วงฮามิลโทเนียนในบางเคย์เลย์ไดกราฟบน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

Hamiltonian Cycle in Some Cayley Digraphs on $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

กนกวรรณ พงษ์บุญ
ธีระยุทธ ปัดทุม
พัชรประภา จินดาสวัสดิ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

Hamiltonian Cycle in Some Cayley Digraphs on $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

KANOKWAN PONGBOON
TIRAYOOT PUDTOOM
PATCHARAPRAPA JINDASAWAT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	วงฮามิลโทเนียนในบางเคย์เลย์ไดกราฟบน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
	Hamiltonian Cycle in Some Cayley Digraphs on $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ พงษ์บุญ รหัสนักศึกษา 56050002
	นายธีระยุทธ ปัดทุม รหัสนักศึกษา 56050065
	นางสาวพัชรประภา จินดาสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050094
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร. งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผศ.ดร. เดชา สมนะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร. กัมปนาท นามงาม ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร. กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี กรรมการ	
ดร. งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ผศ.ดร. เดชา สมนะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	วงฮามิลโทเนียนในบางเคย์เลย์ไดกราฟบน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
ชื่อนักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ พงษ์บุญ รหัสนักศึกษา 56050002
	นายธีระยุทธ ปัดทุม รหัสนักศึกษา 56050065
	นางสาวพัชรประภา จินดาสวัสดิ์ รหัสนักศึกษา 56050094
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ผศ.ดร.เดชา สมนะ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาการมีวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนนับที่ $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$ โดยที่ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ที่มีขนาดไม่เกิน 2 เราแสดงว่า ถ้า S เป็นเซตก่อกำเนิดขนาด 1 ของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน และ ในกรณีที่ $|S|=2$ เราสามารถหาสมบัติบางประการของสมาชิกในเซต S ที่ทำให้ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน

คำสำคัญ : วงฮามิลโทเนียน , เคย์เลย์ไดกราฟ , เซตก่อกำเนิด

Title	Hamiltonian Cycle in Some Cayley Digraphs on $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
Students	Miss Kanokwan Pongboon Student ID 56050002
	Mr. Tirayoot Pudtoom Student ID 56050065
	Miss Patcharaprapa Jindasawat Student ID 56050094
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang(KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Dr.Ngarmcherd Danpattanamongkon
Co-advisor	Asst.Prof.Dr.Decha Samana

Abstract

The objective of this special problem studies about Hamiltonian cycle in some cayley digraph on $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ when m,n are natural numbers with $m > n$ and $\gcd(m,n)=1$, and S is a subset of $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ with $|S| \le 2$. We show that if S is a generating set of order 1, then $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ has a Hamiltonian cycle and in case of $|S|=2$ we can find some properties of elements in S which $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ has a Hamiltonian cycle.

Keywords : Hamiltonian Cycle , Cayley Digraphs , Generating Set

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีเนื่องจากความกรุณาและความร่วมมือของทุก ๆ ท่าน ขอขอบพระคุณ ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล และ ผศ.ดร.เดชา สมนะ ที่คอยให้คำปรึกษาดูแลอย่างใกล้ชิดและให้ความช่วยเหลือแนะนำที่ดีในการปรับปรุงข้อบกพร่องในการทำปัญหาพิเศษและขอขอบพระคุณกรรมการสอบปัญหาพิเศษคือ ดร.กัมปนาท นามงาม และ ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี ที่ให้ข้อคิดเห็นและคำแนะนำช่วยเหลือในการทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาควิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติให้แก่ คณะผู้จัดทำ เจ้าหน้าที่สาขาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการ รวมทั้งการเบิกและยืมอุปกรณ์ต่างๆ

ขอขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้การสนับสนุนทางด้านการศึกษาและคอยให้กำลังใจเสมอมา สุดท้ายขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่างๆ จนปัญหาพิเศษนี้สำเร็จสมบูรณ์ นอกจากนี้ยังมีบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือที่มิได้กล่าวไว้ใน ณ ที่นี้ด้วย ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

กนกวรรณ พงษ์บุญ
ธีระยุทธ ปัดทุม
พัชรประภา จินดาสวัสดิ์

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ | หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันทฤษฎีกราฟมีการศึกษาอย่างแพร่หลายในหลายระดับซึ่งในทางทฤษฎีกราฟกล่าวว่า สำหรับกราฟ (Graph) ใดๆ จะประกอบด้วยเซตของจุดยอด (Vertex)ซึ่งไม่เป็นเซตว่างและเซตของเส้นเชื่อม (Edge)และเรียกแนวเดินที่ผ่านทุกจุดยอดในกราฟว่าวิถีฮามิลโทเนียน (Hamiltonian Path) และเรียกแนวเดินที่ผ่านทุกจุดยอดในกราฟแล้วกลับมาจุดยอดเดิมว่า วงฮามิลโทเนียน (Hamiltonian Cycle)

การหาวงฮามิลโทเนียนเป็นเรื่องที่น่าสนใจอีกทั้งเป็นองค์ความรู้ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ เช่น การจัดทัวร์ การจัดเส้นแนวเดินรถเมล์ หรือการจัดส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์ เป็นต้น จะเห็นว่าปัญหาดังกล่าวจัดเป็นปัญหาที่นำความรู้เกี่ยวกับกราฟระบุทิศทางมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา และเคย์เลย์ไดกราฟ (Cayley Digraph)ก็เป็นกราฟระบุทิศทางชนิดหนึ่ง

ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1878 Arthur Cayley [2] ได้สร้างกราฟจากเซตก่อกำเนิดและความสัมพันธ์บนกรุป และความรู้นี้ได้ถูกนำมาใช้ในบทเรียนเรื่องพีชคณิตนามธรรม จากนั้นเป็นต้นมา มีนักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาค้นพบความรู้ในด้านพีชคณิตนามธรรมและกราฟต่างๆ มากมายที่เกี่ยวข้องกับเคย์เลย์ไดกราฟ อาทิเช่น ปี ค.ศ. 1980 David S. Witte [5] ได้ศึกษาวิถีฮามิลโทเนียนในเคย์เลย์ไดกราฟ ต่อมาใน ปี ค.ศ. 1982 David Witte และคณะ [8] ได้ศึกษาวงจรฮามิลโทเนียนในรูปผลคูณคาร์ทีเซียนของเคย์เลย์ไดกราฟ อีกทั้งล่าสุดในปี ค.ศ. 2016 Sornsawan Meechana [4] ได้ศึกษาวงจรฮามิลโทเนียนในบางเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(A:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ จะเห็นว่ามีนักวิจัยหลายท่านศึกษาเคย์เลย์ไดกราฟ ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจในการศึกษาการมีวิถีฮามิลโทเนียนและวงฮามิลโทเนียนในเคย์เลย์ไดกราฟ

ในปัญหาพิเศษนี้เราจะศึกษาหาเงื่อนไขของเซตย่อย S ที่ทำให้ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน โดยที่ $|S| \le 2$

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ศึกษาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
2. ศึกษาเงื่อนไขของเซตย่อย S ที่ทำให้ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ บรรจุวงฮามิลโทเนียน

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ในการศึกษาวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ เราจะพิจารณากรณีที่ $|S| \le 2$ ซึ่ง m,n เป็นจำนวนนับที่ $m > n$ และ $\gcd(m,n) = 1$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาเซตก่อกำเนิดขนาดไม่เกิน 2 ใน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$
2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการมีวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ กับเซตย่อยขนาดไม่เกิน 2
3. ได้เอกสารทางวิชาการที่รวบรวมสมบัติของตัวก่อกำเนิด
4. ได้เอกสารทางวิชาการรวบรวมทฤษฎีการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ กับเซตย่อยขนาดไม่เกิน 2
5. ได้ฝึกฝนกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
6. ใช้เป็นพื้นฐานในการทำวิจัยในระดับสูง

1.5 ตารางระยะเวลาขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
เลือกหัวข้อปัญหาพิเศษ										
ค้นคว้ารวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ										
ศึกษาความรู้ในพีชคณิตนามธรรมเกี่ยวกับ $\mathbb{Z}_m$										
ศึกษาสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$										
ศึกษาความรู้ในทฤษฎีกราฟเกี่ยวกับวงฮามิลโทเนียน										
ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเคย์เลย์ไดกราฟบนกรุปใด ๆ										
นำเสนอหัวข้อปัญหาพิเศษ										
ศึกษาการมีวงฮามิลโทเนียนของเคย์เลย์ไดกราฟบนกรุป $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$										
จัดทำเล่มรายงาน										
นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทในเรื่องพีชคณิตนามธรรม ทฤษฎีกราฟและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการทำปัญหาพิเศษเรื่องนี้

2.1 พีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra)

ทฤษฎีบท 2.1 [10] **ขั้นตอนวิธีการหาร** (The Division Algorithm)

สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ โดยที่ $b>0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r อย่างละหนึ่งจำนวนที่สอดคล้องกับ $a=bq+r, 0\le r<b$ ซึ่ง q เรียกว่า **ผลหาร** (quotient) และ r เรียกว่า **เศษเหลือ** (remainder) ในการหาร a ด้วย b

ตัวอย่าง 2.1 สำหรับ $a=-23$ และ $b=6$ โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร จะได้ว่า $-23=6(-4)+1$ นั่นคือ ในการหาร -23 ด้วย 6 จะได้ ผลหารคือ -4 และเศษเหลือคือ 1

บทนิยาม 2.2 [10] ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b\neq 0$ เราจะกล่าวว่า b หาร a ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $a=bn$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $b|a$ แทนความหมาย b หาร a ลงตัว และ $b\nmid a$ แทนความหมาย b หาร a ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง 2.2

1. $2|10$ เพราะ $10=2(5)$
2. $7|56$ เพราะ $56=7(8)$

บทนิยาม 2.3 [10] ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จำนวนเต็มบวก d เรียกว่า **ตัวหารร่วมมาก** (greatest common divisor) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $d|a$ และ $d|b$
2. สำหรับจำนวนเต็มบวก c ใดๆ ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$ เราใช้สัญลักษณ์แทนตัวหารร่วมมากของ a และ b ด้วย $\gcd(a,b)$

ตัวอย่าง 2.3

1. ตัวหารร่วมทั้งหมดของ 24 และ 84 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

   ดังนั้น $\gcd(24,84) = 12$
2. ตัวหารที่เป็นบวกของ -18 คือ $1,2,3,6,9,18$

   ตัวหารที่เป็นบวกของ 27 คือ $1,3,9,27$

   ดังนั้น 9 เป็นตัวหารร่วมมากที่สุด นั่นคือ $\gcd(-18,27) = 9$

ทฤษฎีบท 2.4 [10] ให้ a,b,q และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b > 0$ และ $a = bq + r$ เมื่อ $0 \leq r < b$ จะได้ว่า $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$

ตัวอย่าง 2.4

1. จาก $448 = 90(4) + 88$ และ $\gcd(90,88) = 2$ ดังนั้นสรุปได้ว่า $\gcd(448,90) = 2$
2. จาก $18 = 8(2) + 2$ และ $\gcd(8,2) = 2$ ดังนั้นสรุปได้ว่า $\gcd(18,8) = 2$

ทฤษฎีบท 2.5 [10] ให้ a,b,q และ m เป็นจำนวนเต็ม

1. ถ้า $\gcd(a,m)=1$ และ $\gcd(b,m)=1$ แล้ว $\gcd(ab,m)=1$
2. ถ้า $\gcd(a,m)=1$ และ $b|a$ แล้ว $\gcd(b,m)=1$
3. ถ้า $a|bc$ และ $\gcd(a,b)=1$ แล้ว $a|c$
4. ถ้า $a|c$ และ $b|c$ โดยที่ $\gcd(a,b)=1$ แล้ว $ab|c$

ทฤษฎีบท 2.6 [10] ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a\neq 0$ และ $b\neq 0$ และ $d=\gcd(a,b)$ แล้วจะมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $d=ax+by$

ทฤษฎีบท 2.7 [10] ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a\neq 0$ และ $b\neq 0$ และ $\gcd(a,b)=1$

ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $1=ax+by$

บทนิยาม 2.8 [10] ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จำนวนเต็มบวก m เรียกว่า **ตัวคูณร่วมน้อย** (least common multiple) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. $a|m$ และ $b|m$
2. สำหรับจำนวนเต็มบวก c ใดๆ ถ้า $a|c$ และ $b|c$ แล้ว $m|c$ เราใช้สัญลักษณ์แทนตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b ด้วย $\operatorname{lcm}(a,b)$

ทฤษฎีบท 2.9 [10] สำหรับจำนวนนับ a และ b ใดๆ $ab=[\gcd(a,b)][\operatorname{lcm}(a,b)]$

ตัวอย่าง 2.5

1. ให้ $a=2$ และ $b=8$ จะได้ว่า $\gcd(2,8)=2, \operatorname{lcm}(2,8)=8$

   และ $2(8)=[\gcd(a,b)][\operatorname{lcm}(a,b)]=2(8)$

2. ให้ $a=15$ และ $b=9$ จะได้ว่า $\gcd(15,9)=3, \operatorname{lcm}(15,9)=45$

   และ $15(9)=[\gcd(15,9)][\operatorname{lcm}(15,9)]=3(45)$

บทนิยาม 2.10 [10] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ a,b เป็นจำนวนเต็ม จะกล่าวว่า $\boldsymbol{a}$ **สมภาคกับ** $\boldsymbol{b}$ **มอดุโล** $\boldsymbol{n}$ (a is congruence to b modulo n) ก็ต่อเมื่อ $n|(a-b)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b \bmod n$ และ $\boldsymbol{a}$ **ไม่สมภาคกับ** $\boldsymbol{b}$ **มอดุโล** $\boldsymbol{n}$ (a is not congruence to b modulo n) ก็ต่อเมื่อ $n \nmid (a-b)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $a \not\equiv b \bmod n$

ตัวอย่าง 2.6

1. $24 \equiv 3 \bmod 7$ เนื่องจาก 7 หาร $(24-3)$ ลงตัว
2. $36 \equiv 1 \bmod 5$ เนื่องจาก 5 หาร $(36-1)$ ลงตัว

บทนิยาม 2.11 [1] ให้ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จะกล่าวว่า r เป็น **ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalence relation) บน A ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. **สมบัติสะท้อน** (reflexive) : สำหรับแต่ละ $a \in A$,$(a,a) \in r$
2. **สมบัติสมมาตร** (symmetric) : ถ้า $(a,b) \in r$ แล้ว $(b,a) \in r$
3. **สมบัติถ่ายทอด** (transitive) : ถ้า $(a,b) \in r$ และ $(b,c) \in r$ แล้ว $(a,c) \in r$

ทฤษฎีบท 2.12 [1] สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ $r=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a\equiv b \bmod n\}$ จะได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล $\mathbb{Z}$ คือ สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c ใดๆ

1. $a\equiv a \bmod n$ (สมบัติสะท้อน)
2. $a\equiv b \bmod n$ แล้ว $b\equiv a \bmod n$ (สมบัติสมมาตร)
3. $a\equiv b \bmod n$ และ $b\equiv c \bmod n$ แล้ว $a\equiv c \bmod n$ (สมบัติถ่ายทอด)

หมายเหตุ 1. ให้ $\overline{a}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\equiv a \bmod n\}=\{a+kn \mid k\in\mathbb{Z}\}$

