ $\frac{\hat{c} - c_0}{\sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

นั่นคือ $\hat{c} > c_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}$ หรือ $\hat{c} < c_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}$

ดังนั้น วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ วิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$c_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}} \leq \hat{c} \leq c_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c_0(1-c_0)}{m}}$$

โดยที่ cc คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

c_0 คือ ค่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

$\hat{c}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลอง

m คือ จำนวนรอบของการทดลอง ในที่นี้เท่ากับ 1,000 รอบ

α^* คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้เท่ากับ 0.05

ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% $(c_0 = 0.90)$ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบ ได้ดังนี้

$$H_0 : cc = 0.90$$
$$H_1 : cc \neq 0.90$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ วิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$0.90 - 1.96\sqrt{\frac{0.90(1-0.90)}{1,000}} \leq \hat{c} \leq 0.90 + 1.96\sqrt{\frac{0.90(1-0.90)}{1,000}}$$

$$0.8814 \leq \hat{c} \leq 0.9186$$

ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% $(c_0 = 0.95)$ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบ ได้ดังนี้

$$H_0 : cc = 0.95$$
$$H_1 : cc \neq 0.95$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ วิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$0.95 - 1.96\sqrt{\frac{0.95(1-0.95)}{1,000}} \leq \hat{c} \leq 0.95 + 1.96\sqrt{\frac{0.95(1-0.95)}{1,000}}$$

$$0.9365 \leq \hat{c} \leq 0.9635$$

ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% $(c_0 = 0.99)$ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบ ได้ดังนี้

$$H_0 : cc = 0.99$$
$$H_1 : cc \neq 0.99$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือ วิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$0.99 - 1.96\sqrt{\frac{0.99(1-0.99)}{1,000}} \leq \hat{c} \leq 0.99 + 1.96\sqrt{\frac{0.99(1-0.99)}{1,000}}$$

$$0.9838 \leq \hat{c} \leq 0.9962$$

ดังนั้น เกณฑ์ตัดสินใจ คือ

(1) เมื่อ $c_0 = 0.90$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $0.8814 \leq \hat{c} \leq 0.9186$

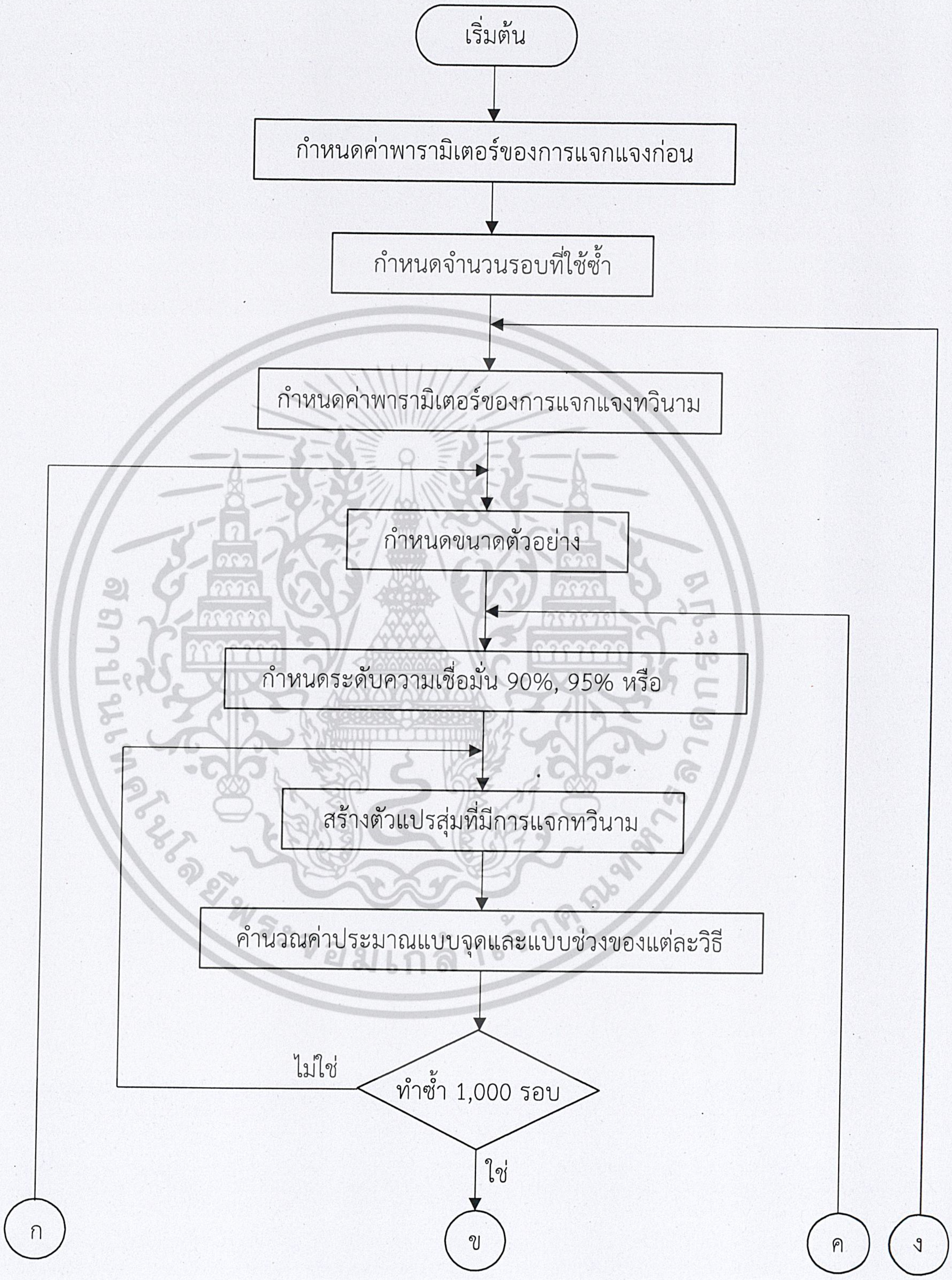
(2) เมื่อ $c_0 = 0.95$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $0.9365 \leq \hat{c} \leq 0.9635$

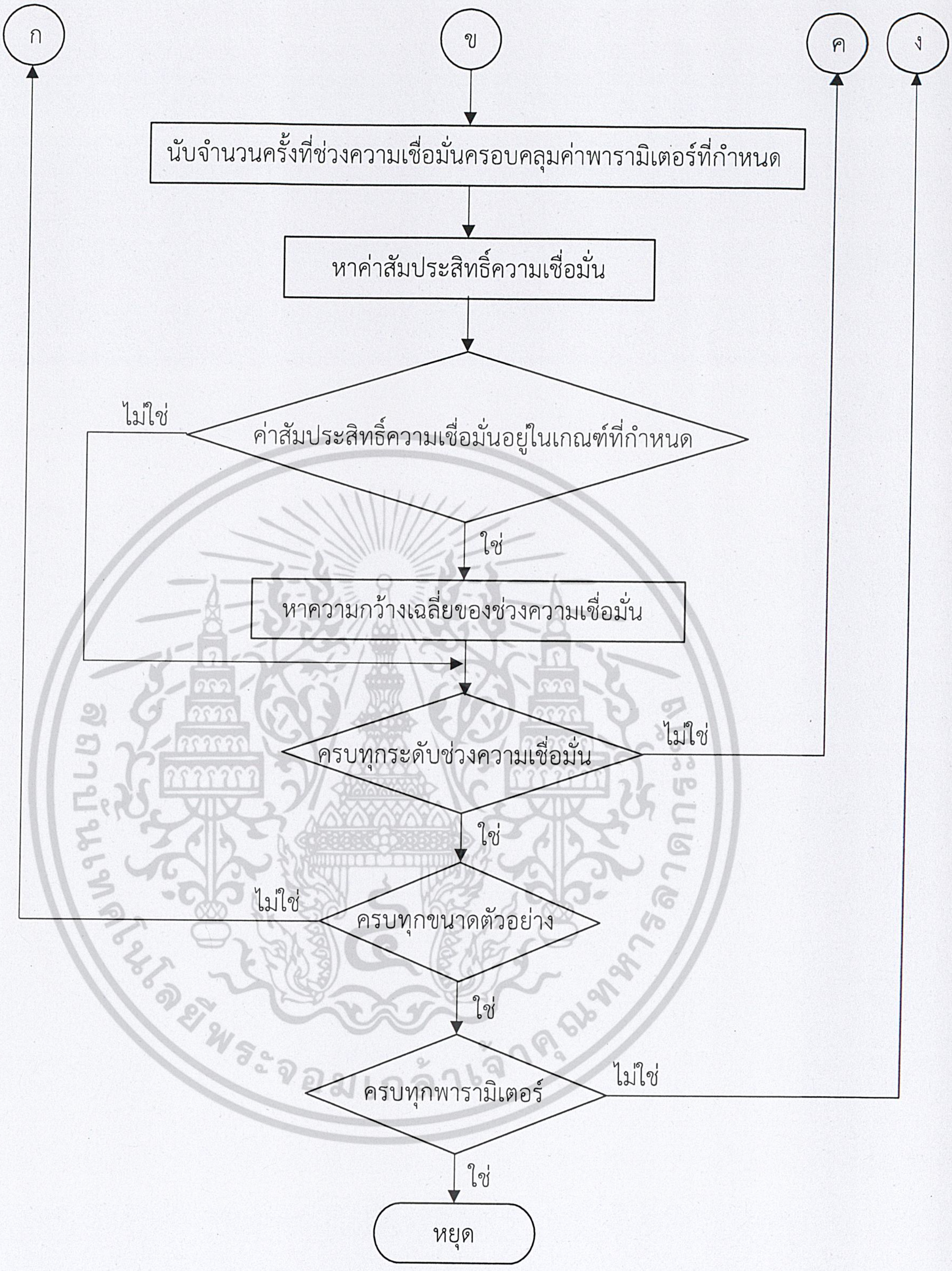
(3) เมื่อ $c_0 = 0.99$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $0.9838 \leq \hat{c} \leq 0.9962$

