การเปรียบเทียบการประมาณค่าความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติ และปรกติปลอมปน

A COMPARISON TO ESTIMATE VARIANCE OF NORMAL AND CONTAMINATED NORMAL DISTRIBUTIONS

กิตติคุณ   สุภาวณิชย์
KITTIKHUN   SUPAWNITH

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติและการวิเคราะห์ธุรกิจ
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2564
KMITL-2021-SC-M-050-017

A COMPARISON TO ESTIMATE VARIANCE OF NORMAL AND CONTAMINATED NORMAL DISTRIBUTIONS

KITTIKHUN SUPAWNITH

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE PROGRAM
IN STATISTICS AND BUSINESS ANALYTICS
DEPARTMENT OF STATISTICS SCHOOL OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2021

KMITL-2021-SC-M-050-017

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การเปรียบเทียบการประมาณค่าความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติและปรกติปลอมปน
ชื่อนักศึกษา	นาย กิตติคุณ สุภาวณิชย์
รหัสประจำตัว	62605095
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติและการวิเคราะห์ธุรกิจ)
ภาควิชา	สถิติ
พ.ศ.	2564
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ ดร. อัชฌา อระวีพร

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงของความแปรปรวนในการแจกแจงปรกติและปรกติปลอมปนด้วยวิธี ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ โดยกำหนดการแจกแจงก่อนในรูปแบบการแจกแจงแกมมา ไคกำลังสองและเลขชี้กำลัง วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป โดยสุ่มข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงปรกติ มีค่าเฉลี่ยค่าเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 2 และความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2, 4 และ 6 และประชากรที่มีการแจกแจงปรกติปลอมปน โดยกำหนดค่าเฉลี่ยค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนเท่ากับการแจกแจงปรกติ แต่กำหนดสัดส่วนการปลอมปน (p) เท่ากับ 0.01 และ ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ด้วยขนาดตัวอย่าง (n) ที่ใช้ในการศึกษา คือ 10, 20, 30, 50 และ 100 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ในการจำลองข้อมูลใช้โปรแกรมอาร์ในการวิจัย โดยทำซ้ำ 1,000 รอบในแต่ละสถานการณ์ เกณฑ์ที่ใช้พิจารณาการประมาณค่าแบบจุดด้วยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และพิจารณาช่วงความเชื่อมั่นด้วยค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำที่สุด จากผลการวิจัยการประมาณค่าแบบจุดพบว่าเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปรกติ วิธีเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนในรูปแบบการแจกแจงแกมมามีประสิทธิภาพในการการประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด สำหรับการแจกแจงแบบปรกติปลอมปนวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนในรูปแบบการแจกแจงไคกำลังสองจะมีประสิทธิภาพในการการประมาณค่าความแปรปรวนเหมาะสมที่สุดเกือบทุกสถานการณ์ และผลการวิจัยการประมาณค่าแบบช่วงพบว่าเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปรกติ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพในการการประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด ส่วนกรณีการแจกแจงแบบปรกติปลอมปน วิธีที่ใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างซ้ำซึ่งประกอบไปด้วยวิธีแจ็คไนฟ์ และวิธีบูตสแตรปมาตรฐานมีประสิทธิภาพในการการประมาณค่าความแปรปรวนเหมาะสมที่สุดเกือบทุกสถานการณ์

คำสำคัญ : วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ วิธีแจ็คไนฟ์ วิธีบูตสแทร็ป

Thesis Title	A Comparison to Estimate Variance of Normal and Contaminated Normal Distributions
Student Name	Kittikhun Supawnith
Student ID	62605095
Degree	Master of Science (Statistics and Business Analytics)
Department	Statistics
Year	2021
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Dr. Autcha Araveeporn

Abstract

The objective of this research is to compare the point and interval estimations of variance based on normal and contaminated normal distribution by maximum likelihood, Bayes method with prior distribution in form of gamma, chi-square, and exponential distributions, Markov Chain Monte Carlo, jackknife and bootstrap methods. The data samples are generated from the normal distribution with the parameter of mean (μ) 2 and variance (σ^2) 2, 4 and 6. The mean and variance of contaminated normal distribution are the same as the normal distribution, but proportions of contamination (p) is 0.1 and scale factor (c) is 2 and 5. The sample sizes (n) for this study are set as 10, 20, 30, 50 and 100 and the 90%, 95% and 99% confidence interval.The simulated data is generated by R program and repeated 1,000 times in each situation. The criterion of point estimation is mean square error and interval estimation is considered by confidence coefficients and the minimum of average width. For the point estimation, Bayes with prior distribution in form of gamma distribution is the best performance of variance estimation under normal distribution. On contaminated normal distribution, Bayes with prior distribution in form of chi-square distribution outperforms the best performance of variance estimation in most cases. The results of the interval estimation can found that maximum likelihood is the best performance of variance estimation with normal distribution. However in contaminated normal distribution, resampling techniques consist of jackknife and standard bootstrap methods outperform the best performance of variance estimation in most cases.

Keyword : Maximum Likelihood, Bayes method, Markov Chain Monte Carlo, Jackknife, Bootstrap

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่อง การเปรียบเทียบการประมาณค่าความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติและปรกติปลอมปน สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีได้ด้วยความอนุเคราะห์จาก รศ.ดร. อัชฌา อระวีพร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ในการให้คำแนะนำ ปรึกษา รวมทั้งตรวจสอบงานการวิจัยในด้านความถูกต้องของเนื้อหา ตลอดจนติดตามการทำวิจัยจนทำให้การทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์มากที่สุด จึงขอกราบขอบพระคุณด้วยความเคารพอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

และผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการ รศ.ดร. วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (ศูนย์รังสิต) และ อาจารย์บัณฑิตประจำ ผศ.ดร. สมศรี บัณฑิตวิไล อาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่เสียสละเวลามาในการให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการพัฒนาเนื้อหาวิทยานิพนธ์ให้มีความสมบูรณ์แบบมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบคุณ คณาจารย์ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง รวมทั้งบุคคลอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ในการช่วยเหลือในการศึกษาจนกระทั่งวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี หากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้วิจัยขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

นาย กิตติคุณ สุภาวณิชย์

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

สถานการณ์ในปัจจุบันองค์กรธุรกิจส่วนมากมีการแข่งขันสูงขึ้นการทำธุรกิจให้ประสบความความสำเร็จตามเป้าหมาย ส่วนหนึ่งต้องอาศัยข้อมูลเป็นสิ่งสำคัญในการนำไปใช้ประโยชน์จากการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติเพื่อทราบความต้องการที่แท้จริงของกลุ่มเป้าหมายสำหรับการวางแผนเชิงกลยุทธ์ ในทางสถิติจะเรียกกลุ่มเป้าหมายที่สนใจนี้ว่า ประชากร (Population)

การเก็บข้อมูลจากกลุ่มเป้าหมายที่สนใจทั้งหมดเพื่อหาค่าที่บ่งบอกถึงลักษณะที่สำคัญของประชากร หรือ พารามิเตอร์ (Parameter) เป็นเรื่องที่ยากมากในทางปฏิบัติ เนื่องจากต้องใช้ระยะเวลาในการเก็บข้อมูลที่มากและเสียค่าใช้จ่ายในการเก็บข้อมูลสูงหากประชากรมีขนาดใหญ่รวมทั้งการตัดสินใจในบางเรื่องอาจต้องทำในระยะเวลาที่จำกัด นักสถิติจึงอาศัยข้อมูลที่เก็บมาจากตัวอย่าง (Sample) ซึ่งเป็นตัวแทนของประชากร แล้วอธิบายลักษณะของประชากรโดยใช้การอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) สำหรับการอนุมานเชิงสถิติประกอบด้วย 2 ส่วนคือส่วนของการประมาณค่า (Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing)

การประมาณค่า เป็นวิธีการหนึ่งในการสร้างตัวประมาณ (Estimator) สำหรับการหาค่าประมาณ (Estimate) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจจากการอาศัยข้อมูลจากตัวอย่าง การประมาณค่าพารามิเตอร์ในทางสถิติสามารถกระทำได้ 2 รูปแบบ รูปแบบแรก คือการประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) เป็นรูปแบบที่ใช้ค่าประมาณเพียงค่าเดียวในการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยคาดหวังว่า ค่าประมาณดังกล่าวเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์มากที่สุด แต่ในการประมาณค่าด้วยรูปแบบนี้มีโอกาสที่ค่าประมาณมีความคลาดเคลื่อนไปจากพารามิเตอร์ได้มาก เนื่องจากใช้ค่าประมาณเพียงค่าเดียวเท่านั้น นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่เก็บข้อมูลเพื่อเป็นตัวแทนที่ดีของประชากร

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) เป็นวิธีการประมานค่าพารามิเตอร์อีกรูปแบบหนึ่งที่ช่วยลดความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าพารามิเตอร์มากกว่าการประมาณค่าแบบจุด โดยอาศัยการประมาณค่าที่เป็นช่วงของตัวเลขและเชื่อมั่นว่าช่วงดังกล่าวจะครอบคลุมค่าที่แท้จริงของพารามิเตอร์ สิ่งแรกในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์แบบช่วงจะต้องกำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ ในการสร้างขอบเขตของช่วง 2 ค่า คือ ขีดจำกัดล่าง (Lower Limit : L) และขีดจำกัดบน (Upper Limit : U) เพื่ออยู่ในรูปแบบ $P(\mathrm{L} \le \theta \le \mathrm{U}) = 1-\alpha$ แล้วจะเรียก $(\mathrm{L} \le \theta \le \mathrm{U})$ ว่าช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) อย่างไรก็ตามการประมาณค่าแบบช่วงต้องอาศัยค่าประมาณแบบจุดเข้ามาเกี่ยวข้องในการประมาณค่าดังกล่าวด้วย

การประมาณค่าพารามิเตอร์ให้มีความถูกต้องขึ้นอยู่กับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่ได้จากตัวอย่าง ขนาดตัวอย่าง และ วิธีการประมาณค่า นักวิจัยหลายท่านจึงศึกษาวิธีการประมาณค่าที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลรูปแบบต่าง ๆ ในการประมาณค่าพารามิเตอร์รูปแบบจุดและรูปแบบช่วง

Araveeporn (2014) สร้างตัวประมาณสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ λ รูปแบบจุดโดยใช้ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปัวซง $X \sim Poi(\lambda)$ เมื่อ λ คือค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง พื้นที่หนึ่ง หรืออาณาเขตหนึ่งที่กำหนด ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ ผลที่ได้คือตัวประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีขนาดเล็ก ส่วนวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดีเมื่อพารามิเตอร์มีขนาดใหญ่

ศรสวรรค์ บุญเพ็ญ และคณะ (2558) ศึกษาวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ η เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงไวบูลรูปแบบสองพารามิเตอร์ คือ β ซึ่งเป็นพารามิเตอร์รูปร่าง และ η เป็นพารามิเตอร์ขนาด โดยใช้วิธีบูตสแทร็ปทีและวิธีแจ็คไนฟ์ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ดังกล่าว กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในการประมาณค่าเท่ากับ 0.95 ผลการศึกษาพบว่าการประมาณประสิทธิภาพการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ขนาด (η) มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าได้ดีเมื่อมีขนาดตัวอย่างใหญ่เพียงพอ โดยวิธีบูตสแทร็ปที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นได้ดีกว่าวิธีแจ็คไนฟ์

Araveeporn (2016) เปรียบเทียบวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย (μ) โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์ระหว่างวิธีเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในการประมาณค่าเท่ากับ 0.90, 0.95 และ0.99 ผลการทดลองพบว่าวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่น μ ดีที่สุดเกือบทุกสถานการณ์ที่ศึกษา

บำรุงศักดิ์ เผื่อนอารีย์ และ กรรวี รุ่งสว่าง (2560) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานด้วยวิธีบูตสแทร็ป โดยเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐาน 3 วิธี ประกอบด้วยวิธีที่ใช้ค่ามัธยฐานของข้อมูลตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าซึ่งใช้หลักการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย วิธีบูตสแทร็ปมาตรฐาน และวิธีเปอร์เซ็นไทล์บูตสแทร็ป โดยทำการจำลองข้อมูลด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลัง กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในการประมาณค่าเท่ากับ 0.90 ผลการศึกษาพบว่าวิธีบูตสแทร็ปมาตรฐานมีประสิทธิภาพในการช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานเมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก แต่ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่วิธีเปอร์เซ็นไทล์บูตสแทร็ปมีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นมัธยฐานมากกว่าวิธีบูตสแทร็ปมาตรฐาน อย่างไรก็ตามวิธีที่ใช้ค่ามัธยฐานของตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานทุกกรณี

อนุวัฒน์ คำมา และคณะ (2560) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนของความแปรปรวนสองประชากรด้วยวิธีเอฟ วิธีขีดจำกัดส่วนกลาง วิธีบูตสแทร็ป และวิธีบูตสแทร็ปร่วมกับ

Rousseeuw และ Croux เมื่อข้อมูลทั้งสองกลุ่มมีการแจกแจงปรกติ การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงเลขชี้กำลัง ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ผลการศึกษาพบว่ากรณีข้อมูลมีการแจกแจงปรกติวิธีเอฟมีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนของความแปรปรวนสองประชากรได้ดีกว่าวิธีอื่น ๆ แต่ในกรณีข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงปรกติ (การแจกแจงแกมมาและการแจกแจงเลขชี้กำลัง) วิธีบูตสแทร็ปร่วมกับ Rousseeuw และ Croux มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าดีที่สุด

อัญมณี กุมมาระกะ และ อัชฌา อระวีพร (2560) ประมาณค่าพารามิเตอร์ p รูปแบบจุดสำหรับการแจกแจงทวินามเชิงลบ $X \sim NBin(r, p)$ เมื่อ p คือ ความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง และ r คือ จำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จ โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟในการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ดังกล่าว ผลการศึกษาพบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ส่วนวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

ฉัตรวดี กิจแก้ว และ อัชฌา อระวีพร (2562) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ในการแจกแจงแกมมา $Gamma(\alpha, \lambda)$ โดยศึกษาค่าพารามิเตอร์สเกล (Scale Parameter) λ สำหรับการแจกแจงแกมมาด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99 ผลการศึกษาพบว่า ส่วนใหญ่แล้ววิธีของเบส์มีประสิทธิ์ภาพในการประมาณค่า λ ดีที่สุด รองลงมาคือวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ อย่างไรก็ตามไม่ควรประมาณค่า λ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

อัชฌา อระวีพร และคณะ (2563) เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าเฉลี่ย (μ) ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีบูตสแทร็ป จากการศึกษากรณีตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน ผลการศึกษาพบว่าเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยได้ดี แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลดีกว่าวิธีอื่น ส่วนกรณีข้อมูลมีการแจกแจงปรกติปลอมปนวิธีของเบส์ประมาณค่าเฉลี่ยได้ดียกเว้นเมื่อเมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่และความแปรปรวนน้อย วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลการประมาณค่าเฉลี่ยได้ดีที่สุด

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จึงเสนอวิธีการอนุมานเชิงสถิติ 3 แนวความคิดในการหาตัวประมาณสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ 5 วิธีการ

แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Inference Approach) ในการอนุมานเชิงสถิติ เสนอโดย Fisher แนวคิดนี้พิจารณาในเทอมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสำหรับประยุกต์ใช้ในการอนุมานเชิงสถิติ ซึ่งจากแนวคิดนี้ทำให้เกิด วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมเนื่องจากใช้การวิเคราะห์จากสภาพความเป็นจริงและตัวประมาณที่สร้างมาจากวิธีนี้มีคุณสมบัติที่สำคัญในการประมาณค่า

หลายประการ หลักการของวิธีนี้คือหาตัวประมาณที่เป็นไปได้ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น แล้วพิจารณาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นจะมีค่าสูงสุดหรือไม่ ซึ่งวิธีนี้ต้องอาศัยการอนุพันธ์เข้ามาช่วย (ประชุม สุวัตถี. 2553)

แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (Bayesian Inference Approach) ในการอนุมานเชิงสถิติ เสนอโดย Thomas Bayes โดยแนวคิดนี้ถือว่าพารามิเตอร์ (θ) เป็นตัวแปรสุ่มตัวหนึ่งและนำสารสนเทศที่ได้จากการสังเกตมาเปลี่ยนแปลงความเชื่อดั้งเดิมมาปรับปรุงค่า θ โดยการเปลี่ยนฟังก์ชันความน่าจะเป็นเบื้องต้นของ θ ไปสู่ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายหลังของ θ โดยแนวคิดนี้ถือเป็นที่นิยมและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้โดยเฉพาะปัญหาการตัดสินใจ (อโนทัย ตรีวานิช. 2539) จากแนวคิดนี้ทำให้เกิด วิธีของเบส์ (Bayes Method) ขึ้นสำหรับใช้ในการประมาณค่า แต่เนื่องจากวิธีของเบส์ต้องอาศัยคุณสมบัติบางอย่างของพารามิเตอร์โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ θ ซึ่งต้องอาศัยความรู้พื้นฐานการแจกแจงความน่าจะเป็น หากกำหนดค่าพารามิเตอร์ผิดพลาดจะทำให้การประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์ผิดพลาดไปด้วย วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method) เป็นวิธีหนึ่งที่แก้ปัญหาการกำหนดค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงก่อนด้วยวิธีของเบส์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยแนวคิดนี้ แต่อย่างไรก็ตาม จะต้องทราบลักษณะการแจกแจงภายหลังจากวิธีของเบส์มาใช้ในการประมาณค่าโดยการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีมาร์คอฟ เชน (Markov Chain) ร่วมกับ วิธีกิบส์ (Gibbs Sampling) เพื่อประมาณค่าจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังในการประมาณค่าพารามิเตอร์ (อัชฌา อระวีพร. 2555)

แนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (Resampling Inference Approach) เป็นเทคนิคหนึ่งในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยอาศัยหลักการสุ่มซ้ำ (Resampling) จากตัวอย่างเพียงชุดเดียว เนื่องจากวิธีนี้ไม่ได้คำนึงถึงลักษณะการแจกแจงของประชากรเข้ามาเกี่ยวข้อง มักจะเหมาะสมกับผู้ที่มีพื้นฐานความรู้สถิติไม่มาก ทำให้เข้าใจถึงวิธีการในการประมาณค่าได้ง่าย โดย Quenouille (1956) เสนอการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Method) ในการใช้ประมาณค่าจากการสร้างตัวอย่างแจ็คไนฟ์ (Jackknife Samples) ในการตัดค่าสังเกตหนึ่งครั้งออกจากตัวอย่าง โดยค่าที่ถูกตัดออกจะใส่คืนกลับไปในตัวอย่างก่อนที่จะสร้างชุดข้อมูลชุดใหม่ในครั้งถัดไป ทำไปเรื่อย ๆ จนครบ n ครั้ง จะได้ขนาดตัวอย่างของแจ็คไนฟ์จำนวน n ค่า ซึ่งวิธีการนี้ช่วยลดความเอนเอียงของตัวประมาณ และสังเกตตัวอย่างชุดใหม่แต่ละชุดได้ว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อตัดค่าสังเกตหนึ่งค่าออกจากชุดข้อมูล ต่อมา Efron (1979) ได้พัฒนาการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method) ด้วยการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ในการสุ่มตัวอย่างจากประชากรจากการสร้างข้อมูลชุดใหม่โดยทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำจากข้อมูลเดิมแบบคืนที่ (With Replacement) จำนวน เท่ากับขนาดตัวอย่างชุดเดิม n ค่าและจะเรียกตัวอย่างสุ่มชุดใหม่ว่า ตัวอย่างบูตสแทร็ป (Bootstrap Samples) ทำไปเรื่อย ๆ ด้วยจำนวนครั้งที่มากเพียงพอสำหรับใช้ในการประมาณค่าได้

ในงานวิจัยนี้สนใจการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญตัวหนึ่งของการแจกแจงปรกติ โดยปกติการแจกแจงปรกติมีพารามิเตอร์สองตัวคือ ค่าเฉลี่ย (μ) และค่า

ความแปรปรวน (σ^2) ซึ่งการแจกแจงปรกติเป็นการแจกแจงต่อเนื่องที่สำคัญเนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของการแจกแจงปรกติดังนั้นมักใช้การประมาณค่าเฉลี่ยเพื่อหาตัวแทนของข้อมูลและค่าความแปรปรวนในการวัดค่าการกระจายของข้อมูล การประมาณค่าความแปรปรวนที่ถูกต้องสามารถนำไปใช้ได้หลายอย่างเช่น การทดสอบสมมติฐานที่ต้องใช้ค่าความแปรปรวนเป็นเงื่อนไขในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนั้นผู้วิจัยสนใจศึกษาการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าความแปรปรวนทั้งรูปแบบจุดและรูปแบบช่วง 5 วิธีโดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติ คือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Inference Approach) ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (Bayesian Inference Approach) ซึ่งประกอบด้วยวิธีของเบส์ (Bayes Method)และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method)และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ(Resampling Inference Approach) ซึ่งประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Method) และวิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method) เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ

นอกจากนี้ข้อมูลที่เก็บได้จากตัวอย่างบางครั้งอาจจะมีข้อมูลบางค่ามีความแตกต่างจากข้อมูลอื่น ๆ มาก บางค่าสูงเกินไปหรือต่ำเกินไป โดยทั่วไปจะเรียกค่าเหล่านี้ว่า ค่านอกเกณฑ์ (Outlier) ซึ่งจะส่งผลให้การประมาณค่าความแปรปรวนด้วยวิธีทั่วไปมีความผิดพลาดได้ จึงศึกษาในกรณีที่มีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้นจากการจำลองข้อมูลเมื่อตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติปลอมปน โดยสร้างมาจากการแปลงข้อมูลที่มีการแจกแจงปรกติ มาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2)ทั้ง 5 วิธี อีกด้วย

1.2 วัตถุประสงค์

1. เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) รูปแบบจุด 5 วิธีโดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติ คือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วย วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์และวิธีบูตสแทร็ป) เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน

2. เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน (σ^2) 5 วิธีโดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติคือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วย วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์และวิธีบูตสแทร็ป) เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ และการแจกแจงปรกติปลอมปน

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1. กำหนดวิธีการประมาณค่าความแปรปรวน 5 วิธีโดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติ คือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วย วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์และวิธีบูตสแทร็ป)

2. กำหนดลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มจำนวน 9 รูปแบบเมื่อ

2.1 ตัวแปรสุ่มมีลักษณะการแจกแจงปรกติ $N(\mu,\sigma^2)$ ซึ่งค่าพารามิเตอร์คือ ค่าเฉลี่ย (μ) และค่าความแปรปรวน (σ^2)โดยมี 3 รูปแบบ คือ $N(2,2)$, $N(2,4)$ และ $N(2,6)$

2.2 ตัวแปรสุ่มมีลักษณะการแจกแจงปรกติปลอมปน 6 รูปแบบ โดยกำหนดให้ p คือสัดส่วนการปลอมปน และ c คือค่าคงที่สำหรับปรับค่าความแปรปรวน จะได้ว่า

2.2.1 $(1-p)N(2,2)+pN(2,2c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

2.2.2 $(1-p)N(2,4)+pN(2,4c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

2.2.3 $(1-p)N(2,6)+pN(2,6c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

3. กำหนดให้ $\phi=\frac{1}{\sigma^2}$ มีลักษณะการแจกแจงก่อนสำหรับวิธีของเบส์ด้วยการแจกแจงแกมมา $Gamma(\alpha,\lambda)$ โดยที่ α คือพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter) และ λ คือพาราเตอร์สเกล (Scale Parameter) ที่มีค่าดังนี้ $Gamma(2,1)$, $Gamma(2,0.5)$ และ $Gamma(1,0.2)$

4. จำลองข้อมูลด้วยโปรแกรมอาร์ (R) เวอร์ชั่น 4.0.5 โดยทำการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

5. กำหนดขนาดตัวอย่าง 10, 20, 30, 50 และ 100

6. กำหนดจำนวนรอบสำหรับวิธีบูตสแทร็ปจำนวน 10,000 รอบ

7. กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.90, 0.95 และ 0.99

1.4 เกณฑ์การตัดสินใจ

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าความแปรปรวนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป จำเป็นต้องมีเกณฑ์ที่ใช้ในการ

ตัดสินใจในการเลือกวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนให้เหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษา โดยแบ่งเกณฑ์ตามวัตถุประสงค์ที่กล่าวไว้ข้างต้น ซึ่งแสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.4.1 เกณฑ์การตัดสินใจการวัดประสิทธิภาพการประมาณค่าความแปรปรวนแบบจุด

ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE) เป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าแต่ละวิธี ซึ่งคำนวณได้ในสมการที่ (1.1)

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{1,000} (\sigma^2 - \hat{\sigma}_i^2)^2}{1,000} \tag{1.1}$$

เมื่อ σ^2 คือ ค่าความแปรปรวนที่กำหนด

$\hat{\sigma}_i^2$ คือ ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าจากการทำซ้ำครั้งที่ i โดยที่

$i = 1, 2, \ldots, 1,000$

หากวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับวิธีอื่น ๆ จะถือว่าเป็นวิธีการประมาณความแปรปรวนรูปแบบจุดที่เหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์

1.4.2 เกณฑ์การตัดสินใจการวัดประสิทธิภาพการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน

ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient : $CC_{\hat{\sigma}^2}$) และ ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Interval Width : $AW_{\hat{\sigma}^2}$) เป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการวัดประสิทธิภาพช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนในการประมาณค่าแต่ละวิธี ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนแรก คือการหาค่าขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนสำหรับช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนแต่ละวิธีและตรวจสอบว่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่คำนวณได้ครอบคลุมค่าความแปรปรวนที่กำหนดไว้หรือไม่

กำหนดให้ $Coverage_i(\hat{\sigma}^2)$ คือ ค่าครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่นที่ i ของพารามิเตอร์ σ^2 โดยที่

$$Coverage_i(\hat{\sigma}^2) = \begin{cases} 1 & ; L_{\hat{\sigma}_i^2} \le \sigma^2 \le U_{\hat{\sigma}_i^2} \\ 0 & ; otherwise \end{cases} \tag{1.2}$$

