

การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n - 2)$ ภาค แบบ Posicast+ Feed Forward สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

POSICAST + FEED FORWARD PID $\times (n - 2)$ STAGE PD CASCADE CONTROLLERS FOR MAGNETICALLY LEVITATION SYSTEM



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2560
KMITL-2017-EN-M-257-134

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n - 2)$ ภาค แบบ Posicast+ Feed Forward สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

POSCAST + FEED FORWARD PID $\times (n - 2)$ STAGE PD CASCADE CONTROLLERS FOR MAGNETICALLY LEVITATION SYSTEM



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2560
KMUTL-2017-EN-M-257

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**POSICAST + FEED FORWARD PID \times ($n - 2$) STAGE PD CASCADE CONTROLLERS
FOR MAGNETICALLY LEVITATION SYSTEM**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN AUTOMATION ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2017
KMUTL-2017-EN-M-257-134**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2017

FACULTY OF ENGINEERING

KING MON GKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n-2)$ ภาค แบบ Posicast + Feed Forward สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

Thesis Title Posicast + Feed Forward PID \times $(n-2)$ Stage PD Cascade Controllers for Magnetically Levitation System

นักศึกษา นายภาณุพงศ์ สุรินทร์ามนต์

รหัสประจำตัว 55613606

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมอัตโนมัติ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อ.ดร.ประคอง อัครคิมาพันธ์

หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2017-EN-M-2574-34

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เชิดพงษ์ ดิเลศไพบลีย์	
รศ.ดร.ไสว พงศ์สวัสดิ์	
รศ.ดร.ธนิตย์ ตระสจรรณวัฒน์	
รศ.ดร.พิทยา ปานนิล	
รศ.ประภาส อัครคิมาพันธ์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันศุกร์ที่ 7 กรกฎาคม พ.ศ. 2560 เวลา 10.00-12.00 น.
สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 5 ห้องประชุม 4

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร. คมสัน มาลีสี)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น **ฉบับตีพิมพ์ คณะวิศวกรรมศาสตร์** ชั้นด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างวันที่ 7 กรกฎาคม พ.ศ. 2560 ระบุไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n-2)$ ภาค แบบ Posicast + Feed Forward สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก
นักศึกษา	นายภาณุพงศ์ สุรินทรามนต์
รหัสประจำตัว	55613606
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอัตโนมัติ
พ.ศ.	2560
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ประภาส อุดคคิมาพันธ์

บทคัดย่อ

เมื่อ plant ที่จะถูกควบคุมด้วยระบบอันดับ 3 หรือสูงกว่า n^{th} ระบบ PID $\times (n-2)$ stage PD cascade controller เป็นสิ่งเหมาะสมที่จะนำมาประยุกต์ใช้ แสดงว่าระบบควบคุมเมื่อที่จะแสดงถึงคุณสมบัติที่ดีของตัวควบคุมนี้ ในผลงานวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกระบบการลอยตัวแม่เหล็กซึ่งไม่เสถียรภาพมาเป็นตัวอย่างของ plant ที่ต้องการควบคุมให้มีเสถียรภาพได้ โดยการเพิ่ม zero ในการออกแบบด้วยเทคนิคนี้ ซึ่งระบบการควบคุมทั้งหมดสามารถประมาณการให้เป็นระบบมาตรฐานอันดับที่ 2 เพื่อที่จะใช้ตัวควบคุม Posicast + Feed forward controller เพื่อที่จะได้ผลตอบสนองที่ไม่เกิดการ overshoot ในขั้นตอนสุดท้าย

Title	Posicast + Feed Forward PID $\times(n-2)$ Stage PD Cascade Controllers for Magnetically Levitation System
Student	Mr.Panupong Surintramon
Student ID.	55613606
Degree	Master of Engineering
Program	Automation Engineering
Year	2017
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Prapart Ukakimaparn

ABSTRACT

When a plant to be controlled is third or higher n^{th} order, the PID $\times(n-2)$ stage PD cascade controllers are very suitably to be applied for. To show off the advantages of these controllers, the Magnetically-Levitation plant is then selected as an example of unstable plant to be stabilized and control. By placing the controller zeros in this design technique. The overall controlled system can be approximated as a standard second order system prompt for design the Posicast + Feed forward controller to obtain the output response with no overshoot in the last step.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.กิตติ ตีระเศรษฐ์ ที่ให้ใช้วิธีการจัดการของกิตติ เมธอด (Kitti's Method) ตัวควบคุมแบบ Posicast + Feed Forward PID $\times (n-2)$ Stage PD Cascade Controllers for Magnetically Levitation System ซึ่งมีค่าอย่างยิ่งต่อการออกแบบระบบควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถต่อยอดนำไปสู่งานวิจัยเรื่องอื่นๆต่อไปได้ ดังงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก รศ.ดร.ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะและช่วยแก้ปัญหาต่าง ๆ ตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า

ขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ประภาส อุดคคกิม่าพันธุ์ และ รศ.ดร.พิทยา ปานนิล ที่ให้ความช่วยเหลือและแนะนำจนในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติทุกท่าน ที่คอยช่วยให้คำแนะนำและให้คำปรึกษาแก่ข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาในการศึกษาปริญญาโท

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุมทุกท่าน ที่คอยช่วยให้คำแนะนำและให้ความรู้ทางด้านวิศวกรรมแก่ตัวข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาในการศึกษาปริญญาตรี

ขอขอบคุณ บริษัท วีอาร์มาสเตอร์ จำกัด และ บริษัท วีอาร์เอ็ม โซลูชั่น จำกัด ที่มอบประสบการณ์ในการทำงานและความรู้ในทางสายอาชีพทางด้านวิศวกรรมให้แก่ข้าพเจ้า

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดามารดา ซึ่งเป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

ภาณุพงศ์ สุรินทรามนต์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย.....	1
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.5 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์.....	2
บทที่ 2 หลักการควบคุม PID.....	3
2.1 การปรับตั้งค่าด้วยวิธีของซีเกลอร์-นิโคลส์สำหรับตัวควบคุมพีไอดี.....	3
2.1.1 การปรับตั้งค่าด้วยวิธีของซีเกลอร์-นิโคลส์สำหรับตัวควบคุมพีไอดี วิธีที่แรก.....	4
2.1.2 การปรับตั้งค่าด้วยวิธีของซีเกลอร์-นิโคลส์สำหรับตัวควบคุมพีไอดี วิธีที่สอง.....	6
2.2 กฎทั่วไปสำหรับการสร้าง root loci.....	7
2.2.1 จุด $K=0$	8
2.2.2 จุด $K = \pm\infty$	9
2.2.3 จำนวนแขนงของ root loci	10
2.2.4 การสมมาตรของ root loci	10
2.2.5 เส้น asymptotes ของ root loci เมื่อ σ เข้าหาอินฟินิตี้	12
2.2.6 จุดตัดของเส้น asymptotes (จุด centroid)	15
2.2.7 root loci บนแกน real	17
2.2.8 มุมที่ออกจากและมุมที่เข้าหา	18
2.2.9 จุดตัดของ root loci กับแกน imaginary.....	20
2.2.10 จุด breakaway (จุด saddle)	22
2.2.11 การคำนวณหาค่า K บน root loci	26
2.3 Kitti's Method.....	26
2.3.1 โครงสร้างของระบบควบคุม 2-DOF.....	26
2.3.2 กระบวนการออกแบบ.....	27
2.3.3 ผลกระทบ Output Disturbance.....	29

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.3.4 ผลลัพธ์ของการจำลองทางคณิตศาสตร์.....	30
2.3.5 บทสรุป.....	33
2.4 การออกแบบระบบควบคุมการลอยตัวแม่เหล็ก.....	34
2.4.1 การวิเคราะห์ระบบ.....	34
2.4.2 เทคนิคการชดเชย.....	36
2.4.3 การออกแบบระบบและการทดลอง.....	39
2.4.4 สรุปการลอยตัวแม่เหล็ก.....	42
2.5 หลักการ Posicast PID.....	42
2.5.1 State Transition Equation ของระบบ Second-order.....	42
บทที่ 3 การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n-2)$ ภาค แบบ Posicast + Feed Forward สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก.....	46
3.1 กล่าวนำ.....	46
3.2 แนวคิดในการออกแบบ.....	47
3.2.1 แบบจำลอง.....	47
3.2.1 ออกแบบตัวควบคุม.....	47
3.3 ผลลัพธ์การจำลอง.....	51
บทที่ 4 บทสรุป.....	55
4.1 สรุปผลวิจัย.....	55
กิตติกรรมประกาศ.....	56
เอกสารอ้างอิง.....	57
ภาคผนวก.....	58
ภาคผนวก ก.....	59
ประวัติผู้เขียน.....	65

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 การปรับแต่งค่าซีเกลอร์-นิโคลส์บนผลตอบสนองอยู่ตัวของ plant.....	5
2.2 การปรับตั้งค่าซีเกลอร์-นิโคลส์บนค่าวิกฤต K_{cr} และระยะวิกฤต P_{cr}	6
2.3 พารามิเตอร์สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก.....	38



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ตัวควบคุมแบบ PID ของ Plant.....	3
2.2 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นบันไดขนาดหนึ่งหน่วยของ Plant.....	4
2.3 ผลตอบสนองเส้นโค้งรูปตัว S	4
2.4 close loop ของ ระบบ proportional.....	6
2.5 การแกว่งอย่างต่อเนืองด้วยคาบเวลา P_{cr}	6
2.6 จุดที่ $K = 0$ บน root loci ที่สมบรูณ์สำหรับสมการ (2.5).....	9
2.7 จุดที่ $K = \pm \infty$ บน root loci ที่สมบรูณ์สำหรับสมการ (2.8).....	10
2.8 Root loci สำหรับสมการ (2.12) แสดงถึงการสมมาตรกัน.....	11
2.9 Root loci ของสมการ (2.14).....	12
2.10 เส้น asymptotes ของ root loci ที่สมบรูณ์ของ (2.36).....	17
2.11 คุณสมบัติของ root loci บนแกน real.....	19
2.12 Root loci ที่สมบรูณ์ของ $s(s+3)(s^2+2s+s)+K=0$ แสดงถึงวิธีการหามุมที่ ออกจาก pole หรือมุมที่เข้าหา zero	20
2.13 ตัวอย่างของจุด breakaway บนแกน real ในระนาบ s	21
2.14 จุด breakaway ที่แสดงถึงรากซ้ำ 4 ราก.....	22
2.15 Root loci ของ $s(s+2)+K(s+4)=0$	25
2.16 root locus ของระบบ close loop.....	31
2.17 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 0"	31
2.18 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 1".....	32
2.19 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 0" ที่ไม่ปรับค่าพารามิเตอร์และปรับ..... ค่าพารามิเตอร์ $\pm 25\%$	33
2.20 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 0" ที่ไม่ปรับค่าพารามิเตอร์และปรับ..... ค่าพารามิเตอร์ $\pm 25\%$	33
2.21 ระบบควบคุมการลอยตัวแม่เหล็ก.....	34
2.22 บล็อกไดอะแกรมของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก.....	36
2.23 System's dimension (mm.).....	37
2.24 ระบบทาง root locus (อัตราขยายคงที่).....	37
2.25 ระบบ root locus (ด้วยวงจรถดเชยเฟสแบบนำหน้า).....	39
2.26 วงจรไฟฟ้าของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก.....	39
2.27 ออกแบบขนาดของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก (mm).....	40
2.28 วงจร Lead Compensator.....	40
2.29 ระบบการลอยแม่เหล็กของจริง.....	41

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.30 ระบบตอบสนองขั้นบันไดจากการทดลอง.....	41
2.31 STSFG ของระบบควบคุมป้อนกลับอันดับ 2 (second-order).....	42
2.32 รูปสัญญาณ input ที่เป็น step function สอง step.....	45
2.33 output response ของ รูป 2.32.....	45
3.1 โครงสร้างของระบบควบคุม 2-DOF.....	46
3.2 SIMULINK diagram.....	46
3.3 ขั้นตอนของการออกแบบระบบควบคุมแบบดิจิทัล.....	47
3.4 root loci สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก.....	52
3.5 ขอบเขตเสถียรภาพ / ไม่เสถียรภาพ.....	52
3.6 root locus สำหรับระบบควบคุม.....	53
3.7 ผลตอบสนองสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย.....	54

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ตัวควบคุม PID (Proportional-Integral-Derivative) เหมาะสำหรับใช้ระบบอันดับ 2 เท่านั้น ไม่เหมาะที่จะใช้ควบคุมระบบอันดับ 3 หรือ สูงกว่า ได้มีการนำเสนอ การออกแบบตัวควบคุม PID $\times (n - 2)$ stage PD cascade controller โดยอาศัยเทคนิคของ root locus ในกรอบของเวลา ต่อเนื่อง (Continuoustime) [1] การออกแบบตามต้นฉบับดั้งเดิมของอาจารย์กิตติ มีจุดมุ่งหมาย เพื่อให้ได้รับ รายละเอียดเฉพาะ (specifications) ที่ต้องการได้รับ โดยปราศจากการลองผิดลองถูก ด้วยเหตุนี้ตัวควบคุมแบบ forward จึงนำมาใช้เพื่อลด overshoot ที่สูงกว่าปกติ ทำให้โครงสร้างระบบกลายเป็นระบบ 2-DOF (two degree of freedom) โดยการวาง zeros ของตัวควบคุมที่ ออกแบบตามแนวทางของอาจารย์กิตติ จึงระบบควบคุมโดยรวมทั้งหมด ประมาณได้เป็นระบบ อันดับสองแบบมาตรฐาน จากผลตอบสนองของ output ต่อ สัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step) ของระบบอันดับสองแบบมาตรฐาน overshoot สูงสุดจะเกิดอยู่ที่ peak time แรก ด้วยขนาด $1 + Mp$ ตอนนี้ถ้าสัญญาณขั้นบันไดขนาดหนึ่งหน่วย ปรับรูปทรงใหม่ (reshaped) ออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกเป็นสัญญาณขั้นบันไดที่มีขนาด $1/(1 + Mp)$ ณ เวลา $t = 0$ ส่วนที่สองเป็นสัญญาณขั้นบันไดที่มีขนาด $Mp/(1 + Mp)$ และ ประวิง (delay) ด้วยเวลา t_p ซึ่งเขียนได้ ด้วย e^{-t/t_p}

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

วิทยานิพนธ์นี้มุ่งเน้นในการแก้ปัญหาในระบบควบคุม PID (Proportional-Integral-Derivative) ที่มีการจัดการมากกว่าลำดับที่ 3 หรือมากกว่านั้น เพื่อลดปัญหาการเกิด overshoot โดยจะศึกษาจากการออกแบบพื้นฐานของ root locus และใช้จัดการ "Kitti's Method" ในการ ออกแบบระบบควบคุม (Controller design) และ Plant modeling ในระบบการลอยตัวแม่เหล็ก (Magnetically Levitation) ซึ่งจะอธิบายในส่วนที่ 3 และ 4 ตามลำดับ ในการทดสอบ ผลที่ได้จะใช้ ในการลดความผิดพลาดที่จะแก้ปัญหาการเกิดในระบบการจัดการมากกว่าลำดับที่ 3 หรือมากกว่านั้น

1.3 การนำเสนอหลักการใหม่ของวิทยานิพนธ์

จากการศึกษาผลงานวิจัยและสิ่งตีพิมพ์ทั้งในระดับชาติและระดับนานาชาติที่เกี่ยวข้องกับ กระบวนการของการจัดการที่มากกว่าลำดับที่ 2 หรือมากกว่านั้น มีการวิเคราะห์การใช้การจัดการ PID $\times (n - 2)$ stage PD cascade controller for SISO systems[1] และประยุกต์ใช้การจัดการ Posicast Control Past and Present[2] การควบคุม General Framework ของ Multirate Sampling และประยุกต์ใช้ระบบควบคุม Motion[3] การออกแบบและวิเคราะห์ระบบควบคุม

ใน plant modelling ของระบบ Magnetically Levitation [4] การออกแบบและการวิเคราะห์การวางตำแหน่ง pole และ zero [5] จากข้อมูลในข้างต้นจะใช้เป็นตัวอย่างและข้อมูลประกอบในการศึกษาปัญหาของการจัดการระบบ PID (Proportional-Integral-Derivative) ที่มากกว่าลำดับที่ 2 ขึ้นไปเนื่องจากจะเกิด overshoot โดยปริณญานิพนธ์นี้จะทำการทดลองและออกแบบเพื่อแก้สาเหตุของปัญหาต่างๆที่ทำให้เกิดการผิดพลาดในระบบ PID ที่มากกว่าลำดับที่ 2

1.4 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะนำเสนอปัญหาที่เกิดในระบบควบคุม PID (Proportional-Integral-Derivative) ที่มากกว่าลำดับที่ 2 โดยใช้โดยใช้เทคนิคการจัดการ "Kitti's Method" โดยการออกแบบพื้นฐานของ root locus ในระบบควบคุม PID ทั่วไปจะไม่สามารถควบคุมการจัดการที่มากกว่าลำดับที่ 2 ได้ซึ่งจะทำให้ระบบเกิดความไม่เสถียรภาพขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการศึกษากการแก้ไขปัญหาการเกิดความไม่เสถียรภาพของระบบ โดยที่จะทำการออกแบบการสมการและจำลองผลการทดลอง ในระบบ Magnetically Levitation โดยใช้ PID $\times (n-2)$ stage PD cascade ที่แปรผันตามตัวแปรที่กำหนดไว้ จากนั้นจะทำการวิเคราะห์ผลการทดลองโดยใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบ 2 ตัวแปร โดยการวางตำแหน่ง pole กับ zero ในการวิเคราะห์และผลการจำลองเป็นไปตามกราฟการทดลองและสมการที่ตั้งไว้ได้ของสมมุติฐานที่ตั้งไว้เกี่ยวกับผลกระทบของตัวแปรที่กำหนดไว้ต่อค่า overshoot ของระบบซึ่งจะเป็นตัวชี้บ่งว่าทำให้เกิดความไม่เสถียรภาพขึ้นในระบบ

1.5 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท ด้วยกันคือ

บทที่ 1 บทนำ เป็นการกล่าวถึง ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ การนำเสนอหลักการใหม่ของวิทยานิพนธ์ ขอบเขตของการวิจัย และรายละเอียดของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 เป็นการกล่าวถึง หลักการพื้นฐานของ PID $\times (n-2)$ stage PD cascade controller, Posicast Control Past and Present และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

บทที่ 3 เป็นการกล่าวถึง แนวทางในการทดลอง และการทดลอง simulation ใน root locus ของ plant modeling สำหรับ ระบบ Magnetically Levitation

บทที่ 4 เป็นการกล่าวถึง การวิเคราะห์ผลจากการทดลอง, สรุปผลที่ได้เทียบกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้

บทที่ 5 เป็นบทสุดท้ายที่กล่าวถึง บทสรุปและข้อเสนอแนะแนวทางการวิจัยต่อภาคผนวก ก ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

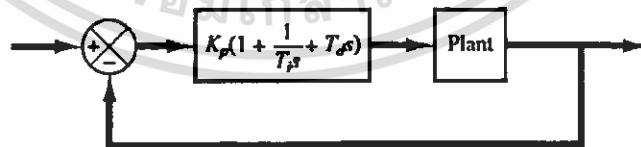
บทที่ 2

หลักการควบคุม PID

2.1 การปรับตั้งค่าด้วยวิธีของซีเกลอร์-นิโคลส์สำหรับตัวควบคุมPID

ระบบควบคุมแบบ PID สำหรับ plant ในรูปที่ 2.1 แสดงการควบคุมแบบ PID สำหรับ plant ถ้าเราสามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับ plant ได้ ก็มีความเป็นไปได้ที่จะประยุกต์หลากหลายเทคนิคการออกแบบในการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่จะทำให้ได้สมรรถนะผลตอบสนองชั่วคราวและสถานะอยู่ตัวของระบบ close-loop อย่างไรก็ตามถ้า plant มีความซับซ้อนซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างง่าย นั่นคือการวิเคราะห์และการคำนวณเพื่อการออกแบบตัวควบคุม PID จึงทำไม่ได้ ดังนั้นเราจึงต้องพึ่งพาการทดลองเพื่อปรับตั้งตัวควบคุม PID

ขั้นตอนในการหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของตัวควบคุมเพื่อให้ได้สมรรถนะตามที่ต้องการนั้นเป็นที่รู้กันว่าเป็นการปรับตั้งตัวควบคุมตามกฎของซีเกลอร์-นิโคลส์ที่แนะนำไว้สำหรับการปรับตั้งตัวควบคุม PID (หมายถึง ตั้งค่า K_p , T_i , และ T_d) โดยอยู่บนพื้นฐานจากการหาผลตอบสนองจากสัญญาณขั้นบันไดหรือบนพื้นฐานของค่า K_p ที่ส่งผลให้เกิดการแกว่งอย่างต่อเนื่อง (marginal stability) เมื่อมีการใช้การควบคุมแบบสัดส่วนเพียงอย่างเดียว กฎของซีเกลอร์-นิโคลส์ ซึ่งได้นำเสนอมาโดยสิ่งเขปดังต่อไปนี้จะมีประโยชน์ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ plant ที่ไม่ทราบค่า (กฎเหล่านี้แน่นอนว่าสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบของระบบที่รู้ค่าของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ plant ได้เหมือนกัน) กฎดังกล่าวได้แนะนำกลุ่มของค่า K_p , T_i , และ T_d ที่จะทำให้ระบบควบคุมมีเสถียรภาพ อย่างไรก็ตามผลของการควบคุมอาจเกิด maximum overshoot ที่สูงในการทดสอบผลตอบสนองขั้นบันได ซึ่งไม่สามารถยอมรับได้ ในกรณีดังกล่าวเราจำเป็นต้องปรับละเอียดจนกระทั่งผลตอบสนองจะเป็นที่ยอมรับได้ ในความเป็นจริงกฎการปรับค่าของซีเกลอร์-นิโคลส์ ใช้เพื่อการศึกษาสำหรับหาค่าพารามิเตอร์ในช่วงเริ่มต้นมากกว่าการปรับตั้งค่าสุดท้ายของ K_p , T_i , และ T_d ในครั้งเดียว



รูปที่ 2.1 ตัวควบคุมแบบ PID ของ Plant

กฎของซีเกลอร์-นิโคลส์สำหรับตัวควบคุม PID ซีเกลอร์-นิโคลส์ได้นำเสนอกฎสำหรับการหาค่า proportional gain (K_p), ค่า integral time (T_i) และค่า derivative time (T_d) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของคุณสมบัติของผลตอบสนองชั่วคราว (transient responses characteristics) ของ plant ซึ่งการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID หรือการปรับตั้งตัวควบคุม PID ซึ่งถูกปรับตั้งโดยวิศวกรที่มีประสบการณ์จากงานใน plant (กฎการปรับตั้งค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID มีเป็นจำนวน

