สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์และการประยุกต์ในตรรกศาสตร์

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SEMI-TENSOR PRODUCTS OF MATRICES AND APPLICATIONS IN LOGIC

กุลกานต์ ทองสงฆ์

จันทร์เพ็ญ บุญแก้วทองไธสง

ฐิตา แซะอามา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2558

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SEMI-TENSOR PRODUCTS OF MATRICES AND APPLICATIONS IN LOGIC

Kunlakan Thongsong

Janpen Bunkaewtongthaisong

Thita Saeama

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENTS FOR

THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE IN (APPLIED MATHEMATICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์และการประยุกต์ในตรรกศาสตร์ Algebraic Properties of Semi-tensor Products of Matrices and Applications in Logic
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกุลกานต์ ทองสงฆ์ รหัสนักศึกษา 55050019 นางสาวจันทร์เพ็ญ บุญแก้วทองไธสง รหัสนักศึกษา 55050028 นางสาวฐิตา แซะอามา รหัสนักศึกษา 55050043
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล ประธานกรรมการ	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์และการประยุกต์ในตรรกศาสตร์
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกุลกานต์ ทองสงฆ์ รหัสนักศึกษา 55050019
	นางสาวจันทร์เพ็ญ บุญแก้วทองไธสง รหัสนักศึกษา 55050028
	นางสาวฐิตา แซะอามา รหัสนักศึกษา 55050043
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง(สจล.)
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์เชิงซ้อน รวมทั้งนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการสรุปผลทางตรรกศาสตร์และการพิจารณาการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

คำสำคัญ : ผลคูณโครเนคเคอร์ ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ ตัวดำเนินการทางตรรกศษสตร์ การสรุปผลทางตรรกศาสตร์ การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

Title Algebraic Properties of Semi-tensor Products of Matrices and Applications in Logic

Students Miss.Kunlakan Thongsong Student ID 55050019

Miss.Janpen Bunkaewtongthaisong Student ID 55050028

Miss.Thita Saeama Student ID 55050043

Degree Bachelor of Science (Applied Mathematics)

Department Mathematics

Faculty Science

University King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)

Academic Year 2015

Advisor Assist.Prof.Dr. Pattrawut Chansangiam

Abstract

This special problem is to study algebraic properties of Semi-tensor products of complex matrix. Moreover, we sdapt these properties in logic equivalences and logical implication.

Keywords : Kronecker product, Semi-tensor product, logical operator, logical equivalence, logical implication

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์และการประยุกต์ในตรรกศาสตร์จนสามารถสำเร็จลุล่วงด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและให้ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และดร.กัมปนาท นามงามที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณท่านอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่าน ที่ท่านช่วยประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมา ตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

กุลกานต์ ทองสงฆ์

จันทร์เพ็ญ บุญแก้วทองไธสง

ฐิตา แซะอามา

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	จ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ	2
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์	3
2.1 พีชคณิตของเมทริกซ์	3
2.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์	7
บทที่ 3 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์	11
3.1 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเวกเตอร์	11
3.2 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ระหว่างเวกเตอร์กับเมทริกซ์	16
3.3 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์	17
3.4 สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์	23
3.5 ความสัมพันธ์ของผลคูณกึ่งเทนเซอร์กับผลคูณโครเนคเคอร์	27
3.6 สมบัติของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์สับเปลี่ยน	38

หน้า

บทที่ 4 การดำเนินการทางตรรกศาสตร์และผลคูณกึ่งเทนเซอร์ 40

4.1 การดำเนินการทางตรรกศาสตร์ 40

4.2 การแทนดำเนินการทางตรรกศาสตร์ด้วยผลคูณกึ่งเทนเซอร์ 41

บทที่ 5 การสรุปผลทางตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ 46

5.1 การสรุปผลทางตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ 46

5.2 ตัวอย่างสรุปผลทางตรรกศาสตร์ 48

บทที่ 6 การพิจารณาการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ 58

6.1 การพิจารณาสมมูลเชิงตรรกศาสตร์จากเมทริกซ์โครงสร้าง 58

6.2 ตัวอย่างการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ 60

เอกสารอ้างอิง 87

สารบัญตาราง

ตารางที่ | หน้า

4.2 ตารางค่าความจริงของนิเสธ 40

4.3 ตารางค่าความจริงของ $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\vee}, \uparrow, \downarrow$ 40

4.5 ตารางค่าความจริงของ p 41

4.6 ตารางค่าความจริงของ q 41

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์เราพิจารณาเมทริกซ์เป็นอะเรย์สองมิติซึ่งใช้ในการเก็บข้อมูล เราใช้การดำเนินการต่างๆสำหรับเมทริกซ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการคูณเมทริกซ์

การคูณเมทริกซ์ปกติเมทริกซ์ A กับ B จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนแนวตั้งของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์เป็นการขยายแนวคิดของการคูณดังกล่าวไปสู่กรณีที่จำนวนแนวตั้งของ A หารจำนวนแนวตั้งของ B ลงตัวหรือจำนวนแถวของ B หารจำนวนแนวตั้งของ A ลงตัว ซึ่งสมบัติผลคูณกึ่งเทนเซอร์ มีการนำมาประยุกต์ใช้ใน พีชคณิตบูลีน (Boolean algebra) ตรรกศาสตร์ (Logic) ความน่าจะเป็น ระบบพลวัตร (Dynamic system) และสาขาอื่นที่เกี่ยวข้องเป็นต้น

ในปัญหาพิเศษนี้เราจะศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์เชิงซ้อน รวมทั้งนำสมบัติดังกล่าวไปประยุกต์ในตรรกศาสตร์

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์เชิงซ้อน
2) ศึกษาการประยุกต์สมบัติของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ในตรรกศาสตร์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์เชิงซ้อนที่เกี่ยวข้องกับการบวก การคูณด้วยสเกลลาร์ การคูณ การสลับเปลี่ยน และผลคูณโครเนคเคอร์
2) ศึกษาการประยุกต์ในตรรกศาสตร์โดยนำผลคูณกึ่งเทนเซอร์ไปใช้ในการสรุปผลทางตรรกศาสตร์และการพิจารณาการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) มีความรู้และเข้าใจเกี่ยวกับผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์
2) นำความรู้ที่ได้เกี่ยวกับผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นๆที่เกี่ยวกับเมทริกซ์
3) เป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

ขั้นตอน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน								
	ปี 2558					ปี 2559			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1.ปรึกษาสมาชิกในกลุ่มแล้วนำไปเสนออาจารย์ที่ปรึกษาและเลือกหัวข้อปัญหาพิเศษที่สนใจ									
2.หาข้อมูลเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจทำปัญหาพิเศษ									
3.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีเมทริซ์									
4.ศึกษา วิเคราะห์ เรียบเรียงสมบัติพื้นฐานโดยศึกษาจากตำราและงานวิจัย									
5.ศึกษา วิเคราะห์ เรียบเรียงการประยุกต์ในเรื่องตรรกศาสตร์โดยศึกษาจากตำราและงานวิจัย									
6.ศึกษา วิเคราะห์ เรียบเรียงการประยุกต์ในพีชคณิตบูลีนโดยศึกษาจากตำราและงานวิจัย									
7.ทำการรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า									
8.ทำการศึกษา วิเคราะห์และนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นๆ ที่เกี่ยวกับเมทริกซ์									
9.สรุปผลและจัดทำรูปเล่ม									
10.นำเสนอปัญหาพิเศษ									

บทที่2

ความรู้พื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์

2.1 พีชคณิตของเมทริกซ์

เมทริกซ์เป็นแนวความคิดที่มีความสำคัญยิ่งในการแก้ปัญหาต่างๆทางคณิตศาสตร์ เมทริกซ์เป็นตารางสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular array) ของจำนวนหรือสมาชิกในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำมาบวกและคูณกันได้ เรามักเขียนเมทริกซ์เป็นตารางที่ไม่มีเส้นแบ่งหรือเขียนวงเล็บคร่อมตารางไว้ เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์เป็นการเขียนจำนวนต่างๆในรูปของตาราง ดังนั้นข้อมูลที่มีสองมิติหรือข้อมูลที่มีสองตัวแปรเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ (ตัวแปรที่หนึ่งอยู่ในแนวนอนและตัวแปรที่สองอยู่ในแนวตั้งหรือสลับกัน) เราเรียกแต่ละแนวนอนและแต่ละแนวตั้งของเมทริกซ์ว่าแถว (row) และแนวตั้ง (column) ตามลำดับ เมทริกซ์ที่มี m แถวและ n แนวตั้ง จะเรียกว่าเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และเรียกจำนวนต่างๆที่อยู่ในเมทริกซ์ว่า สมาชิก (element/entry) เราเขียนแทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ทั้งหมดที่มีสมาชิกอยู่ใน $\mathbb{C}$ ด้วย $M_{m,n}(\mathbb{C})$ และเพื่อความสะดวกเราให้ $M_n(\mathbb{C})$ แทน $M_{n,n}(\mathbb{C})$

เมทริกซ์ A มีขนาด $m \times n$ เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

สมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของ A เขียนแทนด้วย a_{ij} และเขียนแทนเมทริกซ์ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ด้วย $A = [a_{ij}]$

เมทริกซ์ใดๆที่ประกอบสมาชิกที่มีเพียงแถวเดียวเรียกว่า เมทริกซ์แถว หรือ เวกเตอร์แถว (row vector) เมทริกซ์ใดๆที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงแนวตั้งเดียวเรียกว่าเมทริกซ์แนวตั้ง หรือเวกเตอร์แนวตั้ง (column vector)

สำหรับแต่ละ X ที่เป็นเวกเตอร์แถวหรือเวกเตอร์แนวตั้ง ซึ่งอยู่ในรูปแบบบล็อกเราจะเขียนแทนบล็อกที่ i ของ X ด้วย X^i

สำหรับแต่ละเมทริกซ์ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ เราเขียนแนวตั้งที่ i ของ A ด้วย $Col_i(A)$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ และเขียนแทนแถวที่ j ของ A ด้วย $Row_j(A)$ สำหรับแต่ละ $j = 1, 2, \ldots, m$

2.1.1. การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและสมาชิกตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ที่ซึ่ง $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ จะกล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกๆค่าของ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots m$

2.1.2. การบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.2. ให้ $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $k \in \mathbb{C}$

เรานิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$k \cdot A = [ka_{ij}]$$

ตัวอย่าง 2.3. ให้ $A=3\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ จงหา $A+B$

วิธีทำ $A+B=3\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\ -3 & 0 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 10 & 11\\ 0 & 0 & 11\end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.4. ถ้าสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นศูนย์จะเรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix or null matrix) เขียนแทนด้วย

2.1.3. การคูณเมทริกซ์

บทนิยาม 2.5. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{n,p}(\mathbb{C})$ เรานิยามการคูณของ A กับ B ดังนี้

$$AB=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]_{i,j=1}^{m,p}\in M_{n,p}(\mathbb{C})$$

สำหรับทุกเมทริกซ์ A,B,C ที่ทำให้การบวกและการคูณของเมทริกซ์นิยามดีแล้ว จะได้ว่า

1) $(AB)C=A(CB)$
2) $AI=A=IA$ เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแถวทแยงมุมแนวตั้งเป็น 1 และสมาชิกอื่นเป็น 0
3) $A(B+C)=AB+AC$ และ $(A+B)C=AC+BC$
4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ สำหรับทุก $k\in\mathbb{C}$
5) $A0=0=0A$

ตัวอย่าง 2.6. ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{C})$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\5\\4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1(0)+0(1)+2(2) & 1(-1)+0(5)+2(4) & 1(1)+0(3)+2(1)\\ 3(0)+(-1)(1)+4(2) & 3(-1)+(-1)5+4(4) & 3(1)+(-1)(3)+4(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 7 & 3\\ 7 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

2.1.4. การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ (Transpose of a matrix)