เมื่อ σ^2 คือ ค่าความแปรปรวนที่กำหนด

$L_{\hat{\sigma}_i^2}$ คือ ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 ครั้งที่ i

โดยที่ $i = 1, 2, ..., 1,000$

$U_{\hat{\sigma}_i^2}$ คือ ขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 ครั้งที่ i

โดยที่ $i = 1, 2, ..., 1,000$

จากนั้นคำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นการประมาณค่าความแปรปรวน ($1-\hat{\alpha}$ โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดสัญลักษณ์ $CC_{\hat{\sigma}^2}$) จากการทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ ดังสมการที่ (1.3)

$$CC_{\hat{\sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{1,000} Coverage_i(\hat{\sigma}^2)}{1,000} \tag{1.3}$$

นำค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่คำนวณได้ในแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบโดยทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

เริ่มจากกำหนดสมมติฐานในการทดสอบ

$$H_0 : P = P_0$$

$$H_1 : P \neq P_0$$

เมื่อ P_0 คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ต้องการทดสอบ หรือ $P_0 = 1-\alpha_0$

P คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น หรือ $P = 1-\alpha$

กำหนดระดับนัยสำคัญจากการทดสอบ เท่ากับ 0.05

ใช้สถิติทดสอบ

$$Z = \frac{CC_{\hat{\sigma}^2} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}}} \tag{1.4}$$

และไม่มีหลักฐานเพียงพอที่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลักได้ ถ้า

$$P_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}} \leq CC_{\hat{\sigma}^2} \leq P_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}} \tag{1.5}$$

เมื่อ $CC_{\hat{\sigma}^2}$ คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นความแปรปรวนจากการทดลอง

จากสมการที่ (1.5) นำมาพิจารณาว่าวิธีใดที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$) อยู่ระหว่างช่วง $P_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}}$ และ $P_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}}$

ขั้นตอนสุดท้าย ถ้าวิธีการใดมีค่าอยู่ในช่วงข้างบน จึงการคำนวณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Interval Width : AW) ซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (1.6)

$$AW_{\hat{\sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{1,000}(\mathrm{U}_{\hat{\sigma}_i^2} - L_{\hat{\sigma}_i^2})}{1,000} \quad (1.6)$$

เมื่อ $L_{\hat{\sigma}_i^2}$ คือ ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 ครั้งที่ i

โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, 1,000$

$U_{\hat{\sigma}_i^2}$ คือ ขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 ครั้งที่ i

โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, 1,000$

หากวิธีใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด โดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่แตกต่างจากสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ทำการทดสอบ $(P = P_0)$ จะถือว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนได้เหมาะสมที่สุด

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบประสิทธิภาพสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) ทั้ง 5 วิธี โดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติคือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วย วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์และวิธีบูตสแทร็ป) เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ และการแจกแจงปรกติปลอมปนเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ และการแจกแจงปรกติปลอมปน

2. เป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนได้อย่างเหมาะสมภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ ที่ศึกษา

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 ส่วนหลัก ๆ คือ ส่วนของทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นแนวทางสำคัญสำหรับวิธีการดำเนินงานวิจัย โดยแสดงรายละเอียดดังนี้

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การประมาณค่า (Estimation)

การประมาณค่า เป็นวิธีการหนึ่งของสถิติเชิงอนุมาน ในการใช้สูตรเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการคำนวณโดยอาศัยข้อมูลที่รวบรวมมาได้จากตัวอย่าง เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งเป็นตัวเลขที่ไม่ทราบค่า โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์มี 2 รูปแบบ คือ การประมาณค่าแบบจุด และการประมาณค่าแบบช่วง (ราชบัณฑิตยสภา, 2561)

2.1.1.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

การประมาณค่าแบบจุด คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร (θ) ด้วยค่าสถิติเพียงค่าเดียวเท่านั้น โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างประมาณค่า จะเรียกค่าสถิติดังกล่าวว่า ตัวประมาณ (Estimator : $\hat{\theta}$) เช่น ประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร (μ) ด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ($\overline{x}$) ประมาณความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ด้วยความแปรปรวนของตัวอย่าง (s^2)

2.1.1.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

การประมาณค่าแบบช่วง คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร (θ) ซึ่งใช้ค่าสถิติสองค่าในการอธิบายในรูปแบบช่วงของการประมาณค่า คือ ขีดจำกัดล่าง (Lower Limit : L) และขีดจำกัดบน (Upper Limit : U) จากการใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างในการประมาณค่า ซึ่งค่าสถิติทั้ง 2 ค่าครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ด้วยความน่าจะเป็น $1-\alpha$ โดยให้อยู่ในรูปแบบ

$$P(\mathrm{L} \le \theta \le \mathrm{U}) = 1-\alpha$$

โดยเรียกช่วง $[\mathrm{L}, \mathrm{U}]$ ว่าช่วงความเชื่อมั่น $(1\text{-}\alpha)100\%$ ของ θ เมื่อ $1-\alpha$ คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) ซึ่ง α ในสำหรับการประมาณค่าคือโอกาสที่ช่วง $[\mathrm{L}, \mathrm{U}]$ จะไม่ครอบคลุมค่าที่แท้จริงของพารามิเตอร์ θ และ $0 \le \alpha \le 1$

2.1.2 การแจกแจงความน่าจะเป็น

พื้นฐานสำคัญสำหรับการประมาณค่า คือการแจกแจงความน่าจะเป็น ซึ่งอธิบายลักษณะการเกิดขึ้นของข้อมูลในตัวอย่างที่สังเกตได้ในการแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของประชากร ดังนั้นในหัวข้อนี้จะอธิบายลักษณะของข้อมูลเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน รวมทั้งการแจกแจงก่อน (Prior Distribution) ของ σ^2 ด้วยการแจกแจงแกมมาสำหรับวิธีของเบส์

2.1.2.1 การแจกแจงปรกติ (Normal Distribution)

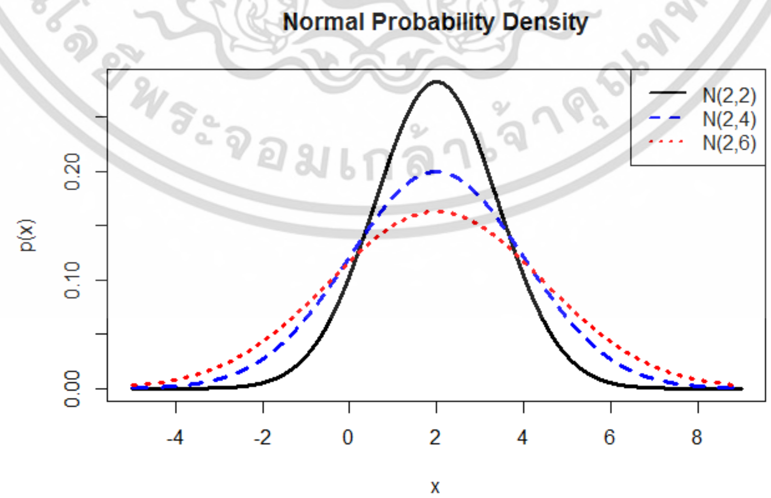
กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติโดยมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f_X(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \begin{array}{l};-\infty<x<\infty\\ ;-\infty<\mu<\infty\\ ;\sigma^2>0\end{array} \tag{2.1}$$

สามารถเขียนแทนด้วย $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(X)=\mu$ และความแปรปรวน $Var(X)=\sigma^2$

เนื่องจากการแจกแจงปรกติขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ ค่าเฉลี่ย (μ) ในการแสดงตำแหน่งศูนย์กลางของการแจกแจง และความแปรปรวน (σ^2) ในการแสดงลักษณะการกระจายของการแจกแจงสำหรับการแจกแจงปรกติของงานวิจัยแสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การแจกแจงปรกติที่มีพารามิเตอร์ $N(\mu,\sigma^2)$ เป็น $N(2,2)$, $N(2,4)$ และ $N(2,6)$

2.1.2.2 การแจกแจงปรกติปลอมปน (Contaminated Normal Distribution)

การแจกแจงปรกติปลอมปนเป็นการแจกแจงซึ่งแปลงข้อมูลมาจากการแจกแจงปรกติทำให้การแจกแจงอยู่ในรูปแบบ $f(x;\mu,\sigma^2)=(1-p)N(\mu,\sigma^2)+pH$ โดยที่ H คือการแจกแจงที่มาปลอมปนด้วยความน่าจะเป็น p งานวิจัยนี้ศึกษาลักษณะเฉพาะการแจกแจงปรกติปลอมปนระหว่าง $N(\mu,\sigma^2)$ และ $N(\mu,\mathrm{c}^2\sigma^2)$ ทำให้ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีรูปแบบ

$$f(x;\mu,\sigma^2)=(1-p)N(\mu,\sigma^2)+pN(\mu,\mathrm{c}^2\sigma^2) \tag{2.2}$$

เมื่อ c คือ สเกลแฟคเตอร์ (Scale Factor) โดยที่ $\mathrm{c}>0$

p คือ สัดส่วนการปลอมปน (Proportion of Contamination) โดยที่ $0 \le p \le 1$

งานวิจัยส่วนใหญ่มักจำลองข้อมูลให้มีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้นจากการแจกแจงปรกติปลอมปนนี้ เช่น ข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงปรกติที่มีพารามิเตอร์ $N(2,2)$ หากแปลงข้อมูลโดยกำหนด c เท่ากับ 2 และ p เท่ากับ 0.10 ทำให้ข้อมูลมีลักษณะ $90\%N(2,2)+10\%N(2,8)$ หมายความว่าข้อมูลมีลักษณะการแจกแจง $N(2,2)$ อยู่ 90% และข้อมูลมีลักษณะการแจกแจง $N(2,8)$ อยู่ 10%

2.1.2.3 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

เนื่องจากวิธีการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วยวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) จำเป็นต้องมีพื้นฐานเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงแกมมาเข้ามาช่วย สำหรับการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2)

กำหนดให้ X คือช่วงระยะเวลาของการรอคอยจนกว่าจะเกิดความสำเร็จ α ครั้งโดยใช้ระยะเวลารอคอยเฉลี่ย β ทำให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมาซึ่งมีค่าไม่เป็นลบที่มีพารามิเตอร์ $\alpha>0$ และ $\beta>0$ (จำลอง วงษ์ประเสริฐ, 2560)

แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f_X(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)} & ;x>0\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

(2.3)

เมื่อ $\Gamma(\alpha)$ คือฟังก์ชันแกมมาของ α และ $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(X)=\alpha\beta$ และความแปรปรวน $Var(X)=\alpha\beta^2$

โดยการแจกแจงแกมมาขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ α เป็นพารามิเตอร์บอกรูปร่าง (Shape parameter) และ β เป็นพารามิเตอร์บอกสเกล (Scale parameter)

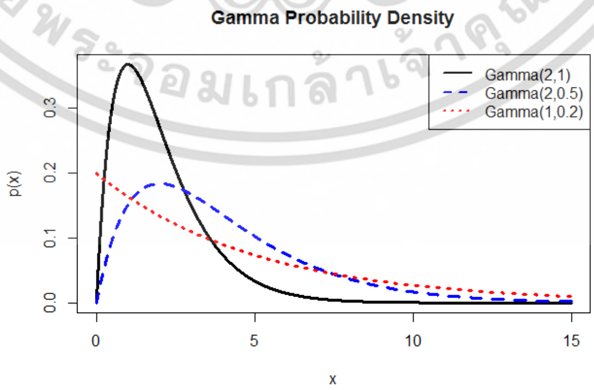
บางครั้งอาจกำหนดให้ X คือช่วงระยะเวลาของการรอคอยจนกว่าจะเกิดความสำเร็จ α ครั้งโดยมีค่าเฉลี่ยในการเกิดความสำเร็จในช่วงเวลา λ ครั้ง ซึ่ง λ มีความสัมพันธ์กับ β ในรูปแบบ $\lambda = \dfrac{1}{\beta}$ โดยที่ $\lambda > 0$ ทำให้ $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ในรูปแบบนี้คือ

$$f_X(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{(-\lambda x)} & ; x > 0 \\ 0 & ; otherwise \end{cases} \tag{2.4}$$

ในงานวิจัยเล่มนี้เมื่อกล่าวถึงการแจกแจงแกมมา จะหมายถึงการแจกแจงที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นในสมการที่ (2.4) เสมอ

หากกรณี $X \sim Gamma\left(\dfrac{n}{2}, 0.5\right)$ จะเรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคกำลังสอง (Chi-squared Distribution) เขียนแทนด้วย $X \sim \chi^2_{(n)}$ เมื่อ n คือค่าองศาเสรี (Degree of Freedom) และถ้า $X \sim Gamma(1, \lambda)$ จะเรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) เขียนแทนด้วย $X \sim Exp(\lambda)$

โดยทั้งการแจกแจงไคกำลังสองและการแจกแจงเลขชี้กำลังเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแกมมา ในการแสดงลักษณะการกระจายของการแจกแจงทั้ง 3 รูปแบบสำหรับใช้ในงานวิจัยได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $Gamma(\alpha, \lambda)$ เป็น $Gamma(2,1)$, $Gamma(2, 0.5)$ และ $Gamma(1, 0.2)$

2.1.2.4 การแจกแจงแกมมาผกผัน (InverseGamma Distribution)

การแจกแจงแกมมาผกผันเป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงแกมมา โดยมีความสัมพันธ์ใน รูปแบบ $Y=\dfrac{1}{X}$ เมื่อ $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y คือ (John , 2008)

$$f_Y(y;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{-\alpha-1}\mathrm{e}^{\left(-\frac{\lambda}{y}\right)} & ;y>0\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \tag{2.5}$$

สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $Y \sim IG(\alpha,\lambda)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(Y)=\dfrac{\lambda}{\alpha-1}$

และ ความแปรปรวน $Var(Y)=\dfrac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

2.1.3 วิธีการประมาณค่าความแปรปรวน

หัวเรื่องนี้จะกล่าวถึงวิธีการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) ทั้ง 5 วิธี โดยใช้ 3 แนวคิดสำหรับการอนุมานเชิงสถิติคือ แนวคิดรูปแบบภาวะน่าจะเป็น (ประกอบด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด) แนวคิดการอนุมานแบบเบส์ (ประกอบด้วย วิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ) และแนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์และวิธีบูตสแทร็ป) โดยแสดงวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนทั้งการประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วงแต่ละวิธี

2.1.3.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นการหาตัวประมาณ ($\hat{\theta}$) ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด

บทนิยามที่ 2.1 (ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น : Likelihood Function)

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (Joint Density Function) ของตัวแปรสุ่ม n ค่า สำหรับพารามิเตอร์ θ

ถ้ากำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็น $f\left(x_i;\theta\right)$ แล้ว ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ

$$\mathrm{L}(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

บทนิยามที่ 2.2 (ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด : Maximum Likelihood Estimator)

ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ซึ่งเป็นค่าหนึ่งของ θ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $\mathrm{L}(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)$ มีค่าสูงสุด จะเรียก $\hat{\theta}$ ว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสุงสุดของ θ

จากบทนิยามที่ 2.1 และ บทนิยามที่ 2.2 สามารถหาตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. หาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ $\mathrm{L}(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

2. หาค่าวิกฤติของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นที่จะทำให้ $\mathbf{L}(\theta)$ มีค่าสูงสุด กล่าวคือหาคำตอบของสมการ $\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{L}(\theta) = 0$ หรือจะใช้ $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathrm{L}(\theta) = 0$ ในการหาคำตอบของสมการที่เป็นไปได้ และจะเรียกสมการดังกล่าวว่า สมการภาวะน่าจะเป็น(Likelihood Equation)

โดยตัวประมาณที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่มีความคงเส้นคงวา และเป็นตัวประมาณที่มีความพอเพียงโดยสมบูรณ์ ซึ่งทั้ง 2 คุณสมบัติเป็นเกณฑ์สำหรับการประเมินการเลือกใช้ตัวประมาณให้เหมาะสมสำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงเป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายอีกด้วย (ประชุม สุวัตถี, 2553)

ต่อไปนี้อธิบายวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปรกติที่มีพารามิเตอร์คือ ค่าเฉลี่ย (μ) และ ความแปรปรวน (σ^2) ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นจากสมการที่ (2.1) คือ

$$f_X(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \begin{array}{l};-\infty < x < \infty \\ ;-\infty < \mu < \infty \\ ;\sigma^2 > 0\end{array}$$

แล้ว ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\mu,\sigma^2) = \mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i;\mu,\sigma^2)$$

$$\mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)\right]$$

$$\ln\mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \left[\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)\right]$$

ทำการอนุพันธ์บางส่วน $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathrm{L}(\mu,\sigma^2)$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} \tag{2.6}$$

ประมาณความแปรปรวน $(\hat{\sigma}^2)$ จากสมการภาวะน่าจะเป็นโดยกำหนด $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = 0$ จะได้

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

ดังนั้น ตัวประมาณความแปรปรวนจากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด คือ

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n} \tag{2.7}$$

เนื่องจาก μ ในสมการที่ (2.7) เป็นพารามิเตอร์รบกวน (Nuisance parameter) ของ σ^2 กล่าวคือ ต้องประมาณค่า μ ก่อนถึงจะประมาณค่า σ^2 ได้ ดังนั้นจึงต้องประมาณค่า μ ด้วย $\overline{x}$ ซึ่ง $\overline{x}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ μ จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} \tag{2.8}$$

แต่ตัวประมาณจากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในสมการที่ (2.8) ไม่มีคุณสมบัติความไม่เอนเอียงซึ่งเป็นคุณสมบัติที่กล่าวถึงบ่อยที่สุดสำหรับการประมาณค่าทางสถิติ

1. ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness)

บทนิยามที่ 2.3 (ความไม่เอนเอียงของตัวประมาณค่า : Unbiasedness of Estimators)

ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ θ ก็ต่อเมื่อ $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

จากบทนิยามที่ 2.3 ที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่า ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณจะต้องเท่ากับพารามิเตอร์พอดี ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าตัวประมาณที่ได้จากสมการ (2.8) เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงสำหรับ σ^2

พิจารณาตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{ML} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{\sigma}^2_{ML}\right) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) \qquad ; \sum_{i=1}^{n}X_i = n\bar{X} \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)
\end{aligned}$$

$$E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{i}^{2}\right)-nE\left(\bar{X}^{2}\right)\right] \tag{2.9}$$

พิจารณาค่า $E\left(X_{i}^{2}\right)$

จาก $Var\left(X_{i}\right)=E\left(X_{i}^{2}\right)-\mu^{2}$

จะได้ว่า $E\left(X_{i}^{2}\right)=Var\left(X_{i}\right)+\mu^{2}$

$$E\left(X_{i}^{2}\right)=\sigma^{2}+\mu^{2}$$

และพิจารณาค่า $E\left(\bar{X}^{2}\right)$

จาก $Var\left(\bar{X}\right)=E\left(\bar{X}^{2}\right)-\mu^{2}$

จะได้ว่า $E\left(\bar{X}^{2}\right)=Var\left(\bar{X}\right)+\mu^{2}$

$$E\left(\bar{X}^{2}\right)=\frac{\sigma^{2}}{n}+\mu^{2}$$

นำค่า $E\left(X_{i}^{2}\right)=\sigma^{2}+\mu^{2}$ และ $E\left(\bar{X}^{2}\right)=\frac{\sigma^{2}}{n}+\mu^{2}$ ไปแทนในสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^{2}+\mu^{2}\right)-n\left(\frac{\sigma^{2}}{n}+\mu^{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[n\left(\sigma^{2}+\mu^{2}\right)-\sigma^{2}-n\mu^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\sigma^{2}+n\mu^{2}-\sigma^{2}-n\mu^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\sigma^{2}-\sigma^{2}\right)$$

$$E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\right)=\frac{\sigma^{2}\left(n-1\right)}{n} \tag{2.10}$$

เนื่องจาก $E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\right)\neq\sigma^{2}$ ดังนั้น $\hat{\sigma}_{ML}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงของ σ^2

จาก $\hat{\sigma}_{ML}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ σ^2 สามารถปรับปรุงตัวประมาณจากสมการ (2.8) ให้เป็นตัวประมาณค่าตัวใหม่ที่มีคุณสมบัติไม่เอนเอียงของ σ^2 ดังนี้

พิจารณาจากสมการที่ (2.10) $E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\right)=\frac{\sigma^{2}\left(n-1\right)}{n}$

เนื่องจากสามารถเขียน $\hat{\sigma}_{ML}^{2}$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้นของ σ^2 ได้

จะได้ว่า $$E\left(\hat{\sigma}_{ML}^{2}\frac{n}{(n-1)}\right)=\sigma^{2}$$

นั่นคือ $\hat{\sigma}_{ML}^{2}\frac{n}{(n-1)}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ σ^2 หรือกล่าวได้ว่าตัวประมาณ

$\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\hat{\sigma}_{ML}^{2}\frac{n}{(n-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ σ^2

โดยส่วนใหญ่แล้วสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลมักจะใช้สูตร $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ มากกว่าใช้ $\hat{\sigma}_{ML}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ ในการประมาณค่าความแปรปรวน σ^2 แต่เนื่องจาก $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นการปรับปรุงตัวประมาณสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน σ^2 ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จำเป็นต้องพิจารณาคุณสมบัติของตัวประมาณ $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}$ อื่น ๆ ที่สำคัญนอกจากคุณสมบัติความไม่เอนเอียง

2. ความคงเส้นคงวา (Consistency)

ความคงเส้นคงวาเป็นการวัดคุณสมบัติของตัวประมาณที่ว่า หากเพิ่มขนาดของตัวอย่างที่สุ่มมาแล้วค่าของตัวประมาณที่คำนวณได้จะต้องมีค่าเข้าใกล้พารามิเตอร์มากขึ้น

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}$ เป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติความคงเส้นคงวาของ σ^2 โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 2.1

ทฤษฎีบทที่ 2.1 (ความคงเส้นคงวาของตัวประมาณค่า : Consistency of Estimators)

ถ้า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ จากตัวอย่างขนาด n

$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta$ และ $\lim_{n\to\infty}Var\left(\hat{\theta}_n\right)=0$ แล้ว $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ

พิจารณาตัวประมาณ $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

โดยที่ $E\left(\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}\right)=\sigma^{2}$ และ $Var\left(\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}\right)=\frac{2\sigma^{4}}{n-1}$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}\right)=\sigma^{2}$ และ $\lim_{n\to\infty}Var\left(\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}\right)=0$

ดังนั้น $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติความคงเส้นคงวาของ σ^2

3. ความพอเพียง (Sufficiency)

ความพอเพียงเป็นการวัดคุณสมบัติของตัวประมาณที่ว่า ตัวประมาณมีความสามารถเพียงพอที่ใช้ข้อมูลมาจากประชากรไว้ได้มากที่สุดสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า $\bar{x}$ และ $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นสถิติพอเพียงร่วมสำหรับการประมาณค่า μ และ σ^2 โดยอาศัยทฤษฎีการแยกตัวประกอบของ Fisher และ Neyman

ทฤษฎีบทที่ 2.2 (ทฤษฎีการแยกตัวประกอบ : Factorization Theorem)

กำหนดให้ $X_1,X_2,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f\left(\cdot;\theta\right)$ โดยที่พารามิเตอร์ θ อาจเป็นเวกเตอร์เซตของตัวสถิติ

$S_1=s_1\left(X_1,X_2,...,X_n\right),...,S_r=s_r\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ เป็นสถิติพอเพียงร่วมก็ต่อเมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $X_1,X_2,...,X_n$ อยู่ในรูปของ

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=g\left[s_1\left(x_1,...,x_n\right),...,s_r\left(x_1,...,x_n\right);\theta\right]\cdot h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

$$=g\left[s_1,...,s_r;\theta\right]\cdot h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

โดยที่ $h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบและไม่อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ θ

และ $g\left[s_1,...,s_r;\theta\right]$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบซึ่งขึ้นอยู่กับ $x_1,x_2,...,x_n$ เฉพาะในฟังก์ชัน

$$s_1\left(\cdot,...,\cdot\right),...,s_r\left(\cdot,...,\cdot\right)$$

จากทฤษฎีบทที่ 2.2 เริ่มจาก

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]$$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i-\bar{x}\right)+\left(\bar{x}-\mu\right)\right]^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i-\bar{x}\right)^2+\left(\bar{x}-\mu\right)^2+2\left(x_i-\bar{x}\right)\left(\bar{x}-\mu\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}-\mu\right)^2 \quad ;\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)=0$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2$$

เมื่อ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\left(n-1\right)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2=\left(n-1\right)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2$

$$\therefore f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(n-1\right)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2\right]\right\}$$

นำมาเทียบกับทฤษฎีแยกตัวประกอบ

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n;\mu,\sigma^2)=g\left[s_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right),s_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right);\mu,\sigma^2\right]\cdot h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

จะได้ว่า

$$g\left[s_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right),s_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right);\mu,\sigma^2\right]=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2\right]\right\}$$

โดยที่ $s_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\bar{x}$ และ $s_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$

และ $h\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=1$

ดังนั้น $\bar{X}$ และ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นสถิติพอเพียงร่วมของ μ และ σ^2

4. ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด

(Minimum Variance Unbiased Estimator : MVUE)

ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด เป็นการพิจารณาความแปรปรวนของตัวประมาณโดยที่ตัวประมาณนั้นมีคุณสมบัติอื่น ๆ โดยเฉพาะคุณสมบัติตัวประมาณไม่เอนเอียง

บทนิยามที่ 2.4 ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE)

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุดของพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\theta}$ ถ้า $\hat{\theta}$ มีความแปรปรวนต่ำที่สุดในบรรดาตัวประมาณไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\theta}$