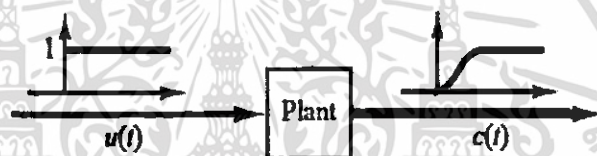
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มาก นับตั้งแต่ซีเกลอร์-นิโคลส์ได้นำเสนอกฎการปรับแต่งค่าตัวควบคุม ซึ่งกฎการปรับแต่งดังกล่าวนี้ ยังพบได้ในแคตตาล็อกและคู่มือของผู้ผลิตตัวควบคุม)

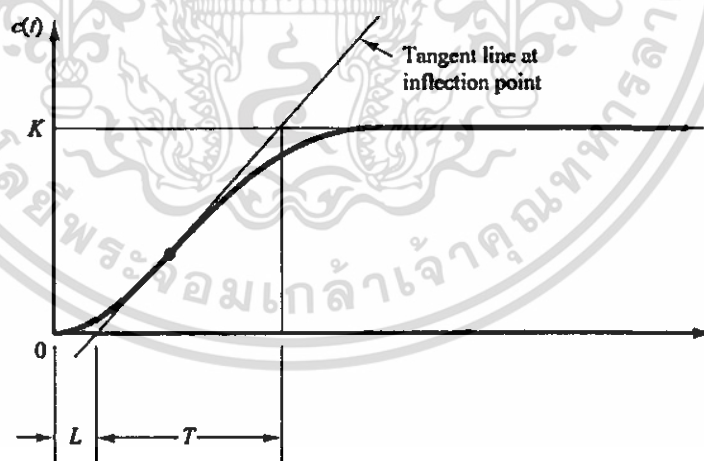
กฎการปรับแต่งค่าของซีเกลอร์-นิโคลส์มีอยู่สองวิธี ทั้งวิธีที่หนึ่งและสองเราจะให้ละเอียดพอ เป็นสิ่งเช่นดังนี้

2.1.1 วิธีแรก

ในวิธีแรกนี้เราจะรับผลตอบสนองของ plant ต่อสัญญาณขั้นบันไดขนาดหนึ่งหน่วยขา (input) เข้าจากการทดลอง ดังแสดงในรูปที่ 2.2 ถ้าหากว่า plant เกี่ยวพันกับตัวปริพันธ์ (integrator) หรือไม่ก็ dominant complex-conjugate poles ดังนั้นผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นบันไดจะดูเป็นรูป S-shaped ดังแสดงรูปที่ 2.3 วิธีนี้สามารถเอาไปใช้ได้ถ้าผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นบันไดขาเข้า (input) เป็นรูป S-shaped , ผลตอบสนองเส้นโค้งต่อสัญญาณขั้นบันไดดังกล่าว อาจได้จากการทดลองหรือจากจำลองพลศาสตร์ (dynamic) ของ plant



รูปที่ 2.2 ผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นบันไดขนาดหนึ่งหน่วยของ Plant



รูปที่ 2.3 ผลตอบสนองเส้นโค้งรูปตัว S

เส้นโค้งรูปตัว S อาจจำแนกตามคุณลักษณะด้วยสองจำนวนคงที่ได้เป็น เวลาประวิง (delay time) L และเวลาคงตัว (time constant) T , เวลาประวิงและเวลาคงตัว สามารถหาได้โดยการลากเส้นสัมผัส (tangent line) ที่จุดสะท้อน (inflection point) ของเส้นโค้งรูปตัว S และหาได้จาก

การตัดกันของเส้นสัมผัส (tangent line) กับแกนเวลา (time axis) และเส้น $c(t) = K$ ดังแสดงในรูปที่ 2.3

ตารางที่ 2.1 การปรับแต่งค่าซีเกลอร์-นิโคลส์บนผลตอบสนองอยู่ตัวของ plant (วิธีแรก)

Type of Controller	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Transfer function $C(s)/U(s)$ จึงอาจประมาณได้ด้วยระบบอันดับ 1 (first-order system) ที่มีความล่าช้าของสัญญาณ transport lag เป็นดังนี้

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts+1} \quad (2.1)$$

ซีเกลอร์และนิโคลส์แนะนำให้ปรับค่าของ K_p , T_i , และ T_d ตามสูตรที่แสดงในตารางที่ 2.1 เป็นที่สังเกตได้ว่าตัวควบคุม PID ที่ปรับแต่งค่าด้วยวิธีแรกของกฎซีเกลอร์-นิโคลส์จะให้

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.2)$$

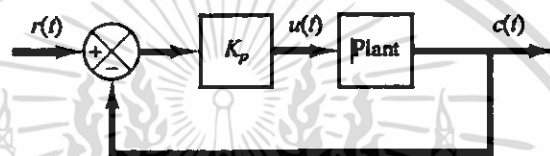
$$G_c(s) = 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right)$$

$$G_c(s) = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s}$$

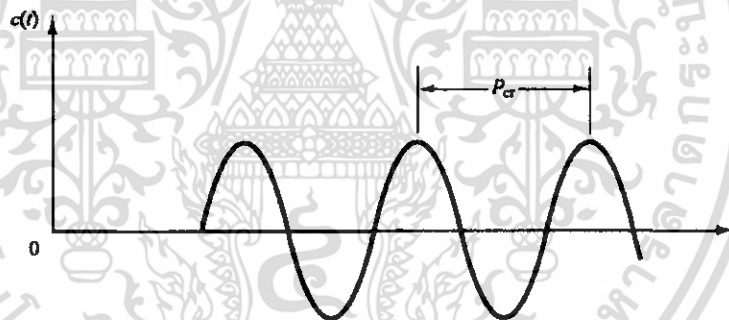
ดังนั้นตัวควบคุม PID จึงมี pole หนึ่งตัวที่จุดเริ่มต้น (origin) และ zero ซ้ำกันสองตัวที่ $s = -1/L$

2.1.2 วิธีที่สอง

ในวิธีที่สองนี้ แรกสุดเราจะปรับค่า $T_i = \infty$ และ $T_d = 0$ และใช้การควบคุมแบบสัดส่วน (proportional) เพียงอย่างเดียว (ตามรูปที่ 2.4) โดยการเพิ่มค่า K_p จาก 0 ไปยังค่าวิกฤต K_{cr} ที่จะทำให้ได้ขาออก (output) เริ่มแกว่งอย่างต่อเนื่อง (sustained oscillation) ถ้าขาออก (output) ไม่มีการแกว่งอย่างต่อเนื่องสำหรับค่า K_p ใดๆก็ตามแล้ว วิธีการนี้ก็ไม่ได้สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้) ดังนั้นค่าอัตราวิกฤต K_{cr} และคาบผลตอบสนองที่คล้อยจอง P_{cr} จึงสามารถหาได้จากการทดลอง ดูรูปที่ 2.5 ซีเกลอร์-นิโคลส์ได้แนะนำให้เราปรับค่าพารามิเตอร์ K_p , T_i , และ T_d ตามสูตรที่แสดงในตารางที่ 2.2



รูปที่ 2.4 close loop ของ ระบบ proportional



รูปที่ 2.5 การแกว่งอย่างต่อเนื่องด้วยคาบเวลา P_{cr}

ตารางที่ 2.2 การปรับตั้งค่าซีเกลอร์-นิโคลส์บนค่าวิกฤต K_{cr} และระยะวิกฤต P_{cr} (วิธีที่สอง)

Type of Controller	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สังเกตได้ว่าตัวควบคุม PID ที่ถูกปรับแต่งด้วยวิธีที่สองของกฎซีเกลอร์-นิโคลส์ให้

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.3)$$

$$G_c(s) = 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s \right)$$

$$G_c(s) = 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}$$

ดังนั้นตัวควบคุม PID จึงมี pole หนึ่งตัวที่จุดเริ่มต้น (origin) และ zeros ซ้ำกันสองตัว $s = -4/P_{cr}$

สังเกตได้ว่า ถ้าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบรู้ค่าได้ (เช่นรู้ transfer function) ดังนั้นเราสามารถใช่วิธี root locus เพื่อหาค่าอัตราขยายวิกฤต K_{cr} และความถี่ของการแกว่งอย่างต่อเนืองที่ ω_{cr} เมื่อ $2\pi/\omega_{cr} = P_{cr}$ ค่าเหล่านี้สามารถหาได้จากจุดตัดของ root locus กับแกน $j\omega$ (เห็นได้ชัดว่าถ้าทางเดิน root locus ไม่ได้ตัดแกน $j\omega$ วิธีนี้จะไม่สามารถใช้ได้)

ข้อคิดเห็น กฎการปรับแต่งค่าของซีเกลอร์-นิโคลส์ (และกฎการปรับแต่งอื่นๆ ที่นำเสนอในเอกสารต่างๆ) ได้มีการนำไปใช้ในการปรับแต่ง PID อย่างกว้างขวางในระบบควบคุมกระบวนการ (process control system) เมื่อพลศาสตร์ (dynamics) ของ plant ที่แน่นอนไม่ทราบค่า หลายปีที่ผ่านมากฎการปรับแต่งดังกล่าวเป็นที่พิสูจน์ได้ว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมาก กฎการปรับแต่งของซีเกลอร์-นิโคลส์จึงเป็นที่แน่นอนว่าสามารถนำไปประยุกต์กับพลศาสตร์ (dynamics) ของ plant ที่ทราบค่า ถ้าพลศาสตร์ (dynamics) ของ plant ทราบค่าจะมีอยู่หลายวิธีเชิงวิเคราะห์ทางกราฟที่จะออกแบบระบบควบคุม PID รวมถึงกฎการปรับแต่งของซีเกลอร์-นิโคลส์)

2.2 กฎทั่วไปสำหรับการสร้าง root loci

กฎในการสร้าง root loci

วิธีของ root loci ได้คิดค้นขึ้นโดย W.R. Evans ในปี ค.ศ. 1948 และได้ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้วิเคราะห์และออกแบบระบบอย่างกว้างขวาง กฎต่างๆ ในการสร้าง root loci ถูกสร้างขึ้นโดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ และ zeros ของสมการคุณลักษณะ กฎต่างๆ เหล่านี้จะช่วยให้การสร้าง root loci และ complementary root loci ง่ายขึ้น แต่จะเป็นการ plot แบบหยาบๆ เท่านั้น ถ้าต้องการทราบค่าอย่างละเอียดในแต่ละจุด จะต้องอาศัยการคำนวณมาช่วยหาค่าตอบ

2.2.1 จุด $K = 0$

จุด $K = 0$ บน root loci ที่สมบูรณ์จะอยู่ที่ poles ของ $G(s)H(s)$ โดยที่ poles ในที่นี้ รวมถึง poles ที่ infinity ด้วย
พิสูจน์ จากสมการ

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{\prod_{i=1}^m |s+z_i|}{\prod_{j=1}^n |s+p_j|} = \frac{1}{|K|} \quad (2.4)$$

เมื่อ K เข้าใกล้ 0 สมการ (2.4) จะมีค่าเข้าใกล้ ∞ และจะสมนัยกับการที่ s เข้าใกล้ poles ของ $G_1(s)H_1(s)$ หรือ poles ของ $G(s)H(s)$ นั่นคือ s มีค่าเข้าใกล้ $-p_j (j=1,2,\dots,n)$ คุณสมบัติของกฎนี้สามารถใช้ได้ทั้งกับกรณีของ root loci และ complementary root loci เพราะค่าของ K ในกรณีนี้ไม่ได้คิดเครื่องหมาย

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (2.5)$$

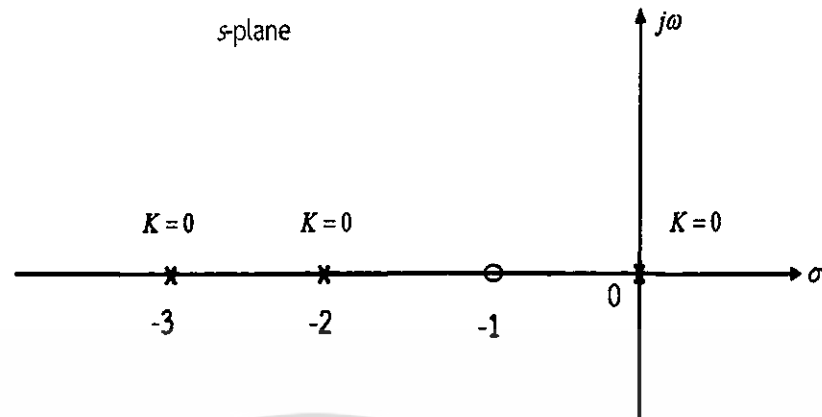
เมื่อ $K = 0$ รากของสมการจะอยู่ที่ $s = 0$, $s = -2$ และ $s = -3$ ตามลำดับ ถ้าหารสมการ (2.5) ด้วยเทอมที่ไม่มีสัมประสิทธิ์ K อยู่ (หลักการหารสมการคุณลักษณะด้วยเทอมที่ไม่มี สัมประสิทธิ์ K อยู่ นั้นเรียกว่า Golden rule) สมการ (2.5) จะกลายเป็น

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (2.6)$$

นั่นคือ

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (2.7)$$

จะเห็นว่ารากของสมการ (2.5) เมื่อ $K = 0$ จะเป็น pole ของฟังก์ชัน $G(s)H(s)$ ในสมการ (2.7) รูป 2.6 แสดงถึง root loci ที่สมบูรณ์เมื่อ K มีค่าเท่ากับ 0



รูปที่ 2.6 จุดที่ $K = 0$ บน root loci ที่สมบูรณ์สำหรับสมการ (2.5)

2.2.2 จุด $K = \pm \infty$

จุด $K = \pm \infty$ บน root loci ที่สมบูรณ์จะอยู่ที่ zeros ของ $G(s)H(s)$ เช่นเดียวกัน zeros ในที่นี้รวมถึง poles ที่ infinity ด้วย

พิสูจน์ อ้างถึงสมการ (2.4) เมื่อ K เข้าใกล้ $\pm \infty$ สมการ (2.4) จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ซึ่งจะสมนัยกับ s เข้าใกล้ zeros ของ $G(s)H(s)$ นั่นคือ s มีค่าเข้าใกล้ $-z_j = (j = 1, 2, \dots, n)$

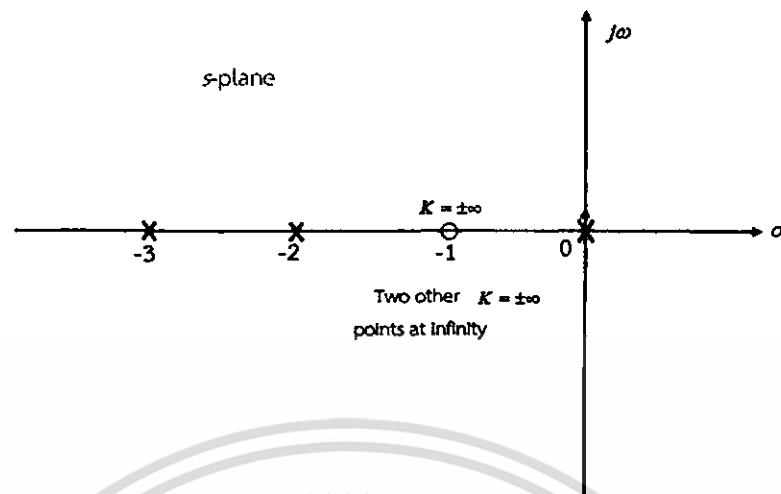
ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาสมการ (2.5) อีกครั้งหนึ่ง

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (2.8)$$

จะเห็นว่าเมื่อ K มีค่าสูงมาก สมการ (2.8) จะกลายเป็น

$$K(s+1) = 0 \quad (2.9)$$

สมการ (2.9) จะมีราก $s = -1$ จะเห็นว่าค่าของราก $s = -1$ นี้จะเป็น zero ของกรณีนี้ $G(s)H(s)$ จะมี zeros อยู่อีก 2 ตัวที่ infinity ทั้งนี้เพราะจำนวนของ poles และ zeros จะต้องเท่ากัน ถ้านับ poles หรือ zeros ที่ infinity รวมเข้าไปด้วย ดังนั้นสำหรับกรณีของสมการ (2.8) จุด $K = \pm \infty$ จะอยู่ที่ $s = -1, \infty$ และ $-\infty$



รูปที่ 2.7 จุดที่ $K = \pm \infty$ บน root loci ที่สมบูรณ์สำหรับสมการ (2.8)

2.2.3 จำนวนแขนงของ root loci

จำนวนแขนงของ root loci จะเท่ากับอันดับของสมการ $F(s) = 0$

พิสูจน์ จากกฎข้อ 1 และกฎข้อ 2 จะเห็นได้ว่าจุดที่ K เท่ากับ 0 จะอยู่ที่ pole ของ $G(s)H(s)$ และจุดที่ $K = \pm \infty$ จะอยู่ที่ zeros ของ $G(s)H(s)$ ดังนั้นเมื่อ K แปรค่าจาก 0 ถึง ∞ (กรณีของ root loci) จะเห็นว่าทางเดินของรากจะเริ่มต้นจาก pole ไปหา zero หมายความว่า จำนวนของ poles จะต้องเท่ากับจำนวนของ zero เสมอ ถ้า finite poles มากกว่า finite zeros แล้ว กรณีนี้จะต้องมี zeros อยู่ที่ infinity อีก $n-m$ ตัว ทำนองเดียวกัน ถ้า finite zeros มากกว่า finite poles จะต้องมี poles ที่ infinity อีก $m-n$ ตัวเช่นกัน

สำหรับการพิสูจน์กรณีของ complementary root loci ($-\infty < K \leq 0$) ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณาสมการ

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$$

หรือ

(2.11)

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

จะเห็นว่า $n=3$ และ $m=1$ ดังนั้นจำนวนแขนงของ root loci เท่ากับ 3 ซึ่งจะเท่ากับ จำนวนรากของสมการ (2.11) เช่นกัน

2.2.4 การสมมาตรกันของ root loci

Root loci ที่สมบูรณ์ของระบบที่เป็น rational transfer function ซึ่งมีสมประสิทธิ์คงที่จะ สมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน real ในระนาบ s

พิสูจน์ การพิสูจน์กฎข้อนี้ว่า root loci ที่สมบูรณ์จะสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน real ในระนาบ s นั้นเป็นสิ่งที่เห็นจริงอยู่แล้ว ทั้งนี้เพราะรากของสมการที่เราพิจารณาจะเป็นค่าจริงหรือเป็น complex conjugate pairs

สำหรับการพิสูจน์ข้อความถัดมานั้นก็เป็นเรื่องง่ายเช่นกัน เนื่องจากถ้าหากว่า poles และ/หรือ zeros ของ $G(s)H(s)$ สมมาตรกันกับแกนที่ไม่ใช่แกน real ในระนาบ s แล้ว เราสามารถจะถือว่าแกนที่ poles และ/หรือ zeros ของ $G(s)H(s)$ สมมาตรกันนั้นเป็นแกน real ในระนาบเชิงซ้อนอันใหม่โดยการใช้วิธี linear transformation และเรียกแกนนี้ว่า axis of symmetry.

ตัวอย่าง 2.4 พิจารณาสมการ

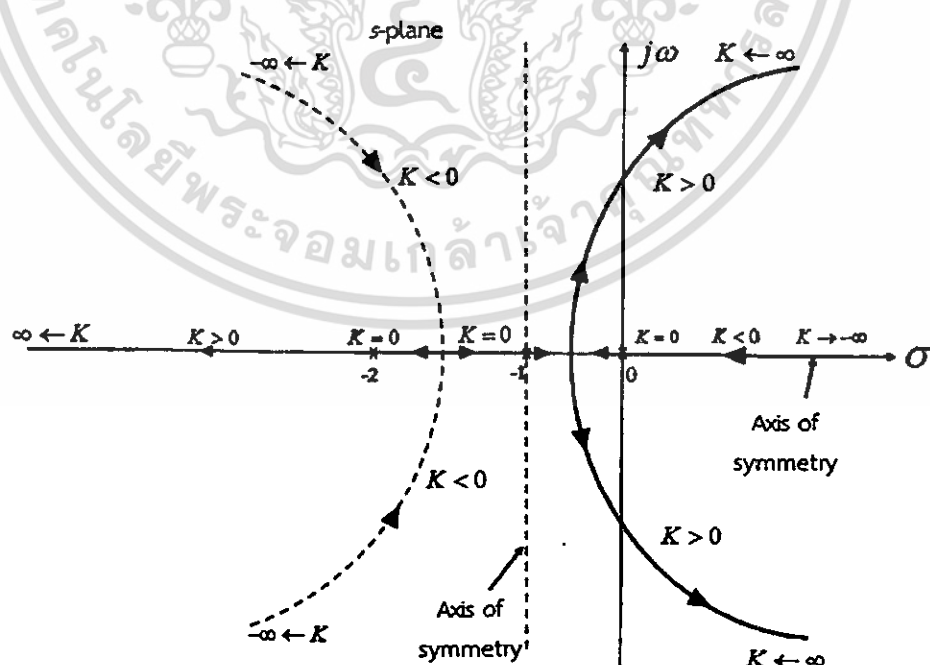
$$s(s+2)(s+3)+K(s+1)=0 \quad (2.12)$$

หารทั้งสองข้างสมการ (2.12) ด้วยเทอมที่ไม่ได้ประกอบด้วย K จะได้

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (2.13)$$

Root loci ที่สมบูรณ์ของสมการ (2.12) แสดงดังรูป 2.8 จะเห็นว่าเนื่องจาก poles ของ $G(s)H(s)$ นั้นสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกนที่ $s = -1$ ดังนั้น root loci ที่สมบูรณ์จะสมมาตรกันที่แกน real และแกน $s = -1$

เมื่อ pole-zero configuration ของ $G(s)H(s)$ สมมาตรกันเมื่อเทียบกับจุดในระนาบ s root loci ที่สมบูรณ์ก็จะสมมาตรกับจุดนั้นด้วย ซึ่งแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้



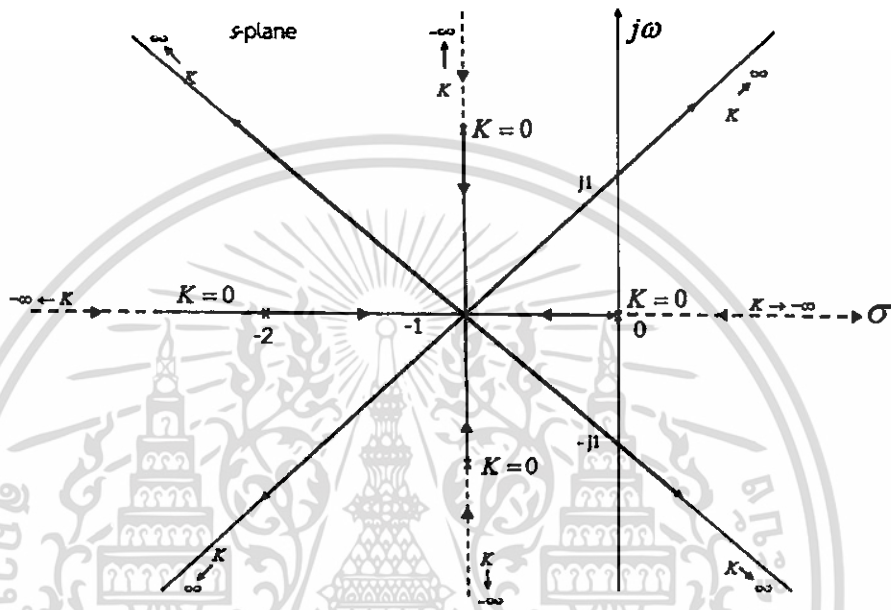
รูปที่ 2.8 Root loci สำหรับสมการ (2.12) แสดงถึงการสมมาตรกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+i+j)(s+i-j)} \quad (2.14)$$

