การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง แกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATION OF GAMMA DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS

ฉัตรวดี กิจแก้ว

CHATWADEE KITKEAW

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2560

KMITL-2017-SC-M-050-019

EFFICIENCY COMPARISON OF PARAMETER ESTIMATION OF GAMMA DISTRIBUTION BY MAXIMUM LIKELIHOOD, BAYES', AND MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS

CHATWADEE KITKEAW

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF MASTER IN APPLIED STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2017
KMITL-2017-SC-M-050-019

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์	"การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ" "Efficiency Comparison of Parameter Estimation of Gamma Distribution by Maximum Likelihood, Bayes' and Markov Chain Monte Carlo Methods"
ชื่อนักศึกษา	นางสาวณัฐรวดี [illegible]
รหัสประจำตัว	58605109
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สาขาวิชาสถิติประยุกต์)
ภาควิชา	สถิติ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.สมศรี บัณฑิตวิไล ประธานกรรมการ	[signature]
ดร.กนกกรรณ์ ลี้โรจนาประภา อาจารย์บัณฑิตประจำ (ในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง)	[signature]
รศ.ดร.วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกสถาบัน	วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล
ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	อัชฌา อระวีพร

วัน/ เดือน/ ปี ที่สอบ วันจันทร์ที่ 18 ธันวาคม พ.ศ. 2560 เวลา 13.00-16.00 น.
สถานที่สอบ ณ ห้อง 115 อาคารจุฬาภรณ์วลัยลักษณ์ 1 ชั้น 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

[signature]

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิทธิพงศ์ แจ้งชัด)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะวิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
ชื่อนักศึกษา	นางสาวฉัตรวดี กิจแก้ว
รหัสประจำตัว	58605109
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชา	สถิติ
พ.ศ.	2560
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) การแจกแจงไคกำลังสอง (4) และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยใช้ตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงแกมมา ซึ่งกำหนดค่าพารามิเตอร์สเกล (λ) เท่ากับ 2 และค่าพารามิเตอร์รูปร่าง (α) เท่ากับ 2 3 4 5 6 7 และ 8 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษาเท่ากับ 30 50 และ 70 และกำหนดระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% โดยค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างดังกล่าวนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วง ในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรมอาร์ในการวิจัย ซึ่งทำการทดลองซ้ำ 1,000 รอบในแต่ละสถานการณ์ สำหรับการประมาณค่าแบบจุดจะพิจารณาวิธีการประมาณที่มีประสิทธิภาพจากการทดสอบสมมติฐานการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวประมาณกับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด โดยใช้การทดสอบที และการประมาณค่าแบบช่วงจะพิจารณาวิธีการประมาณที่มีประสิทธิภาพจากค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

ผลการวิจัยพบว่า สำหรับการประมาณค่าแบบจุด ส่วนใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 30 50 และ 70 และค่าพารามิเตอร์รูปร่าง (α) มีค่าเท่ากับ 2 3 และ 4 แต่ถ้าขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์รูปร่าง (α) มีค่าเพิ่มขึ้น วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ จะเป็นวิธีที่มี

ประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับการประมาณค่าแบบช่วง โดยส่วนใหญ่วิธีของเบส์เป็นวิธีที่ประสิทธิภาพในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นได้ดีที่สุด

คำสำคัญ : การแจกแจงแกมมา, ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด, เบส์, มอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

Thesis Title	Efficiency Comparison of Parameter Estimation of Gamma Distribution by Maximum Likelihood, Bayes', and Markov Chain Monte Carlo Methods
Student Name	Chatwadee Kitkeaw
Student ID	58605109
Degree	Master of Science
Department	Statistics
Year	2017
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Autcha Araveeporn

Abstract

The objective of this research is to compare the point and interval estimations of gamma Distribution by Maximum Likelihood (ML), Bayes', Markov Chain Monte Carlo (MCMC) and applied Bayes' with Markov Chain Monte Carlo (Bayes.MCMC) Methods. The prior distributions of Bayes' method are gamma (2,1), chi-square (4), and exponential (0.2) distributions. The data samples are generated from gamma distribution by setting the scale parameter or called true parameter (λ) as 2, the shape parameter (α) as 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8, sample sizes (n) as 30, 50, and 70, and the 95% and 99% confidence interval. By the parameter values and sample sizes are used in the point and interval estimations. The simulated data is generated by R program and replicated 1,000 times in each situation. For the point estimation, the t-test is used for testing that the true parameter is not different from the mean of estimated parameter. The interval estimation is considered by Confidence Coefficient (CC) and Average Width (AW). The results are divided to two parts as follows: the first part is the result of the point estimation; ML, Bayes', and MCMC methods are a good performance to estimate parameter except sample sizes are 30, 50, and 70 and shape parameter (α) are 2, 3, and 4. If sample sizes and shape parameter (α) are increasing, the Bayes.MCMC method is a better performance than the other methods. And the second part is the result of the interval estimation; the Bayes' method is the best performance to estimate the confidence interval.

Keywords : Gamma Distribution, Maximum Likelihood, Bayes', Markov Chain Monte Carlo

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีและมีความถูกต้องในเนื้อหา เนื่องด้วยได้รับความอนุเคราะห์จาก ผศ.ดร.อัชฌา อระวีพร ผู้ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รวมถึงเป็นผู้ให้คำแนะนำ คำปรึกษา เอื้อเฟื้อเอกสารที่เกี่ยวข้องในการทำวิจัย และหนังสืออ้างอิงที่ใช้ในการจัดทำวิจัยนี้ ตลอดจนตรวจทานงานวิจัย และติดตามการทำวิจัยทุกขั้นตอนจนกระทั่งงานวิจัยเสร็จสมบูรณ์ จึงขอกราบขอบพระคุณด้วยความเคารพอย่างสูง ไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณ คณะกรรมการพิจารณาหัวข้อและเค้าโครงวิทยานิพนธ์ ได้แก่ ผศ.ดร.สมศรี บัณฑิตวิไล ผู้ซึ่งเป็นประธานกรรมการ ดร.กนกกรรณ์ ลี้โรจนประภา ผู้ซึ่งเป็นกรรมการ และ รศ.ดร.วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (ผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอก) ที่กรุณาให้คำแนะนำ ชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่อง ตลอดจนแก้ไขข้อผิดพลาดเพิ่มเติม ทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์และบุคลากรภาควิชาสถิติทุกท่าน ที่ได้มอบความรู้และคำแนะนำ รวมถึงความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ มาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณบิดามารดา และครอบครัวของข้าพเจ้า ที่ให้การสนับสนุนและเป็นกำลังใจให้เสมอมา และขอขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ น้องๆ ทุกคนที่ให้คำปรึกษาและช่วยเหลือในการศึกษามาโดยตลอด จนกระทั่งวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

นางสาวฉัตรวดี กิจแก้ว

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในงานวิจัยทั่วไป ใช้วิธีการทางสถิติในการหาข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรเพื่อศึกษาพารามิเตอร์ (Parameter) แต่การศึกษาประชากรนั้นทำได้ยาก เนื่องจากประชากรมีขนาดใหญ่ ประกอบกับค่าใช้จ่ายที่ค่อนข้างสูง และต้องใช้เวลาค่อนข้างมากในการเก็บรวบรวมข้อมูล จึงได้ทำการสุ่มตัวอย่างขึ้นมาเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับเป็นตัวแทนของประชากร เรียกว่า การอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) การอนุมานเชิงสถิติเป็นวิธีการที่ศึกษาข้อมูลจากตัวอย่าง แล้วนำผลที่ได้จากตัวอย่างสรุปไปยังประชากร ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis Testing) โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation) จะแบ่งออกเป็น 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรด้วยค่าสถิติเพียงค่าเดียว ซึ่งเรียกว่า ตัวประมาณ โดยค่าที่ได้จะขึ้นอยู่กับตัวอย่างที่สุ่มมา จึงทำให้การประมาณค่าแบบจุดเกิดความคลาดเคลื่อนได้ ถ้าตัวอย่างที่สุ่มมาไม่เป็นตัวแทนที่ดีของประชากร เนื่องจากตัวประมาณค่าแบบจุดอาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งตัว จึงต้องอาศัยคุณสมบัติของตัวประมาณค่าในการเลือกตัวประมาณค่า ได้แก่ ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness) ความพอเพียง (Sufficiency) ความคงเส้นคงวา (Consistency) ประสิทธิภาพ (Efficiency) และความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance) (ประชุม สุวัตถี, 2553) สำหรับวิธีการหาตัวประมาณค่าแบบจุดนั้น มีวิธีการหาอยู่หลายวิธี เช่น วิธีโมเมนต์ (Moments Method) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) วิธีกำลังสองต่ำสุด (Least Squares Method) และวิธีของเบส์ (Bayes' Method) เป็นต้น

การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรในช่วงๆ หนึ่งที่เชื่อว่า จะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ด้วยระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มากกว่าการประมาณค่าแบบจุด โดยใช้ค่าประมาณแบบจุดและการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวสถิติในการสร้างขอบเขตบนและขอบเขตล่าง ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงสามารถบอกถึงโอกาสหรือความน่าจะเป็นที่ค่าพารามิเตอร์จะตกอยู่ในช่วงประมาณนั้น ในทางสถิติเรียกค่าความน่าจะเป็นนั้นว่า สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Coefficient of

Confidence) แทนด้วย $1-\alpha$ โดยที่ $0<\alpha<1$ และเรียก α ว่า ระดับนัยสำคัญ (Level of Significance) (อาทิตย์ เทศขำ, 2559)

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) เป็นวิธีการที่ใช้กันแพร่หลายสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นวิธีการหาตัวประมาณค่าที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) มีค่าสูงสุด จากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability density function : pdf) ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์และตัวประมาณค่าที่ได้จากวิธีนี้จะมีคุณสมบัติของตัวประมาณค่าที่ดี โดยคุณสมบัติดังกล่าว ได้แก่ ความคงเส้นคงวา ความพอเพียง และถ้าตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE) หาค่าได้ จะหาได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด แต่วิธีการนี้ก็ยังมีปัญหาในการหาตัวประมาณค่า กล่าวคือ ในบางครั้งการแก้สมการเพื่อหาตัวประมาณค่าอาจทำได้ยาก ถ้าสมการภาวะน่าจะเป็นเป็นสมการที่มีกำลังสูงๆ หรือเป็นเศษส่วนที่ซับซ้อน และในบางกรณีก็ไม่สามารถหาตัวประมาณค่าได้ด้วยวิธีอนุพันธ์ สำหรับวิธีของเบส์ (Bayes' Method) จะนำความรู้เดิมที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์มาใช้ให้เป็นประโยชน์ เพื่อให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ผลดียิ่งขึ้น ในวิธีของเบส์นั้นเป็นการพิจารณาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและการแจกแจงก่อน (Prior Distribution) ซึ่งในการแจกแจงก่อนจะทำให้ทราบข้อมูลเกี่ยวกับพารามิเตอร์ก่อนที่จะกำหนดข้อมูล จากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นและการแจกแจงก่อนจะนำมาคำนวณหาการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) ซึ่งการแจกแจงภายหลังแสดงให้เห็นถึงข้อมูลทั้งหมดที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์เมื่อกำหนดข้อมูลแล้ว หลังจากนั้นจะได้ตัวประมาณเบส์ภายหลังจากการคำนวณค่าเฉลี่ยของการแจกแจงภายหลัง โดยขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน แต่วิธีการนี้ก็ยังมีปัญหาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ซึ่งจะประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ยาก จึงได้นำวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method) มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟเป็นวิธีการที่จำลองค่าจากการแจกแจงภายหลัง ซึ่งพัฒนาขึ้นจากวิธีของเบส์ และวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibb Sampling) ถูกนำมาใช้ในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมในการสร้างค่าจากการแจกแจงภายหลัง ซึ่งประมาณเป็นตัวประมาณค่ามอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Gamerman, D., 1997)

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) วิธีของเบส์ (Bayes' Method) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method) พบว่า Araveeporn (2014) ได้ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซง โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์

โดยประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนจากวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ Araveeporn (2015) ได้เปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงของการแจกแจงปัวซง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์ โดยประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน (λ) Thetkham และ Araveeporn (2016) ได้เปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการเหล่านี้จากการทดสอบสมมติฐาน โดยใช้การทดสอบที (t-test) Araveeporn (2016) ได้ศึกษาวิธีประมาณค่าเฉลี่ยแบบช่วงของการแจกแจงปรกติ โดยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งเปรียบเทียบการประมาณแบบช่วงกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และการประยุกต์ใช้วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ซึ่งวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมีประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจศึกษาข้อมูลที่มีการแจกแจงแกมมา โดยสนใจตัวแปรสุ่ม X แทนช่วงเวลาในการรอคอยที่จะเกิดความสำเร็จขึ้น α ครั้ง ด้วยจำนวนสิ่งที่สนใจโดยเฉลี่ยใน 1 หน่วยเวลา (λ) โดยที่ λ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงปัวซง นอกจากนี้การแจกแจงแกมมายังเกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ถ้าช่วงเวลาในการรอคอยที่จะเกิดความสำเร็จเกิดขึ้นเป็นครั้งแรก กล่าวคือ การแจกแจงแบบเลขชี้กำลังเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแกมมา สำหรับการแจกแจงแกมมาสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านการเงิน วิศวกรรมโยธา และเศรษฐมิติ เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวกับการแจกแจงแกมมานั้น ได้มีผู้ศึกษาไว้อย่างหลากหลาย เช่น

Biswabrata Pradhan และ Debasis Kundu (2011) ได้ศึกษาการประมาณเบส์และการทำนายของการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ โดยสมมติว่า พารามิเตอร์สเกลมีการแจกแจงแกมมาก่อน และพารามิเตอร์รูปร่างมีการแจกแจง log-concave ก่อน และใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ ในการสร้างช่วงการทำนายแบบเบส์ Son และ Oh (2006) ศึกษาการประมาณเบส์ของการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ โดยพิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงก่อน Kirimi, Ouko, Kipkoech (2014) ได้ศึกษาการประมาณโมเมนต์แบบปรับแก้ (MME) สำหรับการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ โดยประมาณพารามิเตอร์สเกลด้วยวิธีโมเมนต์แบบปรับแก้ และนำเทคนิค Jackknife มาใช้ในการปรับค่าความเอนเอียง

ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงแกมมา โดยสนใจประมาณค่าพารามิเตอร์ (λ) ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง สำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าแบบจุด สำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น สำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.3 สมมติฐานการวิจัย

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ จะให้ตัวประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงที่มีประสิทธิภาพสูงสุด ภายใต้ขนาดตัวอย่าง ค่าพารามิเตอร์ และระดับนัยสำคัญที่แตกต่างกัน

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีการประมาณค่า 3 วิธี ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

1.4.2 กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแกมมา โดยที่ X แทนช่วงเวลาในการรอคอยที่จะเกิดความสำเร็จขึ้น α ครั้ง และ λ คือ จำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์โดยเฉลี่ยใน 1 หน่วยเวลา ซึ่งกำหนดเป็น $Gamma(\alpha,\lambda)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(X;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}X^{\alpha-1}e^{-\lambda X} & ,X>0\\ 0 & ,X \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$ และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

1.4.3 กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม Λ มีการแจกแจงแกมมา ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงก่อน ที่มีพารามิเตอร์ a และ b ซึ่งกำหนดเป็น $Gamma(a,b)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(\lambda;a,b)=\begin{cases}\dfrac{b^{a}}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda} & ,\lambda>0\\ 0 & ,\lambda \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม Λ จะเท่ากับ $E(\Lambda)=\frac{a}{b}$ และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Λ จะเท่ากับ $Var(\Lambda)=\frac{a}{b^2}$ และกำหนดค่าพารามิเตอร์ (a,b) เพื่อให้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ $Gamma(2,1)$ $Gamma(2,0.5)$ หรือ $Chi-Square(4)$ และ $Gamma(1,0.2)$ หรือ $Exponential(0.2)$

1.4.4 กำหนดค่าพารามิเตอร์ (α) เท่ากับ 2 3 4 5 6 7 และ 8 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ (λ) เท่ากับ 2 โดยที่ค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว นำมาใช้ในการประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง

1.4.5 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 30 50 และ 70 โดยขนาดตัวอย่างดังกล่าว นำมาใช้ในการประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง

1.4.6 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับ คือ 90% 95% และ 99%

1.4.7 โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เขียนด้วยโปรแกรม R เวอร์ชั่น 3.3.1 ซึ่งทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

1.5 เกณฑ์ที่ใช้ในการวิจัย

1.5.1 การประมาณค่าแบบจุด จะพิจารณาการประมาณค่าด้วยการทดสอบการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าเฉลี่ยของประชากร โดยใช้การทดสอบที (t-test)

1.5.2 การประมาณค่าแบบช่วง จะเปรียบเทียบค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด โดยในงานวิจัยนี้ กำหนดให้เท่ากับ 90% 95% และ 99% และพิจารณาค่าประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและความกว้างเฉลี่ยของช่วง โดยค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น ($1-\hat{\alpha}$) คำนวณจาก

$$1-\hat{\alpha}=\frac{\text{จำนวนรอบที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์}}{m}$$

และ

$$\text{ความกว้างเฉลี่ยของช่วง}=\frac{\sum_{j=1}^{m}(U_j-L_j)}{m}$$

เมื่อ U_j แทน ขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำครั้งที่ j

L_j แทน ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำครั้งที่ j

m แทน จำนวนรอบของการทดลอง โดยในที่นี้เท่ากับ 1,000 รอบ

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีการต่างๆ ภายใต้สถานการณ์ที่แตกต่างกัน

1.6.2 เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีการประมาณค่าได้เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์

1.7 นิยามศัพท์

1.7.1 ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence Interval) หมายถึง ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ซึ่งคำนวณได้จากข้อมูลจากตัวอย่าง

1.7.2 สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) เขียนแทนด้วย $(1-\alpha)$ คือความน่าจะเป็นที่ช่วงความเชื่อมั่นจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์

1.7.3 ความกว้างเฉลี่ยของช่วง (Average Width) หมายถึง ค่าเฉลี่ยของความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณค่าตัวอย่างสุ่มในสถานการณ์เดียวกัน

1.7.4 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Methods) หมายถึง วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวหนึ่งหรือหลายตัวของประชากรที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มมีค่าสูงสุด

1.7.5 ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) หมายถึง ตัวประมาณของพารามิเตอร์ตัวหนึ่งหรือหลายตัวของประชากรที่หาได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มมีค่าสูงสุด

1.7.6 ตัวประมาณเบส์ภายหลัง (Posterior Bayes' Estimator) ของ $h(\lambda)$ หมายถึง ค่าคาดหมายของ $h(\lambda)$ ที่ได้มาจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

1.7.7 การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) หมายถึง ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ Θ เมื่อ Θ คือ ค่าพารามิเตอร์ของประชากร

1.7.8 การแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) หมายถึง ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ Θ เมื่อกำหนดให้ $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาในครั้งนี้ได้ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดและแบบช่วงของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยมีการแจกแจงทางสถิติ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และสถิติที่ใช้ในงานวิจัย ดังนี้

2.1 การแจกแจงที่ใช้ในงานวิจัย

การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

กำหนดตัวแปรสุ่ม X ให้มีการแจกแจงแกมมา หรือเขียนได้ว่า $Gamma(\alpha,\lambda)$ ที่มีพารามิเตอร์เป็น α และ λ โดยที่ X แทนช่วงระยะเวลาของการรอคอยจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ที่สนใจแบบปัวซงครบ α ครั้ง และ λ คือ จำนวนเหตุการณ์ที่สนใจแบบปัวซงโดยเฉลี่ยใน 1 หน่วยเวลา โดยที่ $\lambda=\frac{1}{\beta}$ เมื่อ β แทนช่วงระยะเวลารอคอยโดยเฉลี่ยของเหตุการณ์ (สายชล สินสมบูรณ์ทอง, 2555)

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(X;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}X^{\alpha-1}e^{-\lambda X} & ,X>0\\ 0 & ,X \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$$

หรือ

$$f(X;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^{\alpha}X^{\alpha-1}e^{-\frac{X}{\beta}} & ,X>0\\ 0 & ,X \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$$

โดยที่ ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $E(X)=\alpha\beta=\frac{\alpha}{\lambda}$ และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X จะเท่ากับ $Var(X)=\alpha\beta^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

2.2 ทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

2.2.1 ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem)

ทฤษฎีที่ 2.1 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น $E(X_i)=\mu$ และความแปรปรวนจำกัด (Finite Variance) เป็น $Var(X_i)=\sigma^2$ ถ้าขนาดตัวอย่าง n มีขนาดใหญ่ จะได้ว่าตัวสถิติ $Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ หรือ $Y_n=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะลู่เข้าในเชิงการแจกแจงสู่ตัวแปรเชิงสุ่ม Y ที่มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น $\mu=0$ และความแปรปรวนเป็น $\sigma^2=1$ กล่าวคือ Y_n จะมีลิมิตการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานโดยประมาณ (Asymptotically Standard Normal) (สายชล สินสมบูรณ์, 2554)

2.2.2 การประมาณค่า (Estimation)

การประมาณค่า หมายถึง การใช้ข้อเท็จจริงจากตัวอย่างสุ่มในรูปของสถิติในการประมาณว่า θ มีค่าเท่าใดหรืออยู่ในช่วงใด การประมาณค่าแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval estimation)

2.2.2.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุด (Point estimation)

การประมาณค่าแบบจุด หมายถึง การใช้สถิติซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $T(X_1,...,X_n)$ โดยการสังเกตค่าของตัวแปร $X_1,...,X_n$ สมมติว่าได้ $x_1,...,x_n$ แล้วใช้ค่าของ $\hat{\theta}=t(x_1,...,x_n)$ เป็นค่าประมาณของ θ