เนื่องจากบทนิยามที่ 2.4 การตรวจสอบความแปรปรวนของตัวประมาณค่าไม่เอนเอียงทั้งหมดของ $\boldsymbol{\theta}$ เป็นเรื่องค่อนข้างยากพอสมควร ดังนั้นจึงใช้อสมการเครเมอร์-ราว ($Crame'r - Rao\ Inequality$) เข้ามาช่วยแสดงให้เห็นว่า $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด

ทฤษฎีบทที่ 2.3 (อสมการเครเมอร์-ราว: $Crame'r - Rao\ Inequality$)

กำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ถ้า $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของฟังก์ชัน $g(\theta)$ ของพารามิเตอร์ θ แล้วภายใต้เงื่อนไขปรกติจะได้ว่า

$$V(T) \geq \frac{\left[g'(\theta)\right]^2}{nE\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2}$$

จากทฤษฎีบทที่ 2.3 สามารถใช้อสมการเครเมอร์ราวได้ในรูปแบบอื่น ๆ ได้ คือ

$$V(T) \geq \frac{\left[g'(\theta)\right]^2}{-E\left(\frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}}{\partial \theta^2}\right)}$$

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ σ^2

พิจารณา $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ โดยที่ $E\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \sigma^2$ และ $Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

กล่าวได้ว่า $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ σ^2

ต่อไปคำนวณค่า $\dfrac{\left[g'(\sigma^2)\right]^2}{-E\left(\frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}}{\partial \sigma^4}\right)}$

เริ่มจาก $g(\sigma^2) = \sigma^2$ จะได้ว่า

$$g'(\sigma^2) = 1 \qquad (2.11)$$

และจากสมการที่ (2.6)

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathrm{L}(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$$

กำหนดให้ $\sigma^2 = \theta$ เพื่อให้ง่ายในการอนุพันธ์บางส่วน จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathrm{L}(\mu,\theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\mu,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\mu,\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\mu,\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}E(x_i-\mu)^2$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\theta$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{n\theta}{\theta^3}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\theta)}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{n}{2\theta^2}$$

หรือ
$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\mathrm{L}(\sigma^2)}{\partial\sigma^4}\right) = -\frac{n}{2\sigma^4} \qquad (2.12)$$

จากสมการที่ (2.11) และ (2.12) จะได้ $\dfrac{\left[g'\left(\sigma^2\right)\right]^2}{-E\left(\dfrac{\partial^2 \ln\mathrm{L}}{\partial\sigma^4}\right)} = \dfrac{2\sigma^4}{n}$

สรุปได้ว่า $Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$ และ $\dfrac{\left[g'\left(\sigma^2\right)\right]^2}{-E\left(\dfrac{\partial^2 \ln\mathrm{L}}{\partial\sigma^4}\right)} = \dfrac{2\sigma^4}{n}$

เนื่องจาก $$Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) > \frac{\left[g'\left(\sigma^2\right)\right]^2}{-E\left(\frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}}{\partial \sigma^4}\right)}$$ ทุกค่า n

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ จึงเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ σ^2

5. ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency)

จากทฤษฎีบทอสมการเครเมอร์-ราว สามารถวัดความมีประสิทธิภาพของตัวประมาณได้ โดยประสิทธิภาพสูงสุดของพารามิเตอร์ θ เมื่อ $Var(T) = \dfrac{\left[g'(\theta)\right]^2}{nE\left(\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2}$ แต่อย่างไรก็ตามสามารถวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณได้จากบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 2.5 (ประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า : Efficiency of Estimators)

ประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ เทียบกับตัวประมาณ $\hat{\theta}_0$ เขียนแทนด้วย $e\left(\hat{\theta}\right)$ โดยที่

$$e\left(\hat{\theta}\right) = \frac{Var\left(\hat{\theta}_0\right)}{Var\left(\hat{\theta}\right)}$$

จากบทนิยามที่ 2.5 ตัวประมาณ $\hat{\theta}$ มีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อ $e\left(\hat{\theta}\right) = 1$

กรณีถ้าหาก $\hat{\theta}$ ไม่ได้มีประสิทธิภาพมากที่สุด ยังสามารถสรุปได้ว่าตัวประมาณมีประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับของ θ จากบทนิยามที่ 2.6 ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 2.6 (ประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับ : Asymptotically Most Efficient)

ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ ของพารามิเตอร์ θ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับ (Asymptotically most efficient estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} e\left(\hat{\theta}_n\right) = 1$$

ต่อไปนี้จะแสดงว่า ตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่ได้มีประสิทธิภาพสูงสุด แต่มีประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับของ σ^2

จาก $Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$ และ $Var\left(\hat{\sigma}^2_0\right) = \dfrac{\left[g'\left(\sigma^2\right)\right]^2}{-E\left(\dfrac{\partial^2 \ln \mathrm{L}}{\partial \sigma^4}\right)} = \dfrac{2\sigma^4}{n}$

ซึ่ง $Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) \neq Var\left(\hat{\theta}_0\right)$

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่ได้มีประสิทธิภาพสูงสุดสำหรับการประมาณค่า σ^2 โดยประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ คือ

$$e\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \frac{Var\left(\hat{\sigma}^2_0\right)}{Var\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right)}$$

$$= \frac{n-1}{n}$$

เนื่องจาก
$$\lim_{n\to\infty} e\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} e\left(\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}\right) = 1$$

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณมีประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับสำหรับการประมาณค่า σ^2 หรือประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ ขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่าง กล่าวคือตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ จะมีประสิทธิภาพในการประมาณค่า σ^2 มากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่าง n มากขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ มีคุณสมบัติความไม่เอนเอียงและความแปรปรวนต่ำสุด ความคงเส้นคงวา ความพอเพียง แต่มีประสิทธิภาพสูงสุดเชิงกำกับสำหรับการประมาณค่า σ^2

ต่อไปหาช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยใช้ $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$ เป็นตัวประมาณ

เนื่องจาก $\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ โดยที่ $E\left(\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\sigma^2}\right) = n-1$ และ $Var\left(\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

จะได้ว่า
$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}\right) = 1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 คือ

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

2.1.3.2 วิธีของเบส์ (Bayes Method)

ในการประมาณค่าในวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจากที่กล่าวไว้ในข้างต้นเป็นวิธีการประมาณค่าโดยไม่ทราบข้อมูลเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ θ ในบางสถานการณ์หากทราบ ทราบข้อมูลเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ θ จะมีประโยชน์ช่วยในการประมาณค่ามากขึ้น แนวคิดวิธีการอนุมานแบบเบส์จะถือว่า พารามิเตอร์ถือเป็นตัวแปรสุ่มตัวหนึ่งที่เป็นสมาชิกใน Θ ($\theta \in \Theta$) และ $g(\theta)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นบน Θ ซึ่งอธิบายคุณลักษณะของ θ ก่อนที่สุ่มตัวอย่างมาสังเกตได้ หลังจากนั้นสุ่มตัวอย่างมาขนาด n โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x_i|\theta)$ เพื่อทำการสังเกตการเปลี่ยนแปลง θ ได้จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

บทนิยามที่ 2.7 (ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง : Posterior Probability Distribution)

กำหนดให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ $f(x_i|\theta)$ โดยที่ θ คือพารามิเตอร์ของการแจกแจงและมีฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (Prior Distribution Function) คือ $g(\theta)$ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังหรือฟังก์ชันการแจกแจงที่ปรับปรุงแล้ว (Posterior Probability Distribution) คือ

$$f(\theta|x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) g(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) g(\theta) d\theta}$$

หรือพิจารณาในรูปแบบของวงศ์คู่สังยุค (Conjugate Function)

$$f(\theta|x_1, x_2, ..., x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) g(\theta)$$

จากบทนิยาม 2.7 $f(\theta|x_1, x_2, ..., x_n)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ Θ ที่อธิบายเกี่ยวกับ θ ภายหลังจากการสังเกตที่ได้จากข้อมูล (อัชฌา อระวีพร, 2562)

ต่อไปนี้อธิบายวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ด้วยวิธีของเบส์

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปรกติโดยที่ $X \sim N(\mu,\phi^{-1})$ เมื่อ $\phi^{-1}=\sigma^2$ ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$f_X(x_i|\mu,\sigma^2)=\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\phi}{2}(x_i-\mu)^2\right) \qquad ;-\infty<x<\infty \quad ;-\infty<\mu<\infty \quad ;\phi>0$$

จากบทนิยาม 2.1 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) ของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ คือ

$$\mathrm{L}(\mu,\phi)=\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}. \tag{2.13}$$

พิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของ ϕ ที่มีการแจกแจงแกมมา $\phi=\frac{1}{\sigma^2}\sim Gamma(\alpha,\lambda)$ คือ

$$\mathrm{g}(\phi;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda} & ;\phi>0\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \tag{2.14}$$

ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายหลัง คือ

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{\left[\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda}\right)}{\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda}\right)d\phi}$$

เนื่องจากค่าคงที่ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ ϕ จะถูกหารทิ้ง ดังนั้น

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{\left[\phi^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]\left(\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda}\right)}{\int_0^{\infty}\left[\phi^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]\left(\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda}\right)d\phi}$$

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{\phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]}{\int_0^{\infty}\phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]d\phi} \tag{2.15}$$

พิจารณาตัวส่วน $\int_0^\infty \phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1} \exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]d\phi$ กำหนดให้ $B=\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

จะได้ว่า $\int_0^\infty \phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1} \exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]d\phi = \int_0^\infty \phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi B\right]d\phi$

จัดให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันแกมมา $\Gamma(\alpha)$ เมื่อ $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ จะได้

$$\int_0^\infty \phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi B\right]d\phi = \frac{1}{B^{\frac{n}{2}+\alpha}}\int_0^\infty B\phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi B\right]d(-\phi B)$$

$$= \frac{1}{B^{\frac{n}{2}+\alpha}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]^{\frac{n}{2}+\alpha}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)$$

นำค่า $\int_0^\infty \phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1} \exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]d\phi = \frac{1}{\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]^{\frac{n}{2}+\alpha}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)$

ไปแทนในสมการที่ (2.15) จะได้ว่า

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right) = \frac{\phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]^{\frac{n}{2}+\alpha}\exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \quad (2.16)$$

กำหนดให้ $A=\frac{n}{2}+\alpha$ และ $B=\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ไปแทนในสมการที่ (2.15) จะได้ว่า

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right) = \frac{\phi^{A-1}\left[B\right]^A\exp\left[-\phi\left\{B\right\}\right]}{\Gamma(A)} \quad (2.17)$$

ซึ่งจากสมการที่ (2.17) จะได้ว่า $f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right) \sim Gamma(A,B)$

เมื่อ $\phi=\frac{1}{\sigma^2}$ และ $\sigma^2=\frac{1}{\phi}$ ดังนั้น $f\left(\sigma^2|x_1,x_2,...,x_n\right) \sim IG(A,B)$

หรือหากพิจารณาในรูปแบบของวงศ์คู่สังยุค (Conjugate Function)

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)\propto L(\mu,\phi)g(\phi;\alpha,\lambda)$$

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)\propto\left[\left(\frac{\phi}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\phi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\phi^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\phi\lambda}\right)$$

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)\propto\phi^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left[-\phi\left\{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\right]$$

$$f\left(\phi|x_1,x_2,...,x_n\right)\propto Gamma(A,B)$$ เมื่อ $A=\frac{n}{2}+\alpha$ และ $B=\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

เนื่องจาก $\phi=\frac{1}{\sigma^2}$ และ $\sigma^2=\frac{1}{\phi}$ นั่นคือ $f\left(\sigma^2|x_1,x_2,...,x_n\right)\propto IG(A,B)$

ดังนั้น ตัวประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีของเบส์ คือ

$$\hat{\sigma}^2_{Bayes}=\frac{B}{A-1}=\frac{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)-1}$$

กรณีไม่ทราบค่า μ สามารถใช้ $\bar{x}$ ประมาณค่าความแปรปรวนด้วยวิธีเบส์ จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}^2_{Bayes}=\frac{B}{A-1}=\frac{\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)-1}$$

ในงานวิจัยนี้กำหนดพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของ ϕ ด้วยการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $Gamma(\alpha,\lambda)$ เป็น $Gamma(2,1)$, $Gamma(2,0.5)$ และ $Gamma(1,0.2)$

สำหรับการหาช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนสำหรับวิธีของเบส์ใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง ซึ่งกล่าวในทฤษฎีบทที่ 2.4 ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.4 (ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง : Central Limit Theorem)

กำหนดให้ $X_1,X_2,X_3,...$ เป็นลำดับของตัวอย่างจากการสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกัน โดยมี $E\left(X_i\right)=\mu$ และ $Var\left(X_i\right)=\sigma^2$ ซึ่ง $0<\sigma^2<\infty$ ให้ $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ และให้ $G_n(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของ $\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ ค่า $-\infty<x<\infty$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)} dy$$

นั่นคือ $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ มีขีดจำกัดการแจกแจงเป็นการแจกแจงปรกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1

(จำลอง วงษ์ประเสริฐ, 2560)

ต่อไปหาช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยใช้ $\hat{\sigma}^2_{Bayes}$ เป็นตัวประมาณ

เนื่องจากการแจกแจงภายหลังของ $\dfrac{1}{\phi^2} = \sigma^2$ คือ $f\left(\sigma^2 \middle| x_1, x_2, ..., x_n\right) \sim IG\left(A, B\right)$

เมื่อ $A = \dfrac{n}{2} + \alpha$ และ $B = \lambda + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

จะได้ตัวประมาณเบส์ภายหลังของ σ^2 คือ

$$\hat{\sigma}^2_{Bayes} = E(\sigma^2 \mid x_1, ..., x_n) = \frac{B}{A-1} = \frac{\lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\left(\frac{n}{2} + \alpha\right) - 1}$$

และ $Var(\sigma^2 \mid x_1, ..., x_n) = \dfrac{B^2}{(A-1)^2(A-2)} = \dfrac{\left[\lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2}{\left[\left(\frac{n}{2} + \alpha\right) - 1\right]^2 \left[\left(\frac{n}{2} + \alpha\right) - 2\right]}$

จากทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้

$$Z = \frac{\left(\frac{B}{A-1}\right) - \sigma^2}{\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\left(\frac{B}{A-1}\right) - \sigma^2}{\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}\le\left(\frac{B}{A-1}\right)-\sigma^2\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}\right)=1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 คือ

$$P\left(\left(\frac{B}{A-1}\right)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}\le\sigma^2\le\left(\frac{B}{A-1}\right)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}}\right)=1-\alpha$$

2.1.3.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method : MCMC)

เนื่องจากวิธีของเบส์เป็นการประมาณค่าโดยตัวประมาณได้มาจากค่าคาดหวังของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง $f\left(\theta|x_1,x_2,...,x_n\right)$ ซึ่งต้องนำฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์มาใช้ $g\left(\theta\right)$ ดังนั้นวิธีของเบส์จึงต้องอาศัยความรู้ในการกำหนดค่าพารามิเตอร์ θ ให้ถูกต้องซึ่งหากกำหนดค่าพารามิเตอร์ผิดพลาดจะทำให้การประมาณค่าผิดพลาดไปด้วย นักสถิตินำเทคนิคมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมาใช้ในการประมาณค่าจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังซึ่งสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีกิบส์ (Gibbs Sampling) มาใช้ในการสร้างค่าด้วยวิธีมาร์คอฟ เชน (Markov Chain) จากการสุ่มตัวอย่างของการแจกแจง แล้วประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยมอนติคาร์โล (Monte Carlo) โดยขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างจากวิธีมาร์คอฟ เชน มีดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\theta^{(0)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน

2. สร้างค่าจากขั้นตอนที่ 1 มาจำนวน T ค่า โดยตรวจสอบลักษณะการแจกแจงหลังการสร้างค่าว่าเป็นไปตามลักษณะการแจกแจงที่ต้องการหรือไม่ หากไม่เป็นไปตามต้องการให้ทำการสร้างค่าเพิ่มขึ้น

3. เมื่อได้ค่าจากขั้นตอนที่ 2 ทำการเลือกค่าสังเกตตั้งแต่ค่า B เป็นต้นไปหลังจากนั้นทำการพิจารณาค่า $\left\{\theta^{(B+1)},\theta^{(B+2)},...,\theta^{(T)}\right\}$ ในรูปของตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง และทำการตรวจสอบลักษณะการแจกแจงสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

ซึ่งสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ θ โดยใช้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟได้จาก

$$\bar{\theta}=\frac{\sum_{t=1}^{T}\theta^{(T)}}{T}$$

(อัชฌา อระวีพร, 2555)

ต่อไปนี้อธิบายวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\alpha^{(t)}$ และ $\lambda^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา

2. สร้างค่า $\alpha^{(t)}$ และ $\lambda^{(t)}$ จากขั้นตอนที่ 1. จำนวน T ค่า เมื่อ t=1,2,...,T

3. สร้างค่าประมาณความแปรปรวน $\sigma^{2(t)}$ จากการแจกแจงภายหลัง ของการแจกแจงแกมมาด้วยพารามิเตอร์ $\alpha^{(t)}$ และ $\lambda^{(t)}$

4. สร้างกราฟดูลักษณะการแจกแจงของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังเพื่อดูความผิดปกติของข้อมูล

ดังนั้น ตัวประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ คือ

$$\hat{\sigma}^2_{MCMC} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \sigma^{2(t)}}{T}$$

สำหรับการหาช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนสำหรับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีบทที่ 2.4 และใช้ $\hat{\sigma}^2_{MCMC}$ เป็นตัวประมาณ

จะได้ $E(\hat{\sigma}^2_{MCMC}) = \frac{\sum_{t=1}^{T} \sigma^{2(t)}}{T}$ และ $Var(\hat{\sigma}^2_{MCMC}) = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\sigma^{2(t)} - \hat{\sigma}^2_{MCMC} \right)^2}{T-1}$

จากทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้

$$Z = \frac{\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} \sigma^{2(t)}}{T} \right) - \sigma^2}{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\sigma^{2(t)} - \hat{\sigma}^2_{MCMC} \right)^2}{T-1}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} \sigma^{2(t)}}{T} \right) - \sigma^2}{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\sigma^{2(t)} - \hat{\sigma}^2_{MCMC} \right)^2}{T-1}}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma^{2(t)}-\hat{\sigma}_{MCMC}^{2}\right)^{2}}{T-1}} \leq \left(\frac{\sum_{t=1}^{T}\sigma^{2(t)}}{T}\right)-\sigma^{2} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma^{2(t)}-\hat{\sigma}_{MCMC}^{2}\right)^{2}}{T-1}}\right)=1-\alpha$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 คือ

$$P\left(\left(\frac{\sum_{t=1}^{T}\sigma^{2(t)}}{T}\right)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma^{2(t)}-\hat{\sigma}_{MCMC}^{2}\right)^{2}}{T-1}} \leq \sigma^{2} \leq \left(\frac{\sum_{t=1}^{T}\sigma^{2(t)}}{T}\right)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma^{2(t)}-\hat{\sigma}_{MCMC}^{2}\right)^{2}}{T-1}}\right)=1-\alpha$$

2.1.3.4 วิธีแจ็คไนฟ์ (Jackkinfe Method) (Efron and Tibshirani ,1993)

วิธีแจ็คไนฟ์ วิธีการหนึ่งในการหาค่าประมาณของความแปรปรวนโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างซ้ำ โดยมีวิธีการดังนี้

1. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีขนาดตัวอย่าง n โดยจะเรียกข้อมูลชุดนี้ว่า ข้อมูลดั้งเดิม (Original data)

2. นำข้อมูลที่ได้มาจากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างข้อมูลชุดใหม่ n ครั้ง โดย

ครั้งที่ 1 สร้างตัวอย่างชุดใหม่ โดยตัดข้อมูล x_1 ออกจากข้อมูลตั้งต้น แล้วคำนวณด้วยข้อมูลตัวที่เหลือ

ในการประมาณค่าของ σ^2 ในที่นี้กำหนดให้เป็น $S_{(1)}^2$

ครั้งที่ 2 สร้างตัวอย่างชุดใหม่ โดยตัดข้อมูล x_2 ออกจากข้อมูลตั้งต้น แล้วคำนวณด้วยข้อมูลตัวที่เหลือ

ในการประมาณค่าของ σ^2 ในที่นี้กำหนดให้เป็น $S_{(2)}^2$

ทำไปเรื่อย ๆ จนถึงครั้งที่ n

ครั้งที่ n สร้างตัวอย่างชุดใหม่ โดยตัดข้อมูล x_n ออกจากข้อมูลตั้งต้น แล้วคำนวณด้วยข้อมูลตัวที่เหลือ

ในการประมาณค่าของ σ^2 ในที่นี้กำหนดให้เป็น $S_{(n)}^2$

โดยการคำนวณข้อมูลตัวที่เหลือในการประมาณค่าของ σ^2 จะใช้สูตร $\hat{\sigma}_{Aj.\mathrm{ML}}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

ทุกครั้ง เมื่อ n คือ จำนวนตัวอย่างหลังจากการตัดค่าสังเกต 1 ค่า จะได้ $S_{(1)}^2, S_{(2)}^2, \ldots, S_{(n)}^2$

ดังนั้นตัวประมาณของความแปรปรวนด้วยวิธีแจ็คไนฟ์คือ $\hat{\sigma}_{Jack}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{(i)}^2}{n}$

และช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 ด้วยวิธีด้วยวิธีแจ็คไนฟ์ คือ

$$P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} S_{(i)}^2}{n}\right) - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(S_{(i)}^2 - \hat{\sigma}_{Jack}^2\right)^2\right]}{n(n-1)}} < \sigma^2 < \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} S_{(i)}^2}{n}\right) + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(S_{(i)}^2 - \hat{\sigma}_{Jack}^2\right)^2\right]}{n(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

2.1.3.5 วิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method) (Efron and Tibshirani ,1993)

วิธีบูตสแทร็ป วิธีการหนึ่งในการหาค่าประมาณของความแปรปรวนโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างซ้ำโดยมีวิธีการดังนี้

1. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีขนาดตัวอย่าง n โดยจะเรียกข้อมูลชุดนี้ว่า ข้อมูลดั้งเดิม (Original data)

2.นำข้อมูลที่ได้มาจากขั้นตอนที่ 1 มาสร้างข้อมูลชุดใหม่ B ครั้งโดย

ครั้งที่ 1 สุ่มตัวอย่างซ้ำจากข้อมูลตั้งต้นโดยสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จำนวน n ค่า จะได้ตัวอย่างบูตสแทร็ป $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ จากนั้นนำตัวอย่างบูตสแทร็ป มาคำนวณค่าประมาณของ σ^2 กำหนดให้เป็น S_1^{2*}

ครั้งที่ 2 สุ่มตัวอย่างซ้ำจากข้อมูลตั้งต้นโดยสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จำนวน n ค่า จะได้ตัวอย่างบูตสแทร็ป $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ จากนั้นนำตัวอย่างบูตสแทร็ป มาคำนวณค่าประมาณของ σ^2 กำหนดให้เป็น S_2^{2*}

ทำไปเรื่อย ๆ จนถึงครั้งที่ B

ครั้งที่ B สุ่มตัวอย่างซ้ำจากข้อมูลตั้งต้นโดยสุ่มตัวอย่างแบบคืนที่จำนวน n ค่า จะได้ตัวอย่างบูตสแทร็ป $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ จากนั้นนำตัวอย่างบูตสแทร็ป มาคำนวณค่าประมาณของ σ^2

กำหนดให้เป็น S_B^{2*}

จะได้ $S_1^{2*}, S_2^{2*}, \ldots, S_B^{2*}$

โดยการคำนวณข้อมูลข้อมูลชุดใหม่ในการประมาณค่าของ σ^2 จะใช้สูตร $\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ ทุกครั้ง ปกติแล้วมักกำหนด ค่า B ตามผู้ใช้งาน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงกำหนดค่า B เท่ากับ 10,000 ค่า

ดังนั้นตัวประมาณของความแปรปรวนด้วยวิธีบูตสแทร็ป คือ $\hat{\sigma}^2_{Boot} = \dfrac{\sum_{i=1}^{B} s_i^{2*}}{B}$

เนื่องจากหากกำหนดค่า B จำนวนมากพอทำให้ มีลักษณะการแจกแจงของตัวประมาณมีค่าใกล้เคียงการแจกแจงปรกติ

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ σ^2 ด้วยวิธีด้วยวิธีบูตสแทร็ป คือ

$$P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{B} s_i^{2*}}{B}\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\left[\sum_{i=1}^{B}\left(s_i^{2*} - \hat{\sigma}^2_{Boot}\right)^2\right]}{B-1}} < \sigma^2 < \left(\frac{\sum_{i=1}^{B} s_i^{2*}}{B}\right) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\left[\sum_{i=1}^{B}\left(s_i^{2*} - \hat{\sigma}^2_{Boot}\right)^2\right]}{B-1}}\right) = 1-\alpha$$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งในงานวิจัยเล่มนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) ซึ่งถือเป็นพารามิเตอร์สำคัญตัวหนึ่งสำหรับการแจกแจงปรกติ การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องใช้เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษางานวิจัยดังนี้

Araveeporn (2014) ศึกษาประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดสำหรับการแจกแจงปัวซงด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยงานวิจัยนี้กำหนดพารามิเตอร์ λ อยู่ที่ 0.5, 2, 5, 10 และ 20 และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 30, 50, 100 และ 200 ผลการศึกษาพบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเมื่อ ขนาดตัวอย่าง และ λ มีขนาดเล็ก โดยเฉพาะกรณีที่ $\lambda = 0.5$ ทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษา วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าดีที่สุด ส่วนวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าได้ดีเมื่อ λ มีขนาดใหญ่

ศรสวรรค์ บุญเพ็ญ และคณะ (2558) ศึกษาประสิทธิภาพการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการแจกแจงไวบูลล์กรณีสองพารามิเตอร์โดยศึกษาพารามิเตอร์ขนาด (η) เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ (β) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์รูปร่างด้วยวิธีบูตสแทร็ปและวิธีแจ็คไนฟ์ ซึ่งกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 พารามิเตอร์ β เท่ากับ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 และพารามิเตอร์ η เท่ากับ 1, 1.5, 2, 2.5, และ 3 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ผลการศึกษาพบว่า ประสิทธิภาพการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ขนาด (η) มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าได้ดีเมื่อมีขนาดตัวอย่างใหญ่เพียงพอ (n ไม่ต่ำกว่า 30) โดยวิธีบูตสแทร็ปมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นได้ดีกว่าวิธีแจ็คไนฟ์