2. จากสมบัติของความสัมพันธ์สมมูลจะได้ว่า

2.1 สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ $\overline{a}=\overline{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a\equiv b \bmod n$

2.2 สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ $\overline{a}=\overline{b}$ หรือ $\overline{a}\cap\overline{b}=\varnothing$

2.3 $\mathbb{Z}=\bigcup_{a\in\mathbb{Z}}\overline{a}$

ตัวอย่าง 2.7 ให้ $n=5$ จะได้ว่า

$\overline{0}=\{\ldots,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}$

$\overline{1}=\{\ldots,-9,-4,1,6,11,16,\ldots\}$

$\overline{2}=\{\ldots,-8,-3,2,7,12,17,\ldots\}$

$\overline{3}=\{\ldots,-7,-2,3,8,13,18,\ldots\}$

$\overline{4}=\{\ldots,-6,-1,4,9,14,19,\ldots\}$

และ $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}\cup\overline{3}\cup\overline{4}=\mathbb{Z}$

ทฤษฎีบท 2.13 [10] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a,b เป็นจำนวนเต็ม

1. ถ้า r เป็นเศษเหลือจากการหาร a ด้วย n แล้ว $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ และ $a \equiv r \bmod n$
2. สำหรับ $r_1, r_2 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ $r_1 \equiv r_2 \bmod n$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$
3. ถ้าเศษเหลือจากการหาร a และ b ด้วย n เท่ากัน แล้ว $a \equiv b \bmod n$

จากทฤษฎีบทข้างต้น กำหนดให้ $\mathbb{Z}_n = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{n-1}\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มมอดุโล n ซึ่งเป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว

ตัวอย่าง 2.8

1. $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$
2. $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$
3. $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$
4. $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8}\}$

ทฤษฎีบท 2.14 [13] จะกล่าวว่า $(G,*)$ เป็น**กรุป** (group)

ก็ต่อเมื่อ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซตไม่ว่าง G ซึ่งมีสมบัติ 4 ข้อต่อไปนี้

1. **สมบัติปิด :** สำหรับสมาชิก a,b ใดๆ ใน G จะได้ $a*b$ เป็นสมาชิกใน G
2. **สมบัติการเปลี่ยนหมู่ :** สำหรับสมาชิก a,b,c ใดๆ ใน G

   จะได้ $a*(b*c)=(a*b)*c$
3. **สมบัติการมีเอกลักษณ์ :** มีสมาชิก e ใน G ซึ่งทำให้ สำหรับสมาชิก a ใดๆ ใน G

   $a*e=e*a=a$ และเรียก e ว่า **สมาชิกเอกลักษณ์** (identity element) ของ G
4. **สมบัติการมีตัวผกผัน :** สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน G จะมีสมาชิก a^{-1} ใน G ซึ่ง

   $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ และเรียก a^{-1} ว่า **สมาชิกผกผัน** (inverse element) ของ a

ถ้า $*$ เป็นการดำเนินทวิภาคบนเซตไม่ว่าง G ซึ่งมีคุณสมบัติข้อ 1 และข้อ 2

เรากล่าวว่า $(G,*)$ เป็น**กึ่งกรุป** (semigroup)

ตัวอย่าง 2.9

1. $(\mathbb{N},+)$ เป็นกึ่งกรุปที่ไม่ใช่กรุป เพราะขาดสมบัติการมีสมาชิกเอกลักษณ์
2. $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ เป็นกรุปซึ่งมี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

   และสมาชิกผกผันของ a คือ $-a$
3. สำหรับจำนวนนับ $n>1$ ให้ $+$ เป็นการดำเนินการวิภาคบน $\mathbb{Z}_n$

   กำหนดโดย $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$ ทุก $\overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}_n$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}_n,+)$ เป็นกรุปที่มี $\overline{0}$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์และ $\overline{-a}$ เป็นสมาชิกผกผันของ $\overline{a}$

บทนิยาม 2.15 [8] จะกล่าวว่ากรุป $(G,*)$ เป็น**อาบีเลียนกรุป** (abelian group)

ก็ต่อเมื่อ $*$ **มีสมบัติสลับที่** (commutative) กล่าวคือ สำหรับ $a,b\in G$, $a*b=b*a$

ตัวอย่าง 2.10 $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Z}_n,+)$ เป็นอาบีเลียนกรุป

บทนิยาม 2.16 [10] ให้ $(G,*)$ เป็นกรุป และ $H \subseteq G$ จะกล่าวว่า H เป็น **กรุปย่อย** (subgroup) ของ G ก็ต่อเมื่อ $(H,*)$ เป็นกรุป เขียนแทนด้วย $H \le G$

ตัวอย่าง 2.11

1. $(\mathbb{Z},+)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},+)$ เป็นกรุปย่อยของ $(\mathbb{C},+)$ ดังนั้น $(\mathbb{Z},+)\le(\mathbb{Q},+)\le(\mathbb{R},+)\le(\mathbb{C},+)$
2. $\{\overline{0}\},\{\overline{0},\overline{6}\},\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9}\},\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8},\overline{10}\}$ และ $\mathbb{Z}_{12}$ เป็น กรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{12}$

บทนิยาม 2.17 [1] ให้ G เป็นกรุป และ $\varnothing \ne S \subseteq G$ กำหนด $A=\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ เมื่อ $H_\alpha \le G$, $S \subseteq H_\alpha$ ทุก $\alpha \in I$ จะได้ว่า $A \le G$ และ $S \subseteq A$ เห็นชัดว่า A เป็นกรุปย่อยเล็กสุดของ G ที่บรรจุ S จะเรียก A ว่า**กรุปย่อยเล็กสุดของ G ซึ่งก่อกำเนิดโดย S** (the subgroup of G generated by S) หรือกล่าวว่า S เป็นเซตก่อกำเนิดของ A แทน A ด้วยสัญลักษณ์ $\langle S\rangle$ ถ้า $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ เขียนแทน $\langle S\rangle$ ด้วย $\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$

ตัวอย่าง 2.12

1. กรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{12}$ ที่บรรจุ $\{\overline{5}\}$ มีกรุปเดียวคือ $\mathbb{Z}_{12}$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_{12}=\langle\overline{5}\rangle$
2. กรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{12}$ ที่บรรจุ $\{\overline{0},\overline{6}\}$ มี 3 กรุป ดังนี้ $\{\overline{0},\overline{6}\},\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8}\}$ และ $\mathbb{Z}_{12}$ ดังนั้น $\{\overline{0},\overline{6}\}=\langle\overline{0},\overline{6}\rangle$

บทนิยาม 2.18 [10] ให้ $(G,*)$ เป็นกรุป และ $a \in G$ กำหนด $a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ ตัว}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

$a^{-n} = \underbrace{(a^{-1}) * (a^{-1}) * \ldots * (a^{-1})}_{n \text{ ตัว}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $a^0 = e$ ดังนั้นสำหรับจำนวนเต็ม m,n ใดๆ

จะได้ $a^m * a^n = a^{m+n}$ และ $a^{mn} = (a^m)^n$

ทฤษฎีบท 2.19 [10] ให้ G เป็นกรุป และ $\varnothing \neq S \subseteq G$

จะได้ว่า $\langle S \rangle = \left\{ a_1^{r_1}, a_2^{r_2}, \ldots, a_n^{r_n} \,\middle|\, a_i \in S, r_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

บทแทรก 2.20 [10] ให้ G เป็นกรุป และ $a,b \in G$ แล้ว จะได้ว่า

1. $\langle a \rangle = \left\{ a^r \,\middle|\, r \in \mathbb{Z} \right\}$
2. $\langle a,b \rangle = \left\{ a^i b^j, b^j a^i \,\middle|\, i,j \in \mathbb{Z} \right\}$
3. ถ้า G เป็นอาบีเลียนกรุป แล้ว $\langle a,b \rangle = \left\{ a^i b^j \,\middle|\, i,j \in \mathbb{Z} \right\}$

บทนิยาม 2.21 [10] ให้ G เป็นกรุป จะกล่าวว่า G เป็น**กรุปวัฏจักร** (cyclic group) ก็ต่อเมื่อ มี $a \in G$ ซึ่ง $G = \langle a \rangle$ และเรียก a ว่า**ตัวก่อกำเนิด** (genetator) ของ G

ตัวอย่าง 2.13 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $\mathbb{Z}_n$ เป็นกรุปวัฏจักร โดยที่ $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$

ทฤษฎีบท 2.22 [10] สำหรับ $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_n$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(a,n) = 1$

ตัวอย่าง 2.14

1. ให้ $n = 5$ และ $a = 2$ จะได้ว่า $\bar{2}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$

   เพราะ $\gcd(2,5) = 1$ นั่นคือ $\mathbb{Z}_5 = \langle \bar{2} \rangle$

2. ให้ $n = 6$ และ $a = 2$ จะได้ว่า $\bar{2}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$

   เพราะ $\gcd(2,6) = 2$ นั่นคือ $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{2} \rangle = \left\{ \bar{0}, \bar{2}, \bar{4} \right\}$

ทฤษฎีบท 2.23 [10] กรุปวัฏจักรเป็นอาบีเลียนกรุป

บทนิยาม 2.24 [10] ให้ G เป็นกรุป จะเรียก**ขนาด** (cardinality) ของเซต G ว่า**อันดับ** (order) ของกรุป G และเขียนแทนด้วย $|G|$

หมายเหตุ ถ้าอันดับของกรุป G เป็นจำนวนจำกัด แล้วอันดับของกรุป G เท่ากับจำนวนสมาชิกของกรุป G

บทนิยาม 2.25 [10] ให้ G เป็นกรุป และ $a \in G$ ถ้ามีจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยสุด ซึ่ง $a^k = e$ เราเรียก k ว่า **อันดับ** (order) ของสมาชิก a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\circ(a)$ และถ้าไม่มีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $a^k = e$ เรากล่าวว่า a **มีอันดับอนันต์** (infinite order)

ข้อสังเกต

1. ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $\gcd(m,n) = 1$ ถ้า $a, b \in G$ โดยที่ $\circ(a) = m$ และ $\circ(b) = n$ แล้ว $a^i b^j$ สำหรับแต่ละ $0 \le i < m$ และ $0 \le j < n$ เป็นสมาชิกใน G ที่แตกต่างกันทั้งหมด
2. $\circ(a^{-1}) = \circ(a)$ สำหรับทุกๆ $a \in G$
3. ถ้า G เป็นกรุปซึ่งอันดับของ G เป็นจำนวนจำกัด จะกล่าวว่า G เป็น**กรุปจำกัด** (finite group) และเรากล่าวว่า G เป็น**กรุปอนันต์** (infinite group) ถ้าอันดับของ G เป็นจำนวนอนันต์
4. $\circ(a) = 1$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ (identity) ของ G

ตัวอย่าง 2.15

1. ใน $\mathbb{Z}_6$ $\circ(\bar{0}) = 1, \circ(\bar{1}) = 6, \circ(\bar{2}) = 3, \circ(\bar{3}) = 2, \circ(\bar{4}) = 3, \circ(\bar{5}) = 6$
2. ใน $\mathbb{Z}_8$ $\circ(\bar{0}) = 1, \circ(\bar{1}) = \circ(\bar{3}) = \circ(\bar{5}) = \circ(\bar{7}) = 8, \circ(\bar{2}) = \circ(\bar{6}) = 4, \circ(\bar{4}) = 2$

บทแทรก 2.26 [10] ให้ G เป็นกรุปวัฏจักรจำกัดที่มีอันดับ n ถ้า a เป็นตัวก่อกำเนิดของ G

$e = a^0, a^1, a^2, ..., a^{n-1}$ เป็นสมาชิกที่ต่างกันทั้งหมดของ G

และ $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, a^2, ..., a^{n-1}\}$

บทแทรก 2.27 [2] ให้ G เป็นกรุปจำกัด อันดับของสมาชิกแต่ละตัวของกรุป G จะหารอันดับของกรุป G ลงตัว

ทฤษฎีบท 2.28 [2] ให้ G เป็นกรุป และ $a \in G$ แล้ว $\circ(a) = |\langle a \rangle|$

ทฤษฎีบท 2.29 [2] ให้ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุป **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (cartesian product)

ของ $G_1, G_2, ..., G_n$ เขียนแทนด้วย $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

นิยามโดย $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n = \{(g_1, g_2, ..., g_n) | g_i \in G_i, i = 1, 2, ..., n\}$

และให้ $* : (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n) \times (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n) \to (G_1 \times G_2 \times ... \times G_n)$

นิยามโดย $(g_1, g_2, ..., g_n) * (h_1, h_2, ..., h_n) = (g_1 h_1, g_2 h_2, ..., g_n h_n)$

สำหรับทุกๆ $(g_1, g_2, ..., g_n)$ และ $(h_1, h_2, ..., h_n)$ ใน $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$

แล้ว $(G_1 \times G_2 \times ... \times G_n, *)$ เป็นกรุป และเราเรียกกรุป $(G_1 \times G_2 \times ... \times G_n, *)$

ว่า**กรุปผลคูณตรง**(direct group) ของกรุป $G_1, G_2, ..., G_n$

ทฤษฎีบท 2.30 [2] ให้ $G_1, G_2, ..., G_n$ เป็นกรุป สำหรับทุกๆ $(g_1, g_2, ..., g_n)$

จะได้ว่า $\circ((g_1, g_2, ..., g_n)) = \text{lcm}(\circ(g_1), \circ(g_2), ..., \circ(g_n))$

สำหรับจำนวนนับ $m, n > 1$, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \{(\overline{a}, \overline{b}) | \overline{a} \in Z_m, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n\}$ เป็นกรุปโดยที่

$(\overline{a}, \overline{b}) \oplus (\overline{c}, \overline{d}) = (\overline{a+c}, \overline{b+d})$ ทุก $(\overline{a}, \overline{b}), (\overline{c}, \overline{d}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ และจะเขียนแทนกรุป $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \oplus)$

ด้วย $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

2.2 ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory)

บทนิยาม 2.31 [11] กราฟ $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ ประกอบด้วยเซต $V(\Gamma) \neq \varnothing$ และเซต $E(\Gamma)$ ซึ่งเรียกสมาชิกของ $V(\Gamma)$ ว่า **จุดยอด** (vertex) และเรียกสมาชิก $E(\Gamma)$ ว่า **เส้นเชื่อม** (edge)

บทนิยาม 2.32 [11] เราเรียกเส้นเชื่อมที่จุดยอดปลายทั้งสองของเส้นเชื่อมเป็นจุดยอดเดียวกันว่า **วงวน** (loop) และเรียกเส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นเชื่อมขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดยอดเดียวกันว่า **เส้นเชื่อมขนาน** (multiple edge)