นิยามที่ 2.1 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta),\theta\in\Omega$ ตัวประมาณ (Estimator) ของ θ คือ ฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $\hat{\theta}=t(x_1,...,x_n)$ ค่าประมาณ (Estimate) ของ θ คือ ค่าของฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่มหรือค่าของตัวประมาณ

2.2.2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง (Interval estimation)

การประมาณค่าแบบช่วง หมายถึง การประมาณพารามิเตอร์ θ ออกมาหลายค่า มักเป็นช่วง (ของจำนวนจริง) หรือเซตของจุดหลายจุด เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่น (Confidence interval) หรือเซตความเชื่อมั่น (Confidence set) ช่วงหรือเซตดังกล่าวได้มาโดยอาศัยตัวประมาณ $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,...,X_n)$ ของ θ มีการใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นของ $\hat{\theta}(X_1,...,X_n)$ ในการสร้าง

ช่วงความเชื่อมั่นหรือเซตความเชื่อมั่น และใช้ข้อความที่เกี่ยวกับความน่าจะเป็นประกอบด้วย (ประชุม สุวัตถี, 2553)

นิยามที่ 2.2 ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ โดยที่ θ เป็นจำนวนจริง ให้ $L(X_1,\ldots,X_n)$ และ $U(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นสถิติที่ $L(X_1,\ldots,X_n)\le U(X_1,\ldots,X_n)$ ทุกจุดสังเกต $x_1,\ldots,x_n$ ที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S และ $P\left[L(X_1,\ldots,X_n)\le g(\theta)\le U(X_1,\ldots,X_n)\right]=1-\alpha$ โดยที่ α ไม่ขึ้นอยู่กับ θ เราเรียกช่วงสุ่ม (Random Interval) $\left[L(X_1,\ldots,X_n),U(X_1,\ldots,X_n)\right]$ ว่า ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ($100(1-\alpha)\%$ Confidence Interval) ของ $g(\theta)$ และเรียก $1-\alpha$ ว่า สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) หรือระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level)

$L(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นขีดจำกัดล่างของความเชื่อมั่น (Lower Confidence Limit) และ $U(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นขีดจำกัดบนของความเชื่อมั่น (Upper Confidence Limit) ของ $g(\theta)$

นิยามที่ 2.3 ถ้า $L(X_1,\ldots,X_n)$ และ $U(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นสถิติที่

$$P\left[g(\theta)<L(X_1,\ldots,X_n)\right]=\frac{\alpha}{2}=P\left[g(\theta)>U(X_1,\ldots,X_n)\right]$$

แล้วเรียกช่วง $\left[L(X_1,\ldots,X_n),U(X_1,\ldots,X_n)\right]$ ว่า ช่วงความเชื่อมั่นศูนย์กลางขนาด $100(1-\alpha)\%$ ($100(1-\alpha)\%$ Confidence Interval) ของ $g(\theta)$

2.3 ตัวประมาณสถิติที่ใช้ในงานวิจัย

2.3.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่ใช้กันมากและเป็นวิธีที่ง่าย เพราะวิธีนี้เป็นวิธีการหาตัวประมาณค่าที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) มีค่าสูงสุด และตัวประมาณค่าที่หาได้ด้วยวิธีนี้จะเรียกว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (น้อมจิต กิตติโชติพาณิชย์, 2558)

นิยามที่ 2.4 ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) ของตัวอย่างสุ่ม คือ ฟังก์ชันความน่าจะ

เป็นร่วมของ $X_1,\ldots,X_n$ โดยที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเขียนแทนด้วย L หรือ $L(\theta)$ หรือ $L(\theta;X_1,\ldots,X_n)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta;X_1,\ldots,X_n) = f(X_1,\ldots,X_n;\theta) \\ &= f(X_1;\theta)\ldots f(X_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta) \end{aligned}$$

นิยามที่ 2.5 ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator : MLE) **ของ** พารามิเตอร์ θ คือค่าของ θ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta)$ มีค่าสูงสุด

วิธีหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

1. หาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta;X_1,\ldots,X_n) \\ &= f(X_1;\theta)\ldots f(X_n;\theta) \end{aligned}$$

2. หา $\ln L(\theta)$

3. หา $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0$

4. แก้สมการในข้อที่ 3. หาค่า θ จะได้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ

ในกรณีที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ ให้เลือก θ ที่ทำให้ $L(\theta)$ หรือ $\ln L(\theta)$ มีค่าสูงสุด จะได้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ

คุณสมบัติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

1. เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวา (Consistent Estimator) ของ θ

2. เป็นตัวประมาณพอเพียง (Sufficient Estimator) ของ θ

3. ถ้า MVUE ของ θ หาค่าได้แล้ว จะหาได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

4. ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่จำเป็นต้องมีค่าเดียว แต่มีหลายค่าได้

5. ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดอาจจะเป็นตัวประมาณเอนเอียงหรือไม่เอนเอียงของ θ ก็ได้ ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ θ แล้วจะมีคุณสมบัติเป็น MVUE ของ θ แต่ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ θ แล้ว จะต้องปรับตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ก่อน จึงนำไปประมาณ θ ซึ่งตัวประมาณที่ปรับให้เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงแล้ว จะเป็น MVUE ของ θ

6. ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ และ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ และถ้ามีตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (Efficient Estimator) ของ θ เกิดขึ้นแล้ว $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดของ θ

7. ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ แล้วจะมีคุณสมบัติภาวะไร้การแปร (Invariance Property)

8. ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ และ n มีค่ามากแล้ว

$$\hat{\theta} \to N\left(\theta, Var\left(\hat{\theta}\right)\right)$$

โดยที่ $Var\left(\hat{\theta}\right)$ คือ ขอบเขตล่างของอสมการคราเมร์ราว นั่นคือ

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{I(\theta)} = \frac{1}{E\left(\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{1}{-E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}\right)}$$

ในลำดับถัดไป จะเป็นวิธีการคำนวณหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ λ

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(X;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} X^{\alpha-1} e^{-\lambda X} & , X > 0 \\ 0 & , X \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จะหาตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ ได้ดังนี้

$$L(\alpha,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\alpha,\lambda)$$

$$= \left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\ln L(\alpha,\lambda) = \ln\left(\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$= \alpha\, n \ln(\lambda) - n\ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\alpha n \ln(\lambda) - n\ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\frac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\frac{n\alpha}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)\lambda$$

$$\alpha = \bar{X}\lambda$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\bar{X}}$$

และอนุพันธ์อันดับสองของ $\ln L(\alpha,\lambda)$ คือ $\frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\lambda^2} = -\frac{n\alpha}{\lambda^2} < 0$ จะได้ว่า ค่าประมาณที่ได้มีค่าสูงสุด

ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$

เมื่อพิจารณาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$ ในรูปแบบการแจกแจงแกมมา พบว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีคุณสมบัติของตัวประมาณค่า ดังนี้

1. **ความไม่เอนเอียง (Unbiasedness)**

นิยามที่ 2.6 ตัวประมาณ $\hat{\theta} = t(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiasedness Estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $E(\hat{\theta}) = \theta$

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ จาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ เมื่อ $i=1,\ldots,n$ และ $\lambda > 0$ โดยที่ทราบค่า α

จาก
$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$$

จะได้
$$E(\hat{\lambda}_{ML}) = E\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}\right)$$

$$= E\left(\frac{\alpha}{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}\right)$$

$$= E\left(\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$= n\alpha E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

เนื่องจาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ และ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นอิสระกัน จะได้ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n\alpha,\lambda)$

จะได้ว่า

$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\cdot\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha-1} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i} d\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha-2} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i} d\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda^{n\alpha-1}}\int_0^\infty \left(\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha-2} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i} d\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\Gamma(n\alpha-1)$$

$$= \frac{\lambda}{(n\alpha-1)!}\cdot(n\alpha-2)!$$

$$= \frac{\lambda}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)!}\cdot(n\alpha-2)!$$

$$= \frac{\lambda}{n\alpha-1}$$

จะได้ว่า

$$n\alpha E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = n\alpha\left(\frac{\lambda}{n\alpha-1}\right)$$

$$= \frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}$$

จะพบว่า $E\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = E\left(\frac{\alpha}{\overline{X}}\right) = \frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}$ ซึ่งไม่เท่ากับ λ

ดังนั้น $\frac{\alpha}{\overline{X}}$ เป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงของ λ

2. ความคงเส้นคงวา (Consistent)

นิยามที่ 2.7 ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา (Consistent Estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta})=\theta$ และ $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta})=0$

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ จาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ เมื่อ $i=1,\ldots,n$ และ $\lambda>0$ โดยที่ทราบค่า α

เนื่องจากค่าคาดหมายของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ

$$E\left(\hat{\lambda}_{ML}\right)=E\left(\frac{\alpha}{\overline{X}}\right)=\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}$$

ในลำดับถัดไป จะทำการหาความแปรปรวนของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ

$$\begin{aligned}
Var\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) &= Var\left(\frac{\alpha}{\overline{X}}\right)\\
&= Var\left(\frac{\alpha}{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}}\right)\\
&= Var\left(\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\\
&= n^2\alpha^2 Var\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)
\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned}
Var\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right) &= E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)^2-\left(E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\right)^2\\
&= E\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\right)-\left(E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

จะได้

$$E\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\cdot\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^{n\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}d\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\int_0^\infty\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^{n\alpha-3}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}d\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\frac{1}{\lambda^{n\alpha-2}}\int_0^\infty\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^{n\alpha-3}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}d\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha-2)}{\lambda^{n\alpha-2}}$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)!}\cdot(n\alpha-3)!$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)(n\alpha-3)!}\cdot(n\alpha-3)!$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)}$$

จะได้ว่า $E\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\right)=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)}$ และ $E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=\frac{\lambda}{n\alpha-1}$

ดังนั้น

$$Var\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=E\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}\right)-\left(E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)\right)^2$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)}-\left(\frac{\lambda}{n\alpha-1}\right)^2$$

$$=\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)}-\frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)^2}$$

$$=\frac{\lambda^2(n\alpha-1)-\lambda^2(n\alpha-2)}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$$

$$=\frac{\lambda^2n\alpha-\lambda^2-\lambda^2n\alpha+2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$$

$$= \frac{\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$$

จะได้
$$Var\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = n^2\alpha^2 Var\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)$$

$$= \frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$$

เพราะฉะนั้น
$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}$$

$$= \lambda$$

และ
$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\frac{\alpha}{\bar{X}}$ เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของ λ

3. **ความพอเพียง (Sufficiency)**

นิยามที่ 2.8 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ถ้า $\hat{\theta} = t(x_1,...,x_n)$ เป็นสถิติค่าหนึ่ง $\hat{\theta}$ จะเป็นสถิติพอเพียงของ θ ถ้า h,k เป็นฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน ซึ่งทำให้

$$f(X_1,...,X_n;\theta) = h\left(\hat{\theta};\theta\right)k(X_1,...,X_n)$$

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ จาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ เมื่อ $i = 1,...,n$ และ $\lambda > 0$ โดยที่ทราบค่า α ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ คือ

$$f(X_1,...,X_n;\alpha,\lambda) = \left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$= \lambda^{\alpha n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}$$

$$= h(\hat{\lambda};\lambda) \cdot k(X_1,\dots,X_n)$$

โดยที่ $h(\hat{\lambda};\lambda) = \lambda^{\alpha n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$ และ $k(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}$

ดังนั้น $\frac{\alpha}{\bar{X}}$ **เป็นสถิติพอเพียงของ** λ

4. **ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency)**

นิยามที่ 2.9 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ แล้ว ประสิทธิภาพของ $\hat{\theta}$ คือ

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1/I(\theta)}{Var(\hat{\theta})}$$

นิยามที่ 2.10 ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ และ $e(\hat{\theta}) = 1$ แล้ว $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ (Efficiency estimator) หรือ ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (Most efficiency estimator) ของ θ

ให้ $X_1,\dots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ จาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ เมื่อ $i = 1,\dots,n$ และ $\lambda > 0$ โดยที่ทราบค่า α จากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(X;\alpha,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} X^{\alpha-1} e^{-\lambda X}$$

จะได้

$$\ln f(X;\alpha,\lambda) = \ln\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} X^{\alpha-1} e^{-\lambda X}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right) + \alpha \ln(\lambda) + (\alpha-1)\ln(X) - \lambda X$$

$$= \ln(1) - \ln(\Gamma(\alpha)) + \alpha \ln(\lambda) + (\alpha-1)\ln(X) - \lambda X$$

$$= -\ln(\Gamma(\alpha)) + \alpha \ln(\lambda) + (\alpha-1)\ln(X) - \lambda X$$

$$\frac{\partial \ln f(X;\alpha,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} - X$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(X;\alpha,\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

เพราะฉะนั้น $$E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X;\alpha,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right) = E\left(-\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(X;\alpha,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)$$

$$= -n\left(-\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{n\alpha}{\lambda^2}$$

และ $Var\left(\frac{\alpha}{\overline{X}}\right) = \frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$

จะได้

$$e(\hat{\lambda}) = \frac{1/I(\lambda)}{Var(\hat{\lambda})}$$

$$= \frac{1\Big/\frac{n\alpha}{\lambda^2}}{\frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}$$

$$= \frac{\lambda^2}{n\alpha} \cdot \frac{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}{n^2\alpha^2\lambda^2}$$

$$= \frac{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}{n^3\alpha^3}$$

$$= \frac{(n^2\alpha^2-2n\alpha+1)(n\alpha-2)}{n^3\alpha^3}$$

$$= \frac{n^3\alpha^3-2n^2\alpha^2-2n^2\alpha^2+4n\alpha+n\alpha-2}{n^3\alpha^3}$$

$$= \frac{n^3\alpha^3-4n^2\alpha^2+5n\alpha-2}{n^3\alpha^3}$$

จะพบว่า $e(\hat{\lambda}) = \frac{n^3\alpha^3-4n^2\alpha^2+5n\alpha-2}{n^3\alpha^3}$ ซึ่งไม่เท่ากับ 1

ดังนั้น $\frac{\alpha}{\overline{X}}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่มีประสิทธิภาพสูงสุดของ λ

นิยามที่ 2.11 ให้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณของ θ ที่มีประสิทธิภาพ e โดยคิดจากตัวอย่างขนาด n และ $\lim_{n\to\infty} e(\hat{\theta}) = 1$ แล้ว จะเรียก $\hat{\theta}$ ว่า **ตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดใกล้อนันต์** (Asymptotically most efficient estimator) ของ θ

จาก
$$e\left(\hat{\lambda}\right)=\frac{n^3\alpha^3-4n^2\alpha^2+5n\alpha-2}{n^3\alpha^3}$$

จะได้
$$\lim_{n\to\infty} e\left(\hat{\lambda}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\alpha^3-4n^2\alpha^2+5n\alpha-2}{n^3\alpha^3}$$
$$=1$$

ดังนั้น $\frac{\alpha}{\overline{X}}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดใกล้อนันต์ของ λ

5. ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimator)

นิยามที่ 2.12 ตัวสถิติ $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimator ; MVUE) หรือ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด (Best Unbiased Estimator) ของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ที่มีความแปรปรวนต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ ด้วยกัน

นิยามที่ 2.13 ถ้ากลุ่มของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $\{f(x;\theta);\theta\in\Omega\}$ เมื่อ $\Omega=\{\theta:\gamma<\theta<\delta\}$ โดยที่ γ และ δ เป็นค่าคงที่ที่ทราบค่า และ $f(x;\theta)$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$f(x;\theta)=\begin{cases} s(x)g(\theta)\exp\left[p(\theta)t(x)\right] & ,a<x<b \\ 0 & , \quad x \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$$

แล้ว $f(x;\theta)$ จะเป็นสมาชิกของวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family) แบบต่อเนื่อง ถ้า

1. a และ b เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับ θ เมื่อ $\gamma<\theta<\delta$
2. $p(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความหมายแบบต่อเนื่อง (Nontrivial Continuous Function) ของ θ เมื่อ $\gamma<\theta<\delta$
3. $t'(x)\neq 0$ และ $s(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x เมื่อ $a<x<b$

ทฤษฎีที่ 2.2 ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ถ้า $f(x;\theta)$ อยู่ในวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family) นั่นคือ

$$f(x;\theta)=s(x)g(\theta)e^{p(\theta)t(x)}$$

แล้ว $T(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}t(x_i)$ จะเป็นสถิติที่พอเพียงและสมบูรณ์ (Complete Sufficient Statistic) ของ θ

ทฤษฎีที่ 2.3 (Lehmann and Scheffe) ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ $\quad\theta\in\Omega\quad$ ถ้า $T(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นสถิติที่พอเพียงและ

สมบูรณ์ของ θ และมีฟังก์ชัน $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของ $g(\theta)$ แล้ว $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimator : MVUE) เพียงตัวเดียวของ $g(\theta)$

ทฤษฎีที่ 2.4 ถ้า $W(T)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE) เพียงตัวเดียวของ $g(\theta)$ แล้ว $W(T)$ จะมีอยู่ตัวเดียว

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ λ จาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ เมื่อ $i=1,\ldots,n$ และ $\lambda>0$ โดยที่ทราบค่า α

$$f(X;\alpha,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}X^{\alpha-1}e^{-\lambda X}$$

$$=\frac{X^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda X}$$

$$=s(X)g(\lambda)\exp\left[p(\lambda)t(X)\right]$$

โดยที่ $s(X)=\dfrac{X^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\ g(\lambda)=\lambda^{\alpha},\ p(\lambda)=-\lambda,\ t(X)=X$

1. $\{X : X>0\}$ ไม่ขึ้นกับ λ เมื่อ $\lambda>0$

2. $p(\lambda)=\begin{cases}-\lambda & ,\lambda>0\\ 0 & ,\lambda \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$

   เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีความหมายของ λ

3. $t(X)=X$ และ $t'(X)=1\neq 0$

   และ $s(X)=\begin{cases}X^{\alpha-1} & ,X>0\\ 0 & ,X \text{ มีค่าอื่นๆ}\end{cases}$

   เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ X

นั่นคือ $f(X;\alpha,\lambda)$ อยู่ในวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family)

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n}X_i$ เป็นสถิติพอเพียงและสมบูรณ์ของ λ

เนื่องจาก $X_i \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ และ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นอิสระกัน จะได้ $\sum_{i=1}^{n}X_i \sim Gamma(n\alpha,\lambda)$

ดังนั้น
$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{n\alpha}{\lambda}$$

จาก
$$E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=\frac{\lambda}{n\alpha-1}$$

จะได้
$$(n\alpha-1)E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=(n\alpha-1)\frac{\lambda}{n\alpha-1}$$

$$E\left(\frac{n\alpha-1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=\lambda$$

ดังนั้น $\frac{n\alpha-1}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุดของ λ

จากทั้งหมดที่กล่าวไปข้างต้น จึงสรุปได้ว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ $\hat{\lambda}_{ML}=\frac{\alpha}{\bar{X}}$ โดยเป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา พอเพียง และมีประสิทธิภาพสูงสุดใกล้อนันต์ ซึ่งมีค่าคาดหมายเท่ากับ $E\left(\hat{\lambda}_{ML}\right)=\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}$ และมีความแปรปรวนเท่ากับ $Var\left(\hat{\lambda}_{ML}\right)=\frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$

จากทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n\to\infty$ จะได้ว่า

$$Z=\frac{\frac{\alpha}{\bar{X}}-\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}}{\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}}\sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\frac{\alpha}{\bar{X}}-\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}}{\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}<\frac{\alpha}{\bar{X}}-\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\frac{\alpha}{\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}<-\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}<-\frac{\alpha}{\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}<\frac{n\alpha\lambda}{n\alpha-1}<\frac{\alpha}{\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{n\alpha-1}{n\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}\right)<\lambda<\frac{n\alpha-1}{n\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n^2\alpha^2\hat{\lambda}^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}}\right)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{n\alpha-2}}<\lambda<\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{n\alpha-2}}\right) = 1-\alpha$$

แทนค่า $\hat{\lambda}=\frac{\alpha}{\bar{X}}$ จะได้

$$P\left(\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}<\lambda<\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}\right) = 1-\alpha$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ λ คือ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{n\alpha-1}{n\bar{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}$

2.3.2 วิธีของเบส์ (Bayes' Method)

สถิติตามแนวของเบส์ (Bayesian approach) แตกต่างจากสถิติตามแนวเดิม (Classical approach) ในแนวเดิม การประมาณพารามิเตอร์ θ มักถือว่าเริ่มจากการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ และถือว่าพารามิเตอร์ θ เป็นค่าคงตัวแต่ไม่ทราบค่า แต่ในแนวของเบส์มีความพยายามใช้ความรู้เดิมหรือข้อมูลเดิมเกี่ยวกับ θ ให้เป็นประโยชน์ในการประมาณ θ ให้ได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้น จึงถือว่า θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปใดรูปหนึ่ง

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x;\theta)=f(x|\theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ

ในที่นี้ เราถือว่า $f(x|\theta)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability Density Function) ของตัวแปรสุ่ม X เมื่อกำหนดให้ว่า $\Theta=\theta$

นิยามที่ 2.14 ให้ตัวแปรสุ่ม Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่น $g(\theta)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (Prior Probability Density Function) ของ Θ

ให้ $h(\theta|X_1,...,X_n)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม Θ เมื่อกำหนดให้ว่า $X_1 = x_1,...,X_n = x_n$ มักเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (Posterior Probability Density Function) ของ Θ

ในที่นี้ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $X_1,...,X_n$ เมื่อกำหนดให้ว่า $\Theta = \theta$ ได้แก่

$$f(x_1,...,x_n;\theta) = f(x_1,...,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

อาจหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของ Θ ได้จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน และฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวอย่างสุ่ม โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (ประชุม สุวัตถี, 2553)

ในลำดับถัดไป จะเป็นวิธีการคำนวณหาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