ถ้าแต่ละสถานการณ์มีวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี จะนำค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มาพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดจะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ช่วงความเชื่อมั่นที่เหมาะสมที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น

3.3 ขั้นตอนของโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

การประมวลผลข้อมูลในการวิจัยสามารถอธิบายขั้นตอนเป็นแผนภาพได้ดังนี้




ก
ข
ค
ง
นับจำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด
หาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น
ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด
ไม่ใช่
ใช่
หาความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น
ครบทุกระดับช่วงความเชื่อมั่น
ไม่ใช่
ใช่
ครบทุกขนาดตัวอย่าง
ไม่ใช่
ใช่
ครบทุกพารามิเตอร์
ไม่ใช่
ใช่
หยุด

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยการประมาณค่าแบบจุด จะพิจารณาด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) สำหรับการประมาณค่าแบบช่วง จะพิจารณาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าเฉลี่ย ความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น เพื่อหาวิธีการประมาณที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ จะนำเสนอใน รูปแบบของตารางและรูปภาพ โดยมีสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

- MLE แทน วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
- Bayes1 แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (8,8)
- Bayes2 แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (2,8)
- Bayes3 แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา (8,2)
- MCMC แทน วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

4.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

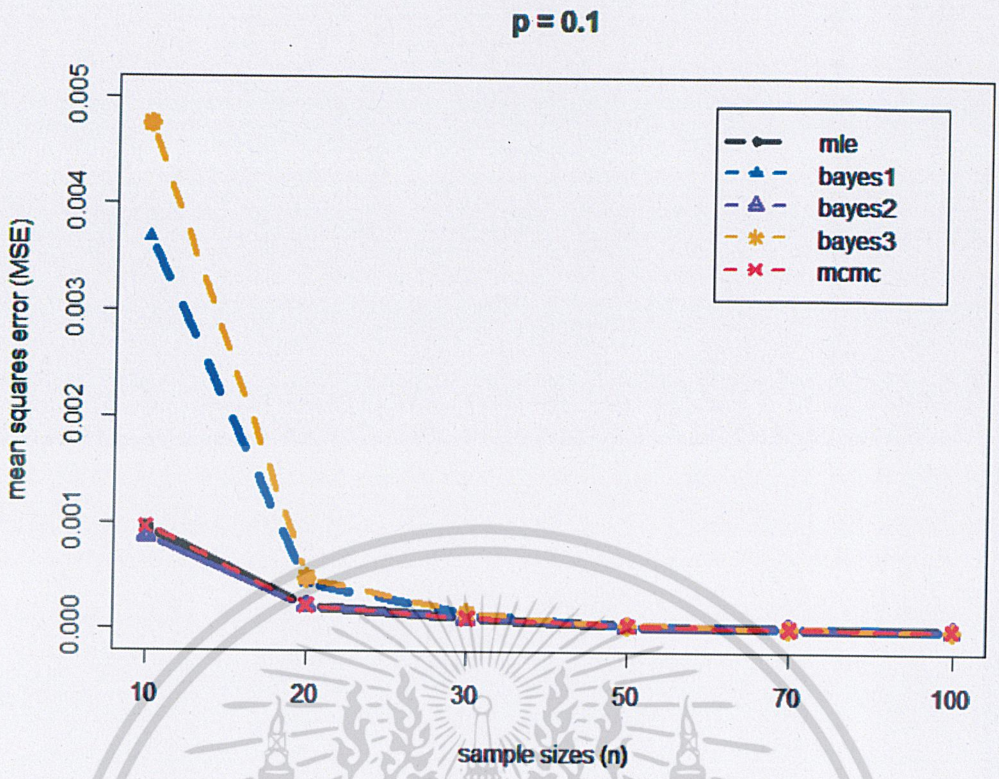
ผู้วิจัยทำการพิจารณาด้วยค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) เป็นค่าวัดความถูกต้อง โดยค่า MSE ยิ่งน้อยการประมาณค่ายิ่งแม่นยำ แสดงผลดังตารางที่ 4.1- 4.5 และรูปที่ 4.1- 4.5

ตารางที่ 4.1 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.1

p	n		วิธีประมาณ				
			MLE	Bayes1	Bayes2	Bayes3	MCMC
0.1	เล็ก	10	0.000955700	0.003680990	**0.000859752**	0.004750331	0.000963508
		20	0.000218094	0.000420057	**0.000210595**	0.000478507	0.000218623
	กลาง	30	0.000105536	0.000145999	**0.000103693**	0.000157194	0.000105618
		50	0.000036734	0.000042377	**0.000036543**	0.000043820	0.000036740
	ใหญ่	70	0.000018940	0.000020352	**0.000018880**	0.000020720	0.000018946
		100	**0.000008484**	0.000008972	0.000008494	0.000009073	0.000008495

หมายเหตุ **ตัวหนา** หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.1 พบว่าวิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) **น้อยสุด** เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n =10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n =30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ MLE มีค่าค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุดเมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)



รูปที่ 4.1 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.1

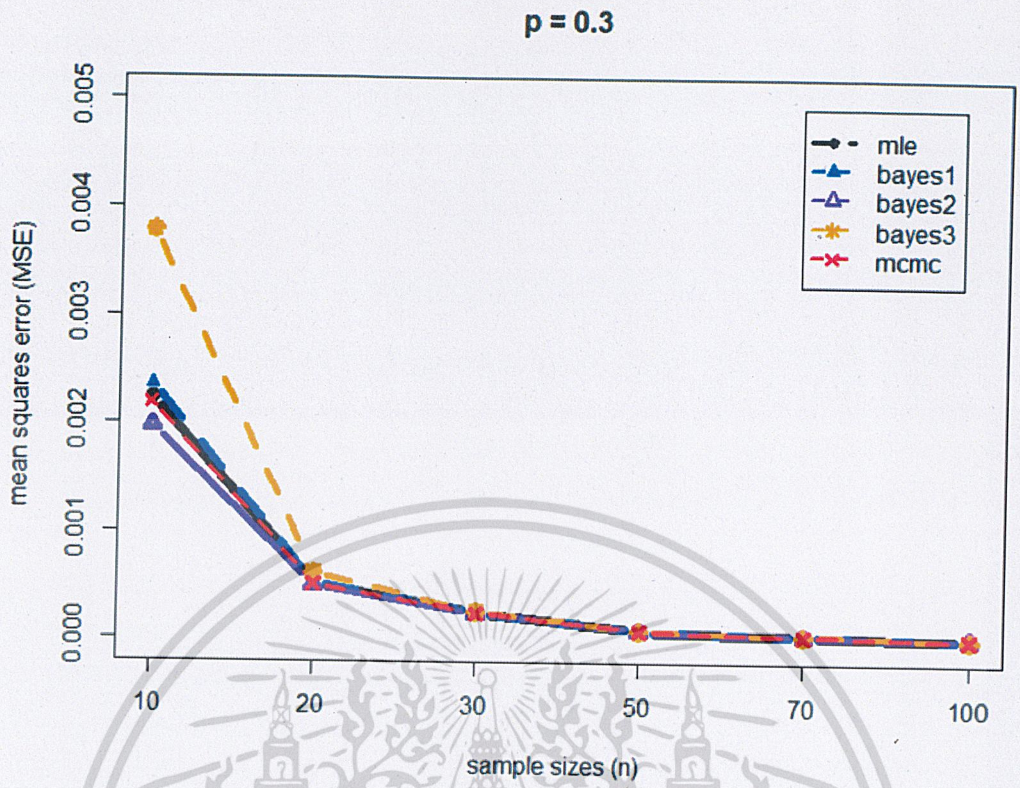
จากรูปที่ 4.1 วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มากที่สุด วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุด เมื่อ n = 10 และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้นไม่สามารถทราบความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ได้ชัดเจน จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง (MSE)

ตารางที่ 4.2 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.3

p	n		วิธีประมาณ				
			MLE	Bayes1	Bayes2	Bayes3	MCMC
0.3	เล็ก	10	0.002239900	0.002351888	**0.001959421**	0.003789174	0.002190105
		20	0.000512500	0.000518362	**0.000498465**	0.000612969	0.000507728
	กลาง	30	0.000244486	0.000243907	**0.000241717**	0.000262497	0.000244499
		50	0.000084520	0.000084820	**0.000084096**	0.000087420	0.000084346
	ใหญ่	70	0.000043960	0.000043920	**0.000043879**	0.000044540	0.000044020
		100	0.000021140	0.000021167	**0.000021112**	0.000021334	0.000021138

หมายเหตุ **ตัวหนา** หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.2 พบว่าวิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)