Root loci ที่สมบูร์มดังรูป 2.9



รูปที่ 2.9 Root loci ของสมการ (2.14)

2.2.5 เส้น asymptotes ของ root loci เมื่อ s เข้าหา Infinity สำหรับ s ที่มีค่ามากๆ root loci จะสัมผัสกับเส้น asymptotes ที่มีมุม

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

สำหรับ complementary root loci

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n-m}$$

โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots, |n-m|-1$

จากสมการ

$$F(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + a_n + K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m) = 0 \quad (2.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ ถ้าเราหารสมการ (2.15) ด้วยเทอม

$$s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m$$

แล้ว เราจะได้ว่า

$$\frac{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} + K = 0 \quad (2.16)$$

จัดรูปสมการ (2.16) ให้ง่ายเข้าโดยการหารยาวและพิจารณาเพียงเทอมที่มี s อันดับสูง 2 เทอมแรก จะได้

$$s^{n-m} + (a_1 - b_1) s^{n-m-1} = -K \quad (2.17)$$

หรือ

$$s \left(1 + \frac{a_1 - b_1}{s} \right)^{1/(n-m)} = (-K)^{1/(n-m)} \quad (2.18)$$

เทอม $\left[1 + (a_1 - b_1) / s \right]^{1/(n-m)}$ นั้นสามารถกระจายได้โดยวิธีของ binomial expansion ดังนั้นสมการ (2.18) จึงกลายเป็น

$$s \left[1 + \frac{a_1 - b_1}{(n-m)s} + \dots \right] = (-K)^{1/(n-m)} \quad (2.19)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาเพียง 2 เทอมแรกทางซ้ายมือ จะได้

$$s + \frac{a_1 - b_1}{n-m} = (-K)^{1/(n-m)} \quad (2.20)$$

ต่อไปแทน s ด้วย $\sigma + j\omega$ และใช้ทฤษฎีทางพีชคณิตของ De Moivre สมการ (6-39) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\sigma + j\omega + \frac{a_1 - b_1}{n-m} = K^{1/(n-m)} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m} + j \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \right] \quad (2.21)$$

สำหรับ $0 \leq k \leq \infty$ และ

$$\sigma + j\omega + \frac{a_1 - b_1}{n-m} = |K|^{1/(n-m)} \left[\cos \frac{2k\pi}{n-m} + j \sin \frac{2k\pi}{n-m} \right] \quad (2.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ $-\infty \leq K \leq 0$ และ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

เทียบ real part และ imaginary part ทั้งสองข้างของสมการ (2.21) ให้เท่ากัน เราจะได้ว่า สำหรับ $0 \leq K \leq \infty$

$$\sigma + \frac{a_1 - b_1}{n - m} \square K^{1/(n-m)} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (2.23)$$

และ

$$\omega \square K^{1/(n-m)} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (2.24)$$

จากสมการ (2.23) และสมการ (2.24) หาค่าของ $K^{1/(n-m)}$ ได้ว่า

$$K^{1/(n-m)} \square \frac{\omega}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}} \square \frac{\sigma + \frac{a_1 - b_1}{n-m}}{\cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m}} \quad (2.25)$$

และ ω มีค่าเป็น

$$\omega \square \tan \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \left(\sigma + \frac{a_1 - b_1}{n-m} \right) \quad (2.26)$$

สมการ (2.26) เป็นสมการเส้นตรงในระนาบ s และอยู่ในรูป

$$\omega \square M(\sigma - \sigma_1) \quad (2.27)$$

โดยที่ M จะเป็น slope ของเส้นตรงหรือเส้น asymptote และ σ_1 เป็นจุดตัดกับแกน σ จากสมการ (2.26) และสมการ (2.27) เราได้

$$M = \tan \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (2.28)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, |n-m|-1$ และ

$$\sigma_1 = -\frac{a_1 - b_1}{n-m} \quad (2.29)$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีของ complementary root loci ในสมการ (2.22) เราจะได้ว่า

$$M = \tan \frac{2k\pi}{n-m} \quad (2.30)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sigma_1 = -\frac{a_1 - b_1}{n - m}$$

โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots, |n - m| - 1$

2.2.6 จุดตัดของเส้น asymptotes (จุด centroid)

ก) จุดตัดของเส้น asymptotes จะอยู่บนแกน real ในระนาบ s เท่านั้น

ข) จุดตัดของเส้น asymptotes จะอยู่บนแกน real จะมีค่า

$$\sigma_1 = \frac{\sum \text{real ของ poles ของ } G(s)H(s) - \sum \text{real ของ zeros ของ } G(s)H(s)}{|n - m|} \quad (2.31)$$

พิสูจน์ การพิสูจน์สำหรับข้อ ก) นั้นจะตรงไปตรงมา เนื่องจาก root loci ที่สมบูรณ์จะสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน real ในระนาบ s ดังนั้นเส้น asymptote จะตัดแกน real ตรงจุดเดียวกัน

พิสูจน์ สำหรับข้อ ข) นั้นจะอาศัยสมการ (2.29) และสมการ (2.30) ถ้าเรากำหนดฟังก์ชัน $G(s)H(s)$ ตามสมการแล้ว สมการ (2.31) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\sigma_1 = \frac{b_1 - a_1}{n - m} = \frac{\sum \text{finite poles ของ } G(s)H(s) - \sum \text{finite zeros ของ } G(s)H(s)}{\text{จำนวนของ finite poles ของ } G(s)H(s) - \text{จำนวนของ finite poles ของ } G(s)H(s)} \quad (2.32)$$

จำนวนของ finite poles ของ $G(s)H(s)$ - จำนวนของ finite poles ของ $G(s)H(s)$

จากกฎทางพีชคณิต

$$\begin{aligned} -a_1 &= \text{ผลบวกของรากของ } s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \\ &= \text{ผลบวกของ finite poles ของ } G(s)H(s) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} -b_1 &= \text{ผลบวกของรากของ } s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m = 0 \\ &= \text{ผลบวกของ finite zeros ของ } G(s)H(s) \end{aligned} \quad (2.34)$$

เนื่องจาก poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ เป็นได้ทั้งค่าจริงหรือค่า complex conjugate pairs เทอม imaginary ก็จะถูกหักล้างซึ่งกันและกันอยู่เสมอ ดังนั้นเทอมผลรวมในสมการ (2.32) จึงสามารถแทนด้วยส่วนที่เป็นค่าจริงของ poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ ก็เพียงพอแล้ว

นอกจากนี้สมการ (2.32) นั้นสามารถจะใช้ได้กับ root loci และ complementary root loci เพราะค่า σ_1 ของ root loci และ complementary root loci มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 6-6 พิจารณาสมการ

$$s(s + 4)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 1) = 0 \quad (2.35)$$

สมการนี้จะสมนัยกับสมการคุณลักษณะของระบบควบคุมป้อนกลับที่มี loop transfer function

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \quad (2.36)$$

Pole-zero configuration ของ $G(s)H(s)$ แสดงดังรูป 2.10 จากกฎต่างๆ 6 กฎ สำหรับการสร้าง root loci ที่สมบูรณ์ที่กล่าวมาแล้ว เราจะได้ข้อมูลต่างๆ สำหรับ root loci และ complementary root loci ของสมการ (6-54) ดังนี้

1. $K = 0$; จุด $K = 0$ บน root loci ที่สมบูรณ์จะอยู่ที่ poles ของ $G(s)H(s)$ นั่นคืออยู่ที่ $s = 0$, $s = -4$, $s = -1 + j1$ และ $s = -1 - j1$
2. $K = \pm \infty$; จุด $K = \pm \infty$ บน root loci ที่สมบูรณ์จะอยู่ที่ zeros ของ $G(s)H(s)$ นั่นคืออยู่ที่ $s = -1$, $s = \infty$, $s = \infty$ และ $s = \infty$
3. เนื่องจากสมการ (2.35) เป็นสมการอันดับ 4 หรือ finite poles ของ $G(s)H(s)$ มี 4 ตัว ดังนั้น root loci ที่สมบูรณ์จะมีจำนวน 4 แขนง
4. root loci ที่สมบูรณ์จะสมมาตรกันเมื่อเทียบกับแกน real
5. สำหรับ s ที่มีค่ามากๆ มุมของเส้น asymptotes สำหรับ root loci ที่สมบูรณ์ที่ทำกับแกน real จะเป็นดังนี้

Root loci ($K \geq 0$)

$$k = 0 \quad \theta_0 = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$k = 1 \quad \theta_1 = \frac{540^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$k = 2 \quad \theta_2 = \frac{900^\circ}{3} = 300^\circ$$

Complementary root loci ($K \leq 0$)

$$k = 0 \quad \theta_0 = \frac{0^\circ}{3} = 0^\circ$$

$$k = 1 \quad \theta_1 = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

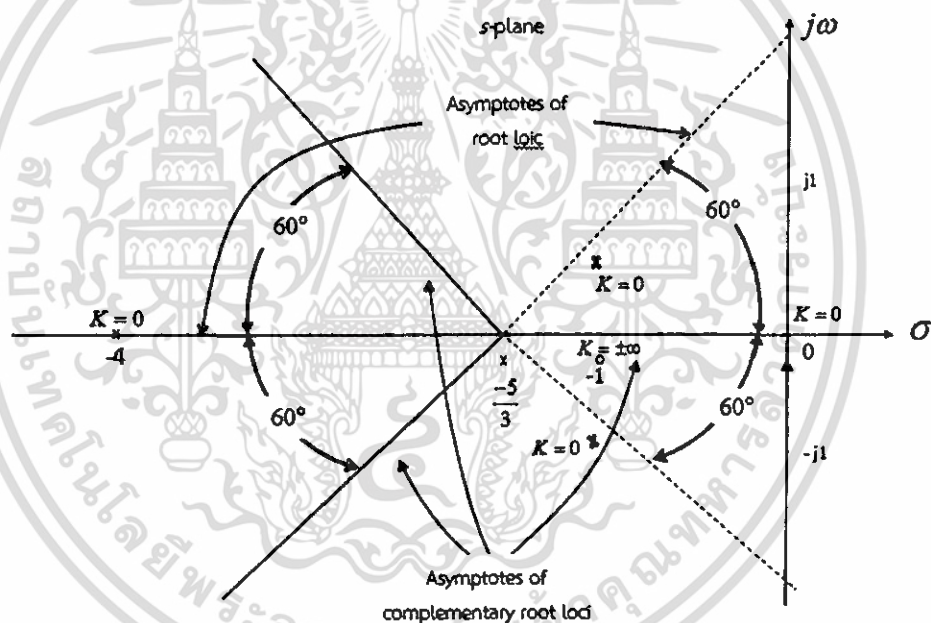
$$k = 2 \quad \theta_2 = \frac{720^\circ}{3} = 240^\circ$$

จะเห็นได้ว่า เส้น asymptotes ของ complementary root loci สามารถจะหาได้โดยการต่อเส้น asymptotes ของ root loci ไปในทิศทางตรงกันข้าม

6. เส้น asymptotes ทั้ง 6 เส้นจะตัดกันที่

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum \text{finite poles ของ } G(s)H(s) - \sum \text{finite zeros ของ } G(s)H(s)}{n-m} \\
 &= \frac{(0-4-1+j1-1-j1)-(-1)}{4-1} \\
 &= -\frac{5}{3}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

เส้น asymptotes และจุดตัดแสดงดังรูป 2.10



รูปที่ 2.10 เส้น asymptotes ของ root loci ที่สมบูรณ์ของ (2.36)

2.2.7 root loci บนแกน real

บนส่วนที่กำหนดให้บนแกน real ในระนาบ s จะมี root loci ใน ส่วนนั้น ถ้าจำนวนรวมกันทั้งหมดของ poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ ที่เป็น real ซึ่งอยู่ทางขวามือของส่วนที่พิจารณานั้น ของส่วนที่พิจารณานั้นมีจำนวนเป็นเลขคี่เท่านั้น ถ้าจำนวนรวมกัน ทั้งหมดของ poles และ zeros ที่เป็น real ซึ่งอยู่ทางขวามือของ ส่วนที่พิจารณานั้นมีจำนวนเป็นคู่ก็จะมี complementary root loci อยู่ที่ส่วนนั้น

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีข้อนี้จะอาศัยหลักการพิจารณาดังนี้

1. ที่จุดใดๆ บนแกน real (สมมติว่าจุด s_1) มุมของ vectors ที่ลากจาก complex poles และ complex zeros ของ $G(s)H(s)$ มายังจุด s_1 นั้นเมื่อรวมกันจะมีค่าเท่ากับ 0 องศา (หรือ 360 องศา) เสมอ จึงไม่นำมาพิจารณา ดังนั้นจะมีแต่มุมจาก poles และ zeros ที่อยู่บนแกน real เท่านั้นที่นำมาพิจารณาแล้วจะให้เงื่อนไขได้ตามสมการ (2.37) และสมการ (2.38)

2. จะมีแต่ poles และ zeros บนแกน real ที่อยู่ทางขวาของจุด s_1 เท่านั้นที่สามารถจะให้มุมเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการ (2.37) และสมการ (2.38) ได้ ทั้งนี้ เพราะมุมที่เกิดจาก poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ บนแกน real ที่อยู่ทางซ้ายมือของจุด s_1 จะให้มุมเป็น 0 องศาเสมอ

3. Poles ของ $G(s)H(s)$ แต่ละตัวบนแกน real ที่อยู่ทางขวามือของจุด s_1 จะให้มุม -180 องศา และ zeros ของ $G(s)H(s)$ แต่ละตัวบนแกน real ที่อยู่ทางขวามือของจุด s_1 จะให้มุม 180 องศาเสมอ

จากทั้ง 3 ข้อที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่าจุด s_1 จะเป็นจุดที่อยู่บน root loci ได้ก็ต่อเมื่อจำนวนรวมกันของ poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ ที่อยู่ทางขวามือของจุด s_1 นั้นเป็นจำนวนคู่ และจุด s_1 จะเป็นจุดที่อยู่บน complementary root loci ได้ก็ต่อเมื่อจำนวนรวมกันของ poles และ zeros ของ $G(s)H(s)$ ที่อยู่ทางขวามือของจุด s_1 นั้นเป็นจำนวนคี่ ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติของ root loci ที่สมบูรณ์บนแกน real ในระนาบ s

2.2.8 มุมที่ออกจากและมุมที่เข้าหา

มุมที่ออกจาก pole หรือมุมที่เข้าหา zero ของ root loci สามารถหาได้โดยการสมมติจุด s_1 ให้เป็นจุดที่อยู่บน rootloci และ อยู่ ใกล้กับ pole หรือ zero นั้นมาก จากนั้นใช้สมการ

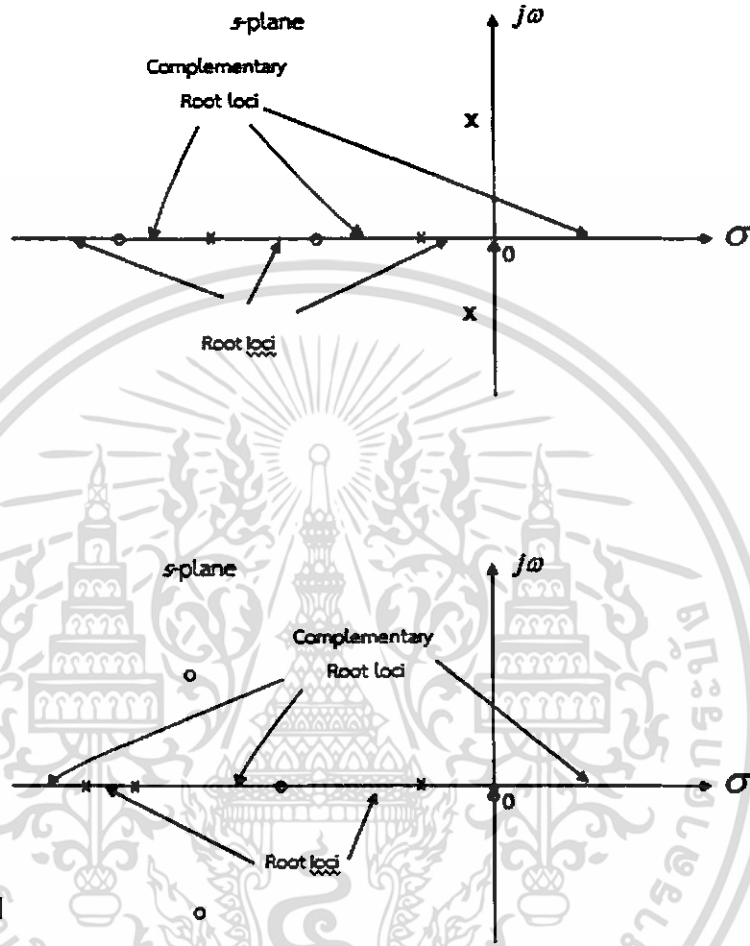
$$\begin{aligned} \angle G(s_1)H(s_1) &= \sum_{i=1}^m \angle [s_1 + z_i] - \sum_{j=1}^n \angle [s_1 + p_j] \\ &= (2k+1)\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

ในกรณีของ complementary root loci มุมที่ออกจากหรือมุมที่เข้าหาสามารถหาได้โดยใช้สมการ

$$\begin{aligned} \angle G(s_1)H(s_1) &= \sum_{i=1}^m \angle [s_1 + z_i] - \sum_{j=1}^n \angle [s_1 + p_j] \\ &= 2k\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.38)$$

มุมที่ออกจาก pole หรือมุมที่เข้าหา zero ของ root loci ที่สมบูรณ์ของ $G(s)H(s)$ จะแสดงถึงพฤติกรรมของ root loci ใกล้ pole หรือ zero นั้น สำหรับกรณีของ root loci ($K \geq 0$) มุมเหล่านั้นจะหาได้โดยใช้สมการ (2.37) ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนด pole-zero configuration ของ $G(s)H(s)$ ดังในรูป 2.12 และต้องการที่จะหามุมที่ root loci ออกจาก pole ที่จุด $-1 + j1$ มุมที่เราต้องการจะหาคือ θ_2 ซึ่งจะวัดเทียบกับแกน real ดังนั้นเราจะสมมติให้จุด s_1 เป็นจุดที่อยู่บน root loci ที่ออกจาก pole ที่ $-1 + j1$ และอยู่ใกล้ pole นี้มาก จุด s_1 จะต้องสอดคล้องกับสมการ (2.37) นั่นคือ

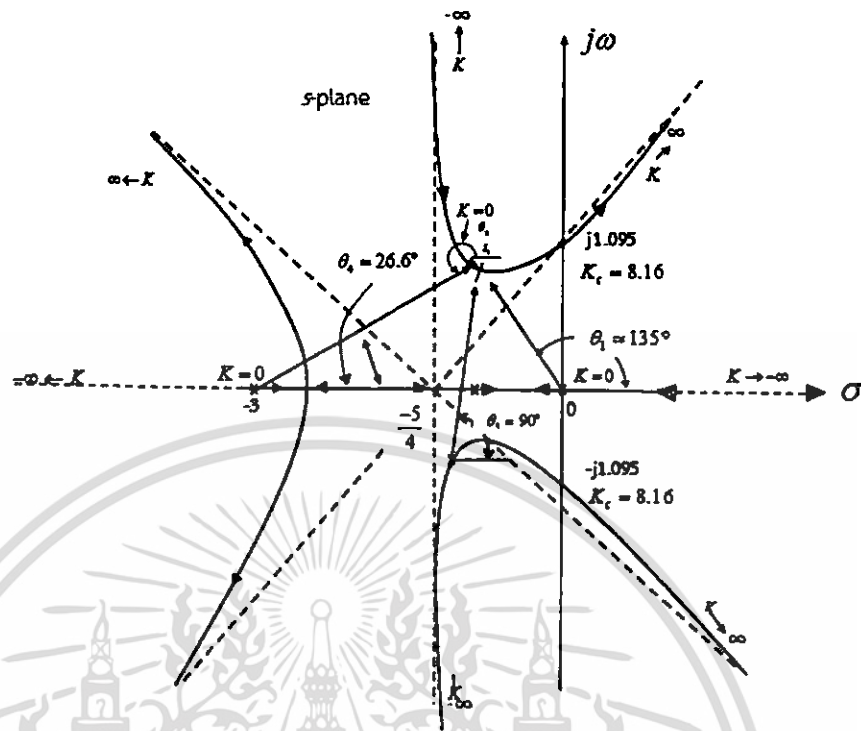
$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2k+1)180^\circ \quad (2.39)$$



รูปที่ 2.11 คุณสมบัติของ root loci บนแกน real

เนื่องจากจุด s_1 อยู่ใกล้กับ pole $-1+j1$ มาก มุมของ vectors ที่ลากจาก poles อื่นอีก 3 ตัวมายังจุด s_1 นี้ จึงหาได้โดยใช้สมการ $\angle G_1(s)H_1(s) = (2k+1)\pi \quad K \geq 0$ สมการ (2.39) จึงกลายเป็น

$$-(135^\circ + \theta_2 + 90^\circ + 26.6^\circ) = (2k+1)180^\circ \quad (2.40)$$



รูปที่ 2.12 Root loci ที่สมบูรณ์ของ $s(s+3)(s^2+2s+s)+K=0$ แสดงถึงวิธีการหามุมที่ออกจาก pole หรือมุมที่เข้าหา zero

กำหนดให้ $k=0$ จะได้

$$\theta_2 = -431.6^\circ$$

หรืออาจจะกล่าวได้ว่า

$$\theta_2 = -71.6^\circ$$

เมื่อเราสามารถหามุมของ root loci ที่ออกจาก pole หรือเข้าหา zero ของ $G(s)H(s)$ ได้แล้ว มุมของ complementary root loci ที่จุดเดียวกันจะมีค่าต่างไปจากมุมที่หาได้ที่จุดนั้นๆ เท่ากับ 180 องศา โดยใช้สมการ (2.38)

2.2.9 จุดตัดของ root loci กับแกน Imaginary

ค่าของ ω และ k ที่จุดตัดของ root loci กับ แกน imaginary ในระนาบ s นั้นสามารถหาได้โดยการใช้ Routh-Hurwitz criterion นอกจากนี้ยังอาจจะใช้ Bode plot ของ $G(s)H(s)$ ได้ อีกด้วย

สำหรับกรณีที่มีจุดตัดหลายจุด ค่าของ K และ ω จะหาได้ง่ายกว่าโดยวิธีของ Bode diagram