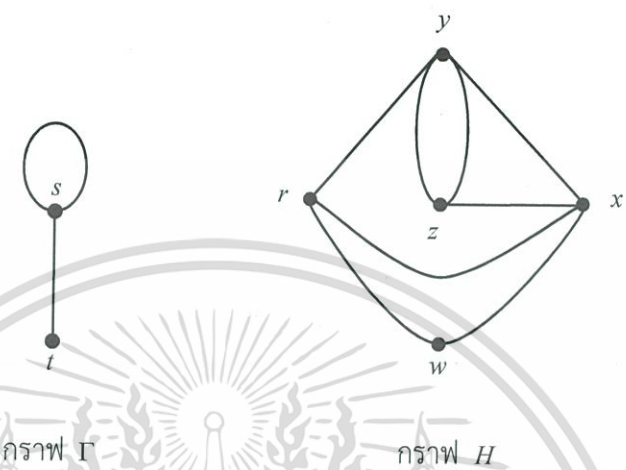
บทนิยาม 2.33 [11] ให้ u และ v เป็นจุดยอดในกราฟ Γ เรากล่าวว่าจุดยอด u **ประชิด** (adjacent) กับจุดยอด v เมื่อมีเส้นเชื่อมในกราฟ Γ เชื่อมระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v และเขียนเส้นเชื่อมดังกล่าวด้วย uv และจะเรียกจุดยอด u และจุดยอด v ว่าจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม uv ถ้า $e_i = uv$ เป็นเส้นเชื่อมในกราฟ Γ แล้วเรากล่าวว่าจุดยอด u, v **ตกกระทบ** (incident) กับเส้นเชื่อม e_i หรือ เส้นเชื่อม e_i ตกกระทบกับจุดยอด u และจุดยอด v

บทนิยาม 2.34 [11] เราเรียกกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และ ไม่มีวงวนว่า **กราฟเชิงเดียว** (simple graph)

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้กราฟ Γ และกราฟ H ดังนี้

$V(\Gamma)=\{s,t\}$ และ $V(H)=\{r,x,y,z,w\}$ โดยที่ $E(\Gamma)=\{st,ss\}$

และ $E(H)=\{ry,rw,rx,xy,xw,xz,yz,yz\}$ แทนกราฟ Γ และกราฟ H ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 : Γ เป็นกราฟที่มีวงวน และ H เป็นกราฟที่มีเส้นเชื่อมขนาน

ตัวอย่าง 2.17 กำหนดให้ Γ เป็นกราฟ ดังรูปที่ 2.2

รูปที่ 2.2 : จุดยอดประชิดและจุดยอดตกกระทบ

จากรูปที่ 2.2 จะได้ว่า จุดยอด a และ b เป็นจุดยอดประชิดกัน

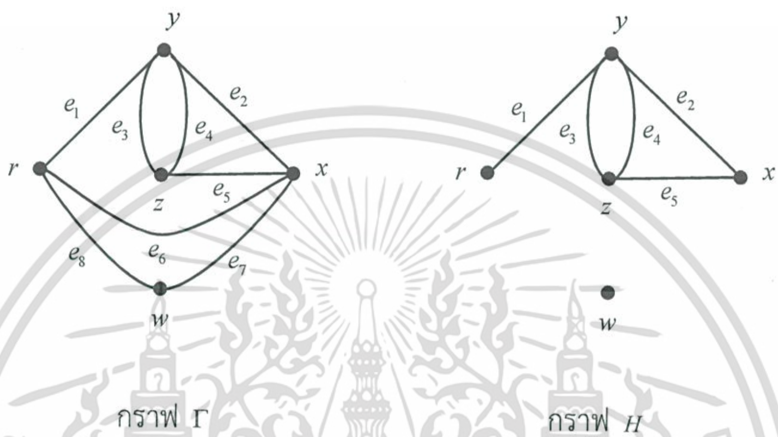
จุดยอด a และ c ไม่เป็นจุดยอดประชิดกัน

จุดยอด a ตกกระทบกับเส้นเชื่อม ab

จุดยอด d ไม่ตกกระทบกับเส้นเชื่อม ab และ bc

บทนิยาม 2.35 [11] ให้ $H=(V(H),E(H))$ และ $\Gamma=(V(\Gamma),E(\Gamma))$ เป็นกราฟใด ๆ เรากล่าวว่า H เป็น**สับกราฟ** (subgraph) ของ Γ เขียนแทนด้วย $H\subset\Gamma$ เมื่อ $V(H)\subseteq V(\Gamma)$ และ $E(H)\subseteq E(\Gamma)$

ตัวอย่าง 2.18



รูปที่ 2.3 : H เป็นสับกราฟของ Γ

บทนิยาม 2.36 [12] ให้ Γ_1 และ Γ_2 เป็นกราฟใดๆ **ยูเนียน** (union) ของกราฟ Γ_1 และกราฟ Γ_2 เขียนแทนด้วย $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ คือกราฟ Γ ที่มีเซตของจุดยอด $V(\Gamma)=V(\Gamma_1)\cup V(\Gamma_2)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(\Gamma)=E(\Gamma_1)\cup E(\Gamma_2)$

บทนิยาม 2.37 [12] ให้ u และ v เป็นจุดยอดใดๆ ในกราฟ

แนวเดิน $u-v$ ($u-v$ walk) ในกราฟ Γ คือลำดับสลับของจุดยอดและเส้นเชื่อม

เรียกแนวเดิน $u-v$ เป็น**แนวเดินปิด** (closed walk) เมื่อ $u=v$

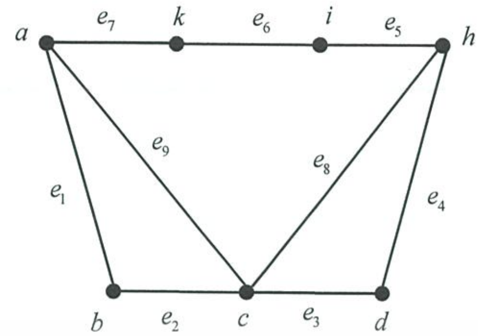
เรียกแนวเดิน $u-v$ เป็น**รอยเดิน** (trail) เมื่อเส้นเชื่อมในแนวเดิน $u-v$ ไม่ซ้ำกัน

เรียกแนวเดิน $u-v$ เป็น**วิถี** (path) เมื่อจุดยอดในแนวเดิน $u-v$ ไม่ซ้ำกัน

เรียกรอยเดิน $u-v$ ที่มี $u=v$ ว่า **วงจร** (circuit)

เรียกวิถี $u-v$ ที่มี $u=v$ ว่า **วง** (cycle)

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ Γ เป็นกราฟ ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 : แนวเดินของกราฟ Γ

จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า a, e_1, b, e_2, c เป็นแนวเดินจาก $a-c$

$a, e_1, b, e_2, c, e_3, d$ เป็นรอยเดินจาก $a-d$

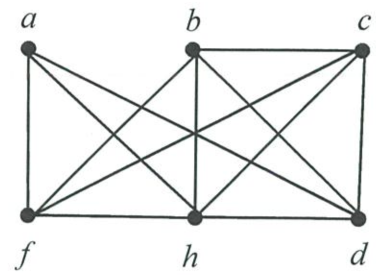
$a, e_1, b, e_2, c, e_3, d, e_4, h$ เป็นวิถีจาก $a-h$

$c, e_3, d, e_4, h, e_8, c$ เป็นวงจรจาก $c-c$

$a, e_1, b, e_2, c, e_3, d, e_4, h, e_5, i, e_6, k, e_7, a$ เป็นวงจาก $a-a$

บทนิยาม 2.38 [11] เราเรียกวิถีที่ผ่านทุกจุดยอดในกราฟ Γ ว่า**วิถีฮามิลโทเนียน** (Hamiltonian path) และเรียกวิถีฮามิลโทเนียนที่มีจุดยอดแรกและจุดยอดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน ว่า **วงฮามิลโทเนียน** (Hamiltonian cycle)

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้ Γ เป็นกราฟ ดังรูปที่ 2.5



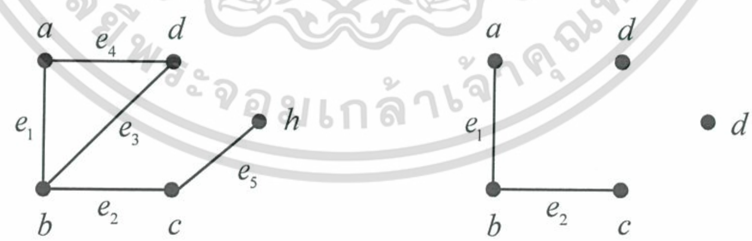
กราฟ Γ

รูปที่ 2.5 : วิถีฮามิลโทเนียนและวงฮามิลโทเนียน

จากรูปที่ 2.5 จะได้ว่า กราฟ Γ มีแนวเดิน $a,h,d,c,b,f\ a$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

บทนิยาม 2.39 [11] ให้ u และ v เป็นจุดยอดใดๆ ในกราฟ Γ เรากล่าวว่าจุดยอด u และจุดยอด v **เชื่อมโยงกัน** (connect) เมื่อมีวิถี $u-v$ และกล่าวว่า กราฟ Γ เป็น**กราฟเชื่อมโยง** (connected graph) เมื่อจุดยอดสองจุดยอดใดๆ ในกราฟ Γ เชื่อมโยงกันได้ มิฉะนั้นแล้ว กราฟ Γ เป็น**กราฟไม่เชื่อมโยง** (disconnected graph)

ตัวอย่าง 2.21 กำหนดให้กราฟ Γ และ กราฟ H ดังรูปที่ 2.6



กราฟ Γ กราฟ H

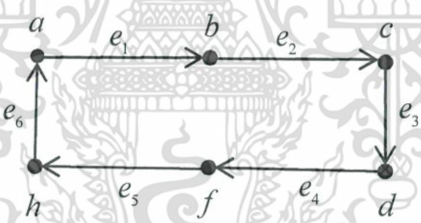
รูปที่ 2.6 : กราฟเชื่อมโยงและกราฟไม่เชื่อมโยง

จากรูปที่ 2.6 จะได้ว่า Γ เป็นกราฟเชื่อมโยง และ H เป็นกราฟไม่เชื่อมโยง

บทนิยาม 2.40 [11] **กราฟระบุทิศทาง** (directed graph) หรือ **ไดกราฟ** (digraph) D $D=(V(D),A(D))$ ที่ $V(D)$ คือเซตของจุดยอดและ $A(D)$ คือเซตของเส้นเชื่อมระบุทิศทาง ซึ่งเป็นคู่อันดับของจุดยอด **เส้นเชื่อมระบุทิศทาง** (directed edges) อาจถูกเรียกว่า **อาร์ก** (arc) หรือ **ลูกศร** (arrows) เส้นเชื่อม $e_i=(x,y)$ จะถูกพิจารณาว่าเป็นเส้นเชื่อมจาก x ไป y โดยที่ y จะถูกเรียกว่า **หัว**(head) และ x จะถูกเรียกว่า**หาง**(tail) ของเส้นเชื่อม นอกจากนี้แล้ว เส้นเชื่อม (y,x) จะถูกเรียกว่า เป็นเส้นเชื่อมกลับทิศของ (x,y)

บทนิยาม 2.41 [12] **ไดวอล์ค** (diwalk) ในไดกราฟ D คือ **ลำดับจำกัด** (finite sequence) ที่สลับระหว่างจุดยอดและอาร์กของ D ในรูป $v_1,a_1,v_2,a_2,...,v_{n-1},a_{n-1},v_n$ โดยที่แต่ละอาร์ก $a_i=(v_i,v_{i+1})$ สำหรับ $i=1,2,...,n-1$

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ D เป็นไดกราฟ ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 : กราฟระบุทิศทาง

จากรูปที่ 2.7 จะได้ว่า $a,e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,f,e_5,h,e_6,a$ เป็นไดวอล์คของไดกราฟ D

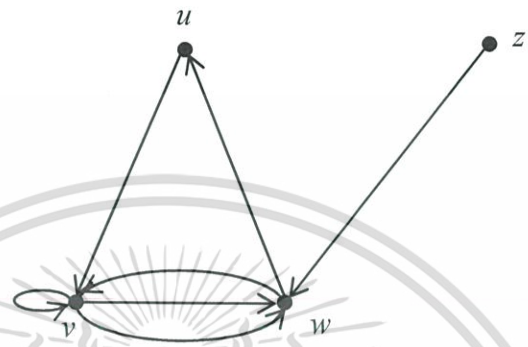
หมายเหตุ เพื่อความสะดวกจะแทนไดวอล์คด้วยลำดับของจุดยอดเพียงอย่างเดียว ดังนั้น จะแทนไดวอล์คจากจุดยอด v_1 ถึงจุดยอด v_n ด้วย $v_1,v_2,...,v_n$

บทนิยาม 2.42 [12] **ไดเทรล** (ditrail) คือไดวอล์คที่มีอาร์กทั้งหมดแตกต่างกัน

บทนิยาม 2.43 [12] **ไดพาธ** (dipath) คือไดเทรลที่มีจุดยอดต่างกัน

บทนิยาม 2.44 [12] **ไดเซอร์คิท** (dicircuit) คือไดพาธที่มีจุดยอดเริ่มต้นกับจุดยอดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ D เป็นไดกราฟ ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 : กราฟระบุทิศทาง

จากรูปที่ 2.8 จะได้ว่า z,w,u,v,v,w,v,w เป็นไดวอล์คจากจุดยอด z ไปจุดยอด w

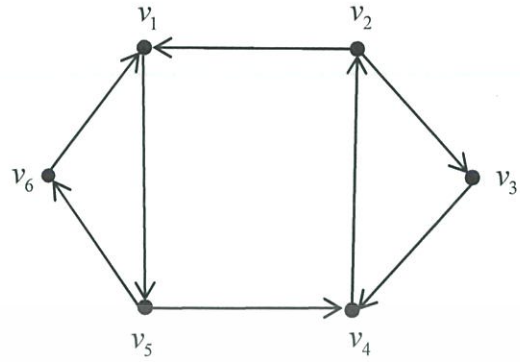
z,w,v,w,u เป็นไดเทรลจากจุดยอด z ไปจุดยอด u

z,w,u,v เป็นไดพาธจากจุดยอด z ไปจุดยอด v

w,u,v,w เป็นไดเซอร์คิท

บทนิยาม 2.45 [12] สำหรับจุดยอด v และจุดยอด w ซึ่งเป็น 2 จุดยอดใดๆ ของไดกราฟ D ถ้ามีไดพาธ จากจุดยอด v ไปจุดยอด w แล้วจะเรียก D ว่า **กราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม** (strongly connected graph)

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ D เป็นไดกราฟ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 : กราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม

บทนิยาม 2.46 [3] ให้ G เป็นกรุปจำกัดและ S เป็นเซตย่อยของ G

เคย์เลย์ไดกราฟ (Cayley Digraphs) ของกรุป G ที่ก่อกำเนิดด้วย S เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ เป็นกราฟ ที่ระบุทิศทางที่จุดยอดเป็นสมาชิกของ G และมีเส้นเชื่อมที่มีทิศทางจาก t ไป ts สำหรับทุกๆ $t \in G$ และ $s \in S$

ต่อไปนี้จะแสดงการวาด $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_5)$ และ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_6)$ เมื่อ $|S|=1$, $|S|$ คือ จำนวนสมาชิกของเซต S

ตัวอย่าง 2.25 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_5$ และ $\{\bar{0}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{0}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ เพราะว่า $\gcd(0,5)=5$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_5\right)$ ดังรูปที่ 2.10 โดยที่

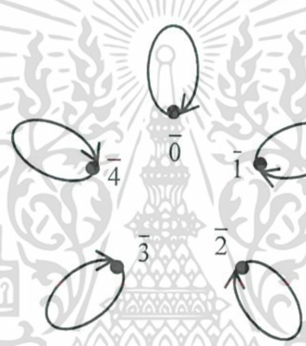
$\bar{0}+\bar{0}=\overline{0+0}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$