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน A คือ เมทริกซที่เกิดจากการนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในแนวตั้งที่ 1 และนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในแนวตั้งที่ 2 และทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนหมด แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A ด้วย A^T

บทนิยาม 2.7. ให้ $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ดังนั้นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A เขียนแทนด้วย A^T

นิยามโดย $\qquad A^T=[a_{ij}]_{n,m}$

ตัวอย่าง 2.8. ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\in M_{3,2}(\mathbb{C})$ จะได้ว่าเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A คือ

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{C})$$

2.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.9. ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B เขียน แทนโดย $A\otimes B$ นิยามดังนี้

$$A\otimes B\equiv\begin{bmatrix}a_{11}B & \dots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B\end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathbb{C})$$

ตัวอย่าง 2.10. ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{C})$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\in M_{3,4}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $$A\otimes B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix} & 1\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\\ 3\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix} & -1\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ -4 & -2 & 6 & 3\\ -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 & 0 \\ -8 & -4 & 12 & 6 \\ -6 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 15 & 0 \\ -12 & -6 & 18 & 9 \\ -9 & 6 & -3 & 12 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 & 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ -8 & -4 & 12 & 6 & -4 & -2 & 6 & 3 \\ -6 & 4 & -2 & 8 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 15 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ -12 & -6 & 18 & 9 & 4 & 2 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 10 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 3 & -1 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & -4 & -2 & 12 & 6 & 6 & 3 \\ -12 & 4 & -6 & 2 & 18 & -6 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 4 & 2 & -2 & -1 & 8 & 4 \\ -9 & 3 & 6 & -2 & -3 & 1 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $A \otimes B \neq B \otimes A$

ทฤษฎีบท 2.11. ให้ A, B, C, D เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการต่างๆในแต่ละข้อมีความหมาย

1) $(\alpha A)\otimes B=\alpha(A\otimes B)=A\otimes(\alpha B)$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{C}$

2) $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$

3) $A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$

4) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$

5) $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

6) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$

บทพิสูจน์ (Bobbi Jo Broxson 2006)

ทฤษฎีบท 2.12. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{p,q}(\mathbb{C}), C \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ และ $D \in M_{q,r}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C}), C \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ และ $D \in M_{q,r}(\mathbb{C})$

$A = [a_{ih}]$ และ $C=[c_{hj}]$

โดยนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์ $A\otimes B = [a_{ih}B]$ และ $C\otimes D=[c_{hj}D]$

จะได้ว่า บล็อคที่ i, j ของ $(A\otimes B)(C\otimes D)$ คือ

$$\sum_{h=1}^{n}(a_{ih}B)(c_{hi}D)=\sum_{h=1}^{n}(a_{ih}c_{hj})(BD)$$

$$=\left[\sum_{h=1}^{n}(a_{hi}c_{hj})\right]BD$$

ดังนั้น ตำแหน่งที่ i, j ของ AC คือ $\sum_{h=1}^{n} a_{ih}c_{hj}$

จะได้บล็อกที่ i, j ของ $(AC \otimes BC)$ คือ$\left[\sum_{h=1}^{n}\left(a_{ih}c_{hj}\right)\right](BD)$

ดังนั้น $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

> **ทฤษฎีบท 2.13.** ถ้า $A \in M_m(\mathbb{C})$ และ $B \in M_n(\mathbb{C})$ หาผกผันได้ แล้ว $A \otimes B$ หาผกผันได้ซึ่ง
>
> $$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

พิสูจน์ สมมติ $A \in M_m(\mathbb{C})$ และ $B \in M_n(\mathbb{C})$ หาผกผันได้

จะได้ว่า จากทฤษฎีบท2.12.

$$(A \otimes B)\left(A^{-1} \otimes B^{-1}\right) = \left(AA^{-1}\right) \otimes \left(BB^{-1}\right) = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

$$\left(A^{-1} \otimes B^{-1}\right)(A \otimes B) = \left(A^{-1}A\right) \otimes \left(B^{-1}B\right) = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

สรุปได้ว่า $A \otimes B$ หาผกผันได้ซึ่ง$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

บทที่ 3

ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์

ในการคูณกันของเมทริกซ์ในแบบปกตินั้น จำนวนหลักของเมทริกซ์แรกต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ที่สองที่นำมาคูณ ในบทนี้เราจะขยายแนวคิดของการคูณแบบปกติไปสู่ผลคูณกึ่งเทนเซอร์โดยการคูณดังกล่าวนิยามสำหรับเมทริกซ์ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ ใดๆซึ่ง $n \mid p$ หรือ $p \mid n$ เราจะเริ่มต้นจากผลคูณกึ่งเทนเซอร์ระหว่างเวกเตอร์แถวกับเวกเตอร์แนวตั้ง แล้วขยายไปสู่ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ระหว่างเวกเตอร์แถวกับเมทริกซ์ และเมทริกซ์กับเมทริกซ์ตามลำดับ

3.1 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเวกเตอร์

บทนิยาม 3.1. ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{m,1}(\mathbb{C})$

กรณีที่ 1 $m \mid n$ แบ่ง X เป็น m บล็อกที่มีขนาดเท่ากันเป็น $X = \begin{bmatrix} X^1 & X^2 & \dots & X^m \end{bmatrix}$ และ

เขียน $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}^T$ เมื่อ $y_i \in \mathbb{C}$ สำหรับทุก $i = 1,2,\dots,m$ เรานิยาม

ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ ของ X และ Y ดังนี้

$$X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{m} y_i X^i$$

กรณีที่ 2 $n \mid m$ แบ่ง Y เป็น n บล็อกที่มีขนาดเท่ากันเป็น $Y = \begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ \vdots \\ Y^n \end{bmatrix}$ และ

เขียน $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ เมื่อ $x_i \in \mathbb{C}$ สำหรับทุก $i = 1,2,\dots,n$ เรานิยาม

ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ ของ X และ Y ดังนี้

$$X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{n} x_i Y^i$$

บทตั้ง 3.2. ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = \left(Y^T \ltimes X^T\right)^T$$

พิสูจน์ ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{m,1}(\mathbb{C})$

กรณีที่ 1 $m|n$

จากบทนิยาม 3.1 $X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{m} y_i X^i$

$$\left(X \ltimes Y\right)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i X^i\right)^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left(X^{\mathrm{T}}\right)^i = Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}}$$

จะได้ว่า $\left(X \ltimes Y\right) = \left(Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

กรณีที่ 2 $n|m$

จากบทนิยาม 3.1 $X \ltimes Y = \sum_{i=1}^{n} x_i Y^i$

$$\left(X \ltimes Y\right)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i Y^i\right)^{\mathrm{T}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(Y^{\mathrm{T}}\right)^i$$

$$= Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}}$$

จะได้ว่า $\left(X \ltimes Y\right) = \left(Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

ดังนั้น $X \ltimes Y = \left(Y^{\mathrm{T}} \ltimes X^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

ตัวอย่าง 3.3. ให้ $X = [1 2\ 3 -1] \in M_{1,4}(\mathbb{C})$ และ $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$

เนื่องจาก $2|4$ จะแบ่ง X ออกเป็น 2 บล็อกดังนี้ $X = [1 \quad 2 \ \vdots \ 3 \quad -1]$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = 1 \cdot [1 \quad 2] + 2 \cdot [3 \quad -1]$$

$$= [1 \quad 2] + [6 \quad -2]$$

$$= [7 \quad 0]$$

ตัวอย่าง 3.4. ให้ $X = [3-i \quad 2 \quad 4i \quad 1+5i] \in M_{1,4}(\mathbb{C})$ และ $Y = \begin{bmatrix} 2-i \\ 3i \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$

เนื่องจาก $2|4$ จะแบ่ง X ออกเป็น 2 บล็อกดังนี้ $X = [3-i \quad 2 \ \vdots \ 4i \quad 1+5i]$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = (2-\mathrm{i})[3-i \quad 2] + (3\mathrm{i})[4i \quad 1+5i]$$

$$= [5-5i \quad 4-2i] + [-12 \quad 3i-15]$$
$$= [-7-5i \quad -11+i]$$

ตัวอย่าง 3.5. ให้ $X = [1\ 2 -1] \in M_{1,3}(\mathbb{C})$ และ $Y = [2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \quad 1]^T \in M_{6,1}(\mathbb{C})$

เนื่องจาก $3|6$ จะแบ่ง Y ออกเป็น 3 บล็อกดังนี้ $Y = [2 \quad 1 \ \vdots \ -1 \quad 0 \ \vdots \ -2 \quad 1]^T$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.6. ให้ $X = \begin{bmatrix} 2-i & 7 & 4-3i & 2i \end{bmatrix} \in M_{1,4}(\mathbb{C})$ และ $Y = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 2i \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$

เนื่องจาก $2|4$ จะแบ่ง Y ออกเป็น 2 บล็อกดังนี้ $Y = \begin{bmatrix} 2-i & 7 & \vdots & 4-3i & 2i \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = (2-3\mathrm{i})\begin{bmatrix} 2-i & 7 \end{bmatrix} + (2\mathrm{i})\begin{bmatrix} 4-3i & 2i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-8i & 14-21i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+8i & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 10-21i \end{bmatrix}$$

> **บทตั้ง 3.7.**
>
> 1.) ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y, Z \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ถ้า $m|n$ หรือ $n|m$
>
> จะได้ว่า $$X \ltimes (\alpha Y + \beta Z) = \alpha(X \ltimes Y) + \beta(X \ltimes Z)$$
>
> 2.) ให้ $X, Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Z \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ถ้า $m|n$ หรือ $n|m$
>
> จะได้ว่า $$(\alpha X + \beta Y) \ltimes Z = \alpha(X \ltimes Z) + \beta(Y \ltimes Z)$$

พิสูจน์ 1.) ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y, Z \in_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$\alpha Y + \beta Z \in M_{m,1}(\mathbb{C})$

กรณีที่ 1 $m|n$

$$X \ltimes (\alpha Y + \beta Z) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha y_i + \beta z_i) X^i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha y_i X^i + \beta z_i X^i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} y_i X^i + \beta \sum_{i=1}^{m} z_i X^i$$

$$= \alpha(X \ltimes Y) + \beta(X \ltimes Z)$$

กรณีที่ 2 $n|m$

$$X \ltimes (\alpha Y + \beta Z) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\alpha Y^i + \beta Z^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x_i Y^i + \beta x_i Z^i \right)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i Y^i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i Z^i$$

$$= \alpha \left(X \ltimes Y \right) + \beta \left(X \ltimes Z \right)$$

พิสูจน์ 2.) ให้ $X, Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Z \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $\alpha X + \beta Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$

กรณีที่ 1 $m|n$

$$(\alpha X + \beta Y) \ltimes Z = \sum_{i=1}^{m} z_i \left(\alpha X^i + \beta Y^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha z_i X^i + \beta z_i Y^i \right)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} z_i X^i + \beta \sum_{i=1}^{m} z_i Y^i$$

$$= \alpha \left(X \ltimes Z \right) + \beta \left(Y \ltimes Z \right)$$

กรณีที่ 2 $n|m$

$$(\alpha X + \beta Y) \ltimes Z = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) Z^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha x_i Z^i + \beta y_i Z^i \right)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i Z^i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i Z^i$$

$$= \alpha \left(X \ltimes Z \right) + \beta \left(Y \ltimes Z \right)$$

3.2 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ระหว่างเวกเตอร์กับเมทริกซ์

บทนิยาม 3.8. ให้ $X \in M_{1,m}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ โดยที่ $m|p$ หรือ $p|m$ เรานิยาม

$$X \ltimes B = \left[X \ltimes Col_1(B) \ \cdots \ X \ltimes Col_q(B) \right]$$

ตัวอย่าง 3.9. ให้ $A = [4 \quad 2 \quad 3 \quad 2] \in M_{1,4}(\mathbb{C})$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า

$$A \ltimes B = \left[[4 \quad 2 \quad 3 \quad 2] \ltimes \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ [4 \quad 2 \quad 3 \quad 2] \ltimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[[8 \quad 4] + [3 \quad 2] \ [12 \quad 6] + [6 \quad 4] \right]$$

$$= [11 \quad 6 \quad 18 \quad 10]$$

บทตั้ง 3.10.