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

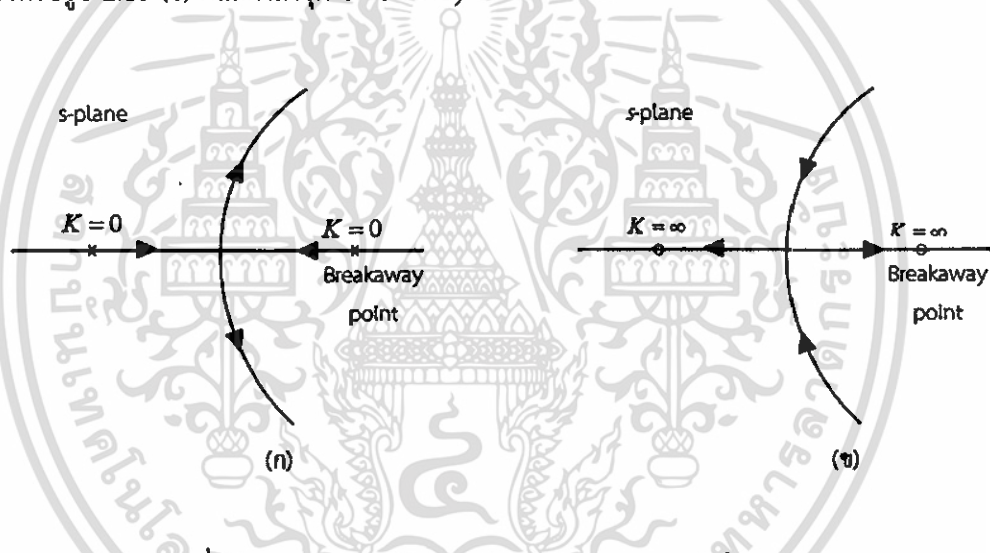
ตัวอย่าง 2.6 พิจารณาสมการ

$$s(s+3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \quad (2.41)$$

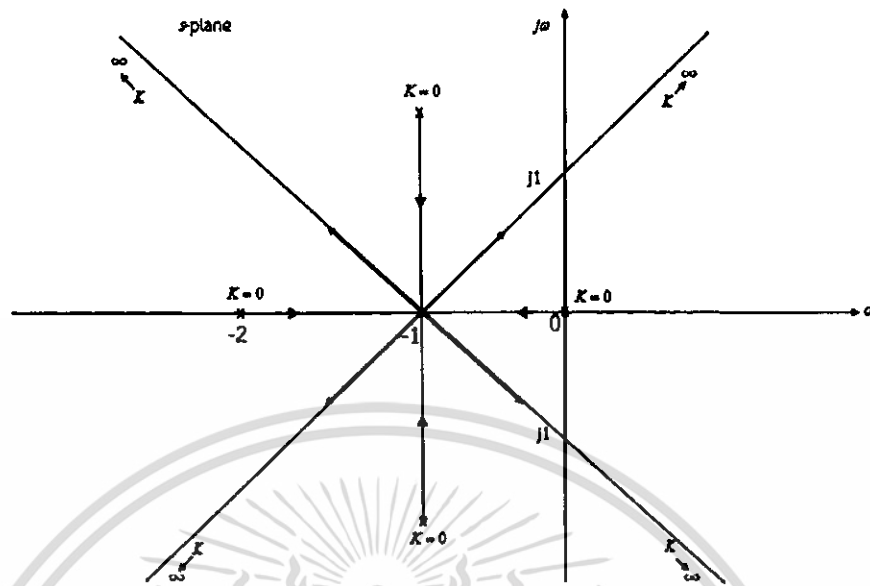
Root loci ที่สมบูรณ์ของสมการ (2.41) แสดงดังรูป 2.12 แล้ว สำหรับกรณีนี้ root loci จะตัดแกน imaginary ในระนาบ s ที่ $\omega_c = \pm 1.095 \text{ rad/sec}$ และค่า K_c ที่จุดตัดนี้มีค่าเท่ากับ 8.16 ซึ่งค่าที่หาได้นี้ได้จากการใช้ Routh-Hurwitz criterion

วิธีการหาจุด Breakaway (จุด Saddle) บน root loci ที่สมบูรณ์

จุด breakaway หรือจุด saddle บน root loci ของสมการใดๆ หมายถึงว่า สมการนั้นๆ จะมีรากซ้ำ (multiple-order roots) รูป 2.13 (ก) แสดงถึงกรณีที่ root loci จำนวน 2 ขานงมาพบกันที่จุด breakaway บนแกน real จากนั้นก็แยกออกจากกันไปในทิศทางตรงกันข้ามตามแกน real ในกรณีนี้จุด breakaway จะแสดงว่าสมการที่นำมาสร้าง root loci นั้นมีรากเหมือนกัน 2 ราก สำหรับรูป 2.13 (ข) ก็แสดงถึงจุด breakaway อีกกรณีหนึ่ง



รูปที่ 2.13 ตัวอย่างของจุด breakaway บนแกน real ในระนาบ s



รูปที่ 2.14 จุด breakaway ที่แสดงถึงรากซ้ำ 4 ราก

โดยทั่วไปอาจจะมี root loci มากกว่า 2 แขนง มาพบกันที่จุด breakaway ดังแสดงในรูป 2.14 เป็นกรณีที่จุด breakaway แทนจำนวนรากซ้ำ 4 ราก

บน root loci ของสมการหรือระบบหนึ่งๆ นั้นอาจจะมีจุด breakaway มากกว่า 1 จุดก็ได้ และจุด breakaway นี้ก็ไม่จำเป็นต้องอยู่บนแกน real เสมอไป อาจจะเป็น complex conjugate pair ก็ได้

2.2.10 จุด breakaway (จุด saddle)

จุด breakaway บน root loci ที่สมบูรณ์ หาได้โดยการหารากของ $dK/ds = 0$, หรือ $dG(s)H(s)/ds = 0$ ซึ่งกรณีนี้เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นของเท่านั้น สำหรับเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการหาจุด breakaway นั้นทำได้โดยการใช้สัมประสิทธิ์สมการคุณลักษณะ $F(s) = 0$ และ $F'(s) = 0$ มาจัดทำเป็นตาราง

พิสูจน์ ถ้าเขียนสมการ (2.15) อยู่ในรูป

$$Q(s) + KP(s) = 0 \quad (2.42)$$

ดังนั้น สมการ $G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m)}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$ จะกลายเป็น

$$G(s)H(s) = \frac{KP(s)}{Q(s)} \quad (2.43)$$

ถ้าพิจารณาให้ K แปรค่าด้วย increment ΔK , สมการ (2.42) จะกลายเป็น

$$Q(s) + (K + \Delta K)P(s) = 0 \quad (2.44)$$

หารทั้งสองข้างของสมการ (2.44) ด้วย $Q(s) + KP(s)$ จะได้

$$1 + \frac{\Delta KP(s)}{Q(s) + KP(s)} = 0 \quad (2.45)$$

หรือ

$$1 + \Delta KF(s) = 0 \quad (2.46)$$

โดยที่

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s) + KP(s)} \quad (2.47)$$

เนื่องจากส่วนของ $F(s)$ เป็นค่าทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.42) ดังนั้นที่จุดใดๆ $s = s_1$ ที่อยู่ใกล้มากกับจุดที่มีรากซ้ำ n ตัวของสมการ (2.42) ซึ่งจะสมนัยกับจุด breakaway ของ root loci ที่มีจำนวน n แขนงด้วยน้ำ $F(s)$ สามารถจะประมาณค่าเป็น

$$F(s) = \frac{A_1}{(s - s_1)^n} = \frac{A_1}{(\Delta s)^n} \quad (2.48)$$

โดยที่ $A_1 =$ ค่าคงที่
แทนค่าสมการ (2.48) ลงในสมการ (2.46) จะได้

$$1 + \frac{\Delta K A_1}{(\Delta s)^n} = 0 \quad (2.49)$$

หรือ

$$\frac{\Delta K}{(\Delta s)} = -\frac{(\Delta s)^{n-1}}{A_1} \quad (2.50)$$

ทำการ limit ของทั้งสองข้างของสมการ (2.50) โดยให้ ΔK มีค่าเข้าหา 0 จะได้

$$\lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta s} = \frac{dK}{ds} = 0 \quad (2.51)$$

ซึ่งแสดงว่าที่จุด breakaway บน root loci นั้น $\frac{dK}{ds}$ จะเท่ากับ 0 เนื่องจากรากของสมการ (2.42) ต้องสอดคล้องกับ

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 0 \quad (2.52)$$

หรือ

$$K = \frac{1}{G_1(s)H_1(s)} \quad (2.53)$$

และเนื่องจาก $\frac{dK}{ds} = 0$, ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = 0 \quad (2.54)$$

จะเห็นว่าเงื่อนไขสำหรับจุด breakaway ที่กำหนดไว้ในสมการ (2.54) นั้นเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น แต่ไม่พอเพียงหรืออีกนัยหนึ่ง จุด breakaway ทุกๆ จุดจะต้องสอดคล้องกับสมการ (2.54) แต่คำตอบทุกคำตอบที่ได้จากสมการ (2.54) นั้นไม่จำเป็นจะต้องเป็นจุด breakaway เสมอไป คำตอบที่ได้จากสมการ (2.54) จะเป็นจุด breakaway ได้ก็ต่อเมื่อคำตอบนั้นสอดคล้องกับสมการ (2.52) ด้วย

โดยทั่วไป จากคำตอบของสมการ (2.54) เราสามารถจะสรุปได้ดังนี้

1. คำตอบของสมการ (2.54) ที่เป็นค่า real ทุกค่าจะเป็นจุด breakaway บน root loci ที่สมบูรณ์ ($-\infty < K < \infty$) ทั้งนี้เพราะบนทุกส่วนของแกน real ในระนาบ s จะมี root loci ที่สมบูรณ์อยู่

2. คำตอบของสมการ (2.54) ที่เป็นค่า complex-conjugate จะเป็นจุด breakaway ได้ถ้าคำตอบนั้นสอดคล้องกับสมการคุณลักษณะด้วยเท่านั้น ความไม่แน่นอนนี้ไม่ก่อให้เกิดความยุ่งยากในการใช้สมการ (2.54) หาจุด breakaway แต่อย่างใด เพราะยังมีคุณสมบัติอื่นๆ ของ root loci ที่จะใช้บังคับบอกตำแหน่งของจุด breakaway ได้

ตัวอย่าง 2.7 พิจารณาสมการอันดับสองต่อไปนี้

$$s(s+2) + K(s+4) = 0 \quad (2.55)$$

โดยอาศัยกฎต่างๆ เกี่ยวกับการสร้าง root loci ที่ได้กล่าวมาแล้ว รูป 2.15 จะเป็น root loci ของสมการ (2.55) จะเห็นว่า root loci ที่แตกออกจากแกน real จะมีทางเดินเป็นวงกลม (ซึ่งเราสามารถจะพิสูจน์ได้โดยการแทน s ในสมการ (2.55) ด้วยจำนวนเชิงซ้อน $x + jy$ แล้วทำการจัดรูปสมการใหม่ ซึ่งจะได้เป็นสมการของวงกลมออกมา) จากรูปจะเห็นว่าจุด breakaway ทั้งสองจุดจะอยู่บนแกน real โดยที่จุดหนึ่งจะอยู่ระหว่าง 0 และ -2 ส่วนอีกจุดหนึ่งอยู่ระหว่าง -4 และ $-\infty$

ถ้าเราหารทั้งสองข้างของสมการ (2.55) ด้วย $s(s+2)$ เราจะได้ว่า

$$G_1(s)N_1(s) = \frac{(s+4)}{s(s+2)} \quad (2.56)$$

นั่นคือ จากสมการ $\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = 0$ จุด breakaway จะต้องสอดคล้องกับ

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = \frac{s(s+2) - 2(s+4)(s+1)}{s^2(s+2)^2} = 0 \quad (2.57)$$

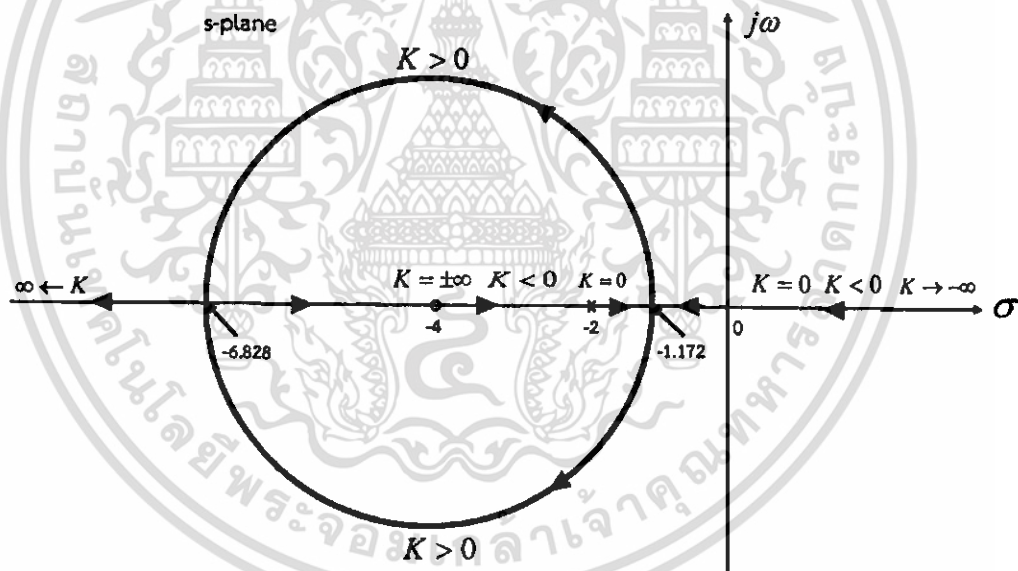
หรือ

$$s^2 + 8s + 8 = 0 \quad (2.58)$$

จะได้

$$s_1, s_2 = -1.172, -6.828 \quad (2.59)$$

ค่าของ s_1 และ s_2 ที่หามาได้นี้จะเป็นจุด breakaway บน root loci ในกรณีนี้จุด breakaway จะอยู่บน root loci ($K \geq 0$) ทั้งสองจุด



รูปที่ 2.15 Root loci ของ $s(s+2) + K(s+4) = 0$

2.2.11 การคำนวณหาค่า K บน root loci

ค่าสัมบูรณ์ (absolute) ของ K ที่จุด s_1 ใดๆ บน root loci ที่ สมบูรณ์หาได้จากสมการ

$$|K| = \frac{1}{[G_1(s_1)H_1(s_1)]}$$

ผลคูณของความยาวของ vectors ที่ลากจาก poles ของ $G(s)H(s)$ ไปยังจุด s_1
 $=$ ผลคูณของความยาวของ vectors ที่ลากจาก zeros ของ $G(s)H(s)$ ไปยังจุด s_1

2.3 Kitti's Method

2.3.1 โครงสร้างของระบบควบคุม 2 - DOF

เมื่อตัวควบคุม PID ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับ plant อันดับสูงๆ ที่มี input เป็นแบบขั้นบันได ความคลาดเคลื่อนที่สภาวะสงบนิ่ง (steady state) มีค่าเป็นศูนย์ แต่ผลตอบสนองชั่วคราวยังไม่เป็นไปตามที่ต้องการ ตัวควบคุม PID x $(n-2)$ stage PD cascade controller ที่นำเสนอ plant อันดับ n^{th} ที่ให้ได้สมรรถนะทั้งหมดตามที่ต้องการจะมี transfer function เป็น

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \prod_{j=1}^{n-2} (1 + T_{d_j} s)$$

$$G_c(s) = \frac{K_{cl}}{s} (s + z_{c1}) (s + z_{c2}) \prod_{j=1}^{n-2} (s + z_j), \quad (2.60)$$

เมื่อ K_p, T_i และ T_d เป็น Proportional gain, Integral time และ derivative time ตามลำดับของตัวควบคุม PID, K_{pj} และ T_{d_j} เป็น Proportional gain และ derivative time ของตัวควบคุม PD $-z_{c1}, -z_{c2}$ เป็น real zero ; $(T_i \geq 4T_d)$; $-z_j (j=1, 2, \dots, n-2)$ คือ real zero ของ $(n-2)$ ตัวควบคุม stage PD, K_{c1} คืออัตราขยายของตัวควบคุม cascade รูปแบบมาตรฐานของตัวควบคุม PID x $(n-2)$ stage PD cascade นิยามได้เป็น

$$G_c(s) = \frac{K_{cl}}{s} (s + z_c) \prod_{j=1}^{n-1} (s + z_j), \quad (2.61)$$

เมื่อ $-z_c$ และ $-z_j (j=1, 2, \dots, n-1)$ คือ real zero

โครงสร้างของ plant ที่มีอันดับ n^{th} ซึ่งถูกพบเจอบ่อยๆสามารถจำแนกได้เป็นชนิด 0" และ ชนิด 1" และ transfer functions สามารถนิยามได้เป็น

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+p_d) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i)}, \quad (2.62)$$

เมื่อ $-p_d$ คือ real pole ที่มีตำแหน่งที่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด (ชนิด 0") และ $p_d = 0$ (ชนิด 1") $-p_i (i=1,2,\dots,n-1)$ เป็น real pole

open loop transfer function ของระบบ close loop คือ

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_c(s+z_c) \prod_{j=1}^{n-1} (s+z_j)}{s(s+p_d) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i)}, \quad (2.63)$$

เมื่อ $K_c = KK_{c1}$

ดังได้กล่าวมาก่อนหน้านี้ pole หนึ่งตัวที่อยู่จุดกำเนิด (origin) และตัวอื่นๆที่อยู่ใกล้จุดกำเนิด (origin) ที่สุดหรือหึ่งคู่ที่อยู่จุดกำเนิด (origin) ที่สามารถพิจารณาได้เป็น pole ที่มีนัยยะสำคัญ และ pole ที่เหลือจำนวน $(n-1)$ ตัวสามารถพิจารณา เป็น pole ที่ไม่มีนัยยะสำคัญ zero ของ $(s+z_c)$ ของ cascade controller จะใช้ในการบังคับ root locus ผ่านจุด s_d เหล่า zero จำนวน $(n-1)$ ตัว ถูกวางอยู่ใกล้ทางด้านซ้ายของเหล่า pole จำนวน $(n-1)$ ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะได้เป็นการลดผลกระทบของพวกมัน ดังนั้นจากสมการที่ (2.63)

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_c(s+z_c) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i+\varepsilon_i)}{s(s+p_d) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i)}, \quad (2.64)$$

เมื่อ $+z_j = +(p_i+\varepsilon_i) (j=1,2,\dots,n-1; i=1,2,\dots,n-1)$ และ ε_i คือจำนวนจริงขนาดเล็กๆ จากสมการ (2.64) ในกรณีของ plant ชนิด 0 ถ้ามีบาง pole เช่น $-p_i = -p_d$ ถ้าบาง pole เราเพียง pole เดียวจากบรรดา pole ต่างๆเหล่านี้ที่จะถูกพิจารณาเป็น pole ที่มีนัยยะสำคัญ

2.3.2 กระบวนการออกแบบ

ขั้นตอนการออกแบบเพื่อให้ได้ผลตอบสนองชั่วคราวตามต้องการเป็นดังนี้

1. อัตราการหน่วง (ζ), undamped natural frequency (ω_n) และ s_d สามารถหาได้จากสมรรถนะของผลตอบสนองชั่วคราวในสมการ (2.65)

$$P.O. = 100e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \%, t_s = 4/\zeta\omega_n (\pm 2\%), \quad (2.65)$$

$$s_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. วางตำแหน่งของ s_d , pole ทั้งหมดและ zero จำนวน $(n-1)$ ของ $G_c(s)G_p(s)$ จากข้อ (2.64) และ (2.65) ในระนาบ s

3. หาผลรวมของมุมที่จุด s_d ของ open loop pole ทั้งหมดและ zero จำนวน $(n-1)$ ของ $G_c(s)G_p(s)$ ด้วยวิธีทางกราฟหรือการคำนวณเชิงตัวเลข จากนั้นหาขนาดของมุมที่จำเป็นของ $\angle(s+z_c)$ ที่จะต้องนำมาเพิ่มเพื่อว่าผลรวมทั้งหมดของมุมที่สอดคล้องกับสมการ (2.66)

$$\begin{aligned} & \left[\angle(s+z_c) + \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s_d + p_i + \varepsilon_i) \right] \\ & - \left[\angle s_d + \angle(s_d + p_d) + \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s_d + p_i) \right] \\ & = \pm(2k+1)\pi, K=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

4. หาค่าตำแหน่งของ zero $(s+z_c)$ โดยการใช้ขนาดของมุม $\angle(s+z_c)$ ซึ่งหามาได้จากสมการ (2.66)

5. หาขนาดอัตราขยาย K_c ที่จุด s_d จากสมการนี้

$$K_c = \frac{|s_d| \prod_{i=1}^{n-1} |s_d + p_i|}{|(s_d + z_c)| \prod_{i=1}^{n-1} |s_d + p_i + \delta_i|}, \quad (2.67)$$

6. close loop transfer function คือ

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_c (s+z_c) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i + \varepsilon_i)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i + \delta_i)}, \quad (2.68)$$

เมื่อ $\prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i + \delta_i)$ เป็น close loop pole จำนวนจริงหรือเชิงซ้อน ที่อยู่ตำแหน่ง (ใกล้กับ) แกน real ด้านลบระหว่าง pole $\prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i)$ และ zero $\prod_{i=1}^{n-1} (s+p_i + \delta_i)$ เมื่อ δ_i คือ ปริมาณจริงหรือเชิงซ้อนขนาดเล็ก

เนื่องจาก close loop pole ทั้งหมดจำนวน $(n-1)$ ตัวอยู่ที่ตำแหน่งใกล้กับ zero จำนวน $(n-1)$ มันจึงสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเหล่า close loop pole เป็นสัดส่วนกับ $(\varepsilon_i + \delta_i)$ ซึ่งเป็นจำนวนขนาดเล็กมากนี้จึงหมายถึงว่าแม้ว่า pole ที่ $-p_i$ ไม่ได้หักล้างกัน ผลตอบสนองชั่วคราวที่ได้รับอันเนื่องมาจาก pole เหล่านี้จะมีขนาดที่ไม่มียยะสำคัญ และผลกระทบจากพวกมันสามารถละทิ้งได้ระบบ close loop จึงสามารถประมาณได้เป็นดังเช่นระบบอันดับ 2 ระบบหนึ่ง อย่างไรก็ตามมันเป็นที่เห็นได้ชัดว่าผลตอบสนองชั่วคราวยังไม่เป็นที่ต้องการอย่างสมบูรณ์ผล

เพราะเหตุว่าค่า overshoot ที่เกิดขึ้นจะมากกว่าปกติเนื่องจาก zero ของ $(s + z_c)$ ดังนั้น จึงมีการนำ forward controller $G_f(s)$ มาใช้

7. transfer function ของ $G_f(s)$ ที่มีโครงสร้างตายตัวในรูปของระบบล้าหลังอันดับ 1 และ อัตราขยายเป็นหนึ่งซึ่งสถานะสงบนิ่งสามารถนิยามได้เป็นสมการดังนี้

$$G_f(s) = \frac{z_c}{s + z_c} \quad (2.69)$$

pole ของ $G_f(s)$ จะใช้ในการหักล้างกับผลกระทบจาก zero $(s + z_c)$ นั่นคือ

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K_c z_c \prod_{i=1}^{n-1} (s + p_i + \varepsilon_i)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \prod_{i=1}^{n-1} (s + p_i + \delta_i)} \quad (2.70)$$