ให้ Θ มีฟังก์ชันการแจกแจงก่อนเป็น $g(\theta)$

จะได้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ และ Θ คือ

$$f(x_1,...,x_n|\theta)g(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)g(\theta)$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของ Θ คือ

$$h(\theta|x_1,...,x_n) = \frac{f(x_1,...,x_n|\theta)g(\theta)}{\int f(x_1,...,x_n|\theta)g(\theta)}$$

หรือ
$$h(\theta|x_1,...,x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)g(\theta)}{\int \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)g(\theta)d\theta}$$

นิยามที่ 2.15 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f(x|\theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงก่อน $g(\theta)$ ตัวประมาณเบส์ภายหลัง (Posterior Bayes' Estimator) ของฟังก์ชัน $t(\theta)$ ของ θ เทียบกับฟังก์ชันการแจกแจงก่อน $g(\theta)$ ได้แก่ $\hat{t}(\theta) = E(t(\Theta)|X_1,...,X_n)$ นั่นคือ

$$\hat{t}(\theta) = \int t(\theta)h(\theta|x_1,...,x_n)d\theta$$

หรือ
$$\hat{t}(\theta) = \frac{\int t(\theta)\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)g(\theta)d\theta}{\int \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)g(\theta)d\theta}$$

ให้ตัวแปร $X_1,...,X_n$ มีการแจกแจงแกมมาด้วยจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์โดยเฉลี่ยใน 1 หน่วยเวลา (λ) ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$X_i|\lambda \sim Gamma(\alpha,\lambda)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่ม X เมื่อกำหนด α และ λ คือ

$$f(X_1,...,X_n|\alpha,\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\alpha,\lambda)$$
$$=\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

โดยพิจารณาฟังก์ชันการแจกแจงก่อนให้มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ a และ b ดังนี้

$$f(\lambda;a,b) = \begin{cases} \dfrac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda} & ,\lambda > 0 \\ 0 & ,\lambda \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง คือ

$$h(\lambda|X_1,...,X_n)=\frac{\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda}\right)}{\int_0^\infty\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i}\left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda}\right)d\lambda}$$

ซึ่งค่าคงที่ไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ λ จะถูกหารทิ้ง จะเหลือแค่

$$h(\lambda|X_1,...,X_n)=\frac{\lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+b\right)}}{\int_0^\infty \lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+b\right)}d\lambda}$$
$$=\frac{\lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}}{\int_0^\infty \lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}d\lambda}$$

ต่อมาพิจารณาเทอมส่วน $\int_0^\infty \lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}d\lambda$ ในรูปแบบฟังก์ชันแกมมา ดังนี้

$$\int_0^\infty \lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}d\lambda=\frac{1}{(n\bar{X}+b)^{n\alpha+a}}\int_0^\infty\left[\lambda(n\bar{X}+b)\right]^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}d\left[\lambda(n\bar{X}+b)\right]$$
$$=\frac{\Gamma(n\alpha+a)}{(n\bar{X}+b)^{n\alpha+a}}$$

จะได้การแจกแจงภายหลัง คือ

$$h(\lambda|X_1,...,X_n)=\frac{(n\bar{X}+b)^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)}\lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}$$

หรือพิจารณาจากรูปแบบวงศ์คู่สังยุค (Conjugate Distribution) ดังนี้

$$h(\lambda|X_1,...,X_n) \propto L(\alpha,\lambda)f(a,b|\lambda)$$

$$h(\lambda|X_1,\ldots,X_n) \propto \left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i} \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}e^{-b\lambda}\right)$$

$$\propto \frac{b^a}{(\Gamma(\alpha))^n(\Gamma(a))}\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}\lambda^{n\alpha+a-1}e^{-\lambda(n\bar{X}+b)}.$$

ดังนั้น การแจกแจงภายหลังของ λ คือ $h(\lambda|X_1,\ldots,X_n) \sim Gamma(n\alpha+a, n\bar{X}+b)$ จะได้ตัวประมาณเบส์ภายหลังของ λ คือ $\hat{\lambda}_{Bayes} = E(\lambda|X_1,\ldots,X_n) = \dfrac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}$ และ

$$Var(\lambda|X_1,\ldots,X_n) = \frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}$$

จากทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$Z = \frac{\left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)-\lambda}{\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)-\lambda}{\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}} < \left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)-\lambda < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}} < -\lambda < -\left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}} < \lambda < \left(\frac{n\alpha+a}{n\bar{X}+b}\right)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}\right) = 1-\alpha$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ λ คือ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha-a}{n\bar{X}+b}\right)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha-a}{n\bar{X}+b}\right)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}$

2.3.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo)

วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (MCMC) (อัชฌา อระวีพร, 2555) เป็นวิธีที่นิยมใช้เมื่อไม่ทราบฟังก์ชันการแจกแจงบางส่วน (Marginal Distribution) ของตัวแปรสุ่ม โดยประกอบด้วยการสุ่มตัวอย่างตัวแปรจากวิธีโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) จากการแจกแจงก่อนของค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ และวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibb sampling) ได้ถูกนำมาใช้ในวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

ขั้นตอนการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีโซ่มาร์คอฟ ประกอบด้วย

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $\theta^{(0)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงก่อน

2. สร้างค่าจากข้อ 1 มา T ค่า จนกระทั่งได้ลักษณะการแจกแจงที่ต้องการ

3. ตรวจสอบการแจกแจงในข้อ 2 ถ้าไม่เป็นไปตามลักษณะที่ต้องการให้สร้างค่ามากขึ้น

4. เมื่อค่าที่ได้เป็นไปตามที่ต้องการเลือกค่าสังเกตที่ค่า B เป็นต้นไป

5. พิจารณาค่า $\left\{\theta^{(B+1)},\theta^{(B+2)},\ldots,\theta^{(T)}\right\}$ ในรูปของตัวอย่างสำหรับการวิเคราะห์ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

6. สร้างกราฟเพื่อดูลักษณะการแจกแจงของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

7. คำนวณค่าเฉลี่ย ค่ากลาง และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

กำหนดตัวแปร X มีการแจกแจงแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ α และ λ โดยที่ λ มีการแจกแจงแกมมา ด้วยค่าพารามิเตอร์ a และ b ซึ่งค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณมี 3 ตัว คือ λ a และ b ขั้นตอนการสร้างสุ่มตัวอย่างจากวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ประกอบด้วย

1. กำหนดค่าเริ่มต้น $a^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงเลขชี้กำลัง และ $b^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงแกมมา

2. สร้างค่าจากข้อ 1 มา T ค่า เมื่อ $t=1,2,\ldots,T$

3. สร้างค่า $\lambda^{(t)}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของการแจกแจงแกมมาที่ค่าพารามิเตอร์ $a^{(t)}$ และ $b^{(t)}$ ที่ได้จากข้อ 1

4. สร้างกราฟเพื่อดูลักษณะการแจกแจงของฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

5. คำนวณค่าเฉลี่ย ค่ากลาง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง

สามารถประมาณค่า λ ได้โดย $\hat{\lambda}_{MCMC}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}$

โดยที่ $E\left(\hat{\lambda}_{MCMC}\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}$ และ $Var\left(\hat{\lambda}_{MCMC}\right)=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^2$

จากทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n\to\infty$ จะได้ว่า

$$Z=\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-\lambda}{\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}} \quad \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-\lambda}{\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}<\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-\lambda<Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}<-\lambda<-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}<\lambda<\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}\right)=1-\alpha$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ λ คือ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^{2}}$

2.3.4 การประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Applied Bayes' with MCMC Method)

สำหรับการประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เป็นการนำประโยชน์ของวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนได้ มาประยุกต์เข้ากับตัวประมาณเบส์ภายหลัง จึงได้ตัวประมาณตัวใหม่ออกมาและเรียกตัวประมาณตัวใหม่นี้ว่า ตัวประมาณเบส์จากมอนติคาร์โลลูกโซ่มาร์คอฟ

จะได้ตัวประมาณเบส์จากมอนติคาร์โลลูกโซ่มาร์คอฟของ λ คือ $\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC}=\frac{n\alpha+\hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X}+\hat{b}_{MCMC}}$

โดยที่ $\hat{a}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a^{(t)}$ และ $\hat{b}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} b^{(t)}$ ซึ่งมีค่าคาดหมายเท่ากับ

$E\left(\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC}\right) = \frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}$ และมีความแปรปรวนเท่ากับ

$$Var\left(\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC}\right) = \frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}$$

จากทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$Z = \frac{\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - \lambda}{\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - \lambda}{\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}} < \left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - \lambda < Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}} < -\lambda < -\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}} < \lambda < \left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}\right) = 1-\alpha$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของ λ คือ

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}\right) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}}$

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Araveeporn A. (2014) ได้ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงปัวซง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์ โดยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ผลการศึกษา พบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ในทุกกรณี ในขณะที่วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟและวิธีของเบส์ จะให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์แตกต่างจากค่าพารามิเตอร์ เมื่อขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีขนาดเล็ก นอกจากนี้ยังพบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด เมื่อขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีขนาดเล็ก อย่างไรก็ตาม เมื่อขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีขนาดใหญ่ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟและวิธีของเบส์จะให้ค่าต่ำสุด

Araveeporn A. (2015) ได้เปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงของการแจกแจงปัวซง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์ โดยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน (λ) พบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด ภายใต้สถานการณ์ที่พารามิเตอร์มีขนาดเล็ก (0.5) สำหรับทุกขนาดตัวอย่าง ในส่วนของขนาดตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ พบว่า วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ จะเป็นวิธีการประมาณที่มีประสิทธิภาพดีที่สุด ภายใต้สถานการณ์ที่พารามิเตอร์เท่ากับ 5 และสำหรับวิธีของเบส์จะให้ผลลัพธ์ที่ดีในทุกกรณี

Thetkham A. และ Araveeporn A. (2016) ได้เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ผลการศึกษาพบว่า วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีมอนติคาร์โลลูกโซ่มาร์คอฟ และการประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอนเอียง เมื่อขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์มีขนาดใหญ่ ในขณะที่วิธีของเบส์จะขึ้นอยู่กับการแจกแจงก่อน ซึ่งส่วนใหญ่ตัวประมาณค่าที่ได้จากวิธีนี้จะเป็นตัวประมาณค่าที่เอนเอียง ดังนั้นจึงควรใช้การประยุกต์วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟจะดีกว่า

Araveeporn A. (2016) ได้ศึกษาวิธีประมาณค่าเฉลี่ยแบบช่วงของการแจกแจงปรกติ โดยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ซึ่งจะทำการเปรียบเทียบการประมาณแบบช่วงกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีของเบส์ และการประยุกต์ใช้วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน ซึ่งกำหนดให้พารามิเตอร์มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงปรกติ พบว่า การประยุกต์ใช้วิธีของเบส์กับวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟเป็นวิธีการประมาณที่ดีที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก (n=5) สำหรับวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีการอื่นๆ ที่ขนาดตัวอย่างอื่นๆ วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมีความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นกว้างที่สุด ซึ่งวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟมีประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน

Biswabrata Pradhan and Debasis Kundu (2011) ได้ศึกษาการประมาณเบส์และการทำนายของการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ โดยสมมติว่า พารามิเตอร์สเกลมีการแจกแจงแกมมาก่อน และพารามิเตอร์รูปร่างมีการแจกแจง log-concave ก่อน โดยได้รับการประมารเบส์และช่วงที่น่าเชื่อถือ โดยใช้กระบวนการของการสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีกิบส์ ผลการศึกษา พบว่าการประมาณเบส์กับข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงก่อนจะให้ผลที่มีค่าใกล้เคียงกับการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ในขณะที่ข้อมูลที่มีการแจกแจงก่อน การประมาณเบส์จะให้ผลดีกว่าการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด สำหรับการทำนายของเบส์ของค่าสังเกตในอนาคต พบว่า เทคนิคการสุ่มตัวอย่างด้วยวิธีกิบส์สามารถใช้ได้ค่อนข้างมีประสิทธิภาพสำหรับการประมาณค่าการทำนายความหนาแน่นภายหลังและสำหรับการสร้างช่วงการทำนายของตัวสถิติอันดับจากตัวอย่างในอนาคต

Young Sook Son และ Mira Oh (2006) ได้ศึกษาการประมาณเบส์ของการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ที่พิจารณาภายใต้ข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงก่อน ตัวประมาณค่าแบบเบส์ได้รับจาก Gibb sampling และใช้ rejection sampling แบบปรับได้ ซึ่งเป็นวิธีของ Gilks and Wild (1992) ในการสร้างพารามิเตอร์รูปร่างในตัวอย่างกิบส์ ผลการศึกษา แสดงให้เห็นว่า ตัวประมาณค่าแบบเบส์ที่ใช้ Gibb sampling พร้อมด้วย rejection sampling แบบปรับได้มีประสิทธิภาพดีกว่าตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นและตัวประมาณค่าโมเมนต์ และมีประสิทธิภาพดีพอๆ กับตัวประมาณค่าแบบเบส์ตัวอื่นๆ

Emily Kirimi, Abel Ouko, Cheruiyot W. Kipkoech (2014) ได้ศึกษาการประมาณโมเมนต์แบบปรับแก้สำหรับการแจกแจงแกมมา 2 พารามิเตอร์ ซึ่งประมาณค่าพารามิเตอร์สเกล โดยใช้การประมาณโมเมนต์แบบปรับแก้และเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด โดยประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าถูกเปรียบเทียบด้วยความแปรปรวน ในส่วนของการปรับค่าความเอนเอียง พวกเขาได้ใช้เทคนิค Jackknife สำหรับการปรับค่าความเอนเอียง ผลการศึกษา พบว่า การประมาณโมเมนต์แบบปรับแก้ดำเนินการได้ดีเท่ากับการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อความเอนเอียงและความผันแปรของข้อมูลถูกพิจารณา

บทที่ 3

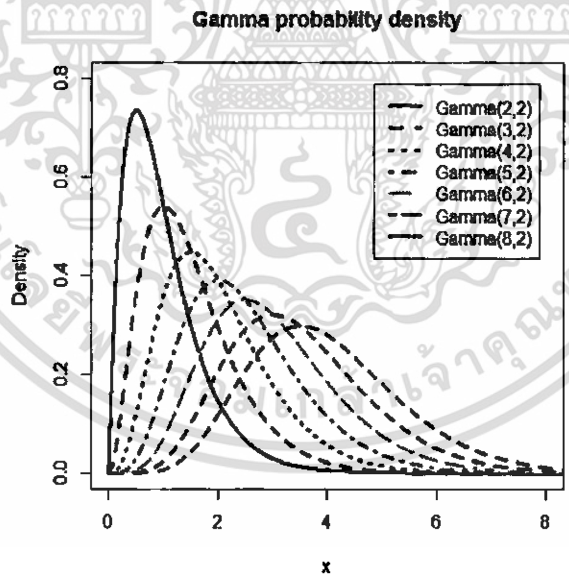
วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้กล่าวถึงการกำหนดสถานการณ์ในการศึกษาและทำการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆ โดยจะทำการพิจารณาหาวิธีการประมาณแบบจุดและแบบช่วงที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษา ซึ่งมีวิธีการดำเนินการวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

3.1 การวางแผนการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้กำหนดสถานการณ์ในการศึกษาเปรียบเทียบ ดังนี้

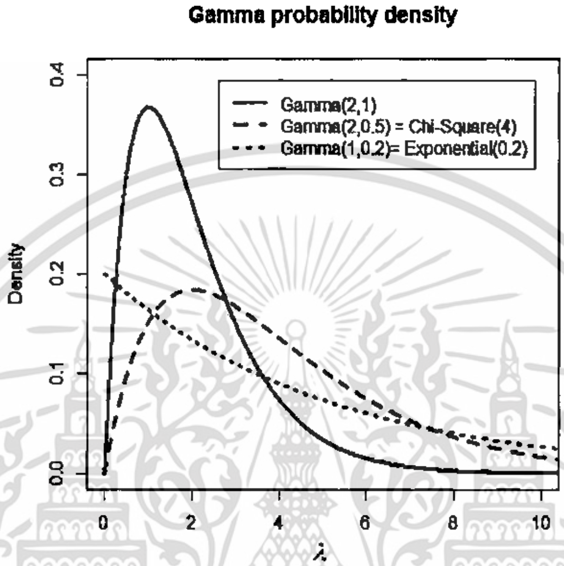
3.1.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ (α) เท่ากับ 2 3 4 5 6 7 และ 8 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ (λ) เท่ากับ 2 โดยที่ค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว นำมาใช้ในการประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2) (7,2) และ (8,2)

3.1.2 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษาเท่ากับ 30 50 และ 70 โดยขนาดตัวอย่างดังกล่าว นำมาใช้ในการประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง

3.1.3 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน เพื่อให้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ $Gamma(2,1)$ $Gamma(2,0.5)$ หรือ $Chi-Square(4)$ และ $Gamma(1,0.2)$ หรือ $Exponential(0.2)$ ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ (2,1) (2,0.5) และ (1,0.2)

3.1.4 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 3 ระดับ คือ 90% 95% และ 99%

3.1.5 ทดสอบสมมติฐานความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าเฉลี่ยของประชากร

3.1.6 ตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและเปรียบเทียบความกว้างของการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วง เพื่อหาวิธีการประมาณที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ที่ศึกษา

3.2 วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้มีวิธีการดำเนินการวิจัย ดังนี้

3.2.1 การวิจัยในครั้งนี้ใช้โปรแกรม R เวอร์ชั่น 3.3.1 ในการจำลองข้อมูล โดยกำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงแกมมา ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์และขนาดตัวอย่างตามที่ระบุไว้ในขอบเขตการวิจัย

3.2.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีการประมาณทั้ง 4 วิธี ดังต่อไปนี้

3.2.2.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ $\hat{\lambda}_{ML} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$

โดยมี $E\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \frac{n\alpha\lambda}{n\alpha - 1}$ และ $Var\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \frac{n^2\alpha^2\lambda^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)}$

3.2.2.2 วิธีของเบส์ (Bayes' Method)

จากการแจกแจงภายหลังของ λ คือ $h\left(\lambda | X_1,...,X_n\right) \sim Gamma\left(n\alpha + a, n\bar{X} + b\right)$ จะได้ตัวประมาณเบส์ภายหลังของ λ คือ $\hat{\lambda}_{Bayes} = \frac{n\alpha + a}{n\bar{X} + b}$

โดยมี $E\left(\hat{\lambda}_{Bayes}\right) = \frac{n\alpha + a}{n\bar{X} + b}$ และ $Var\left(\hat{\lambda}_{Bayes}\right) = \frac{n\alpha + a}{\left(n\bar{X} + b\right)^2}$

3.2.2.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method)

ตัวประมาณมอนติคาร์โลลูกโซ่มาร์คอฟของ λ คือ $\hat{\lambda}_{MCMC} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}$

โดยมี $E\left(\hat{\lambda}_{MCMC}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}$ และ $Var\left(\hat{\lambda}_{MCMC}\right) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)} - \bar{\lambda}\right)^2$

3.2.2.4 วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Applied Bayes' with MCMC Method)

ตัวประมาณเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟของ λ คือ $\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC} = \frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}$

โดยมี $E\left(\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC}\right) = \frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}}$ และ $Var\left(\hat{\lambda}_{Bayes.MCMC}\right) = \frac{n\alpha + \hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X} + \hat{b}_{MCMC}\right)^2}$

3.2.3 คำนวณช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha')100\%$ ของพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณทั้ง 3 วิธี ดังนี้

3.2.3.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{n\alpha - 1}{n\bar{X}} - Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\frac{n\alpha - 1}{n\bar{X}} + Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{(n\alpha-2)\bar{X}^2}}$

3.2.3.2 วิธีของเบส์ (Bayes' Method)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha-a}{n\bar{X}+b}\right)-Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha-a}{n\bar{X}+b}\right)+Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+a}{(n\bar{X}+b)^2}}$

3.2.3.3 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain Monte Carlo Method)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}-Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^2}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{(t)}+Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\lambda^{(t)}-\bar{\lambda}\right)^2}$

3.2.3.4 วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ (Bayes'_MCMC Method)

ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha+\hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X}+\hat{b}_{MCMC}}\right)-Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+\hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X}+\hat{b}_{MCMC}\right)^2}}$

ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น คือ $\left(\dfrac{n\alpha+\hat{a}_{MCMC}}{n\bar{X}+\hat{b}_{MCMC}}\right)+Z_{\frac{\alpha'}{2}}\sqrt{\dfrac{n\alpha+\hat{a}_{MCMC}}{\left(n\bar{X}+\hat{b}_{MCMC}\right)^2}}$

3.2.4 ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าเฉลี่ยของประชากร โดยใช้การทดสอบที (t-test) สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบ ได้ดังนี้

$$H_0 : \mu_{\hat{\lambda}} = \lambda$$

$$H_1 : \mu_{\hat{\lambda}} \neq \lambda$$

สถิติทดสอบ t สามารถคำนวณได้จาก

$$t = \frac{\bar{\hat{\lambda}}-\lambda}{S_{\hat{\lambda}}/\sqrt{m}}$$

โดยที่ $\bar{\hat{\lambda}}$ แทน ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณของพารามิเตอร์

$S_{\hat{\lambda}}=\sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{m}\left(\hat{\lambda}_j-\bar{\hat{\lambda}}_j\right)^2}{m-1}}$ แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง

$\hat{\lambda}_j$ แทน ค่าประมาณของพารามิเตอร์ ในการทำซ้ำครั้งที่ j

$\bar{\hat{\lambda}}_j$ แทน ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณของพารามิเตอร์ ในการทำซ้ำครั้งที่ j

m แทน จำนวนรอบในการทดลอง ในที่นี้กำหนดให้ $m = 1{,}000$

โดยที่องศาเสรี เท่ากับ $m-1$ และจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $|t| > t_{\alpha/2, m-1}$

โดยกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบที่ $\alpha' = 0.01$ 0.05 และ 0.10