Araveeporn (2016) ศึกษาประสิทธิภาพการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย (μ) สำหรับการแจกแจงปรกติด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์ระหว่างวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยกำหนดลักษณะการแจกแจงปรกติที่มีพารามิเตอร์ $N(\mu,\sigma^2)$ เป็น $N(2,2)$, $N(2,4)$, $N(2,9)$ และ $N(2,16)$ และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 25 และ 30 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.90, 0.95 และ 0.99 ผลการศึกษาพบว่า ส่วนใหญ่แล้ววิธีของเบส์มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าได้ดีที่สุด (AW ต่ำที่สุด) หากพิจารณาขนาดตัวอย่างพบว่า ทั้ง 4 วิธีที่ศึกษามีความสามารถในการประมาณค่าเฉลี่ยได้ดีพอ (CC ครอบคลุมเกณฑ์ที่กำหนด) เมื่อ n ไม่ต่ำกว่า 10

บำรุงศักดิ์ เผื่อนอารีย์ และ กรรวี รุ่งสว่าง (2560) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานด้วยวิธีบูตสแทร็ป เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงจำเป็นต้องทราบลักษณะการแจกแจงที่แท้จริงของตัวประมาณ แต่ในทางปฏิบัติมักไม่ทราบลักษณะการแจกแจงของค่ามัธยฐานที่ได้จากตัวอย่างได้ วิธีบูตสแทร็ป เป็นอีกหนึ่งทางเลือกในการสร้างการแจกแจงค่ามัธยฐานเพื่อสร้างช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานได้ โดยงานวิจัยนี้จำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงเลขชี้กำลังแล้ว

นำมาเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นค่ามัธยฐาน 3 วิธี ประกอบด้วย วิธีที่ใช้ค่ามัธยฐานของข้อมูลตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าซึ่งใช้หลักการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย วิธีบูตสแทร็ปมาตรฐาน และวิธีเปอร์เซ็นไทล์บูตสแทร็ป กำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 20, 30, 50 และ 100 และกำหนดพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงเลขชี้กำลังด้วย λ เท่ากับ 0.5, 1 และ 2 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.90 ผลการศึกษาพบว่าวิธีบูตสแทร็ปมาตรฐานให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่แตกต่างจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกสถานการณ์ที่ศึกษา หากพิจารณาความกว้างของช่วงเฉลี่ยพบว่าวิธีบูตสแทร็ปมาตรฐานให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 50 ส่วนในกรณีตัวอย่างที่มีขนาด 50 และ 100 วิธีเปอร์เซ็นไทล์บูตสแทร็ปมีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นมากกว่าวิธีบูตสแทร็ปมาตรฐาน อย่างไรก็ตามวิธีที่ใช้ค่ามัธยฐานของตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานทุกกรณี

อนุวัฒน์ คำมา และคณะ (2560) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนของความแปรปรวนสองประชากรด้วยวิธีเอฟ วิธีขีดจำกัดส่วนกลาง วิธีบูตสแทร็ป และวิธีบูตสแทร็ปร่วมกับ Rousseeuw และ Croux เมื่อข้อมูลทั้งสองกลุ่มมีการแจกแจงปรกติ การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงเลขชี้กำลัง ที่สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 กำหนดขนาดตัวอย่างทั้งสองกลุ่มเท่ากัน เท่ากับ (10,10), (20,20), (30,30), (50,50), (70,70) และ (100,100) และขนาดตัวอย่างทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน คือ (10,20), (30,50) และ (70,100) ผลการศึกษาพบว่ากรณีข้อมูลมีการแจกแจงปรกติวิธีเอฟมีประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนของความแปรปรวนสองประชากรได้ดีกว่าวิธีอื่นๆ แต่ในกรณีข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงปรกติ (การแจกแจงแกมมาและการแจกแจงเลขชี้กำลัง) วิธีบูตสแทร็ปร่วมกับ Rousseeuw และ Croux มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าดีที่สุด

อัญมณี กุมมาระกะ และ อัชฌา อระวีพร (2560) ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ p รูปแบบจุดสำหรับการแจกแจงทวินามเชิงลบ $X \sim NBin(r,p)$ เมื่อ p คือ ความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง และ r คือ จำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จ โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟในการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ดังกล่าว โดยกำหนด p ในการศึกษาเท่ากับ 0.2, 0.5 และ 0.8 และ กำหนด r และ ขนาดตัวอย่างตามกรณีดังนี้ กรณีขนาดตัวอย่างเล็ก (n=10) กำหนดค่า r เท่ากับ 3 และ 5 กรณีขนาดตัวอย่างปานกลาง (n=50) กำหนดค่า r เท่ากับ 10 และ 30 และ กรณีขนาดตัวอย่างใหญ่ (n=50) กำหนดค่า r เท่ากับ 10 และ 30 ผลการศึกษาพบว่า เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ของประชากร ส่วนวิธีของเบส์และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลการประมาณค่าไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

ฉัตรวดี กิจแก้ว และ อัชฌา อระวีพร (2562) ศึกษาการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ในการแจกแจงแกมมา $Gamma(\alpha,\lambda)$ โดยศึกษาค่าพารามิเตอร์สเกล (Scale Parameter) λ สำหรับการแจกแจงแกมมาด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติ

คาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยงานวิจัยนี้กำหนดการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $Gamma(\alpha,\lambda)$ เป็น (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (7,2) และ (8,2) ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30, 50 และ 70 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 และ 0.99 ผลการศึกษาพบว่า ส่วนใหญ่แล้ววิธีของเบส์มีประสิทธิ์ภาพในการประมาณค่า λ ดีที่สุด รองลงมาคือวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ อย่างไรก็ตามไม่ควรประมาณค่า λ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

อัชฌา อระวีพร และคณะ (2563) ประมาณค่าเฉลี่ย (μ) ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีบูตสแทร็ป จากการศึกษากรณีตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน โดยกำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเป็น 15, 30, 50 และ 100 ผลการศึกษาพบว่าเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปรกติวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเฉลี่ยได้ดี แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลดีกว่าวิธีอื่น ส่วนกรณีข้อมูลมีการแจกแจงปรกติปลอมปนวิธีของเบส์ประมาณค่าเฉลี่ยได้ดียกเว้นเมื่อเมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่และความแปรปรวนน้อย วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟให้ผลการประมาณค่าเฉลี่ยได้ดีที่สุด

บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนซึ่งแสดงรายละเอียดสำหรับการวัดประสิทธิภาพของการประมาณค่าความแปรปรวน ภายใต้การแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน โดยศึกษาวิธีการประมาณค่า 5 วิธีการคือ

1. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)
2. วิธีของเบส์ (Bayes Method)
3. วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method)
4. วิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Method)
5. วิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method)

โดยแสดงรายละเอียการวางแผนการวิจัยและวิธีการดำเนินการวิจัยในหัวข้อถัดไป

3.1 การวางแผนการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ศึกษาประสิทธิภาพสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวนแต่ละวิธี โดยศึกษาในเชิงเปรียบเทียบประสิทธิภาพที่ดีที่สุดเพียงวิธีเดียวเท่านั้นในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษาดังนี้

1. กำหนดสถานการณ์สำหรับการจำลองตัวแปรสุ่มที่ใช้ในการวิจัยโดยกำหนดให้

1.1 ลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มจำนวน 9 รูปแบบ คือ

ตัวแปรสุ่มมีลักษณะการแจกแจงปรกติ 3 รูปแบบ คือ $N(2,2)$, $N(2,4)$ และ $N(2,6)$

และตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน 6 รูปแบบ ประกอบด้วย

1.1.1 $(1-p)N(2,2)+pN(2,2c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

1.1.2 $(1-p)N(2,4)+pN(2,4c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

1.1.3 $(1-p)N(2,6)+pN(2,6c^2)$ กำหนดให้ $p=0.1$ และ $c=2,5$ ตามลำดับ

1.2 กำหนดขนาดตัวอย่าง 10, 20, 30, 50 และ 100

2. กำหนดสถานการณ์สำหรับการสร้างตัวประมาณและช่วงความเชื่อมั่นความแปรปรวน

2.1 วิธีของเบส์กำหนด $\phi=\dfrac{1}{\sigma^2}$ มีลักษณะการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา $Gamma(\alpha,\lambda)$ ที่มีค่าดังนี้ $Gamma(2,1)$, $Gamma(2,0.5)$ และ $Gamma(1,0.2)$

2.2 กำหนดจำนวนรอบของวิธีบูตสแทร็ป จำนวน 10,000 รอบ

2.3 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($1-\alpha$) สำหรับการสร้างช่วงความเชื่อมั่นแต่ละวิธีด้วย 0.90, 0.95 และ 0.99 ตามลำดับ

2.4 ทำการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

3 กำหนดเกณฑ์ในการวัดประสิทธิภาพสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน

3.1 เกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าในแต่ละวิธี

3.2 เกณฑ์การวัดประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น คือ ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($CC_{\hat{\sigma}^2}$) และ ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$) ที่ได้จากการประมาณช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละวิธี

โดยสถานการณ์ที่ใช้ในการศึกษาประสิทธิภาพของตัวประมาณ จำนวน $9\times 5 = 45$ สถานการณ์ และสถานการณ์ที่ใช้ในการศึกษาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น จำนวน $45\times 3 = 135$ สถานการณ์

ดังนั้นสถานการณ์ในศึกษาการวิจัยครั้งนี้ จำนวน $135+45=180$ สถานการณ์

3.2 วิธีการดำเนินการวิจัย

1. การวิจัยในครั้งนี้ใช้โปรแกรม R เวอร์ชั่น 4.0.5 ในการจำลองตัวแปรสุ่ม โดยกำหนดลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มและขนาดตัวอย่างตามที่ระบุในขอบเขตวิจัย

2. คำนวณหาค่าประมาณของความแปรปรวนรวมทั้งหาค่าขีดจำกัดบนบนและขีดจำกัดล่างล่างสำหรับสร้างช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของความแปรปรวนโดยใช้ตัวแปรสุ่มที่ได้จากการจำลองในขั้นตอนที่ 1. ทั้ง 5 วิธีการ คือ

2.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

ตัวประมาณ คือ $$\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{(n-1)\hat{\sigma}^2_{\mathrm{Aj.ML}}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

2.2 วิธีของเบส์ (Bayes Method)

ตัวประมาณ คือ $\hat{\sigma}^2_{Bayes} = \dfrac{B}{A-1}$

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Bayes} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Bayes})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Bayes} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Bayes})}$

เมื่อ $Var(\hat{\sigma}^2_{Bayes}) = \dfrac{B^2}{(A-1)^2(A-2)}$

$$A = \frac{n}{2} + \alpha$$

$$B = \lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

2.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method)

ตัวประมาณ คือ $\hat{\sigma}^2_{MCMC} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}\sigma^{2(t)}}{T}$

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{MCMC} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{MCMC})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{MCMC} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{MCMC})}$

เมื่อ $Var(\hat{\sigma}^2_{MCMC}) = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma^{2(t)} - \hat{\sigma}^2_{MCMC}\right)^2}{T-1}$

2.4 วิธีแจ็คไนฟ์ (Jackknife Method)

ตัวประมาณ คือ $\hat{\sigma}^2_{Jack} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}S^2_{(i)}}{n}$

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Jack} - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Jack})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Jack} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Jack})}$

เมื่อ $Var(\hat{\sigma}^2_{Jack}) = \dfrac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(S^2_{(i)} - \hat{\sigma}^2_{Jack}\right)^2\right]}{n(n-1)}$

2.5 วิธีบูตสแทร็ป (Bootstrap Method)

ตัวประมาณ คือ $\hat{\sigma}^2_{Boot} = \dfrac{\sum_{i=1}^{B} s_i^{2*}}{B}$

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Boot} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Boot})}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\hat{\sigma}^2_{Boot} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\sigma}^2_{Boot})}$

เมื่อ $Var(\hat{\sigma}^2_{Boot}) = \dfrac{\left[\sum_{i=1}^{B}\left(s_i^{2*} - \hat{\sigma}^2_{Boot}\right)^2\right]}{B-1}$

3. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1. และ ขั้นตอนที่ 2. จำนวน 1,000 รอบ/สถานการณ์

4. พิจารณาประสิทธิภาพการประมาณค่าความแปรปรวนแต่ละวิธี

4.1 กรณีพิจารณาประสิทธิภาพของตัวประมาณแต่ละวิธีสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน โดยคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) แต่ละวิธีได้จากสมการที่ (1.1) คือ

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{1,000}(\sigma^2 - \hat{\sigma}_i^2)^2}{1,000}$$

และสรุปได้ว่าหากวิธีใดให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ถือว่าเป็นวิธีการประมาณความแปรปรวนรูปแบบจุดที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในแต่ละสถานการณ์

4.2 กรณีพิจารณาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นแต่ละวิธีสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวน โดยคำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน (Confidence Coefficient : $CC_{\hat{\sigma}^2}$) แต่ละวิธีและทำการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดได้จากสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณช่วงความเชื่อมั่น รวมทั้งคำนวณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแต่ละวิธี (Average Interval Width : $AW_{\hat{\sigma}^2}$)

สำหรับวิธีการประมาณที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดโดยมีวิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$P_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}} \le CC_{\hat{\sigma}^2} \le P_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{1,000}}$$

ในงานวิจัยนี้กำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (P_0) ในการทดสอบสมมติฐานอยู่ที่ 0.90, 0.95 และ 0.99 ในการตรวจสอบการประมาณค่าความแปรปรวนแต่ละวิธีที่ระดับช่วงความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ตามลำดับ สรุปผลจากการคำนวณในสมการที่ (1.4) ได้ในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 เกณฑ์การตรวจสอบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธีที่อยู่ในช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด

สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด (P_0)	ช่วงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด
0.90	$0.8814 \le CC_{\hat{\sigma}^2} \le 0.9186$
0.95	$0.9365 \le CC_{\hat{\sigma}^2} \le 0.9635$
0.99	$0.9838 \le CC_{\hat{\sigma}^2} \le 0.9962$

จากตารางที่ 3.1 สามารถสรุปเป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจได้ดังนี้

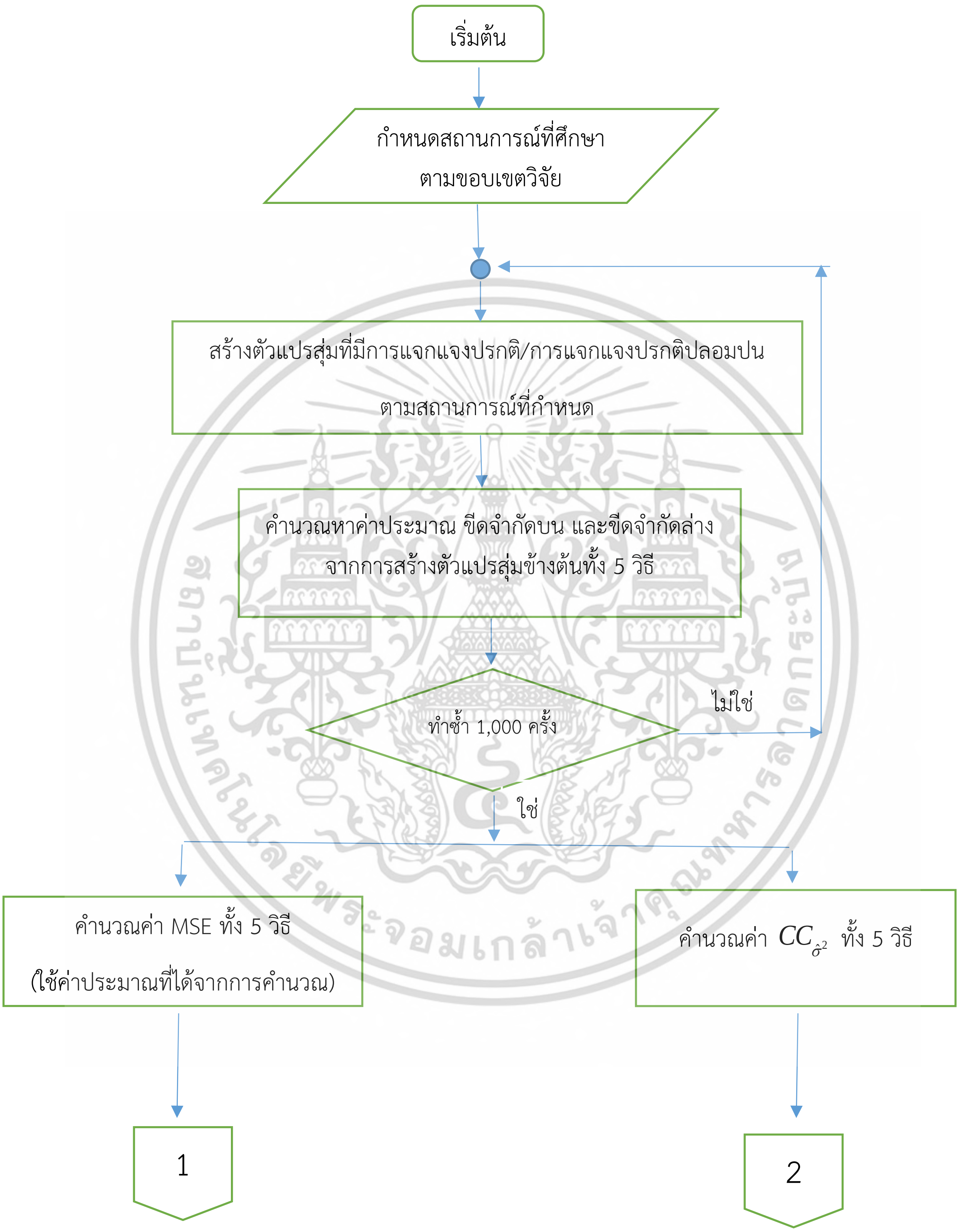
เมื่อกำหนด $P_0 = 0.90$ จะสามารถสรุปได้ว่าวิธีการประมาณค่าอยู่ในช่วงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนด เมื่อค่า $CC_{\hat{\sigma}^2}$ อยู่ระหว่าง 0.8814 และ 0.9186

เมื่อกำหนด $P_0 = 0.95$ จะสามารถสรุปได้ว่าวิธีการประมาณค่าอยู่ในช่วงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนด เมื่อค่า $CC_{\hat{\sigma}^2}$ อยู่ระหว่าง 0.9365 และ 0.9635

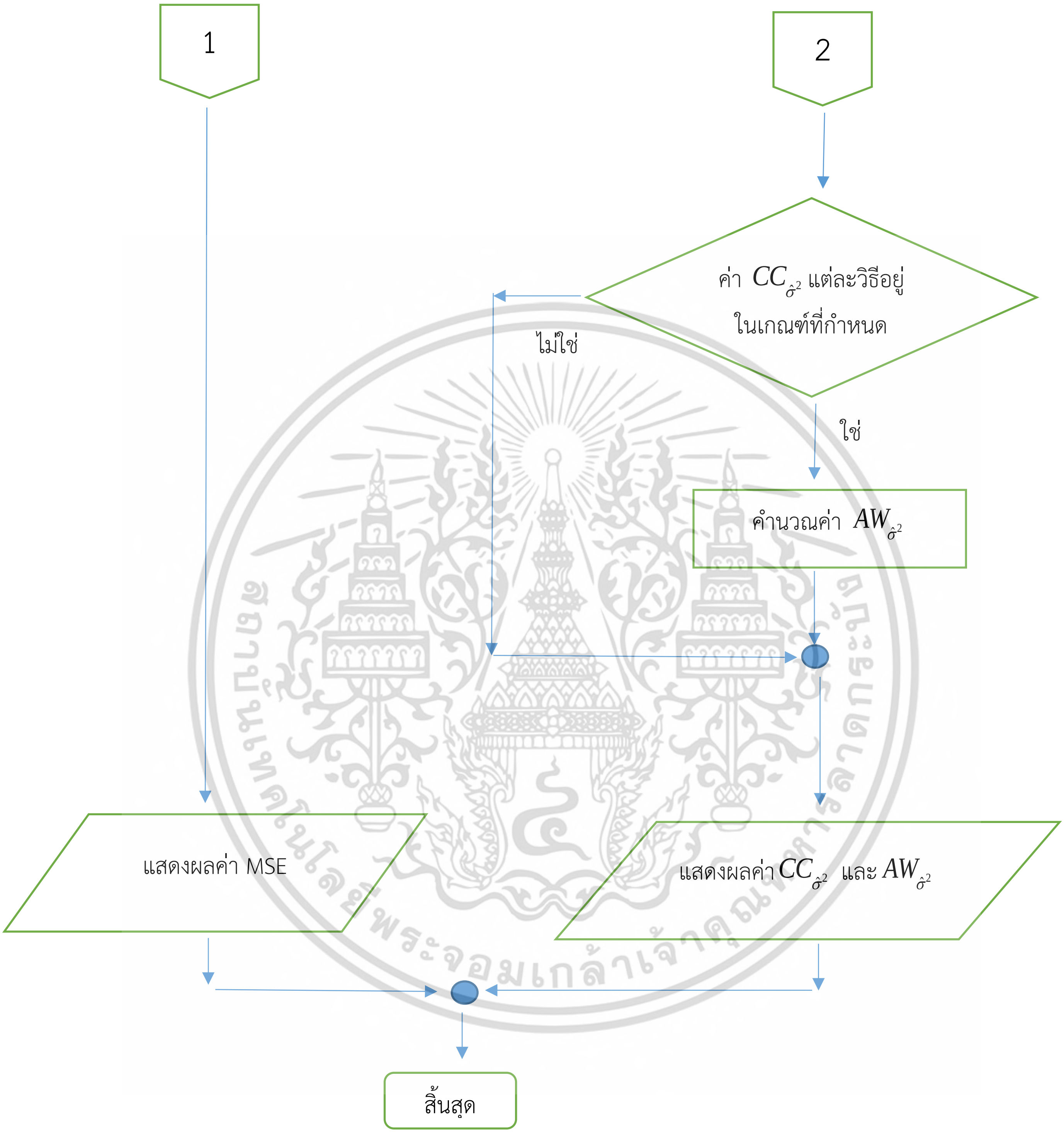
เมื่อกำหนด $P_0 = 0.99$ จะสามารถสรุปได้ว่าวิธีการประมาณค่าอยู่ในช่วงสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนด เมื่อค่า $CC_{\hat{\sigma}^2}$ อยู่ระหว่าง 0.9838 และ 0.9962

จะสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นที่ดีที่สุดสำหรับวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด ($AW_{\hat{\sigma}^2}$ ต่ำที่สุด) โดยพิจารณาเฉพาะวิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ($CC_{\hat{\sigma}^2}$ อยู่ในช่วงที่กำหนด)

3.3 ขั้นตอนของโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย



รูปที่ 3.1 แผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรม


1
2
ค่า $CC_{\hat{\sigma}^2}$ แต่ละวิธีอยู่ในเกณฑ์ที่กำหนด
ไม่ใช่
ใช่
คำนวณค่า $AW_{\hat{\sigma}^2}$
แสดงผลค่า MSE
แสดงผลค่า $CC_{\hat{\sigma}^2}$ และ $AW_{\hat{\sigma}^2}$
สิ้นสุด

รูปที่ 3.1 (ต่อ)

บทที่ 4

ผลการวิจัย

บทนี้จะนำเสนอผลลัพธ์ที่แสดงประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) ทั้ง 5 วิธี คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ วิธีแจ็คไนฟ์ และวิธีบูตสแทร็ป โดยกำหนดให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน ซึ่งวัดประสิทธิภาพการประมาณค่าความแปรปรวน (σ^2) รูปแบบจุดด้วย ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE) และ วัดประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน (σ^2) ด้วย ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน (Confidence Coefficient : $CC_{\hat{\sigma}^2}$) ร่วมกับ ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Interval Width : $AW_{\hat{\sigma}^2}$) โดยกำหนดสัญลักษณ์เพื่อใช้ประกอบการนำเสนอผลการวิเคราะห์ต่างๆ ดังนี้

$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$ แทน ค่าประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า

$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$ แทน ค่าประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีของเบส์

$Gamma$ แทน วิธีของเบส์ ที่กำหนดการแจกแจงก่อนของ ϕ ด้วย $Gamma(1, 0.2)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงแกมมา

Chi แทน วิธีของเบส์ ที่กำหนดการแจกแจงก่อนของ ϕ ด้วย $Gamma(1, 0.2)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงไคกำลังสอง

Exp แทน วิธีของเบส์ ที่กำหนดการแจกแจงก่อนของ ϕ ด้วย $Gamma(1, 0.2)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงเลขชี้กำลัง

$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$ แทน ค่าประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

$\hat{\sigma}^2_{Jack}$ แทน ค่าประมาณความแปรปรวนด้วย วิธีแจ็คไนฟ์

$\hat{\sigma}^2_{Boot}$ แทน ค่าประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีบูตสแทร็ป

σ^2 แทน ความแปรปรวนของประชากร

c แทน สเกลแฟคเตอร์

n แทน ขนาดตัวอย่าง

4.1 การประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุด

พิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE) เป็นเกณฑ์ในการประมาณค่าแบบจุด ซึ่งหากวิธีใดที่มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดจะถือว่าวิธีการประมาณค่านั้นให้ค่าประมาณที่เหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์นั้น ๆ สำหรับการแจกแจงปรกติแสดงในหัวข้อย่อยที่ 4.1.1 และการแจกแจงปรกติปลอมปนแสดงในหัวข้อย่อยที่ 4.1.2-4.1.4