ถ้าเราพิจารณา pole-zero ใน (2.70) มีการหักล้างกันจะได้สมการ

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \cong \frac{K_c z_c}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2.71)$$

root locus ที่มีนัยยะสำคัญจะอยู่ทางด้านซ้ายระนาบ s เสมอและ pole อื่นจะอยู่บน (ใกล้กับ) แกน real ด้านลบ ถ้าหากว่าไม่มี open loop pole หรือ zero อยู่ด้านซ้ายมือของ zero $(s + z_c)$ root locus ที่มีนัยยะสำคัญจะเป็นรูปทรงกลม นอกนั้นอีกนัยหนึ่งอาจจะเป็นรูปร่างรูปเลขแปด หรืออื่นๆ ขึ้นอยู่กับจำนวนและตำแหน่งของ close loop pole หรือ zero ใน $G_c(s)G_p(s)$ มีความหมายว่าผลตอบสนองที่เร็วและ overshoot เล็กน้อยหรือไม่มีเลย สามารถที่จะรับได้โดยการเพิ่มค่าของอัตราขยาย K_c ให้สูงกว่าค่าที่ออกแบบไว้ ค่าประมาณของอัตราขยายที่จะทำให้ได้รับผลตอบสนองที่เร็วโดยปราศจาก overshoot สามารถหาได้จากเทคนิค root locus ด้วยเหตุนี้ระบบจึงสามารถทำให้มีเสถียรภาพและความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลง

2.3.3 ผลกระทบของ Output Disturbance

ถ้ามี output disturbance ปรากฏ transfer function จาก disturbance จาก output คือ

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (2.72)$$

output disturbance มีผลกระทบที่สำคัญต่อผลตอบสนองที่สถานะเริ่มต้น อย่างไรก็ตาม ผลกระทบของ output disturbance จะถูกกำจัดอย่างรวดเร็วเพราะตัวควบคุม cascade ใน

feedback ยิ่งไปกว่านั้นผลกระทบของ output disturbance สามารถลดลงได้เมื่ออัตราขยาย เมื่อ K_c เพิ่มขึ้น

2.3.4 ผลลัพธ์ของการจำลอง

ตัวอย่าง 2.8 คือตัวอย่าง plant อันดับที่ 4 ชนิด 0°

$$G_p(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)^2(s+3)}$$

สมรรถนะที่ต้องการเมื่อเป็นสัญญาณขั้นบันได คือ

$$P.O. \leq 5\%, t_s (\pm 2\%) \leq 1 \text{ sec}, e_{ss}(t) = 0$$

จากสมรรถนะที่ต้องการจะได้

$$\zeta = 0.690, \omega_n = 5.796 \text{ rad/sec}, s_d = -4 \pm j4.195,$$

แรกสุดจึงตั้งค่าตัวควบคุมเป็นดังนี้

$$G_c(s) = \frac{K_{cl}}{s} (s+z_c)(s+2.1)^2(s+3.2)$$

จากนี้หาขนาดคัมและตำแหน่ง zero ของ $(s+z_c)$

$$\angle(s+z_c) = 84.068^\circ, -z_c = -4.436$$

หาอัตราขยาย K_c นะจุด $s_d = 7.29$ ดังนั้น

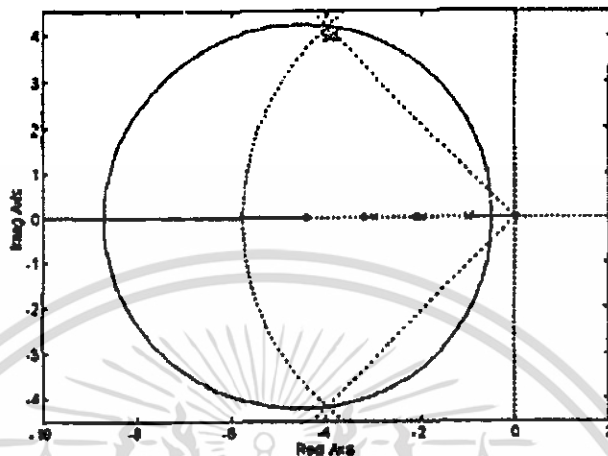
$$G_c(s)G_p(s) = \frac{7.29(s+4.436)(s+2.1)^2(s+3.2)}{s(s+1)(s+2)^2(s+3)},$$

$$G_f(s) = \frac{4.436}{s+4.436}$$

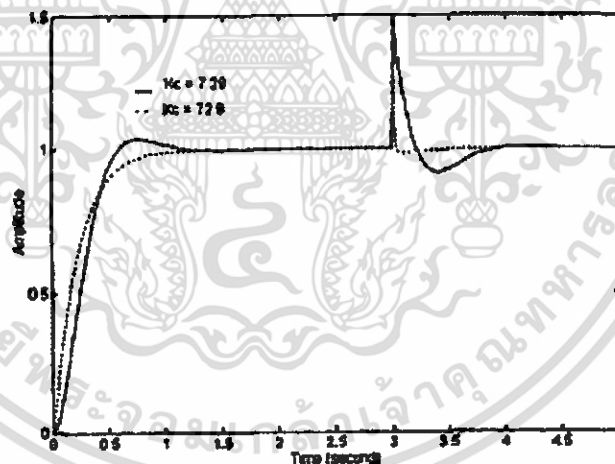
รูปที่ 2.16 แสดงถึง root locus plot ของระบบ close loop ผลตอบสนองขั้นบันไดเป็นที่ ยอมรับได้สมรรถนะทั้งหมดที่พอใจสำหรับออกแบบ $K_c = 72.9$ ($P.O. = 4\%, t_s = 1 \text{ sec}, e_{ss}(t) = 0$) และปรับค่า K_c ไปยัง 72.9 ($P.O. = 0\%, t_s = 0.8 \text{ sec}, e_{ss}(t) = 0$) ด้วยผลกระทบ output

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

disturbance 50% ที่ $t = 3 \text{ sec}$ ดังแสดงในภาพที่ 3 เมื่อ K_c เพิ่มขึ้น ผลกระทบ output disturbance ลดลง



รูปที่ 2.16 root locus ของระบบ close loop



รูปที่ 2.17 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 0°

ตัวอย่าง 2.9 ตัวอย่าง plant อันดับที่ 3 ชนิด 1°

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

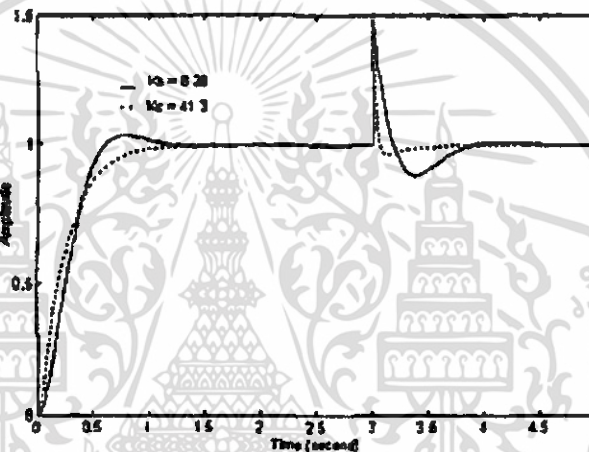
เมื่อสมรรถนะที่ต้องการเหมือนเดิมจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{8.26(s+3.79)(s+1.3)(s+4.2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

$$G_f(s) = \frac{3.79}{s+3.79}$$

รูปที่ 2.18 แสดงถึงผลตอบสนองขั้นบันไดของระบบควบคุม (ของ plant ชนิด 1") ที่สมรรถนะที่ต้องการจะได้อัตราขยาย $K_c = 8.26$ ($P.O. = 3.1\%$, $t_r = 0.95 \text{ sec}$, $e_{ss}(t) = 0$) และ $K_c = 41.3$ ($P.O. = 0\%$, $t_r = 1 \text{ sec}$, $e_{ss}(t) = 0$) เมื่อผลกระทบ output disturbance 50% ที่ $t = 3 \text{ sec}$ และอีกครั้งเมื่อเพิ่มอัตราขยาย K_c ผลกระทบของ output disturbance ลดลง



รูปที่ 2.18 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 1"

ตัวอย่าง 2.10 คือตัวอย่างที่มีพารามิเตอร์ไม่แน่นอน

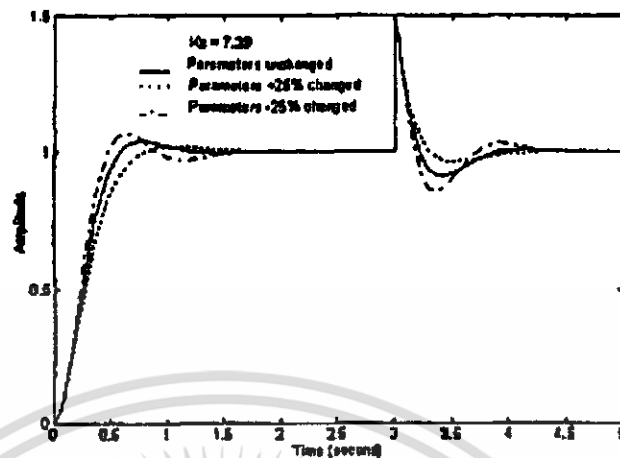
ถ้าพารามิเตอร์ของ plant เบี่ยงเบนเปลี่ยนไป $\pm 25\%$ transfer function ของ $G_c(s)G_p(s)$ ในตัวอย่างข้างบนซึ่งเป็น plant ชนิด 0" คือ (พารามิเตอร์ของตัวยังคงไม่เปลี่ยนแปลง)

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_c(s+4.436)(s+1.2)^2(s+3.2)}{s(s+1.25)(s+2.5)^2(s+3.75)}; (+25\%),$$

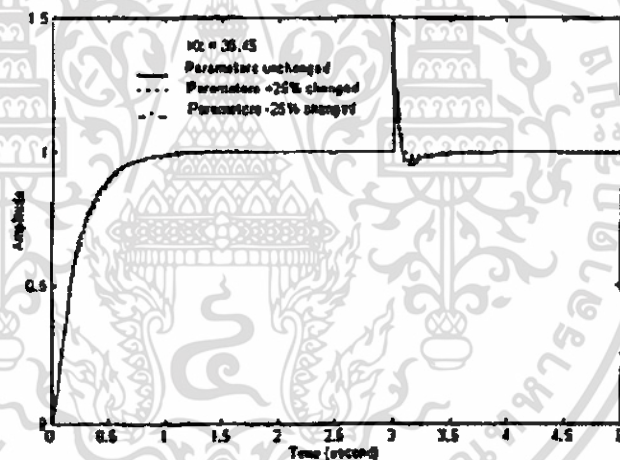
$$G_c(s)G_p(s) = \frac{K_c(s+4.436)(s+1.2)^2(s+3.2)}{s(s+0.75)(s+1.5)^2(s+2.25)}; (-25\%).$$

ผลตอบสนองขั้นบันไดของระบบที่ถูกควบคุมนี้ที่ยังไม่มีเบี่ยงเบนพารามิเตอร์เปรียบเทียบกับผลตอบสนองขั้นบันไดที่มีการเบี่ยงเบน $\pm 25\%$ สำหรับ $K_c = 7.29$ และ 35.45 ที่แสดงในภาพที่ 2.19 และ ภาพที่ 2.20 เป็นที่สังเกตได้ชัดว่าสมรรถนะโดยรวมของระบบยังคงไม่เปลี่ยนแปลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.19 ผลตอบสนองขั้นบันไดของ plant ชนิด 0° ที่ไม่ปรับค่าพารามิเตอร์และปรับค่าพารามิเตอร์ $\pm 25\%$



รูปที่ 2.20 ผลตอบสนองของ plant ชนิด 0° ที่ไม่ปรับค่าพารามิเตอร์และปรับค่าพารามิเตอร์ $\pm 25\%$

2.3.5 บทสรุป

ตัวควบคุม PID x ($n-2$) stage PD cascade ออกแบบด้วยเทคนิค root locus สำหรับระบบควบคุมที่เป็น 2-DOF ได้นำมาเสนอมาตามตัวอย่างที่ผ่านๆมานี้ ข้อดีของตัวควบคุมนี้ก็คือมันสามารถนำไปประยุกต์กับ plant อันดับสูงๆ โดยไม่มีการการปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีใดๆอีก ระบบควบคุมโดยรวมสามารถจะประมาณได้เป็นดังเช่นเสถียรและคงทนอันดับ 2 ซึ่งสมรรถนะที่ต้องการสามารถได้รับโดยไม่ต้องปรับค่าอัตราขยายอีก ผลตอบสนองที่รวดเร็ว ที่มี overshoot ที่น้อยหรือไม่มีเลยสามารถได้รับด้วยการปรับค่าอัตราขยาย K_c ให้มากกว่าค่าคำนวณได้ ยิ่งไปกว่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

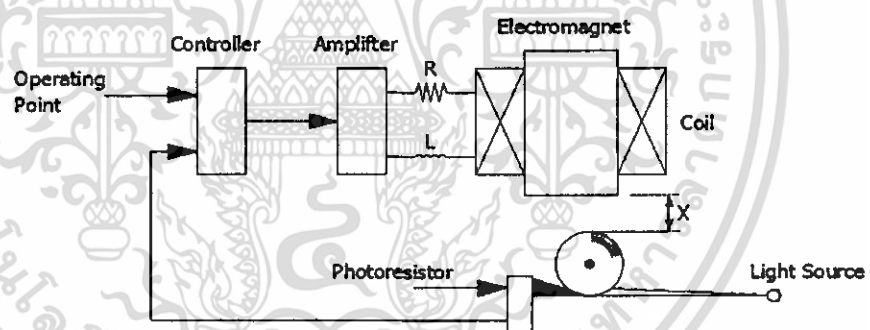
ตัวควบคุม cascade ยังกำจัดผลกระทบ output disturbance ได้รวดเร็ว ผลลัพธ์การจำลองยังได้แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมสามารถนำไปประยุกต์กับ plant ที่มีพารามิเตอร์เบี่ยงเบนไปจากเดิม $\pm 25\%$

อย่างไรก็ดีตัวควบคุม cascade นี้ไม่สามารถนำไปใช้กับ plant อันดับ 1 และจะใช้ตัวควบคุม PI แทน

2.4 การออกแบบระบบควบคุมการลอยตัวแม่เหล็ก

2.4.1 การวิเคราะห์ระบบ

ในรูปที่ 2.21 ball bearing ของมวล m ถูกแทนที่ด้วยแม่เหล็กไฟฟ้าที่ระยะทาง x การที่กระแสไหลเข้าสู่คอยล์ขดลวดแม่เหล็กไฟฟ้าจะให้กำเนิดแรงเหนี่ยวนำของแม่เหล็กไฟฟ้าเพื่อจะดูด ball bearing แรงลัพท์ระหว่างแรงแม่เหล็กไฟฟ้าและความเร่งโน้มถ่วงจะเหนี่ยวนำการเคลื่อนที่ของ ball bearing ขึ้นหรือลง photo resistor ตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่ง ball bearing ด้วยปริมาณของเงาที่ทอดลงบนพื้นผิวและสะท้อนกลับเข้าสู่วงจรควบคุมและวงจรขยายสัญญาณเพื่อควบคุมกระแส input เพื่อรักษาตำแหน่งของ ball bearing ให้สมดุลรอบจุดสมดุล



รูปที่ 2.21 ระบบควบคุมการลอยตัวแม่เหล็ก

สมการพลศาสตร์ (dynamic) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\square \quad f = C \left(\frac{i}{x} \right)^2 \quad (2.73)$$

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2.74)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - f \quad (2.75)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

- f แรงสนามแม่เหล็ก
- i กระแสคอยล์
- x ระยะทางระหว่างแม่เหล็กไฟฟ้าและ ball bearing
- c ค่าคงที่
- e แรงดันในขดลวด
- r ความต้านทานในขดลวด
- l ความเหนี่ยวนำในขดลวด
- m น้ำหนักของ ball bearing
- g ความเร่งโน้มถ่วง

สมการพลศาสตร์ (dynamic) ไม่เป็นเชิงเส้น ก่อนที่เราจะทำการประยุกต์เข้าสู่ทฤษฎีควบคุมเชิงเส้นไปใช้ สมการพลศาสตร์ (dynamic) เป็นอยู่ในเชิงเส้นตำแหน่งจุดทำงาน สมการเชิงเส้นซึ่งอธิบายถึงการเปลี่ยนจากจุดทำงานได้มาจากการใช้สมการเชิงเส้นจากการแตกอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าการเปลี่ยนแปลงของจุดทำงานถูกแทนที่ “0” และการเปลี่ยนแปลงรอบๆจุดทำงานถูกแทนที่ด้วย “1” ดังสมการเชิงเส้นนี้คือ

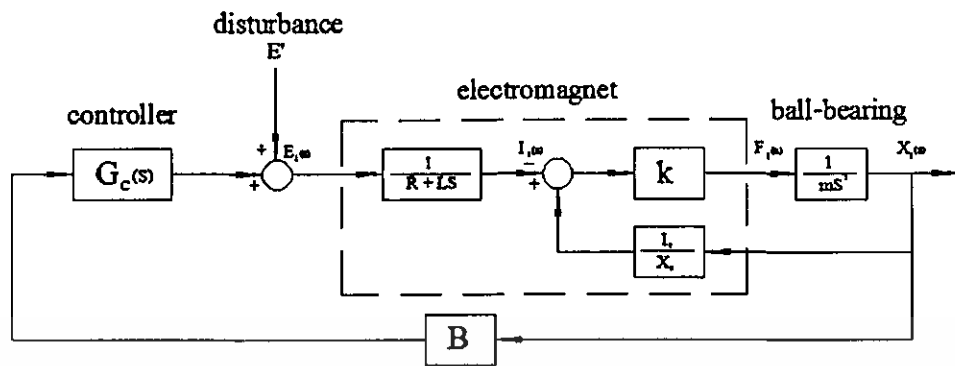
$$f_1 = \frac{2Ci_0}{x_0^2} i_1 - \frac{2Ci_0^2}{x_0^3} x_1 \quad (2.76)$$

$$e_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (2.77)$$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f_1 \quad (2.78)$$

โดยที่

$$f_0 = mg = c \left(\frac{i_0}{x_0} \right)^2$$



รูปที่ 2.22 บล็อกไดอะแกรมของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

Laplace transform ของสมการที่ (2.76)-(2.78) ได้เป็น

$$F_1(s) = k \left[I_1(s) - \frac{i_0}{x_0} X_1(s) \right] \tag{2.79}$$

$$E_1(s) = (R + Ls)I_1(s) \tag{2.80}$$

$$ms^2 X_1(s) = -F_1(s) \tag{2.81}$$

เมื่อ

$$k = 2C \frac{i_0}{x_0^2}$$

บล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 2.22 คือระบบการลอยตัวแม่เหล็ก เป็นสมการคุณลักษณะของระบบควบคุมจึงได้เป็น

$$Q(s) = x_0 Lms^3 + x_0 Rms^2 - ki_0 Ls - ki_0 R + G_c(s) kx_0 B = 0. \tag{2.82}$$

2.4.2 เทคนิคการชดเชย

รูปที่ 2.23 แม่เหล็กไฟฟ้าถูกสร้างจากขดลวดขนาด 22 mm รอบแกนเหล็กคาร์บอน 3600 รอบ ที่ขนาด (d) = 25 mm และความยาวที่ (l) = 100 m พารามิเตอร์ตัวอื่นที่ใช้วัดถูกแสดงตามตารางในตารางที่ 2.4

สมการที่ (2.82) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

โดยนำค่า $x_0 Lms^3 + x_0 Rms^2 - ki_0 Ls - ki_0 R$ ทหารสมการที่ (2.82) ได้ดังนี้

$$Q(s) = 1 + \frac{G_c(s) kx_0 B}{x_0 Lms^3 + x_0 Rms^2 - ki_0 Ls - ki_0 R} = 0 \tag{2.83}$$

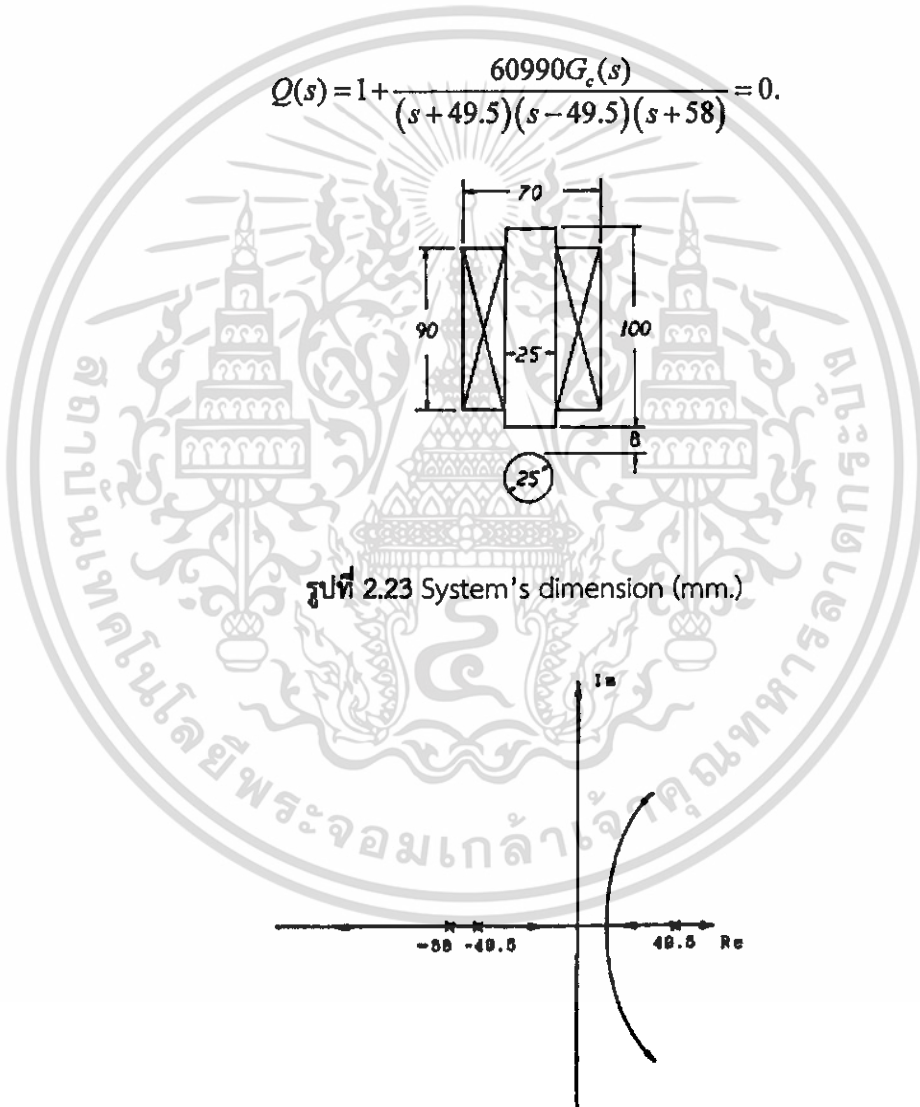
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$Q(s) = 1 + \frac{G_c(s) \frac{kB}{mL}}{\left(s + \sqrt{\frac{ki_0}{mx_0}}\right) \left(s - \sqrt{\frac{ki_0}{mx_0}}\right) \left(s + \frac{R}{L}\right)} = 0. \quad (2.84)$$