3.2.5 คำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วง

โดยนำช่วงที่คำนวณได้มาพิจารณาว่าครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ λ หรือไม่ ถ้าช่วงความเชื่อมั่นใดครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ λ จะทำการนับจำนวนครั้ง เมื่อทำครบทุกช่วงแล้ว ก็จะนำจำนวนครั้งทั้งหมดมาหารด้วยจำนวนรอบ (m) ซึ่งเรียกค่าที่ได้ว่า ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\hat{\alpha})$ สามารถเขียนแทนได้ ดังนี้

$$1-\hat{\alpha} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์}}{m}$$

การประมาณค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วง หาได้โดยการหาผลต่างระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น แล้วทำการบวกค่าสะสมไว้ และนำค่าที่ได้มาหารด้วยจำนวนรอบที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ ซึ่งค่าที่ได้คือ ค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงที่คำนวณได้จากแต่ละวิธี

โดยค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วง (Average Width) เท่ากับ

$$\text{ค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วง} = \frac{\sum_{j=1}^{m}(U_j - L_j)}{m}$$

เมื่อ U_j แทน ขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำครั้งที่ j

L_j แทน ขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำครั้งที่ j

m แทน จำนวนรอบของการทดลอง โดยในที่นี้เท่ากับ 1,000 รอบ

3.2.6 การเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

โดยเป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\hat{\alpha})$ ว่ามีค่าไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด $(1-\alpha_0)$ อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้

$$H_0 : P \geq P_0$$
$$H_1 : P < P_0$$

โดยที่

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{m}}}$$

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $\dfrac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{m}}}<Z_{\frac{\alpha^*}{2}}$

นั่นคือ $\hat{P}<P_0-Z_{\frac{\alpha^*}{2}}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{m}}$

โดยที่ P แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น หรือ $P=1-\alpha$

P_0 แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด หรือ $P_0=1-\alpha_0$

$\hat{P}$ แทน ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลอง หรือ $\hat{P}=1-\hat{\alpha}$

m แทน จำนวนรอบของการทดลอง ในที่นี้กำหนดให้ $m=1{,}000$

α^* แทน ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้กำหนดให้ $\alpha^*=0.05$

โดยที่ $Z_{\frac{\alpha^*}{2}}=Z_{\frac{0.05}{2}}=Z_{0.025}=1.96$

จากระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้ 3 ระดับ คือ 90% 95% และ 99% สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบและคำนวณค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นซึ่งใช้เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาว่า จะยอมรับสมมติฐาน H_0 หรือจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 โดยทำการพิจารณาแต่ละกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% $(P_0=0.90)$ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้

$$H_0: P\geq 0.90$$

$$H_1: P<0.90$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือวิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$\hat{P}\geq 0.90-1.96\sqrt{\frac{0.90(1-0.90)}{1{,}000}}$$

$$\hat{P}\geq 0.8814$$

กรณีที่ 2 ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% $(P_0=0.95)$ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้

$$H_0: P\geq 0.95$$

$$H_1: P<0.95$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือวิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$\hat{P} \geq 0.95 - 1.96\sqrt{\frac{0.95(1-0.95)}{1,000}}$$

$$\hat{P} \geq 0.9365$$

กรณีที่ 3 ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% $(P_0 = 0.99)$ **สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้**

$$H_0 : P \geq 0.99$$

$$H_1 : P < 0.99$$

วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด คือวิธีการประมาณที่ให้ค่า

$$\hat{P} \geq 0.99 - 1.96\sqrt{\frac{0.99(1-0.99)}{1,000}}$$

$$\hat{P} \geq 0.9838$$

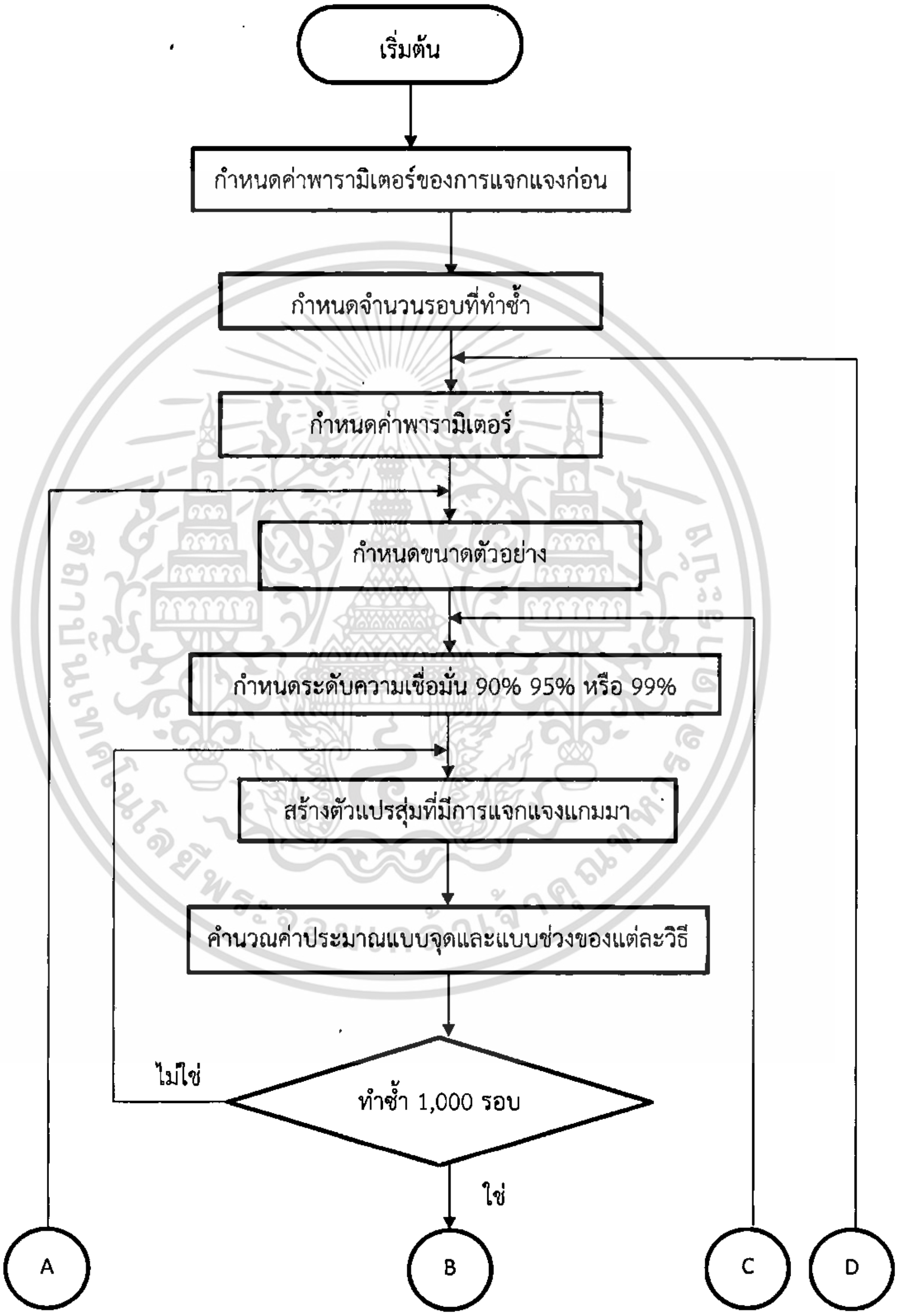
จากที่กล่าวไปข้างต้น สามารถสรุปเป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ ได้ดังนี้

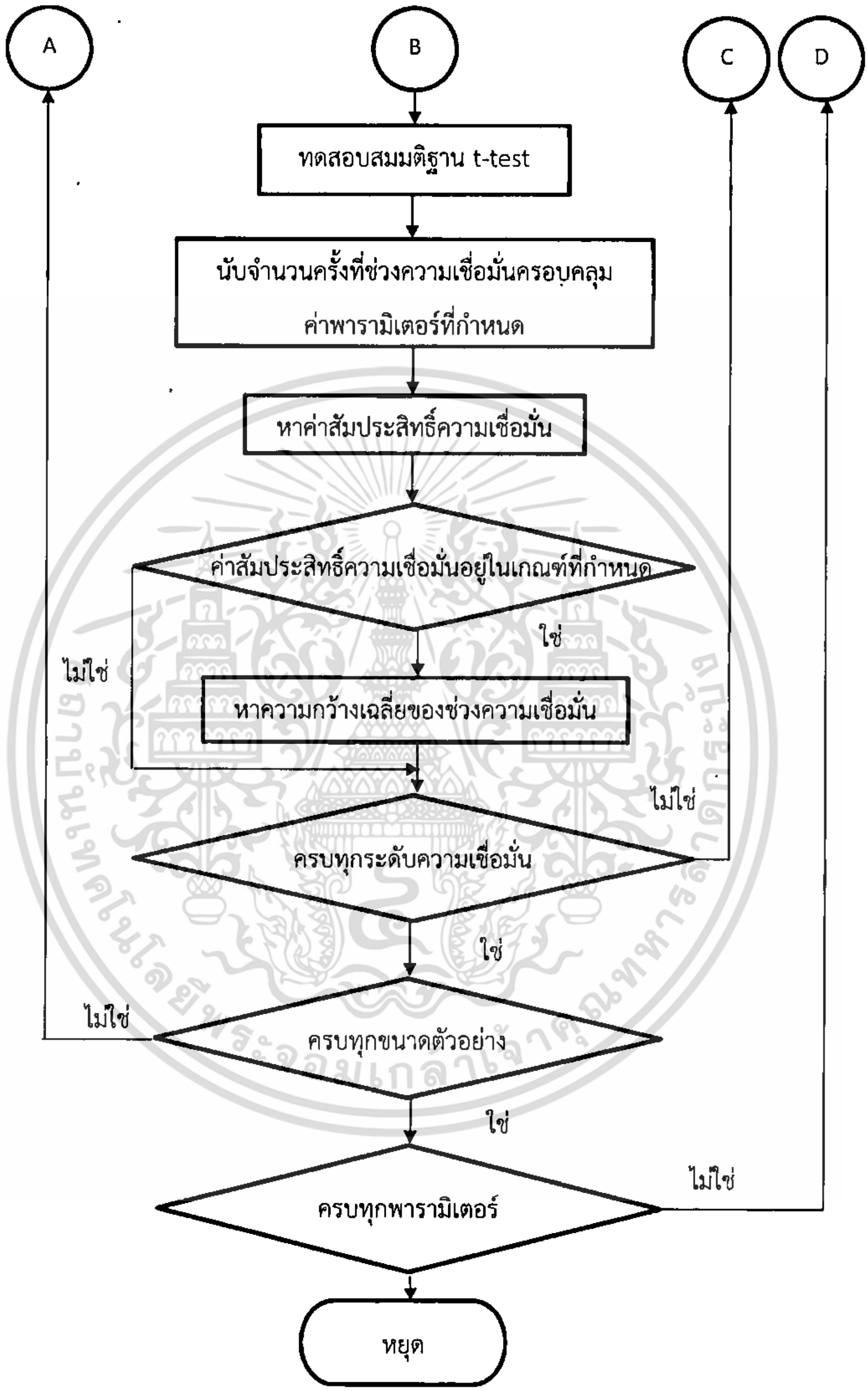
- กรณีที่ 1 เมื่อ $P_0 = 0.90$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $\hat{P} \geq 0.8814$
- กรณีที่ 2 เมื่อ $P_0 = 0.95$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $\hat{P} \geq 0.9365$
- กรณีที่ 3 เมื่อ $P_0 = 0.99$ จะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า $\hat{P} \geq 0.9838$

เกณฑ์ในการพิจารณาในกรณีที่แต่ละสถานการณ์มีวิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี จะนำค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์มาพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณใดให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุดจะถือว่าวิธีการประมาณนั้นให้ช่วงความเชื่อมั่นที่เหมาะสมที่สุด สำหรับสถานการณ์นั้น

3.3 ขั้นตอนของโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

การประมวลผลข้อมูลในการวิจัยสามารถอธิบายขั้นตอนเป็นแผนภาพได้ดังนี้





รูปที่ 3.3 แผนผังแสดงลำดับการทำงานของโปรแกรม

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ โดยการประมาณค่าแบบจุดจะทำการทดสอบสมมติฐานการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าเฉลี่ยของประชากรโดยใช้การทดสอบที (t-test) สำหรับการประมาณแบบช่วง จะพิจารณาค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น เพื่อหาวิธีการประมาณที่ดีที่สุดในแต่ละสถานการณ์ โดยผลการวิจัยที่ได้จะนำเสนอในรูปแบบของตารางและรูปภาพ ซึ่งมีสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

- ML	แทน วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
- Bayes.gamma	แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1)
- Bayes.chis	แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4)
- Bayes.exp	แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2)
- MCMC	แทน วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
- Bayes.MCMC	แทน วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

4.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point estimation)

ผู้วิจัยทำการทดสอบการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด โดยใช้การทดสอบที (t-test) โดยพิจารณาว่าแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ โดยใช้ค่าพี (p-value) เป็นเกณฑ์ในการพิจารณา กล่าวคือ ถ้าค่าพีน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด จะทำการปฏิเสธสมมติฐานหลัก ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ระดับนัยสำคัญ (α') มีค่าเท่ากับ 0.01 0.05 และ 0.10 ซึ่งจะสรุป

ผลได้ว่า ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด แสดงผลดังตารางที่ 4.1 - 4.7

ตารางที่ 4.1 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ เมื่อ $\alpha = 2$

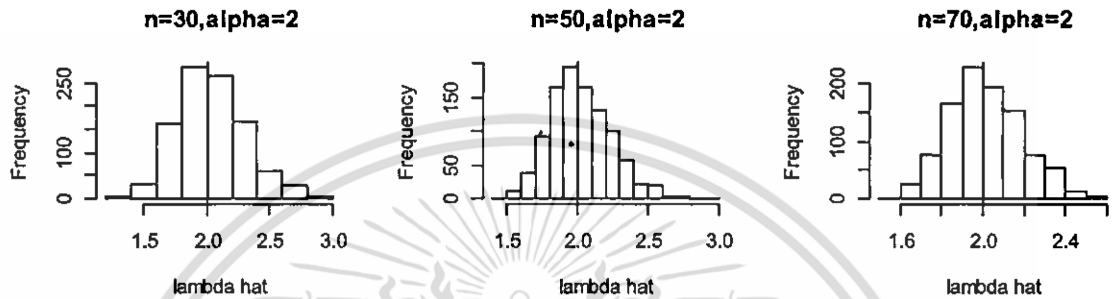
n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.03353	0.26829	3.95163	0.00008**
	Bayes.gamma	2.03131	0.25888	3.82431	0.00014**
	Bayes.chis	2.06571	0.26782	7.75834	0.00000**
	Bayes.exp	2.05326	0.26899	6.26114	0.00000**
	MCMC	2.03324	0.26875	3.91163	0.00010**
	Bayes.MCMC	2.03402	0.26409	4.07331	0.00005**
50	ML	2.02126	0.21277	3.15932	0.00163**
	Bayes.gamma	2.02040	0.20833	3.09684	0.00201**
	Bayes.chis	2.04083	0.21261	6.07302	0.00000**
	Bayes.exp	2.03316	0.21313	4.91998	0.00000**
	MCMC	2.02126	0.21306	3.15558	0.00165**
	Bayes.MCMC	2.02169	0.21078	3.25475	0.00117**
70	ML	2.01370	0.17540	2.46936	0.01370*
	Bayes.gamma	2.01329	0.17284	2.43141	0.01521*
	Bayes.chis	2.02777	0.17535	5.00832	0.00000**
	Bayes.exp	2.02222	0.17563	4.00059	0.00007**
	MCMC	2.01322	0.17576	2.37884	0.01755*
	Bayes.MCMC	2.01474	0.17423	2.67594	0.00757**

<u>หมายเหตุ</u> : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

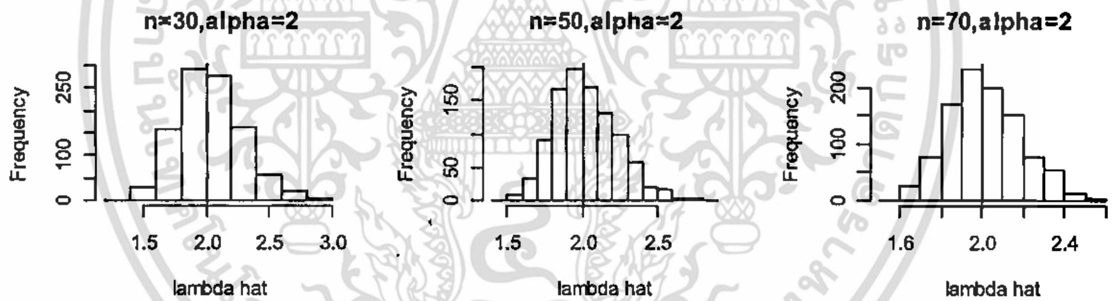
จากตารางที่ 4.1 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$ พบว่า วิธีการประมาณทุกวิธีให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) แต่มีวิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

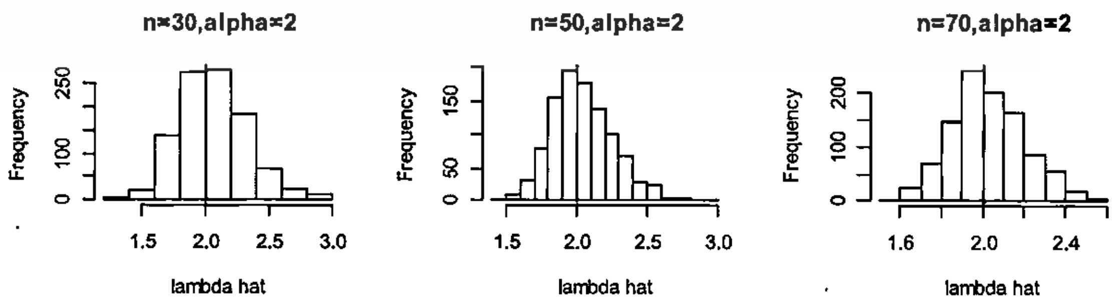
จากรูปที่ 4.1 – 4.6 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



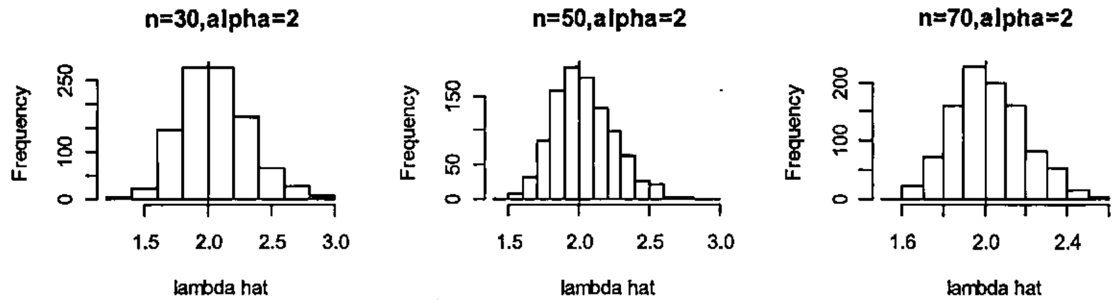
รูปที่ 4.1 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$



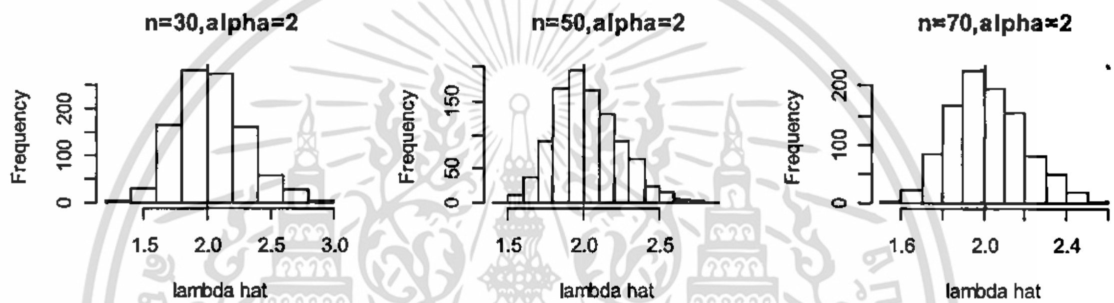
รูปที่ 4.2 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$



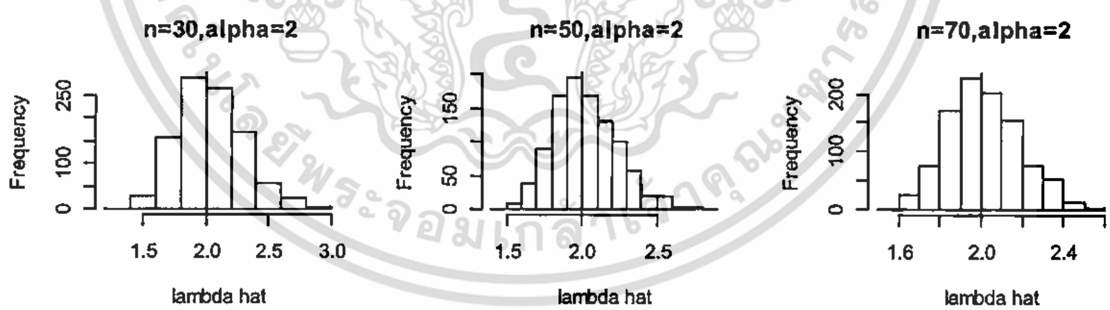
รูปที่ 4.3 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$



รูปที่ 4.4 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$



รูปที่ 4.5 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$



รูปที่ 4.6 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$

ตารางที่ 4.2 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda=2$ เมื่อ $\alpha=3$