$\bar{1}+\bar{0}=\overline{1+0}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{2}+\bar{0}=\overline{2+0}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{3}+\bar{0}=\overline{3+0}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{4}+\bar{0}=\overline{4+0}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$



รูปที่ 2.10 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_5\right)$

จากรูปที่ 2.10 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_5\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_5\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.26 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_5$ และ $\{\bar{1}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{1}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ เพราะว่า $\gcd(1,5)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_5)$ ดังรูปที่ 2.11 โดยที่

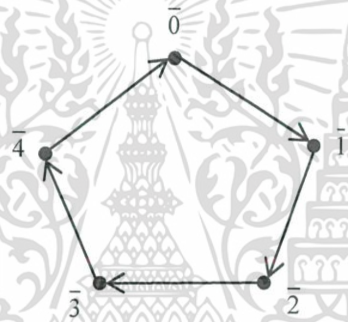
$\bar{0}+\bar{1}=\overline{0+1}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{1}+\bar{1}=\overline{1+1}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{2}+\bar{1}=\overline{2+1}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{3}+\bar{1}=\overline{3+1}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{4}+\bar{1}=\overline{4+1}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$



รูปที่ 2.11 : $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_5)$

จากรูปที่ 2.11 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_5)$ มีไดวอล์ค $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.27 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_5$ และ $\{\overline{2}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\overline{2}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ เพราะว่า $\gcd(2,5)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{1}\}:\mathbb{Z}_5)$ ดังรูปที่ 2.12 โดยที่

$\overline{0}+\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{0}$ ไปยังจุดยอด $\overline{2}$

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{2}$ ไปยังจุดยอด $\overline{4}$

$\overline{4}+\overline{2}=\overline{4+2}=\overline{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{4}$ ไปยังจุดยอด $\overline{1}$

$\overline{1}+\overline{2}=\overline{1+2}=\overline{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{1}$ ไปยังจุดยอด $\overline{3}$

$\overline{3}+\overline{2}=\overline{3+2}=\overline{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{3}$ ไปยังจุดยอด $\overline{0}$

รูปที่ 2.12 : $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_5)$

จากรูปที่ 2.12 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_5)$ มีไดวอล์ค $\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{1},\overline{3},\overline{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.28 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_5$ และ $\{\bar{3}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{3}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ เพราะว่า $\gcd(3,5)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_5)$ ดังรูปที่ 2.13 โดยที่

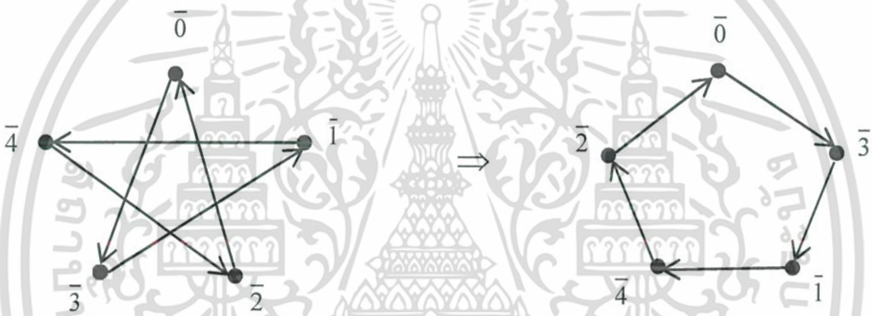
$\bar{0}+\bar{3}=\overline{0+3}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{3}+\bar{3}=\overline{3+3}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{1}+\bar{3}=\overline{1+3}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{4}+\bar{3}=\overline{4+3}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{2}+\bar{3}=\overline{2+3}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$



รูปที่ 2.13 : $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_5)$

จากรูปที่ 2.13 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_5)$ มีไดวอล์ค $\bar{0},\bar{3},\bar{1},\bar{4},\bar{2},\bar{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.29 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_5$ และ $\{\overline{4}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\overline{4}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ เพราะว่า $\gcd(4,5)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_5)$ ดังรูปที่ 2.14 โดยที่

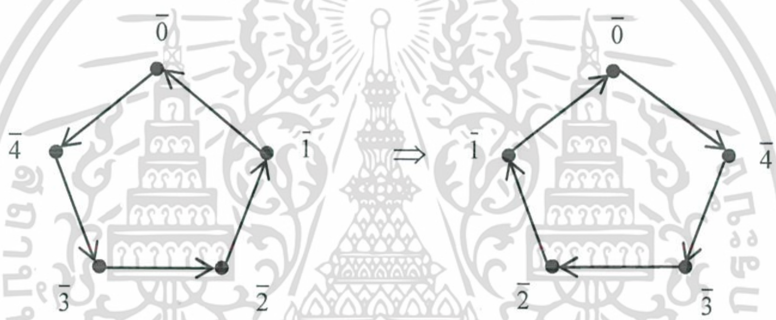
$\overline{0}+\overline{4}=\overline{0+4}=\overline{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{0}$ ไปยังจุดยอด $\overline{4}$

$\overline{4}+\overline{4}=\overline{4+4}=\overline{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{4}$ ไปยังจุดยอด $\overline{3}$

$\overline{3}+\overline{4}=\overline{3+4}=\overline{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{3}$ ไปยังจุดยอด $\overline{2}$

$\overline{2}+\overline{4}=\overline{2+4}=\overline{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{2}$ ไปยังจุดยอด $\overline{1}$

$\overline{1}+\overline{4}=\overline{1+4}=\overline{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{1}$ ไปยังจุดยอด $\overline{0}$



รูปที่ 2.14 : $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_5)$

จากรูปที่ 2.14 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_5)$ มีไดวอล์ค $\overline{0},\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{1},\overline{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.30 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\bar{0}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{0}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(0,6)=6$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_6)$ ดังรูปที่ 2.15 โดยที่

$\bar{0}+\bar{0}=\overline{0+0}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$

$\bar{1}+\bar{0}=\overline{1+0}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{2}+\bar{0}=\overline{2+0}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{3}+\bar{0}=\overline{3+0}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{4}+\bar{0}=\overline{4+0}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{5}+\bar{0}=\overline{5+0}=\bar{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{5}$ ไปยังจุดยอด $\bar{5}$

รูปที่ 2.15 : $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_6)$

จากรูปที่ 2.15 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_6)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}_6)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.31 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\bar{1}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{1}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(1,6)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ ดังรูปที่ 2.16 โดยที่

$\bar{0}+\bar{1}=\overline{0+1}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

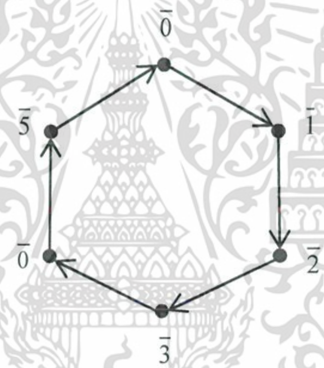
$\bar{1}+\bar{1}=\overline{1+1}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{2}+\bar{1}=\overline{2+1}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{3}+\bar{1}=\overline{3+1}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{4}+\bar{1}=\overline{4+1}=\bar{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{5}$

$\bar{5}+\bar{1}=\overline{5+1}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{5}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$



รูปที่ 2.16 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_6\right)$

จากรูปที่ 2.16 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{1}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ มีไดวอล์ค $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.32 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\overline{2}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\overline{2}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(2,6)=2$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ ดังรูปที่ 2.17 โดยที่

$\overline{0}+\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{0}$ ไปยังจุดยอด $\overline{2}$

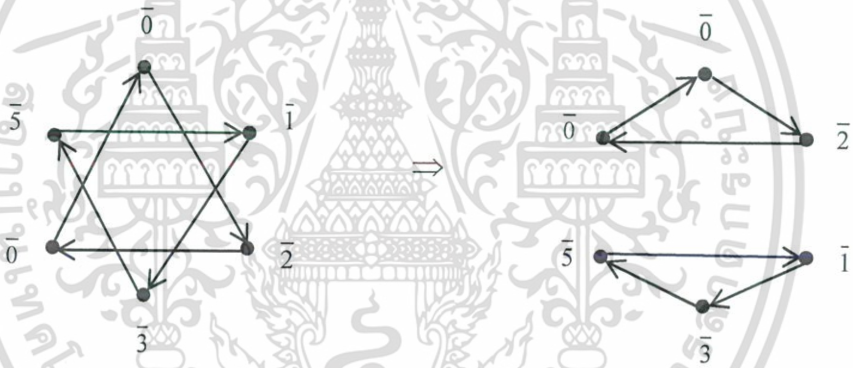
$\overline{2}+\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{2}$ ไปยังจุดยอด $\overline{4}$

$\overline{4}+\overline{2}=\overline{4+2}=\overline{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{4}$ ไปยังจุดยอด $\overline{0}$

$\overline{1}+\overline{2}=\overline{1+2}=\overline{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{1}$ ไปยังจุดยอด $\overline{3}$

$\overline{3}+\overline{2}=\overline{3+2}=\overline{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{3}$ ไปยังจุดยอด $\overline{5}$

$\overline{5}+\overline{2}=\overline{5+2}=\overline{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{5}$ ไปยังจุดยอด $\overline{1}$



รูปที่ 2.17 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_6\right)$

จากรูปที่ 2.17 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{2}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.33 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\bar{3}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{3}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(3,6)=3$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_6)$ ดังรูปที่ 2.18 โดยที่

$\bar{0}+\bar{3}=\overline{0+3}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

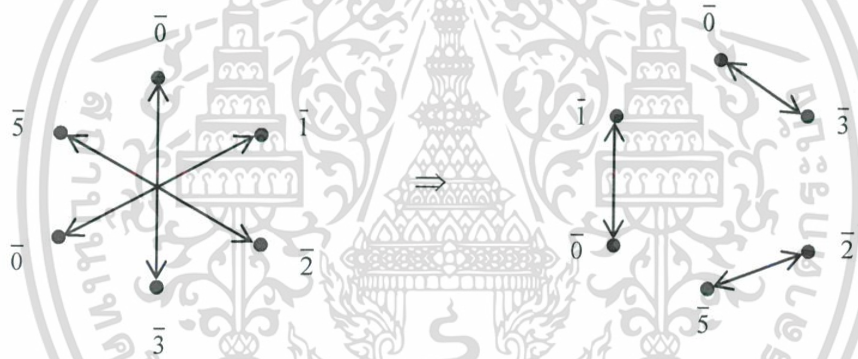
$\bar{3}+\bar{3}=\overline{3+3}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$

$\bar{1}+\bar{3}=\overline{1+3}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{4}+\bar{3}=\overline{4+3}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{2}+\bar{3}=\overline{2+3}=\bar{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{5}$

$\bar{5}+\bar{3}=\overline{5+3}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{5}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$



รูปที่ 2.18 : $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_6)$

จากรูปที่ 2.18 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_6)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{3}\}:\mathbb{Z}_6)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.34 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\overline{4}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\overline{4}$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(4,6)=2$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ ดังรูปที่ 2.19 โดยที่

$\overline{0}+\overline{4}=\overline{0+4}=\overline{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{0}$ ไปยังจุดยอด $\overline{4}$

$\overline{4}+\overline{4}=\overline{4+4}=\overline{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{4}$ ไปยังจุดยอด $\overline{2}$

$\overline{2}+\overline{4}=\overline{2+4}=\overline{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{2}$ ไปยังจุดยอด $\overline{0}$

$\overline{3}+\overline{4}=\overline{3+4}=\overline{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{3}$ ไปยังจุดยอด $\overline{1}$

$\overline{1}+\overline{4}=\overline{1+4}=\overline{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{1}$ ไปยังจุดยอด $\overline{5}$

$\overline{5}+\overline{4}=\overline{5+4}=\overline{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\overline{5}$ ไปยังจุดยอด $\overline{3}$

รูปที่ 2.19 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_6\right)$

จากรูปที่ 2.19 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{\overline{4}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.35 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_6$ และ $\{\bar{5}\}$

จากทฤษฎีบท 2.22 ทำให้ได้ว่า $\bar{5}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_6$ เพราะว่า $\gcd(5,6)=1$ และสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{5}\}:\mathbb{Z}_6)$ ดังรูปที่ 2.20 โดยที่

$\bar{0}+\bar{5}=\overline{0+5}=\bar{5}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{0}$ ไปยังจุดยอด $\bar{5}$

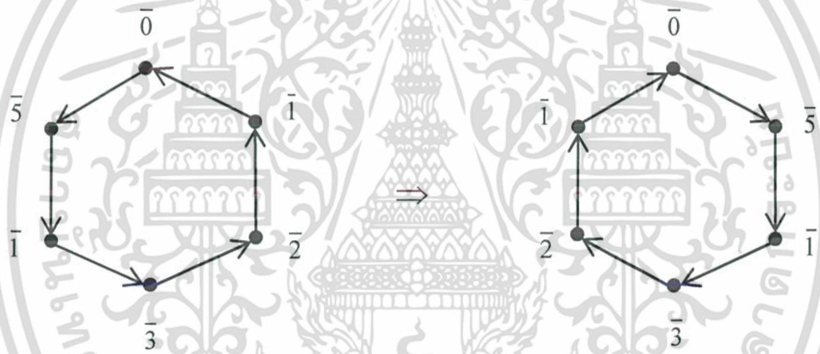
$\bar{5}+\bar{5}=\overline{5+5}=\bar{4}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{5}$ ไปยังจุดยอด $\bar{4}$

$\bar{4}+\bar{5}=\overline{4+5}=\bar{3}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{4}$ ไปยังจุดยอด $\bar{3}$

$\bar{3}+\bar{5}=\overline{3+5}=\bar{2}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{3}$ ไปยังจุดยอด $\bar{2}$

$\bar{2}+\bar{5}=\overline{2+5}=\bar{1}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{2}$ ไปยังจุดยอด $\bar{1}$

$\bar{1}+\bar{5}=\overline{1+5}=\bar{0}$ ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $\bar{1}$ ไปยังจุดยอด $\bar{0}$



รูปที่ 2.20 : $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{5}\}:\mathbb{Z}_6)$

จากรูปที่ 2.20 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}(\{\bar{5}\}:\mathbb{Z}_6)$ มีไดวอล์ค $\bar{0},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},\bar{0}$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.36 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{0},\bar{0})\}$

สามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.21

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{0+0},\overline{0+0})=(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{0+0},\overline{1+0})=(\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{1+0},\overline{0+0})=(\bar{1},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{1+0},\overline{1+0})=(\bar{1},\bar{1})$

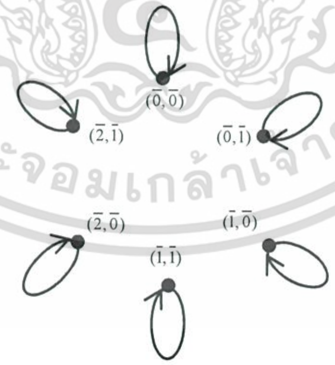
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{2+0},\overline{0+0})=(\bar{2},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1})+(\bar{0},\bar{0})=(\overline{2+0},\overline{1+0})=(\bar{2},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$



รูปที่ 2.21 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.21 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.37 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{0},\bar{1})\}$

สามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.22

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{0+0},\overline{0+1})=(\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{0+0},\overline{1+1})=(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{1+0},\overline{0+1})=(\bar{1},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{1+0},\overline{1+1})=(\bar{1},\bar{0})$

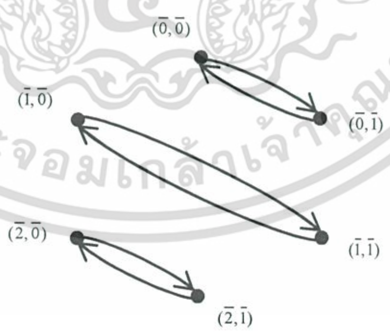
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{2+0},\overline{0+1})=(\bar{2},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1})+(\bar{0},\bar{1})=(\overline{2+0},\overline{1+1})=(\bar{2},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$



รูปที่ 2.22 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.22 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.38 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{1},\bar{0})\}$

สามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.23

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{0+1},\overline{0+0})=(\bar{1},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{1+1},\overline{0+0})=(\bar{2},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{2+1},\overline{0+0})=(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{0+1},\overline{1+0})=(\bar{1},\bar{1})$

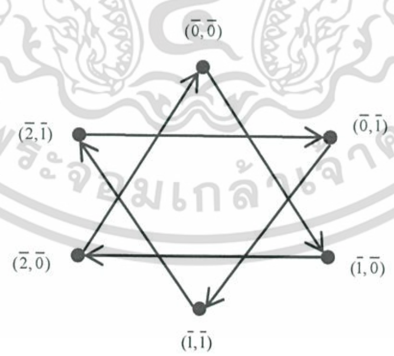
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{1+1},\overline{1+0})=(\bar{2},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1})+(\bar{1},\bar{0})=(\overline{2+1},\overline{1+0})=(\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$



รูปที่ 2.23 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.23 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.39 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{1},\bar{1})\}$

สามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.24

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{0+1},\overline{0+1}) = (\bar{1},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{1+1},\overline{1+1}) = (\bar{2},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{2+1},\overline{0+1}) = (\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{0+1},\overline{1+1}) = (\bar{1},\bar{0})$

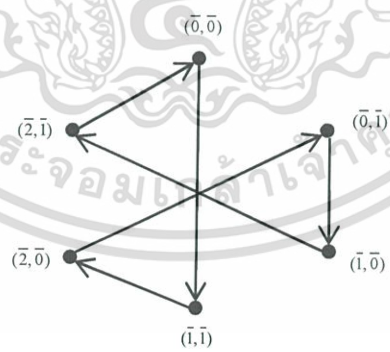
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{1+1},\overline{0+1}) = (\bar{2},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\overline{2+1},\overline{1+1}) = (\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$



รูปที่ 2.24 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.24 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ มีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),$ $(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{0})$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.40 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{2},\bar{0})\}$

ซึ่งสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.25

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{0+2},\overline{0+0})=(\bar{2},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{2+2},\overline{0+0})=(\bar{1},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{1+2},\overline{0+0})=(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{0+2},\overline{1+0})=(\bar{2},\bar{1})$

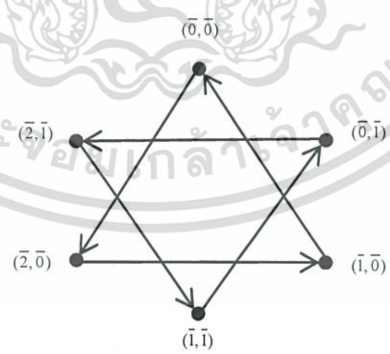
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{2+2},\overline{1+0})=(\bar{1},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1})+(\bar{2},\bar{0})=(\overline{1+2},\overline{1+0})=(\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$



รูปที่ 2.25 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.25 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 2.41 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{2},\bar{1})\}$

สามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.26

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{0})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{0+2},\overline{0+1})=(\bar{2},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{1})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{2+2},\overline{1+1})=(\bar{1},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{0})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{1+2},\overline{0+1})=(\bar{0},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{0+2},\overline{1+1})=(\bar{2},\bar{0})$

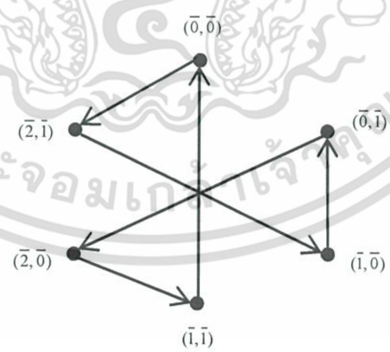
ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$

เพราะว่า $(\bar{2},\bar{0})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{2+2},\overline{0+1})=(\bar{1},\bar{1})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{2},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$

เพราะว่า $(\bar{1},\bar{1})+(\bar{2},\bar{1})=(\overline{1+2},\overline{1+1})=(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{1},\bar{1})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

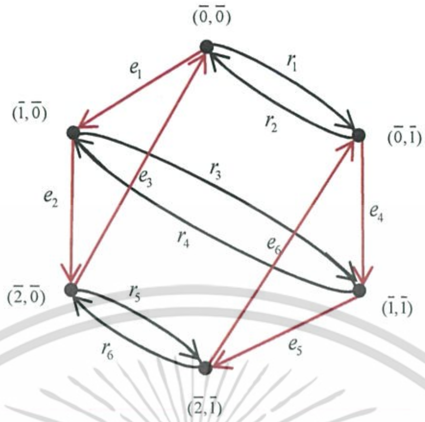


รูปที่ 2.26 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.26 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ มีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),$ $(\bar{1},\bar{1}),(\bar{0},\bar{0})$ เป็นวงฮามิลโทเนียน

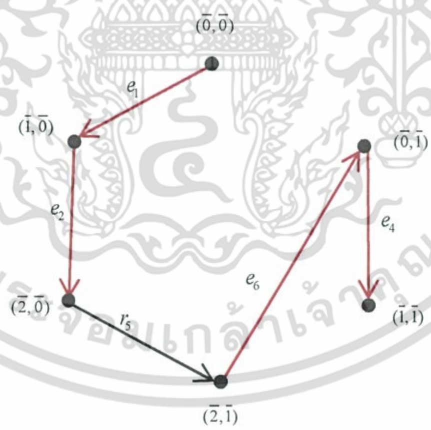
ตัวอย่าง 2.42 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}$

ซึ่งสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.27



รูปที่ 2.27 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

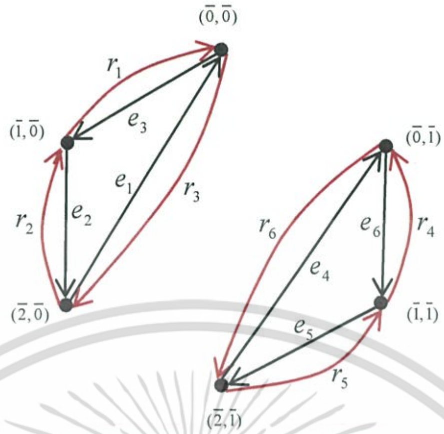
จากรูปที่ 2.26 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ มีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),$ $(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})$ เป็นวิถีฮามิลโทเนียน ดังรูปที่ 2.28



รูปที่ 2.28 : วิถีหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

ตัวอย่าง 2.43 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}$

ซึ่งสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.29



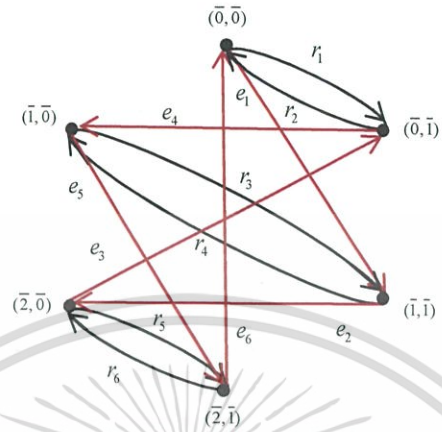
รูปที่ 2.29 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.29 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง

จึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ จึงไม่มีวงฮามิลโทเนียน

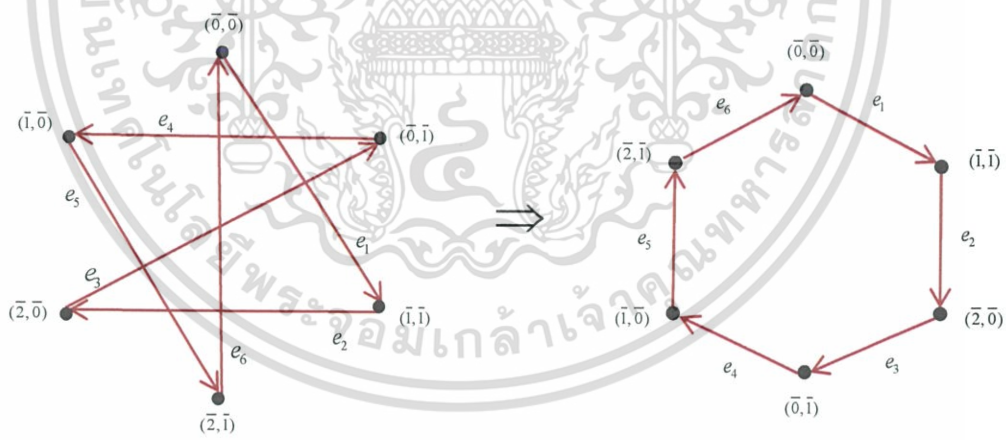
ตัวอย่าง 2.44 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ และ $\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}$

ซึ่งสามารถสร้างเคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ ดังรูปที่ 2.30



รูปที่ 2.30 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากรูปที่ 2.30 จะเห็นว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$ มีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),$ $(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{0})$ เป็นวงฮามิลโทเนียน ดังรูปที่ 2.31



รูปที่ 2.31 : วงหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2\right)$

จากการสังเกตพบว่า

1. $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{a}\}:\mathbb{Z}_5\right)$ เมื่อ $\bar{a}\neq 0$ เป็นกราฟที่มีวงฮามิลโทเนียน

2. $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{a}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ เมื่อ $\bar{a}=\bar{1},\bar{5}$ เป็นกราฟที่มีวงฮามิลโทเนียน

3. $\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2$ มีเซตย่อยขนาด 1 ทั้งหมด 6 เซต ซึ่งพบว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)$ และ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)$ มีวงฮามิลโทเนียน

4. $\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2$ มีเซตย่อยขนาด 2 ทั้งหมด 15 เซต โดยที่

4.1 $P=\left\{\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}\subseteq\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2 \,\middle|\, \overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)\text{ ไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน }\right\}$

$=\left\{\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\},\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})\},\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\},\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}\right\}$

4.2 $Q=\left\{\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}\subseteq\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2 \,\middle|\, \overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)\right.$

$\left.\text{มีวิถีฮามิลโทเนียนแต่ไม่มีวงฮามิลโทเนียน }\right\}$

$=\left\{\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\},\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0})\}\right\}$

4.3 $R=\left\{\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}\subseteq\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2 \,\middle|\, \overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)\text{ มีวงฮามิลโทเนียน }\right\}$

$=\left\{\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\},\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})\},\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1})\},\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\},\right.$

$\left.\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\},\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})\},\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0})\},\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\},\{(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1})\}\right\}$

เห็นได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{a}\}:\mathbb{Z}_5\right)$ และ $\overrightarrow{Cay}\left(\{\bar{b}\}:\mathbb{Z}_6\right)$ จะเป็นกราฟที่มีวงฮามิลโทเนียน ถ้า $\bar{a},\bar{b}$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_5$ และ $\mathbb{Z}_6$ ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)$ และ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{2},\bar{1})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)$ ซึ่งเป็นกราฟที่มีวงฮามิลโทเนียนจะพบว่า $(\bar{1},\bar{1})$ และ $(\bar{2},\bar{1})$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2$ เช่นเดียวกัน จึงเป็นที่น่าสังเกตว่า $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ จะมีวงฮามิลโทเนียนหรือไม่ อาจเกี่ยวข้องกับ S ว่าเป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ หรือไม่ และจากการสังเกตงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า

ในปี ค.ศ. 2013 W. Holsztynski and R.F.E. Strube ได้แสดงไว้ว่า

ทฤษฎีบท 2.47 [7] ถ้า G เป็นอาบีเลียนกรุป และ $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ จะมีวิถีฮามิลโทเนียน

และในปี ค.ศ. 2015 T.Suksumran and S.Panma ได้แสดงไว้ว่า

ทฤษฎีบท 2.48 [6] ให้ G เป็นกรุปจำกัด S เป็นเซตก่อกำเนิดของ G ก็ต่อเมื่อ เคย์เลย์ไดกราฟ $\overrightarrow{Cay}(S:G)$ จะเป็นกราฟเชื่อมโยงแบบเข้ม

และใน ปี ค.ศ. 2006 Joseph A. Gallian ได้แสดงไว้ว่า

ทฤษฎีบท 2.49 [2] สำหรับจำนวนนับ m,n ที่มากกว่า 1 ถ้า $\gcd(m,n)=1$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ดังนั้น ถ้า S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ จะมีวิถีฮามิลโทเนียน นั่นคือ การที่ S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ เป็นเงื่อนไขเพียงพอที่จะพิจารณาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ ซึ่งในปัญหาพิเศษนี้ เราจะพิจารณาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ ที่มีขนาดไม่เกิน 2 และ $\gcd(m,n)=1$

บทที่ 3

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในปัญหาพิเศษนี้จะพิจารณาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนนับที่ $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$ โดยที่ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ที่มีขนาดไม่เกิน 2

จากที่ทราบมาแล้วว่าถ้า S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ มีวิถีฮามิลโทเนียน ดังนั้นในปัญหาพิเศษนี้จึงจะพิจารณาการเป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ควบคู่ไปด้วย

3.1 $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 1

จากการศึกษาเราพบว่า $\mathbb{Z}_n$ เป็นกรุปวัฏจักร สำหรับจำนวนนับ n ที่ $n>1$ โดยที่มีสมาชิกก่อกำเนิดคือ $\overline{a}$ เมื่อ $\gcd(n,a)=1$ (ทฤษฎีบท 2.22) ในปัญหาพิเศษนี้ เราสามารถแสดงได้ว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ เป็นกรุปวัฏจักร เมื่อ $\gcd(m,n)=1$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 กำหนดให้ m,n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$

สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ

จะได้ว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\overline{a},\overline{b})\rangle$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

พิสูจน์ ให้ a,b เป็นจำนวนเต็ม

$(\Rightarrow)$ สมมติ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\overline{a},\overline{b})\rangle$

ในส่วนแรกจะแสดงว่า $\gcd(m,a)=1$

เพราะว่า $(\overline{1},\overline{0}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ นั่นคือ $(\overline{1},\overline{0}) \in \langle(\overline{a},\overline{b})\rangle$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $(\overline{1},\overline{0}) = k(\overline{a},\overline{b}) = (k\overline{a},k\overline{b}) = (\overline{ka},\overline{kb}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เพราะฉะนั้น $ka \equiv 1 \bmod m$ นั่นคือ $m|(ka-1)$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม ℓ ที่ทำให้ $ka-1=m\ell$ นั่นคือ $ka-m\ell=1$