รูปที่ 4.2 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.3

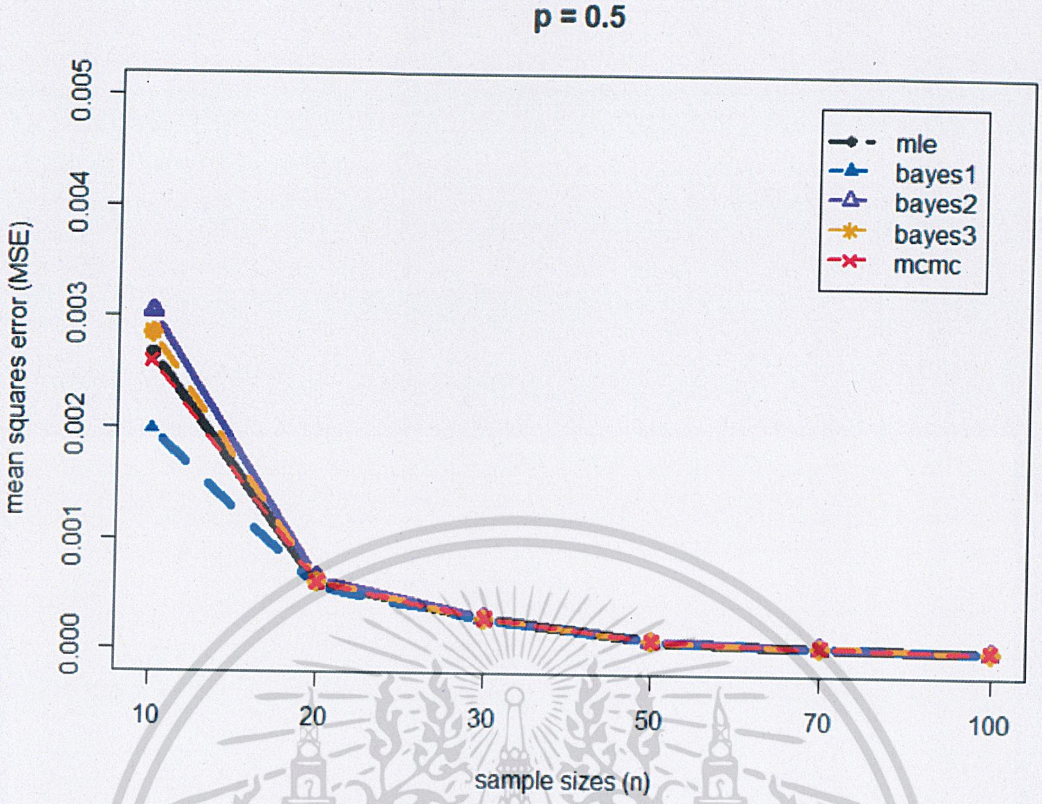
จากรูปที่ 4.2 วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มากที่สุด วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุด เมื่อ n = 10 และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้นไม่สามารถทราบความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ได้ชัดเจน จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง (MSE)

ตารางที่ 4.3 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.5

p	n		วิธีประมาณ				
			MLE	Bayes1	Bayes2	Bayes3	MCMC
0.5	เล็ก	10	0.002657500	**0.001974955**	0.003033802	0.002846364	0.002601126
		20	0.000606819	**0.000561038**	0.000646217	0.000616020	0.000601943
	กลาง	30	0.000288875	**0.000278872**	0.000298465	0.000288394	0.000288777
		50	0.000102042	**0.000100748**	0.000103028	0.000102291	0.000101918
	ใหญ่	70	0.000050407	**0.000050079**	0.000050639	0.000050510	0.000050597
		100	0.000023992	**0.000023915**	0.000024070	0.000023997	0.000024040

หมายเหตุ **ตัวหนา** หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.3 พบว่าวิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)



รูปที่ 4.3 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.5

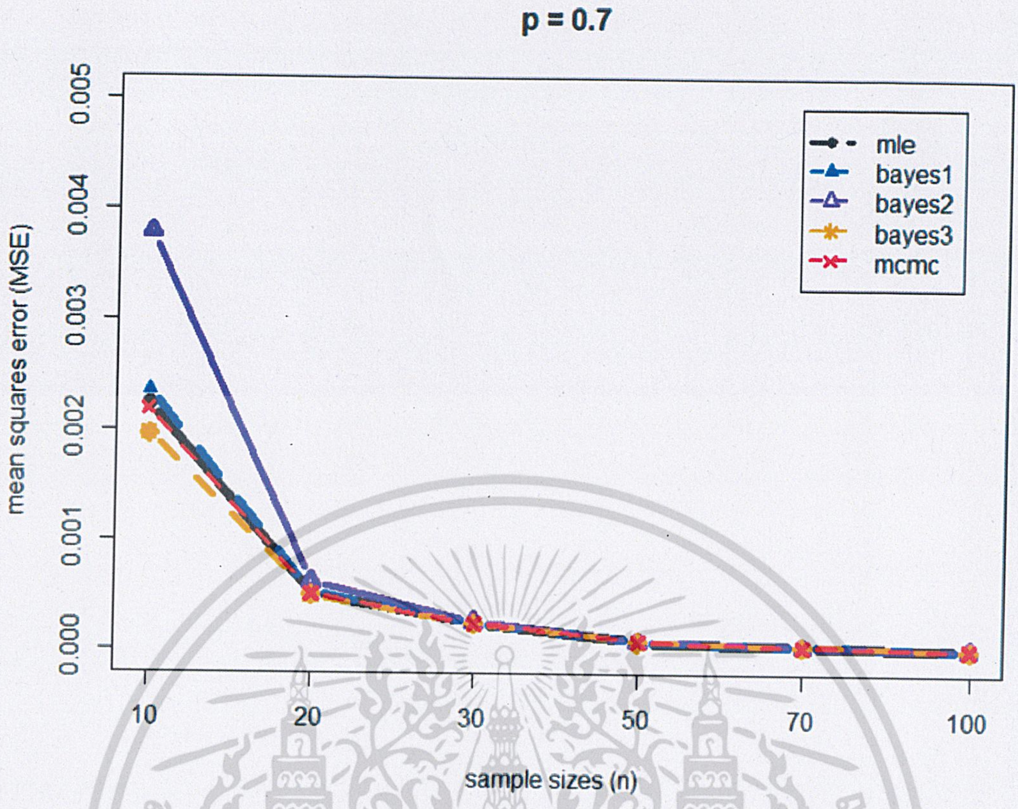
จากรูปที่ 4.3 วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มากที่สุด วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุด เมื่อ n = 10 และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้นไม่สามารถทราบความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ได้ชัดเจน จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง (MSE)

ตารางที่ 4.4 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.7

p	n		วิธีประมาณ				
			MLE	Bayes1	Bayes2	Bayes3	MCMC
0.7	เล็ก	10	0.002239900	0.002351888	0.003789174	**0.001959421**	0.002190486
		20	0.000512500	0.000518362	0.000612969	**0.000498465**	0.000509680
	กลาง	30	0.000244486	0.000243907	0.000262497	**0.000241717**	0.000243848
		50	0.000084529	0.000084820	0.000087422	**0.000084096**	0.000084499
	ใหญ่	70	0.000043960	0.000043920	0.000044540	**0.000043879**	0.000043992
		100	0.000021142	0.000021167	0.000021335	0.000021113	**0.000021095**

หมายเหตุ **ตัวหนา** หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.4 พบว่าวิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และเมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ MCMC มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุดเมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)



รูปที่ 4.4 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.7

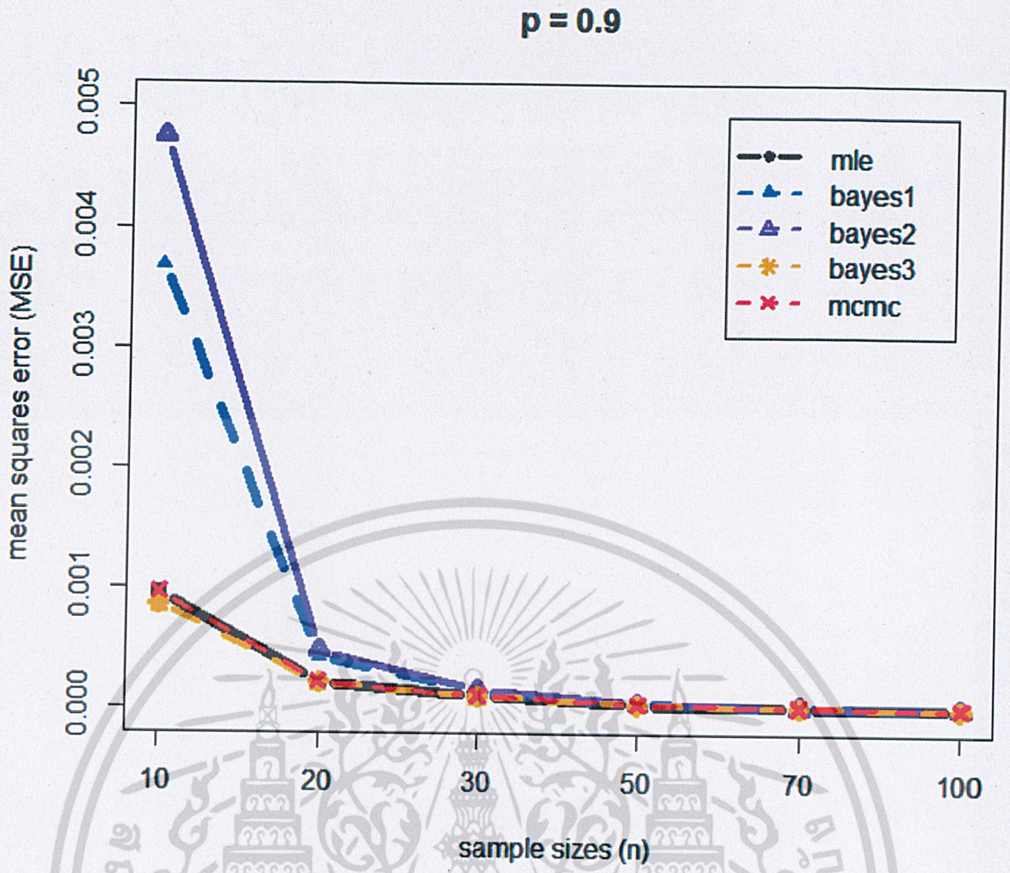
จากรูปที่ 4.4 วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มากที่สุด วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุด เมื่อ n = 10 และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้นไม่สามารถทราบความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ได้ชัดเจน จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง (MSE)