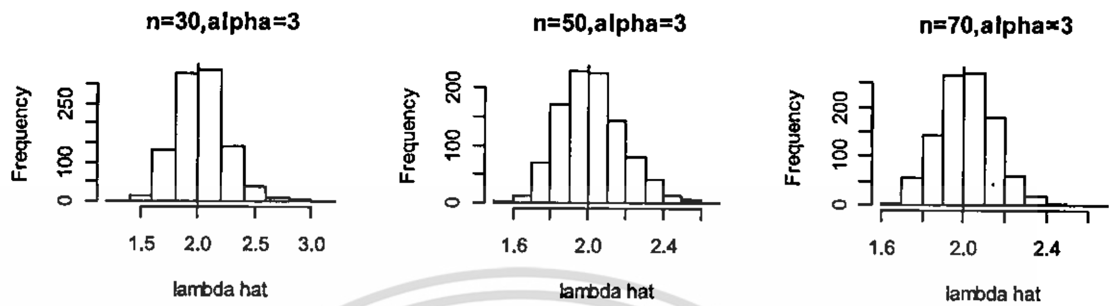
n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.02487	0.22170	3.54739	0.00041**
	Bayes.gamma	2.02380	0.21646	3.47719	0.00053**
	Bayes.chis	2.04657	0.22146	6.65026	0.00000**
	Bayes.exp	2.03809	0.22210	5.42314	0.00000**
	MCMC	2.02457	0.22165	3.50563	0.00048**
	Bayes.MCMC	2.02319	0.21882	3.35108	0.00084**
50	ML	2.01637	0.16883	3.06705	0.00222**
	Bayes.gamma	2.01597	0.16651	3.03355	0.00248**
	Bayes.chis	2.02952	0.16877	5.53193	0.00000**
	Bayes.exp	2.02434	0.16903	4.55294	0.00001**
	MCMC	2.01636	0.16887	3.06346	0.00225**
	Bayes.MCMC	2.01545	0.16747	2.91801	0.00360**
70	ML	2.01290	0.13923	2.92904	0.00348**
	Bayes.gamma	2.01268	0.13787	2.90904	0.00371**
	Bayes.chis	2.02233	0.13920	5.07226	0.00000**
	Bayes.exp	2.01859	0.13935	4.21928	0.00003**
	MCMC	2.01273	0.13914	2.89396	0.00389**
	Bayes.MCMC	2.01128	0.13837	2.57819	0.01007*

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

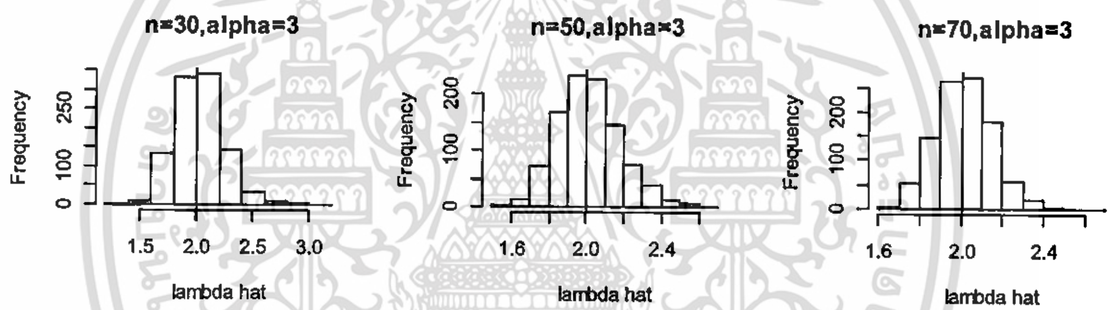
จากตารางที่ 4.2 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=3$ พบว่า วิธีการประมาณทุกวิธีให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) แต่มีวิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

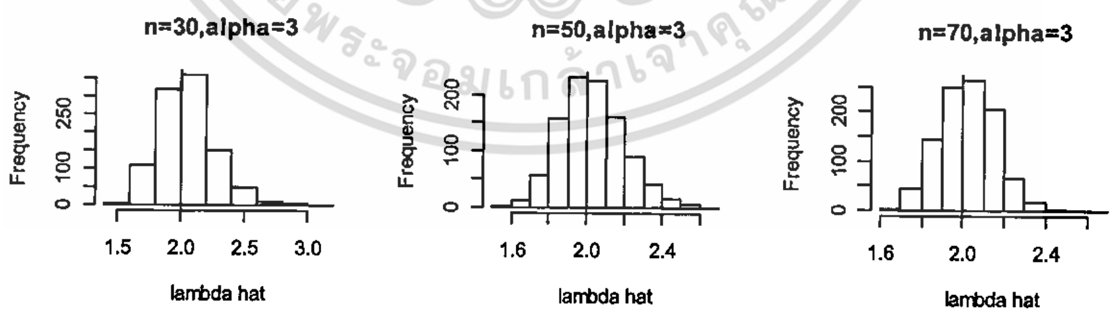
จากรูปที่ 4.7 - 4.12 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



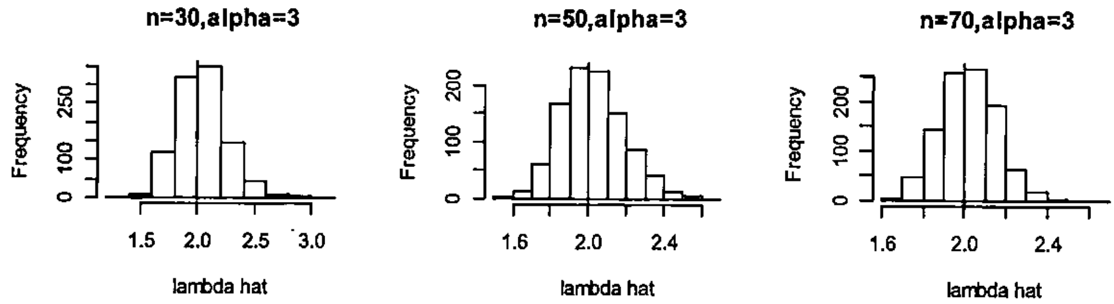
รูปที่ 4.7 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 3$



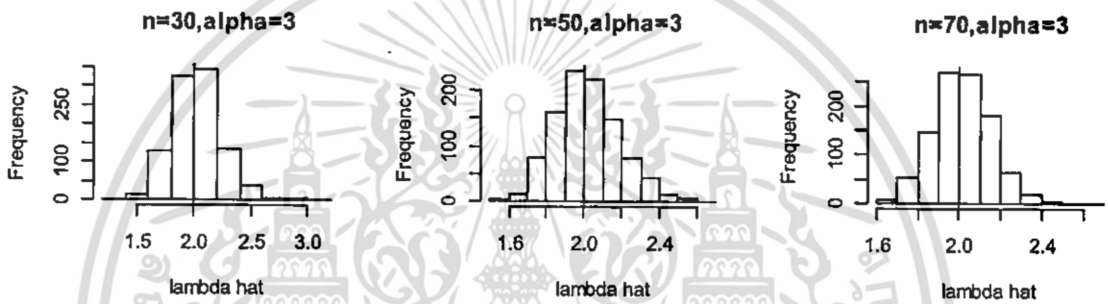
รูปที่ 4.8 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 3$



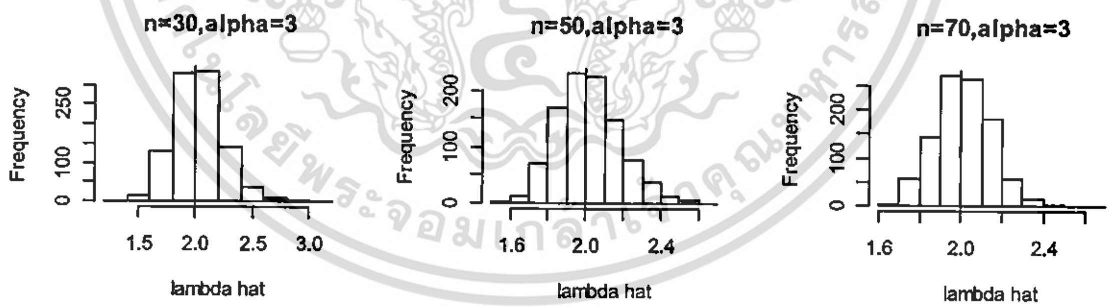
รูปที่ 4.9 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 3$



รูปที่ 4.10 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=3$



รูปที่ 4.11 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=3$



รูปที่ 4.12 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=3$

ตารางที่ 4.3 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ เมื่อ $\alpha = 4$

n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.01534	0.18505	2.62140	0.00889**
	Bayes.gamma	2.01481	0.18183	2.57585	0.01014*
	Bayes.chis	2.03173	0.18495	5.42463	0.00000**
	Bayes.exp	2.02527	0.18532	4.31289	0.00002**
	MCMC	2.01548	0.18527	2.64203	0.00837**
	Bayes.MCMC	2.01502	0.18340	2.58934	0.00976**
50	ML	2.00872	0.14230	1.93879	0.05281***
	Bayes.gamma	2.00854	0.14085	1.91704	0.05552***
	Bayes.chis	2.01862	0.14228	4.13940	0.00004**
	Bayes.exp	2.01470	0.14244	3.26383	0.00114**
	MCMC	2.00863	0.14272	1.91279	0.05606***
	Bayes.MCMC	2.00957	0.14168	2.13696	0.03284*
70	ML	2.00825	0.11849	2.20196	0.02790*
	Bayes.gamma	2.00814	0.11764	2.18889	0.02884*
	Bayes.chis	2.01534	0.11848	4.09502	0.00005**
	Bayes.exp	2.01253	0.11857	3.34067	0.00087**
	MCMC	2.00821	0.11864	2.18763	0.02893*
	Bayes.MCMC	2.00723	0.11793	1.93772	0.05294***

<u>หมายเหตุ</u> : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

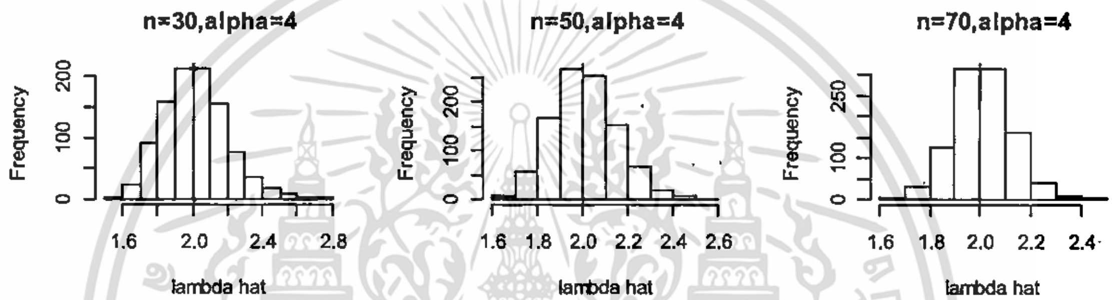
จากตารางที่ 4.3 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 4$ พบว่า วิธีการประมาณทุกวิธีให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) แต่มีวิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจง

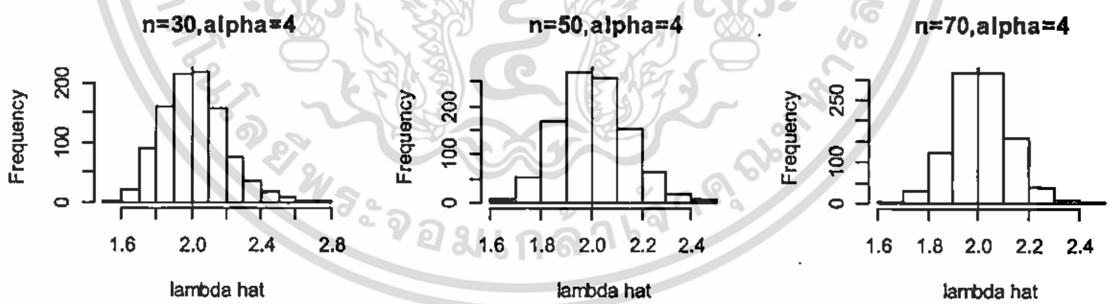
ก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

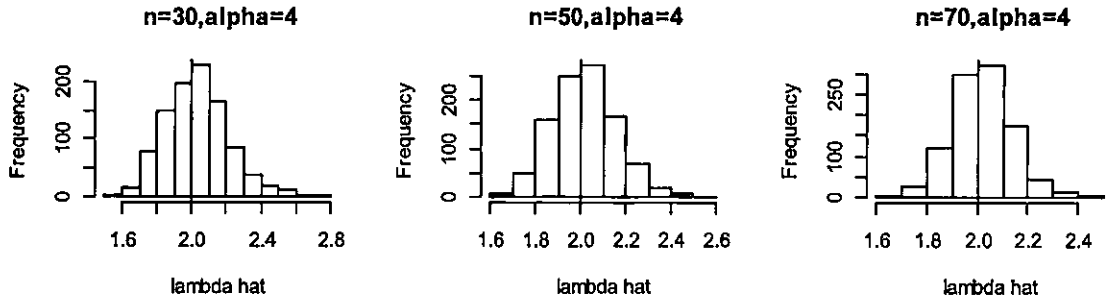
จากรูปที่ 4.13 - 4.18 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



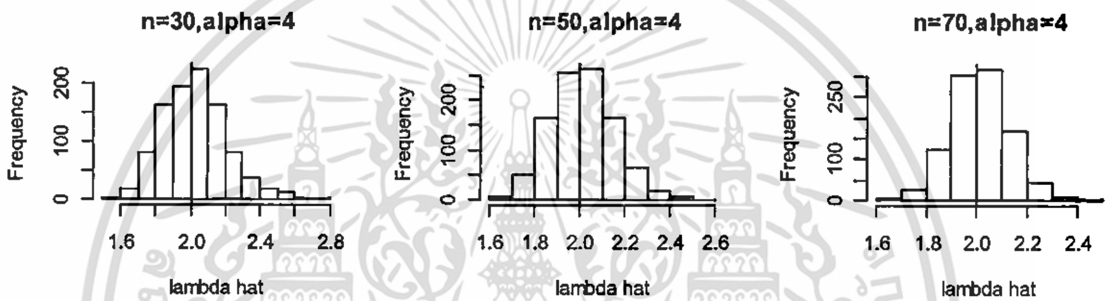
รูปที่ 4.13 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 4$



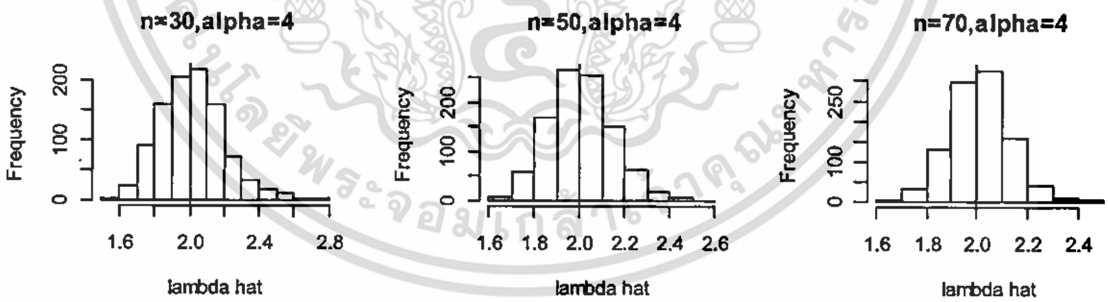
รูปที่ 4.14 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 4$



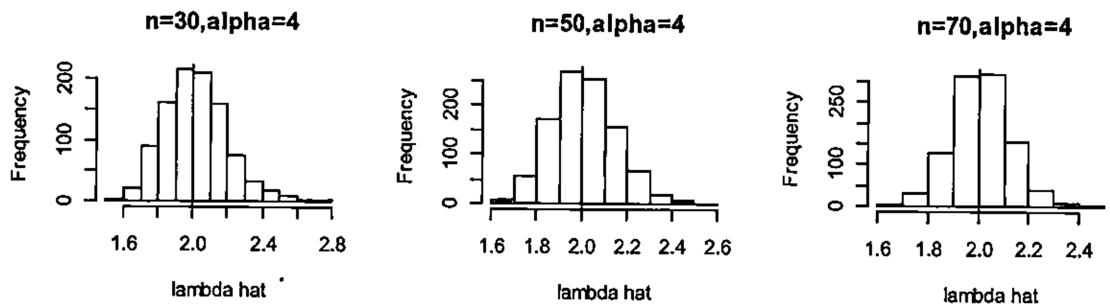
รูปที่ 4.15 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจง ไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=4$



รูปที่ 4.16 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=4$



รูปที่ 4.17 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=4$



รูปที่ 4.18 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=4$

ตารางที่ 4.4 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda=2$ เมื่อ $\alpha=5$

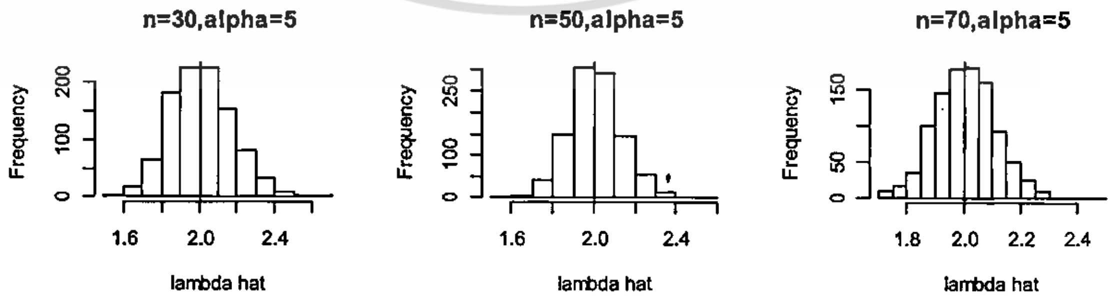
n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.01236	0.16623	2.35139	0.01890*
	Bayes.gamma	2.01202	0.16394	2.31807	0.02065*
	Bayes.chis	2.02551	0.16617	4.85522	0.00000**
	Bayes.exp	2.02032	0.16643	3.86071	0.00012**
	MCMC	2.01263	0.16678	2.39519	0.01679*
	Bayes.MCMC	2.01171	0.16491	2.24579	0.02494*
50	ML	2.00628	0.12549	1.58188	0.11399
	Bayes.gamma	2.00617	0.12447	1.56638	0.11758
	Bayes.chis	2.01421	0.12547	3.58227	0.00036**
	Bayes.exp	2.01106	0.12558	2.78551	0.00545**
	MCMC	2.00619	0.12570	1.55833	0.11947
	Bayes.MCMC	2.00659	0.12503	1.66796	0.09564***
70	ML	2.00552	0.10697	1.63185	0.10303
	Bayes.gamma	2.00546	0.10635	1.62236	0.10504
	Bayes.chis	2.01120	0.10696	3.31163	0.00096**
	Bayes.exp	2.00894	0.10703	2.64179	0.00838**
	MCMC	2.00539	0.10700	1.59412	0.11123
	Bayes.MCMC	2.00482	0.10657	1.42925	0.15324

<u>หมายเหตุ</u> : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

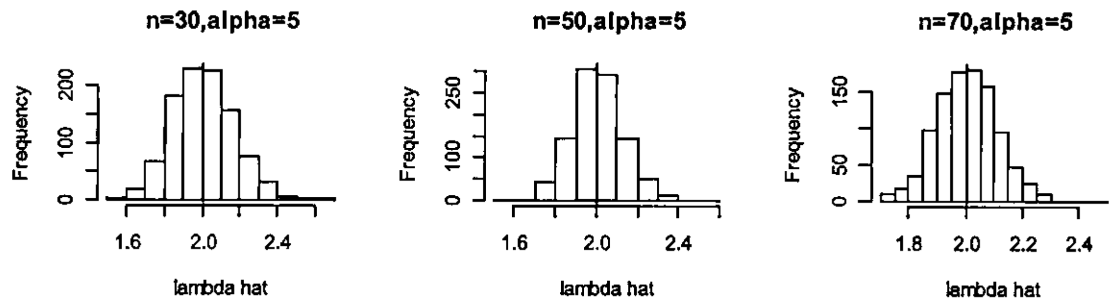
จากตารางที่ 4.4 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$ พบว่า วิธีการประมาณโดยส่วนใหญ่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) แต่มีวิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 50 และ 70
- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

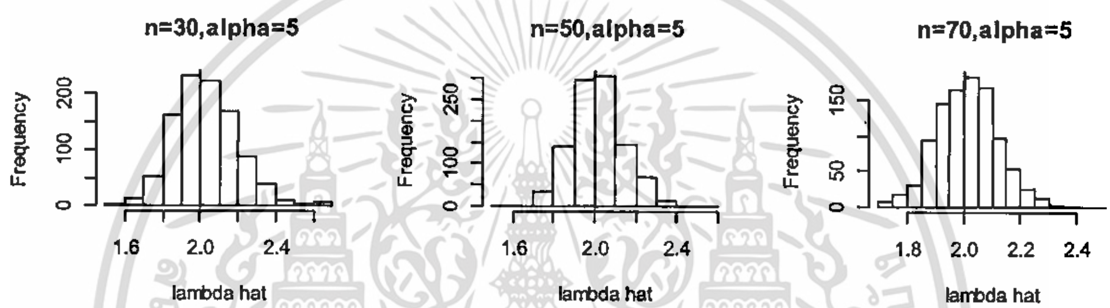
จากรูปที่ 4.19 - 4.24 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



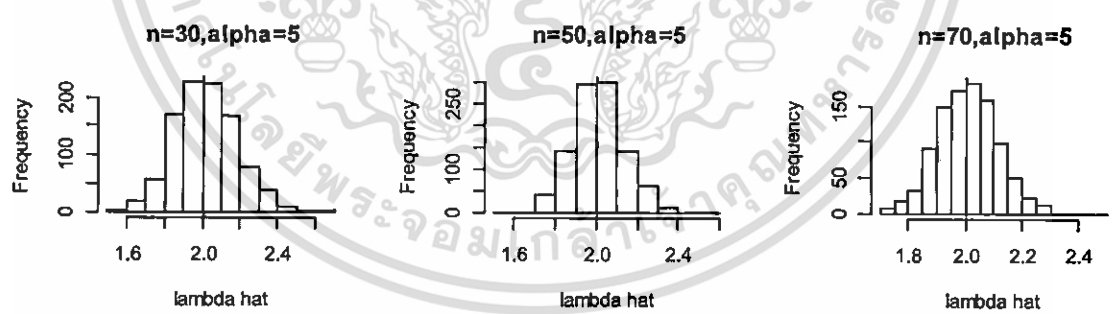
รูปที่ 4.19 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$