เนื่องจากทฤษฎีบท 2.7 เพราะฉะนั้น $\gcd(m,a)=1$

ต่อไปจะแสดงว่า $\gcd(n,b)=1$

เพราะว่า $(\bar{0},\bar{1})\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ นั่นคือ $(\bar{0},\bar{1})\in\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $(\bar{0},\bar{1})=k(\bar{a},\bar{b})=(k\bar{a},k\bar{b})=(\overline{ka},\overline{kb})\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

เพราะฉะนั้น $kb\equiv 1 \bmod n$ นั่นคือ $n|(kb-1)$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม ℓ ที่ทำให้ $kb-1=n\ell$ นั่นคือ $kb-n\ell=1$

เนื่องจากทฤษฎีบท 2.7 เพราะฉะนั้น $\gcd(n,b)=1$

$(\Leftarrow)$ สมมติให้ $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

เนื่องจาก $\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle\subseteq\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ จึงเพียงพอจะแสดงว่า $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\subseteq\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$

ให้ $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

ในขั้นต้น จะแสดงว่า $(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\in\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$

เพราะว่า $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(m,a)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(m,na)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.7 จะมีจำนวนเต็ม k_1,ℓ_1 ซึ่งทำให้ $1=mk_1+na\ell_1$

$$mk_1=1-na\ell_1$$

จะได้ว่า $m|(1-na\ell_1)$ นั่นคือ $1\equiv\ell_1 na \bmod m$

เพราะว่า $n\ell_1 b\equiv 0 \bmod n$ และ $n\ell_1 a\equiv 1 \bmod m$

ดังนั้น $(n\ell_1)(\bar{a},\bar{b})=(n\ell_1\bar{a},n\ell_1\bar{b})=(\overline{n\ell_1 a},\overline{n\ell_1 b})=(\bar{1},\bar{0})$ ใน $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

เนื่องจาก $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(n,mb)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.7 จะมีจำนวนเต็ม k_2,ℓ_2 ซึ่งทำให้ $1=nk_2+mb\ell_2$

$$nk_2=1-mb\ell_2$$

จะได้ว่า $n|(1-mb\ell_2)$ นั่นคือ $1\equiv\ell_2 mb \bmod n$

เพราะว่า $m\ell_2 a\equiv 0 \bmod m$ และ $m\ell_2 b\equiv 1 \bmod n$

ดังนั้น $(m\ell_2)(\bar{a},\bar{b})=(m\ell_2\bar{a},m\ell_2\bar{b})=(\overline{m\ell_2 a},\overline{m\ell_2 b})=(\bar{0},\bar{1})$ ใน $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

เพราะฉะนั้น $(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x},\bar{0}) + (\bar{0},\bar{y})$

$$= x(\bar{1},\bar{0}) + y(\bar{0},\bar{1})$$

$$= x((n\ell_1)(\bar{a},\bar{b})) + y((m\ell_2)(\bar{a},\bar{b}))$$

$$= (xn\ell_1)(\bar{a},\bar{b}) + (ym\ell_2)(\bar{a},\bar{b})$$

$$= (xn\ell_1 + ym\ell_2)(\bar{a},\bar{b})$$

ดังนั้น $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \subseteq \langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$

ทำให้สรุปได้ว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$ □

ในทฤษฎีบทถัดไป เราจะพิจารณาการมีวงฮามิลโทเนียนของกราฟ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ เมื่อ $(\bar{a},\bar{b})$ เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ m,n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$

สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ ซึ่ง $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

พิสูจน์ ให้ a,b เป็นจำนวนเต็มใดๆ ซึ่ง $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 แสดงให้เห็นว่า $\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle=\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ และจากบทแทรก 2.27 ทำให้ได้ว่า

$$\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle=\left\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),2(\bar{a},\bar{b}),3(\bar{a},\bar{b}),\ldots,(mn-1)(\bar{a},\bar{b})\right\}$$

$$=\left\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),(\overline{2a},\overline{2b}),(\overline{3a},\overline{3b}),\ldots,(\overline{(mn-1)a},\overline{(mn-1)b})\right\}$$

ต่อไปจะแสดงการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$

ขั้นที่ 1 เลือกจุดเริ่มต้นที่จุด $(\bar{0},\bar{0})$

ขั้นที่ 2 เนื่องจาก $(\bar{0},\bar{0})\oplus(\bar{a},\bar{b})=(\overline{0+a},\overline{0+b})=(\bar{a},\bar{b})$ ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$

จะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{a},\bar{b})$

ดังนั้น จะมีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b})$

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก $(\bar{a},\bar{b})\oplus(\bar{a},\bar{b})=(\overline{a+a},\overline{b+b})=(\overline{2a},\overline{2b})$ ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$

จะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\bar{a},\bar{b})$ ไปยังจุดยอด $(\overline{2a},\overline{2b})$

ดังนั้น จะมีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),(\overline{2a},\overline{2b})$

ทำต่อไปเรื่อยๆ จะได้ไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),(\overline{2a},\overline{2b}),(\overline{3a},\overline{3b}),\ldots,(\overline{(mn-1)a},\overline{(mn-1)b})$

ซึ่งมีความยาว $mn-1$ และผ่าน mn จุดยอดที่แตกต่างกันทั้งหมด

ขั้นตอนสุดท้าย เนื่องจาก

$$(\overline{(mn-1)a},\overline{(mn-1)b})\oplus(\bar{a},\bar{b})=(\overline{(mn-1)a+a},\overline{(mn-1)b+b})=(\overline{(mn)a},\overline{(mn)b})=(\bar{0},\bar{0})$$

จะมีเส้นเชื่อมระบุทิศทางจากจุดยอด $(\overline{(mn-1)a},\overline{(mn-1)b})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$

ดังนั้น จะมีไดวอล์ค $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),(\overline{2a},\overline{2b}),(\overline{3a},\overline{3b}),\ldots,(\overline{(mn-1)a},\overline{(mn-1)b}),(\bar{0},\bar{0})$

ซึ่งเป็นวงฮามิลโทเนียน

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ มีวงฮามิลโทเนียน □

หมายเหตุ จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.2 การหาวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{a},\bar{b})\right\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ ในขั้นที่ 1 เราสามารถพิจารณาจุดยอดเริ่มต้นในจุดใดๆ ก็ได้ เราก็ยังได้วงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3$ และให้ $S=\left\{(\bar{1},\bar{1})\right\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,1)=1$ และ $\gcd(3,1)=1$

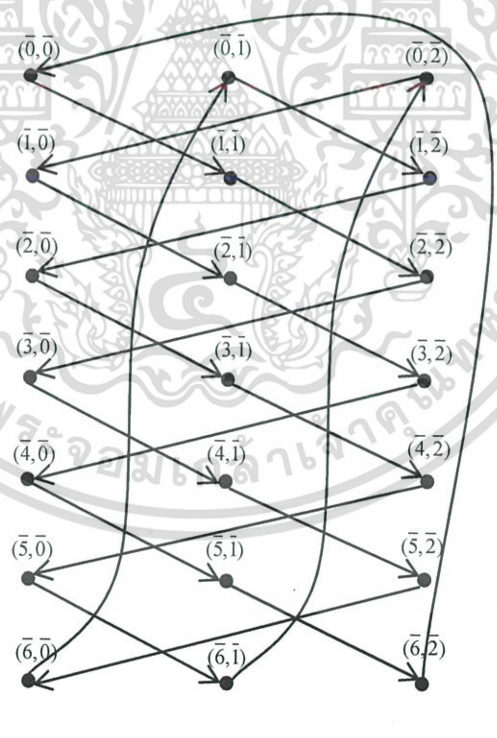
จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้ได้ว่า $S=\left\{(\bar{1},\bar{1})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3$

และจากทฤษฎีบท 3.1.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

โดยมีลำดับไดวอล์ค ดังนี้

$$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{5},\bar{2}),(\bar{6},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1}),$$

$$(\bar{4},\bar{2}),(\bar{5},\bar{0}),(\bar{6},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{4},\bar{0}),(\bar{5},\bar{1}),(\bar{6},\bar{2}),(\bar{0},\bar{0})$$



รูปที่ 3.1 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \left\{(\bar{2},\bar{1})\right\}$

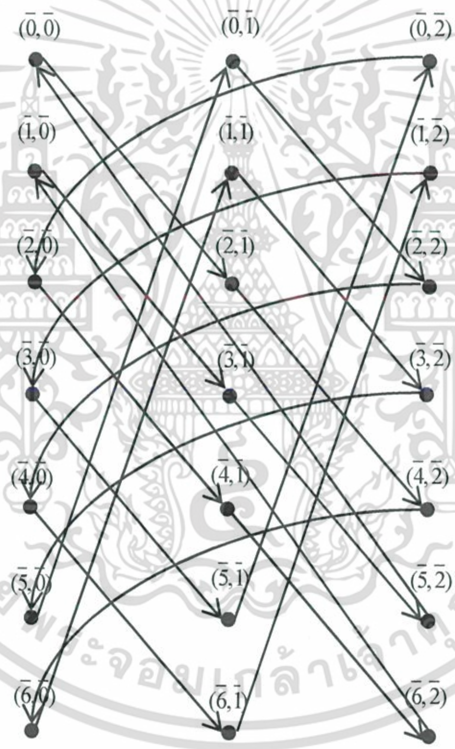
จะเห็นว่า $\gcd(7,2) = 1$ และ $\gcd(3,1) = 1$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้ได้ว่า $S = \left\{(\bar{2},\bar{1})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

และจากทฤษฎีบท 3.1.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{2},\bar{1})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

โดยมีลำดับไดวอล์ค ดังนี้

$$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{4},\bar{2}),(\bar{6},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{5},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{4},\bar{0}),(\bar{6},\bar{1}),$$
$$(\bar{1},\bar{2}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{5},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{6},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{5},\bar{2}),(\bar{0},\bar{0})$$



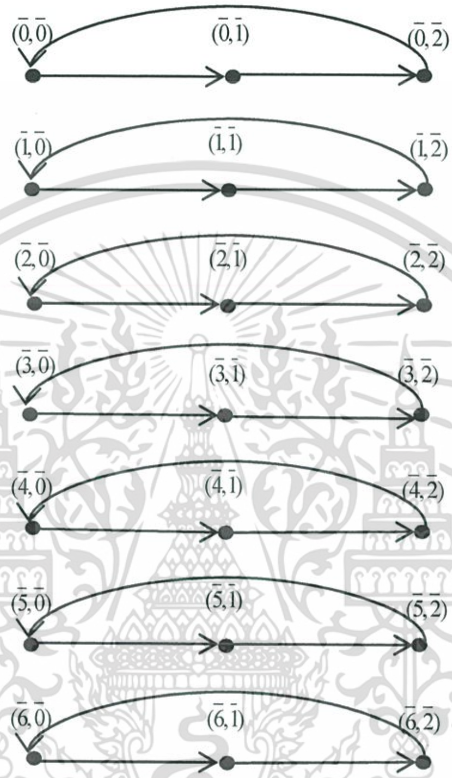
รูปที่ 3.2 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{2},\bar{1})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \{(\bar{0},\bar{1})\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,0) = 7$ และ $\gcd(3,1) = 1$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้ได้ว่า $S = \{(\bar{0},\bar{1})\}$ ไม่เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

วาดเป็นเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

จากรูปที่ 3.3 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้นจึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

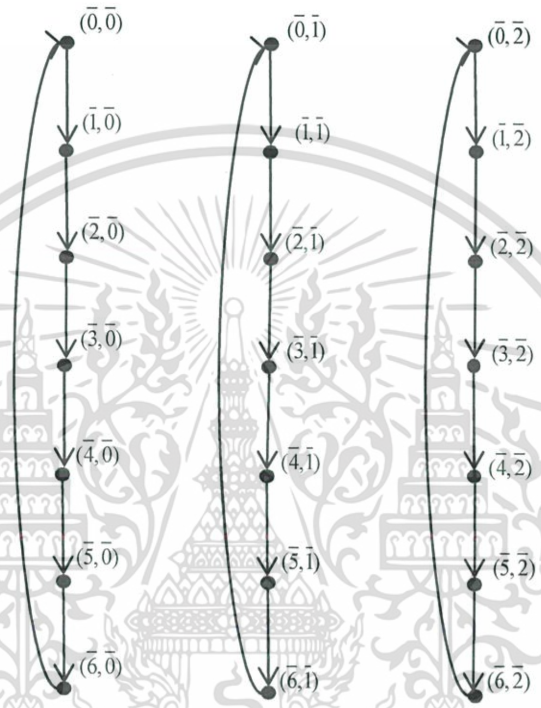
ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1})\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \{(\bar{1},\bar{0})\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,1) = 1$ และ $\gcd(3,0) = 3$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้ได้ว่า $S = \{(\bar{1},\bar{0})\}$ ไม่เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

วาดเป็นเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

จากรูปที่ 3.4 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้นจึงไม่มีวิถีฮามิลโทเนียน

ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{1},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ในทฤษฎีบทถัดไป จะแสดงให้เห็นว่าเงื่อนไข $\gcd(m,n)=1$ เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ $|S|=1$

บทตั้ง 3.1.3 ถ้า $\gcd(m,n)\neq 1$ แล้ว สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \neq \langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$

พิสูจน์ สมมติ $d=\gcd(m,n)\neq 1$ และ $(\bar{a},\bar{b})\in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เพราะว่า บทแทรก 2.27 จะได้ว่า $\circ(\bar{a})|m$ และ $\circ(\bar{b})|n$

นั่นคือ จะมี $k,\ell\in\mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $m=\circ(\bar{a})k$ และ $n=\circ(\bar{b})\ell$

จะได้ว่า จะมี $x,y\in\mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $m=dx$ และ $n=dy$ และ $\gcd(x,y)=1$

จาก $\circ(\bar{a},\bar{b}) = \mathrm{lcm}(\circ(\bar{a}),\circ(\bar{b}))$

$$= \frac{\circ(\bar{a})\cdot\circ(\bar{b})}{\gcd(\circ(\bar{a}),\circ(\bar{b}))} \quad \text{(โดย ทฤษฎีบท 2.9)}$$

$$= \frac{\frac{m}{k}\cdot\frac{n}{\ell}}{\gcd(\frac{m}{k},\frac{n}{\ell})}$$

$$= \frac{mn}{k\ell\cdot\gcd(\frac{m}{k},\frac{n}{\ell})}$$

$$= \frac{mn}{k\ell\cdot\gcd(\frac{dx}{k},\frac{dy}{\ell})}$$

$$= \frac{mn}{\gcd(dx\ell,dyk)}$$

$$= \frac{mn}{d\cdot\gcd(x\ell,yk)} \quad \text{(เพราะว่า } d\neq 1\text{)}$$

$$\neq mn$$

ดังนั้น $|\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle| = \circ(\bar{a},\bar{b})\neq mn$

ทำให้สรุปได้ว่า $\langle(\bar{a},\bar{b})\rangle \neq \mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ □

ทฤษฎีบท 3.1.4 สำหรับจำนวนนับ m,n ใดๆ ซึ่ง $m>n$

ถ้า $\gcd(m,n)\neq 1$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{a},\bar{b})\right\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

สำหรับ ทุกๆ จำนวนเต็ม a,b

พิสูจน์ สมมติ $\gcd(m,n)\neq 1$ และ a,b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

โดยบทตั้ง 3.1.3 , $(\bar{a},\bar{b})$ ไม่เป็นสมาชิกก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