ตารางที่ 4.5 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.9

p	n		วิธีประมาณ				
			MLE	Bayes1	Bayes2	Bayes3	MCMC
0.9	เล็ก	10	0.000955700	0.003680990	0.004750331	**0.000859752**	0.000962295
		20	0.000218094	0.000420057	0.000478507	**0.000210595**	0.000217606
	กลาง	30	0.000105536	0.000145999	0.000157194	**0.000103693**	0.000105293
		50	0.000036734	0.000042377	0.000043822	**0.000036544**	0.000036683
	ใหญ่	70	0.000018940	0.000020350	0.000020720	**0.000018880**	0.000018965
		100	0.000008483	0.000008972	0.000009073	0.000008490	**0.000008474**

หมายเหตุ **ตัวหนา** หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.5 พบว่าวิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ MCMC มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)



รูปที่ 4.5 ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อ p เท่ากับ 0.9

จากรูปที่ 4.5 วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) มากที่สุด วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยที่สุด เมื่อ n = 10 และเมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้นไม่สามารถทราบความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ได้ชัดเจน จะเห็นว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง (MSE)

4.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

ผู้วิจัยทำการตรวจสอบว่าค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในแต่ละสถานการณ์อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของ $0.8814 \leq \hat{c} \leq 0.9186$

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของ $0.9365 \leq \hat{c} \leq 0.9635$

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของ $0.9838 \leq \hat{c} \leq 0.9962$

ถ้าแต่ละสถานการณ์มีวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี จะนำค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มาพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดจะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ช่วงความเชื่อมั่นที่เหมาะสมที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น โดยการคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จะคำนวณจากช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง โดยหาผลต่างระหว่างค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นแล้วบวกสะสมไว้เพื่อหาค่าเฉลี่ยเมื่อคำนวณช่วงความเชื่อมั่นครบ 1,000 ครั้ง แสดงผลดังตารางที่ 4.6 - 4.10

ตารางที่ 4.6 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.1

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
เล็ก	10	mle	0.917	0.1079201	0.935	-	0.935	-
		bayes1	0.601	-	0.811	-	0.811	-
		bayes2	0.946	-	0.986	-	0.986	**0.1320712**
		bayes3	0.601	-	0.811	-	0.811	-
		mcmc	0.894	**0.09818363**	0.922	-	0.969	-
	20	mle	0.913	0.05155375	0.955	0.0624031	0.995	0.0852982
		bayes1	0.843	-	0.93	-	0.993	0.08910065
		bayes2	0.923	-	0.973	-	0.996	**0.08509182**
		bayes3	0.804	-	0.906	-	0.988	0.09031631
		mcmc	0.902	**0.049169**	0.945	**0.05859891**	0.987	0.07696712
กลาง	30	mle	0.875	-	0.946	0.03907513	0.986	0.05135343
		bayes1	0.843	-	0.912	-	0.982	-
		bayes2	0.878	-	0.952	**0.03903151**	0.986	**0.05129609**
		bayes3	0.816	-	0.914	-	0.977	-
		mcmc	0.881	-	0.944	0.0391547	0.988	0.05143966
	50	mle	0.887	0.01972074	0.952	0.02349871	0.99	0.03088254
		bayes1	0.876	-	0.924	-	0.987	0.03112432
		bayes2	0.885	**0.01971251**	0.957	**0.02348891**	0.988	0.03086966
		bayes3	0.869	-	0.924	-	0.987	0.03119444
		mcmc	0.887	0.01972913	0.956	0.02350032	0.988	**0.03085799**

ตารางที่ 4.6 (ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.1

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
ใหญ่	70	mle	0.902	0.01409076	0.943	0.01679018	0.987	0.02206603
		bayes1	0.889	0.0141476	0.945	0.0168579	0.986	0.02215504
		bayes2	0.902	**0.01408775**	0.945	0.01678659	0.989	0.02206132
		bayes3	0.884	0.01416391	0.941	0.01687733	0.987	0.02218058
		mcmc	0.902	0.01410104	0.943	**0.01676948**	0.988	**0.02206032**
	100	mle	0.911	0.00987151	0.958	0.01176263	0.987	0.01545871
		bayes1	0.911	0.00989106	0.946	0.01178593	0.988	0.01548933
		bayes2	0.909	**0.00987046**	0.958	**0.01176138**	0.987	**0.01545707**
		bayes3	0.907	0.00989666	0.947	0.01179259	0.988	0.0154981
		mcmc	0.91	0.00988047	0.959	0.01176372	0.986	0.01546006

หมายเหตุ ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่สามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบสุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.6 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) โดยจะพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ที่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) และวิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100) และ วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

ตารางที่ 4.7 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.3

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
เล็ก	10	mle	0.907	0.1666802	0.974	-	0.999	-
		bayes1	0.908	**0.1582238**	0.96	0.1952565	0.999	-
		bayes2	0.933	-	0.962	0.1936887	0.999	-
		bayes3	0.833	-	0.909	-	0.992	0.2917369
		mcmc	0.88	-	0.938	**0.1767721**	0.985	**0.2323706**
	20	mle	0.917	0.0790484	0.956	0.09568392	0.998	-
		bayes1	0.918	0.07799279	0.963	0.09440616	0.999	-
		bayes2	0.914	0.07780599	0.963	0.09418005	0.996	0.1287338
		bayes3	0.894	0.0788748	0.953	0.09547378	0.996	0.1305022
		mcmc	0.897	**0.07511064**	0.948	**0.08936146**	0.993	**0.1174772**
กลาง	30	mle	0.9	0.05018606	0.946	0.05980038	0.989	0.07859102
		bayes1	0.891	0.04988527	0.944	0.05944196	0.987	0.07811998
		bayes2	0.906	**0.04983049**	0.945	**0.0593767**	0.989	**0.07803421**
		bayes3	0.878	-	0.935	-	0.988	0.07852177
		mcmc	0.894	0.05012217	0.947	0.05977942	0.989	0.07846006
	50	mle	0.905	0.03014052	0.957	0.03591464	0.989	0.04719984
		bayes1	0.896	0.03007498	0.956	0.03583654	0.991	0.0470972
		bayes2	0.902	**0.03006305**	0.955	**0.03582233**	0.989	**0.04707853**
		bayes3	0.891	0.03013131	0.948	0.03590367	0.992	0.04718542
		mcmc	0.897	0.03014398	0.952	0.03592313	0.99	0.04712704

ตารางที่ 4.7 (ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.3

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
ใหญ่	70	mle	0.903	0.02153069	0.951	0.0256554	0.988	0.03371691
		bayes1	0.905	0.02150678	0.952	0.02562691	0.988	0.03367947
		bayes2	0.9	**0.0215024**	0.95	**0.02562169**	0.988	**0.03367261**
		bayes3	0.903	0.0215274	0.949	0.02565148	0.986	0.03371176
		mcmc	0.899	0.02152402	0.95	0.02564727	0.988	0.03373801
	100	mle	0.897	0.01507422	0.946	0.01796204	0.988	0.02360613
		bayes1	0.902	0.01506601	0.944	0.01795226	0.988	0.02359327
		bayes2	0.899	**0.01506451**	0.947	**0.01795047**	0.989	**0.02359091**
		bayes3	0.898	0.0150731	0.941	0.01796071	0.988	0.02360437
		mcmc	0.9	0.01509534	0.947	0.01795805	0.988	0.02361013

หมายเหตุ ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่สามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบสุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.7 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น(AW) โดยจะพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ที่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีประมาณ Bayes1 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) และ วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) และ วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) และ วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ตารางที่ 4.8 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.5

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
เล็ก	10	mle	0.938	-	0.976	-	0.997	-
		bayes1	0.938	-	0.976	-	0.998	-
		bayes2	0.889	**0.1729271**	0.947	**0.213401**	0.998	-
		bayes3	0.889	0.1729923	0.949	0.2134815	0.997	-
		mcmc	0.925	-	0.972	-	0.997	-
	20	mle	0.927	-	0.959	0.104524	0.998	-
		bayes1	0.927	-	0.967	-	0.998	-
		bayes2	0.901	**0.08518138**	0.964	-	0.992	**0.1409367**
		bayes3	0.909	0.08518655	0.962	**0.1031138**	0.997	-
		mcmc	0.918	0.08601214	0.963	0.1043418	0.997	-
กลาง	30	mle	0.886	0.05479675	0.949	0.06529435	0.989	0.08581133
		bayes1	0.886	**0.05428753**	0.949	**0.06468758**	0.989	**0.0850139**
		bayes2	0.882	0.05446387	0.943	0.06489771	0.989	0.08529004
		bayes3	0.886	0.05446497	0.941	0.06489902	0.987	0.08529177
		mcmc	0.886	0.05467052	0.947	0.06518504	0.99	0.08569948
	50	mle	0.916	0.03289085	0.956	0.03919128	0.992	0.05150607
		bayes1	0.916	**0.03277967**	0.962	**0.0390588**	0.992	**0.05133197**
		bayes2	0.908	0.0328186	0.96	0.03910526	0.989	0.05139303
		bayes3	0.922	-	0.956	0.03910532	0.99	0.0513931
		mcmc	0.911	0.0328561	0.959	0.03924732	0.989	0.05141793