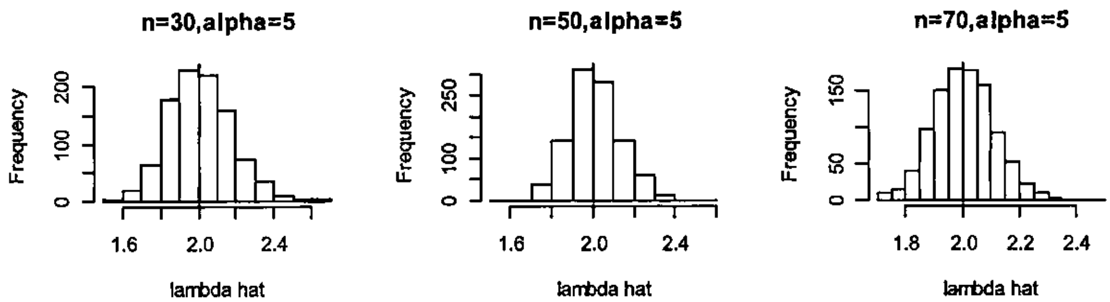
รูปที่ 4.20 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$



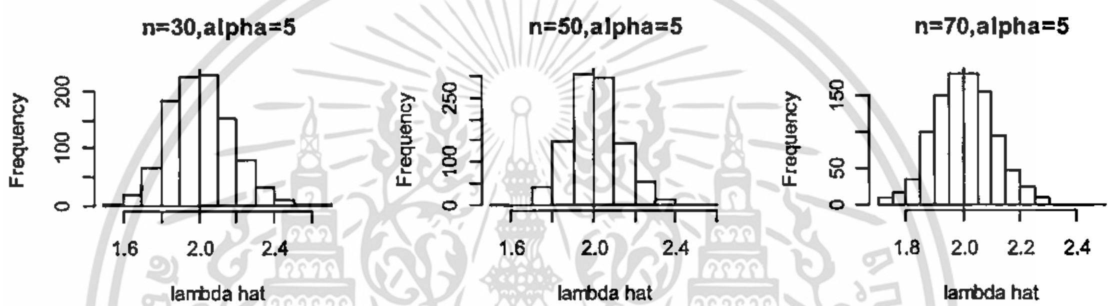
รูปที่ 4.21 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$



รูปที่ 4.22 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$



รูปที่ 4.23 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=5$



รูปที่ 4.24 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=5$

ตารางที่ 4.5 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ เมื่อ $\alpha = 6$

n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.00858	0.15144	1.79090	0.07361***
	Bayes.gamma	2.00836	0.14972	1.76519	0.07784***
	Bayes.chis	2.01956	0.15141	4.08580	0.00005**
	Bayes.exp	2.01521	0.15160	3.17329	0.00155**
	MCMC	2.00901	0.15182	1.87699	0.06081***
	Bayes.MCMC	2.00814	0.15058	1.70878	0.08780***
50	ML	2.00298	0.11359	0.82965	0.40694
	Bayes.gamma	2.00292	0.11283	0.81784	0.41365
	Bayes.chis	2.00960	0.11359	2.67359	0.00763**
	Bayes.exp	2.00697	0.11367	1.93863	0.05283***
	MCMC	2.00307	0.11355	0.85485	0.39284
	Bayes.MCMC	2.00298	0.11322	0.83206	0.40557
70	ML	2.00244	0.09837	0.78295	0.43384
	Bayes.gamma	2.00240	0.09790	0.77561	0.43816
	Bayes.chis	2.00717	0.09837	2.30648	0.02129*
	Bayes.exp	2.00529	0.09842	1.69866	0.08970***
	MCMC	2.00240	0.09845	0.76954	0.44175
	Bayes.MCMC	2.00168	0.09803	0.54175	0.58811

หมายเหตุ : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

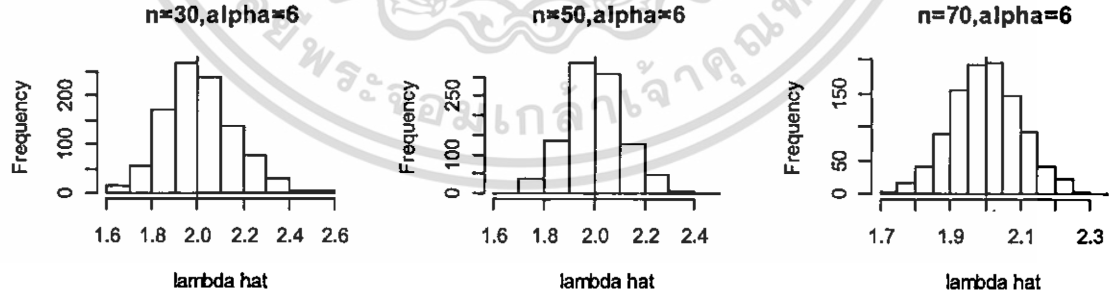
จากตารางที่ 4.5 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$ พบว่า วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) มีดังนี้

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจง

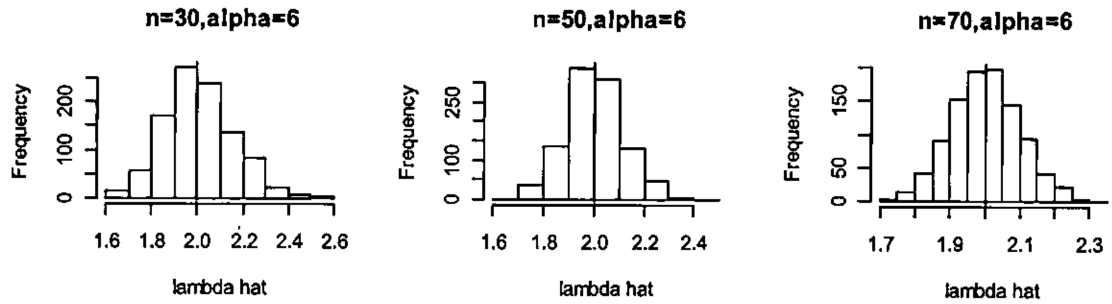
ก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70

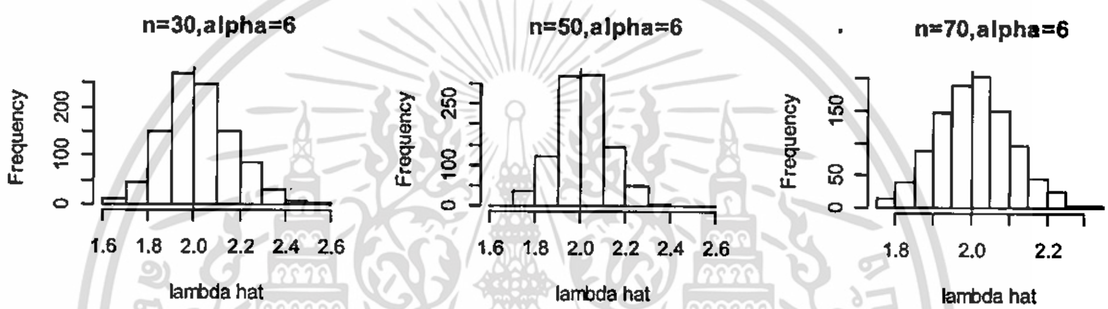
จากรูปที่ 4.25 - 4.30 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



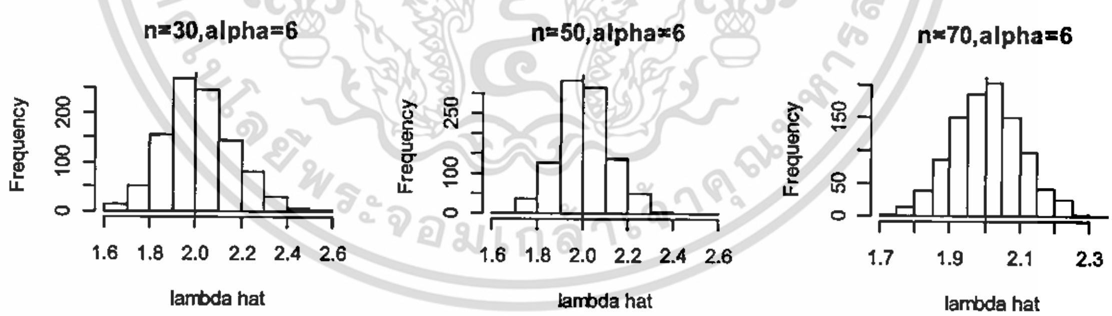
รูปที่ 4.25 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$



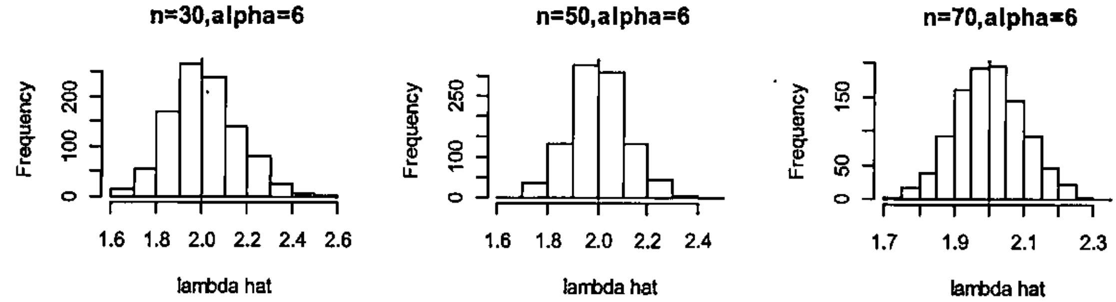
รูปที่ 4.26 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$



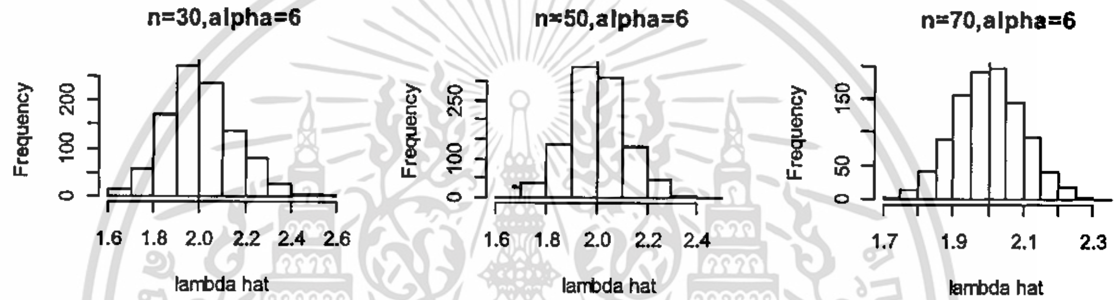
รูปที่ 4.27 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$



รูปที่ 4.28 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$



รูปที่ 4.29 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$



รูปที่ 4.30 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$

ตารางที่ 4.6 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ เมื่อ $\alpha = 7$

n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.00815	0.13688	1.88332	0.05995***
	Bayes.gamma	2.00799	0.13555	1.86336	0.06270***
	Bayes.chis	2.01759	0.13685	4.06354	0.00005**
	Bayes.exp	2.01384	0.13700	3.19581	0.00144**
	MCMC	2.00812	0.13732	1.87001	0.06177***
	Bayes.MCMC	2.00712	0.13605	1.65427	0.09839***
50	ML	2.00301	0.10922	0.87191	0.38347
	Bayes.gamma	2.00296	0.10858	0.86222	0.38877
	Bayes.chis	2.00869	0.10921	2.51697	0.01199*
	Bayes.exp	2.00643	0.10928	1.86099	0.06304***
	MCMC	2.00303	0.10919	0.87680	0.38081
	Bayes.MCMC	2.00306	0.10891	0.88747	0.37504
70	ML	2.00218	0.09113	0.75790	0.44869
	Bayes.gamma	2.00216	0.09075	0.75208	0.45218
	Bayes.chis	2.00625	0.09113	2.16853	0.03035*
	Bayes.exp	2.00463	0.09116	1.60553	0.10869
	MCMC	2.00234	0.09129	0.80901	0.41870
	Bayes.MCMC	2.00230	0.09096	0.79944	0.42423

<u>หมายเหตุ</u> : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

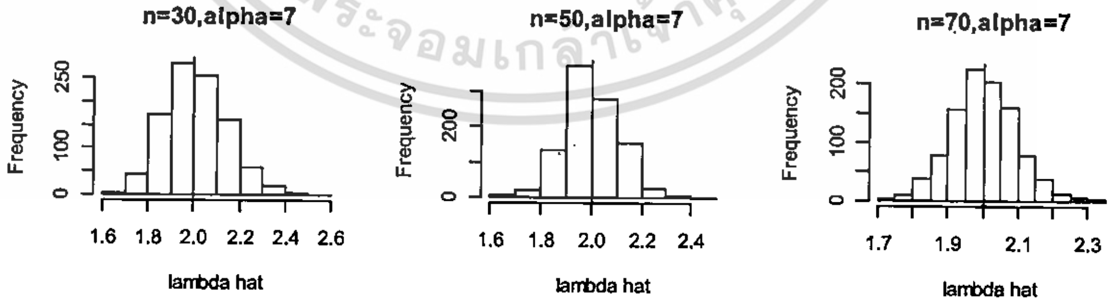
จากตารางที่ 4.6 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$ พบว่า **วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) มีดังนี้**

- **ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจก**

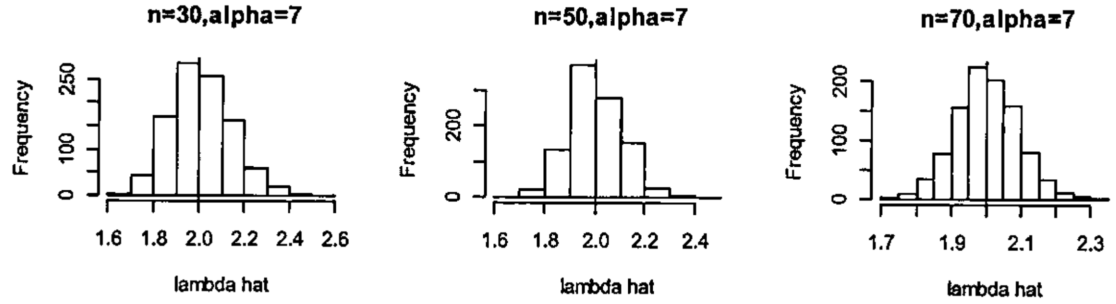
แจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

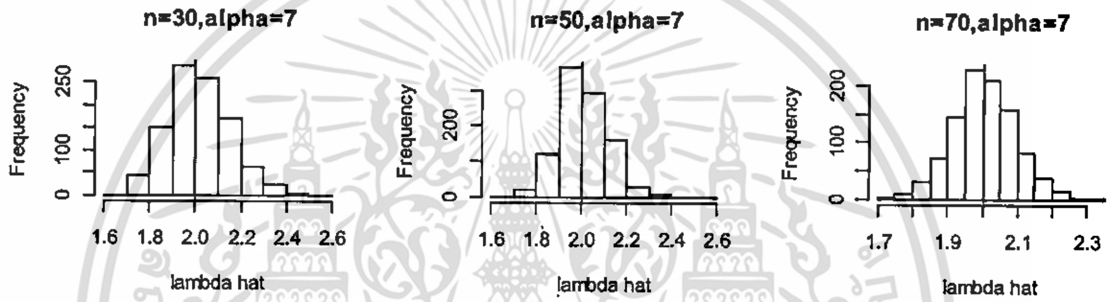
จากรูปที่ 4.31 - 4.36 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



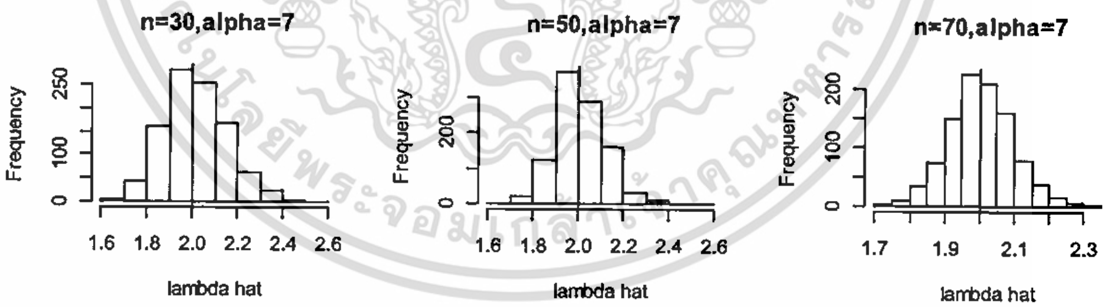
รูปที่ 4.31 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$



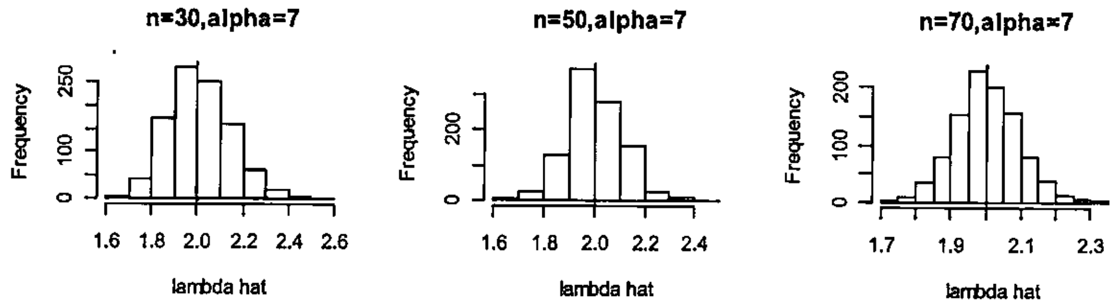
รูปที่ 4.32 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$



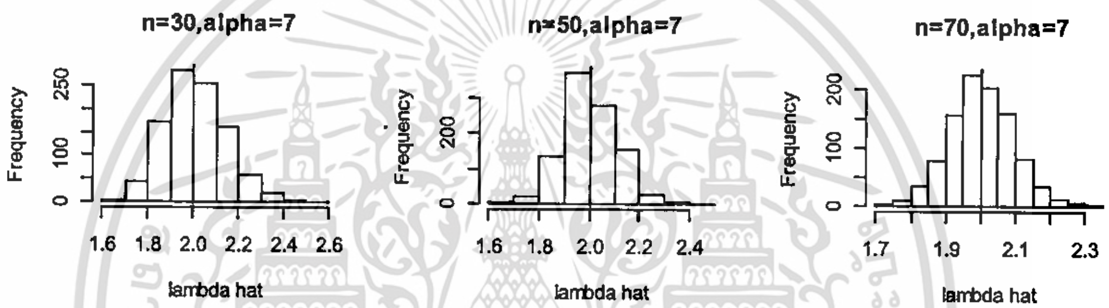
รูปที่ 4.33 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$



รูปที่ 4.34 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$



รูปที่ 4.35 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$



รูปที่ 4.36 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$

ตารางที่ 4.7 ค่าเฉลี่ย (Mean) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) ค่าสถิติที (t) และค่าพี (p-value) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$ เมื่อ $\alpha = 8$

n	วิธีประมาณ	Mean	SD	t	p-value
30	ML	2.00832	0.13132	2.00392	0.04535*
	Bayes.gamma	2.00818	0.13019	1.98734	0.04716*
	Bayes.chis	2.01658	0.13129	3.99439	0.00007**
	Bayes.exp	2.01331	0.13142	3.20172	0.00141**
	MCMC	2.00819	0.13142	1.97182	0.04891*
	Bayes.MCMC	2.00804	0.13068	1.94636	0.05189***
50	ML	2.00363	0.10399	1.10306	0.27027
	Bayes.gamma	2.00358	0.10346	1.09495	0.27380
	Bayes.chis	2.00860	0.10398	2.61576	0.00904**
	Bayes.exp	2.00662	0.10404	2.01238	0.04445*
	MCMC	2.00379	0.10439	1.14932	0.25070
	Bayes.MCMC	2.00351	0.10372	1.07095	0.28445
70	ML	2.00261	0.08427	0.97808	0.32827
	Bayes.gamma	2.00258	0.08397	0.97338	0.33060
	Bayes.chis	2.00617	0.08427	2.31355	0.02089*
	Bayes.exp	2.00475	0.08430	1.78039	0.07532***
	MCMC	2.00250	0.08444	0.93714	0.34891
	Bayes.MCMC	2.00220	0.08408	0.82779	0.40799

<u>หมายเหตุ</u> : * หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05, ** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 และ *** หมายความว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

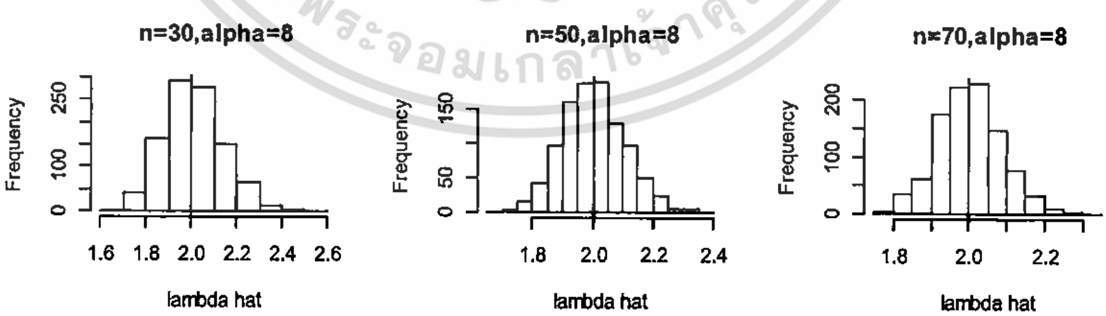
จากตารางที่ 4.7 การประมาณค่าแบบจุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 8$ พบว่า วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด (λ) มีดังนี้