แทนพารามิเตอร์ในสมการ (2.84) เราจะได้เป็น

$$Q(s) = 1 + \frac{60990G_c(s)}{(s + 49.5)(s - 49.5)(s + 58)} = 0. \quad (2.85)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.4 พารามิเตอร์สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

x_0	0.008 m
m	0.068 kg
R	28 Ω
L	0.483 H
i_0	0.76 A
C	$7.39 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{A}^2$
k	1.756 N/A
B	$1.14 \times 10^3 \text{ V/m}$

เริ่มต้น, การพิจารณา $G_c(s)$ เป็นตัวควบคุมแบบอัตราขยาย (ตัวอย่างเช่น อัตราขยายคงที่) root locus ของระบบคือสิ่งที่แสดงในรูปที่ 2.24

รูปที่ 2.24 แสดงให้เห็นว่าระบบไม่สามารถรักษาเสถียรภาพได้โดยการปรับค่าอัตราขยายเพียงอย่างเดียว มันยังต้องการที่จะเลื่อน root locus ไปทางซ้ายของระนาบ s เพื่อที่จะทำให้ระบบมีเสถียรภาพ โดยการเลือกอัตราขยายที่เหมาะสม เพราะว่า lead network สามารถเป็นไปตามวัตถุประสงค์ phase-lead controller ถูกกำหนดให้สำหรับ $G_c(s)$ เทคนิคของการออกแบบ phase-lead compensation ในกรณีนี้ทำได้โดยการแทนที่ zero ของตัวชดเชยตั้งแต่ 0 ถึง -49.5 และเมื่อใกล้ -49.5 บนแกน real ของระนาบ s ขณะที่ pole ของตัวชดเชยแทนด้วยประมาณ 10 เท่าของตำแหน่ง zero [7] ดังนั้น phase-lead compensator ที่ถูกเลือกจึงได้เป็นดังนี้

$$G_c(s) = K \frac{s+40}{s+400} \quad (2.86)$$

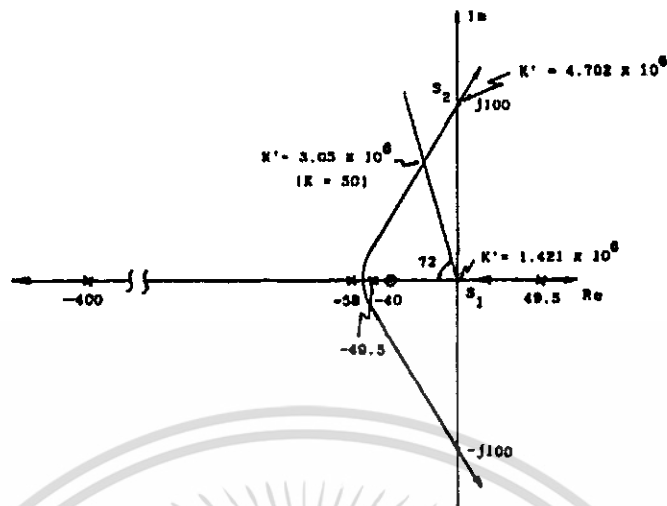
สมการคุณลักษณะของสมการ (2.86) ได้เป็นดังนี้

$$Q(s) = 1 \frac{K'(s+40)}{(s+49.5)(s-49.5)(s+58)(s+400)} \quad (2.87)$$

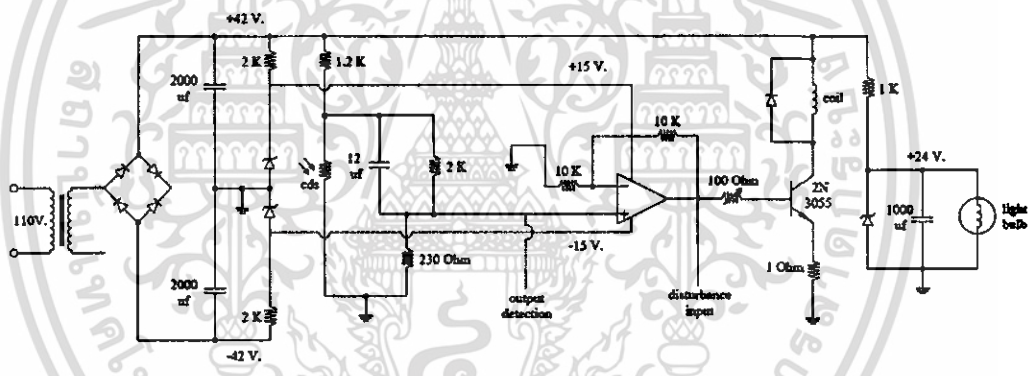
เมื่อ

$$K' = 60990K \text{ เมื่อ } K \text{ คือ อัตราขยาย}$$

root locus ของ (2.87) สำหรับ K' เปลี่ยนจาก $0 \leq \infty$ ที่แสดงในรูปที่ 2.25 ในรูปที่ 2.25 สำหรับระบบเสถียรอัตราขยายต่ำสุดคือ $K' = 1.421 \times 10^6$ หรือ $K = 23$ ที่จุด S_1 และอัตราขยายสูงสุดคือ $K' = 4.702 \times 10^6$ หรือ $K = 77$ ที่จุด S_2 เราเลือกอัตราขยายระดับกลางคือ $K = 50$ วงจรควบคุมสำหรับระบบควบคุมการลอยตัวแม่เหล็กที่แสดงในภาพที่ 2.26



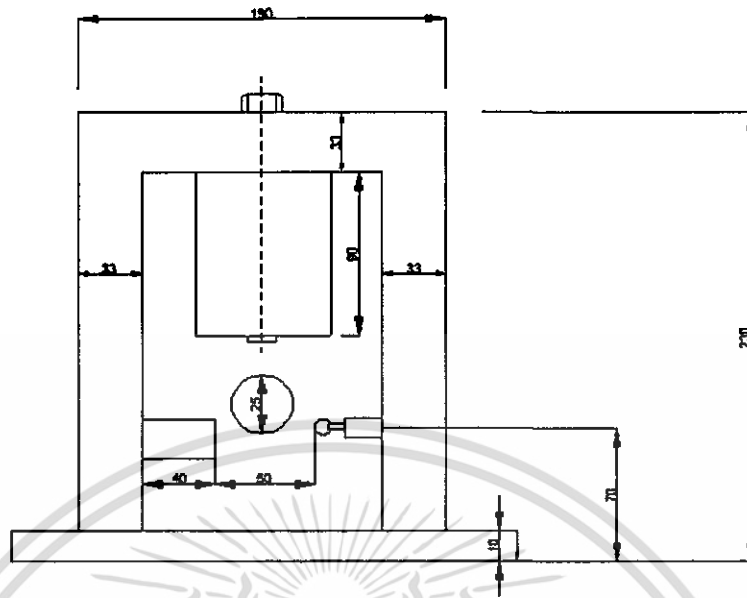
รูปที่ 2.25 ระบบ root locus (ด้วยวงจรถดเชยเฟสแบบนำหน้า)



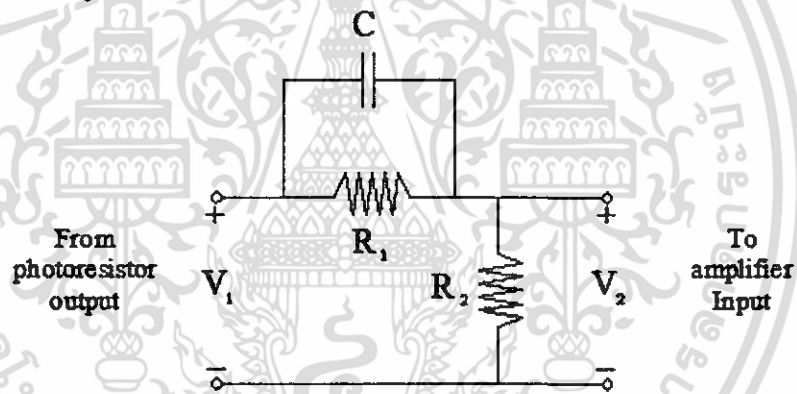
รูปที่ 2.26 วงจรไฟฟ้าของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

2.4.3 การออกแบบระบบและการทดลอง

โครงสร้างของอุปกรณ์จำลองการควบคุมที่แสดงในรูปที่ 2.27 ค่าเบี่ยงเบนจากตำแหน่งสมดุลของ ball bearing ที่ทอดเงาลงบน photoresistor ซึ่งมันทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าที่จะเปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของ ball bearing ดังนั้น แรงดันไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงจึงถูกใช้เป็นสัญญาณป้อนกลับเพื่อควบคุมตำแหน่งของ ball bearing ดังนั้น photoresistor ที่ไวต่อความเข้มของแสงบนพื้นผิวของมัน หลอดสีดำเพื่อคลุมตัว photoresistor และหยุดการทำงานผลกระทบของสัญญาณรบกวนจากแสงภายนอก ในการออกแบบระบบนี้ phase-lead compensation หาได้จากการใช้วงจร RC อย่างง่ายดังแสดงรูปที่ 2.28

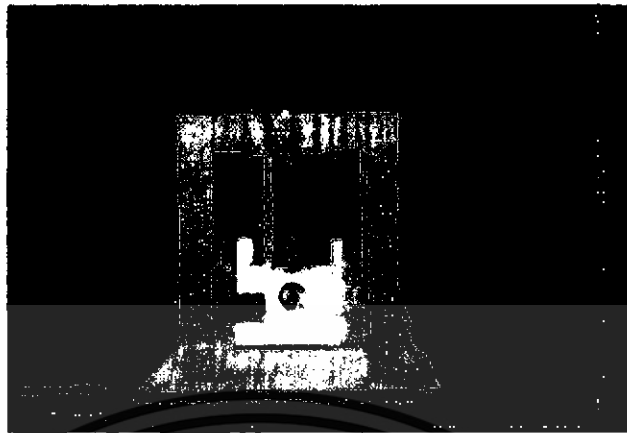


รูปที่ 2.27 ออกแบบขนาดของระบบการลอยตัวแม่เหล็ก (mm)

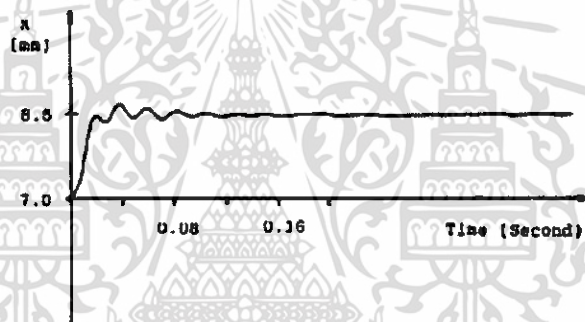


รูปที่ 2.28 วงจร Lead Compensator

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.29 ระบบการลอยแม่เหล็กของจริง



รูปที่ 2.30 ระบบตอบสนองขึ้นบันไดจากการทดลอง

ส่วนที่ยากที่สุดสำหรับการออกแบบนี้คือการเลือก R_1 และ R_2 เพื่อให้ค่าของ V_2 คงที่ โดยแรงดันไบแอส (bias voltage) ที่เหมาะสมสำหรับทรานซิสเตอร์กำลัง (power resistor) ซึ่งทรานซิสเตอร์นั้นต้องจ่ายกระแสให้กับคอยล์ เพื่อให้สร้างแรงแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งประมาณค่าเท่ากับน้ำหนักของ ball-bearing ที่จุดทำงาน การทดลองหลายครั้งจึงเป็นสิ่งจำเป็น

รูปที่ 2.29 คือรูปการแสดงผลของระบบควบคุม ในรูปที่ 2.30 ระบบตอบสนองเวลาเคลื่อนที่ได้มาจากเครื่องบันทึกกรุ่น HP 7015B X-Y โดยการประยุกต์ใช้สัญญาณขั้นบันไดรบกวน (step disturbance) ให้กับระบบ ถ้าสัญญาณรบกวนเกินขอบเขตเส้นตรง (linearized range) ระบบจะไม่สามารถควบคุมได้ การทดลองในห้องควบคุมสัญญาณรบกวนที่ยอมรับได้ของระบบ $\pm 1.0\%$ mm จาก x_0

2.4.4 ระบบการลอยตัวแม่เหล็ก

ระบบการควบคุมการลอยตัวแม่เหล็กถูกพิสูจน์ว่าสำเร็จสำหรับแบบจำลองในห้องทดลองของการควบคุมแบบป้อนกลับ มันเป็นสิ่งที่มีความสำคัญมากในการศึกษาการควบคุมโดยการใช้อุปกรณ์สาธิตที่เหมือนกับตัวอย่างการออกแบบการควบคุมจริง มันเป็นไปได้ที่สรุปว่าอุปกรณ์นี้เป็นเหมือนการทดลองสำหรับการออกแบบตัวชดเชยด้วยตำแหน่งการทำงานที่ต่างกันหรือขนาดของ ball bearing ที่ต่างกัน

2.5 หลักการ Posicast PID

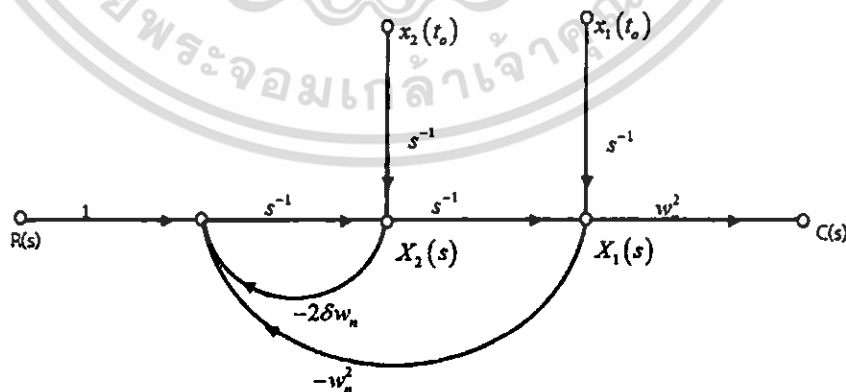
2.5.1 STE (State Transition Equation) ของระบบอันดับ 2

จาก CL TF (Control loop Transfer Function) สมการที่ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ จะเขียนเป็น สมการพลศาสตร์ (dynamic equation) ได้ดังนี้

$$\text{State equation} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.88)$$

$$\text{Output equation} \quad \bar{c}(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะสามารถเขียน STSFG (State Transition Signal Flow Graph) ได้ดังรูป 2.31 เมื่อใช้สูตรของ Mason จะสามารถเขียน transformed STE (State Transition Equation) ได้ดังนี้



รูปที่ 2.31 STSFG ของระบบควบคุมป้อนกลับอันดับ 2 (second-order)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} s+2\delta w_n & 1 \\ -w_n^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} R(s) \quad (2.89)$$

เมื่อ $D = s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2$

โดยทำ inverse laplace transform เข้ากับสมการที่ (2.89) จะได้ STE สำหรับ $t \geq t_0$ และ unit step input $u(t-t_0)$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) + \phi_1 \right] \\ \frac{-w_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) \right] \\ \frac{1}{w_n \sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) \right] \\ \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) + \phi_2 \right] \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{w_n^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) - \phi_2 \right] \right\} \\ \frac{1}{w_n \sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left[w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) \right] \end{bmatrix}, (t \geq t_0)$$

ที่ซึ่ง $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$ และ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}$

Output response ของระบบอันดับ 2 ที่มี unit step function input คือ

$$\begin{aligned} c(t) = w_n^2 x_1(t) &= \frac{w_n^2}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left\{ w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) + \phi \right\} x_1(t_0) \\ &+ \frac{w_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left\{ w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) \right\} x_2(t_0) \\ &+ 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n(t-t_0)} \sin \left\{ w_n \sqrt{1-\delta^2} (t-t_0) + \phi \right\}; (t \geq t_0) \end{aligned} \quad (2.91)$$

ถ้าให้ input เป็น step function ที่มีสอง step ดังรูป 2.32 (ก) step แรกนี้จะป้อนเข้าที่เวลา $t=0$ และให้ขนาดความสูงของ step แรกนี้เท่ากับ k ซึ่งค่า k จะขึ้นกับ max. overshoot ของ step response ของฟังก์ชันแรกนี้มีค่าเท่ากับหนึ่ง ถ้าหาก damping ratio $\delta = 0.2$ จากสมการที่ (2.89) จะให้

$$P.O. = 53\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น step แรกจะต้องมีขนาดความสูง

$$k = \frac{1}{1.53} = 0.65$$

ณ เวลา ที่ให้ max. overshoot จะมีค่า

$$c(t) = 1 \text{ และ } c'(t) = 0$$

และแล้วป้อน step function ที่ (ซึ่งเป็น unit step function) เข้าไปในระบบนี้ตรงเวลา $t_0 = t_{\max}$

ซึ่งจะคำนวณค่าได้จากสมการที่ $t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} \sqrt{1 - \xi^2}$ จะได้

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - 0.04}} = \frac{3.2}{\omega_n} \quad (2.92)$$

จะมีค่า initial state เท่ากับค่า response ของ step แรกตรงที่เกิด max. overshoot (หรือ ณ เวลา t_{\max}) ซึ่งจะมีค่า

$$x_1(t_0) = 1 \text{ และ } x_2(t_0) = 0$$

จากรูปที่ 2.33 และสมการที่ (2.92) จะได้

$$c(s) = \frac{w_n^2 \{ (s + 2\delta w_n) x_1(t_0) + x_2(t_0) + R(s) \}}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2} \quad (2.93)$$

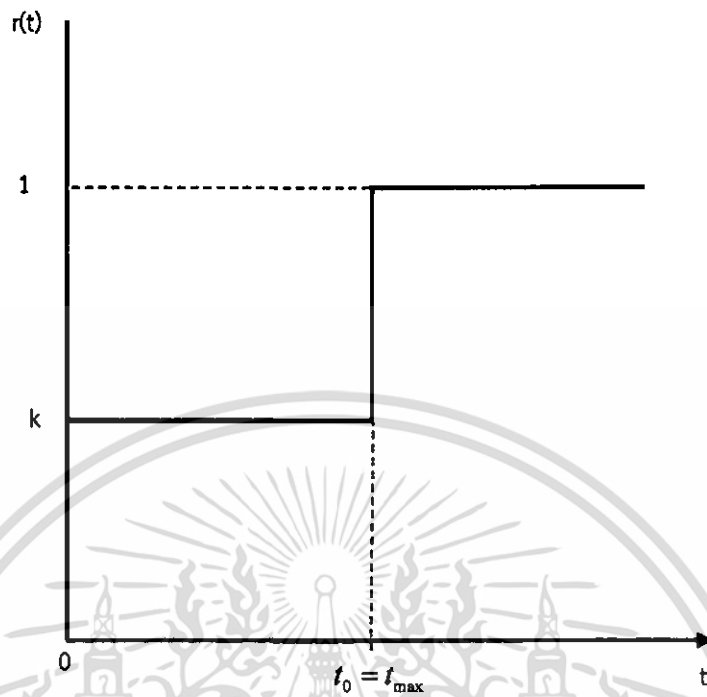
เมื่อแทนค่า $x_1(t_0) = 1, x_2(t_0) = 0, R(s) = \frac{1}{s}$ และใช้ partial function จะได้

$$\begin{aligned} c(s) &= \frac{w_n^2 (s + 2\delta w_n)}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2} + \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2)} \\ c(s) &= \frac{w_n^2 (s + 2\delta w_n)}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2} + \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{w_n^2 (s + 2\delta w_n)}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2} \\ c(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

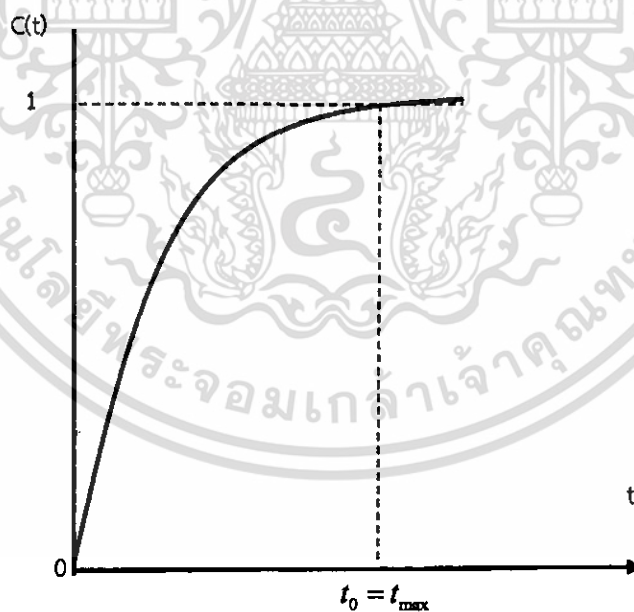
เมื่อทำ inverse Laplace transform จะได้

$$c(t) = 1, t \geq t_{\max} \quad (2.94)$$

ซึ่งแสดงว่าเมื่อป้อน step function แรกที่มีขนาดความสูง 0.65 และเมื่อถึงเวลา $t_0 = t_{\max}$ ให้ป้อน unit step function เข้าไป จะให้ output response เข้า steady state ทันที (รูปที่ 2.33)
) วิธีควบคุมเช่นนี้เรียกว่า posicast control ซึ่ง O.J.M. Smith ได้แนะนำเป็นรายแรก [8]



รูปที่ 2.32 รูปสัญญาณ input ที่เป็น step function สอง step



รูปที่ 2.33 output response ของ รูป 2.32

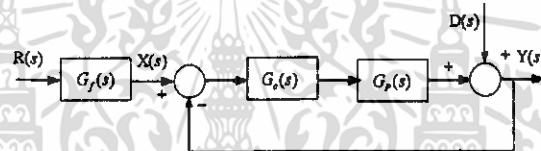
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุม PID อนุกรมด้วย PD จำนวน $(n-2)$ ภาค แบบ Posicast + Feed Forward สำหรับระบบการลอยแม่เหล็ก

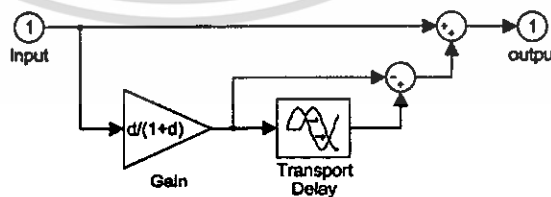
3.1 กล่าวนำ

เพราะว่าตัวควบคุม PID เหมาะสมที่จะใช้ควบคุมระบบอันดับ 2 เท่านั้น ไม่เหมาะสำหรับควบคุมระบบอันดับ 3 หรือมากกว่า ในการที่จะควบคุมระบบอันดับ $n=3$ หรือ สูงกว่า ได้มีการนำเสนอ การออกแบบตัวควบคุม PID $\times (n-2)$ Stage PD Cascade Controllers โดยอาศัยเทคนิค root locus ในกรอบของระบบเวลาแบบต่อเนื่อง โครงสร้างของระบบควบคุมจึงกลายเป็นระบบ 2 DOF (Two Degree of Freedom) ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 โครงสร้างของระบบควบคุม 2-DOF