4.1.1 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ

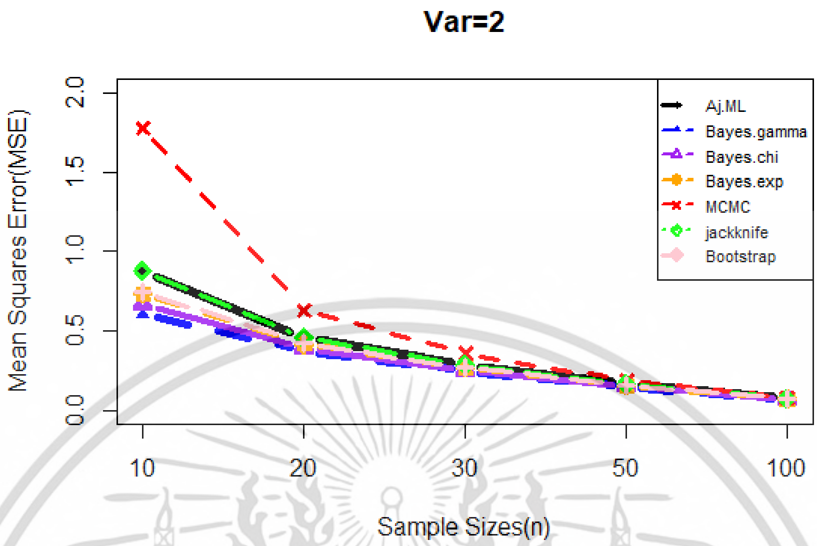
ตารางที่ 4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธีเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$

σ^2	n	ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.8776	0.6041*	0.6665	0.7361	1.7746	0.8776	0.7503
	20	0.4594	0.3757*	0.3943	0.4210	0.6288	0.4594	0.4253
	30	0.2899	0.2504*	0.2584	0.2723	0.3612	0.2899	0.2741
	50	0.1667	0.1527*	0.1557	0.1606	0.1899	0.1667	0.1609
	100	0.0763	0.0732*	0.0740	0.0750	0.0817	0.0763	0.0751
4	10	3.5103	2.6658*	2.8114	2.9713	7.1438	3.5103	3.0011
	20	1.8377	1.5772*	1.6206	1.6909	2.5198	1.8377	1.7011
	30	1.1597	1.0336*	1.0525	1.0913	1.4432	1.1597	1.0964
	50	0.6668	0.6227*	0.6299	0.6431	0.7599	0.6668	0.6435
	100	0.3054	0.2960*	0.2979	0.3001	0.3259	0.3054	0.3004
6	10	7.8981	6.2129*	6.4416	6.7073	16.0339	7.8981	6.7525
	20	4.1348	3.6128*	3.6810	3.8100	5.6746	4.1348	3.8275
	30	2.6092	2.3535*	2.3832	2.4573	3.2473	2.6092	2.4669
	50	1.5002	1.4117*	1.4229	1.4476	1.7108	1.5002	1.4478
	100	0.6871	0.6687*	0.6717	0.6754	0.7319	0.6871	0.6759

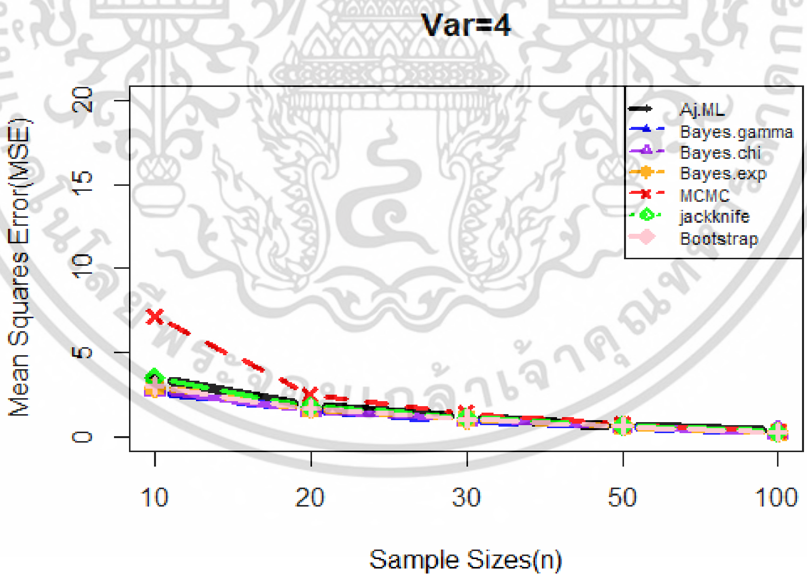
หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด

จากตารางที่ 4.1 พบว่า วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดทุกสถานการณ์ที่ทำการศึกษา หากพิจารณาปัจจัยที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นหากพิจารณาความแปรปรวนของประชากรเมื่อขนาดตัวอย่าง

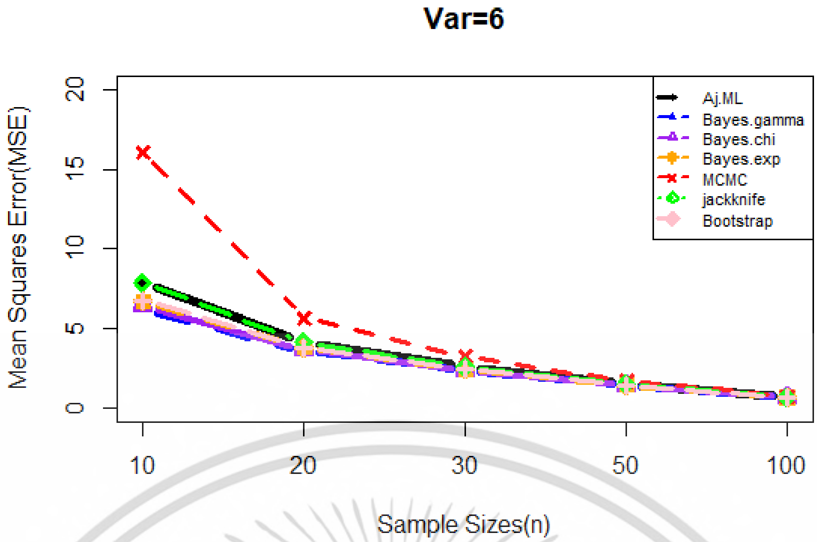
คงที่ พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยลดลงเมื่อความแปรปรวนของประชากรลดลง แสดงได้จากรูปที่ 4.1-4.3



รูปที่ 4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,2)$



รูปที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,4)$



รูปที่ 4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,6)$

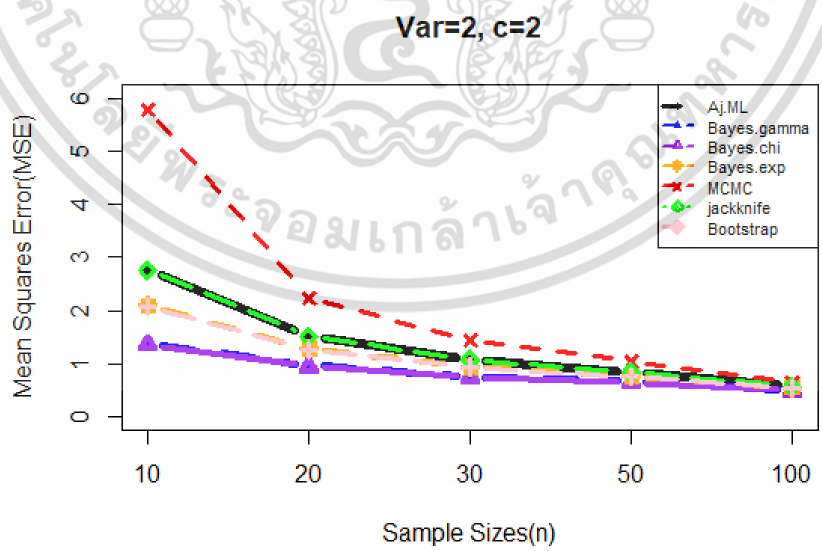
จากรูปที่ 4.1-4.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองสูงที่สุด และเมื่อค่าความแปรปรวนเพิ่มขึ้นค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองสูงขึ้น โดยขนาดตัวอย่างมีความสัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง กล่าวคือ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองลดลง

4.1.2 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$

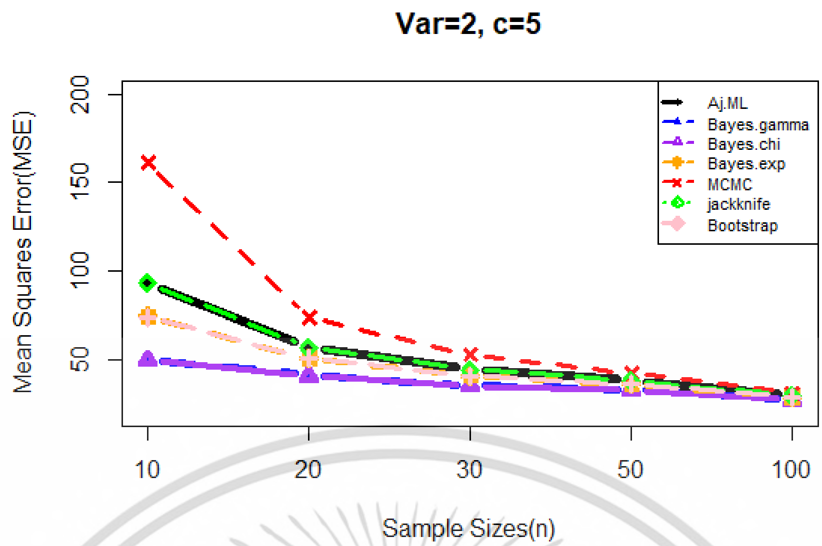
ตารางที่ 4.2 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$

c	n	ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	2.7666	1.3703	1.3585*	2.0955	5.7766	2.7666	2.0670
	20	1.5062	0.9743	0.9473*	1.2776	2.2419	1.5062	1.2582
	30	1.0684	0.7641	0.7406*	0.9425	1.4335	1.0684	0.9297
	50	0.8427	0.6642	0.6451*	0.7714	1.0341	0.8427	0.7618
	100	0.5768	0.4991	0.4885*	0.5465	0.6530	0.5768	0.5417
5	10	93.2923	50.2450	49.7218*	74.2428	161.3652	93.2923	73.8811
	20	57.0270	41.0985	40.7498*	50.7622	73.6828	57.0270	50.5876
	30	44.2721	35.3058	35.0471*	40.8857	52.5886	44.2721	40.7787
	50	37.9774	33.0240	32.8514*	36.1701	42.1542	37.9774	36.0711
	100	29.3174	27.2543	27.1639*	28.5822	30.9458	29.3174	28.5348

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด



รูปที่ 4.4 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,2)+0.1N(2,8)$



รูปที่ 4.5 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,2)+0.1N(2,50)$

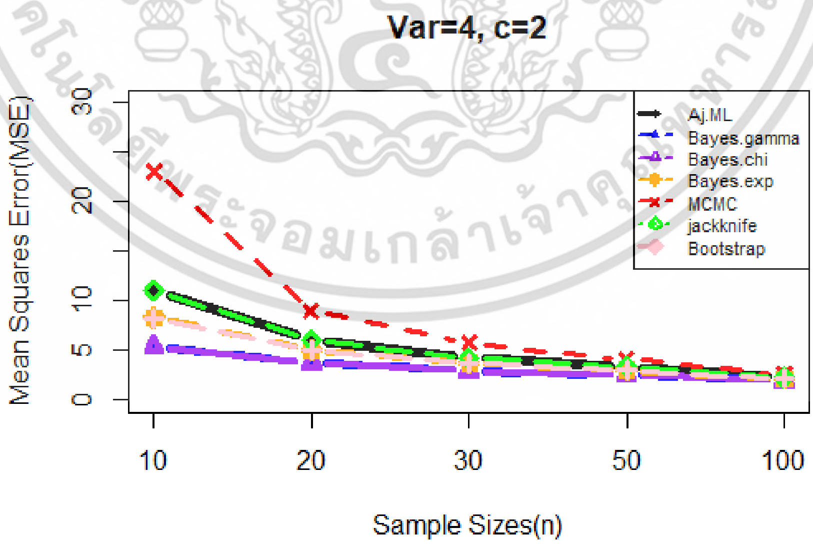
จากตารางที่ 4.2 และ รูปที่ 4.4-4.5 พบว่าเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ เมื่อกำหนดค่า c เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรรูปแบบจุด วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดทุกสถานการณ์ที่ทำการศึกษา หากพิจารณาปัจจัยที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น หากเปรียบเทียบค่าสเกลแฟคเตอร์ เมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างคงที่ พบว่าค่า c เท่ากับ 2 จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่า เมื่อเทียบค่า c เท่ากับ 5

4.1.3 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$

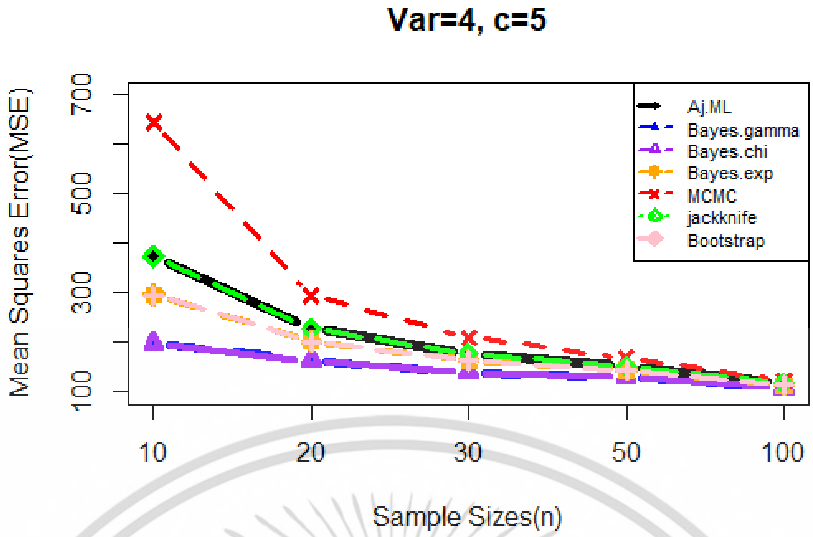
ตารางที่ 4.3 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$

c	n	ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	11.0666	5.4341	5.4314*	8.3236	23.0589	11.0666	8.2680
	20	6.0249	3.7892	3.7415*	5.0730	8.9885	6.0249	5.0327
	30	4.2737	2.9626	2.9186*	3.7437	5.7493	4.2737	3.7186
	50	3.3707	2.5803	2.5431*	3.0674	4.1343	3.3707	3.0472
	100	2.3072	1.9542	1.9333*	2.1768	2.6135	2.3072	2.1667
5	10	373.1690	198.8872	197.8616*	296.3236	644.7356	373.1690	295.5244
	20	228.1081	162.9993	162.3081*	202.7001	294.9171	228.1081	202.3505
	30	177.0883	140.1883	139.6738*	163.3022	210.4796	177.0883	163.1149
	50	151.9095	131.4056	131.0615*	144.5291	168.5973	151.9095	144.2843
	100	117.2695	108.6554	108.4748*	114.2529	123.8236	117.2695	114.1392

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด



รูปที่ 4.6 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,4)+0.1N(2,16)$



รูปที่ 4.7 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,4)+0.1N(2,100)$

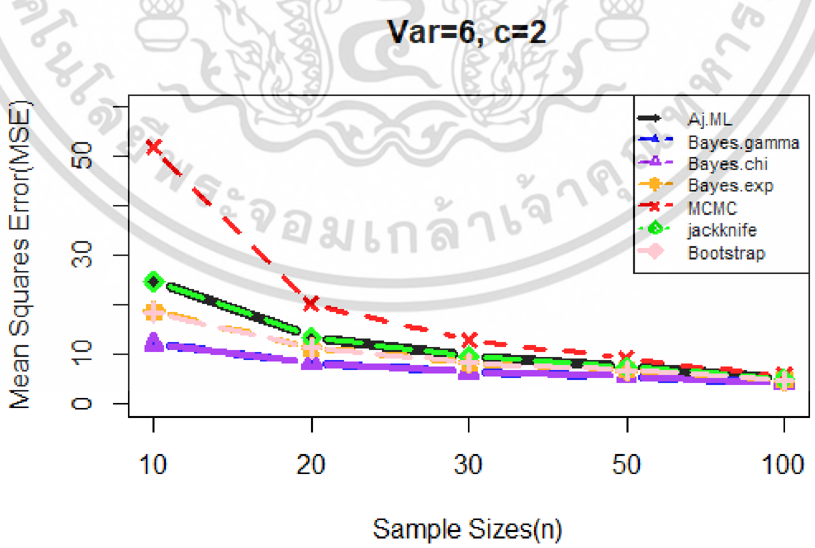
จากตารางที่ 4.3 และ รูปที่ 4.6-4.7 พบว่าเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ เมื่อกำหนดค่า c เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรรูปแบบจุด วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุดทุกสถานการณ์ที่ทำการศึกษา หากพิจารณาปัจจัยที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น หากเปรียบเทียบค่าสเกลแฟคเตอร์ เมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างคงที่ พบว่าค่า c เท่ากับ 2 จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่า เมื่อเทียบค่า c เท่ากับ 5

4.1.4 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$

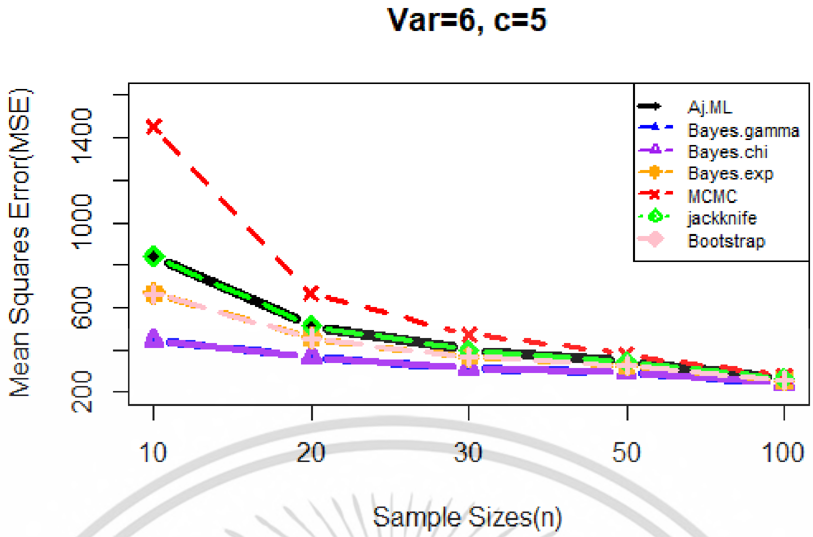
ตารางที่ 4.4 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$

c	n	ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	24.8998	12.2192*	12.2256	18.6858	51.8960	24.8998	18.6029
	20	13.5561	8.4531	8.3846*	11.3866	20.2153	13.5561	11.3236
	30	9.6158	6.5993	6.5348*	8.4038	12.9319	9.6158	8.3670
	50	7.5841	5.7498	5.6946*	6.8878	9.2911	7.5841	6.8563
	100	5.1912	4.3655	4.3344*	4.8910	5.8743	5.1912	4.8750
5	10	839.6304	445.9543	444.4262*	666.2439	1451.3960	839.6304	664.9299
	20	513.2433	365.7105	364.6768*	455.8142	664.9073	513.2433	455.2887
	30	398.4486	314.6513	313.8811*	367.2497	473.5454	398.4486	367.0086
	50	341.7965	295.1463	294.6307*	325.0771	379.4177	341.7965	324.6397
	100	263.8563	244.2037	243.9328*	257.0121	278.4839	263.8563	256.8131

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด



รูปที่ 4.8 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,6)+0.1N(2,24)$



รูปที่ 4.9 ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน $0.9N(2,6)+0.1N(2,150)$

จากตารางที่ 4.4 และ รูปที่ 4.8-4.9 พบว่าเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ เมื่อกำหนดค่า c เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรรูปแบบจุด โดยส่วนใหญ่วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 และค่า c เท่ากับ 2 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำที่สุด หากพิจารณาปัจจัยที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น หากเปรียบเทียบค่าสเกลแฟคเตอร์ เมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างคงที่ พบว่าค่า c เท่ากับ 2 จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำกว่า เมื่อเทียบค่า c เท่ากับ 5

4.2 การประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบช่วง

ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่าความแปรปรวนพิจารณาที่ระดับความความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% โดยพิจารณาจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน (Confidence Coefficient : $CC_{\hat{\sigma}^2}$) แล้วจึงนำมาเปรียบเทียบว่าอยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดแล้วสุดท้ายจึงนำมาหาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Interval Width : $AW_{\hat{\sigma}^2}$)

4.2.1 ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

เกณฑ์การพิจารณาการประมาณค่าความแปรปรวนที่ระดับความความเชื่อมั่น 90% จากการประมาณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน แสดงในตารางที่ 4.5-4.12

ตารางที่ 4.5 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

σ^2	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	**0.912**	0.749	0.695	0.812	0.846	0.819	0.725
	20	0.875	0.801	0.774	0.837	0.870	0.849	0.788
	30	**0.885**	0.831	0.814	0.868	0.857	0.863	0.817
	50	**0.894**	0.857	0.841	**0.882**	0.766	**0.882**	0.850
	100	**0.909**	**0.891**	**0.886**	**0.900**	0.824	**0.903**	**0.888**
4	10	**0.912**	0.695	0.675	0.799	0.828	0.819	0.725
	20	0.875	0.774	0.757	0.837	0.871	0.849	0.788
	30	**0.885**	0.814	0.806	0.864	0.861	0.863	0.817
	50	**0.894**	0.841	0.838	0.880	0.757	**0.882**	0.850
	100	**0.909**	**0.886**	**0.883**	**0.899**	0.843	**0.903**	**0.888**
6	10	**0.912**	0.685	0.667	0.793	0.837	0.819	0.725
	20	0.875	0.764	0.750	0.835	0.866	0.849	0.788
	30	**0.885**	0.807	0.806	0.863	0.859	0.863	0.817
	50	**0.894**	0.838	0.838	0.879	0.750	**0.882**	0.850
	100	**0.909**	**0.883**	0.880	**0.899**	0.827	**0.903**	**0.888**

หมายเหตุ : **ตัวหนา** หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดที่ 0.8814 และ 0.9186

จากตารางที่ 4.5 พบว่าที่ขนาดตัวอย่าง 100 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า วิธีของเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนของการแจกแจงแกมมา ไคกำลังสอง และเลขชี้กำลัง วิธีแจ็คไนฟ์ วิธีบูตสแทร็ป มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนอยู่ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดที่ 0.8814 และ 0.9186 จึงนำวิธีดังกล่าวมาพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น แสดงดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

σ^2	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	4.3522*	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	1.9263*	-	-	-	-	-	-
	50	1.4171	-	-	1.3272*	-	1.3428	-
	100	0.9647	0.9138	0.9092*	0.9340	-	0.9403	0.9133
4	10	8.7044*	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	3.8526*	-	-	-	-	-	-
	50	2.8343	-	-	-	-	2.6857*	-
	100	1.9295	1.8185	1.8139*	1.8662	-	1.8806	1.8266
6	10	13.0565*	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	5.7789*	-	-	-	-	-	-
	50	4.2514	-	-	-	-	4.0285*	-
	100	2.8942	2.7231*	-	2.7983	-	2.8209	2.7398

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

- หมายถึง ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากตารางที่ 4.6 พบว่า ที่ขนาดตัวอย่าง 10 และ 30 ทุกระดับของค่าความแปรปรวนวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่ามีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด ที่ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 2 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนของการแจกแจงเลขชี้กำลังมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด กรณีเมื่อค่าความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 4 และ 6 วิธีแจ็คไนฟ์มีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด กรณีที่ขนาดตัวอย่าง 100 ค่าความแปรปรวน 2 และ 4 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนของการแจกแจงไคกำลังสองมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด และเมื่อค่าความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 6 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนของการแจกแจงแกมมามีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

4.2.1.2 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$

ตารางที่ 4.7 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.799	0.819	0.791	0.87	0.656	0.881	0.798
	20	0.762	0.865	0.855	0.881	0.666	**0.910**	0.871
	30	0.689	0.842	0.835	0.848	0.693	**0.901**	0.867
	50	0.596	0.757	0.758	0.752	0.686	0.837	0.827
	100	0.437	0.577	0.587	0.565	0.471	0.725	0.72
5	10	0.536	0.682	0.654	0.756	0.472	**0.915**	0.830
	20	0.330	0.460	0.461	0.460	0.292	0.921	0.862
	30	0.210	0.314	0.311	0.308	0.403	0.857	0.801
	50	0.092	0.131	0.133	0.124	0.501	0.646	0.594
	100	0.008	0.014	0.014	0.014	0.086	0.228	0.215

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.8814 และ 0.9186

ตารางที่ 4.8 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	3.1707*	-
	30	-	-	-	-	-	2.6176*	-
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	17.0657*	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	-	-
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.7 และ 4.8 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.90 พบว่า กรณี ที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.1.3 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$

ตารางที่ 4.9 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.799	0.791	0.777	0.864	0.682	0.881	0.798
	20	0.762	0.855	0.845	0.881	0.660	**0.910**	0.871
	30	0.689	0.835	0.832	0.847	0.685	**0.901**	0.867
	50	0.596	0.758	0.761	0.753	0.685	0.837	0.827
	100	0.437	0.587	0.591	0.565	0.471	0.725	0.720
5	10	0.536	0.654	0.648	0.752	0.464	**0.915**	0.830
	20	0.330	0.461	0.460	0.464	0.288	0.921	0.862
	30	0.210	0.311	0.311	0.309	0.401	0.857	0.801
	50	0.092	0.133	0.132	0.124	0.510	0.646	0.594
	100	0.008	0.014	0.014	0.014	0.090	0.228	0.215

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.8814 และ 0.9186

ตารางที่ 4.10 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	6.3414*	-
	30	-	-	-	-	-	5.2352*	-
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	34.1313*	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	-	-
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.9 และ 4.10 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.90 พบว่า กรณี ที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.1.4 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$