ให้ $k=\circ(\bar{a},\bar{b})$ ดังนั้น $k<mn$

สมมติ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{a},\bar{b})\right\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ มีวงฮามิลโทเนียน C นั่นคือ C เป็นวงที่มีความยาว mn

จะเห็นว่าใน C จะมีไดพาธ

$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{a},\bar{b}),(\overline{2a},\overline{2b}),...,k(\bar{a},\bar{b}),(k+1)(\bar{a},\bar{b}),...,(mn-1)(\bar{a},\bar{b}),(mn)(\bar{a},\bar{b})$

นั่นคือ $\ell_1(\bar{a},\bar{b})\neq\ell_2(\bar{a},\bar{b})$ เมื่อ $\ell_1\neq\ell_2$ และ $0\leq\ell_1<\ell_2\leq mn-1$

เพราะว่า $\circ(\bar{a},\bar{b})=k$ นั่นคือ $k(\bar{a},\bar{b})=(\bar{0},\bar{0})$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

จึงสรุปได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{a},\bar{b})\right\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน □

3.2 $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 2

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{a},\overline{b})\right\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ บางเซตย่อยที่มีขนาด 2 ของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ในขั้นแรกจะหาสมบัติบางประการของเซตย่อย S ที่ทำให้เซตย่อย S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.2.1

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ m,n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$

สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c,d ใด ๆ

ถ้า a,b,c,d สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งใน 4 กรณีนี้

1. $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$
2. $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$
3. $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$
4. $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$

แล้ว $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\overline{a},\overline{b}),(\overline{c},\overline{d})\rangle$

พิสูจน์ ให้ $\gcd(m,n)=1$ และ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็ม

<u>กรณี 1</u> ; $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า $\langle(\overline{a},\overline{b})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

จะเห็นว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\overline{a},\overline{b})\rangle \subseteq \langle(\overline{a},\overline{b}),(\overline{c},\overline{d})\rangle \subseteq \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

ดังนั้น $\langle(\overline{a},\overline{b}),(\overline{c},\overline{d})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

<u>กรณี 2</u> ; $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$

ให้ $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เนื่องจาก $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(m,a)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(m,na)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.8 จะมีจำนวนเต็ม k_1,ℓ_1 ซึ่งทำให้ $1 = mk_1 + na\ell_1$

$$mk_1 = 1 - na\ell_1$$

จะได้ว่า $m|(1-na\ell_1)$ นั่นคือ $1 \equiv \ell_1 na \bmod m$

เพราะว่า $n\ell_1 b \equiv 0 \bmod n$ และ $n\ell_1 a \equiv 1 \bmod m$

ดังนั้น $(n\ell_1)(\bar{a},\bar{b}) = (n\ell_1\bar{a}, n\ell_1\bar{b}) = (\overline{n\ell_1 a}, \overline{n\ell_1 b}) = (\bar{1},\bar{0})$ ใน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

และเนื่องจาก $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(n,md)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.8 จะมีจำนวนเต็ม k_2, ℓ_2 ซึ่งทำให้ $1 = nk_2 + md\ell_2$

$$nk_2 = 1 - md\ell_2$$

จะได้ว่า $n|(1-md\ell_2)$ นั่นคือ $1 \equiv \ell_2 md \bmod n$

เพราะว่า $m\ell_2 c \equiv 0 \bmod m$ และ $m\ell_2 d \equiv 1 \bmod n$

ดังนั้น $(m\ell_2)(\bar{c},\bar{d}) = (m\ell_2\bar{c}, m\ell_2\bar{d}) = (\overline{m\ell_2 c}, \overline{m\ell_2 d}) = (\bar{0},\bar{1})$ ใน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}(\bar{x},\bar{y}) &= (\bar{x},\bar{0}) + (\bar{0},\bar{y}) \\ &= x(\bar{1},\bar{0}) + y(\bar{0},\bar{1}) \\ &= x((n\ell_1)(\bar{a},\bar{b})) + y((m\ell_2)(\bar{c},\bar{d})) \\ &= (xn\ell_1)(\bar{a},\bar{b}) + (ym\ell_2)(\bar{c},\bar{d})\end{aligned}$$

ดังนั้น $\langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

<u>กรณี 3</u> ; $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

ให้ $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เนื่องจาก $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(m,c)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(m,nc)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.8 จะมีจำนวนเต็ม k_1, ℓ_1 ซึ่งทำให้ $1 = mk_1 + nc\ell_1$

$$mk_1 = 1 - nc\ell_1$$

จะได้ว่า $m|(1-nc\ell_1)$ นั่นคือ $1 \equiv \ell_1 nc \bmod m$

เพราะว่า $n\ell_1 d \equiv 0 \bmod n$ และ $n\ell_1 c \equiv 1 \bmod m$

ดังนั้น $(n\ell_1)(\bar{c},\bar{d}) = (n\ell_1\bar{c}, n\ell_1\bar{d}) = (\overline{n\ell_1 c}, \overline{n\ell_1 d}) = (\bar{1},\bar{0})$ ใน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

และเนื่องจาก $\gcd(m,n)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$ โดยทฤษฎีบท 2.5 จะได้ $\gcd(n,mb)=1$

โดยทฤษฎีบท 2.8 จะมีจำนวนเต็ม k_2, ℓ_2 ซึ่งทำให้ $1 = nk_2 + mb\ell_2$

$$nk_2 = 1 - mb\ell_2$$

จะได้ว่า $n|(1-mb\ell_2)$ นั่นคือ $1 \equiv \ell_2 mb \bmod n$

เพราะว่า $m\ell_2 a \equiv 0 \bmod m$ และ $m\ell_2 b \equiv 1 \bmod n$

ดังนั้น $(m\ell_2)(\bar{a},\bar{b}) = (m\ell_2\bar{a}, m\ell_2\bar{b}) = (\overline{m\ell_2 a}, \overline{m\ell_2 b}) = (\bar{0},\bar{1})$ ใน $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

เพราะฉะนั้น $(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x},\bar{0}) + (\bar{0},\bar{y})$

$$\begin{aligned} &= x(\bar{1},\bar{0}) + y(\bar{0},\bar{1}) \\ &= x((n\ell_1)(\bar{c},\bar{d})) + y((m\ell_2)(\bar{a},\bar{b})) \\ &= (xn\ell_1)(\bar{c},\bar{d}) + (ym\ell_2)(\bar{a},\bar{b}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

<u>กรณี 4</u> ; $\gcd(m,c) = 1$ และ $\gcd(n,d) = 1$

จากทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า $\langle(\bar{c},\bar{d})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

จะเห็นว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{c},\bar{d})\rangle \subseteq \langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle \subseteq \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

ดังนั้น $\langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

สรุปได้ว่า ถ้า a, b, c, d สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งใน 4 กรณีนี้

1. $\gcd(m,a) = 1$ และ $\gcd(n,b) = 1$
2. $\gcd(m,a) = 1$ และ $\gcd(n,d) = 1$
3. $\gcd(m,c) = 1$ และ $\gcd(n,b) = 1$
4. $\gcd(m,c) = 1$ และ $\gcd(n,d) = 1$

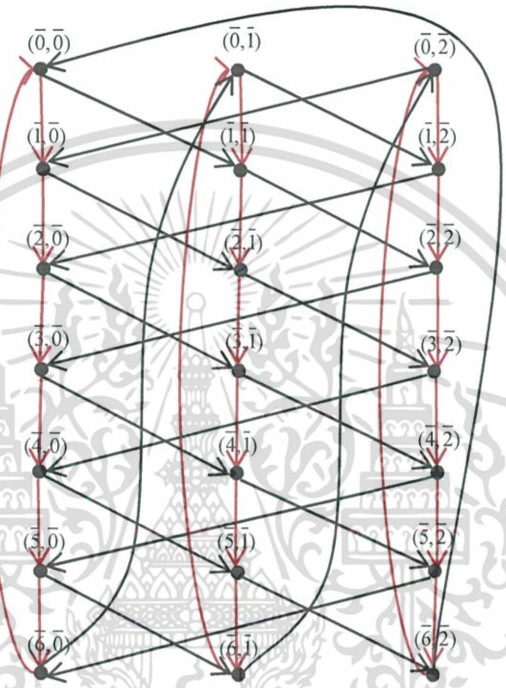
แล้ว $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle$ □

ตัวอย่าง 3.5 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,1)=1$ และ $\gcd(3,1)=1$ และ $\gcd(7,1)=1$ และ $\gcd(3,0)=3$

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้ได้ว่า $S = \left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.5



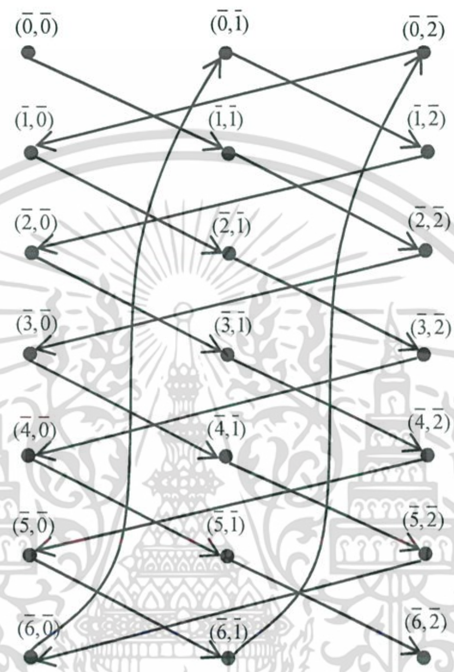
รูปที่ 3.5 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

จากรูปที่ 3.5 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ จะมีวิถีฮามิลโทเนียน

โดยมีลำดับไดวอล์ค ดังนี้

$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{5},\bar{2}),(\bar{6},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1}),$

$(\bar{4},\bar{2}),(\bar{5},\bar{0}),(\bar{6},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{4},\bar{0}),(\bar{5},\bar{1}),(\bar{6},\bar{2})$



รูปที่ 3.6 : วิถีหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

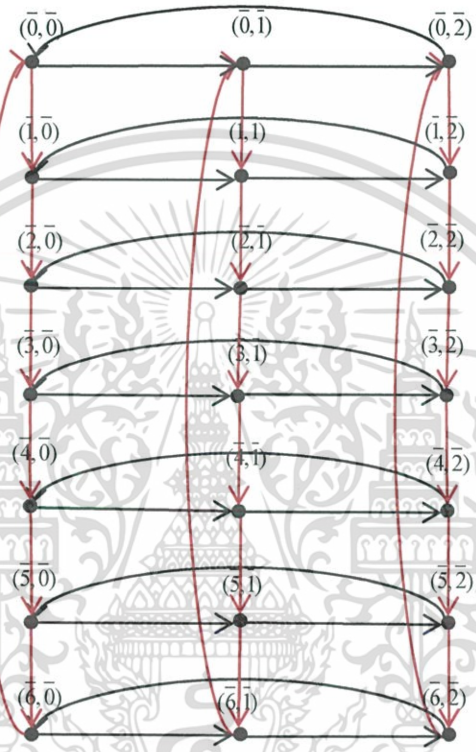
จากรูปที่ 3.6 ไดวอล์คที่ได้กล่าวเบื้องต้นนั้น สังเกตได้ว่าจุดยอดสุดท้าย $(\bar{6},\bar{2})$ มีเส้นเชื่อมระบุทิศทางไปยังจุดยอดเริ่มต้น $(\bar{0},\bar{0})$ ดังนั้น จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

ตัวอย่าง 3.6 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \left\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,0) = 7$ และ $\gcd(3,1) = 1$ และ $\gcd(7,1) = 1$ และ $\gcd(3,0) = 3$

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้ได้ว่า $S = \left\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

จาก ทฤษฎีบท 2.47 และทฤษฎีบท 2.48 ทำให้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ มีวิถีฮามิลโทเนียน

และ โดย ทฤษฎีบท 2.49 $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\} : \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ตัวอย่าง 3.5 และ 3.6 จะเห็นได้ว่า สำหรับเซตก่อกำเนิด S ขนาด 2 ของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ จะมีวิถีฮามิลโทเนียนเสมอ แต่ไม่จำเป็นที่จะมีวงฮามิลโทเนียน ในทฤษฎีบทถัดไปจะแสดงเงื่อนไขเพียงพอของ S ที่ทำให้ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ m,n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $m>n$ และ $\gcd(m,n)=1$

สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c,d ใดๆ

ถ้า $(\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1)$ หรือ $(\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,d)=1)$

แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

พิสูจน์ ให้ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็มใดๆ ซึ่ง $(\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1)$

หรือ $(\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,d)=1)$

<u>กรณี 1</u> ; $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$

จากทฤษฎีบท 3.1.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน C

เนื่องจาก $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right) \subset \overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ทำให้ได้ว่า วงฮามิลโทเนียน C เป็นกราฟย่อยของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ซึ่งมีจำนวนจุดยอดเท่ากัน จะได้ว่า C จึงเป็นวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

<u>กรณี 2</u> ; $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$

จากทฤษฎีบท 3.1.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน C

เนื่องจาก $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right) \subset \overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ทำให้ได้ว่า วงฮามิลโทเนียน C เป็นกราฟย่อยของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ซึ่งมีจำนวนจุดยอดเท่ากัน จะได้ว่า C จึงเป็นวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

สรุปได้ว่า ถ้า $\left(\gcd(m,a)=1\right.$ และ $\left.\gcd(n,b)=1\right)$ หรือ $\left(\gcd(m,c)=1\right.$ และ $\left.\gcd(n,d)=1\right)$

แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{a},\overline{b}),(\overline{c},\overline{d})\right\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน □

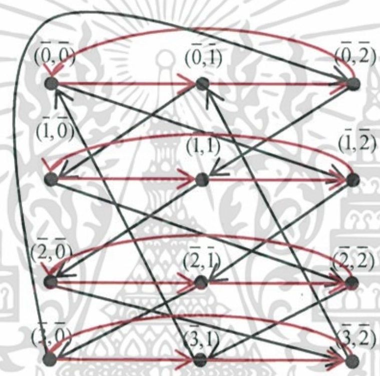
ตัวอย่าง 3.7 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3$ และให้ $S=\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\right\}$

จะเห็นว่า $\gcd(4,0)=4$ และ $\gcd(3,1)=1$

และ $\gcd(4,1)=1$ และ $\gcd(3,2)=1$

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้ได้ว่า $S=\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3$

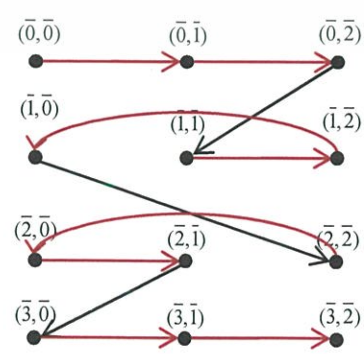
วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\right\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\right\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ มีวงฮามิลโทเนียน แต่ถ้าเลือกลำดับไดพาธเป็น $(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{2},\overline{2}),(\overline{2},\overline{0}),(\overline{2},\overline{1}),(\overline{3},\overline{0}),(\overline{3},\overline{1}),(\overline{3},2)$