ตารางที่ 4.8 (ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.5

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
ใหญ่	70	mle	0.906	0.02349554	0.949	0.02799666	0.992	0.03679385
		bayes1	0.906	**0.0234549**	0.949	**0.02794824**	0.992	**0.03673021**
		bayes2	0.902	0.0234692	0.95	0.02796528	0.991	0.0367526
		bayes3	0.899	0.02346921	0.947	0.02796528	0.992	0.03675261
		mcmc	0.908	0.02347486	0.945	0.0279892	0.992	0.03673196
	100	mle	0.918	0.01644775	0.953	0.0195987	0.985	0.02575706
		bayes1	0.918	**0.01643379**	0.959	0.01958206	0.985	**0.0257352**
		bayes2	0.917	0.01643871	0.956	0.01958793	0.985	0.0257429
		bayes3	0.918	0.01643871	0.961	0.01958793	0.987	0.0257429
		mcmc	0.917	0.01643723	0.957	**0.01958188**	0.987	0.02574341

หมายเหตุ ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่สามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบสุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.8 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น(AW) โดยจะพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ที่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n= 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) และ วิธีประมาณ Bayes1 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) วิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) วิธีประมาณ Bayes1 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีประมาณ Bayes2 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) และ วิธีประมาณ Bayes1 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ตารางที่ 4.9 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.7

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
เล็ก	10	mle	0.907	0.1666802	0.974	-	0.999	-
		bayes1	0.908	**0.1582238**	0.96	0.1952565	0.999	-
		bayes2	0.833	-	0.909	-	0.992	0.2917369
		bayes3	0.933	-	0.962	0.1936887	0.999	-
		mcmc	0.88	-	0.94	**0.1768904**	0.985	**0.2323099**
	20	mle	0.917	0.0790484	0.956	0.09568392	0.998	-
		bayes1	0.918	0.07799279	0.963	0.09440616	0.999	-
		bayes2	0.894	0.0788748	0.953	0.09547378	0.996	0.1305022
		bayes3	0.914	0.07780599	0.963	0.09418005	0.996	0.1287338
		mcmc	0.898	**0.07502032**	0.948	**0.08940986**	0.993	**0.1174153**
กลาง	30	mle	0.9	0.05018606	0.946	0.05980038	0.989	0.07859102
		bayes1	0.891	0.04988527	0.944	0.05944196	0.987	0.07811998
		bayes2	0.878	-	0.935	-	0.988	0.07852177
		bayes3	0.906	**0.04983049**	0.945	**0.0593767**	0.989	**0.07803421**
		mcmc	0.897	0.05015418	0.942	0.05967963	0.988	0.07853358
	50	mle	0.905	0.03014052	0.957	0.03591464	0.989	0.04719984
		bayes1	0.896	0.03007498	0.956	0.03583654	0.991	0.0470972
		bayes2	0.891	0.03013131	0.948	0.03590367	0.992	0.04718542
		bayes3	0.902	**0.03006305**	0.955	**0.03582233**	0.989	**0.04707853**
		mcmc	0.905	0.0301481	0.959	0.03590951	0.989	0.04724074

ตารางที่ 4.9 (ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.7

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
ใหญ่	70	mle	0.903	0.02153069	0.951	0.0256554	0.988	0.03371691
		bayes1	0.905	0.02150678	0.952	0.02562691	0.988	0.03367947
		bayes2	0.903	0.0215274	0.949	0.02565148	0.986	0.03371176
		bayes3	0.9	**0.0215024**	0.95	**0.02562169**	0.988	**0.03367261**
		mcmc	0.898	0.02150611	0.951	0.02566928	0.989	0.03373387
	100	mle	0.897	0.01507422	0.946	0.01796204	0.988	0.02360613
		bayes1	0.897	0.01506601	0.944	0.01795226	0.988	0.02359327
		bayes2	0.898	0.0150731	0.941	0.01796071	0.988	0.02360437
		bayes3	0.899	0.01506451	0.947	**0.01795047**	0.989	**0.02359091**
		mcmc	0.9	**0.0150601**	0.948	0.01795114	0.988	0.02361134

หมายเหตุ ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่สามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้ เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบสุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.9 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) โดยจะพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ที่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีประมาณ Bayes1 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100) และวิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) วิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) วิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ตารางที่ 4.10 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.9

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
เล็ก	10	mle	0.917	0.1079201	0.935	-	0.993	**0.1913263**
		bayes1	0.601	-	0.811	-	0.993	0.2160608
		bayes2	0.601	-	0.811	-	0.988	0.2266307
		bayes3	0.946	-	0.986	-	0.997	-
		mcmc	0.895	**0.0979869**	0.934	-	0.97	-
	20	mle	0.913	0.05155375	0.955	0.0624031	0.995	0.0852982
		bayes1	0.843	-	0.93	-	0.993	0.08910065
		bayes2	0.804	-	0.906	-	0.988	0.09031631
		bayes3	0.923	-	0.973	-	0.996	0.08509182
		mcmc	0.903	**0.04915677**	0.948	**0.05867076**	0.988	**0.07711356**
กลาง	30	mle	0.875	-	0.946	0.03907513	0.986	0.05135343
		bayes1	0.843	-	0.912	-	0.982	-
		bayes2	0.816	-	0.914	-	0.977	-
		bayes3	0.87	-	0.952	**0.03903151**	0.986	**0.05129609**
		mcmc	0.886	**0.03284621**	0.944	0.0390986	0.986	0.05140273
	50	mle	0.887	0.01972074	0.952	0.02349871	0.99	0.0308825
		bayes1	0.876	-	0.924	-	0.987	0.0308825
		bayes2	0.876	-	0.924	-	0.987	0.03119444
		bayes3	0.885	0.01972074	0.957	**0.02348891**	0.988	**0.03086966**
		mcmc	0.892	**0.01971108**	0.957	0.02352079	0.988	0.03088613

ตารางที่ 4.10 (ต่อ) ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ p เท่ากับ 0.9

n		วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
			90%		95%		99%	
			CC	AW	CC	AW	CC	AW
ใหญ่	70	mle	0.902	0.01409076	0.943	0.01679018	0.987	0.02206603
		bayes1	0.889	0.0141476	0.943	0.0168579	0.986	0.02215504
		bayes2	0.884	0.01416391	0.943	0.01687733	0.987	0.02218058
		bayes3	0.902	0.01416391	0.943	**0.01678659**	0.989	0.02206132
		mcmc	0.899	**0.01408219**	0.941	0.01681566	0.989	**0.02203916**
	100	mle	0.911	0.00987151	0.958	0.01176263	0.987	0.01545871
		bayes1	0.911	0.00989106	0.946	0.01178593	0.988	0.01548933
		bayes2	0.907	0.00989666	0.947	0.01179259	0.988	0.0154981
		bayes3	0.909	0.00989666	0.958	**0.01176138**	0.987	**0.01545707**
		mcmc	0.906	**0.00986724**	0.955	0.01177336	0.988	0.01546724

หมายเหตุ ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่สามารถคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นได้เนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบสุดในแต่ละสถานการณ์

จากตารางที่ 4.10 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) โดยจะพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) ที่อยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเท่านั้น ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ทุกสถานการณ์

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) และ วิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีประมาณ MLE ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) วิธีประมาณ MCMC ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และวิธีประมาณ Bayes3 ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยทำการศึกษาและเปรียบเทียบในแต่ละสถานการณ์ ดังนี้

1. กำหนดค่าพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9
2. กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง คือ ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n=$ 10 และ 20) ตัวอย่างขนาดกลาง ($n=$ 30 และ 50) และ ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)
3. กำหนดระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับ คือ 90%, 95% และ 99%

เกณฑ์ในการพิจารณาวิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ สำหรับการประมาณค่าแบบจุด ผู้วิจัยจะพิจารณาจากการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) และสำหรับการประมาณค่าแบบช่วงจะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่ได้จากการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงบีตา และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ สามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

5.1.1 การประมาณค่าแบบจุด

ตารางที่ 5.1 วิธีการประมาณพารามิเตอร์แบบจุดที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยที่สุด

p	ขนาดเล็ก		ขนาดกลาง		ขนาดใหญ่	
	10	20	30	50	70	100
0.1	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2	MLE
0.3	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2
0.5	Bayes1	Bayes1	Bayes1	Bayes1	Bayes1	Bayes1
0.7	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3	MCMC
0.9	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3	MCMC

กรณีที่ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9

กรณีที่ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9

กรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9

กรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- วิธีประมาณ MLE มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) น้อยสุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9

5.1.2 การประมาณค่าแบบช่วง

ตารางที่ 5.2 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

p	ขนาดเล็ก		ขนาดกลาง		ขนาดใหญ่	
	10	20	30	50	70	100
0.1	MCMC	MCMC	-	Bayes2	Bayes2	Bayes2
0.3	Bayes1	MCMC	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2
0.5	Bayes2	Bayes2	Bayes1	Bayes1	Bayes1	Bayes1
0.7	Bayes1	MCMC	Bayes3	Bayes3	Bayes3	MCMC
0.9	MCMC	MCMC	MCMC	MCMC	MCMC	MCMC

กรณีที่ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 และ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 30) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 50)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