- **ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจง**

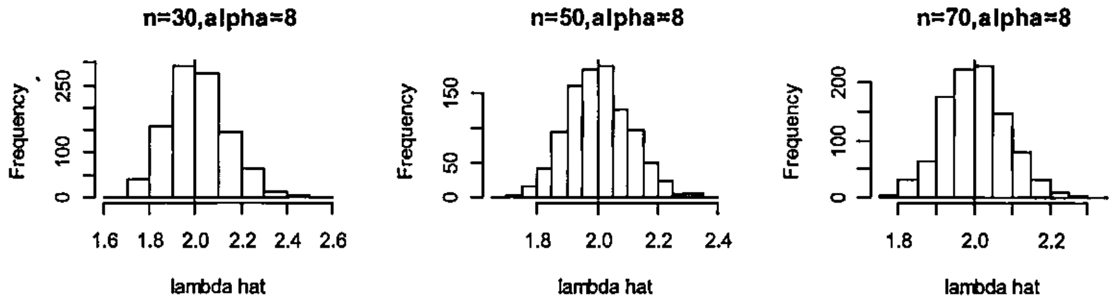
ก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 ได้แก่ วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70
- ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70

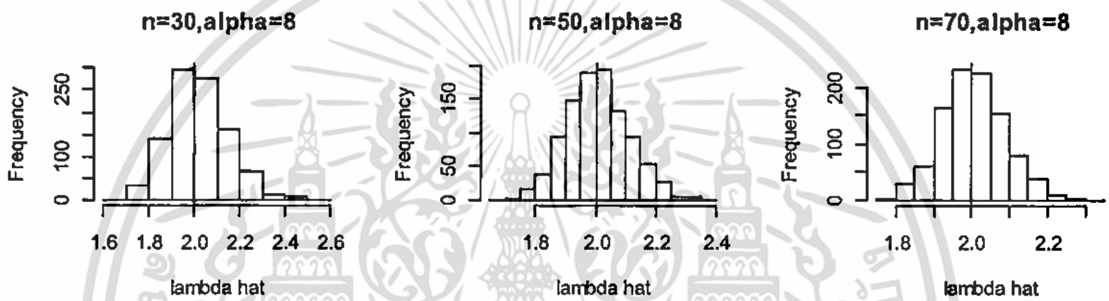
จากรูปที่ 4.37 - 4.42 แสดงให้เห็นว่า ค่าที่ประมาณได้จากทุกวิธีการประมาณจะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงปรกติ เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น และลู่เข้าสู่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 2$



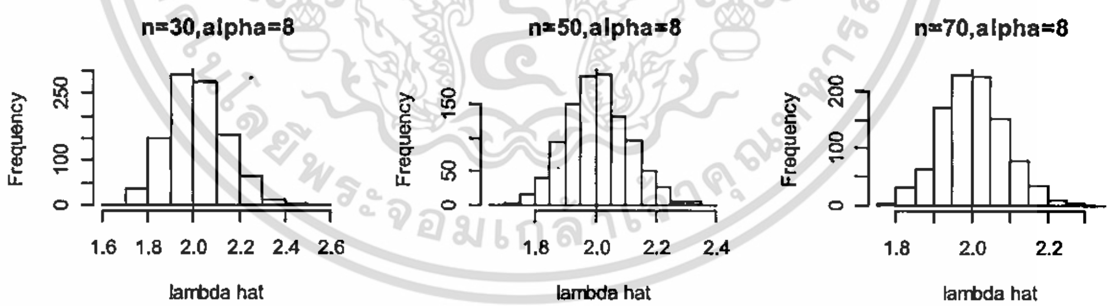
รูปที่ 4.37 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 8$



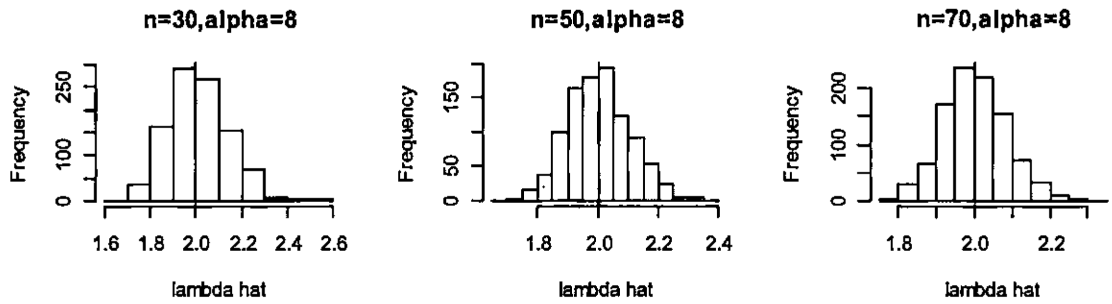
รูปที่ 4.38 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=8$



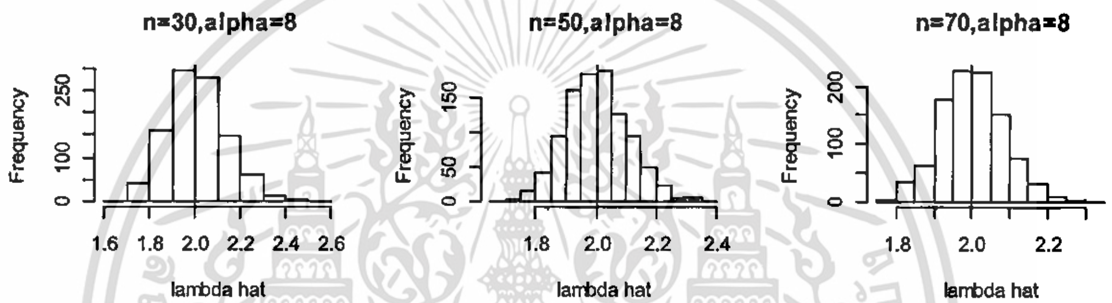
รูปที่ 4.39 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=8$



รูปที่ 4.40 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=8$



รูปที่ 4.41 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 8$



รูปที่ 4.42 แผนภาพฮิสโทแกรมแสดงค่าที่ประมาณได้ด้วยวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 8$

4.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

4.2.1 การตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient : CC)

การตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจะทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นในแต่ละสถานการณ์กับเกณฑ์ที่กำหนด ดังนี้

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.8814
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.9365
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.9838

4.2.2 การเปรียบเทียบความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น (Average Width : AW)

เนื่องจากในแต่ละสถานการณ์อาจจะมีวิธีการประมาณที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดหลายวิธี ดังนั้นจึงนำค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

มาพิจารณาด้วย โดยวิธีการประมาณใดที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยที่สุด จะถือว่า วิธีการประมาณนั้นมีประสิทธิภาพและเหมาะสมสำหรับสถานการณ์นั้น

ผลการวิจัยที่ได้จากการตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและการเปรียบเทียบความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น แสดงไว้ในตารางที่ 4.11 – 4.17 โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่นที่ได้กำหนดไว้ ซึ่งมีสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

- ML แทน วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
- Bayes.gamma แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1)
- Bayes.chis แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4)
- Bayes.exp แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2)
- MCMC แทน วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
- Bayes.MCMC แทน วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

ตารางที่ 4.8 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.988	1.82438	0.996	2.17388	0.998	2.85696
	Bayes.gamma	0.894	**0.84990**	0.946	**1.01271**	0.990	**1.33093**
	Bayes.chis	0.894	0.86432	0.947	1.02990	0.994	1.35352
	Bayes.exp	0.892	0.86615	0.945	1.03208	0.992	1.35638
	MCMC	0.888	0.86228	0.945	1.03031	0.990	1.35534
	Bayes.MCMC	0.895	0.85208	0.944	1.01506	0.990	1.33542
50	ML	0.991	1.37002	0.996	1.63248	1.000	2.14544
	Bayes.gamma	0.899	**0.65768**	0.943	**0.78367**	0.991	**1.02992**
	Bayes.chis	0.894	0.66432	0.945	0.79159	0.993	1.04032
	Bayes.exp	0.896	0.66509	0.941	0.79250	0.991	1.04152
	MCMC	0.893	0.66366	0.943	0.79172	0.988	1.04050
	Bayes.MCMC	0.897	0.65937	0.943	0.78548	0.991	1.03246
70	ML	0.992	1.14391	0.998	1.36305	1.000	1.79135
	Bayes.gamma	0.908	**0.55585**	0.955	**0.66234**	0.990	**0.87046**
	Bayes.chis	0.902	0.55985	0.952	0.66710	0.991	0.87672
	Bayes.exp	0.909	0.56029	0.953	0.66763	0.990	0.87742
	MCMC	0.901	0.55978	0.950	0.66580	0.988	0.87667
	Bayes.MCMC	0.906	0.55686	0.951	0.66400	0.989	0.87250

หมายเหตุ : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.8 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 2$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- **ที่ระดับความเชื่อมั่น** 90% 95% และ 99% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.9 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 3$

n	**วิธีประมาณ**	**ระดับความเชื่อมั่น**					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.988	1.45930	0.998	1.73886	0.999	2.28525
	Bayes.gamma	0.897	**0.69506**	0.947	**0.82822**	0.992	**1.08846**
	Bayes.chis	0.898	0.70289	0.946	0.83755	0.992	1.10073
	Bayes.exp	0.891	0.70382	0.947	0.83866	0.992	1.10218
	MCMC	0.891	0.70200	0.941	0.83737	0.990	1.10053
	Bayes.MCMC	0.890	0.69669	0.945	0.83059	0.990	1.09164
50	ML	0.991	1.10957	0.995	1.32214	0.999	1.73758
	Bayes.gamma	0.919	**0.53855**	0.956	**0.64172**	0.986	**0.84337**
	Bayes.chis	0.917	0.54217	0.958	0.64604	0.987	0.84904
	Bayes.exp	0.916	0.54258	0.959	0.64652	0.986	0.84967
	MCMC	0.916	0.54270	0.955	0.64661	0.987	0.84892
	Bayes.MCMC	0.919	0.53919	0.957	0.64251	0.986	0.84423
70	ML	0.992	0.92904	1.000	1.10702	1.000	1.45488
	Bayes.gamma	0.894	**0.45483**	0.951	**0.54196**	0.988	**0.71226**
	Bayes.chis	0.894	0.45701	0.953	0.54456	0.987	0.71567
	Bayes.exp	0.894	0.45725	0.952	0.54484	0.988	0.71604
	MCMC	0.889	0.45660	0.948	0.54418	0.986	0.71556
	Bayes.MCMC	0.890	0.45561	0.950	0.54279	0.988	0.71325

หมายเหตุ : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.9 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 3$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- **ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า** ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.10 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 4$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.993	1.24628	0.999	1.48504	1.000	1.95167
	Bayes.gamma	0.904	**0.60139**	0.953	**0.71660**	0.989	**0.94178**
	Bayes.chis	0.905	0.60645	0.952	0.72264	0.991	0.94970
	Bayes.exp	0.904	0.60703	0.949	0.72332	0.990	0.95060
	MCMC	0.904	0.60606	0.950	0.72305	0.988	0.94936
	Bayes.MCMC	0.904	0.60309	0.953	0.71953	0.989	0.94454
50	ML	0.995	0.95167	0.999	1.13399	1.000	1.49032
	Bayes.gamma	0.898	**0.46573**	0.942	**0.55495**	0.986	**0.72933**
	Bayes.chis	0.898	0.46807	0.941	0.55774	0.987	0.73300
	Bayes.exp	0.900	0.46833	0.941	0.55805	0.987	0.73340
	MCMC	0.894	0.46808	<u>0.936</u>	-	0.985	0.73226
	Bayes.MCMC	0.898	0.46646	0.942	0.55607	0.986	0.73061
70	ML	0.995	0.79942	1.000	0.95257	1.000	1.25189
	Bayes.gamma	0.915	**0.39362**	0.959	**0.46903**	0.988	**0.61641**
	Bayes.chis	0.912	0.39503	0.958	0.47071	0.988	0.61862
	Bayes.exp	0.913	0.39518	0.958	0.47089	0.987	0.61885
	MCMC	0.908	0.39496	0.954	0.47016	0.986	0.61878
	Bayes.MCMC	0.914	0.39400	0.959	0.46980	0.988	0.61750

<u>หมายเหตุ</u> : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.10 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 4$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ยกเว้นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณจากวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.11 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.992	1.10825	0.997	1.32056	1.000	1.73551
	Bayes.gamma	0.899	**0.53817**	0.941	**0.64127**	0.986	**0.84277**
	Bayes.chis	0.895	0.54179	0.940	0.64558	0.986	0.84843
	Bayes.exp	0.895	0.54219	0.942	0.64606	0.985	0.84907
	MCMC	0.890	0.54115	0.942	0.64625	0.982	-
	Bayes.MCMC	0.899	0.53974	0.941	0.64349	0.985	0.84456
50	ML	0.994	0.84801	0.998	1.01047	1.000	1.32798
	Bayes.gamma	0.892	**0.41659**	0.934	-	0.983	-
	Bayes.chis	0.891	0.41826	0.935	-	0.981	-
	Bayes.exp	0.889	0.41844	0.937	**0.49860**	0.981	-
	MCMC	0.890	0.41855	0.935	-	0.984	**0.65663**
	Bayes.MCMC	0.892	0.41723	0.934	-	0.983	-
70	ML	0.996	0.71253	0.997	0.84903	1.000	1.11581
	Bayes.gamma	0.909	**0.35195**	0.954	**0.41937**	0.986	**0.55114**
	Bayes.chis	0.913	0.35295	0.953	0.42057	0.987	0.55272
	Bayes.exp	0.912	0.35306	0.952	0.42070	0.987	0.55289
	MCMC	0.910	0.35284	0.953	0.42081	0.987	0.55311
	Bayes.MCMC	0.909	0.35223	0.955	0.41978	0.986	0.55171

หมายเหตุ : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.11 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 5$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ยกเว้นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณจากวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ยกเว้นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณจากวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 70 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ

70 และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50

ตารางที่ 4.12 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.995	1.00396	1.000	1.19630	1.000	1.57220
	Bayes.gamma	0.893	**0.49059**	0.945	**0.58457**	0.988	**0.76826**
	Bayes.chis	0.895	0.49333	0.944	0.58784	0.989	0.77256
	Bayes.exp	0.893	0.49363	0.946	0.58820	0.989	0.77302
	MCMC	0.888	0.49347	0.945	0.58848	0.990	0.77271
	Bayes.MCMC	0.892	0.49177	0.944	0.58585	0.988	0.77014
50	ML	0.996	0.76926	1.000	0.91663	1.000	1.20465
	Bayes.gamma	0.909	**0.37968**	0.954	**0.45242**	0.987	**0.59457**
	Bayes.chis	0.913	0.38095	0.954	0.45393	0.985	0.59656
	Bayes.exp	0.911	0.38108	0.953	0.45409	0.986	0.59677
	MCMC	0.906	0.38044	0.952	0.45380	0.986	0.59615
	Bayes.MCMC	0.909	0.38018	0.954	0.45298	0.987	0.59545
70	ML	0.996	0.64773	1.000	0.77182	1.000	1.01435
	Bayes.gamma	0.898	**0.32091**	0.939	**0.38239**	0.989	**0.50254**
	Bayes.chis	0.898	0.32168	0.943	0.38330	0.991	0.50374
	Bayes.exp	0.898	0.32176	0.944	0.38339	0.991	0.50387
	MCMC	0.894	0.32175	0.943	0.38398	0.989	0.50330
	Bayes.MCMC	0.898	0.32125	0.938	0.38271	0.989	0.50308

<u>หมายเหตุ</u> : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.12 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 6$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์

ตารางที่ 4.13 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.996	0.92690	0.998	1.10446	1.000	1.45151
	Bayes.gamma	0.899	**0.45427**	0.942	**0.54129**	0.992	**0.71138**
	Bayes.chis	0.900	0.45644	0.944	0.54389	0.991	0.71479
	Bayes.exp	0.897	0.45668	0.944	0.54417	0.991	0.71515
	MCMC	0.895	0.45635	0.942	0.54332	0.992	0.71488
	Bayes.MCMC	0.898	0.45516	0.941	0.54230	0.991	0.71290
50	ML	0.997	0.71160	0.998	0.84792	0.999	1.11436
	Bayes.gamma	0.899	**0.35168**	0.942	**0.41906**	0.991	**0.55074**
	Bayes.chis	0.897	0.35269	0.944	0.42026	0.990	0.55231
	Bayes.exp	0.896	0.35280	0.942	0.42038	0.990	0.55248
	MCMC	0.901	0.35329	0.940	0.42108	0.988	0.55173
	Bayes.MCMC	0.898	0.35209	0.942	0.41954	0.991	0.55150
70	ML	0.995	0.59946	0.998	0.71430	1.000	**0.93874**
	Bayes.gamma	0.891	**0.29724**	0.941	**0.35418**	<u>0.981</u>	-
	Bayes.chis	0.886	0.29784	0.940	0.35490	<u>0.982</u>	-
	Bayes.exp	0.887	0.29791	0.941	0.35498	<u>0.983</u>	-
	MCMC	0.884	0.29777	0.941	0.35475	<u>0.981</u>	-
	Bayes.MCMC	0.889	0.29747	0.941	0.35450	<u>0.981</u>	-

<u>หมายเหตุ</u> : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.13 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 7$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า ส่วนใหญ่ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ยกเว้นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณจากวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟและวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% และ 95% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50 และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

ตารางที่ 4.14 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (CC) และค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AW) ที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda=2$ และ $\alpha=8$

n	วิธีประมาณ	ระดับความเชื่อมั่น					
		90%		95%		99%	
		CC	AW	CC	AW	CC	AW
30	ML	0.996	0.86505	1.000	1.03077	1.000	1.35466
	Bayes.gamma	0.896	**0.42498**	0.945	**0.50639**	0.992	**0.66551**
	Bayes.chis	0.893	0.42676	0.942	0.50851	0.992	0.66830
	Bayes.exp	0.895	0.42695	0.943	0.50874	0.991	0.66859
	MCMC	0.885	0.42616	0.943	0.50824	0.991	0.66780
	Bayes.MCMC	0.895	0.42560	0.945	0.50728	0.992	0.66692
50	ML	0.998	0.66499	1.000	0.79239	1.000	1.04137
	Bayes.gamma	0.894	**0.32907**	0.951	**0.39211**	0.992	**0.51532**
	Bayes.chis	0.892	0.32989	0.949	0.39309	0.989	0.51661
	Bayes.exp	0.890	0.32998	0.949	0.39319	0.991	0.51674
	MCMC	0.898	0.32981	0.948	0.39267	0.990	0.51659
	Bayes.MCMC	0.893	0.32944	0.950	0.39251	0.992	0.51594
70	ML	0.998	0.56022	1.000	0.66754	1.000	0.87730
	Bayes.gamma	0.897	0.27807	0.948	**0.33135**	0.990	0.43546
	Bayes.chis	0.893	0.27857	0.947	0.33194	0.991	0.43624
	Bayes.exp	0.894	0.27862	0.948	0.33200	0.990	0.43632
	MCMC	0.890	**0.27831**	0.947	0.33191	0.992	**0.43543**
	Bayes.MCMC	0.897	0.27832	0.948	0.33159	0.990	0.43589

หมายเหตุ : ขีดเส้นใต้ หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

"-" หมายถึง ไม่พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เนื่องจากให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

ตัวหนา หมายถึง ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในแต่ละสถานการณ์โดยแยกตามระดับความเชื่อมั่น

จากตารางที่ 4.14 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ เมื่อ $\lambda = 2$ และ $\alpha = 8$ ผลการวิจัยที่ได้ มีดังนี้

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณ

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดในทุกสถานการณ์

พิจารณาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50 และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดในทุกสถานการณ์
- ระดับความเชื่อมั่น 99% พบว่า วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50 และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นแคบที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การศึกษาในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงแกมมา ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

สำหรับการประมาณค่าแบบจุด ผู้วิจัยทำการทดสอบสมมติฐานการเท่ากันระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด โดยใช้การทดสอบที และสำหรับการประมาณค่าแบบช่วง ผู้วิจัยได้ทำการตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการประมาณและทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น เพื่อหาวิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดในแต่ละสถานการณ์ ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่ได้จากการประมาณค่าแบบจุดและแบบช่วง สำหรับพารามิเตอร์ λ ของการแจกแจงแกมมาด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ ได้สรุปไว้ในตารางที่ 5.1 – 5.4 โดยมีสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ มีดังนี้

- ML แทน วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด
- Bayes.gamma แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1)
- Bayes.chis แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4)
- Bayes.exp แทน วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2)
- MCMC แทน วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ
- Bayes.MCMC แทน วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ

ตารางที่ 5.1 สถานการณ์ที่วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด เมื่อระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01

n	วิธีประมาณ	α (พารามิเตอร์รูปร่าง)						
		2	3	4	5	6	7	8
30	ML				✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis							
	Bayes.exp							
	MCMC				✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC				✓	✓	✓	✓
50	ML			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis						✓	
	Bayes.exp					✓	✓	✓
	MCMC			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC			✓	✓	✓	✓	✓
70	ML	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis					✓	✓	✓
	Bayes.exp					✓	✓	✓
	MCMC	✓		✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC		✓	✓	✓	✓	✓	✓

หมายเหตุ : ✓ คือ วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด

จากตารางที่ 5.1 วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ($\lambda = 2$) ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 มีดังนี้

- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 2$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 3$) ได้แก่ วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 4$) ได้แก่ วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 5$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 50 และ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 6$) ได้แก่ วิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 7$) ได้แก่ วิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 8$) ได้แก่ วิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50