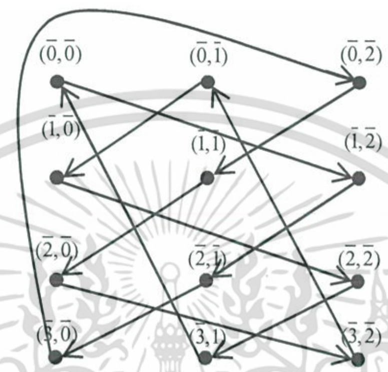
จะทำให้ได้ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},2)\right\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ มีแค่วิถีฮามิลโทเนียน ดังรูป 3.9



รูปที่ 3.9 : วิถีหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2})\right\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

ดังนั้นการเลือกลำดับไดพาธ จึงเป็นสิ่งที่จำเป็น เพราะหากเลือกลำดับไดพาธที่ไม่ถูกต้อง อาจจะทำให้ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ มีแค่วิถีฮามิลโทเนียน ไม่มีวงฮามิลโทเนียนตามทฤษฎีบท 3.2.2 ซึ่งในรูปที่ 3.10 แสดงการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ โดยมีลำดับไดพาธ ดังนี้

$$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{0},\bar{0})$$



รูปที่ 3.10 : วงหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

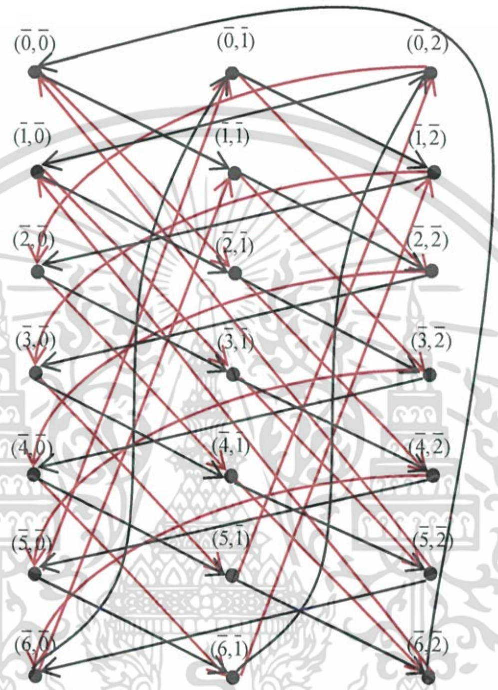
ตัวอย่าง 3.8 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S=\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\right\}$

จะเห็นว่า $\gcd(7,1)=1$ และ $\gcd(3,1)=1$

และ $\gcd(7,2)=1$ และ $\gcd(3,1)=1$

จากทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้ได้ว่า $S=\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\right\}$ เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$

วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.11



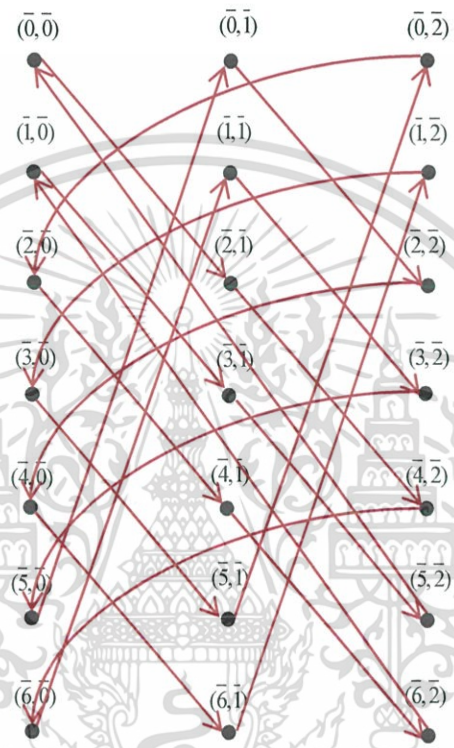
รูปที่ 3.11 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\right\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

ในรูปที่ 3.11 จะมีวงฮามิลโทเนียน โดยมีลำดับไดวอล์ค ดังนี้

$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{4},\bar{2}),(\bar{6},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{5},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{4},\bar{0}),(\bar{6},\bar{1}),$

$(\bar{1},\bar{2}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{5},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{6},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{5},\bar{2}),(\bar{0},\bar{0})$



รูปที่ 3.12 : วงหนึ่งของ $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$

ทฤษฎีบท 3.2.3 สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c,d และ จำนวนนับ m,n ที่ $m>n$

ถ้า $S=\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}$ หรือ $S=\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

พิสูจน์ ให้ $S=\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}$ หรือ $S=\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}$

<u>กรณี 1</u> ; $S=\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}$

สมมติ $\overrightarrow{Cay}(\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน C

เนื่องจาก $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

ดังนั้นในวงฮามิลโทเนียน C จะมีไดวอล์คจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ เป็นอาบีเลียนกรุปและ C เป็นวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}(\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$

จะมีจำนวนเต็ม $k,\ell\geq 0$ ซึ่งมีไดวอล์คจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{1},\bar{0})$ มีความยาว $k+\ell$

และ $(\bar{0},\bar{0})+k(\bar{0},\bar{b})+\ell(\bar{0},\bar{d})=(\bar{1},\bar{0})$

$$k(\bar{0},\bar{b})+\ell(\bar{0},\bar{d})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{0},\overline{kb})+(\bar{0},\overline{\ell d})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{0},\overline{kb}+\overline{\ell d})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{0},\overline{kb+\ell d})=(\bar{1},\bar{0})$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $1\not\equiv 0 \bmod m$

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}(\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

<u>กรณี 2</u> ; $S=\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}$

สมมติ $\overrightarrow{Cay}(\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$ มีวงฮามิลโทเนียน D

เนื่องจาก $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\in\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$

ดังนั้นในวงฮามิลโทเนียน D จะมีวิถีจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$

เนื่องจาก $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ เป็นอาบีเลียนกรุปและ D เป็นวงฮามิลโทเนียนใน $\overrightarrow{Cay}(\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n)$

จะมีจำนวนเต็ม $k,\ell\geq 0$ ซึ่งมีวิถีจากจุดยอด $(\bar{0},\bar{0})$ ไปยังจุดยอด $(\bar{0},\bar{1})$ มีความยาว $k+\ell$

และ $(\bar{0},\bar{0})+k(\bar{a},\bar{0})+\ell(\bar{c},\bar{0})=(\bar{0},\bar{1})$

$$k(\bar{a},\bar{0})+\ell(\bar{c},\bar{0})=(\bar{0},\bar{1})$$

$$(\overline{ka},\bar{0})+(\overline{\ell c},\bar{0})=(\bar{0},\bar{1})$$

$$(\overline{ka}+\overline{\ell c},\bar{0})=(\bar{0},\bar{1})$$

$$(\overline{ka+\ell c},\bar{0})=(\bar{0},\bar{1})$$

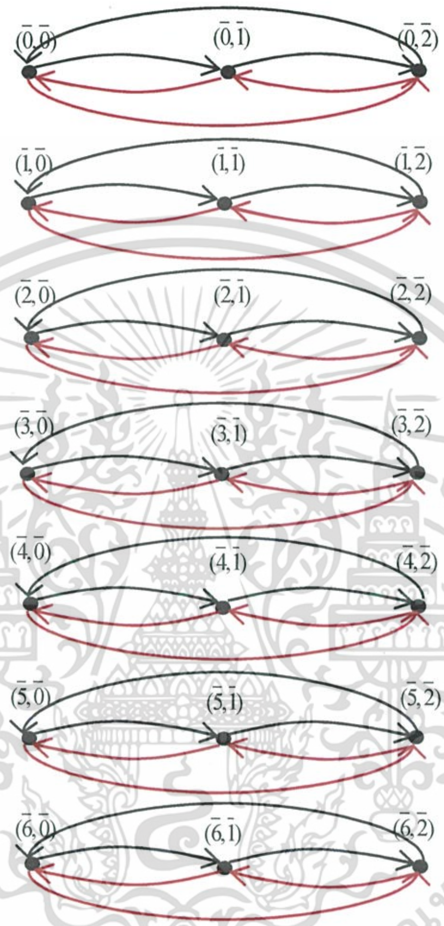
ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $0 \not\equiv 1 \bmod n$

ดังนั้น $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

สรุปได้ว่า ถ้า $S=\left\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\right\}$ หรือ $S=\left\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\right\}$

แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน □

ตัวอย่าง 3.9 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ จะเห็นว่า จากทฤษฎีบท 3.2.3 $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.13

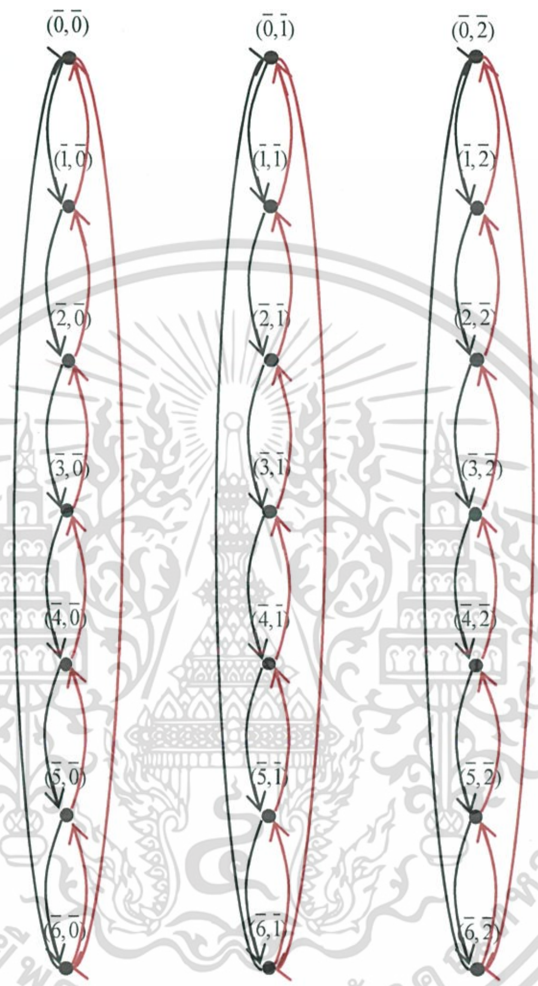


รูปที่ 3.13 : $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

ตัวอย่าง 3.10 พิจารณาในกรุป $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3$ และให้ $S = \left\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{6},\bar{0})\right\}$

จะเห็นว่า จากทฤษฎีบท 3.2.3 $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{6},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

วาดเคย์เลย์ไดกราฟได้ดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 : $\overrightarrow{Cay}\left(\left\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{6},\bar{0})\right\}:\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3\right)$

บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาการมีวงฮามิลโทเนียนของ $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนนับที่ $m>n$ และ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ ที่มีขนาดไม่เกิน 2 พบว่า ถ้า S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ จะมีวิถีฮามิลโทเนียน ทางคณะผู้จัดทำจึงพิจารณาสมบัติหรือเงื่อนไขที่ทำให้ S เป็นเซตก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ โดยพิจารณาในกรณี $\gcd(m,n)=1$
เนื่องจาก ถ้า $\gcd(m,n)\neq 1$ แล้ว สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \neq \langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$ และพบว่าถ้า $\gcd(m,n)\neq 1$ แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

ซึ่งผลการวิจัยได้แยกเป็น 2 ส่วน คือส่วนแรกเป็น $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 1 และส่วนที่สองเป็น $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 2

ส่วนแรก $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 1 พบว่า
สำหรับจำนวนเต็ม a,b ใดๆ จะได้ว่า $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{a},\bar{b})\rangle$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน

ส่วนที่สอง $\overrightarrow{Cay}(S:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$ เมื่อ S เป็นเซตย่อยที่มีขนาด 2 พบว่า
สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c,d ใดๆ ถ้า a,b,c,d สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งใน 4 กรณีนี้

1. $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$
2. $\gcd(m,a)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$
3. $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,b)=1$
4. $\gcd(m,c)=1$ และ $\gcd(n,d)=1$

แล้ว $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n = \langle(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\rangle$
และ ถ้า $\left(\gcd(m,a)=1\right.$ และ $\left.\gcd(n,b)=1\right)$ หรือ $\left(\gcd(m,c)=1\right.$ และ $\left.\gcd(n,d)=1\right)$
แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะมีวงฮามิลโทเนียน
และยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $S=\{(\bar{0},\bar{b}),(\bar{0},\bar{d})\}$ หรือ $S=\{(\bar{a},\bar{0}),(\bar{c},\bar{0})\}$
แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n\right)$ จะไม่มีวงฮามิลโทเนียน

4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาพบว่า ถ้า a,b,c,d สอดคล้องกับเงื่อนไขกรณี 2 หรือ เงื่อนไขกรณี 3 แต่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขกรณี 1 และ เงื่อนไขกรณี 4 แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_2\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_3\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_2\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_3\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_4\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_2\right)$, $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_3\right)$ เป็นกราฟที่มีวิถีฮามิลโทเนียนแต่ไม่มีวงฮามิลโทเนียน ซึ่งทางคณะผู้จัดทำยังไม่ได้พิสูจน์ในกรณีทั่วไปว่า ถ้า a,b,c,d สอดคล้องกับเงื่อนไขกรณี 2 หรือ เงื่อนไขกรณี 3 แล้ว $\overrightarrow{Cay}\left(\{(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d})\}:\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\right)$ ไม่มีวงฮามิลโทเนียน

หากผู้สนใจจะทำวิจัยต่อเนื่อง อาจจะทำในส่วนที่ทางคณะผู้จัดทำยังไม่ได้แสดงไว้หรืออาจจะเปลี่ยนกรุป $\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n$ เป็นกรุป $\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{m_n}$ เมื่อ $m_1,m_2,\ldots,m_n$ เป็นจำนวนนับ

เอกสารอ้างอิง

[1] Bergen, Jeffrey. 2010. **Abstract Algebra**. The United States : Elsevier.

[2] Gallian, Joseph A. 2010. **Contemporary Abstract Algebra(7thed.)**. Unites States : Brooks/Cole.

[3] Gross, Jonathan L. and Yellen, Jay. 2004. **Graph Theory**. Unites States Of America : CRC PRESS LLC.

[4] Meechana, Sornsawan 2016. **The Hamiltonian Circuit In Some Cayley Digraphs** $\overrightarrow{Cay}(A:\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n)$. Journal Of Graph.

[5] S. Witte, David 1980. **On Hamiltonian Circuits in Cayley Diagrams**. Journal Of Abstract Algebra. 38: 99-108

[6] Suksumran,T and Panma,s. 2015. **On Connected Cayley Graphs Of Semigroups**. Thai Journal Of Mathematics. 3: 641-652

[7] W. Holsztynski and R.F.E. Strube, **Paths and circuits in finite groups**, Discrete Math. 22 (1978) 263-272.

[8] W.R. Scott. 1964. **Group Theory**. United States Of America : Prentice-Hall Incorporate.

[9] Witte, David 1982. **On Hamiltonian Circuits In Cartesian Products Of Cayley Digraphs**. Journal Of Abstract Algebra. 43: 297-307

[10] จิตรจวบ เปาอินทร์. 2537. **พีชคณิตนามธรรม**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิยาลัย.

[11] นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540. **ทฤษฎีกราฟ 1** . ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

[12] นิตยา ชิงชัย. 2540. **ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

[13] ราชบัณฑิตยสถาน. 2553. **พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2553**. กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่น.