โดยการวาง zero ของตัวควบคุมที่ออกแบบในแนวทางของอาจารย์กิติติ ระบบควบคุมโดยรวมทั้งหมด จึงประมาณได้เป็นระบบอันดับ 2 แบบมาตรฐาน จากผลตอบสนองของ output ต่อสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step) ของระบบอันดับ 2 แบบมาตรฐาน overshoot สูงสุดจะเกิดอยู่ที่ peak time แรก ด้วยขนาด $1+Mp$ ตอนนี้อัดสัญญาณขั้นบันไดขณะหนึ่งหน่วย ปรับรูปทรงใหม่ (reshaped) เป็นสองส่วน โดยส่วนแรกเป็นสัญญาณขั้นบันไดที่มีขนาด $1/(1+Mp)$ ณ เวลา $t=0$ ส่วนที่สองเป็นสัญญาณขั้นบันไดที่มีขนาด $Mp/(1+Mp)$ และ ประวิงด้วยเวลา t_p ซึ่งเขียนได้ด้วย แสดงในรูปที่ 3.2



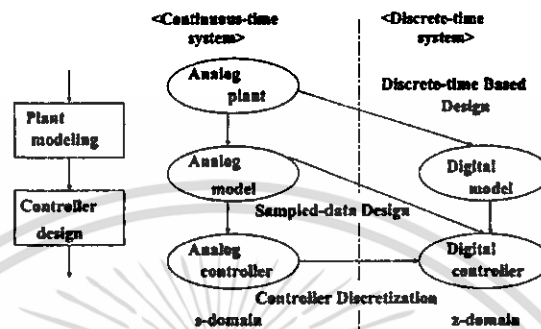
รูปที่ 3.2 SIMULINK diagram

3.2 วิธีการออกแบบ

ในรูปที่ 3.3 จาก [3] จะเห็นได้ว่าการออกแบบระบบควบคุมมีอยู่สองขั้นตอนดังนี้

1 แบบจำลอง

2 ออกแบบตัวควบคุม



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนของการออกแบบระบบควบคุมแบบดิจิทัล

3.2.1 แบบจำลอง

จากภาพที่ 2.23 [4] ได้นำสมการคุณลักษณะของระบบการลอยตัวแม่เหล็กจากบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.4 สมการ (2.85) เป็นรูปแบบ Plant คือ

$$Q(s) = 1 + \frac{60990G_c(s)}{(s+49.5)(s-49.5)(s+58)} = 0. \quad (3.1)$$

3.2.2 ออกแบบตัวควบคุม

ให้ plant ที่มีอันดับ n $G(s)$ ซึ่งจะถูกควบคุมด้วยคอนโทรลเลอร์ $K(s)$ มี Transfer function ของมันให้มาเป็นอย่างนี้

$$\begin{cases} G(s) = \frac{K_n}{s^N (T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_p s+1)}, \\ = \frac{60990}{(s+49.5)(s-49.5)(s+58)}; \quad n=3, N=0. \end{cases} \quad (3.2)$$

ส่วนตัวควบคุม PID มี Transfer function เป็น

$$K_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_{pid} \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}, \quad (3.3)$$

$$\zeta = \frac{\left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2}} = 0.69. \quad (3.9)$$

และจากเวลาเข้าที่ $\{t_s(\pm 2\%) \}$ และความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ เขียนเป็นสมการดังนี้

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} = 61.373 \text{ rad./sec.} \quad (3.10)$$

ดังนั้น dominant closed - loop poles 1 ตัวจะอยู่ที่

$$s_d = -42.354 + j44.416. \quad (3.11)$$

open loop transfer function โดยไม่มี z_{pd} ที่ s_d คือ

$$KGwoz_{pd}(s_d) = \frac{\overbrace{(s_d + 49.6)}^{80.734^\circ} \overbrace{(s_d + 58.1)}^{70.48^\circ} 60990}{\underbrace{s_d}_{133.639^\circ} \cdot \underbrace{(s_d + 49.5)}_{80.86^\circ} \underbrace{(s_d + 58)}_{70.595^\circ} \underbrace{(s_d - 49.5)}_{154.194^\circ}} \quad (3.12)$$

$$KGwoz_{pd}(s_d) = \frac{3.025 + j9.269}{9.75} \angle 71.927^\circ$$

มุมจากนำของ z_{pd} ไปยัง s_d คือ

$$\begin{cases} \arg(z_{pd}) = \pi - \arg(KGwoz_{pd}(s_d)) = \angle (s_d + z_{pd}), \\ = 108.073^\circ. \end{cases} \quad (3.13)$$

มันมีความหมายว่า

$$\angle KG(s_d) = \frac{\overbrace{151.214^\circ}^{(s_d + 49.6)(s_d + 58.1)} \overbrace{108.073^\circ}^{(s_d + z_{pd})} 60990}{\underbrace{439.287^\circ}_{s_d \cdot (s_d + 49.5)(s_d + 58)(s_d - 49.5)}}, \quad (3.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ส่วนตัวเท่านั้น ไม่สามารถเผยแพร่ได้โดยไม่ได้รับอนุญาต
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ส่วนตัวเท่านั้น ไม่สามารถเผยแพร่ได้โดยไม่ได้รับอนุญาต
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $\angle (s_d + z_{pd})$ มากกว่า 90° ดังนั้นซีโร z_{pd} อยู่ทางด้านขวาของ s_d เป็นสมการดังนี้

$$z_{pd} = |\operatorname{Re}(s_d)| - \frac{|\operatorname{Im}(s_d)|}{\tan(\pi - \angle (s_d + z_{pd}))} = 27.86. \quad (3.15)$$

Gain ของตัวควบคุม สามารถหาได้จากเงื่อนไขของขนาด (magnitude condition) ดังนี้

$$K = \frac{\overbrace{61.373}^{|s_d|} \overbrace{44.987}^{|s_d + 49.5|} \overbrace{47.091}^{|s_d + 58|} \overbrace{102.029}^{|s_d - 49.5|}}{\underbrace{45.003}_{|s_d + 49.6|} \underbrace{47.125}_{|s_d + 58.1|} \underbrace{46.721}_{|s_d + 27.86|} 60990} = \frac{2.195}{1000}. \quad (3.16)$$

ดังนั้นขนาด open loop transfer function คือ $|KG(s_d)|$

$$\left. \begin{array}{ccc} \text{Find} & \text{Pre-assigned} & \text{Find} \\ \left(\frac{2.195}{1000} \right) & |s_d + 49.6| |s_d + 58.1| |s_d + 27.86| & 60990 \end{array} \right\} = 1. \quad (3.17)$$

$$\frac{\left(\frac{2.195}{1000} \right) |s_d + 49.6| |s_d + 58.1| |s_d + 27.86| 60990}{|s_d| |s_d + 49.5| |s_d + 58| |s_d - 49.5|} = 1.$$

ท้ายสุด open loop transfer function สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\left\{ \begin{array}{l} KG(s) = \frac{K(s+49.6)(s+58.1)(s+z_{pd})60990}{s(s+49.5)(s+58)(s-49.5)}, \\ K = 2.195 \times 10^{-3}, \quad z_{pd} = 27.86. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

เพื่อที่จะลดขนาด overshoot เนื่องมาจากการเพิ่ม zero $(s + z_{pd})$ เข้าไปยัง open loop transfer function $KG(s)$ forward controller จึงถูกเพิ่มเข้ามา

$$K_f(s) = z_{pd} / (s + z_{pd}) \quad (3.19)$$

ระบบโดยรวมทั้งหมดจึงสามารถประมาณได้ราวกับว่ามันเป็นระบบอันดับสองมาตรฐานดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &\approx \left(\frac{z_{pd}}{s+z_{pd}} \right) \left(\frac{K(s+z_{pd})60990}{s(s-49.5) + K(s+z_{pd})60990} \right) \\ &\approx \frac{K60990z_{pd}}{s^2 + \underbrace{(K60990 - 49.5)}_{84.383} s + \underbrace{(K60990z_{pd})}_{3.73 \times 10^3}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ $\approx \frac{3.73 \times 10^3}{s^2 + 2 \cdot \frac{0.691 \cdot 61.073}{3.73 \times 10^3} s + \frac{3.73 \times 10^3}{3.73 \times 10^3}}$ ให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา ζ ละตัว ω_n ง่ายอิงถึง ω_n^2 ของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลตอบสนอง output ต่อสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วยของระบบอันดับ 2 แบบมาตรฐาน maximum overshoot เป็น

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05, \quad \zeta = 0.691. \quad (3.21)$$

Maximum overshoot เกิดอยู่ที่ peak time แรก

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.071 \text{ secs.}, \quad \omega_n = 61.073 \text{ rad/sec.} \quad (3.22)$$

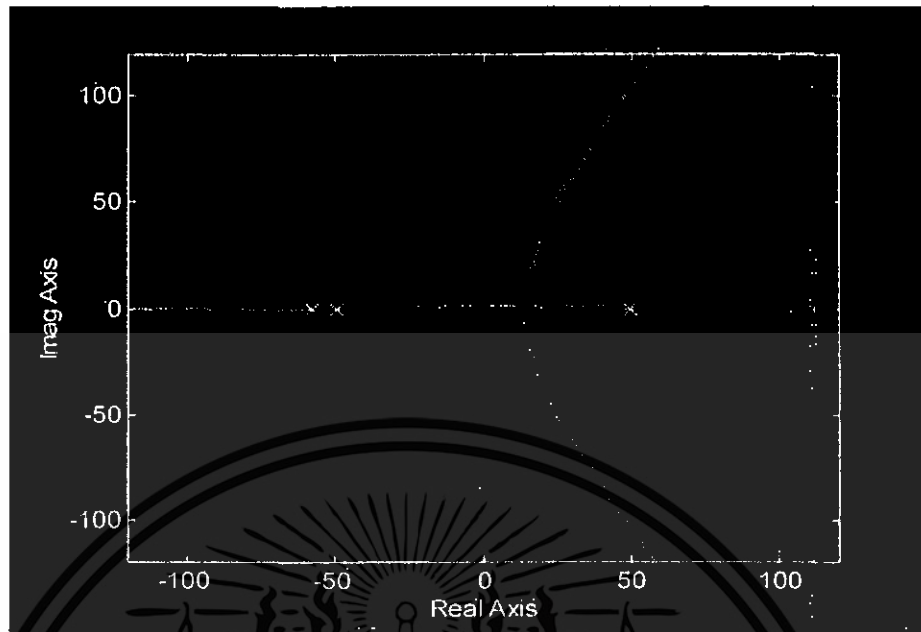
เพื่อที่จะให้ได้รับผลตอบสนองโดยที่ไม่มี overshoot สัญญาณขั้นบันไดขนาดหนึ่งหน่วย จะถูกปรับขนาดใหม่ด้วยเฟคเตอร์ ในสองส่วนดังนี้

$$\underbrace{\frac{1}{1+M_p}}_{\text{1}} + \underbrace{\frac{M_p}{1+M_p} e^{-t_r s}}_{\text{2}} = 1 - \underbrace{\frac{M_p}{1+M_p}}_{\text{1}} + \underbrace{\frac{M_p}{1+M_p} e^{-t_r s}}_{\text{2}}. \quad (3.23)$$

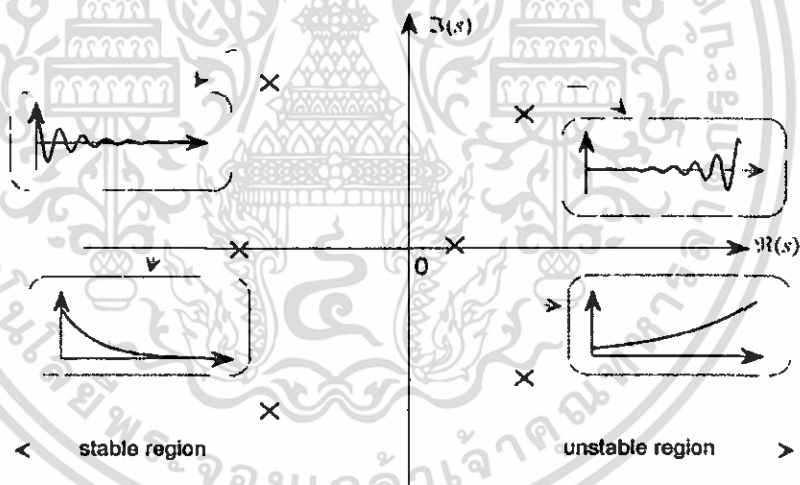
Posicast = 1 + P(s)

บทที่ 3.3 ผลลัพธ์การจำลอง

รูปที่ 3.4 เห็น root loci ของระบบลอยตัวแม่เหล็ก จะเห็นว่าระบบที่ไม่คงที่ในธรรมชาติ เพราะมี pole อยู่ในระนาบครึ่งขวาสัมพันธ์กับส่วนประกอบเลขชี้กำลังที่เพิ่มขึ้น Ce^{st} ในปฏิบัติการ เอกพันธ์ (ที่ซึ่งค่าคงที่ C กำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น) ดังแสดงในรูปที่ 3.7[5] หลังจากตัวควบคุม PID $\times (n-2)$ stage PD cascade controller ถูกนำไปใช้ pole จาก integral ที่จุดกำเนิด สามารถนำ pole ที่ไม่คงที่ข้ามแกนจินตภาพไปยังระนาบครึ่งซ้ายดังรูปที่ 3.6 สามารถสรุปได้ว่าระบบลอยตัวแม่เหล็กไฟฟ้ามีเสถียรภาพด้วยตัวควบคุมออกแบบที่ยอดเยี่ยม

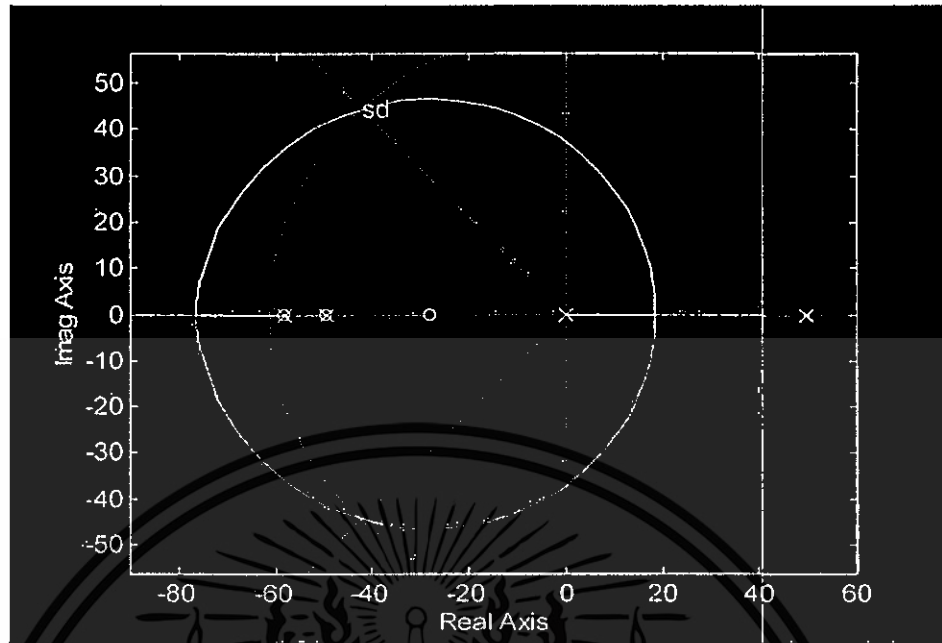


รูปที่ 3.4 root loci สำหรับระบบการลอยตัวแม่เหล็ก



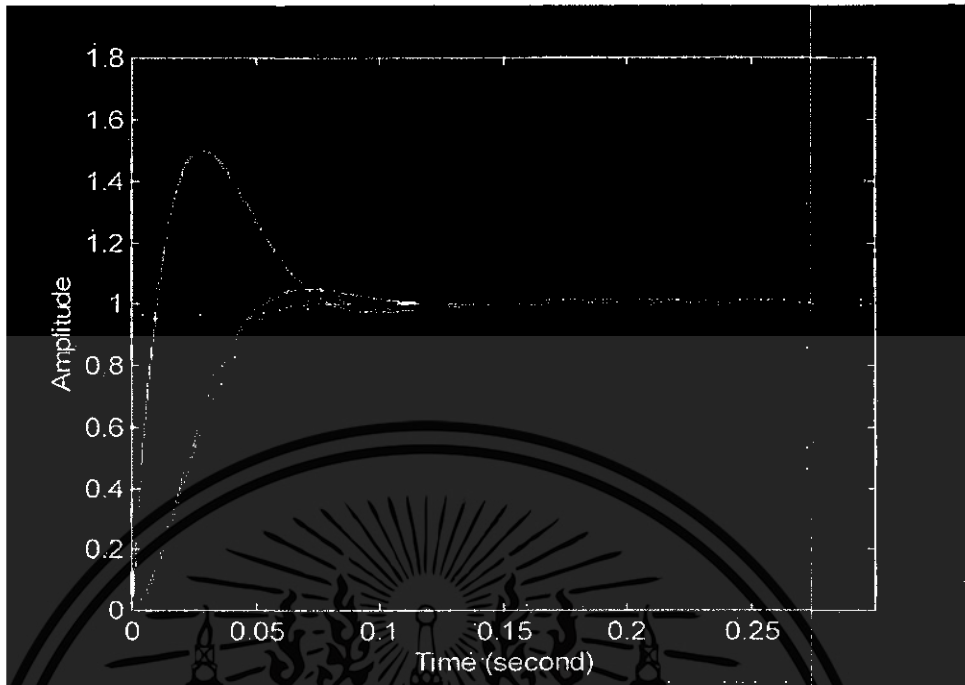
รูปที่ 3.5 ขอบเขตเสถียรภาพ / ไม่เสถียรภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.6 root locus สำหรับระบบควบคุม

ในรูปที่ 3.7 ผลตอบสนองสัญญาณระดับที่เส้นสีแดงสำหรับ PID $\times(n-2)$ stage PD cascade controller ในการควบคุม loop ที่ถูกออกแบบเท่านั้น ผลตอบสนองเส้นสีเขียวหลังจากเพิ่มตัวควบคุม forward controller เข้าไป รวมถึงการวางตัวควบคุม zero ใกล้กับ pole ของกระบวนการ ระบบทั้งหมดประมาณให้เป็นระบบมาตรฐานอันดับที่ 2 โดยการที่ไม่มี zero และ pole 2 ตัวเท่านั้น ค่า maximum overshoot ได้ตามที่ต้องการ เป็นคุณลักษณะของระบบมาตรฐานอันดับที่ 2 ซึ่งเป็นที่รู้จักกัน ซึ่งง่ายต่อที่จะออกแบบ forward controller นั้นจัดรูปแบบเป็น Posicast pre-filter อ้างอิงการใช้สัญญาณอินพุตแต่ละอันดับสองหรือสามทุก เส้นสีน้ำเงินคือผลตอบสนองสัญญาณอินพุตอันดับ 2 แสดงด้วยเส้นประสีขาว เส้นสีม่วงสุดท้ายคือผลตอบสนองจากการเพิ่มขึ้นของตัวควบคุมอัตราขยายจำนวน 10 ครั้งของค่าที่ออกแบบ



รูปที่ 3.7 ผลตอบสนองสัญญาณชั้นบันไดหนึ่งหน่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4 บทสรุป

ระบบที่ไม่เสถียรอันดับสามในที่นี้ คือระบบการลอยตัวแม่เหล็ก ได้ถูกเลือกเป็นระบบที่น่าสนใจโดย PID x (n-2) stage PD cascade controller พร้อม Posicast controller มันดูเหมือนว่ามีสามขั้นตอนในการออกแบบตัวควบคุมในวิทยานิพนธ์นี้ ขั้นตอนแรกเป็นการออกแบบตัวควบคุม PID x (n-2) stage PD cascade หลังจากเสร็จสิ้นขั้นตอนนี้ เวลาเข้าสู่สภาวะสงบนิ่งหรือสภาวะอยู่ตัว อาจจะได้รับตามที่ต้องการ แต่สำหรับ maximum overshoot นั้นยังไม่ได้รับผลตอบแทนที่น่าพอใจ ขั้นตอนที่สอง เป็นการออกแบบ forward controller เพื่อให้ได้รับค่า maximum overshoot ให้อยู่ภายในความต้องการ จากนั้นระบบควบคุมทั้งหมดจึงสามารถประมาณให้เป็นเช่น ระบบอันดับสองมาตรฐานที่พร้อมที่จะออกแบบตัวควบคุม Posicast ในขั้นตอนสุดท้าย



กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนใคร่กราบขอบพระคุณ รศ.ดร. กิตติ ตีระเศรษฐ์ สำหรับคำแนะนำอันประมาณค่าไม่ได้ และในฐานะของบุคคลซึ่งนำเสนอวิธีการออกตัวควบคุม PID x (n-2) Stage PD cascade controller จากพื้นฐานของวิธีที่ทรงประสิทธิภาพของอาจารย์ฯ ระบบควบคุมทั้งหมดสามารถประมาณการได้เป็นระบบอันดับสองมาตรฐาน ซึ่งพร้อมที่จะประยุกต์ตัวควบคุม Posicast ได้ในอนท้ายสุด



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Thanit Trisuwannawat, Kitti Tirasesth, Jongkol Ngamwiwit, and Michihiko Iida, "PID \times (n-2) stage PD cascade controller for SISO systems," SICE'98 Proceedings of the 37th SICE Annual Conference, International session Papers, pp. 965-968, 1998
- [2] John Y. Hung, "Posicast Control Past and Present," IEEE Multidisciplinary Engineering Education Magazine, pp.7-11, Vol.2, No 1, March 2007
- [3] Hiroshi Fujimoto, "General Framework of Multirate Sampling Control and Applications to Motion Control Systems", Ph.D. Dissertation, The University of Tokyo, submitted in December 2000 and published in March 2001.
- [4] T.H. Wong, "Design of a Magnetic Levitation control System—An undergraduate Project," IEEE Transactions on Education, pp. 196-200, Vol. E-29, No 4, November 1986.
- [5] Prof. Dr. David L. Trumper, "Understanding Poles and Zeros," MIT Course Number 2.14 / 2.140, Analysis and Design of Feedback Control Systems, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute Of Technology, pp. 1-13, Fall Term 2004.
- [6] รศ.ดร.กิตติ ตีระเศรษฐ์, หนังสือ "การวิเคราะห์ระบบควบคุมเชิงเส้น", เล่มที่ 2, หน้า 286-338
- [7] Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering, Fourth Edition, Prentice Hall, Inc. 2002
- [8] วิชัย คังขจันทรานนท์, หนังสือ "วิศวกรรมระบบควบคุม (เชิงเส้น)", หน้า 241-244



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

บทความวิจัยที่ได้รับการนำเสนอในการประชุมวิชาการ

บทความวิจัยที่ได้รับการนำเสนอในการประชุมทางวิชาการระดับนานาชาติในวิทยานิพนธ์นี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

Panupong Surintramon, Pittaya Pannil, Prapart Ukakimaparn, and Thanit Trisuwannawat
 “Posicast + Feed forward PID x (n-2) Stage PD Cascade Controllers For Magnetically Levitation System”

The 2017 IAENG International conference on control and Automation (ICCA'17)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Posicast PID \times (n-2) Stage PD Cascade Controllers for Magnetically-Levitation System

Panupong Surintramon, Pittaya Pannil, Prapart Ukakimaparn, and Thanit Trisuwannawat

Abstract—When a plant to be controlled is third or higher n^{th} order, the PID \times (n-2) stage PD cascade controllers are very suitable to be applied for control. To verify the advantages of these controllers, the Magnetically-Levitation plant is then selected as an example of unstable plant to be stabilized and controlled. The design technique is based on placing the controller zeros. The overall controlled system can be approximated as a standard second-order system prompt for designing the Posicast controller to obtain the output response with no overshoot in the last step.