1.) ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $A, B \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ถ้า $m|n$ หรือ $n|m$

จะได้ว่า $$X \ltimes (\alpha A + \beta B) = \alpha (X \ltimes A) + \beta (X \ltimes B)$$

2.) ให้ $X, Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $A \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ถ้า $m|n$ หรือ $n|m$

จะได้ว่า $$(\alpha X + \beta Y) \ltimes A = \alpha (X \ltimes A) + \beta (Y \ltimes A)$$

พิสูจน์ 1.) ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $A, B \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ โดยที่ $m|n$ หรือ $n|m$

จากบทนิยาม 3.8.และบทตั้ง 3.7. 1) จะได้ว่า $Col_i(\alpha A + \beta B) = \alpha Col_i(A) + \beta Col_i(B)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, q$

$$X \ltimes (\alpha A + \beta B) = \left[X \ltimes Col_1(\alpha A + \beta B) \ \cdots \ X \ltimes Col_q(\alpha A + \beta B) \right]$$

$$= X \ltimes \left[\alpha Col_1(A) + \beta Col_1(B) \ \cdots \ \alpha Col_q(A) + \beta Col_q(B) \right]$$

$$= \left[X \ltimes \left(\alpha Col_1(A) + \beta Col_1(B) \right) \ \cdots \ X \ltimes \left(\alpha Col_q(A) + \beta Col_q(B) \right) \right]$$

$$= \left[\alpha \left(X \ltimes Col_1(A) \right) + \beta \left(X \ltimes Col(B)_1 \right) \ \cdots \ \alpha \left(X \ltimes Col_q(A) \right) + \beta \left(X \ltimes Col_q(B) \right) \right]$$

$$= \left[\alpha \left(X \ltimes Col_1(A) \right) \ \cdots \ \alpha \left(X \ltimes Col_q(A) \right) \right] + \left[\beta \left(X \ltimes Col_1(A) \right) \ \cdots \ \beta \left(X \ltimes Col_q(B) \right) \right]$$
$$= \alpha \left[X \ltimes Col_1(A) \ \cdots \ X \ltimes Col_q(B) \right] + \beta \left[X \ltimes Col_1(B) \ \cdots \ X \ltimes Col_q(B) \right]$$

$$= \alpha \left(X \ltimes A \right) + \beta \left(X \ltimes B \right)$$

พิสูจน์ 2.) ให้ $X, Y \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $A \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ โดยที่ $m|n$ หรือ $n|m$

จาก บทนิยาม 3.8. และบทตั้ง 3.7. 1.) จะได้ว่า

$$(\alpha X + \beta Y) \ltimes A = \left[(\alpha X + \beta Y) \ltimes Col_1(A) \ \cdots \ (\alpha X + \beta Y) \ltimes Col_q(A) \right]$$

$$= \left[\alpha \left(X \ltimes Col_1(A) \right) + \beta \left(Y \ltimes Col_1(A) \right) \ \cdots \ \alpha \left(X \ltimes Col_q(A) \right) + \beta \left(Y \ltimes Col_q(A) \right) \right]$$

$$= \alpha \left[X \ltimes Col_1(A) \ \cdots \ X \ltimes Col_q(A) \right] + \beta \left[Y \ltimes Col_1(A) \ \cdots \ Y \ltimes Col_q(A) \right]$$

$$= \alpha \left(X \ltimes A \right) + \beta \left(Y \ltimes A \right)$$

3.3 ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์

บทนิยาม 3.11. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ เมื่อ $n|p$ หรือ $p|n$ เรานิยาม

$$A \ltimes B = \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes B \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes B \end{bmatrix}$$

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$

ในกรณีที่ $n = tp$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}$ เราจะเขียนแทนด้วย $A \succ_t B$ ในกรณีนี้ $A \ltimes B$ จะมีขนาดเป็น $m \times tq$

ในกรณีที่ $nt = p$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}$ เราจะเขียนแทนด้วย $A \prec_t B$ ในกรณีนี้ $A \ltimes B$ จะมีขนาดเป็น $mt \times q$

ตัวอย่าง 3.12. ให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&2\\3&2&1&0\end{bmatrix}\in M_{3,4}(\mathbb{C}), B=\begin{bmatrix}1&-2\\2&-1\end{bmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า

$$A\ltimes B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2&3&1&2\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2&3&1&2\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&2&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&2&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix} & (-2)\cdot\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\\ 1\cdot\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix} & (-2)\cdot\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\\ 1\cdot\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix} & (-2)\cdot\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}+(-1)\cdot\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-2&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-4&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-6&-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&4&-3&-5\\4&7&-5&-8\\5&2&-7&-4\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.13. ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -i\\ 1 & 4i\end{bmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{C}), B=\begin{bmatrix}0 & i & 3i\\ 1 & 1-i & -1\\ 2 & 0 & i\\ -1 & i & 3i\end{bmatrix}\in M_{4,3}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า
$$A\ltimes B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & -i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}i\\1-i\\0\\i\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & -i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}3i\\-1\\i\\3i\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 4i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 4i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 4i\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2i\\-i\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2i\\2-2i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-i^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6i\\-2i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-i^2\\-3i^2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8i\\-4i\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}i\\1-i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4i^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3i\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4i^2\\12i^2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2i & 2i & 1+6i\\ 2-i & 3-2i & 3-2i\\ 8i & i & -4+3i\\ 1-4i & -3-i & -13\end{bmatrix}$$

บทตั้ง 3.14. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ เมื่อ $n|p$ หรือ $p|n$ จะได้ว่า

$$A \ltimes B = \left[A \ltimes Col_1(B) \cdots A \ltimes Col_q(B) \right]$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ เมื่อ $n|p$ หรือ $p|n$

จากบทนิยาม 3.11. จะได้ว่า $$A \ltimes B = \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes B \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes B \end{bmatrix}$$

และจากบทนิยาม 3.8. จะได้ว่า $$A \ltimes B = \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes Col_1(B) & \cdots & Row_1(A) \ltimes Col_q(B) \\ & \vdots & \\ Row_m(A) \ltimes Col_1(B) & \cdots & Row_m(A) \ltimes Col_q(B) \end{bmatrix}$$

$$= \left[A \ltimes Col_1(B) \quad \cdots \quad A \ltimes Col_q(B) \right]$$

บทแทรก 3.15. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{n,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$A \ltimes B = AB$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{n,q}(\mathbb{C})$

จากบทตั้ง 3.14. จะได้ว่า

$$A \ltimes B = \left[A \ltimes Col_1(B) \ldots A \ltimes Col_q(B)\right]$$

$$= \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes Col_1(B) & \cdots & Row_1(A) \ltimes Col_q(B) \\ & \vdots & \\ Row_m(A) \ltimes Col_1(B) & \cdots & Row_m(A) \ltimes Col_q(B) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} b_{1q} \\ \vdots \\ b_{nq} \end{bmatrix} \\ & \vdots & \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} b_{1q} \\ \vdots \\ b_{nq} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kq} \\ & \vdots & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kq} \end{bmatrix}$$

$$= AB$$

ตัวอย่าง 3.16. ให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&1\\3&1&0\end{bmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{C}), B=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\in M_{3,3}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$A\ltimes B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot[1]+2\cdot[2]+2\cdot[1] & 1\cdot[1]+2\cdot[2]+1\cdot[1] & 3\cdot[1]+1\cdot[2]+3\cdot[1]\\ 1\cdot[0]+2\cdot[2]+2\cdot[1] & 1\cdot[0]+2\cdot[2]+1\cdot[1] & 3\cdot[0]+1\cdot[2]+3\cdot[1]\\ 1\cdot[3]+2\cdot[1]+2\cdot[0] & 1\cdot[3]+2\cdot[1]+1\cdot[0] & 3\cdot[3]+1\cdot[1]+3\cdot[0]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+4+2 & 1+4+1 & 3+2+3\\ 0+4+2 & 0+4+1 & 0+2+3\\ 3+2+0 & 3+2+0 & 9+1+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&6&8\\6&5&5\\5&5&10\end{bmatrix}$$

$$=AB$$

3.4 สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 3.17. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$A \ltimes (B \ltimes C) = (A \ltimes B) \ltimes C$$

สำหรับทุกเมทริกซ์ A,B,C ที่ทำให้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์ดังกล่าวนิยามได้

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{r,s}$

พิจารณาขนาดของ A,B,C

กรณีที่ 1 $p|n$ และ $r|q$

กรณีที่ 2 $n|p$ หรือ $q|r$

กรณีที่ 3 $n|p$ และ $r|q$

กรณีที่ 4 $p|n$ และ $q|r$

เนื่องจากกรณีที่ 1-4 พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน เราจะพิสูจน์เฉพาะกรณีที่ 1

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{p,q}(\mathbb{C}), C \in M_{r,s}(\mathbb{C})$ โดยที่ $p|n$ และ $r|q$

$$A \ltimes B = \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes B \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes B \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Row_i(A \ltimes B) &= Row_i(A) \ltimes B \\ &= \left[Row_i(A) \ltimes Col_1(B) \ \cdots \ Row_i(A) \ltimes Col_{qr}(B) \right] \\ &= \left[(Row_i(A))^1 \ \cdots (Row_i(A))^p \right] \ltimes \begin{bmatrix} b_{11}^1 & \cdots & b_{1t}^1 & \cdots & b_{r1}^1 & \cdots & b_{rt}^1 \\ & & & \vdots & & & \\ b_{11}^p & \cdots & b_{1t}^p & \cdots & b_{r1}^p & \cdots & b_{rt}^p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\left[\left[\left(Row_i(A)\right)^1 \cdots \left(Row_i(A)\right)^p\right]\ltimes\begin{bmatrix}\left(Col_1(B)\right)^1\\ \vdots \\ \left(Col_1(B)\right)^p\end{bmatrix} \cdots \left[\left(Row_i(A)\right)^1 \cdots \left(Row_i(A)\right)^p\right]\ltimes\begin{bmatrix}\left(Col_{rt}(B)\right)^1\\ \vdots \\ \left(Col_{rt}(B)\right)^p\end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\sum_{l=1}^{p}\left(Row_i(A)\right)^l \ltimes \left(Col_1(B)\right)^l \;\cdots\; \sum_{l=1}^{p}\left(Row_i(A)\right)^l \ltimes \left(Col_{rt}(B)\right)^l\right]$$

$$(A\ltimes B)\ltimes C=\left[(A\ltimes B)\ltimes Col_1(C) \;\cdots\; (A\ltimes B)\ltimes Col_s(C)\right]$$

$$(A\ltimes B)\ltimes Col_h(C)=(A\ltimes B)\ltimes\begin{bmatrix}c_{1h}\\ \vdots \\ c_{rh}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} c_{jh}\left(Row_i(A)\right)^l\left(Col_1(B)\right)^l \;\cdots\; \sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} c_{jh}\left(Row_i(A)\right)^l\left(Col_{rt}(B)\right)^l\right]$$

$$LHS: B\ltimes C=\begin{bmatrix} b_{11}^1 & \cdots & b_{1q}^1 & \cdots & b_{r1}^1 & \cdots & b_{rt}^1\\ & & & \vdots & & & \\ b_{11}^p & \cdots & b_{1q}^p & \cdots & b_{r1}^p & \cdots & b_{rt}^p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}c_{1h}\\ \vdots \\ c_{rh}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(Col_1(B)\right)^1 & \cdots & \left(Col_{rt}(B)\right)^1\\ & \vdots & \\ \left(Col_1(B)\right)^p & \cdots & \left(Col_{rt}(B)\right)^p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}c_{1h}\\ \vdots \\ c_{rh}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p} c_{jh}\left(Col_1(B)\right)^l \;\cdots\; \sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\sum_{r=1}^{p} c_{jh}\left(Col_{rt}(B)\right)^l\right]$$

$$A \ltimes (B \ltimes C) = \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes (B \ltimes C) \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes (B \ltimes C) \end{bmatrix}$$

$$Row_i\left(A \ltimes (B \ltimes C)\right) = Row_i(A) \ltimes (B \ltimes C)$$

$$= \left[Row_i(A) \ltimes Col_1(B \ltimes C) \ \cdots \ Row_i(A) \ltimes Col_{rt}(B \ltimes C) \right]$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{p} \left(Row_i(A)\right)^l \ltimes \left(Col_1(B \ltimes C)\right)^r \ \cdots \ \sum_{l=1}^{p} \left(Row_i(A)\right)^l \ltimes \left(Col_{rt}(B \ltimes C)\right)^r \right]$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{p} c_{jh} \left(Row_i(A)\right)^l \left(Col_1(B)\right)^l \ \cdots \ \sum_{h=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{p} c_{jh} \left(Row_i(A)\right)^l \left(Col_{rt}(B)\right)^l \right]$$