ตารางที่ 5.2 สถานการณ์ที่วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด เมื่อระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05

n	**วิธีประมาณ**	α (พารามิเตอร์รูปร่าง)						
		2	3	4	5	6	7	8
30	ML					✓	✓	
	Bayes.gamma					✓	✓	
	Bayes.chis							
	Bayes.exp							
	MCMC					✓	✓	
	Bayes.MCMC					✓	✓	✓
50	ML			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis							
	Bayes.exp					✓	✓	
	MCMC			✓	✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC				✓	✓	✓	✓
70	ML				✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma				✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis							
	Bayes.exp					✓	✓	✓
	MCMC				✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC			✓	✓	✓	✓	✓

<u>**หมายเหตุ**</u> : ✓ คือ วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด

จากตารางที่ 5.2 วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ($\lambda = 2$) ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 มีดังนี้

- **ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 2$ และ 3) ไม่มีวิธีการประมาณใดที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด**

- **ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 4$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70**
- **ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 5$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70**
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 6$ และ 7) ได้แก่ วิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 8$) ได้แก่ วิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 วิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และวิธีการประมาณเกือบทุกวิธี ยกเว้นวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงไคกำลังสอง (4) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

ตารางที่ 5.3 สถานการณ์ที่วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด เมื่อระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10

n	**วิธีประมาณ**	α (พารามิเตอร์รูปร่าง)						
		2	3	4	5	6	7	8
30	ML							
	Bayes.gamma							
	Bayes.chis							
	Bayes.exp							
	MCMC							
	Bayes.MCMC							
50	ML				✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma				✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis							
	Bayes.exp							
	MCMC				✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC					✓	✓	✓
70	ML				✓	✓	✓	✓
	Bayes.gamma				✓	✓	✓	✓
	Bayes.chis							
	Bayes.exp						✓	
	MCMC				✓	✓	✓	✓
	Bayes.MCMC				✓	✓	✓	✓

หมายเหตุ : ✓ คือ วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด

จากตารางที่ 5.3 วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ($\lambda = 2$) ที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 มีดังนี้

- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 2$ 3 และ 4) ไม่มีวิธีการประมาณใดที่ให้ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 5$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธี

ภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70

- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 6$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 7$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70
- ที่พารามิเตอร์ ($\alpha = 8$) ได้แก่ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ และวิธีของเบส์จากมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 และ 70

เมื่อนำตัวประมาณที่ให้ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดมาเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่น จะได้วิธีประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบที่สุด โดยผลที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.4 ซึ่งแยกตามระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดไว้ ดังนี้

ตารางที่ 5.4 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบที่สุด ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% 95% และ 99% ตามลำดับ

n	α	ระดับความเชื่อมั่น		
		90%	95%	99%
30	2	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	3	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	4	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	5	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	6	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	7	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	8	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
50	2	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	3	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	4	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	5	Bayes.gamma	Bayes.exp	MCMC
	6	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	7	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	8	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
70	2	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	3	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	4	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	5	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	6	Bayes.gamma	Bayes.gamma	Bayes.gamma
	7	Bayes.gamma	Bayes.gamma	ML
	8	MCMC	Bayes.gamma	MCMC

จากตารางที่ 5.4 วิธีการประมาณที่ให้ค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบที่สุด โดยแยกตามระดับช่วงความเชื่อมั่น มีดังนี้

- ที่ระดับความเชื่อมั่น 90% ได้แก่ วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50 และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ได้แก่ วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 50 และ 70 และวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (0.2) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 กับค่าพารามิเตอร์ $\alpha = 5$
- ที่ระดับความเชื่อมั่น 99% ได้แก่ วิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา (2,1) เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 50 และ 70 วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 กับ ค่าพารามิเตอร์ $\alpha = 5$ และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70 กับค่าพารามิเตอร์ $\alpha = 8$ และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 70 กับค่าพารามิเตอร์ $\alpha = 7$

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ด้านการนำไปใช้ประโยชน์

เมื่อต้องการทำการประมาณค่าแบบจุด สามารถใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้ เพราะเป็นวิธีที่ใช้กันแพร่หลายในการประมาณค่าพารามิเตอร์และมีการคำนวณที่ง่าย ซึ่งควรใช้ขนาดตัวอย่างที่มีค่าเท่ากับ 50 และ 70 ในการประมาณค่า เพราะผลที่ได้จากการประมาณจะไม่แตกต่างไปจากค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด ถ้าต้องการใช้วิธีของเบส์ แต่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน สามารถเลือกใช้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟแทนได้

เมื่อต้องการทำการประมาณค่าแบบช่วง โดยส่วนใหญ่วิธีของเบส์จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่แคบที่สุด เนื่องจากเป็นวิธีที่นำความรู้เดิมที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์มาใช้ให้เป็นประโยชน์ จึงทำให้การประมาณช่วงความเชื่อมั่นดีกว่าวิธีการอื่นๆ แต่ถ้าหากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อน สามารถใช้วิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟแทนได้

5.2.2 ด้านการศึกษาวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สนใจศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแกมมา โดยใช้วิธีการประมาณอื่นๆ เช่น วิธีสคอร์และวิธีบูทแสตรป เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

ประชุม สุวัตถี. 2553. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สำนักงานกิจการโรงองค์การสงเคราะห์ทหารผ่านศึก.

อาทิตย์ เทศขำ. 2559. "การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเลขชี้กำลังด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด วิธีของเบส์ และวิธีมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ". วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Gamerman, D. 1997. Markov Chain Monte Carlo : stochastic simulation for Bayesian inference, Chapman & Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.

Araveeporn, A. 2014. "Parameter Estimation of Poisson Distribution by Using Maximum Likelihood, Markov Chain Monte Carlo, and Bayes methods". Thammasat International Journal of Science and Technology. 19(3): 1-14.

Araveeporn, A. 2015. "The Interval Estimation of Poisson Distribution by Using Maximum Likelihood, Markov Chain Monte Carlo, and Bayes methods". 36-42. in **International Conference on Applied Statistics 2015.** Pattaya, Thailand.

Thetkham, A. and Araveeporn, A. 2016. "A Comparison of Parameter Estimation of Exponential Distribution Using Maximum Likelihood, Bayes, and Markov Chain Monte Carlo methods". 55-61. in **International Conference on Applied Statistics 2016.** Phuket, Thailand.

Araveeporn, A. 2016. "The Interval Estimation for the Mean of Normal Distribution by Markov Chain Monte Carlo method". 1-6. in **International Conference on Applied Statistics 2016.** Phuket, Thailand.

Pradhan, B. and Kundu, D. 2011. "Bayes estimation and prediction of the two-parameter gamma distribution". Journal of Statistical Computation and Simulation. 81(9): 1187-1198.

Son, Y.S. and Oh, M. 2006. "Bayesian Estimation of Two-Parameter Gamma Distribution". Communications in Statistics-Simulation and Computation. 35(2): 285-293.

Kirimi, E., Ouko, A. and Kipkoech, C.W. 2014. "Modified Moment Estimation for a Two Parameter Gamma Distribution". IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM). 10(6): 42-50.

สายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2555. **ความน่าจะเป็น.** ฉบับปรับปรุงครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : จามจุรีโปรดักท์.

สายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2554. **สถิติคณิตศาสตร์ 1. พิมพ์ครั้งที่** 5. กรุงเทพฯ : จามจุรีโปรดักท์.

น้อมจิต กิตติโชติพาณิชย์. 2558. **เอกสารประกอบการสอนวิชาสถิติคณิตศาสตร์** 1. คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

อัชฌา อระวีพร. 2555. การวิเคราะห์เบส์จากโปรแกรมวินบั๊กสู่โปรแกรมอาร์. วารสารมหาวิทยาลัยนเรศวร: วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 9(1), 30-44.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในงานวิจัย

คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจุด

```
m=1000
n=30
alpha=2
lambda=2
a1=2; b1=1
a2=2; b2=0.5
a3=1; b3=0.2
mle=c()
alpha1=c()
beta1=c()
bayes_mcmc=c()
mcmc=c()
bayes.gamma=c()
bayes.chis=c()
bayes.exp=c()
set.seed(9)
for(j in 1:m){
x=rgamma(n,alpha,rate=lambda)
mle[j]=alpha/mean(x)
bayes.gamma[j]=((n*alpha)+a1)/((n*mean(x))+b1)
bayes.chis[j]=((n*alpha)+a2)/((n*mean(x))+b2)
bayes.exp[j]=((n*alpha)+a3)/((n*mean(x))+b3)
```

<u>**คำสั่งสำหรับสร้างตัวประมาณมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ**</u>

```
library(rjags)
dataset=list(x=x,n=n,alpha=alpha)
inits=list(lambda=2, alpha1 = 1, beta1 = 1)
jagmod <- jags.model('model.txt',data = dataset,inits = inits,n.chains = 1,n.adapt =
1000)
update(jagmod, n.iter=5000, progress.bar="text")
posterior = coda.samples(jagmod, c("lambda" , "alpha1", "beta1"),
n.iter=5000,progress.bar="text",thin=10)
```

```
post=as.data.frame(as.matrix(posterior))
mcmc[j]=mean(post$lambda)
alpha1[j]=mean(post$alpha1)
beta1[j]=mean(post$beta1)
bayes_mcmc[j]=((n*alpha)+alpha1)/((n*mean(x))+beta1)
cat(c("loop :",j),fill=T)
}
```

<u>คำสั่งสำหรับการทดสอบที (t-test)</u>

```
t.test(mle, mu=lambda)
sd1=sd(mle)
sd1
mu1 = mean(mle)
t.test(bayes_mcmc, mu=lambda)
sd2=sd(bayes_mcmc)
sd2
mu2 = mean(bayes_mcmc)
t.test(mcmc, mu=lambda)
sd3=sd(mcmc)
sd3
mu3 = mean(mcmc)
t.test(bayes.gamma, mu=lambda)
sd4=sd(bayes.gamma)
sd4
mu4 = mean(bayes.gamma)
t.test(bayes.chis, mu=lambda)
sd5=sd(bayes.chis)
sd5
mu5 = mean(bayes.chis)
t.test(bayes.exp, mu=lambda)
sd6=sd(bayes.exp)
sd6
mu6 = mean(bayes.exp)
cat('\tn = ' , n, '\talpha = ', alpha, '\tM = ', m,'\tlambda = ', lambda,'\n',
```

```
'\tmle.mean = ' , mu1, '\tmle.sd = ', sd1, '\tStatistic = ' , t.test(mle,
mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(mle, mu=lambda)$p.value, '\n',
'\tbayes_mcmc.mean = ' , mu2, '\tbayes_mcmc.sd = ', sd2, '\tStatistic = ' ,
t.test(bayes_mcmc, mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(bayes_mcmc,
mu=lambda)$p.value, '\n',
'\tmcmc.mean = ' , mu3, '\tmcmc.sd = ', sd3, '\tStatistic = ' , t.test(mcmc,
mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(mcmc, mu=lambda)$p.value, '\n',
'\tbayes.gamma.mean = ' , mu4, '\tbayes.gamma.sd= ', sd4, '\tStatistic = ' ,
t.test(bayes.gamma, mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(bayes.gamma,
mu=lambda)$p.value, '\n',
'\tbayes.chis.mean = ' , mu5, '\tbayes.chis.sd = ', sd5, '\tStatistic = ' , t.test(bayes.chis,
mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(bayes.chis, mu=lambda)$p.value, '\n',
'\tbayes.exp.mean = ' , mu6, '\tbayes.exp.sd = ', sd6, '\tStatistic = ' , t.test(bayes.exp,
mu=lambda)$statistic, '\tPvalue = ', t.test(bayes.exp, mu=lambda)$p.value, '\n')
output_MLE=data.frame(mle,bayes_mcmc,mcmc,bayes.gamma,bayes.chis,bayes.exp)
write.table(output_MLE,file="gamma_n30_alpha2_2.txt,",sep="\t",row,name=FALSE)
```

คำสั่งโปรแกรมอาร์ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วง

```
m <- 1000
n <- 30
alpha <- 2
lambda <- 2
a1 <- 2 ; b1 <- 1
a2 <- 2 ; b2 <- 0.5
a3 <- 1 ; b3 <- 0.2
alpha11 <- 0.1
conf.cv <- 0.8814
mle = rep(0,m); var.mle = rep(0,m)
bayes.gamma = rep(0,m); var.bayes.gamma = rep(0,m)
bayes.chis =rep(0,m); var.bayes.chis = rep(0,m)
bayes.exp = rep(0,m); var.bayes.exp = rep(0,m)
mcmc = rep(0,m); var.mcmc = rep(0,m)
bayes_mcmc = rep(0,m); var.bayes_mcmc = rep(0,m)
lower.mle = rep(0,m); upper.mle = rep(0,m)
lower.bayes.gamma = rep(0,m); upper.bayes.gamma = rep(0,m)
lower.bayes.chis = rep(0,m); upper.bayes.chis= rep(0,m)
lower.bayes.exp = rep(0,m); upper.bayes.exp = rep(0,m)
lower.mcmc = rep(0,m); upper.mcmc = rep(0,m)
lower.bayes_mcmc = rep(0,m); upper.bayes_mcmc = rep(0,m)
temp.mle = rep(0,m)
temp.bayes.gamma = rep(0,m)
temp.bayes.chis = rep(0,m)
temp.bayes.exp = rep(0,m)
temp.mcmc = rep(0,m)
temp.bayes_mcmc = rep(0,m)
length.mle = rep(0,m)
length.bayes.gamma = rep(0,m)
length.bayes.chis = rep(0,m)
length.bayes.exp = rep(0,m)
```

```
length.mcmc = rep(0,m)
length.bayes_mcmc = rep(0,m)
for(j in 1:m)
{x <- rgamma(n,alpha,rate=lambda)
mle[j] <- alpha/mean(x)
var.mle[j] <- ((n^2)*(alpha*alpha*alpha*alpha))/((((n*alpha)-1)^2)*((n*alpha)-2)*((mean(x)^2)))
bayes.gamma[j] <- ((n*alpha)+a1)/((n*mean(x))+b1)
var.bayes.gamma[j] <- ((n*alpha)+a1)/(((n*mean(x))+b1)^2)
bayes.chis[j] <- ((n*alpha)+a2)/((n*mean(x))+b2)
var.bayes.chis[j] <- ((n*alpha)+a2)/(((n*mean(x))+b2)^2)
bayes.exp[j] <- ((n*alpha)+a3)/((n*mean(x))+b3)
var.bayes.exp[j] <- ((n*alpha)+a3)/(((n*mean(x))+b3)^2)
alpha111=alpha
```

<u>คำสั่งสำหรับสร้างตัวประมาณมอนติคาร์โลโซ่มาร์คอฟ</u>

```
library(rjags)
dataset=list(x=x,n=n,alpha=alpha111)
inits=list(lambda=lambda, alpha1 = 1, beta1 = 1)
jagmod <- jags.model('model.txt',data = dataset,inits = inits,n.chains = 1,n.adapt = 1000)
update(jagmod, n.iter=5000, progress.bar="text")
posterior = coda.samples(jagmod, c("lambda" , "alpha1", "beta1"),
n.iter=5000,progress.bar="text",thin=10)
post=as.data.frame(as.matrix(posterior))
mcmc[j] = mean(post$lambda)
alpha1[j] = mean(post$alpha1)
beta1[j] = mean(post$beta1)
bayes_mcmc[j]=((n*alpha)+alpha1)/((n*mean(x))+beta1)
var.mcmc[j] = var(post$lambda)
var.bayes_mcmc[j] <- ((n*alpha)+alpha1)/(((n*mean(x))+beta1)^2)
```

คำสั่งสำหรับสร้างขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น ของตัวประมาณค่าในแต่ละวิธี

```
lower.mle[j] <- (((n*alpha111)-1)/(n*mean(x)))-qnorm(1-
alpha11/2)*sqrt(1/((n*alpha111)-2))*(mle[j]^2)
upper.mle[j] <- (((n*alpha111)-1)/(n*mean(x)))+qnorm(1-
alpha11/2)*sqrt(1/((n*alpha111)-2))*(mle[j]^2)
lower.bayes.gamma[j] <- bayes.gamma[j]-qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes.gamma[j])
upper.bayes.gamma[j] <- bayes.gamma[j]+qnorm(1-
alpha11/2)*sqrt(var.bayes.gamma[j])
lower.bayes.chis[j] <- bayes.chis[j]-qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes.chis[j])
upper.bayes.chis[j] <- bayes.chis[j]+qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes.chis[j])
lower.bayes.exp[j] <- bayes.exp[j]-qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes.exp[j])
upper.bayes.exp[j] <- bayes.exp[j]+qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes.exp[j])
lower.mcmc[j] <- mcmc[j]-qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.mcmc[j])
upper.mcmc[j] <- mcmc[j]+qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.mcmc[j])
lower.bayes_mcmc[j] <- bayes_mcmc[j]-qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes_mcmc[j])
upper.bayes_mcmc[j] <- bayes_mcmc[j]+qnorm(1-alpha11/2)*sqrt(var.bayes_mcmc[j])
if((lambda >=lower.mle[j]) & (lambda <=upper.mle[j])) {temp.mle[j] <- 1}
if((lambda >=lower.bayes.gamma[j]) & (lambda <=upper.bayes.gamma[j]))
{temp.bayes.gamma[j] <- 1}
if((lambda >=lower.bayes.chis[j]) & (lambda <=upper.bayes.chis[j])) {temp.bayes.chis[j]
<- 1}
if((lambda >=lower.bayes.exp[j]) & (lambda <=upper.bayes.exp[j])) {temp.bayes.exp[j]
<- 1}
if((lambda >=lower.mcmc[j]) & (lambda <=upper.mcmc[j])) {temp.mcmc[j] <- 1}
if((lambda >=lower.bayes_mcmc[j]) & (lambda <=upper.bayes_mcmc[j]))
{temp.bayes_mcmc[j] <- 1}
length.mle[j] <-upper.mle[j]-lower.mle[j]
length.bayes.gamma[j] <-upper.bayes.gamma[j]-lower.bayes.gamma[j]
length.bayes.chis[j] <-upper.bayes.chis[j]-lower.bayes.chis[j]
length.bayes.exp[j] <-upper.bayes.exp[j]-lower.bayes.exp[j]
length.mcmc[j] <-upper.mcmc[j]-lower.mcmc[j]
length.bayes_mcmc[j] <-upper.bayes_mcmc[j]-lower.bayes_mcmc[j]
```

```
cat(c("loop:",j),fill=T)
}
conf.mle = mean(temp.mle)
conf.bayes.gamma = mean(temp.bayes.gamma)
conf.bayes.chis = mean(temp.bayes.chis)
conf.bayes.exp = mean(temp.bayes.exp)
conf.mcmc = mean(temp.mcmc)
conf.bayes_mcmc = mean(temp.bayes_mcmc)
if(conf.mle>=conf.cv)
{width.mle <-mean(length.mle)}
if(conf.mle < conf.cv)
{width.mle <-c("-")}
if(conf.bayes.gamma>=conf.cv)
{width.bayes.gamma <-mean(length.bayes.gamma)}
if(conf.bayes.gamma < conf.cv)
{width.bayes.gamma <-c("-")}
if(conf.bayes.chis>=conf.cv)
{width.bayes.chis <-mean(length.bayes.chis)}
if(conf.bayes.chis < conf.cv)
{width.bayes.chis <-c("-")}
if(conf.bayes.exp>=conf.cv)
{width.bayes.exp <-mean(length.bayes.exp)}
if(conf.bayes.exp < conf.cv)
{width.bayes.exp <-c("-")}
if(conf.mcmc>=conf.cv)
{width.mcmc <-mean(length.mcmc)}
if(conf.mcmc < conf.cv)
{width.mcmc <-c("-")}
if(conf.bayes_mcmc>=conf.cv)
{width.bayes_mcmc <-mean(length.bayes_mcmc)}
if(conf.bayes_mcmc < conf.cv)
{width.bayes_mcmc <-c("-")}
```

```
cat('\tn = ',n,'\talpha = ',alpha,'\tlambda = ',lambda,'\talpha11 = ',alpha11,'\tconfidence coef = ',conf.cv,'\n',
'\tconf mle = ', conf.mle,'\tconf bayes.gamma = ', conf.bayes.gamma,'\tconf bayes.chis = ', conf.bayes.chis,
'\tconf bayes.exp = ', conf.bayes.exp,'\tconf mcmc = ', conf.mcmc,'\tconf bayes_mcmc = ', conf.bayes_mcmc,'\n',
'\twidth mle = ', width.mle,'\twidth bayes.gamma = ', width.bayes.gamma,'\twidth bayes.chis = ', width.bayes.chis,
'\twidth bayes.exp = ', width.bayes.exp,'\twidth mcmc = ', width.mcmc,'\twidth bayes_mcmc = ', width.bayes_mcmc,'\n')
output_interval=data.frame(n,alpha,lambda,conf.mle,width.mle,conf.bayes.gamma,width.bayes.gamma,conf.bayes.chis,width.bayes.chis,
conf.bayes.exp,width.bayes.exp,conf.mcmc,width.mcmc,conf.bayes_mcmc,width.bayes_mcmc)
write.table(output_interval,"Gamma_Interval_n30_alpha2_0.1.txt",sep="\t",row.name=FALSE)
```

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นางสาวฉัตรวดี กิจแก้ว
วัน เดือน ปีเกิด	13 กุมภาพันธ์ 2535
ที่อยู่ปัจจุบัน	29/5 หมู่ที่ 5 ต.แพรกษาใหม่ อ.เมืองสมุทรปราการ จ.สมุทรปราการ 10280
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ เกรดเฉลี่ย 3.23 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาสถิติประยุกต์ เกรดเฉลี่ย 3.77 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ผลงานทางวิชาการ	1. Kitkeaw, C. and Araveeporn A. 2017. A Comparison of Parameter Estimation of Gamma Distribution by Maximum Likelihood, Bayes', and Markov chain Monte Carlo Methods. PROCEEDINGS International Conference on Applied Statistics 2017.