ตารางที่ 5.3 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

p	ขนาดเล็ก		ขนาดกลาง		ขนาดใหญ่	
	10	20	30	50	70	100
0.1	-	MCMC	Bayes2	Bayes2	MCMC	Bayes2
0.3	MCMC	MCMC	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2
0.5	Bayes2	Bayes3	Bayes1	Bayes1	Bayes1	MCMC
0.7	MCMC	MCMC	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3
0.9	-	MCMC	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3

กรณีที่ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 และ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1, 0.3, 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

ตารางที่ 5.4 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด ที่ระดับความเชื่อมั่น 99%

p	ขนาดเล็ก		ขนาดกลาง		ขนาดใหญ่	
	10	20	30	50	70	100
0.1	Bayes2	Bayes2	Bayes2	MCMC	MCMC	Bayes2
0.3	MCMC	MCMC	Bayes2	Bayes2	Bayes2	Bayes2
0.5	-	Bayes2	Bayes1	Bayes1	Bayes1	Bayes1
0.7	MCMC	MCMC	Bayes3	Bayes3	Bayes3	Bayes3
0.9	MLE	MCMC	Bayes3	Bayes3	MCMC	Bayes3

กรณีที่ตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10 และ 20)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 และ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3, 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 20)

- วิธีประมาณ MLE มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก (n = 10)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 50)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 50)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50)

กรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ MCMC มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70)

- วิธีประมาณ Bayes2 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.1 และ 0.3 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

- วิธีประมาณ Bayes1 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.5 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100)

- วิธีประมาณ Bayes3 มีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุด เมื่อพารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70) และ พารามิเตอร์ของประชากร (p) เท่ากับ 0.7 และ 0.9 เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 100)

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

- เมื่อต้องการทำการประมาณค่าแบบจุด ควรใช้วิธีของเบส์ในการประมาณค่า แต่หากตัวอย่างมีขนาดใหญ่และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน อาจเลือกใช้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟแทนได้

- เมื่อต้องการทำการประมาณค่าแบบช่วง วิธีของเบส์เป็นส่วนใหญ่จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) แคบที่สุด แต่หากตัวอย่างมีขนาดเล็กและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน อาจเลือกใช้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟแทนได้

- ขนาดตัวอย่างมีผลต่อค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของการประมาณค่าแบบจุด โดยเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลง

- ขนาดตัวอย่างมีผลต่อค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ของการประมาณค่าแบบช่วง เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลง

5.2.2 ด้านการศึกษาวิจัย

- เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สนใจศึกษาได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการ แจกแจงทวินาม โดยใช้วิธีการประมาณอื่นๆ เช่น วิธีบูทแสตรป วิธีสกอล วิธีวิลค์ เป็นต้น

บรรณานุกรม

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2554. **สถิติคณิตศาสตร์.** เล่มที่ 1. สาขาวิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

อโนทัย ตรีวานิช. 2539. **ทฤษฎีการอนุมานทางสถิติ.** คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ฝันจิต แต้มทอง. 2537. "การอนุมานค่าเฉลี่ยประชากรโดยวิธีเบย์เซียน." วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร มหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์ บัณฑิตวิทยาลัย, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

มานะชัย รอดชื่น. 2557. **การเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนทวินาม.** สาขาวิชาสถิติ คณะ วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

อัชฌา อระวีพร. 2555. "การวิเคราะห์เบส์จากโปรแกรมวินบั๊กสู่โปรแกรมอาร์." *วารสารมหาวิทยาลัย นเรศวร วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.* ปีที่ 9(1) : 30-44.

Araveeporn, A. 2015. "The Interval Estimation of Poisson Distribution by Using Maximum Likelihood, Markov Chain Monte Carlo, and Bayes methods." 36-42. in International Conference on Applied Statistics 2015. Pattaya, Thailand.

Thetkham, A. and Araveeporn, A. 2016. "A Comparison of Parameter Estimation of Exponential Distribution Using Maximum Likelihood, Bayes, and Markov Chain Monte Carlo methods". 55-61. in International Conference on Applied Statistics 2015. Phuket, Thailand.

Kumar, J. and Tomer, S.K. 2016. "Reliability Estimation for Negative Binomial Distribution Under Type-II Censoring Scheme". Journal of Statistics Applications & Probability. 5(1): 89-98.

อัญมณี กุมมาระกะ. 2561. "การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามเชิงลบด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล." ปัญหาพิเศษ ระดับปริญญาโท สาขาวิชาสถิติประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

โสรัจจะ คล้ายฉิม จุฑาภรณ์ สินสมบูรณ์ทอง และประสิทธิ์ พยัคฆพงษ์. 2559. "วิธีการประมาณแบบช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความเชื่อถือได้ของความเค้นและความแข็งแรง $R = P(X < Y)$ โดย

ใช้ข้อมูลค่าบันทึกล่างในการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปหนึ่งพารามิเตอร์.” วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. ปีที่ 24 : 198-210. ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

น้อมจิต กิตติโชติพาณิชย์. 2553. **เอกสารประกอบการสอนวิชาสถิติคณิตศาสตร์.** 1. คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

ประชุม สุวัตถี. 2553. **ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ.** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : สำนักงานกิจการโรงพิมพ์ องค์การสงเคราะห์ทหารผ่านศึก.

สุชาดา กีระนันทน์. 2534. **การอนุมานเชิงสถิติทฤษฎีขั้นต้น.** พิมพ์ครั้งที่ 3. ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาคผนวก

คำสั่งโปรแกรม R ที่ใช้ในงานวิจัย

การประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบจุดของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

```
#model 1
model{
for(i in 1: n) {
x[i] ~ dbin(p,n)}
p ~ dbeta(a,b)
a ~ dexp(1)
b ~ dexp(1) }
#########################################################################
set.seed(55)
m=1000 ; n=10
p=0.1
a1=8 ; b1=8
a2=2 ; b2=8
a3=8 ; b3=2
#########################################################################
mle = c() ; v.mle = c() ; error.mle = c()
bayes1 = c() ; v.bayes1 = c() ; error.bayes1 = c()
bayes2 = c() ; v.bayes2 = c() ; error.bayes2 = c()
bayes3 = c() ; v.bayes3 =c() ; error.bayes3 = c()
mcmc = c() ; v.mcmc=c() ; error.mcmc = c()
a_mc = c() ; b_mc = c()
#########################################################################
for (j in 1:m)
{x = rbinom(n,10,p)

#The Maximum Likelihood Method
mle [j] = sum(x)/n^2
v.mle[j] = (mle [j]*(1-mle [j]))/n^2
```

```
#Bayes' Method
bayes1[j] = (sum(x)+a1)/(a1+n^2+b1)
bayes2[j] = (sum(x)+a2)/(a2+n^2+b2)
bayes3[j] = (sum(x)+a3)/(a3+n^2+b3)
v.bayes1[j] = ((sum(x)+a1)*(n^2-sum(x)+b1))/((a1+n^2+b1+1)*(a1+n^2+b1)^2)
v.bayes2[j] = ((sum(x)+a2)*(n^2-sum(x)+b2))/((a2+n^2+b2+1)*(a2+n^2+b2)^2)
v.bayes3[j] = ((sum(x)+a3)*(n^2-sum(x)+b3))/((a3+n^2+b3+1)*(a3+n^2+b3)^2)
#Markov Chain Monte Carlo
library(rjags)
dataset = list(x = x,n = n)
inits = list(p = p,a = 1,b = 1)
jagmod <-jags.model('model1.txt',data=dataset,inits=inits,
n.chains = 1,n.adapt = 1000)
update(jagmod,n.iter = 10000,progress.bar = "text")
posterior = coda.samples(jagmod,c("p","a","b"),
n.iter = 10000,progress.bar = "text",thin = 10)
post = as.data.frame(as.matrix(posterior))
mcmc[j] = mean(post$p)
v.mcmc[j] = var(post$p)
#mcmc_sd = sd(post$p)
a_mc[j] = (post$a)
b_mc[j] = mean(post$b)
cat(c("loop:",j,fill=T))
##########################################################################
error.mle[j] =(p-mle[j])^2
error.bayes1[j] =(p-bayes1[j] )^2
error.bayes2[j] =(p-bayes2[j] )^2
error.bayes3[j] =(p-bayes3[j] )^2
error.mcmc[j] =(p-mcmc[j] )^2
}
##########################################################################
```

```
mse.mle = mean(error.mle)
mse.bayes1 = mean(error.bayes1)
mse.bayes2 = mean(error.bayes2)
mse.bayes3 = mean(error.bayes3)
mse.mcmc = mean(error.mcmc)
######################################################################
cat('\tn = ' , n, '\tm = ', m,'\tp = ', p,'\n',
'\tmse mle = ',mse.mle,'\n',
'\tmse bayes1 = ',mse.bayes1,'\n',
'\tmse bayes2 = ',mse.bayes2,'\n',
'\tmse bayes3 = ',mse.bayes3,'\n',
'\tmse mcmc = ',mse.mcmc,'\n')
######################################################################
```

การประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบช่วงของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ n เป็นตัวอย่างเล็ก (n = 10 และ 20) ใช้ตาราง t

```
#model 1
model{
for(i in 1: n) {
x[i] ~ dbin(p,n)}
p ~ dbeta(a,b)
a ~ dexp(1)
b ~ dexp(1) }
######################################################################
set.seed(55)
m = 1000 ; n = 10
p = 0.1
a1 = 8 ; b1 = 8
a2 = 2 ; b2 = 8
a3 = 8 ; b3 = 2
alpha = 0.1
conf.cv1 = 0.8814
conf.cv = 0.9186
######################################################################
mle = c() ; v.mle = c()
bayes1 = c() ; v.bayes1 = c()
bayes2 = c() ; v.bayes2 = c()
bayes3 = c() ; v.bayes3 = c()
mcmc = c() ; v.mcmc = c()
a_mc = c() ; b_mc = c()
######################################################################
mle = rep(0,m) ; v.mle = rep(0,m) ; ucl.mle = rep(0,m) ; lcl.mle = rep(0,m)
bayes1 = rep(0,m); v.bayes1 = rep(0,m); ucl.bayes1 = rep(0,m); lcl.bayes1= rep(0,m)
bayes2 = rep(0,m); v.bayes2 = rep(0,m); ucl.bayes2 = rep(0,m); lcl.bayes2 = rep(0,m)
bayes3 = rep(0,m); v.bayes3 = rep(0,m); ucl.bayes3 = rep(0,m); lcl.bayes3 = rep(0,m)
mcmc = rep(0,m) ; v.mcmc = rep(0,m) ; ucl.mcmc = rep(0,m) ; lcl.mcmc = rep(0,m)
```

```
temp.mle = rep(0,m) ; length.mle = rep(0,m)
temp.bayes1 = rep(0,m) ; length.bayes1 = rep(0,m)
temp.bayes2 = rep(0,m) ; length.bayes2 = rep(0,m)
temp.bayes3 = rep(0,m) ; length.bayes3 = rep(0,m)
temp.mcmc  = rep(0,m) ; length.mcmc  = rep(0,m)
##################################################################
for (j in 1:m)
{x = rbinom(n,10,p)
t1= qt(1-(alpha/2),n-1)

#The Maximum Likelihood Method
mle [j] = sum(x)/n^2
v.mle[j] = (mle [j]*(1-mle [j]))/n^2

#Bayes' Method
bayes1[j] = (sum(x)+a1)/(a1+n^2+b1)
bayes2[j] = (sum(x)+a2)/(a2+n^2+b2)
bayes3[j] = (sum(x)+a3)/(a3+n^2+b3)
v.bayes1[j] = ((sum(x)+a1)*(n^2-sum(x)+b1))/((a1+n^2+b1+1)*(a1+n^2+b1)^2)
v.bayes2[j] = ((sum(x)+a2)*(n^2-sum(x)+b2))/((a2+n^2+b2+1)*(a2+n^2+b2)^2)
v.bayes3[j] = ((sum(x)+a3)*(n^2-sum(x)+b3))/((a3+n^2+b3+1)*(a3+n^2+b3)^2)

#Markov Chain Monte Carlo
library(rjags)
dataset = list(x = x,n = n)
inits = list(p = p,a = 1,b = 1)
jagmod<-jags.model('model1.txt',data=dataset,inits=inits,n.chains=1,n.adapt=1000)
update(jagmod,n.iter = 10000,progress.bar = "text")
posterior = coda.samples(jagmod,c("p","a","b"),
n.iter = 10000,progress.bar = "text",thin = 10)
post = as.data.frame(as.matrix(posterior))
mcmc[j] = mean(post$p)
v.mcmc[j] = var(post$p)
```

```
 #mcmc_sd=sd(post$p)
 a_mc[j] = mean(post$a)
 b_mc[j] = mean(post$b)
 cat(c("loop:",j,fill=T))
 ######################################################################
 lcl.mle[j]  = mle[j]-t1*sqrt(v.mle[j])
 ucl.mle[j] = mle[j]+t1*sqrt(v.mle[j])
 lcl.bayes1[j] = bayes1[j]-t1*sqrt(v.bayes1[j])
 ucl.bayes1[j] = bayes1[j]+t1*sqrt(v.bayes1[j])
 lcl.bayes2[j] = bayes2[j]-t1*sqrt(v.bayes2[j])
 ucl.bayes2[j] = bayes2[j]+t1*sqrt(v.bayes2[j])
 lcl.bayes3[j] = bayes3[j]-t1*sqrt(v.bayes3[j])
 ucl.bayes3[j] = bayes3[j]+t1*sqrt(v.bayes3[j])
 lcl.mcmc[j]  = mcmc[j]-t1*sqrt(v.mcmc[j])
 ucl.mcmc[j] = mcmc[j]+t1*sqrt(v.mcmc[j])
 ######################################################################
 if ((p >= lcl.mle[j]) & (p <= ucl.mle[j]))  {temp.mle[j] =1}
 if ((p >= lcl.bayes1[j]) & (p <= ucl.bayes1[j])) {temp.bayes1[j] =1}
 if ((p >= lcl.bayes2[j]) & (p <= ucl.bayes2[j])) {temp.bayes2[j] =1}
 if ((p >= lcl.bayes3[j]) & (p <= ucl.bayes3[j])) {temp.bayes3[j] =1}
 if ((p >= lcl.mcmc[j]) & (p <= ucl.mcmc[j])) {temp.mcmc[j] =1}
 ######################################################################
 length.mle[j] = ucl.mle[j]-lcl.mle[j]
 length.bayes1[j] = ucl.bayes1[j]-lcl.bayes1[j]
 length.bayes2[j] = ucl.bayes2[j]-lcl.bayes2[j]
 length.bayes3[j] = ucl.bayes3[j]-lcl.bayes3[j]
 length.mcmc[j] = ucl.mcmc[j]-lcl.mcmc[j]
 }
######################################################################
```

```
conf.mle = mean(temp.mle)
conf.bayes1 = mean(temp.bayes1)
conf.bayes2 = mean(temp.bayes2)
conf.bayes3 = mean(temp.bayes3)
conf.mcmc = mean(temp.mcmc)
##################################################################
if( (conf.mle >= conf.cv1) & (conf.mle <= conf.cv) )
{width.mle = mean(length.mle)}
if( (conf.mle < conf.cv1) || (conf.mle > conf.cv) ) {width.mle = c("-")}
##################################################################
if( (conf.bayes1>=conf.cv1) & (conf.bayes1<=conf.cv) )
{width.bayes1 =mean(length.bayes1)}
if( (conf.bayes1<conf.cv1) || (conf.bayes1>conf.cv) ) {width.bayes1 =c("-")}
##################################################################
if( (conf.bayes2>=conf.cv1) & (conf.bayes2<=conf.cv) )
{width.bayes2 =mean(length.bayes2)}
if( (conf.bayes2<conf.cv1) || (conf.bayes2>conf.cv) ) {width.bayes2 =c("-")}
##################################################################
if( (conf.bayes3>=conf.cv1) & (conf.bayes3<=conf.cv) )
{width.bayes3 =mean(length.bayes3)}
if( (conf.bayes3<conf.cv1) || (conf.bayes3>conf.cv) ) {width.bayes3 =c("-")}
##################################################################
if( (conf.mcmc>=conf.cv1) & (conf.mcmc<=conf.cv) )
{width.mcmc=mean(length.mcmc)}
if( (conf.mcmc<conf.cv1) || (conf.mcmc>conf.cv) ) {width.mcmc =c("-")}
##################################################################
cat('\tm = ',m,  '\tn = ',n,  '\tp = ',p,  '\talpha = ',alpha,  '\tconfidence coef 1=
',conf.cv1,  '\tconfidence coef = ',conf.cv,  '\n',
'\tconf mle = ',conf.mle,   '\twidth mle = ',width.mle, '\n',
'\tconf bayes1 = ', conf.bayes1,  '\twidth bayes1 = ', width.bayes1, '\n',
'\tconf bayes2 = ', conf.bayes2,  '\twidth bayes2 = ', width.bayes2, '\n',
'\tconf bayes3 = ', conf.bayes3,  '\twidth bayes3 = ', width.bayes3, '\n',
'\tconf mcmc = ', conf.mcmc,  '\twidth mcmc = ', width.mcmc, '\n')
```