$LHS = RHS$

ทฤษฎีบท 3.18. สมบัติเชิงเส้นคู่ (bilinearity)

$$A \ltimes (\alpha B + \beta C) = \alpha (A \ltimes B) + \beta (A \ltimes C)$$

$$(\alpha B + \beta C) \ltimes A = \alpha (B \ltimes A) + \beta (C \ltimes A)$$

สำหรับทุกเมทริกซ์ A,B,C ที่ทำให้ผลบวกและผลคูณกึ่งเทนเซอร์ดังกล่าวนิยามได้และ

สำหรับทุก $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B, C \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ โดยที่ $n|p$ หรือ $p|n$

จากบทนิยาม 3.11. ถ้า $n|p$ หรือ $p|n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
A \ltimes (\alpha B + \beta C) &= \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes (\alpha B + \beta C) \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes (\alpha B + \beta C) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes (\alpha B) + Row_1(A) \ltimes (\beta C) \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes (\alpha B) + Row_m(A) \ltimes (\beta C) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes (\alpha B) \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes (\alpha B) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Row_1(A) \ltimes (\beta C) \\ \vdots \\ Row_m(A) \ltimes (\beta C) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha (Row_1(A) \ltimes B) \\ \vdots \\ \alpha (Row_m(A) \ltimes B) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta (Row_1(A) \ltimes C) \\ \vdots \\ \beta (Row_m(A) \ltimes C) \end{bmatrix} \\
&= \alpha (A \ltimes B) + \beta (A \ltimes C)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B, C \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ ซึ่ง $q|m$ หรือ $m|q$ จะได้ $(\alpha B + \beta C) \ltimes A = \alpha (B \ltimes A) + \beta (C \ltimes A)$

3.5 ความสัมพันธ์ของผลคูณกึ่งเทนเซอร์กับผลคูณโครเนคเคอร์

ทฤษฎีบท 3.19. ให้ $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = X \otimes Y$$

พิสูจน์ ให้ $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

เขียน $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{C}), Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

จากบทนิยามที่ 3.11.จะได้

$$X \ltimes Y = \begin{bmatrix} Row_1(X) \ltimes Y \\ \vdots \\ Row_m(X) \ltimes Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ \vdots \\ x_m \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_1 y_n \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ \vdots \\ x_m y_n \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $$\mathrm{X} \otimes Y = \begin{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ \vdots \\ x_m \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_1 y_n \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ \vdots \\ x_m y_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $X \ltimes Y = X \otimes Y$

ทฤษฎีบท 3.20. ให้ $W \in M_{1,m}(\mathbb{C})$ และ $Z \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$W \ltimes Z = Z \otimes W$$

พิสูจน์ ให้ $W \in M_{1,m}(\mathbb{C})$ และ $Z \in M_{1,n}(\mathbb{C})$

เขียน $W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$

จากบทตั้ง 3.14.จะได้ว่า

$$\begin{aligned} W \ltimes Z &= \left[W \ltimes Col_1(Z) \;\; \cdots \;\; W \ltimes Col_n(Z) \right] \\ &= \left[[W_1, \cdots, W_m] \ltimes [z_1] \;\; \cdots [W_1 \;\; \cdots W_m] \ltimes [z_n] \right] \\ &= \begin{bmatrix} w_1 z_1 & \cdots & w_m z_1 & \cdots & w_1 z_n & \cdots & w_m z_n \end{bmatrix} \\ &= Z \otimes W \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.21. ให้ $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), Y \in M_{q,1}(\mathbb{C})$ และ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $(AX) \ltimes (BY) = (A \otimes B)(X \ltimes Y)$

พิสูจน์ ให้ $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}), Y \in M_{q,1}(\mathbb{C})$ และ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}, BY = \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + \cdots + b_{1q}y_q \\ \vdots \\ b_{q1}y_1 + \cdots + b_{pq}y_q \end{bmatrix}$

$$(AX) \ltimes (BY) = \begin{bmatrix} [a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n] \ltimes \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + \cdots + b_{1q}y_q \\ \vdots \\ b_{q1}y_1 + \cdots + b_{pq}y_q \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n] \ltimes \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + \cdots + b_{1q}y_q \\ \vdots \\ b_{q1}y_1 + \cdots + b_{pq}y_q \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\left(a_{11}x_1+\ \cdots\ +a_{1n}x_n\right)\left(b_{11}y_1+\ \cdots\ +b_{1q}y_q\right)\\
\vdots\\
\left(a_{11}x_1+\ \cdots\ +a_{1n}x_n\right)\left(b_{q1}y_1+\ \cdots\ +b_{pq}y_q\right)\\
\vdots\\
\left(a_{11}x_1+\ \cdots\ +a_{mn}x_n\right)\left(b_{11}y_1+\ \cdots\ +b_{1q}y_q\right)\\
\vdots\\
\left(a_{m1}x_1+\ \cdots\ +a_{mn}x_n\right)\left(b_{q1}y_1+\ \cdots\ +b_{pq}y_q\right)
\end{bmatrix}
$$

จะเห็นว่า $A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{q1} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix}$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{11}b_{q1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{q1} & \cdots & a_{1n}b_{pq}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{n} & \cdots & a_{mn}b_{1q}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1}b_{q1} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{q1} & \cdots & a_{mn}b_{pq}
\end{bmatrix}
$$

$$
X\ltimes Y=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix}\\ \vdots\\ x_n\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1y_1\\ \vdots\\ x_1y_q\\ \vdots\\ x_ny_1\\ \vdots\\ x_ny_q\end{bmatrix}
$$

$$
\left(A\otimes B\right)\left(X\ltimes Y\right)=\begin{bmatrix}
a_{11}b_{11}x_1y_1+\ \cdots\ +a_{11}b_{1q}x_1y_q+\ \cdots\ +a_{1n}b_{11}x_ny_1+\ \cdots\ +a_{1n}b_{1q}x_ny_q\\
\vdots\\
a_{11}b_{q1}x_1y_1+\ \cdots\ +a_{11}b_{pq}x_1y_q+\ \cdots\ +a_{1n}b_{q1}x_ny_1+\ \cdots\ +a_{1n}b_{pq}x_ny_q\\
\vdots\\
a_{m1}b_{11}x_1y_1+\ \cdots\ +a_{m1}b_{1q}x_1y_q+\ \cdots\ +a_{mn}b_{11}x_ny_1+\ \cdots\ +a_{mn}b_{1q}x_ny_q\\
\vdots\\
a_{m1}b_{q1}x_1y_1+\cdots+a_{m1}b_{pq}x_1y_q+\cdots+a_{mn}b_{q1}x_ny_1+\cdots+a_{mn}b_{pq}x_ny_q
\end{bmatrix}
$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}x_1+ \cdots +a_{1n}x_n)(b_{11}y_1+ \cdots +b_{1q}y_q) \\ \vdots \\ (a_{11}x_1+ \cdots +a_{1n}x_n)(b_{q1}y_1+ \cdots +b_{pq}y_q) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1+ \cdots +a_{mn}x_n)(b_{11}y_1+ \cdots +b_{1q}y_q) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1+ \cdots +a_{mn}x_n)(b_{q1}y_1+ \cdots +b_{pq}y_q) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(AX)\ltimes(BY)=(A\otimes B)(X\ltimes Y)$

ทฤษฎีบท 3.22. ให้ $W\in M_{1,m}(\mathbb{C}), Z\in M_{1,p}(\mathbb{C})$ และ $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{p,q}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $(WA)\ltimes(ZB)=(W\ltimes Z)(B\otimes A)$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m,n}$ สำหรับ $i=1,2, \cdots ,m, j=1,2, \cdots ,n$

$B=\left[b_{ij}\right]_{p,q}$ สำหรับ $i=1,2, \cdots ,p, j=1,2, \cdots ,q$

$W=\left[w_1 \ \cdots \ w_m\right], Z=\left[z_1 \ \cdots \ z_p\right]$

จะได้ $WA=\left[w_1 \ \cdots \ w_m\right]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$

$$=\left[a_{11}w_1+ \cdots +a_{m1}w_m \ \cdots \ a_{1n}w_1+ \cdots +a_{mn}w_m\right]$$

$$ZB=\left[z_1 \ \cdots \ z_p\right]\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix}$$

$$=\left[b_{11}z_1+ \cdots +b_{p1}z_p \ \cdots \ b_{1q}z_1+ \cdots +b_{pq}z_p\right]$$

$$(WA)\ltimes(ZB)$$
$$=\Big[\big(a_{11}w_1+\ \cdots\ +a_{m1}w_m\ \ \cdots\ \ a_{1n}w_1+\ \cdots\ +a_{mn}w_m\big)\ltimes\big(b_{11}z_1+\ \cdots\ +b_{p1}z_p\big)\ldots$$
$$\big(a_{11}w_1+\ \cdots\ +a_{m1}w_m\ \ \cdots\ \ a_{1n}w_1+\ \cdots\ +a_{mn}w_m\big)\ltimes\big(b_{1q}z_1+\ \cdots\ +b_{pq}z_p\big)\Big]$$
$$=\Big[\big(a_{11}w_1+\ \cdots\ +a_{m1}w_m\big)\big(b_{11}z_1+\ \cdots\ +b_{p1}z_p\big)\ \cdots\ \big(a_{1n}w_1+\ \cdots\ +a_{mn}w_m\big)$$
$$\big(b_{11}z_1+\ \cdots\ +b_{p1}z_p\big)\ \cdots\ \big(a_{11}w_1+\ \cdots\ +a_{m1}w_m\big)\big(b_{1q}z_1+\ \cdots\ +b_{pq}z_p\big)\ \cdots$$

$$W\ltimes Z=\begin{bmatrix}w_1 & \cdots & w_m\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}z_1 & \cdots & z_m\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}w_1z_1 & \cdots & w_mz_1 & \cdots & w_1z_p & \cdots & w_mz_p\end{bmatrix}$$

$$B\otimes A=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1q}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1} & \cdots & b_{pq}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11}a_{11} & \cdots & b_{11}a_{1n} & \cdots & b_{1q}a_{11} & \cdots & b_{1q}a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{11}a_{m1} & \cdots & b_{11}a_{mn} & \cdots & b_{1q}a_{m1} & \cdots & b_{1q}a_{mn}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1}a_{11} & \cdots & b_{p1}a_{1n} & \cdots & b_{pq}a_{11} & \cdots & b_{pq}a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1}a_{m1} & \cdots & b_{p1}a_{mn} & \cdots & b_{pq}a_{m1} & \cdots & b_{pq}a_{mn}\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(W\ltimes Z)(B\otimes A)$

$$=\begin{bmatrix}w_1z_1 & \cdots & w_mz_1 & \cdots & w_1z_p & \cdots & w_mz_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}a_{11} & \cdots & b_{11}a_{1n} & \cdots & b_{1q}a_{11} & \cdots & b_{1q}a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{11}a_{m1} & \cdots & b_{11}a_{mn} & \cdots & b_{1q}a_{m1} & \cdots & b_{1q}a_{mn}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1}a_{11} & \cdots & b_{p1}a_{1n} & \cdots & b_{pq}a_{11} & \cdots & b_{pq}a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{p1}a_{m1} & \cdots & b_{p1}a_{mn} & \cdots & b_{pq}a_{m1} & \cdots & b_{pq}a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\Big[w_1 z_1 b_{11} a_{11} + \cdots + w_m z_1 b_{11} a_{m1} \; \cdots \; w_1 z_p b_{p1} a_{11} + \cdots + w_m z_p b_{p1} a_{m1} \; \cdots$$

$$w_1 z_1 b_{11} a_{1n} + \cdots + w_m z_1 b_{11} a_{mn} \; \cdots \; w_1 z_p b_{p1} a_{1n} + \cdots + w_m z_p b_{p1} a_{mn} \; \cdots$$

$$w_1 z_1 b_{1q} a_{11} + \cdots + w_m z_1 b_{1q} a_{m1} \; \cdots \; w_1 z_p b_{pq} a_{11} + \cdots + w_m z_p b_{pq} a_{m1} \; \cdots$$

$$w_1 z_1 b_{1q} a_{1n} + \cdots + w_m z_1 b_{1q} a_{mn} \; \cdots \; w_1 z_p b_{pq} a_{1n} + \cdots + w_m z_p b_{pq} a_{mn} \Big]$$

$$=\Big[(a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m)(b_{11} z_1 + \cdots + b_{p1} z_p) \; \ldots \; (a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m)$$

$$(b_{11} z_1 + \cdots + b_{p1} z_p) \; \ldots \; (a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m)(b_{1q} z_1 + \cdots + b_{pq} z_p) \; \cdots$$

$$(a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m)(b_{1q} z_1 + \cdots + b_{pq} z_p) \Big]$$