ตารางที่ 4.11 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.937	0.875	0.863	0.936	0.805	0.957	0.894
	20	0.910	0.949	0.946	0.967	0.813	0.970	0.957
	30	0.882	0.977	0.976	0.983	0.858	**0.987**	0.970
	50	0.804	0.975	0.975	0.975	0.882	**0.992**	**0.988**
	100	0.694	0.909	0.911	0.900	0.704	0.979	0.975
5	10	0.653	0.921	0.909	0.958	0.546	0.973	0.931
	20	0.430	0.832	0.832	0.898	0.367	**0.985**	0.975
	30	0.313	0.591	0.592	0.595	0.545	0.998	**0.993**
	50	0.141	0.301	0.301	0.291	0.712	0.998	**0.990**
	100	0.017	0.040	0.040	0.036	0.230	0.932	0.907

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.8814 และ 0.9186

ตารางที่ 4.12 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 90%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	12.7391*	-
	50	-	-	-	-	-	10.1490	9.3430*
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	67.7780*	-
	30	-	-	-	-	-	-	51.1071*
	50	-	-	-	-	-	-	45.4641*
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.11 และ 4.12 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.90 พบว่า กรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 และ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทั้งวิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป

ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจากตารางที่ 4.12 ประกอบด้วย พบว่าวิธีบูตสแทร็ปมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.2 ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

เกณฑ์การพิจารณาการประมาณค่าความแปรปรวนที่ระดับความความเชื่อมั่น 95% จากการประมาณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน แสดงในตารางที่ 4.13-4.20

4.2.2.1 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$

ตารางที่ 4.13 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

σ^2	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	**0.947**	0.799	0.752	0.846	0.887	0.864	0.770
	20	**0.938**	0.842	0.824	0.878	0.909	0.882	0.844
	30	**0.939**	0.885	0.865	0.908	0.904	0.910	0.878
	50	**0.950**	0.916	0.899	0.930	0.840	0.929	0.906
	100	0.967	0.933	0.928	**0.943**	0.906	**0.941**	**0.940**
4	10	**0.947**	0.752	0.720	0.836	0.902	0.864	0.770
	20	**0.938**	0.824	0.814	0.874	0.910	0.882	0.844
	30	**0.939**	0.865	0.857	0.907	0.906	0.910	0.878
	50	**0.950**	0.899	0.890	0.927	0.830	0.929	0.906
	100	0.967	0.928	0.925	**0.939**	0.913	**0.941**	**0.940**
6	10	**0.947**	0.733	0.710	0.833	0.881	0.864	0.770
	20	**0.938**	0.818	0.807	0.872	0.905	0.882	0.844
	30	**0.939**	0.862	0.857	0.906	0.903	0.910	0.878
	50	**0.950**	0.892	0.888	0.926	0.816	0.929	0.906
	100	0.967	0.926	0.923	**0.939**	0.904	**0.941**	**0.940**

หมายเหตุ : **ตัวหนา** หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดที่ 0.9365 และ 0.9635

จากตารางที่ 4.13 พบว่า กรณีที่ขนาดตัวอย่าง 100 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลัง วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

ของความแปรปรวนอยู่ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดที่ 0.9365 และ 0.9635 จึงนำวิธีดังกล่าวมาพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น แสดงดังตารางที่ 4.14

ตารางที่ 4.14 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

σ^2	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	5.7230*	-	-	-	-	-	-
	20	3.1099*	-	-	-	-	-	-
	30	2.3629*	-	-	-	-	-	-
	50	1.7176*	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	1.1129	-	1.1237	1.0882*
4	10	11.4461*	-	-	-	-	-	-
	20	6.2198*	-	-	-	-	-	-
	30	4.7257*	-	-	-	-	-	-
	50	3.4351*	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	2.2237	-	2.2474	2.1765*
6	10	17.1691*	-	-	-	-	-	-
	20	9.3297*	-	-	-	-	-	-
	30	7.0886*	-	-	-	-	-	-
	50	5.1527*	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	3.3344	-	3.3711	3.2647*

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

- หมายถึง ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากตารางที่ 4.14 พบว่า โดยส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่ามีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด ทุกระดับของค่าความแปรปรวนที่ทำการศึกษา ยกเว้นกรณี ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 ทุกระดับของค่าความแปรปรวน วิธีบูตสแทร็ปมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

4.2.2.2 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$

ตารางที่ 4.15 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.\mathrm{ML}}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.872	0.864	0.826	0.908	0.721	0.921	0.838
	20	0.832	0.925	0.912	**0.939**	0.734	**0.952**	0.917
	30	0.778	0.921	0.917	0.926	0.771	**0.958**	**0.937**
	50	0.684	0.873	0.871	0.865	0.771	**0.937**	0.923
	100	0.534	0.704	0.709	0.690	0.561	0.846	0.844
5	10	0.586	0.844	0.821	**0.941**	0.498	**0.948**	0.891
	20	0.371	0.560	0.556	0.567	0.316	0.969	**0.946**
	30	0.246	0.378	0.382	0.378	0.460	0.967	**0.940**
	50	0.109	0.178	0.180	0.171	0.575	0.862	0.815
	100	0.011	0.020	0.020	0.017	0.118	0.482	0.428

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9365 และ 0.9635

ตารางที่ 4.16 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	3.2291*	-	3.8380	-
	30	-	-	-	-	-	3.1508	2.8120*
	50	-	-	-	-	-	2.5368*	-
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	11.8722*	-	21.0599	-
	20	-	-	-	-	-	-	13.7010*
	30	-	-	-	-	-	-	12.9626*
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

\- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.15 และ 4.16 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.95 พบว่า กรณี ที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

กรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ทั้งวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลัง และ วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.16 พบว่าวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลังให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์

ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดจึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.16 พบว่า วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.2.3 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$

ตารางที่ 4.17 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.872	0.826	0.814	0.901	0.735	0.921	0.838
	20	0.832	0.912	0.907	**0.938**	0.725	**0.952**	0.917
	30	0.778	0.917	0.915	0.925	0.762	**0.958**	**0.937**
	50	0.684	0.871	0.874	0.866	0.767	**0.937**	0.923
	100	0.534	0.709	0.710	0.692	0.564	0.846	0.844
5	10	0.586	0.821	0.806	**0.937**	0.493	**0.948**	0.891
	20	0.371	0.556	0.554	0.568	0.312	0.969	**0.946**
	30	0.246	0.382	0.387	0.377	0.462	0.967	**0.940**
	50	0.109	0.180	0.183	0.171	0.592	0.862	0.815
	100	0.011	0.020	0.020	0.017	0.123	0.482	0.428

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9365 และ 0.9635

ตารางที่ 4.18 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	6.4320*	-	7.6760	-
	30	-	-	-	-	-	6.3016	5.6240*
	50	-	-	-	-	-	5.0735*	-
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	23.6659*	-	42.1199	-
	20	-	-	-	-	-	-	27.4020*
	30	-	-	-	-	-	-	25.9251*
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.17 และ 4.18 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.95 พบว่า กรณี ที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ในกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ทั้งวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการ

แจกแจงเลขชี้กำลัง และ วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.18 พบว่าวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลังให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดจึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.18 พบว่า วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.2.4 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$

ตารางที่ 4.19 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.872	0.82	0.805	0.896	0.728	0.921	0.838
	20	0.832	0.909	0.905	**0.938**	0.712	**0.952**	0.917
	30	0.778	0.916	0.915	0.925	0.773	**0.958**	**0.937**
	50	0.684	0.873	0.873	0.866	0.775	**0.937**	0.923
	100	0.534	0.710	0.710	0.692	0.559	0.846	0.844
5	10	0.586	0.814	0.801	0.934	0.499	**0.948**	0.891
	20	0.371	0.553	0.554	0.568	0.313	0.969	**0.946**
	30	0.246	0.385	0.388	0.377	0.453	0.967	**0.940**
	50	0.109	0.182	0.182	0.172	0.591	0.862	0.815
	100	0.011	0.020	0.020	0.017	0.122	0.482	0.428

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9365 และ 0.9635

ตารางที่ 4.20 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 95%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	9.6350*	-	11.5140	-
	30	-	-	-	-	-	9.4523	8.4359*
	50	-	-	-	-	-	7.6103*	-
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	63.1798*	-
	20	-	-	-	-	-	-	41.1030*
	30	-	-	-	-	-	-	38.8877*
	50	-	-	-	-	-	-	-
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.19 และ 4.20 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.95 พบว่า กรณี ที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิ ทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนในกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

ในกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทั้งวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลัง และ วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.20 พบว่าวิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลังให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดจึงต้องพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จากตารางที่ 4.20 พบว่า วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.3 ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

เกณฑ์การพิจารณาการประมาณค่าความแปรปรวนที่ระดับความความเชื่อมั่น 99% จากการประมาณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการแจกแจงปรกติและการแจกแจงปรกติปลอมปน แสดงในตารางที่ 4.21-4.28

4.2.3.1 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$

ตารางที่ 4.21 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

σ^2	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	**0.988**	0.865	0.828	0.901	0.943	0.921	0.832
	20	**0.986**	0.906	0.892	0.925	0.963	0.934	0.888
	30	**0.989**	0.940	0.926	0.949	0.958	0.956	0.929
	50	**0.994**	0.961	0.953	0.966	0.933	0.967	0.949
	100	**0.993**	0.978	0.977	0.983	0.969	0.982	0.977
4	10	**0.988**	0.828	0.807	0.894	0.936	0.921	0.832
	20	**0.986**	0.892	0.879	0.919	0.963	0.934	0.888
	30	**0.989**	0.926	0.920	0.948	0.961	0.956	0.929
	50	**0.994**	0.953	0.949	0.966	0.931	0.967	0.949
	100	**0.993**	0.977	0.975	0.983	0.977	0.982	0.977
6	10	**0.988**	0.816	0.796	0.891	0.940	0.921	0.832
	20	**0.986**	0.884	0.876	0.919	0.961	0.934	0.888
	30	**0.989**	0.921	0.917	0.947	0.959	0.956	0.929
	50	**0.994**	0.949	0.948	0.965	0.922	0.967	0.949
	100	**0.993**	0.976	0.975	0.983	0.971	0.982	0.977

หมายเหตุ : **ตัวหนา** หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกำหนดที่ 0.9838 และ 0.9962

ตารางที่ 4.22 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ $N(2,\sigma^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

σ^2	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	9.6180*	-	-	-	-	-	-
	20	4.5675*	-	-	-	-	-	-
	30	3.3361*	-	-	-	-	-	-
	50	2.3539*	-	-	-	-	-	-
	100	1.5551*	-	-	-	-	-	-
4	10	19.2360*	-	-	-	-	-	-
	20	9.1350*	-	-	-	-	-	-
	30	6.6723*	-	-	-	-	-	-
	50	4.7078*	-	-	-	-	-	-
	100	3.1102*	-	-	-	-	-	-
6	10	28.8540*	-	-	-	-	-	-
	20	13.7024*	-	-	-	-	-	-
	30	10.0084*	-	-	-	-	-	-
	50	7.0617*	-	-	-	-	-	-
	100	4.6653*	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

- หมายถึง ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.21 และ 4.22 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.99 พบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่าให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.3.2 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$

ตารางที่ 4.23 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.937	0.923	0.892	0.945	0.797	0.957	0.894
	20	0.910	0.962	0.950	0.970	0.829	0.970	0.957
	30	0.882	0.980	0.979	0.983	0.856	**0.987**	0.970
	50	0.804	0.977	0.975	0.976	0.881	**0.992**	**0.988**
	100	0.694	0.906	0.908	0.898	0.709	0.979	0.975
5	10	0.653	0.948	0.932	0.960	0.548	0.973	0.931
	20	0.430	0.840	0.833	0.898	0.371	**0.985**	0.975
	30	0.313	0.586	0.590	0.595	0.550	0.998	**0.993**
	50	0.141	0.297	0.300	0.291	0.705	0.998	**0.990**
	100	0.017	0.036	0.039	0.036	0.212	0.932	0.907

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9838 และ 0.9962

ตารางที่ 4.24 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	4.2464*	-
	50	-	-	-	-	-	3.3830	3.1143*
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	22.5927*	-
	30	-	-	-	-	-	-	17.0357*
	50	-	-	-	-	-	-	15.1547*
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.23 และ 4.24 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,2)+0.1N(2,2c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.99 พบว่า กรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 และ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทั้งวิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณ

สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจากตารางที่ 4.24 พบว่าวิธีบูตสแทร็ป มีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.3.3 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$

ตารางที่ 4.25 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.937	0.892	0.868	0.938	0.815	0.957	0.894
	20	0.910	0.950	0.947	0.968	0.819	0.970	0.957
	30	0.882	0.979	0.977	0.983	0.852	**0.987**	0.970
	50	0.804	0.975	0.975	0.975	0.879	**0.992**	**0.988**
	100	0.694	0.908	0.910	0.900	0.707	0.979	0.975
5	10	0.653	0.932	0.913	0.959	0.544	0.973	0.931
	20	0.430	0.833	0.832	0.898	0.365	**0.985**	0.975
	30	0.313	0.590	0.592	0.595	0.552	0.998	**0.993**
	50	0.141	0.300	0.301	0.291	0.714	0.998	**0.990**
	100	0.017	0.039	0.040	0.036	0.228	0.932	0.907

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9838 และ 0.9962

ตารางที่ 4.26 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน รูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	8.4927*	-
	50	-	-	-	-	-	6.7660	6.2287*
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	45.1853*	-
	30	-	-	-	-	-	-	34.0714*
	50	-	-	-	-	-	-	30.3094*
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.25 และ 4.26 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,4)+0.1N(2,4c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.99 พบว่า กรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 และ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทั้งวิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณ

สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจากตารางที่ 4.26 พบว่าวิธีบูตสแทร็ป มีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

4.2.3.4 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$

ตารางที่ 4.27 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่ได้จากการประมาณค่าความแปรปรวนในแต่ละวิธี เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนรูปแบบ

$0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของความแปรปรวน ($CC_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.ML}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	0.937	0.875	0.863	0.936	0.805	0.957	0.894
	20	0.910	0.949	0.946	0.967	0.813	0.970	0.957
	30	0.882	0.977	0.976	0.983	0.858	**0.987**	0.970
	50	0.804	0.975	0.975	0.975	0.882	**0.992**	**0.988**
	100	0.694	0.909	0.911	0.900	0.704	0.979	0.975
5	10	0.653	0.921	0.909	0.958	0.546	0.973	0.931
	20	0.430	0.832	0.832	0.898	0.367	**0.985**	0.975
	30	0.313	0.591	0.592	0.595	0.545	0.998	**0.993**
	50	0.141	0.301	0.301	0.291	0.712	0.998	**0.99**
	100	0.017	0.040	0.040	0.036	0.230	0.932	0.907

หมายเหตุ : ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ระหว่างค่า 0.9838 และ 0.9962

ตารางที่ 4.28 ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน รูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ ที่ระดับความความเชื่อมั่น 99%

c	n	ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ($AW_{\hat{\sigma}^2}$)						
		$\hat{\sigma}^2_{Aj.\text{ML}}$	$\hat{\sigma}^2_{Bayes}$			$\hat{\sigma}^2_{MCMC}$	$\hat{\sigma}^2_{Jack}$	$\hat{\sigma}^2_{Boot}$
			Gamma	*Chi*	*Exp*			
2	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	12.7391*	-
	50	-	-	-	-	-	10.1490	9.3430*
	100	-	-	-	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-	-	-
	20	-	-	-	-	-	67.7780*	-
	30	-	-	-	-	-	-	51.1071*
	50	-	-	-	-	-	-	45.4641*
	100	-	-	-	-	-	-	-

หมายเหตุ : * หมายถึง วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดโดยพิจารณาเฉพาะวิธีที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

\- หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเนื่องจากค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

พิจารณาจากตารางที่ 4.27 และ 4.28 เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยอยู่ในรูปแบบ $0.9N(2,6)+0.1N(2,6c^2)$ เมื่อกำหนดค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ 5 ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนของประชากร เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.99 พบว่า กรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีแจ็คไนฟ์ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 และ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับกรณีที่ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ที่ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทั้งวิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ปให้ค่าประมาณ

สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด จึงพิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นจากตารางที่ 4.28 พบว่าวิธีบูตสแทร็ป มีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นกว่าวิธีแจ็คไนฟ์ นอกเหนือจากนั้น ไม่มีวิธีใด ๆ ที่ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในช่วงของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดทุกกรณี

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

จุดประสงค์หลักของการวิจัยนี้เป็นการเลือกใช้ตัวประมาณและช่วงความเชื่อมั่นในการประมาณค่าความแปรปรวนได้อย่างเหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ทำการศึกษาโดยพิจารณาจากประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนจากผลการวิจัยที่ได้จากการทดลองซึ่งแสดงได้ในส่วนของบทที่ 4 ในบทนี้จะอธิบายผลสรุปที่ได้จากการวิจัย การอภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

โดยในบทนี้จะกำหนดสัญลักษณ์แทนความหมายดังนี้

Aj.ML	แทน	วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า
Bayes.gamma	แทน	วิธีของเบส์ มีการแจกแจงก่อนของ ϕ เป็น $Gamma(2,1)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงแกมมา
Bayes.chi	แทน	วิธีของเบส์ มีการแจกแจงก่อนของ ϕ เป็น $Gamma(2,0.5)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงไคกำลังสอง
Bayes.exp	แทน	วิธีของเบส์ มีการแจกแจงก่อนของ ϕ เป็น $Gamma(1,0.2)$ ซึ่งเป็นตัวแทนในการแสดงลักษณะการแจกแจงเลขชี้กำลัง
MCMC	แทน	วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
Jackknife	แทน	วิธีแจ็คไนฟ์
Bootstrap	แทน	วิธีบูตสแทร็ป
σ^2	แทน	ความแปรปรวนของประชากร
p	แทน	สัดส่วนการปลอมปน
c	แทน	สเกลแฟคเตอร์
n	แทน	ขนาดตัวอย่าง

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 ประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุด

ตารางที่ 5.1 วิธีการประมาณค่าแบบจุดที่มีความเหมาะสมที่สุดในการประมาณค่าความแปรปรวนแต่ละสถานการณ์ต่าง ๆ

p	c	n	$\sigma^2 = 2$	$\sigma^2 = 4$	$\sigma^2 = 6$
0 (การแจกแจงปรกติ)	-	10	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
		20	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
		30	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
		50	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
		100	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
0.1 (การแจกแจงปรติปลอมปน)	2	10	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.gamma
		20	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		30	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		50	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		100	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
	5	10	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		20	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		30	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		50	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi
		100	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.chi

จากตารางที่ 5.1 สามารถสรุปประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนสำหรับการประมาณค่าแบบจุด ดังนี้

- กรณีตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ วิธีของเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมามีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด
- กรณีตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน ส่วนใหญ่วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสองมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเหมาะสมที่สุด ยกเว้น กรณีค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6 เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 และ ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด

5.1.2 ประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน

ตารางที่ 5.2 วิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่มีความเหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ต่าง ๆ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.90

p	c	n	$\sigma^2 = 2$	$\sigma^2 = 4$	$\sigma^2 = 6$
0 (การแจกแจงปรกติ)	-	10	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		30	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		50	Bayes.exp	Jackknife	Jackknife
		100	Bayes.chi	Bayes.chi	Bayes.gamma
0.1 (การแจกแจงปรติปลอมปน)	2	20	Jackknife	Jackknife	-
		30	Jackknife	Jackknife	Jackknife
		50	-	-	Bootstrap
	5	10	Jackknife	Jackknife	-
		20	-	-	Jackknife
		30	-	-	Bootstrap
		50	-	-	Bootstrap

จากตารางที่ 5.2 สามารถสรุปประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยกำหนดระดับความความเชื่อมั่น 90% ดังนี้

- วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ โดยกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 และ 30 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา
- วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมามีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนได้ดีเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ โดยกำหนดค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6 ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 100
- วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสองมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนได้ดีเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ โดยกำหนดค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2 และ 4 ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 100

- วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลังมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนได้ดีเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ โดยกำหนดค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2 ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50
- วิธีแจ็คไนฟ์ มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ โดยกำหนดค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 4 และ 6 ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 และ เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดย

กรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวนที่ศึกษา

กรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) เท่ากับ 2 ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2 และ 4

กรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 10 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) เท่ากับ 5 ที่ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2 และ 4

กรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) เท่ากับ 5 ที่ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6

- วิธีบูตสแทร็ป มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดย

กรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) เท่ากับ 5 ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6

กรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 50 ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6 ทุกค่าสเกลแฟคเตอร์ (C) ที่ศึกษา

ตารางที่ 5.3 วิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่มีความเหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ต่าง ๆ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.95

p	c	n	$\sigma^2 = 2$	$\sigma^2 = 4$	$\sigma^2 = 6$
0 (การแจกแจงปรกติ)	-	10	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		20	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		30	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		50	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		100	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap
0.1 (การแจกแจงปรติปลอมปน)	2	20	Bayes.exp	Bayes.exp	Bayes.exp
		30	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap
		50	Jackknife	Jackknife	Jackknife
	5	10	Bayes.exp	Bayes.exp	Jackknife
		20	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap
		30	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap

จากตารางที่ 5.3 สามารถสรุปประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยกำหนดระดับความความเชื่อมั่น 95% ดังนี้

กรณีตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ

- วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเกือบทุกสถานการณ์ ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 100 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา วิธีบูตสแทร็ปมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด

กรณีตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน

- วิธีของเบส์เมื่อกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงเลขชี้กำลังมีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน เมื่อกรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา และกรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 10 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 2 และ 4
- วิธีแจ็คไนฟ์ มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน เมื่อกรณีขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา และกรณีขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 10 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 6

- วิธีบูตสแทร็ป มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อกรณีขนาดตัวอย่าง(n) เท่ากับ 30 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา และกรณี

ขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 20 และ 30 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา

ตารางที่ 5.4 วิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวนที่มีความเหมาะสมที่สุดในแต่ละสถานการณ์ต่าง ๆ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.99

p	c	n	$\sigma^2 = 2$	$\sigma^2 = 4$	$\sigma^2 = 6$
0 (การแจกแจงปรกติ)	-	10	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		20	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		30	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		50	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
		100	Aj.ML	Aj.ML	Aj.ML
0.1 (การแจกแจงปรติปลอมปน)	2	30	Jackknife	Jackknife	Jackknife
		50	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap
	5	20	Jackknife	Jackknife	Jackknife
		30	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap
		50	Bootstrap	Bootstrap	Bootstrap

จากตารางที่ 5.4 สามารถสรุปประสิทธิภาพในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยกำหนดระดับความความเชื่อมั่น 99% ดังนี้

- วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ
- วิธีแจ็คไนฟ์ มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวน เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยกำหนดขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 30 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา และ กำหนดขนาดตัวอย่าง (n)เท่ากับ 20 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา
- วิธีบูตสแทร็ป มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความแปรปรวนเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปนโดยกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 50 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 2 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา และ กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 30 และ 50 ค่าสเกลแฟคเตอร์ (c) เท่ากับ 5 ทุกค่าความแปรปรวน (σ^2) ที่ศึกษา

5.2 อภิปรายผลการวิจัย

จากผลการวิจัยในการแสดงความสามารถสำหรับการประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร 5 วิธี คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่า วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป พบว่าขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้

1. วัตถุประสงค์ในการประมาณค่า

เป็นสิ่งแรกที่ผู้ใช้จะต้องตัดสินใจเลือกในการประมาณค่าความแปรปรวนนี้ คือการกำหนดวัตถุประสงค์ในการประมาณค่าว่าต้องการคำตอบในรูปแบบไหน โดยลักษณะคำตอบสำหรับการประมาณค่าแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ ต้องการคำตอบเพียงค่าเดียวในการประมาณค่า หรือต้องการคำตอบในรูปแบบช่วงสำหรับการประมาณค่า โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

1.1 กรณีต้องการคำตอบเพียงค่าเดียวในการประมาณค่า (การประมาณค่าแบบจุด)

สำหรับการประมาณค่าแบบจุด วิธีของเบส์มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าเมื่อเทียบกับวิธีอื่น ๆ แสดงว่าการกำหนดรูปแบบการแจกแจงก่อนสำหรับวิธีของเบส์จะส่งผลต่อการประมาณค่าความแปรปรวน โดยกรณีข้อมูลมีการแจกกแจงปรกติควรกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา แต่สำหรับกรณีข้อมูลมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้น (จำลองด้วยการแจกแจงปรกติปลอมปน) ควรกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง

1.2 กรณีต้องการคำตอบในรูปแบบช่วงสำหรับการประมาณค่า (การประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่น)

สำหรับการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่น เมื่อข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงปรกติ โดยส่วนมากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่ามีประสิทธิภาพในการประมาณค่าความปรวนดีกว่าวิธีอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อกำหนดระดับความความเชื่อมั่นที่กว้างมาก ๆ วิธีดังกล่าวประมาณค่าความแปรปรวนดีที่สุด ส่วนในกรณีข้อมูลมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้น (จำลองด้วยการแจกแจงปรกติปลอมปน) โดยส่วนใหญ่การประมาณค่าโดยใช้แนวคิดการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์ และวิธีบูตสแทร็ป) กรณีที่ขนาดตัวอย่าง ไม่เกิน 50 ($n \le 50$) วิธีการดังกล่าวมีความสามารถในการประมาณค่าได้ดีเมื่อเทียบกับวิธีอื่น ๆ ส่วนในกรณีที่ขนาดตัวอย่างมาก ($n \ge 100$) ทั้ง 5 วิธีการดังกล่าวไม่มีความสามารถในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน

2. ขนาดตัวอย่าง

จากผลการทดลองพบว่าขนาดตัวอย่างส่งผลต่อการประมาณค่าความแปรปรวน โดยทุกงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเห็นตรงกันว่า ขนาดตัวอย่างที่มีมากขึ้น จะทำให้โอกาสที่การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการมีความคลาดเคลื่อนน้อยลง

5.3 ข้อเสนอแนะ

จากการทำงานวิจัยพบว่า การประมาณค่าความแปรปรวนขึ้นอยู่กับ วัตถุประสงค์ในการประมาณค่า รูปร่างของการแจกแจงข้อมูล ค่านอกเกณฑ์ที่เกิดขึ้นในข้อมูล และ ขนาดตัวอย่าง ดังนั้นหากต้องการประมาณค่าความแปรปรวนแบบจุดควรที่จะใช้วิธีของเบส์ ซึ่งหากข้อมูลมีการแจกแจงปรกติ ควรกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงแกมมา แต่กรณีข้อมูลมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้น ควรกำหนดการแจกแจงก่อนด้วยการแจกแจงไคกำลังสอง สำหรับการประมาณค่าแบบช่วง ซึ่งหากข้อมูลมีการแจกแจงปรกติ ควรใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ปรับค่าในการประมาณค่าความแปรปรวน แต่หากกรณีข้อมูลมีค่านอกเกณฑ์เกิดขึ้น ควรใช้วิธีการอนุมานด้วยการสุ่มซ้ำ (ประกอบด้วย วิธีแจ็คไนฟ์ และ วิธีบูตสแทร็ป) นอกจากนี้ หากต้องการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของความแปรปรวน โดยข้อมูลมีขนาดใหญ่ ($n \geq 100$) แต่มีค่าผิดปรกติเกิดขึ้น อาจจำเป็นที่จะต้องกำจัดค่านอกเกณฑ์ออกแล้ววิเคราะห์ข้อมูลที่เหลือ เนื่องจากค่านอกเกณฑ์อาจส่งผลกระทบในการประมาณค่าความแปรปรวน

สำหรับการประยุกต์ใช้ข้อมูลจริงในงานวิจัยนี้ ขั้นตอนแรกพิจารณาว่าข้อมูลมีการแจกแจงปรกติโดยสามารถตรวจสอบลักษณะเบื้องต้นได้จากการสร้างกราฟฮีสโตแกรม (Histogram) เพื่อดูลักษณะของข้อมูล หากข้อมูลมีลักษณะคล้ายระฆังคว่ำและมีลักษณะสมมาตรรอบค่าเฉลี่ยแสดงว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปรกติ หรืออาจใช้การทดสอบสมมติฐานเช่น วิธีแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิ่ง (Anderson-Darling) เพื่อตรวจสอบว่า ข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงปรกติหรือไม่ และขั้นตอนสุดท้ายคือสร้างแผนภาพกล่อง (Boxplot) เพื่อตรวจสอบค่านอกเกณฑ์ของข้อมูล แล้วจึงเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมในการประมาณค่าความแปรปรวนทั้งแบบจุดและแบบช่วง

บรรณานุกรม

จำลอง วงษ์ประเสริฐ. 2561. **สถิติเชิงคณิตศาสตร์ : ความน่าจะเป็น.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฉัตรวดี กิจแก้ว และ อัชฌา อระวีพร. 2562. “การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ในการแจกแจงแกมมา.” **วารสารมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ(สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี).** 11(21) : 38-51.