การประมาณค่าพารามิเตอร์ p แบบช่วงของการแจกแจงทวินาม ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ n เป็นตัวอย่างขนาดกลาง (n = 30 และ 50) และตัวอย่างขนาดใหญ่ (n = 70 และ 100) ใช้ตาราง Z

```
#model 1
model{
for(i in 1: n) {
x[i] ~ dbin(p,n)}
p ~ dbeta(a,b)
a ~ dexp(1)
b ~ dexp(1) }
####################################################################
set.seed(55)
m = 1000 ; n = 30
p = 0.1
a1 = 8 ; b1 = 8
a2 = 2 ; b2 = 8
a3 = 8 ; b3 = 2
alpha = 0.1
conf.cv1 = 0.8814
conf.cv =  0.9186
####################################################################
mle = c() ; v.mle = c()
bayes1 = c() ; v.bayes1 = c()
bayes2 = c() ; v.bayes2 = c()
bayes3 = c() ; v.bayes3 = c()
mcmc = c() ; v.mcmc = c()
a_mc = c() ; b_mc = c()
####################################################################
mle = rep(0,m) ; v.mle = rep(0,m) ; ucl.mle = rep(0,m) ; lcl.mle = rep(0,m)
bayes1 = rep(0,m); v.bayes1 = rep(0,m); ucl.bayes1 = rep(0,m); lcl.bayes1 = rep(0,m)
bayes2 = rep(0,m); v.bayes2 = rep(0,m); ucl.bayes2 = rep(0,m); lcl.bayes2 = rep(0,m)
bayes3 = rep(0,m); v.bayes3 = rep(0,m); ucl.bayes3 = rep(0,m); lcl.bayes3 = rep(0,m)
mcmc = rep(0,m) ; v.mcmc = rep(0,m) ; ucl.mcmc = rep(0,m) ; lcl.mcmc = rep(0,m)
```

```
temp.mle = rep(0,m) ; length.mle = rep(0,m)
temp.bayes1 = rep(0,m) ; length.bayes1 = rep(0,m)
temp.bayes2 = rep(0,m) ; length.bayes2 = rep(0,m)
temp.bayes3 = rep(0,m) ; length.bayes3 = rep(0,m)
temp.mcmc = rep(0,m);  length.mcmc = rep(0,m)
##############################################################################
for (j in 1:m)
{x = rbinom(n,30,p)
z = qnorm(1-(alpha/2))

#The Maximum Likelihood Method
mle [j] = sum(x)/n^2
v.mle[j] = (mle [j]*(1-mle [j]))/n^2

#Bayes' Method
bayes1[j] = (sum(x)+a1)/(a1+n^2+b1)
bayes2[j] = (sum(x)+a2)/(a2+n^2+b2)
bayes3[j] = (sum(x)+a3)/(a3+n^2+b3)
v.bayes1[j] = ((sum(x)+a1)*(n^2-sum(x)+b1))/((a1+n^2+b1+1)*(a1+n^2+b1)^2)
v.bayes2[j] = ((sum(x)+a2)*(n^2-sum(x)+b2))/((a2+n^2+b2+1)*(a2+n^2+b2)^2)
v.bayes3[j] = ((sum(x)+a3)*(n^2-sum(x)+b3))/((a3+n^2+b3+1)*(a3+n^2+b3)^2)
#Markov Chain Monte Carlo
library(rjags)
dataset = list(x = x,n = n)
inits = list(p = p,a = 1,b = 1)
jagmod<-jags.model('model1.txt',data=dataset,inits=inits,n.chains = 1,n.adapt = 1000)
update(jagmod,n.iter = 10000,progress.bar = "text")
posterior = coda.samples(jagmod,c("p","a","b"),
n.iter = 10000,progress.bar = "text",thin = 10)
post = as.data.frame(as.matrix(posterior))
mcmc[j] = mean(post$p)
v.mcmc[j] = var(post$p)
#mcmc_sd = sd(post$p)
```

```
 a_mc[j] = mean(post$a)
 b_mc[j] = mean(post$b)
 cat(c("loop:",j,fill = T))
 ##################################################################
 lcl.mle[j]  = mle[j]-z*sqrt(v.mle[j])
 ucl.mle[j] = mle[j]+z *sqrt(v.mle[j])
 lcl.bayes1[j] = bayes1[j]-z*sqrt(v.bayes1[j])
 ucl.bayes1[j] = bayes1[j]+z*sqrt(v.bayes1[j])
 lcl.bayes2[j] = bayes2[j]-z*sqrt(v.bayes2[j])
 ucl.bayes2[j] = bayes2[j]+z*sqrt(v.bayes2[j])
 lcl.bayes3[j] = bayes3[j]-z*sqrt(v.bayes3[j])
 ucl.bayes3[j] = bayes3[j]+z*sqrt(v.bayes3[j])
 lcl.mcmc[j]  = mcmc[j]-z*sqrt(v.mcmc[j])
 ucl.mcmc[j] = mcmc[j]+z *sqrt(v.mcmc[j])
 ##################################################################
 if ((p >= lcl.mle[j]) & (p <= ucl.mle[j]))  {temp.mle[j] = 1}
 if ((p >= lcl.bayes1[j]) & (p <= ucl.bayes1[j])) {temp.bayes1[j] = 1}
 if ((p>= lcl.bayes2[j]) & (p <= ucl.bayes2[j])) {temp.bayes2[j] = 1}
 if ((p >= lcl.bayes3[j]) & (p <= ucl.bayes3[j])) {temp.bayes3[j] = 1}
 if ((p >= lcl.mcmc[j]) & (p <= ucl.mcmc[j])) {temp.mcmc[j] = 1}
 ##################################################################
 length.mle[j] = ucl.mle[j]-lcl.mle[j]
 length.bayes1[j] = ucl.bayes1[j]-lcl.bayes1[j]
 length.bayes2[j] = ucl.bayes2[j]-lcl.bayes2[j]
 length.bayes3[j] = ucl.bayes3[j]-lcl.bayes3[j]
 length.mcmc[j] = ucl.mcmc[j]-lcl.mcmc[j]
 }
##################################################################
conf.mle = mean(temp.mle)
conf.bayes1 = mean(temp.bayes1)
conf.bayes2 = mean(temp.bayes2)
conf.bayes3 = mean(temp.bayes3)
conf.mcmc = mean(temp.mcmc)
```

```
######################################################################
if( (conf.mle >= conf.cv1) & (conf.mle <= conf.cv) )
{width.mle = mean(length.mle)}
if( (conf.mle < conf.cv1) || (conf.mle > conf.cv) ) {width.mle = c("-")}
######################################################################
if( (conf.bayes1 >= conf.cv1) & (conf.bayes1 <= conf.cv) )
{width.bayes1 = mean(length.bayes1)}
if( (conf.bayes1 < conf.cv1) || (conf.bayes1 > conf.cv) ) {width.bayes1 = c("-")}
######################################################################
if( (conf.bayes2 >= conf.cv1) & (conf.bayes2 <= conf.cv) )
{width.bayes2 = mean(length.bayes2)}
if( (conf.bayes2 < conf.cv1) || (conf.bayes2 > conf.cv) ) {width.bayes2 = c("-")}
######################################################################
if( (conf.bayes3 >= conf.cv1) & (conf.bayes3 <= conf.cv) )
{width.bayes3 = mean(length.bayes3)}
if( (conf.bayes3 < conf.cv1) || (conf.bayes3 > conf.cv) ) {width.bayes3 = c("-")}
######################################################################
if( (conf.mcmc >= conf.cv1) & (conf.mcmc <= conf.cv) )
{width.mcmc = mean(length.mcmc)}
if( (conf.mcmc < conf.cv1) || (conf.mcmc > conf.cv) ) {width.mcmc = c("-")}
######################################################################
cat('\tm = ',m,  '\tn = ',n,  '\tp = ',p,  '\talpha = ',alpha,'\n',
'\tconfidence coef 1= ',conf.cv1,  '\tconfidence coef = ',conf.cv,  '\n',
'\tconf mle = ',conf.mle,   '\twidth mle = ',width.mle, '\n',
'\tconf bayes1 = ', conf.bayes1,  '\twidth bayes1 = ', width.bayes1, '\n',
'\tconf bayes2 = ', conf.bayes2,  '\twidth bayes2 = ', width.bayes2, '\n',
'\tconf bayes3 = ', conf.bayes3,  '\twidth bayes3 = ', width.bayes3, '\n',
'\tconf mcmc = ', conf.mcmc,  '\twidth mcmc = ', width.mcmc, '\n')
######################################################################
```

สร้างกราฟแสดงลักษณะรูปแบบของฟังก์ชันการแจกแจงบีตาที่มีพารามิเตอร์ (a,b)

```
x<-seq(0,1,by = 0.01)
y1<-dbeta(x,8,8)
y2<-dbeta(x,2,8)
y3<-dbeta(x,8,2)
plot(x, y1, main = 'Beta probability density',type="l", col=" black", ylim = c(0,4.5),
lwd=3.5)
lines(x,y2,type="l",lty = 10, col = " Blue",lwd = 3.5)
lines(x,y3,type="l",lty = 5, col=" red ",lwd = 3.5)
labels=c("Beta (8,8)","Beta (2,8)","Beta (8,2)")
a=c(1,10,5)
colors = c("black", " Blue", "red")
legend("topright",inset = 0.01,labels, col = colors , lwd = 2,lty = a)
```

สร้างกราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์

```
f1 = c(0.0009557,0.000218094,0.000105536, 0.000036734, 0.000018940,0.000008484)
f2 = c(0.00368099,0.000420057,0.000145999, 0.000042377,0.000020352,0.000008972)
f3 = c(0.000859752,0.000210595,0.000103693, 0.000036543,0.000018880,0.000008494)
f4 = c(0.004750331,0.000478507,0.000157194, 0.000043820,0.000020720,0.000009073)
f5 = c(0.000963508,0.000218623,0.000105618, 0.000036740,0.000018946,0.000008495)
y = c('10','20','30','50','70','100')
x = seq(1,6)
##########################################################################
plot(x,f1,type = "b", col = "black" ,xaxt = "n", ylim = c(0,0.005)
,main = "p = 0.1",xlab = "sample sizes (n)", ylab = " mean squares error (MSE) "
,pch = 20,lwd = 6, lty= 1.5)
lines(x,f2,type = "b" , col = "blue" , pch =17,lwd = 5 , lty=2 )
lines(x,f3,type = "b" , col = "purple" , pch =2,lwd = 4 , lty=1 )
lines(x,f4,type = "b" , col = "orange" , pch =8,lwd = 4.5 , lty=2 )
lines(x,f5,type = "b" , col = "red" , pch =4,lwd = 3 , lty=2.5 )
```

```
######################################################################
axis(1 , at = 1:6, labels= y)
labels = c("mle", "bayes1", "bayes2", "bayes3", "mcmc")
lwdd = c(3, 2, 2.9, 2, 2)
ltyy = c(2.9, 2, 2.2 ,2, 2.5)
colors = c("black", "blue", "purple", "orange", "red")
pchh = c(20, 17, 2, 8, 4)
legend("topright", inset = .05, labels,lwd = lwdd, lty = ltyy, col = colors, pch = pchh)
######################################################################
```