ดังนั้น $(WA) \ltimes (ZB) = (W \ltimes Z)(B \otimes A)$

ทฤษฎีบท 3.23. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ โดยที่ $n|p$ หรือ $p|n$ จะได้ว่า

$$(A \ltimes B)^T = B^T \ltimes A^T$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ โดยที่ $n|p$ หรือ $p|n$

บล็อคที่ (i, j) ของ $(A \ltimes B)$ คือ $Row_i(A) \ltimes Col_j(B)$

บล็อคที่ (i, j) ของ $(A \ltimes B)^{\mathrm{T}}$ = (บล็อกที่ (j, i) ของ $A \ltimes B)^{\mathrm{T}}$

$$= \left(Row_j(A) \ltimes Col_i(B)\right)^T$$

$$= \left(Col_i(B)\right)^T \ltimes \left(Row_j(A)\right)^T \text{ (โดยบทตั้ง3.2)}$$

$$= Row_i\left(B^T\right) \ltimes Col_j\left(A^T\right)$$

$$= \text{บล็อกที่ } (i, j) \text{ ของ } B^T \ltimes A^T$$

ดังนั้น $(A \ltimes B)^T = B^T \ltimes A^T$

บทตั้ง 3.24. ให้ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{p,1}(\mathbb{C})$

1.) ถ้า $n = tp$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}$ แล้ว $X \ltimes Y = X(Y \otimes I_t)$

2.) ถ้า $nt = p$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}$ แล้ว $X \ltimes Y = (X \otimes I_t)Y$

พิสูจน์ 1) สมมติ $X \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{p,1}(\mathbb{C})$ $n = pt$

พิจารณา
$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \end{bmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{C})$$
$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{p1} \end{bmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{C})$$
จะได้ว่า

$$X \ltimes Y = \left[x_{11} \quad x_{12} \quad \cdots \quad x_{1t} \vdots x_{1,t+1} \quad x_{1,t+2} \quad \cdots \quad x_{1,2t} \vdots \cdots \vdots x_{1,(p-1)t+1} \quad x_{1,(p-1)t+2} \quad \cdots \quad x_{pt} \right] \ltimes \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{p1} \end{bmatrix}$$

$$= y_{11}\left[x_{11} x_{12} \quad \cdots \quad x_{1t} \right] + y_{21}\left[x_{1,t+1} x_{1,t+2} \quad \cdots \quad x_{1,2t} \right] + \cdots + y_{p1}\left[x_{1,(p-1)t+1} x_{1,(p-1)t+2} \quad \cdots \quad x_{pt} \right]$$

$$= [y_{11}x_{11} + y_{21}x_{1t+1} + \cdots + y_{p1}x_{1,(p-1)t+1} \quad y_{11}x_{12} + y_{21}x_{1,t+2} + \cdots + y_{p1}x_{1,(p-1)t+2} \quad \cdots$$
$$y_{11}x_{1t} + y_{21}x_{1,2t} + \cdots + y_{p1}x_{pt}]$$

$$=\left[x_{11}x_{12}\ \cdots\ x_{1t}x_{1,t+1}\ \ x_{1,t+2}\ \cdots\ x_{1,2t}\ \cdots\ x_{1,(p-1)t+1}\ \ x_{1,(p-1)t+2}\ \cdots\ x_{pt}\right]$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & y_{11} \\ y_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{p1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & y_{p1} \end{bmatrix}$$

$$=X\left(\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{p1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)=X\left(Y\otimes I_t\right)$$

2.) กรณีที่ $nt = p$ สำหรับบาง $t \in \mathrm{N}$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ 1.)

ทฤษฎีบท 3.25. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$

1.) ถ้า $n = tp$ แล้ว $A \ltimes B = A\left(B \otimes I_t\right)$

2.) ถ้า $nt = p$ แล้ว $A \ltimes B = \left(A \otimes I_t\right)B$

พิสูจน์ 1.) ให้ $nt = p$ และ $A \ltimes B = A(B \otimes I_t)$ โดยที่ $p|n$ นั่นคือมี $t \in N$ ซึ่ง $n = pt$

เขียน $A=\begin{bmatrix} Row_1(A) \\ Row_2(A) \\ \vdots \\ Row_m(A) \end{bmatrix}$ และ $B=\left[Col_1(B)\ \ Col_2(B)\ \ \cdots\ \ Col_q(B)\right]$

จะได้ว่า $A \ltimes B = \begin{bmatrix} Row_1(A) \\ Row_2(A) \\ \vdots \\ Row_m(A) \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} Col_1(B) & Col_2(B) & \cdots & Col_q(B) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} Row_1(A)\ltimes Col_1(B) & Row_1(A)\ltimes Col_2(B) & \cdots & Row_1(A)\ltimes Col_q(B) \\ Row_2(A)\ltimes Col_1(B) & Row_2(A)\ltimes Col_2(B) & \cdots & Row_2(A)\ltimes Col_q(B) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Row_m(A)\ltimes Col_1(B) & Row_m(A)\ltimes Col_2(B) & \cdots & Row_m(A)\ltimes Col_q(B) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Row_1(A)\left(Col_1(B)\otimes I_t\right) & Row_1(A)\left(Col_2(B)\otimes I_t\right) & \cdots & Row_1(A)\left(Col_q(B)\otimes I_t\right) \\ Row_2(A)\left(Col_1(B)\otimes I_t\right) & Row_2(A)\left(Col_2(B)\otimes I_t\right) & \cdots & Row_2(A)\left(Col_q(B)\otimes I_t\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Row_m(A)\left(Col_1(B)\otimes I_t\right) & Row_m(A)\left(Col_2(B)\otimes I_t\right) & \cdots & Row_m(A)\left(Col_q(B)\otimes I_t\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Row_1(A) \\ Row_2(A) \\ \vdots \\ Row_m(A) \end{bmatrix}\left(Col_1(B)\otimes I_t\right) & \cdots & \begin{bmatrix} Row_1(A) \\ Row_2(A) \\ \vdots \\ Row_m(A) \end{bmatrix}\left(Col_q(B)\otimes I_t\right) \end{bmatrix}$$

$$= \left[A\left(Col_1(B)\otimes I_t\right) \quad \cdots \quad A\left(Col_q(B)\otimes I_t\right) \right]$$

$$= \left[A\left(Col_1(B\otimes I_t)\right) \quad \cdots \quad A\left(Col_q(B\otimes I_t)\right) \right]$$

$$= A\left[Col_1(B\otimes I_t) \quad \cdots \quad Col_q(B\otimes I_t) \right]$$

$$= A\left(B\otimes I_t\right)$$

ทฤษฎีบท 3.26. ให้ $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_p(\mathbb{C})$ โดยที่ $n|p$ หรือ $p|n$

ถ้า A และ B หาผกผันได้ แล้ว $A \ltimes B$ หาผกผันได้แล้ว โดยที่

$(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}$

พิสูจน์ 1) ให้ $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_p(\mathbb{C})$ สมมติว่า $n|p$ นั่นคือมี $t \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $p = nt$

โดยทฤษฎีบท2.13. จะได้ว่า $A \otimes I_t$ หาผกผันได้ได้โดยที่ $(A \otimes I_t)^{-1} = A^{-1} \otimes I_t$

เนื่องจาก $A \otimes I_t$ และ B หาผกผันได้ จะได้ว่า $(A \otimes I_t)B$ หาผกผันได้

จากทฤษฎีบท3.25 2) $A \ltimes B = (A \otimes I_t)B$

จะได้ว่า $A \ltimes B$ หาผกผันได้ และ $(A \ltimes B)^{-1} = ((A \otimes I_t)B)^{-1}$

$$= B^{-1}(A \otimes I_t)^{-1}$$

$$= B^{-1}(A^{-1} \otimes I_t) \text{ (โดยทฤษฎีบท2.13.)}$$

$$= B^{-1} \ltimes A^{-1}$$

พิสูจน์ 2) สมมติ $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_p(\mathbb{C})$ สมมติว่า $p|n$ นั่นคือมี $t \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = tp$

โดยทฤษฎีบท2.13. จะได้ว่า $B \otimes I_t$ หาผกผันได้ได้โดยที่ $(B \otimes I_t)^{-1} = B^{-1} \otimes I_t$

เนื่องจาก $B \otimes I_t$ และ A หาผกผันได้ จะได้ว่า $A(B \otimes I_t)$ หาผกผันได้

จากทฤษฎีบท 3.25. 1) $(A \ltimes B)^{-1} = (A(B \otimes I_t))^{-1}$

$$= (B \otimes I_t)^{-1} A^{-1}$$

$$= (B^{-1} \otimes I_t) A^{-1}$$

$$= B^{-1} \ltimes A^{-1}$$

นั่นคือ $(A \ltimes B)^{-1} = B^{-1} \ltimes A^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.27. ให้ $A \in M_{m,pn}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$A \ltimes I_n = A$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,pn}(\mathbb{C})$

จากทฤษฎีบท 3.25. $A \ltimes I_n = A\left(I_n \otimes I_p\right)$

$$= A\left(I_{np}\right) \quad = A$$

ทฤษฎีบท 3.28. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$A \ltimes I_{pn} = A \otimes I_p$$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

จากทฤษฎีบท 3.25. $A \ltimes I_{pn} = \left(A \otimes I_p\right) I_{pn}$

$$= A \otimes I_p$$

ทฤษฎีบท 3.29. ให้ $A \in M_{pm,n}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $I_p \ltimes A = A$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{pm,n}(\mathbb{C})$

จาก ทฤษฎีบทที่3.25. $I_p \ltimes A = \left(I_p \otimes I_m\right) A$

$$= \left(I_{pm}\right) A \quad = A$$

ทฤษฎีบท 3.30. ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

จะได้ว่า $I_{pm} \ltimes A = A \otimes I_p$

พิสูจน์ ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

จากทฤษฎีบท 3.25. $I_{pm} \ltimes A = I_{pm}\left(A_{m,n} \otimes I_p\right)$

$$= A \otimes I_p$$

3.6 สมมติของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์สับเปลี่ยน

บทนิยาม 3.31. เมทริกซ์สับเปลี่ยน $W_{[m,n]}$ คือเมทริกซ์ขนาด $mn \times mn$ ซึ่งมีชื่อแนวตั้งเป็น $(11,12,...,1n,...,m1,m2,...,mn)$ และชื่อแถวเป็น $(11,21,...,m1,...,1n,2n,...,mn)$ โดยแต่ละสมาชิกที่อยู่ในแนวตั้ง IJ และอยู่ในแถว ij กำหนดโดย

$$\delta_{ij}^{IJ} = \begin{cases} 1, I=i \text{ and } J=j \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.32. ให้ $m = 2$ และ $n = 3$ สามารถเขียนเมทริกซ์สับเปลี่ยน $W_{[2,3]}$ ได้โดย

$$W_{[2,3]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (11) \\ (21) \\ (12) \\ (22) \\ (13) \\ (23) \end{array}$$