Index Terms—Magnetic Levitation system, PID \times (n-2) stage PD controllers, Posicast Controller

I. INTRODUCTION

Because the PID (Proportional-Integral-Derivative) controller is properly applied to a typical second order plant only not for any n^{th} order. In order to control a third or higher n^{th} order plant, the PID \times (n-2) stage PD cascade controller design based on root locus technique is proposed in Continuous-Time (CT) framework [1]. The original design technique known as “Kitti’s Method” is aimed to satisfy the desired specifications without trial and error. Then, the forward controller is employed to decrease the undesirable overshoot, the controlled system structure becomes two-degree of freedom (2-DOF) system as shown in Fig. 1.

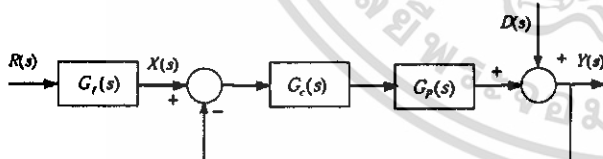


Fig. 1. Structure of the 2-DOF control system.

By placing the zeros of the designed controller in the way of Kitti’s Method, the overall controlled system is approximated as a standard second-order system. From the response to a unit step input, the maximum overshoot occurred at the first peak time t_p with the amplitude of $1+M_p$. If the unit step input is reshaped into two parts. The first part is the step input with amplitude of $1/(1+M_p)$ at $t = 0$. The second part is a stair with amplitude of $M_p/(1+M_p)$ and delay caused by the time t_p (or written by $e^{-t_p s}$) as shown in Fig. 2 [2].

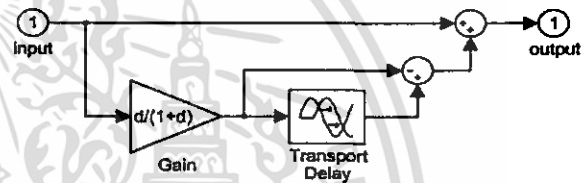


Fig. 2. SIMULINK diagram.

II. METHODOLOGY

Fig. 3 shows the steps to design digital control systems [3]. The major steps are plant modeling and controller design.

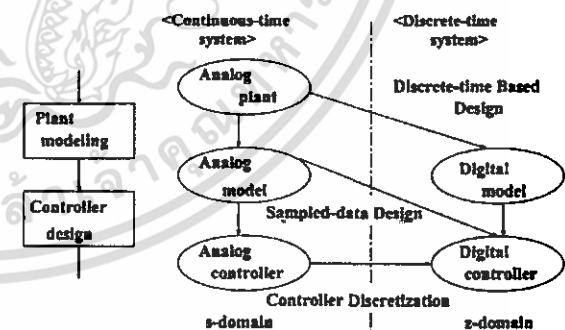


Fig. 3. The steps of the digital control system design.

Manuscript received December 19, 2016; revised January 9, 2017.
P. Surintramon is with Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand, 10520 (e-mail: nice_instru@hotmail.com)

P. Pannil is with Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand, 10520 (phone : 662-329-8348; fax: 662-329-8349; e-mail: pittay.pa@kmitl.ac.th).

P. Ukakimaparn is with Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand, 10520 (e-mail: kuprapar@gmail.com).

T. Trisuwannawat is with Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand, 10520 (e-mail: kithanil@gmail.com).

A. Plant modeling

In Fig. 4 [4], a ball bearing of mass m is placed underneath the electromagnet at distance x . The current flowing into the electromagnetic coil will generate electromagnetic force to attract the ball bearing. The net force between the electromagnetic force and gravitational force will induce an up or down motion of the ball bearing. The photoresistor senses the variation of the position of the ball bearing by the amount of shadow casted on its surface and feeds back this signal to the control circuit and amplifier to regulate the input current i . The ball bearing is kept in a dynamic balance around its equilibrium point.

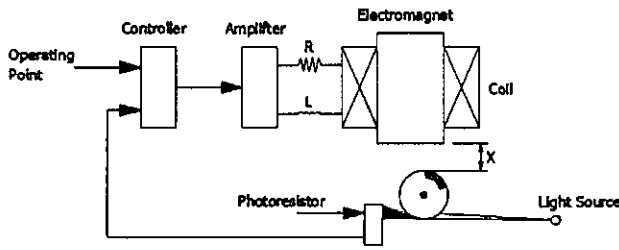


Fig. 4. Magnetic levitation control system.

The system's dynamic equations can be obtained as follows.

$$f = C \left(\frac{I}{x} \right)^2 \quad (1)$$

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - f \quad (3)$$

where

- f is an electromagnetic force.
- I is a coil current.
- x is a distance between electromagnet and ball bearing.
- C is a constant.
- e is a voltage across the coil.
- R is a coil resistance.
- L is a coil inductance.
- m is a mass of ball bearing.
- g is a gravitational acceleration.

The linearization equations describing the variations from the operating point are obtained by using only the linear terms from the Taylor series expansion. If the variables of the operating point are expressed with subscript "0" and the variables at the neighborhood of the operating point are represented with subscript "1," then linearized equations are

$$f_1 = \frac{2C I_0}{x_0^2} i_1 - \frac{2C I_0^2}{x_0^3} x_1 \quad (4)$$

$$e_1 = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (5)$$

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f_1 \quad (6)$$

Laplace transform of (4)-(6) yields

$$F_1(s) = k \left[I_1(s) - \frac{I_0}{x_0} X_1(s) \right] \quad (7)$$

$$E_1(s) = (R + Ls) I_1(s) \quad (8)$$

$$ms^2 X_1(s) = -F_1(s) \quad (9)$$

where $k = 2C \frac{I_0}{x_0^2}$.

The block diagram of the magnetic levitation system is shown in Fig. 5. The characteristic equation of the control system can be obtained as follows.

$$Q(s) = x_0 Lms^3 + x_0 Rms^2 - kI_0 Ls - kI_0 R + G_c(s) kx_0 B = 0 \quad (10)$$

Equation (10) can be rearranged as

$$Q(s) = 1 + \frac{G_c(s) kx_0 B}{x_0 Lms^3 + x_0 Rms^2 - kI_0 Ls - kI_0 R} = 0 \quad (11)$$

and

$$Q(s) = 1 + \frac{G_c(s) \frac{kB}{mL}}{\left(s + \sqrt{\frac{kI_0}{m x_0}} \right) \left(s - \sqrt{\frac{kI_0}{m x_0}} \right) \left(s + \frac{R}{L} \right)} = 0 \quad (12)$$

Substituting the parameters into (12), yields

$$Q(s) = 1 + \frac{60990 G_c(s)}{(s + 49.5)(s - 49.5)(s + 58)} = 0 \quad (13)$$

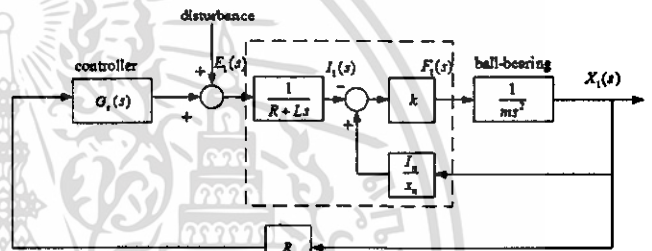


Fig. 5. Block diagram.

TABLE I
NOMENCLATURE

Symbol	Quantity
x_0	0.008 m
m	0.068 kg
R	28 Ω
L	0.483 H
I_0	0.76 A
C	$7.39 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{A}^2$
k	1.756 N/A
B	$1.14 \times 10^3 \text{ V/m}$

B. Controller design

Let the n th order plant $G(s)$ to be controlled by the controllers $K(s)$, their transfer function is assumed to be given by

$$G(s) = \frac{K_n}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}, \quad (14)$$

$$= \frac{60990}{(s + 49.5)(s - 49.5)(s + 58)}; \quad n = 3, N = 0.$$

If the PID controller transfer function is

$$K_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_d s = K_{pid} \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \quad (15)$$

where K_p , K_i , and K_d are a proportional gain, an integral gain, a derivative gain, respectively. Hence, the PD controller transfer function can be stated as

$$K_{PD}(s) = K_p + K_d s = K_{pd}(s + z_{pd}). \quad (16)$$

The open-loop transfer function for the PID×(n-2) stage PD controllers $K(s)$ and the plant $G(s)$ is

$$KG(s) = \frac{\text{PID Controller} \quad (n-2) \text{ PD}}{s \cdot s^N \underbrace{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_p)}_{n\text{th order Plant}} \dots K_n}, \quad (17)$$

or,

$$KG(s) = \frac{\text{Pre-assigned}}{s \cdot \underbrace{(s + 49.5)(s + 58)(s - 49.5)}_{3\text{rd order plant}}}. \quad (18)$$

By using Kitti's Method, $z_1 = 49.6$ and $z_2 = 58.1$ are first assigned, then find only z_{pd} and K from the following root locus angle and magnitude conditions.

$$\begin{cases} \angle KG(s) = \pm(2k+1)\pi, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ |KG(s)| = 1. \end{cases} \quad (19)$$

The desired specifications to be designed are usually specified in terms of transient and steady state response characteristics of a control system to a unit-step input, exhibited by a pair of complex-conjugate dominant closed-loop poles $s_{\pm} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ as follows.

$$\begin{cases} \text{Percent Overshoot (P.O.)} = e^{\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\% = 5\% \\ \text{Settling Time (} t_s \text{)} = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} = 0.1\text{secs.} \quad (\pm 2\%) \end{cases} \quad (20)$$

From the given desired specification in term of the Percent Overshoot (P.O.), the damping ratio is

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right)\right]^2}{\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right)\right]^2}} = 0.69, \quad (21)$$

and from the given Settling Time $\{t_s(\pm 2\%)\}$, then the undamped natural frequency is

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} = 61.373 \text{ rad./sec.} \quad (22)$$

Hence, one of the dominant closed-loop poles is located at

$$s_d = -42.354 + j44.416. \quad (23)$$

The open-loop transfer function without z_{pd} at s_d is

$$\left. \begin{aligned} KGwoz_{pd}(s_d) &= \frac{80.734^\circ \quad 70.48^\circ}{(s_d + 49.6)(s_d + 58.1)60990} \\ &= \frac{s_d \cdot (s_d + 49.5)(s_d + 58)(s_d - 49.5)}{133.639^\circ \quad 80.86^\circ \quad 70.595^\circ \quad 154.194^\circ} \\ KGwoz_{pd}(s_d) &= \frac{3.025 + j9.269}{9.75} \angle 71.927^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

The angle from the zero z_{pd} to s_d is

$$\left. \begin{aligned} \arg(z_{pd}) &= \pi - \arg(KGwoz_{pd}(s_d)) = \angle(s_d + z_{pd}), \\ &= 108.073^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Now, it is implied that

$$\left. \begin{aligned} \angle KG(s_d) &= \frac{151.214^\circ \quad 108.073^\circ}{(s_d + 49.6)(s_d + 58.1)(s_d + z_{pd})60990} \\ &= \frac{s_d \cdot (s_d + 49.5)(s_d + 58)(s_d - 49.5)}{439.287^\circ} \\ &= 151.214^\circ + 108.073^\circ - 439.287^\circ = -180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Since, $\angle(s_d + z_{pd})$ is greater than 90° , so the zero z_{pd} is located at the right hand side of s_d as

$$z_{pd} = |\text{Re}(s_d)| - \frac{|\text{Im}(s_d)|}{\tan(\pi - \angle(s_d + z_{pd}))} = 27.86. \quad (27)$$

The controller gain K can be found from the magnitude condition of the root locus technique as follows.

$$K = \frac{61.373 \quad 44.987 \quad 47.091 \quad 102.029}{\underbrace{|s_d|}_{45.003} \underbrace{|s_d + 49.5|}_{47.125} \underbrace{|s_d + 58|}_{46.721} \underbrace{|s_d - 49.5|}_{60990}} = \frac{2.195}{1000}. \quad (28)$$

Hence, the magnitude of the open-loop transfer function $|KG(s_d)|$ is

$$\left. \begin{aligned} \text{Find} & \quad \text{Pre-assigned} \quad \text{Find} \\ \left(\frac{2.195}{1000}\right) & \quad |s_d + 49.6| |s_d + 58.1| |s_d + 27.86| 60990 \\ & \quad |s_d| |s_d + 49.5| |s_d + 58| |s_d - 49.5| \end{aligned} \right\} = 1. \quad (29)$$

Finally, the open-loop transfer function can be expressed as follows.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{cases} KG(s) = \frac{K(s+49.6)(s+58.1)(s+z_{pd})60990}{s(s+49.5)(s+58)(s-49.5)}, \\ K = 2.195 \times 10^{-3}, \quad z_{pd} = 27.86. \end{cases} \quad (30)$$

To decrease the overshoot caused by adding the zero $(s+z_{pd})$ to the open-loop transfer function $KG(s)$, the following forward controller is introduced.

$$K_f(s) = z_{pd} / (s + z_{pd}) \quad (31)$$

The overall system is then approximated as if it is a standard second-order system as follows.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &\approx \left(\frac{z_{pd}}{s+z_{pd}} \right) \left(\frac{K(s+z_{pd})60990}{s(s-49.5)+K(s+z_{pd})60990} \right) \\ &\approx \frac{K60990z_{pd}}{s^2 + (K60990 - 49.5)s + (K60990z_{pd})} \\ &\approx \frac{3.73 \times 10^3}{s^2 + 2 \cdot 0.691 \cdot 61.073s + 3.73 \times 10^3} \end{aligned} \quad (32)$$

From the response to a unit step input of a standard second order system, the maximum overshoot is

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05, \quad \zeta = 0.691. \quad (33)$$

This maximum overshoot is occurred at the peak time,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.071 \text{ secs.}, \quad \omega_n = 61.073 \text{ rad/sec.} \quad (34)$$

In order to achieve the response with no overshoot, the unit step input will be rescaled by the factor $(1+M_p)$ in two parts as follows.

$$\frac{1}{1+M_p} + \frac{M_p}{1+M_p} e^{-t_p s} = 1 - \frac{M_p}{1+M_p} + \frac{M_p}{1+M_p} e^{-t_p s}. \quad (35)$$

III. SIMULATION RESULTS

Fig. 6 shows the root loci of the magnetic levitation system. It is evidently seen that it is unstable system in nature, because there is a real pole in the right half plane corresponds to an exponentially increasing component $Ce^{\sigma t}$ in the homogeneous response, (where the constant C is determined from the given set of initial conditions) as shown in Fig. 7 [5]. After the PID $\times(n-2)$ stage PD cascade controllers are applied, the pole from the integral term at the origin then can brings the unstable pole across imaginary axis toward the left half plane as shown in Fig. 8. It can be concluded that the magnetic levitation system is stabilizable

by the designed controllers with excellence. In Fig. 9, the unit step response in red solid line is for the PID $\times(n-2)$ stage PD cascade controllers in the control loop at the designed value only. The response in green solid line is for after the forward controller is introduced. From placing the controller zeros close to the poles of the plant, the overall system can be then approximated as a standard second-order system with no zero and two poles only. Then, the maximum overshoot is obtained within desired value. Once, the properties of the second order system are known, it is easy to design the feedforward controller, which is a Posicast pre-filter for shaping the reference input using either two or three steps. The blue solid line is a response to a two-step input shown by white dashed line. The last magenta dashed line is the response by increasing the controller gain to ten times of the designed value.

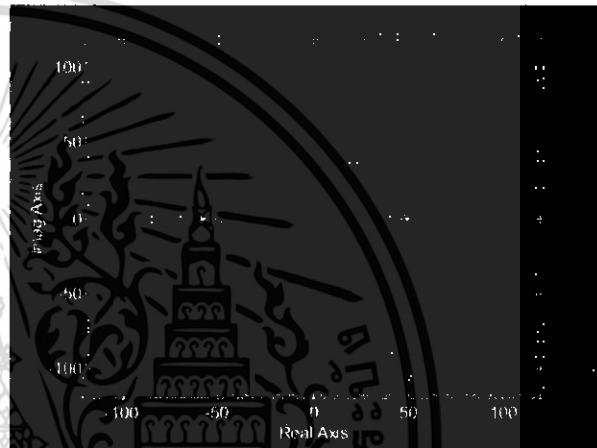


Fig. 6. Root loci for Magnetic Levitation system.

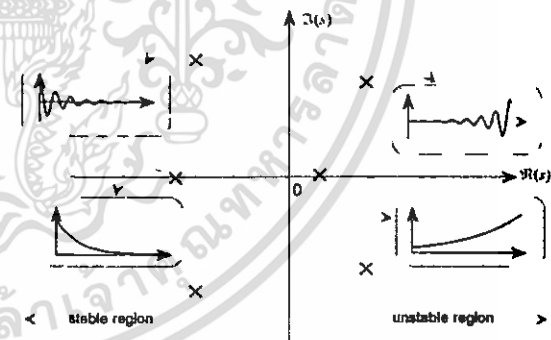


Fig. 7. Stable / Unstable region.

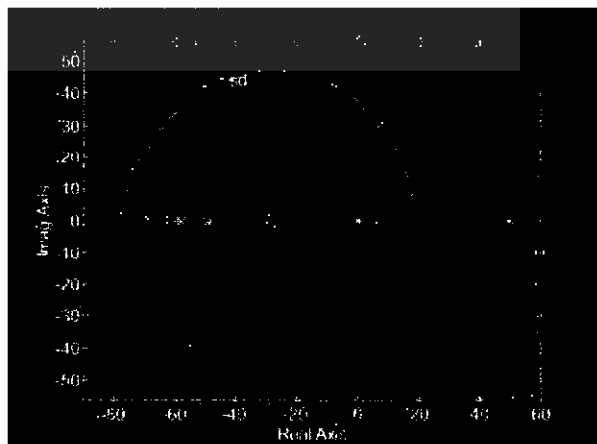


Fig. 8. Root loci for the controlled system.

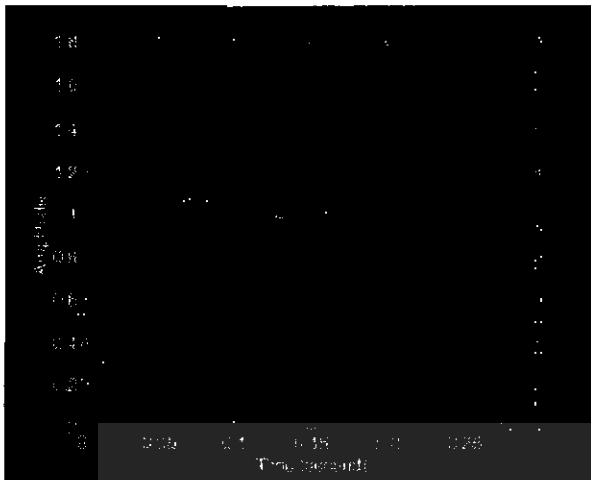


Fig. 9. Unit step responses.

IV. CONCLUSION

An unstable, third-order magnetic levitation plant has been selected as an interesting maglev plant to be controlled by the proposed $PID \times (n-2)$ stage PD cascade controllers with incorporating Posicast controller. It seems to be that there are three steps to design the controllers in this paper. The first step is the design of the $PID \times (n-2)$ stage PD cascade controllers. After finish this step, the settling time may be satisfied, but may not for the maximum overshoot. The second step is the design of the forward controller to achieve the maximum overshoot within desired value. Then the overall controlled system is approximated as a standard second-order system that prompts to design the Posicast controller in the last step.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors would like to express their sincere thanks to Associate Professor Dr. Kitti Tirasesth for his invaluable suggestions and as a person who proposed a method to design the $PID \times (n-2)$ stage PD cascade controllers. Based on his effective method, the overall controlled system can be approximated as a standard second-order system, which is ready to apply the Posicast controller.

REFERENCES

- [1] Thanit Trisuwannawat, Kitti Tirasesth, Jongkol Ngamwiwit and Michihiko Iida, "PID \times (n-2) stage PD cascade controller for SISO systems," *SICE'98 Proceedings of the 37th SICE Annual Conference, International session Papers*, pp. 965-968, 1998.
- [2] John Y. Hung, "Posicast Control Past and Present," *IEEE Multidisciplinary Engineering Education Magazine*, pp. 7-11, Vol. 2, No. 1, March 2007.
- [3] Hiroshi Fujimoto, "General Framework of Multirate Sampling Control and Applications to Motion Control Systems", *Ph.D. Dissertation. The University of Tokyo*, submitted in December 2000 and published in March 2001.
- [4] T. H. Wong, "Design of a Magnetic Levitation Control System—An Undergraduate Project," *IEEE Transactions on Education*, pp. 196-200, Vol. E-29, No. 4, November 1986.
- [5] Prof. Dr. David L. Trumper, "Understanding Poles and Zeros," *MIT Course Number 2.14 / 2.140, Analysis and Design of Feedback Control Systems, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology*, pp. 1-13, Fall Term 2004.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นาย ภาณุพงศ์ สุรินทรามต์
 วัน เดือน ปีเกิด 8 พฤษภาคม 2528 ที่ลำปาง
 ที่อยู่ 169/7 หมู่ 4 ตำบล หลวงเหนือ อำเภอ งาว จังหวัดลำปาง 502110
 โทร. 08-6187-4260

ประวัติการศึกษา 2550 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ความชำนาญเฉพาะด้าน 1.) ระบบควบคุมแบบ programable logic control (PLC System)
 2.) ระบบควบคุมส่วน monitoring (SCADA System)
 3.) ระบบควบคุมความเร็วมอเตอร์

ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย

พ.ศ.2549 ผลงานวิจัยปริญญาตรี เรื่อง “Lift Control by PLC and Visual Basic for Monitoring ”
 พ.ศ.2551-2555 ตำแหน่ง Service Engineer บริษัท VR-MASTER จำกัด
 พ.ศ.2555-2559 ตำแหน่ง Senior Engineer บริษัท VR-MASTER จำกัด
 พ.ศ.2555-ปัจจุบัน ตำแหน่ง Service Supervisor บริษัท VR-MASTER จำกัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้