บำรุงศักดิ์ เผื่อนอารีย์ และ กรรวี รุ่งสว่าง. 2560. “การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของค่ามัธยฐานสำหรับการแจกแจงเลขชี้กำลังด้วยวิธีบูทสแตรป.” หน้า MA 187-194. **ในการประชุมวิชาการระดับชาติ “วิทยาศาสตร์วิจัย”ครั้งที่ 9.** ชลบุรี : มหาวิทยาลัยบูรพา.

ประชุม สุวัตถี. 2553. **ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ.** พิมพ์ครั้งที่3. กรุงเทพฯ : สำนักงานกิจการโรงพิมพ์ องค์การสงเคราะห์ทหารผ่านศึก.

ศรสวรรค์ บุญเพ็ญ, บุญอ้อม โฉมที และ อภิญญา หิรัญวงษ์. 2558. “การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ขนาดของการแจกแจงไวบูลล์แบบสองพารามิเตอร์.” **วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.** 23(4) : 579-587.

สำนักงานราชบัณฑิตตยสภา. 2558. **พจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา.** กรุงเทพฯ : สำนักงานราชบัณฑิตตยสภา

สุเมธ สมภักดี. 2542. **สถิติคณิตศาสตร์.** พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ประกายพรึก.

อัชฌา อระวีพร. 2555. “การวิเคราะห์เบส์จากโปรแกรมวินบั๊กสู่โปรแกรมอาร์.” **วารสารวิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยนเรศวร.** 9(1) : 30-44.

อัชฌา อระวีพร. 2562. **การวิเคราะห์การตัดสินใจเชิงสถิติ.** พิมพ์ครั้งที่2. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีน เซอร์วิส ซัพพลาย.

อัชฌา อระวีพร, กันยารัตน์ มีชัย, ณิชกานต์ สุทธิวรรณ, กุลชญา ด่านวนิช และ คุณานนท์ชีวะธรรมนนท์. 2563. “การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปรกติ และการแจกแจงปรกติปลอมปน.” **การประชุมวิชาการการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ ประจำปี พ.ศ. 2563.** กรุงเทพฯ : ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้า

คุณทหารลาดกระบัง

อัญมณี กุมมาระกะ และ อัชฌา อระวีพร. 2561. “การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจก แจงทวินามเชิงลบ ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล.” **วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.** 26(1) : 58-70.

อนุวัฒน์ คำมา, มานะชัย รอดชื่น และพุฒิพงษ์ พุกกะมาน. (2560, ตุลาคม-ธันวาคม). “การประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของอัตราส่วนความแปรปรวนสองประชากรที่ไม่เป็นการแจกแจงปรกติ.” **วารสารวิจัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.** 17(4): 12-23.

อโนทัย ตรีวานิช. 2539. **ทฤษฎีการอนุมานทางสถิติ.** ขอนแก่น : หจก.โรงพิมพ์คลังนานาวิทยา

Araveeporn, A. 2014. “Parameter Estimation of Poisson Distribution by Using Maximum Likelihood, Markov Chain Monte Carlo, and Bayes Method.” **Thammasat International of Science and Technology.** 19(3) : 1-14.

Araveeporn, A. 2016. “The Interval Estimation for the Mean of Normal Distribution by Markov Chain Monte Carlo Method.” **Proceeding of the International Conference on Applied Statistics 2016.** O1-O6.

Efron, B. 1979. Bootstrap Methods : Another Loot at the Jackknife. **The Annals of statistics.** 7: 1-26.

Efron, B. and Tibshirani, R.J. 1993 **An Introduction to the Bootstrap**. New York : Chapman&Hall.

John, D. 2008. **Inverse Gamma Distribution**. Retrieved from: https://www.johndcook.com/inverse_gamma.pdf

Quenouille, M.H. 1956. Notes on Bias in Estimation. **Biometrika.** 43: 353-360.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในงานวิจัย

วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดและช่วงเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ

```
#สัญลักษณ์และความหมาย
#M=จำนวนรอบที่จำลองข้อมูล
#n=ขนาดตัวอย่าง
#mu=ค่าเฉลี่ย
#var_test=ความแปรปรวน
#m= จำนวนรอบในบูตสแทรป
#alpha_bayes.g=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยแกมมา
#lamma_bayes.g=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยแกมมา
#alpha_bayes.c=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยไคสแควร์
#lamma_bayes.c=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยไคสแควร์
#alpha_bayes.e=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยเอกโปเนนเชียล
#lamma_bayes.e=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยเอกโปเนนเชียล
#-------------------------------------------------------------------------------------------------------
set.seed(1)
#ดาวน์โหลดแพกเกจ bootstrap,MCMC
library(bootstrap)
library(rjags)
# กำหนดตัวแปร-------------------------------------------
M=1000
n=100
mu=2
var_test=6
m=10000
```

```
alpha_bayes.g=2
lamma_bayes.g=1
alpha_bayes.c=2
lamma_bayes.c=0.5
alpha_bayes.e=1
lamma_bayes.e=0.2
# เก็บตัวแปร---------------------------------------------
MLE_adjust=c()
varstar=c()
Bayes.g=c()
Bayes.c=c()
Bayes.e=c()
mcmc.est=c()
sd.mcmc=c()
Bootstrap=c()
Jackknife=c()
LCL90_MLE_adjust=c()
LCL90_Bayes.g.CLT=c()
LCL90_Bayes.c.CLT=c()
LCL90_Bayes.e.CLT=c()
LCL90_mcmc.est.CLT=c()
LCL90_Bootstrap.CLT=c()
LCL90_Jackknife.CLT=c()
UCL90_MLE_adjust=c()
UCL90_Bayes.g.CLT=c()
```

```
UCL90_Bayes.c.CLT=c()
UCL90_Bayes.e.CLT=c()
UCL90_mcmc.est.CLT=c()
UCL90_Bootstrap.CLT=c()
UCL90_Jackknife.CLT=c()
LCL95_MLE_adjust=c()
LCL95_Bayes.g.CLT=c()
LCL95_Bayes.c.CLT=c()
LCL95_Bayes.e.CLT=c()
LCL95_mcmc.est.CLT=c()
LCL95_Bootstrap.CLT=c()
LCL95_Jackknife.CLT=c()
UCL95_MLE_adjust=c()
UCL95_Bayes.g.CLT=c()
UCL95_Bayes.c.CLT=c()
UCL95_Bayes.e.CLT=c()
UCL95_mcmc.est.CLT=c()
UCL95_Bootstrap.CLT=c()
UCL95_Jackknife.CLT=c()
LCL99_MLE_adjust=c()
LCL99_Bayes.g.CLT=c()
LCL99_Bayes.c.CLT=c()
LCL99_Bayes.e.CLT=c()
LCL99_mcmc.est.CLT=c()
LCL99_Bootstrap.CLT=c()
```

```
LCL99_Jackknife.CLT=c()
UCL99_MLE_adjust=c()
UCL99_Bayes.g.CLT=c()
UCL99_Bayes.c.CLT=c()
UCL99_Bayes.e.CLT=c()
UCL99_mcmc.est.CLT=c()
UCL99_Bootstrap.CLT=c()
UCL99_Jackknife.CLT=c()
acc90_MLE_adjust=c()
acc90_Bayes.g.CLT=c()
acc90_Bayes.c.CLT=c()
acc90_Bayes.e.CLT=c()
acc90_mcmc.est.CLT=c()
acc90_Bootstrap.CLT=c()
acc90_Jackknife.CLT=c()
acc95_MLE_adjust=c()
acc95_Bayes.g.CLT=c()
acc95_Bayes.c.CLT=c()
acc95_Bayes.e.CLT=c()
acc95_mcmc.est.CLT=c()
acc95_Bootstrap.CLT=c()
acc95_Jackknife.CLT=c()
acc99_MLE_adjust=c()
acc99_Bayes.g.CLT=c()
acc99_Bayes.c.CLT=c()
```

```
acc99_Bayes.e.CLT=c()

acc99_mcmc.est.CLT=c()

acc99_Bootstrap.CLT=c()

acc99_Jackknife.CLT=c()

#---------------------------------------------------------------------

for(i in 1:M)

{

     # input random-------------------------------------------------------------------------------------------

  randomnorm=rnorm(n,mean=mu,sd=sqrt(var_test))

#point estimation of variance-----------------------------------------------------------------------

   # Maximum likelihood------------------------------------------------------------------

         MLE_adjust[i]=var(randomnorm)

   # Bayes ---------------------------------------------------------------------------------------

        # prior Gamma---------------------------------

    Bayes.g[i]=(lamma_bayes.g+(var(randomnorm)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.g+(n/2))-1)

        # prior Chisquare------------------------------

    Bayes.c[i]=(lamma_bayes.c+(var(randomnorm)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.c+(n/2))-1)

       # prior expo-------------------------------------

    Bayes.e[i]=(lamma_bayes.e+(var(randomnorm)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.e+(n/2))-1)

#Markov Chain Monte Carlo Method--------------------------------------------

  library(rjags)

  dataset = list(randomnorm=randomnorm,n=n)

  inits = list(mu = 0.01 , tau = 0.01)

  jagmod <- jags.model ('model_normal.txt', data = dataset, inits = inits,n.chains =1,
      n.adapt = 2000)

  update(jagmod, n.iter = 20, progress.bar = "text")
```

```
posterior = coda.samples(jagmod, c("mu",  "sigma"),n.iter = 10000 , progress.bar =
    "text", thin = 2)
post = as.data.frame(as.matrix(posterior))
var.mcmc = (post$sigma)^2
mcmc.est[i] = mean(var.mcmc)
sd.mcmc[i]=sd(var.mcmc)
#bootstrap --------------------------------------------------------------------
        for(k in 1:m)
         {
          boot.samp=sample(randomnorm,n,replace=TRUE)
          varstar[k]=var(boot.samp)
          }
         Bootstrap[i]=mean(varstar)
 #jackknife--------------------------------------------------------------------
theta=function(randomnorm){var(randomnorm)}
results=jackknife(randomnorm,theta)
Jackknife[i]=mean(results$jack.values)
#interval estimation of variance------------------------------------------------------------
#(n-1)/(quantile distribution)--------------------
l90_percen=(n-1)/qchisq(1-0.1/2,n-1)
u90_percen=(n-1)/qchisq(0.1/2,n-1)
l95_percen=(n-1)/qchisq(1-0.05/2,n-1)
u95_percen=(n-1)/qchisq(0.05/2,n-1)
l99_percen=(n-1)/qchisq(1-0.01/2,n-1)
u99_percen=(n-1)/qchisq(0.01/2,n-1)
```

```
#quantile distribution---------------------
qnorm90_percen=qnorm(1-0.1/2)
qnorm95_percen=qnorm(1-0.05/2)
qnorm99_percen=qnorm(1-0.01/2)
qt90_percen=qt(1-0.1/2,n-1)
qt95_percen=qt(1-0.05/2,n-1)
qt99_percen=qt(1-0.01/2,n-1)
#standard error------------------------------------
   SE_Bayes.g=sqrt(((lamma_bayes.g+(var(randomnorm)*(n-1)/2))^2)/((((alpha_bayes.g+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.g+(n/2))-2)))
   SE_Bayes.c=sqrt(((lamma_bayes.c+(var(randomnorm)*(n-1)/2))^2)/((((alpha_bayes.c+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.c+(n/2))-2)))
   SE_Bayes.e=sqrt(((lamma_bayes.e+(var(randomnorm)*(n-1)/2))^2)/((((alpha_bayes.e+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.e+(n/2))-2)))
   SE_MCMC=sd.mcmc
   SE_Bootstrap=sd(varstar)
   SE_Jackknife=results$jack.se
# Confidence level 90 percen-------------------------------------------
      #LCL-------------------------------------------------------------
LCL90_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l90_percen
LCL90_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.g)
LCL90_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.c)
LCL90_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.e)
LCL90_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm90_percen* SE_MCMC)
LCL90_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm90_percen*SE_Bootstrap)
LCL90_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt90_percen*SE_Jackknife)
```

```
#UCL-----------------------------------------------------------------
UCL90_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u90_percen
UCL90_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.g)
UCL90_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.c)
UCL90_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.e)
UCL90_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm90_percen* SE_MCMC)
UCL90_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm90_percen*SE_Bootstrap)
UCL90_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt90_percen*SE_Jackknife)
# Confidence level 95 percen-------------------------------------------------------------
#LCL-----------------------------------------------------------------
LCL95_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l95_percen
LCL95_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.g)
LCL95_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.c)
LCL95_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.e)
LCL95_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm95_percen* SE_MCMC)
LCL95_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm95_percen*SE_Bootstrap)
LCL95_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt95_percen*SE_Jackknife)
#UCL-----------------------------------------------------------------
UCL95_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u95_percen
UCL95_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.g)
UCL95_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.c)
UCL95_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.e)
UCL95_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm95_percen* SE_MCMC)
UCL95_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm95_percen*SE_Bootstrap)
UCL95_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt95_percen*SE_Jackknife)
```

```
# Confidence level 99 percen------------------------------------------------------------
#LCL--------------------------------------------------------------------
LCL99_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l99_percen
LCL99_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.g)
LCL99_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.c)
LCL99_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.e)
LCL99_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm99_percen* SE_MCMC)
LCL99_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm99_percen*SE_Bootstrap)
LCL99_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt99_percen*SE_Jackknife)
#UCL--------------------------------------------------------------------
UCL99_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u99_percen
UCL99_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.g)
UCL99_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.c)
UCL99_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.e)
UCL99_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm99_percen* SE_MCMC)
UCL99_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm99_percen*SE_Bootstrap)
UCL99_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt99_percen*SE_Jackknife)
if(LCL90_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL90_MLE_adjust[i]>=var_test){acc90_MLE_adjust[i]=1}else{acc90_MLE_adjust[i]=0}
if(LCL90_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.g.CLT[i]=1}else{acc90_Bayes.g.CLT[i]=0}
if(LCL90_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.c.CLT[i]=1}else{acc90_Bayes.c.CLT[i]=0}
if(LCL90_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.e.CLT[i]=1}else{acc90_Bayes.e.CLT[i]=0}
if(LCL90_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL90_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc90_mcmc.est.CLT[i]=1}else{acc90_mcmc.est.CLT[i]=0}
```

```
if(LCL90_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc90_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc90_Bootstrap.CLT[i]=0}
if(LCL90_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL90_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc90_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc90_Jackknife.CLT[i]=0}
if(LCL95_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL95_MLE_adjust[i]>=var_test){acc95_MLE_adjust[
    i]=1}else{acc95_MLE_adjust[i]=0}
if(LCL95_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.g.CLT
    [i]=1}else{acc95_Bayes.g.CLT[i]=0}
if(LCL95_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.c.CLT
    [i]=1}else{acc95_Bayes.c.CLT[i]=0}
if(LCL95_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.e.CL
    T[i]=1}else{acc95_Bayes.e.CLT[i]=0}
if(LCL95_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL95_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc95_mcmc.
    est.CLT[i]=1}else{acc95_mcmc.est.CLT[i]=0}
if(LCL95_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc95_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc95_Bootstrap.CLT[i]=0}
if(LCL95_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL95_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc95_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc95_Jackknife.CLT[i]=0}
if(LCL99_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL99_MLE_adjust[i]>=var_test){acc99_MLE_adjust[
    i]=1}else{acc99_MLE_adjust[i]=0}
if(LCL99_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.g.CLT
    [i]=1}else{acc99_Bayes.g.CLT[i]=0}
if(LCL99_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.c.CLT
    [i]=1}else{acc99_Bayes.c.CLT[i]=0}
if(LCL99_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.e.CL
    T[i]=1}else{acc99_Bayes.e.CLT[i]=0}
if(LCL99_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL99_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc99_mcmc.
    est.CLT[i]=1}else{acc99_mcmc.est.CLT[i]=0}
if(LCL99_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc99_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc99_Bootstrap.CLT[i]=0}
```

```
if(LCL99_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL99_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc99_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc99_Jackknife.CLT[i]=0}
}
#MSE----------------------------------------------------------------------------------------------------
MSE_MLE_adjust=sum((var_test-MLE_adjust)^2)/M
MSE_Bayes.g=sum((var_test-Bayes.g)^2)/M
MSE_Bayes.c=sum((var_test-Bayes.c)^2)/M
MSE_Bayes.e=sum((var_test-Bayes.e)^2)/M
MSE_MCMC=sum((var_test-mcmc.est)^2)/M
MSE_Bootstrap=sum((var_test-Bootstrap)^2)/M
MSE_Jackknife=sum((var_test-Jackknife)^2)/M
#coverage probability-----------------------------------------------------------------------------------
CP90_MLE_adjust=mean(acc90_MLE_adjust)
CP90_Bayes.g.CLT=mean(acc90_Bayes.g.CLT)
CP90_Bayes.c.CLT=mean(acc90_Bayes.c.CLT)
CP90_Bayes.e.CLT=mean(acc90_Bayes.e.CLT)
CP90_mcmc.est.CLT=mean(acc90_mcmc.est.CLT)
CP90_Bootstrap.CLT=mean(acc90_Bootstrap.CLT)
CP90_Jackknife.CLT=mean(acc90_Jackknife.CLT)
CP95_MLE_adjust=mean(acc95_MLE_adjust)
CP95_Bayes.g.CLT=mean(acc95_Bayes.g.CLT)
CP95_Bayes.c.CLT=mean(acc95_Bayes.c.CLT)
CP95_Bayes.e.CLT=mean(acc95_Bayes.e.CLT)
CP95_mcmc.est.CLT=mean(acc95_mcmc.est.CLT)
CP95_Bootstrap.CLT=mean(acc95_Bootstrap.CLT)
CP95_Jackknife.CLT=mean(acc95_Jackknife.CLT)
```

```
CP99_MLE_adjust=mean(acc99_MLE_adjust)
CP99_Bayes.g.CLT=mean(acc99_Bayes.g.CLT)
CP99_Bayes.c.CLT=mean(acc99_Bayes.c.CLT)
CP99_Bayes.e.CLT=mean(acc99_Bayes.e.CLT)
CP99_mcmc.est.CLT=mean(acc99_mcmc.est.CLT)
CP99_Bootstrap.CLT=mean(acc99_Bootstrap.CLT)
CP99_Jackknife.CLT=mean(acc99_Jackknife.CLT)
#Average Width-------------------------------------------------------------------------------------------
AW90_MLE_adjust=sum(UCL90_MLE_adjust-LCL90_MLE_adjust)/M
AW90_Bayes.g.CLT=sum(UCL90_Bayes.g.CLT-LCL90_Bayes.g.CLT)/M
AW90_Bayes.c.CLT=sum(UCL90_Bayes.c.CLT-LCL90_Bayes.c.CLT)/M
AW90_Bayes.e.CLT=sum(UCL90_Bayes.e.CLT-LCL90_Bayes.e.CLT)/M
AW90_mcmc.est.CLT=sum(UCL90_mcmc.est.CLT-LCL90_mcmc.est.CLT)/M
AW90_Bootstrap.CLT=sum(UCL90_Bootstrap.CLT-LCL90_Bootstrap.CLT)/M
AW90_Jackknife.CLT=sum(UCL90_Jackknife.CLT-LCL90_Jackknife.CLT)/M
AW95_MLE_adjust=sum(UCL95_MLE_adjust-LCL95_MLE_adjust)/M
AW95_Bayes.g.CLT=sum(UCL95_Bayes.g.CLT-LCL95_Bayes.g.CLT)/M
AW95_Bayes.c.CLT=sum(UCL95_Bayes.c.CLT-LCL95_Bayes.c.CLT)/M
AW95_Bayes.e.CLT=sum(UCL95_Bayes.e.CLT-LCL95_Bayes.e.CLT)/M
AW95_mcmc.est.CLT=sum(UCL95_mcmc.est.CLT-LCL95_mcmc.est.CLT)/M
AW95_Bootstrap.CLT=sum(UCL95_Bootstrap.CLT-LCL95_Bootstrap.CLT)/M
AW95_Jackknife.CLT=sum(UCL95_Jackknife.CLT-LCL95_Jackknife.CLT)/M
AW99_MLE_adjust=sum(UCL99_MLE_adjust-LCL99_MLE_adjust)/M
AW99_Bayes.g.CLT=sum(UCL99_Bayes.g.CLT-LCL99_Bayes.g.CLT)/M
AW99_Bayes.c.CLT=sum(UCL99_Bayes.c.CLT-LCL99_Bayes.c.CLT)/M
```

```
AW99_Bayes.e.CLT=sum(UCL99_Bayes.e.CLT-LCL99_Bayes.e.CLT)/M
AW99_mcmc.est.CLT=sum(UCL99_mcmc.est.CLT-LCL99_mcmc.est.CLT)/M
AW99_Bootstrap.CLT=sum(UCL99_Bootstrap.CLT-LCL99_Bootstrap.CLT)/M
AW99_Jackknife.CLT=sum(UCL99_Jackknife.CLT-LCL99_Jackknife.CLT)/M
#output-----------------------------------------------------------------------------------------------------
#point estimation of variance--------------------------------------------------
cat("n=",n,"mu",mu,"sigma^2=",var_test,"M=",M,"m=",m)
cat("MSE_MLE_adjust=",MSE_MLE_adjust)
cat("MSE_Bayes.g=",MSE_Bayes.g)
cat("MSE_Bayes.c=",MSE_Bayes.c)
cat("MSE_Bayes.e=",MSE_Bayes.e)
cat("MSE_MCMC=",MSE_MCMC)
cat("MSE_Bootstrap=",MSE_Bootstrap)
cat("MSE_Jackknife=",MSE_Jackknife)
#interval estimation of variance-----------------------------------------------
    #90percen----------------------------------------
cat("CP90_MLE_adjust=",CP90_MLE_adjust,"AW90_MLE_adjust=",AW90_MLE_adjust)
cat("CP90_Bayes.g.CLT=",CP90_Bayes.g.CLT,"AW90_Bayes.g.CLT=",AW90_Bayes.g.CLT)
cat("CP90_Bayes.c.CLT=",CP90_Bayes.c.CLT,"AW90_Bayes.c.CLT=",AW90_Bayes.c.CLT)
cat("CP90_Bayes.e.CLT=",CP90_Bayes.e.CLT,"AW90_Bayes.e.CLT=",AW90_Bayes.e.CLT)
cat("CP90_mcmc.est.CLT=",CP90_mcmc.est.CLT,"AW90_mcmc.est.CLT=",AW90_mcmc.
    est.CLT)
cat("CP90_Bootstrap.CLT=",CP90_Bootstrap.CLT,"AW90_Bootstrap.CLT=",AW90_Bootstr
    ap.CLT)
cat("CP90_Jackknife.CLT=",CP90_Jackknife.CLT,"AW90_Jackknife.CLT=",AW90_Jackknife.
    CLT)
```

```
#95percen---------------------------------------
cat("CP95_MLE_adjust=",CP95_MLE_adjust,"AW95_MLE_adjust=",AW95_MLE_adjust)
cat("CP95_Bayes.g.CLT=",CP95_Bayes.g.CLT,"AW95_Bayes.g.CLT=",AW95_Bayes.g.CLT)
cat("CP95_Bayes.c.CLT=",CP95_Bayes.c.CLT,"AW95_Bayes.c.CLT=",AW95_Bayes.c.CLT)
cat("CP95_Bayes.e.CLT=",CP95_Bayes.e.CLT,"AW95_Bayes.e.CLT=",AW95_Bayes.e.CLT)
cat("CP95_mcmc.est.CLT=",CP95_mcmc.est.CLT,"AW95_mcmc.est.CLT=",AW95_mcmc.
    est.CLT)
cat("CP95_Bootstrap.CLT=",CP95_Bootstrap.CLT,"AW95_Bootstrap.CLT=",AW95_Bootstr
    ap.CLT)
cat("CP95_Jackknife.CLT=",CP95_Jackknife.CLT,"AW95_Jackknife.CLT=",AW95_Jackknife.
    CLT)
#99percen---------------------------------------
cat("CP99_MLE_adjust=",CP99_MLE_adjust,"AW99_MLE_adjust=",AW99_MLE_adjust)
cat("CP99_Bayes.g.CLT=",CP99_Bayes.g.CLT,"AW99_Bayes.g.CLT=",AW99_Bayes.g.CLT)
cat("CP99_Bayes.c.CLT=",CP99_Bayes.c.CLT,"AW99_Bayes.c.CLT=",AW99_Bayes.c.CLT)
cat("CP99_Bayes.e.CLT=",CP99_Bayes.e.CLT,"AW99_Bayes.e.CLT=",AW99_Bayes.e.CLT)
cat("CP99_mcmc.est.CLT=",CP99_mcmc.est.CLT,"AW99_mcmc.est.CLT=",AW99_mcmc.
    est.CLT)
cat("CP99_Bootstrap.CLT=",CP99_Bootstrap.CLT,"AW99_Bootstrap.CLT=",AW99_Bootstr
    ap.CLT)
cat("CP99_Jackknife.CLT=",CP99_Jackknife.CLT,"AW99_Jackknife.CLT=",AW99_Jackknife.
    CLT)
```