ทฤษฎีบท 3.33. ให้ $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y = Y \ltimes X$$

พิสูจน์ ให้ $X \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ และ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$

จากทฤษฎีบท 3.25. $W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y = W_{[m,n]}(X \otimes I_n)Y$

$$
= W_{[m,n]} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_1 \\ & & \vdots & \\ x_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{bmatrix} Y
$$

$$
= \begin{bmatrix} W_{[m,n]} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & W_{[m,n]} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ x_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_m & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & x_1 \\ 0 & & x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_1 \\ \vdots \\ x_m y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_m y_2 \\ \vdots \\ x_1 y_n \\ x_2 y_n \\ \vdots \\ x_m y_n \end{bmatrix} = Y \ltimes X
$$

บทที่4

การดำเนินการทางตรรกศาสตร์และผลคูณกึ่งเทนเซอร์

ในบทนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าการดำเนินการต่างๆทางตรรกศาสตร์สามารถแทนได้ด้วยผลกึ่งเทนเซอร์ระหว่างเมทริกซ์ที่แทนการดำเนินการนั้นกับเวกเตอร์ค่าความจริงของประพจน์ที่พิจารณา

4.1 การดำเนินการทางตรรกศาสตร์

การดำเนินการทางตรรกศาสตร์สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทดังนี้

1.) การดำเนินการเอกภาค(unary operation) ได้แก่ การดำเนินการนิเสธ (NOT) โดยนิเสธของประพจน์ x เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ x เขียนแทนด้วย $\neg x$

ตาราง 4.2. ตารางค่าความจริงของนิเสธ

x	$\neg x$
T	F
F	T

2.) การดำเนินการทวิภาค (binary operation) ได้แก่ $AND, OR, IF \ldots THEN, IFF, EOR, NAND, NOR$ โดยแต่ละการดำเนินการมีสัญลักษณ์ที่ใช้และมีค่าความจริงดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.3. ตารางค่าความจริงของ $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\vee}, \uparrow, \downarrow$

x	y	AND	OR	IF...THEN	IFF	EOR	NAND	NOR
		$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \bar{\vee} y$	$x \uparrow y$	$x \downarrow y$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T	F	F	T

ฟังก์ชันทางตรรกศาสตร์สามารถนำเขียนเป็นตารางค่าความจริงโดยใช้ตัวดำเนินการพื้นฐานเราจะแสดงดังตัวอย่างนี้

ตัวอย่าง 4.4. 1) ให้ $f(x,y)=x\vee(\neg y)$ จะได้ตารางค่าความจริงของ f ดังตาราง 4.5

2) ให้ $g(x,y)=(x\wedge y)\leftrightarrow(\neg z)$ จะได้ตารางค่าความจริงของ g ดังตาราง 4.6

ตารางที่ 4.5 (ตารางค่าความจริงของ f)

x	y	$\neg y$	$f=x\vee(\neg y)$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

ตารางที่ 4.6. (ตารางค่าความจริงของ g)

x	y	z	$x\wedge y$	$\neg z$	$g=(x\wedge y)\leftrightarrow(\neg z)$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F

4.2 การแทนดำเนินการทางตรรกศาสตร์ด้วยผลคูณกึ่งเทนเซอร์

สัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์และเมทริกซ์ที่เราจะใช้มีดังนี้

1.) δ_n^i แทนแนวตั้งที่ i ของ I_n สำหรับแต่ละ $i=1,\ldots,n$

2.) $\Delta_n=\{Col_i(I_n)\mid i=1,2,..,n\}=\{\delta_n^1,\delta_n^2,\ \cdots,\delta_n^n\}$

$$\Delta:=\Delta_2=\{\delta_2^1,\delta_2^2\}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

3.) Δ^r แทน $\Delta\times\Delta\ \ldots\ \times\Delta$ (r พจน์) สำหรับแต่ละ $r\in\mathbb{N}$

ดังนั้น $(x_1,x_2,\ldots,x_r)\in\Delta^r$ ก็ต่อเมื่อ $x_i\in\Delta$ สำหรับทุก $i=1,2,\ldots,r$

4.) เราเขียนแทนเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} \delta_n^{i_1} & \delta_n^{i_2} & \cdots & \delta_n^{i_m} \end{bmatrix}$ ด้วย $\delta_n \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{bmatrix}$ เมื่อ $m,n \in \mathbb{N}$ และ

$i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ \ldots, n\}$ เช่น

$$\delta_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2^2 & \delta_2^1 & \delta_2^1 & \delta_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เราจะแทนค่าความจริงทางตรรกศาสตร์ด้วยเวกเตอร์ดังนี้

$$T = \delta_2^1 \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \delta_2^2 \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 4.7. ให้ $f : \Delta^r \to \Delta$ เป็นฟังก์ชันและให้ V_f เป็นแนวตั้งของ f ที่ได้จากตารางค่าความจริง เราเรียก V_f ว่าเวกเตอร์ตารางค่าความจริงของ f

ตัวอย่าง 4.8. 1) พิจารณา $f(x,y) = x \vee (\neg y)$ ตามตารางที่ 4.5 จะได้ว่า

$$V_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

2) พิจารณา $g = (x,y,z) = x \wedge y \leftrightarrow (\neg z)$ ตามตาราง 4.6 จะได้ว่า

$$V_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

เราสนใจฟังก์ชันในส่งจาก Δ^r ไปยัง Δ ว่าจะสามารถแทนด้วยเมทริกซ์ได้อย่างไร

บทนิยาม 4.9. ให้ $f : \Delta^r \to \Delta$ เราเรียกเมทริกซ์ $M_f \in M_{2,2^r}(\mathbb{C})$ ว่า

เมทริกซ์โครงสร้าง (structure matrix) ของ f ก็ต่อเมื่อ

$f(x_1, \ldots, x_r) = M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r$ สำหรับทุก $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \Delta^r$

ทฤษฎีบท 4.10. แต่ละฟังก์ชัน $f:\Delta^r \to \Delta$ จะมีเมทริกซ์โครงสร้าง $M_f \in M_{2,2^r}(\mathbb{C})$ เพียงแบบเดียว

พิสูจน์ พิจารณาตารางค่าความจริงของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ f ในกรณีต่างๆ โดยเรียงตามรูปแบบมาตรฐานของตารางค่าความจริง เราสร้างเมทริกซ์ $M_f \in M_{2,2^r}(\mathbb{C})$ โดย M_f มีแถวที่1 เป็น V_f^T และมีแถวที่2 เป็นนิเสธของแถวที่1

แบ่ง M_f เป็น $\begin{bmatrix} M_f^{(1)} & M_f^{(2)} \end{bmatrix}$ เมื่อ $M_f^{(1)}, M_f^{(2)} \in M_{2,2^{r-1}}(\mathbb{C})$ จะเห็นว่า

$$M_f \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = M_f^{(1)} \quad \text{และ} \quad M_f \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = M_f^{(2)}$$

สังเกตว่า $M_f \ltimes x \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ สำหรับ $x \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ดังนั้น $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r$ จะได้ผลลัพธ์เป็น $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยจะเป็นแนวตั้งที่สอดคล้องกับค่าความจริงที่ได้จาก $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ตามตารางค่าความจริง

นั่นคือ $f(x_1, \ldots, x_r) = M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r$

สมมติว่ามี $M_f \in M_{2,2^r}(\mathbb{C})$ ซึ่ง $f(x_1, \ldots, x_r) = M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r$ สำหรับทุก $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ จะได้ว่า

แนวตั้งที่1 ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1, \ldots, x_r)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

แนวตั้งที่2 ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1, \ldots, x_r)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

แนวตั้งที่3 ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_{r-2}, x_r = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ

$x_{r-1} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

แนวตั้งที่ 2^r ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_r = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

นั่นคือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes x_2 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$

ดังนั้น เมทริกซ์ M_f ดังกล่าวมีเพียงแบบเดียวเท่านั้น

เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ต่างๆสามารถหาได้โดยทฤษฎีบท4.11 ดังนี้

1.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ NOT คือ $M_{\neg} = \delta_2[2 \quad 1] = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

2.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ AND คือ $M_{\wedge} = \delta_2[1 \quad 2 \quad 2 \quad 2] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

3.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ OR คือ $M_{\vee} = \delta_2[1 \quad 1 \quad 1 \quad 2] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

4.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ $IF \ldots THEN$ คือ

$M_{\rightarrow} = \delta_2[1 \quad 2 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

5.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ IFF คือ $M_{\leftrightarrow} = \delta_2[1 \quad 2 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

6.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ EOR คือ $M_{\bar{\vee}} = \delta_2[2 \quad 1 \quad 1 \quad 2] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ $NAND$ คือ $M_{\uparrow} = \delta_2[2 \quad 1 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

8.) เมทริกซ์โครงสร้างของตัวดำเนินการ NOR คือ $M_{\downarrow} = \delta_2[2 \quad 2 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

บทนิยาม 4.11. สำหรับแต่ละ $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ และ $k \in \mathbb{N}$ เรานิยาม

$$x^k = \underbrace{x \ltimes x \ltimes \cdots \ltimes x}_{k}$$

บทแทรก 4.12. สำหรับแต่ละ $x \in \Delta$ จะได้ว่า

$$x^2 = M_r \ltimes x$$

เมื่อ $M_r = \delta_4[1 \quad 4]$

พิสูจน์ ให้ $x \in \Delta$ เป็นตัวแปรทางตรรกศาสตร์

เขียน $M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่1 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $M_r \ltimes x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x \ltimes x = x^2$

กรณีที่2 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $M_r \ltimes x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x \ltimes x = x^2$

บทที่5

การสรุปผลทางตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์

ในบทนี้เราจะประยุกต์สมบัติของผลคูณกึ่งเทนเซอร์ในการสรุปผลทางตรรกศาสตร์

5.1 การสรุปผลทางตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์

ทฤษฎีบท 5.1. ให้ P และ Q เป็นประพจน์โดยมีความจริง แทนด้วยเวกเตอร์ x และ y ตามลำดับ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $P \Rightarrow Q$

(2) ถ้า $y = \delta_2^2$ แล้ว $x = \delta_2^2$

พิสูจน์ $(2) \Rightarrow (1)$ สมมติว่าถ้า $y = \delta_2^1$ แล้ว $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$ เมื่อ $\alpha = \{0,1\}$ จะพิสูจน์โดยการแบ่งกรณีของค่าความจริงของ y

กรณีที่ $y = \delta_2^1$ พิจารณา $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$ จะได้

$$x \to y = M_{\to} \ltimes x \ltimes y$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \delta_2^1$$

กรณีที่ $y = \delta_2^2$ โดยสมมติฐาน จะได้ว่า $x = \delta_2^2$ ดังนั้น

$$x \to y = M_{\to} \ltimes x \ltimes y$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \delta_2^1$$

จากทั้งสองกรณี เราสรุปได้ว่า $x \rightarrow y$ เป็นจริงในทุกกรณี นั่นคือ $P \Rightarrow Q$

$(1) \Rightarrow (2)$ ใช้บทแย้งสลับที่

สมมติ $y = \delta_2^2$ แต่ $x = \delta_2^1$ จะได้

$$x \rightarrow y = M_{\rightarrow} \ltimes x \ltimes y$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \delta_2^2$$

นั่นคือ ไม่จริงที่ $P \Rightarrow Q$

5.2 ตัวอย่างการสรุปผลทางตรรกศาสตร์

ตัวอย่าง 5.1. $x \wedge y \Rightarrow x$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS: x

กรณีที่1 $p=0$ จะได้ $x=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่2 $p=1$ จะได้ $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณาที $p=0$ เท่านั้น

LHS: $x \wedge y \quad = M_{\wedge} \ltimes x \ltimes y$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix}pq\\p(1-q)\\(1-p)q\\(1-p)(1-q)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}pq\\1-pq\end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $q=0$ จะได้ $x \wedge y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่2 $q=1$ จะได้ $x \wedge y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $x \wedge y \Rightarrow x$

ตัวอย่าง5.2. $x \wedge y \Rightarrow y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS : y ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ $y = \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$

กรณีที่1 $q=0$ จะได้ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่2 $q=1$ จะได้ $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $q=0$ เท่านั้น

LHS: $x \wedge y \;\; = M_{\wedge} \ltimes x \ltimes y$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} pq \\ p(1-q) \\ (1-p)q \\ (1-p)(1-q) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pq \\ 1-pq \end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $p=0$ จะได้ $x \wedge y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่2 $p=1$ จะได้ $x \wedge y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $x \wedge y \Rightarrow y$

ตัวอย่าง5.3. $x \Rightarrow x \vee y$

$$\text{ให้ } x = (p, 1-p)^T, y = (q, 1-q)^T \text{ เมื่อ } p, q \in \{0,1\}$$

RHS : $x \vee y \ = M_{\vee} \ltimes x \ltimes y$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} pq \\ p(1-\mathrm{q}) \\ (1-\mathrm{p})\mathrm{q} \\ (1-\mathrm{p})(1-\mathrm{q}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pq + p(1-\mathrm{q}) + (1-\mathrm{p})\mathrm{q} \\ (1-\mathrm{p})(1-\mathrm{q}) \end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $p=0, q=0$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่2 $p=0, q=1$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กรณีที่3 $p=1, q=0$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ กรณีที่4 $p=1, q=1$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $p=0, q=0$ เท่านั้น

LHS : x ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ $x = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $x \Rightarrow x \vee y$

ตัวอย่าง 5.4. $y \Rightarrow x \vee y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS : $x \vee y \quad = M_{\vee} \ltimes x \ltimes y$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} pq \\ p(1-\mathrm{q}) \\ (1-\mathrm{p})\mathrm{q} \\ (1-\mathrm{p})(1-\mathrm{q}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pq + p(1-q) + (1-\mathrm{p})\mathrm{q} \\ (1-\mathrm{p})(1-\mathrm{q}) \end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $p=0, q=0$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่2 $p=0, q=1$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กรณีที่3 $p=1, q=0$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ กรณีที่4 $p=1, q=1$ จะได้ $x \vee y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $p=0, q=0$ เท่านั้น

LHS : y ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ $y = \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $y \Rightarrow x \vee y$

ตัวอย่าง 5.5. $\neg x \Rightarrow x \to y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS : $x \to y = M_{\to} \ltimes x \ltimes y$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 1-p\\0 & p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\1-q\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1-p+pq\\p-pq\end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $p=0,q=0$ จะได้ $x \to y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ กรณีที่2 $p=0,q=1$ จะได้ $x \to y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

กรณีที่3 $p=1,q=0$ จะได้ $x \to y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ กรณีที่4 $p=1,q=1$ จะได้ $x \to y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $p=1,q=0$ เท่านั้น

LHS : $\neg x = M_{\neg} \ltimes x$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1-p\\p\end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $p=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $\neg x \Rightarrow x \to y$

ตัวอย่าง5.6. $y \Rightarrow x \rightarrow y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS. $x \rightarrow y \quad = M_{\rightarrow} \ltimes x \ltimes y$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1-p \\ 0 & p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-p+pq \\ p-qp \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 1 $p=0, q=0$ จะได้ $x \rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ กรณีที่ 2 $p=0, q=1$ จะได้ $x \rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 3 $p=1, q=0$ จะได้ $x \rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่ 4 $p=1, q=1$ จะได้ $x \rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $p=1, q=0$ เท่านั้น

LHS. y

ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ $y = \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $y \Rightarrow x \rightarrow y$

ตัวอย่าง5.7. $\neg(x \to y) \Rightarrow x$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS. x ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ $x = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $p=0$

LHS. $\neg(x \to y) = M_{\neg} \ltimes M_{\to} \ltimes x \ltimes y$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p \\ 1 & 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} p-pq \\ 1-p+pq \end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $p=0, q=0$ จะได้ $\neg(x \to y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 2 $p=0, q=1$ จะได้ $\neg(x \to y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $\neg(x \to y) \Rightarrow x$

ตัวอย่าง 5.8. $\neg(x \to y) \Rightarrow \neg y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS. $\neg y = M_\neg \ltimes y$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-q\\ q\end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $p=0,q=0$ จะได้ $\neg y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ กรณีที่ 2 $p=0,q=1$ จะได้ $\neg y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่3 $p=1,q=0$ จะได้ $\neg y=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ กรณีที่4 $p=1,q=1$ จะได้ $\neg y=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $q=1$

LHS . $\neg(x \to y) = M_\neg \ltimes M_\to \ltimes x \ltimes y$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}p\\ 1-p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}p\\ 1-p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & p\\ 1 & 1-p\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}q\\ 1-q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p-pq\\ 1-p+pq\end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $p=0,q=1$ จะได้ $\neg(x \to y)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่ $p=1,q=1$ จะได้ $\neg(x \to y)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $\neg(x \to y) \Rightarrow \neg y$

ตัวอย่าง5.9. $\neg x \wedge (x \vee y) \Rightarrow y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS. y

ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวา คือ $y = \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $q=0$

LHS. $\neg x \wedge (x \vee y)$

$$= M_{\wedge} M_{\neg} \ltimes x \ltimes M_{\wedge} x \ltimes y$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & 1-p & 1-p & 0 \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & p-p^2 \\ p & 1-p+p^2 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+p-2pq-p^2+p^2q \\ 1-p+p^2-q+2pq-p^2q \end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $p=0, q=0$ จะได้ $\neg x \wedge (x \vee y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 2 $p=1, q=0$ จะได้ $\neg x \wedge (x \vee y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $\neg x \wedge (x \vee y) \Rightarrow y$

ตัวอย่าง 5.10. $x \wedge (x \to y) \Rightarrow y$

ให้ $x=(p,1-p)^T, y=(q,1-q)^T$ เมื่อ $p,q \in \{0,1\}$

RHS. y

ฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวา คือ $y = \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเราจะพิจารณากรณีที่ $q=0$

LHS. $x \wedge (x \to y) = M_{\wedge} \ltimes x \ltimes M_{\to} \ltimes x \ltimes y$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 1-p & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p & 0 & p & p \\ 1-p & 1 & 1-p & 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p & p-p^2 \\ 1-p & 1-p+p^2 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p-p^2+p^2q \\ 1-p+p^2-p^2q \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 1 $p=0, q=0$ จะได้ $x \wedge (x \to y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่า $x \wedge (x \to y) \Rightarrow y$

บทที่6

การพิจารณาการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์โดยใช้ผลคูณกึ่งเทนเซอร์

6.1 การพิจารณาการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์จากเมทริกซ์โครงสร้าง

ประพจน์สองประพจน์จะกล่าวว่าสมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์ $(\log ical \quad equivalent)$ หรืออย่างย่อว่าสมมูลกัน $(equivalent)$ ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันในทุกกรณี

ทฤษฎีบท 6.1 ให้ P และ Q เป็นประพจน์เชิงประกอบที่ประกอบด้วยประพจน์ย่อย r ประพจน์ โดยค่าความจริงของ P และ Q แทนได้ด้วยฟังก์ชัน $f,g:\Delta^r \to \Delta$ ตามลำดับ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

$$(1) P \Leftrightarrow Q$$
$$(2) M_f = M_g$$

พิสูจน์ $(1) \Rightarrow (2)$ สมมติว่า $P \Leftrightarrow Q$ นั่นคือ P และ Q มีค่าความจริงตรงกันในทุกกรณี จะได้ว่า $f(x_1,\ldots,x_r) = g(x_1,\ldots,x_r)$ สำหรับทุก $(x_1,\ldots,x_r) \in \Delta^r$ โดยทฤษฎีบท 4.11จะได้ว่ามีเมทริกซ์ $M_f, M_g \in M_{2,2^r}(\mathbb{C})$ ซึ่ง

$$f(x_1,\ldots,x_r) = M_f \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r$$
$$g(x_1,\ldots,x_r) = M_g \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r$$

สำหรับ $(x_1,\ldots,x_r) \in \Delta^r$

จะได้ว่าแนวตั้งที่ 1 ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_r = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ในทำนองเดียวกัน แนวตั้งที่ 2 ของ M_g คือ $M_g \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = g(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_r = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

ดังนั้นแนวตั้งที่ 1 ของ M_f เท่ากับแนวตั้งที่ 1 ของ M_g

แนวตั้งที่ 2 ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_{r-1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $x_r = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ในทำนองเดียวกันแนวตั้งที่ 2 ของ M_g คือ $M_g \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = g(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_{r-1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $x_r = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้นแนวตั้งที่ 2 ของ M_f เท่ากับแนวตั้งที่ 2 ของ M_g

แนวตั้งที่ 2^r ของ M_f คือ $M_f \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = f(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_r = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

ในทำนองเดียวกันแนวตั้งที่ 2^r ของ M_g คือ $M_g \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r = g(x_1,\ldots,x_r)$ เมื่อ $x_1,\ldots,x_r = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $M_f = M_g$

$(2) \Rightarrow (1)$ สมมติว่า $M_f = M_g$

สำหรับแต่ละ $(x_1,\ldots,x_r) \in \Delta^r$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_r) &= M_f \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r \\ &= M_g \ltimes x_1 \ltimes \ldots \ltimes x_r \\ &= g(x_1,\ldots,x_r) \end{aligned}$$

นั่นคือ P และ Q มีค่าความจริงตรงกันในทุกกรณี ดังนั้น $P \Leftrightarrow Q$

6.2 ตัวอย่างการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

ตัวอย่าง 6.1. $\neg(\neg x) \Leftrightarrow x$

$$LHS = \neg\neg x$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2$$

$$RHS = x$$

$$= I_2 \ltimes x$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ I_2

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\neg(\neg x) \Leftrightarrow x$

ตัวอย่าง 6.2. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$$LHS = (x \wedge y) \wedge z$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [1 \ 0 \ 0 \ 0] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \ 0 \ 0 \ 0] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \ 0 \ 0 \ 0] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [0 \ 1 \ 1 \ 1] \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & [0 \ 1 \ 1 \ 1] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [0 \ 1 \ 1 \ 1] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & [0 \ 1 \ 1 \ 1] \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = x \wedge (y \wedge z)$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\wedge}) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

ตัวอย่าง 6.3. $(x \vee y) \vee z \Leftrightarrow z \vee (y \vee z)$

$$LHS = (x \vee y) \vee z$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\vee} \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = z \vee (y \vee z) = \mathrm{M}_{\vee} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\vee} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\vee} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\vee}) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $(x \vee y) \vee z \Leftrightarrow z \vee (y \vee z)$

ตัวอย่าง 6.4. $\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$

$$LHS = \neg(x \wedge y)$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg x \vee \neg y$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$

ตัวอย่าง 6.5. $\neg(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$

$$LHS = \neg(x \vee y)$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\vee} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg x \wedge \neg y$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\neg(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$

ตัวอย่าง 6.6. $x \to y \Leftrightarrow \neg x \vee y$

$$LHS = x \to y$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg x \vee y$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \to y \Leftrightarrow \neg x \vee y$

ตัวอย่าง 6.7. $\neg(x \to y) \Leftrightarrow x \wedge \neg y$

$$LHS = \neg(x \to y)$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\to} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = x \wedge \neg y$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\neg(x \to y) \Leftrightarrow x \wedge \neg y$