วิธีการประมาณค่าความแปรปรวนรูปแบบจุดและช่วงเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติปลอมปน

```
#M=จำนวนรอบที่จำลองข้อมูล
#n=ขนาดตัวอย่าง
#mu=ค่าเฉลี่ย
#var_test=ความแปรปรวน
#m= จำนวนรอบในบูตสแทรป
#c=สเกลแฟคเตอร์
#p=สัดส่วนการปลอมปน
#alpha_bayes.g=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยแกมมา
#lamma_bayes.g=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยแกมมา
#alpha_bayes.c=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยไคสแควร์
#lamma_bayes.c=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยไคสแควร์
#alpha_bayes.e=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยเอกโปเนนเชียล
#lamma_bayes.e=กำหนดพารามิเตอร์วิธีbayesด้วยเอกโปเนนเชียล
#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------
set.seed(1)
#ดาวน์โหลดแพกเกจ bootstrap,MCMC
library(bootstrap)
library(rjags)
# กำหนดตัวแปร-----------------------------------------------------------------------
M=1000
n=100
mu=2
var_test=4
m=10000
```

```
alpha_bayes.g=2
lamma_bayes.g=1
alpha_bayes.c=2
lamma_bayes.c=0.5
alpha_bayes.e=1
lamma_bayes.e=0.2
c=5
p=0.10
# เก็บตัวแปร---------------------------------------------------------------------------
MLE_adjust=c()
varstar=c()
Bayes.g=c()
Bayes.c=c()
Bayes.e=c()
mcmc.est=c()
sd.mcmc=c()
Bootstrap=c()
Jackknife=c()
LCL90_MLE_adjust=c()
LCL90_Bayes.g.CLT=c()
LCL90_Bayes.c.CLT=c()
LCL90_Bayes.e.CLT=c()
LCL90_mcmc.est.CLT=c()
LCL90_Bootstrap.CLT=c()
LCL90_Jackknife.CLT=c()
```

```
UCL90_MLE_adjust=c()
UCL90_Bayes.g.CLT=c()
UCL90_Bayes.c.CLT=c()
UCL90_Bayes.e.CLT=c()
UCL90_mcmc.est.CLT=c()
UCL90_Bootstrap.CLT=c()
UCL90_Jackknife.CLT=c()
LCL95_MLE_adjust=c()
LCL95_Bayes.g.CLT=c()
LCL95_Bayes.c.CLT=c()
LCL95_Bayes.e.CLT=c()
LCL95_mcmc.est.CLT=c()
LCL95_Bootstrap.CLT=c()
LCL95_Jackknife.CLT=c()
UCL95_MLE_adjust=c()
UCL95_Bayes.g.CLT=c()
UCL95_Bayes.c.CLT=c()
UCL95_Bayes.e.CLT=c()
UCL95_mcmc.est.CLT=c()
UCL95_Bootstrap.CLT=c()
UCL95_Jackknife.CLT=c()
LCL99_MLE_adjust=c()
LCL99_Bayes.g.CLT=c()
LCL99_Bayes.c.CLT=c()
LCL99_Bayes.e.CLT=c()
```

```
LCL99_mcmc.est.CLT=c()
LCL99_Bootstrap.CLT=c()
LCL99_Jackknife.CLT=c()
UCL99_MLE_adjust=c()
UCL99_Bayes.g.CLT=c()
UCL99_Bayes.c.CLT=c()
UCL99_Bayes.e.CLT=c()
UCL99_mcmc.est.CLT=c()
UCL99_Bootstrap.CLT=c()
UCL99_Jackknife.CLT=c()
acc90_MLE_adjust=c()
acc90_Bayes.g.CLT=c()
acc90_Bayes.c.CLT=c()
acc90_Bayes.e.CLT=c()
acc90_mcmc.est.CLT=c()
acc90_Bootstrap.CLT=c()
acc90_Jackknife.CLT=c()
acc95_MLE_adjust=c()
acc95_Bayes.g.CLT=c()
acc95_Bayes.c.CLT=c()
acc95_Bayes.e.CLT=c()
acc95_mcmc.est.CLT=c()
acc95_Bootstrap.CLT=c()
acc95_Jackknife.CLT=c()
acc99_MLE_adjust=c()
```

```
acc99_Bayes.g.CLT=c()
acc99_Bayes.c.CLT=c()
acc99_Bayes.e.CLT=c()
acc99_mcmc.est.CLT=c()
acc99_Bootstrap.CLT=c()
acc99_Jackknife.CLT=c()
#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
for(i in 1:M)
    {
      # input random-------------------------------------------------------------
      x1=rnorm(n,mean=mu,sd=sqrt(var_test))
      x2=rnorm(n,mean=mu,sd=sqrt(var_test*(c^2)))
      flag=rbinom(n,size=1,prob=p)
       randomnormpon=(x1*(1-flag))+(x2*flag)
      #point estimation of variance-------------------------------------------------------------
         # Maximum likelihood---------------------------------------
              MLE_adjust[i]=var(randomnormpon)
         # Bayes -------------------------------------------------------------
              # prior Gamma-----------------------
  Bayes.g[i]=(lamma_bayes.g+(var(randomnormpon)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.g+(n/2))-1)
              # prior Chisquare-------------------
  Bayes.c[i]=(lamma_bayes.c+(var(randomnormpon)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.c+(n/2))-1)
              # prior expo------------------------
  Bayes.e[i]=(lamma_bayes.e+(var(randomnormpon)*(n-1)/2))/((alpha_bayes.e+(n/2))-1)
  #Markov Chain Monte Carlo Method-----------------------------------------------
```

```
library(rjags)

dataset = list(randomnormpon=randomnormpon,n=n)

inits = list(mu = 0.01 , tau = 0.01)

jagmod <- jags.model('model_normalpon.txt', data = dataset, inits = inits,n.chains
    =1, n.adapt = 2000)

update(jagmod, n.iter = 20, progress.bar = "text")

posterior = coda.samples(jagmod, c("mu",  "sigma"),n.iter = 10000 , progress.bar =
    "text", thin = 2)

post = as.data.frame(as.matrix(posterior))

var.mcmc = (post$sigma)^2

mcmc.est[i] = mean(var.mcmc)

sd.mcmc[i]=sd(var.mcmc)

        #bootstrap ------------------------------------------------------

         for(k in 1:m)

         {

         boot.samp=sample(randomnormpon,n,replace=TRUE)

         varstar[k]=var(boot.samp)

          }

          Bootstrap[i]=mean(varstar)

#jackknife-----------------------------------------------------------------------

theta=function(randomnormpon){var(randomnormpon)}

results=jackknife(randomnormpon,theta)

Jackknife[i]=mean(results$jack.values)

#interval estimation of variance-----------------------------------------------------------

#(n-1)/(quantile distribution)---------------------

l90_percen=(n-1)/qchisq(1-0.1/2,n-1)
```

```
u90_percen=(n-1)/qchisq(0.1/2,n-1)

l95_percen=(n-1)/qchisq(1-0.05/2,n-1)

u95_percen=(n-1)/qchisq(0.05/2,n-1)

l99_percen=(n-1)/qchisq(1-0.01/2,n-1)

u99_percen=(n-1)/qchisq(0.01/2,n-1)

#quantile distribution---------------------

qnorm90_percen=qnorm(1-0.1/2)

qnorm95_percen=qnorm(1-0.05/2)

qnorm99_percen=qnorm(1-0.01/2)

qt90_percen=qt(1-0.1/2,n-1)

qt95_percen=qt(1-0.05/2,n-1)

qt99_percen=qt(1-0.01/2,n-1)

#standard error-----------------------------------

SE_Bayes.g=sqrt(((lamma_bayes.g+(var(randomnormpon)*(n-
    1)/2))^2)/((((alpha_bayes.g+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.g+(n/2))-2)))

SE_Bayes.c=sqrt(((lamma_bayes.c+(var(randomnormpon)*(n-
    1)/2))^2)/((((alpha_bayes.c+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.c+(n/2))-2)))

SE_Bayes.e=sqrt(((lamma_bayes.e+(var(randomnormpon)*(n-
    1)/2))^2)/((((alpha_bayes.e+(n/2))-1)^2)*((alpha_bayes.e+(n/2))-2)))

SE_MCMC=sd.mcmc

SE_Bootstrap=sd(varstar)

SE_Jackknife=results$jack.se

# Confidence level 90 percen----------------------------------------------------

#LCL-------------------------------------------------------------------

LCL90_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l90_percen

LCL90_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.g)
```

```
LCL90_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.c)

LCL90_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm90_percen*SE_Bayes.e)

LCL90_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm90_percen* SE_MCMC)

LCL90_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm90_percen*SE_Bootstrap)

LCL90_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt90_percen*SE_Jackknife)

#UCL------------------------------------------------------------

UCL90_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u90_percen

UCL90_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.g)

UCL90_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.c)

UCL90_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm90_percen*SE_Bayes.e)

UCL90_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm90_percen* SE_MCMC)

UCL90_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm90_percen*SE_Bootstrap)

UCL90_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt90_percen*SE_Jackknife)

# Confidence level 95 percen----------------------------------------------

#LCL---------------------------------------------------------------

LCL95_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l95_percen

LCL95_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.g)

LCL95_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.c)

LCL95_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm95_percen*SE_Bayes.e)

LCL95_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm95_percen* SE_MCMC)

LCL95_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm95_percen*SE_Bootstrap)

LCL95_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt95_percen*SE_Jackknife)

#UCL---------------------------------------------------------------

UCL95_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u95_percen

UCL95_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.g)
```

```
UCL95_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.c)
UCL95_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm95_percen*SE_Bayes.e)
UCL95_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm95_percen* SE_MCMC)
UCL95_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm95_percen*SE_Bootstrap)
UCL95_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt95_percen*SE_Jackknife)
# Confidence level 99 percen-----------------------------------------------------
#LCL----------------------------------------------------------------------
LCL99_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*l99_percen
LCL99_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.g)
LCL99_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.c)
LCL99_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]-(qnorm99_percen*SE_Bayes.e)
LCL99_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]-(qnorm99_percen* SE_MCMC)
LCL99_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]-(qnorm99_percen*SE_Bootstrap)
LCL99_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]-(qt99_percen*SE_Jackknife)
#UCL----------------------------------------------------------------------
UCL99_MLE_adjust[i]=MLE_adjust[i]*u99_percen
UCL99_Bayes.g.CLT[i]=Bayes.g[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.g)
UCL99_Bayes.c.CLT[i]=Bayes.c[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.c)
UCL99_Bayes.e.CLT[i]=Bayes.e[i]+(qnorm99_percen*SE_Bayes.e)
UCL99_mcmc.est.CLT[i]=mcmc.est[i]+(qnorm99_percen* SE_MCMC)
UCL99_Bootstrap.CLT[i]=Bootstrap[i]+(qnorm99_percen*SE_Bootstrap)
UCL99_Jackknife.CLT[i]=Jackknife[i]+(qt99_percen*SE_Jackknife)
if(LCL90_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL90_MLE_adjust[i]>=var_test){acc90_MLE_adjust[
  i]=1}else{acc90_MLE_adjust[i]=0}
if(LCL90_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.g.CLT
  [i]=1}else{acc90_Bayes.g.CLT[i]=0}
```

```
if(LCL90_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.c.CLT
    [i]=1}else{acc90_Bayes.c.CLT[i]=0}

if(LCL90_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc90_Bayes.e.CL
    T[i]=1}else{acc90_Bayes.e.CLT[i]=0}

if(LCL90_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL90_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc90_mcmc.
    est.CLT[i]=1}else{acc90_mcmc.est.CLT[i]=0}

if(LCL90_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL90_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc90_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc90_Bootstrap.CLT[i]=0}

if(LCL90_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL90_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc90_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc90_Jackknife.CLT[i]=0}

if(LCL95_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL95_MLE_adjust[i]>=var_test){acc95_MLE_adjust[
    i]=1}else{acc95_MLE_adjust[i]=0}

if(LCL95_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.g.CLT
[i]=1}else{acc95_Bayes.g.CLT[i]=0}

if(LCL95_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.c.CLT
    [i]=1}else{acc95_Bayes.c.CLT[i]=0}

if(LCL95_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc95_Bayes.e.CL
    T[i]=1}else{acc95_Bayes.e.CLT[i]=0}

if(LCL95_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL95_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc95_mcmc.
    est.CLT[i]=1}else{acc95_mcmc.est.CLT[i]=0}

if(LCL95_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL95_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc95_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc95_Bootstrap.CLT[i]=0}

if(LCL95_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL95_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc95_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc95_Jackknife.CLT[i]=0}

if(LCL99_MLE_adjust[i]<=var_test&UCL99_MLE_adjust[i]>=var_test){acc99_MLE_adjust[
    i]=1}else{acc99_MLE_adjust[i]=0}

if(LCL99_Bayes.g.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.g.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.g.CLT
    [i]=1}else{acc99_Bayes.g.CLT[i]=0}

if(LCL99_Bayes.c.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.c.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.c.CLT
[i]=1}else{acc99_Bayes.c.CLT[i]=0}
```

```
if(LCL99_Bayes.e.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bayes.e.CLT[i]>=var_test){acc99_Bayes.e.CL
    T[i]=1}else{acc99_Bayes.e.CLT[i]=0}
if(LCL99_mcmc.est.CLT[i]<=var_test&UCL99_mcmc.est.CLT[i]>=var_test){acc99_mcmc.
    est.CLT[i]=1}else{acc99_mcmc.est.CLT[i]=0}
if(LCL99_Bootstrap.CLT[i]<=var_test&UCL99_Bootstrap.CLT[i]>=var_test){acc99_Bootstr
    ap.CLT[i]=1}else{acc99_Bootstrap.CLT[i]=0}
if(LCL99_Jackknife.CLT[i]<=var_test&UCL99_Jackknife.CLT[i]>=var_test){acc99_Jackknif
    e.CLT[i]=1}else{acc99_Jackknife.CLT[i]=0}
}
#MSE------------------------------------------------------------------------------------------------------
MSE_MLE_adjust=sum((var_test-MLE_adjust)^2)/M
MSE_Bayes.g=sum((var_test-Bayes.g)^2)/M
MSE_Bayes.c=sum((var_test-Bayes.c)^2)/M
MSE_Bayes.e=sum((var_test-Bayes.e)^2)/M
MSE_MCMC=sum((var_test-mcmc.est)^2)/M
MSE_Bootstrap=sum((var_test-Bootstrap)^2)/M
MSE_Jackknife=sum((var_test-Jackknife)^2)/M
#coverage probability------------------------------------------------------------------------------
CP90_MLE_adjust=mean(acc90_MLE_adjust)
CP90_Bayes.g.CLT=mean(acc90_Bayes.g.CLT)
CP90_Bayes.c.CLT=mean(acc90_Bayes.c.CLT)
CP90_Bayes.e.CLT=mean(acc90_Bayes.e.CLT)
CP90_mcmc.est.CLT=mean(acc90_mcmc.est.CLT)
CP90_Bootstrap.CLT=mean(acc90_Bootstrap.CLT)
CP90_Jackknife.CLT=mean(acc90_Jackknife.CLT)
CP95_MLE_adjust=mean(acc95_MLE_adjust)
```

```
CP95_Bayes.g.CLT=mean(acc95_Bayes.g.CLT)
CP95_Bayes.c.CLT=mean(acc95_Bayes.c.CLT)
CP95_Bayes.e.CLT=mean(acc95_Bayes.e.CLT)
CP95_mcmc.est.CLT=mean(acc95_mcmc.est.CLT)
CP95_Bootstrap.CLT=mean(acc95_Bootstrap.CLT)
CP95_Jackknife.CLT=mean(acc95_Jackknife.CLT)
CP99_MLE_adjust=mean(acc99_MLE_adjust)
CP99_Bayes.g.CLT=mean(acc99_Bayes.g.CLT)
CP99_Bayes.c.CLT=mean(acc99_Bayes.c.CLT)
CP99_Bayes.e.CLT=mean(acc99_Bayes.e.CLT)
CP99_mcmc.est.CLT=mean(acc99_mcmc.est.CLT)
CP99_Bootstrap.CLT=mean(acc99_Bootstrap.CLT)
CP99_Jackknife.CLT=mean(acc99_Jackknife.CLT)
#Average Width------------------------------------------------------------------------------------
AW90_MLE_adjust=sum(UCL90_MLE_adjust-LCL90_MLE_adjust)/M
AW90_Bayes.g.CLT=sum(UCL90_Bayes.g.CLT-LCL90_Bayes.g.CLT)/M
AW90_Bayes.c.CLT=sum(UCL90_Bayes.c.CLT-LCL90_Bayes.c.CLT)/M
AW90_Bayes.e.CLT=sum(UCL90_Bayes.e.CLT-LCL90_Bayes.e.CLT)/M
AW90_mcmc.est.CLT=sum(UCL90_mcmc.est.CLT-LCL90_mcmc.est.CLT)/M
AW90_Bootstrap.CLT=sum(UCL90_Bootstrap.CLT-LCL90_Bootstrap.CLT)/M
AW90_Jackknife.CLT=sum(UCL90_Jackknife.CLT-LCL90_Jackknife.CLT)/M
AW95_MLE_adjust=sum(UCL95_MLE_adjust-LCL95_MLE_adjust)/M
AW95_Bayes.g.CLT=sum(UCL95_Bayes.g.CLT-LCL95_Bayes.g.CLT)/M
AW95_Bayes.c.CLT=sum(UCL95_Bayes.c.CLT-LCL95_Bayes.c.CLT)/M
AW95_Bayes.e.CLT=sum(UCL95_Bayes.e.CLT-LCL95_Bayes.e.CLT)/M
```

```
AW95_mcmc.est.CLT=sum(UCL95_mcmc.est.CLT-LCL95_mcmc.est.CLT)/M
AW95_Bootstrap.CLT=sum(UCL95_Bootstrap.CLT-LCL95_Bootstrap.CLT)/M
AW95_Jackknife.CLT=sum(UCL95_Jackknife.CLT-LCL95_Jackknife.CLT)/M
AW99_MLE_adjust=sum(UCL99_MLE_adjust-LCL99_MLE_adjust)/M
AW99_Bayes.g.CLT=sum(UCL99_Bayes.g.CLT-LCL99_Bayes.g.CLT)/M
AW99_Bayes.c.CLT=sum(UCL99_Bayes.c.CLT-LCL99_Bayes.c.CLT)/M
AW99_Bayes.e.CLT=sum(UCL99_Bayes.e.CLT-LCL99_Bayes.e.CLT)/M
AW99_mcmc.est.CLT=sum(UCL99_mcmc.est.CLT-LCL99_mcmc.est.CLT)/M
AW99_Bootstrap.CLT=sum(UCL99_Bootstrap.CLT-LCL99_Bootstrap.CLT)/M
AW99_Jackknife.CLT=sum(UCL99_Jackknife.CLT-LCL99_Jackknife.CLT)/M
#output----------------------------------------------------------------------------------------------------
#point estimation of variance---------------------------------------
cat("n=",n,"mu",mu,"sigma^2=",var_test,"M=",M,"m=",m,"c=",c,"p=",p)
cat("MSE_MLE_adjust=",MSE_MLE_adjust)
cat("MSE_Bayes.g=",MSE_Bayes.g)
cat("MSE_Bayes.c=",MSE_Bayes.c)
cat("MSE_Bayes.e=",MSE_Bayes.e)
cat("MSE_MCMC=",MSE_MCMC)
cat("MSE_Bootstrap=",MSE_Bootstrap)
cat("MSE_Jackknife=",MSE_Jackknife)
#interval estimation of variance----------------------------------------
#90percen---------------------------------------
cat("CP90_MLE_adjust=",CP90_MLE_adjust,"AW90_MLE_adjust=",AW90_MLE_adjust)
cat("CP90_Bayes.g.CLT=",CP90_Bayes.g.CLT,"AW90_Bayes.g.CLT=",AW90_Bayes.g.CLT)
cat("CP90_Bayes.c.CLT=",CP90_Bayes.c.CLT,"AW90_Bayes.c.CLT=",AW90_Bayes.c.CLT)
```

```
cat("CP90_Bayes.e.CLT=",CP90_Bayes.e.CLT,"AW90_Bayes.e.CLT=",AW90_Bayes.e.CLT)
cat("CP90_mcmc.est.CLT=",CP90_mcmc.est.CLT,"AW90_mcmc.est.CLT=",AW90_mcmc.est.CLT)
cat("CP90_Bootstrap.CLT=",CP90_Bootstrap.CLT,"AW90_Bootstrap.CLT=",AW90_Bootstrap.CLT)
cat("CP90_Jackknife.CLT=",CP90_Jackknife.CLT,"AW90_Jackknife.CLT=",AW90_Jackknife.CLT)
#95percen---------------------------------------
cat("CP95_MLE_adjust=",CP95_MLE_adjust,"AW95_MLE_adjust=",AW95_MLE_adjust)
cat("CP95_Bayes.g.CLT=",CP95_Bayes.g.CLT,"AW95_Bayes.g.CLT=",AW95_Bayes.g.CLT)
cat("CP95_Bayes.c.CLT=",CP95_Bayes.c.CLT,"AW95_Bayes.c.CLT=",AW95_Bayes.c.CLT)
cat("CP95_Bayes.e.CLT=",CP95_Bayes.e.CLT,"AW95_Bayes.e.CLT=",AW95_Bayes.e.CLT)
cat("CP95_mcmc.est.CLT=",CP95_mcmc.est.CLT,"AW95_mcmc.est.CLT=",AW95_mcmc.est.CLT)
cat("CP95_Bootstrap.CLT=",CP95_Bootstrap.CLT,"AW95_Bootstrap.CLT=",AW95_Bootstrap.CLT)
cat("CP95_Jackknife.CLT=",CP95_Jackknife.CLT,"AW95_Jackknife.CLT=",AW95_Jackknife.CLT)
#99percen---------------------------------------
cat("CP99_MLE_adjust=",CP99_MLE_adjust,"AW99_MLE_adjust=",AW99_MLE_adjust)
cat("CP99_Bayes.g.CLT=",CP99_Bayes.g.CLT,"AW99_Bayes.g.CLT=",AW99_Bayes.g.CLT)
cat("CP99_Bayes.c.CLT=",CP99_Bayes.c.CLT,"AW99_Bayes.c.CLT=",AW99_Bayes.c.CLT)
cat("CP99_Bayes.e.CLT=",CP99_Bayes.e.CLT,"AW99_Bayes.e.CLT=",AW99_Bayes.e.CLT)
cat("CP99_mcmc.est.CLT=",CP99_mcmc.est.CLT,"AW99_mcmc.est.CLT=",AW99_mcmc.est.CLT)
cat("CP99_Bootstrap.CLT=",CP99_Bootstrap.CLT,"AW99_Bootstrap.CLT=",AW99_Bootstrap.CLT)
```

```
cat("CP99_Jackknife.CLT=",CP99_Jackknife.CLT,"AW99_Jackknife.CLT=",AW99_Jackknife.
    CLT)
```

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายกิตติคุณ สุภาวณิชย์
วัน-เดือน-ปีเกิด	4 เมษายน 2540
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
ที่อยู่ปัจจุบัน	163 ตรอกวัดสังข์กระจาย แขวงวัดท่าพระ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ มหาวิทยาลัยบูรพา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา สถิติและการวิเคราะห์ธุรกิจ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ผลงานทางวิชาการ	1.กิตติคุณ สุภาวณิชย์ และ บำรุงศักดิ์ เผื่อนอารีย์. 2562. “การทดสอบภาวะเอกพันธุ์ของความแปรปรวนสองประชากรด้วยการทดสอบการเรียงสับเปลี่ยน ภายใต้ประชากรที่มีการแจกแจงสมมาตร.” หน้า 1707-1713. **ในการประชุมวิชาการระดับชาติ “วิทยาศาสตร์วิจัย”ครั้งที่ 11.** กรุงทพมหานคร : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. 2. กิตติคุณ สุภาวณิชย์ และ อัชฌา อระวีพร. 2564. “การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติและปรกติปลอมปน.” **ในการประชุมวิชาการการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ ประจำปี พ.ศ. 2564.** กรุงเทพฯ : ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ และ ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.