ตัวอย่าง 6.8. $x \to y \Leftrightarrow \neg y \to \neg x$

$$LHS = x \to y$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg y \to \neg x$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{I}_2 y \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes y \ltimes x$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes w_{[2,2]} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \to y \Leftrightarrow \neg y \to \neg x$

ตัวอย่าง 6.9. $x \to (y \to z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \to z$

$$LHS = x \to (y \to z)$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\to} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\to} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\to}) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RHS = (x \wedge y) \to z$$

$$= \mathrm{M}_{\to} \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \to (y \to z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \to z$

ตัวอย่าง 6.10. $\neg(x \leftrightarrow y) \Leftrightarrow x \leftrightarrow \neg y$

$LHS = \neg(x \leftrightarrow y)$

$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$RHS = x \leftrightarrow \neg y$

$= \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$

$= \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes \mathrm{I}_2 x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes y$

$= \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}) \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\neg(x \leftrightarrow y) \Leftrightarrow x \leftrightarrow \neg y$

ตัวอย่าง 6.11. $x \vee x \Leftrightarrow x$

$$LHS = x \vee x$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes x \ltimes x$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes x^{2}$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{r} \ltimes x$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$RHS = x$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \vee x \Leftrightarrow x$

ตัวอย่าง 6.12. $x \wedge x \Leftrightarrow x$

$LHS = x \wedge x$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes x$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x^2$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{r} \ltimes x$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ I_2

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \wedge x \Leftrightarrow x$

ตัวอย่าง 6.13. $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ให้ $x=(\delta,1-\delta)^{\mathrm{T}}, y=(\mu,1-\mu)^{\mathrm{T}}, z=(\alpha,1-\alpha)^{\mathrm{T}}$

$LHS = x \wedge (y \vee z)$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\vee} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 1-\delta & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & \delta & \delta & 0 \\ 1-\delta & 1-\delta & 1-\delta & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & \mu\delta \\ 1-\delta & 1-\mu\delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha\delta + \mu\delta - \mu\delta\alpha \\ 1-\mu\delta-\alpha\delta+\alpha\mu\delta \end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $\delta=0, \mu=0, \alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่2 $\delta=0, \mu=0, \alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่3 $\delta=0, \mu=1, \alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่4 $\delta=0, \mu=1, \alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่5 $\delta=1, \mu=0, \alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ กรณีที่6 $\delta=1, \mu=0, \alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กรณีที่7 $\delta=1, \mu=1, \alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ กรณีที่8 $\delta=1, \mu=1, \alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$RHS=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

$$=\mathrm{M}_{\vee}\ltimes\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes x\ltimes y\ltimes\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes x\ltimes z$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&\delta&1&0\\0&1-\delta&0&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&\mu\delta\\0&1-\delta\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&\mu\delta&\mu\delta&\mu\delta\\0&1-\mu\delta&1-\mu\delta&1-\mu\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\1-\delta\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\delta+\mu\delta-\mu\delta^2&\mu\delta\\1-\delta\mu-\delta+\delta^2\mu&1-\delta\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha\delta-\alpha\mu\delta^2+\mu\delta\\1-\delta\alpha-\delta\mu+\alpha\delta^{2\mu}\end{bmatrix}$$

กรณีที่1 $\delta=0,\mu=0,\alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ กรณีที่2 $\delta=0,\mu=0,\alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่3 $\delta=0,\mu=1,\alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ กรณีที่4 $\delta=0,\mu=1,\alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่5 $\delta=1,\mu=0,\alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ กรณีที่6 $\delta=1,\mu=0,\alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

กรณีที่7 $\delta=1,\mu=1,\alpha=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ กรณีที่8 $\delta=1,\mu=1,\alpha=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x\wedge(y\vee z)\Leftrightarrow(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

ตัวอย่าง 6.14. $x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \to y) \wedge (y \to x)$

ให้ $x = (\delta, \delta - 1)^{\mathrm{T}}, y = (\mu, 1-\mu)^{\mathrm{T}}$

$$LHS = x \leftrightarrow y$$

$$= \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta & 1-\delta \\ 1-\delta & \delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\delta-\mu+2\mu\delta \\ \mu+\delta-2\delta\mu \end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $\mu = 0, \delta = 0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 2 $\mu = 0, \delta = 1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 3 $\mu = 1, \delta = 0$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

กรณีที่ 4 $\mu = 1, \delta = 1$ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$RHS = (x \to y) \wedge (y \to x)$$

$$= \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes \mathrm{M}_{\to} \ltimes x \ltimes y \ltimes \mathrm{M}_{\to} \ltimes y \ltimes x$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \mu \\ 1-\mu \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} \delta \\ 1-\delta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1-\delta & 0\\ 0 & 1 & \delta & 1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\ 1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\ 1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\ 1-\delta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\delta+\delta\mu & 0\\ \delta-\delta\mu & 1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\ 1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\ 1-\delta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\delta+\delta\mu & 0 & 1-\delta+\delta\mu & 1-\delta+\delta\mu\\ \delta-\delta\mu & 1 & \delta-\delta\mu & \delta-\delta\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\mu\\ 1-\mu\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\ 1-\delta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\delta+\delta\mu & 1-\delta+2\mu\delta-\mu-\delta\mu^2\\ \delta-\delta\mu & \mu+\delta-2\delta\mu+\delta\mu^2\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}\delta\\ 1-\delta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\delta+2\mu\delta-\mu-\delta\mu^2-\delta^2\mu+\mu\delta+\delta^2\mu^2\\ \mu+\delta-2\delta\mu+\delta\mu^2-\delta\mu+3\delta^2\mu-\delta^2\mu\end{bmatrix}$$

กรณีที่ 1 $\mu=0,\delta=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

กรณีที่ 2 $\mu=0,\delta=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่ 3 $\mu=1,\delta=0$ จะได้ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

กรณีที่ 4 $\mu=1,\delta=1$ จะได้ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x\leftrightarrow y\Leftrightarrow(x\rightarrow y)\wedge(y\rightarrow x)$

ตัวอย่าง 6.15. $x\bar{\vee}y \Leftrightarrow y\bar{\vee}x$

$$LHS = \neg\left(x \leftrightarrow y\right)$$

$$= M_{\neg} \ltimes M_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$= M_{\neg} \ltimes M_{\leftrightarrow}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = y\bar{\vee}x$$

$$= \neg\left(y \leftrightarrow x\right)$$

$$= M_{\neg} \ltimes M_{\leftrightarrow} \ltimes y \ltimes x$$

$$= M_{\neg} \ltimes M_{\leftrightarrow} W_{[2,2]} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$= M_{\neg} \ltimes M_{\leftrightarrow} W_{[2,2]}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x\bar{\vee}y \Leftrightarrow y\bar{\vee}x$

ตัวอย่าง 6.16. $\left(x\overline{\vee}y\right)\overline{\vee}z \Leftrightarrow x\overline{\vee}\left(y\overline{\vee}z\right)$

$$LHS = \left(x\overline{\vee}y\right)\overline{\vee}z$$

$$= \neg\left(\left(x\overline{\vee}y\right) \leftrightarrow z\right)$$

$$= \neg\left[\left(\neg\left(x \leftrightarrow y\right) \leftrightarrow z\right)\right]$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = x\overline{\vee}\left(y\overline{\vee}z\right)$$

$$= \neg\left[x \leftrightarrow \left[\neg\left(y \leftrightarrow z\right)\right]\right]$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes yz$$

$$= \mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \left(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}\right) \ltimes \left(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow}\right) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\mathrm{M}_{\neg} \ltimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow} \left(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg}\right) \ltimes \left(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\leftrightarrow}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \ltimes \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $\left(x\bar{\vee}y\right)\bar{\vee}z \Leftrightarrow x\bar{\vee}\left(y\bar{\vee}z\right)$

ตัวอย่าง 6.17. $x\overline{\vee}y \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$

$$LHS = x\overline{\vee}y$$

$$= \neg(x \leftrightarrow y)$$

$$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\leftrightarrow}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg(x \leftrightarrow y)$$

$$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\leftrightarrow} \ltimes x \ltimes y$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\leftrightarrow}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x\overline{\vee}y \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$

ตัวอย่าง 6.18. $x \uparrow y \Leftrightarrow y \uparrow x$

$LHS = x \uparrow y$

$= \neg(x \wedge y)$

$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$RHS = y \uparrow x$

$= \neg(y \wedge x)$

$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} yx$

$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} W_{[2,2]} \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} W_{[2,2]}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \uparrow y \Leftrightarrow y \uparrow x$

ตัวอย่าง 6.19. $x \downarrow y \Leftrightarrow y \downarrow x$

$LHS = \neg(x \vee y)$

$= M_{\neg} M_{\vee} \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$M_{\neg} M_{\vee}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$RHS = y \downarrow x$

$= \neg(y \vee x)$

$= M_{\neg} M_{\vee} \ltimes y \ltimes x$

$= M_{\neg} M_{\vee} W_{[2,2]} \ltimes x \ltimes y$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$M_{\neg} M_{\vee} W_{[2,2]}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x \downarrow y \Leftrightarrow y \downarrow x$

ตัวอย่าง 6.20. $x \uparrow (y \uparrow z) \Leftrightarrow \neg x \vee (y \wedge z)$

$$LHS = x \uparrow (y \uparrow z)$$

$$= \neg(x \wedge \neg(y \wedge z))$$

$$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} \ltimes x \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge} y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg})(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\wedge}) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\neg})(\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\wedge})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RHS = \neg x \vee (y \wedge z)$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes x \ltimes \mathrm{M}_{\wedge} \ltimes y \ltimes z$$

$$= \mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\wedge}) \ltimes x \ltimes y \ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\mathrm{M}_{\vee} \ltimes \mathrm{M}_{\neg} \ltimes (\mathrm{I}_2 \otimes \mathrm{M}_{\wedge})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ltimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $x\uparrow\left(y\uparrow z\right)\Leftrightarrow\neg x\vee\left(y\wedge z\right)$

ตัวอย่าง 6.21. $\left(x\uparrow y\right)\uparrow z\Leftrightarrow\left(x\wedge y\right)\vee\neg z$

$$LHS=\left(x\uparrow y\right)\uparrow z$$

$$=\neg\left(\neg\left(x\wedge y\right)\wedge z\right)$$

$$=\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes x\ltimes y\ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านซ้ายคือ

$$\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes\mathrm{M}_{\neg}\mathrm{M}_{\wedge}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$RHS=\left(x\wedge y\right)\vee\neg z$$

$$=\mathrm{M}_{\vee}\ltimes\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes x\ltimes y\ltimes\mathrm{M}_{\neg}\ltimes z$$

$$=\mathrm{M}_{\vee}\ltimes\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes\left(\mathrm{I}_4\otimes\mathrm{M}_{\neg}\right)\ltimes x\ltimes y\ltimes z$$

เมทริกซ์โครงสร้างของฟังก์ชันตรรกศาสตร์ทางด้านขวาคือ

$$\mathrm{M}_{\vee}\ltimes\mathrm{M}_{\wedge}\ltimes\left(\mathrm{I}_4\otimes\mathrm{M}_{\neg}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\ltimes\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\ltimes\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

โดยทฤษฎีบท 6.1 จะได้ว่า $(x \uparrow y) \uparrow z \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \neg z$

เอกสารอ้างอิง

[1.] D.Cheng and H.Qi and Z.Li, Analysis and control of Boolean networks: a semi-tensor approach, Springer, 2011.

[2.] D.Cheng, H. Qi and Z. Li, Model construction of Boolean networks via observed data, IEEE Trans. Neural Networks, 2011, 22 (4), 525-535.

[3.] H.Mortveit and C. Reidays, An introduction to sequential dynamic systems, Springer, 2008.

[4.] พัชรินทร์ เหมโชติ, และไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์. (2555). *พีชคณิตเชิงเส้น1.* กรุงเทพมหานคร: มีนเซอร์วิส ซัพพลาย