การหาผลเฉลยของสมการฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

Solving the solution of iterative functional equation $f^q(n) = an + b$ on nonnegative integers

รมณีย์ ธรรมะ
วณิชชา มะลูลีม
วรปรีย์ จันทร์อยู่

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

Solving the solution of iterative functional equation $f^q(n) = an + b$ on nonnegative integers

ROMMANEE THUMMA
VANICHA MALULEEM
WORAPREE CHANYOO

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยของสมการฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบ Solving the solution of iterative functional equation $f^q(n) = an + b$ on nonnegative integers
ชื่อนักศึกษา	1.นางสาวรมณีย์ ธรรมะ 56050109 2.นางสาววณิชชา มะลูลีม 56050119 3.นางสาววรปรีย์ จันทร์อยู่ 56050122
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ประธานกรรมการ	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยของสมการฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบ
Solving the solution of iterative functional equation $f^q(n) = an + b$ on nonnegative integers

ชื่อนักศึกษา 1.นางสาวรมณีย์ ธรรมะ 56050109
2.นางสาววณิชชา มะลูลีม 56050119
3.นางสาววรปรีย์ จันทร์อยู่ 56050122

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา 2559
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

บทคัดย่อ

งานวิจัยของ Sakaria [5] พิจารณาฟังก์ชัน

$$f : X \to X \ ; X = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$$

ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n + k$ สำหรับทุกจำนวน $n \in X$ เมื่อ $q, k \in \mathbb{N}$

ในงานวิจัยนี้เราขยายผลงานของ Sakaria ศึกษาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an + b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}_0$ โดย $q \geq 2, a \geq 2$ และ b เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใดๆ

คำสำคัญ : สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ

Special Problem Title	Solving the solution of iterative functional equation $f^q(n)=an+b$ on nonnegative integers		
Students	Ms. Rommanee	Thumma	56050109
	Ms. Vanicha	Maluleem	56050119
	Ms. Worapree	Chanyoo	56050122
Degree	Bachelor of Science		
Major Program	Applied Mathematics		
Academic Year	2016		
Advisor	Dr.Sukrawan	Mavecha	

ABSTRACT

In the work of Sakaria [5], he considered function

$$f: X \to X \;\; ; X = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$$

satisfies $f^q(n)=n+k$ for all $n \in X$, where $q,k \in \mathbb{N}$.

In this research, we extend Sakaria's work to study the function $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, where $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ satisifies $f^q(n)=an+b$ for all $n \in \mathbb{N}_0$,where $q \ge 2, a \ge 2$ and b nonnegative integers.

Keywords : Iterative functional equation

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่อง การหาผลเฉลยของสมการฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบ คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้ และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ และ อ.พรชัย ชัยสนิท ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ท่านช่วยประสิทธิ์ประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมาตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของทางภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปด้วยดี

รมณีย์ ธรรมะ
วณิชชา มะลูลีม
วรปรีย์ จันทร์อยู่

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

รูปแบบการทำซ้ำของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์สมัยใหม่ถูกพัฒนาอย่างรวดเร็วในเวลา10ปีที่ผ่านมาในสายฟิสิกส์,ชีววิทยา และเศรษฐศาสตร์

ให้ฟังก์ชัน f บนช่วง $\mathbb{Z}$ และจำนวนเต็มบวก n สัญลักษณ์ f^n แทนฟังก์ชันประกอบ (composite function) บนช่วง $\mathbb{Z}$ นั่นคือ

$$f^0(x)=x, f^{n+1}(x)=f(f^n(x)) \text{ สำหรับ } n=1,2,...$$

ฟังก์ชัน f^n เป็นการทำซ้ำ ของ f จำนวน n ครั้งกำหนด x_0 ใน $\mathbb{Z}$ เขียนว่า $x_n = f^n(x_0), n=1,2,...$

พิจารณาตัวอย่างจากเรื่องชีววิทยา สมมติให้สิ่งแวดล้อมที่กำหนดคือกระต่าย เราจะสนใจในสิ่งที่เราต้องการรู้คือจำนวนที่แปรผันกับเวลา สมมติให้เวลาเหล่านั้นเป็นการวัดปีละครั้ง ทุกๆฤดูใบไม้ผลิ ที่เวลาเริ่มต้น เรามี x_0 แทนจำนวนตัว หลังจากปีแทนด้วย x_1 ปีต่อไปแทนด้วย x_2 เป็นต้น ความแน่นอนภายใต้เงื่อนไขบางส่วน จำนวนของตัวในปี $n+1$ ขึ้นอยู่กับ x_n เท่านั้น

$$x_{n+1} = f(x_n), n=0,1,2,...$$

ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function)

ตัวอย่างข้างต้นเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายของการเติบโตของประชากรของสายพันธุ์เดียวของสิ่งมีชีวิตนั่นคือ ได้มาโดยการนับจำนวนรายตัวของสายพันธุ์ในเวลาที่กำหนด ดังนั้นเราจะกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งเทอมจะแทนด้วยประชากรของสายพันธุ์ที่กำหนดในขอบเขตที่กำหนดให้ที่เวลา *n = 1,2,3,...* ซึ่งแทนค่าลิมิตของ $n \to \infty$ เราอาจจะศึกษาระบบพลวัต (dynamical system) ของประชากร

ซึ่งกระบวนการนี้สำคัญในทุกๆแขนงวิชาในทางวิทยาศาสตร์ บางตัวอย่างอาจประกอบด้วยการเคลื่อนไหวของดาวและกาแล็กซีในจักรวาล การขึ้นและลงของตลาดหุ้น อากาศโลก การเปลี่ยนแปลงของสารเคมีในอุณหภูมิที่เหมาะสม การขึ้นลงของจำนวนประชากร และการเคลื่อนไหวของลูกตุ้มอย่างง่าย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

ให้จำนวนเต็ม $q \geq 2, a \geq 2$ และ b เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใดๆ งานวิจัยนี้ศึกษาฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an + b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}_0$

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

พิจารณาฟังก์ชัน f บนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบเท่านั้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความรู้เกี่ยวกับการทำซ้ำของฟังก์ชัน
2. มีความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (Iterative functional equations)
3. สามารถหาฟังก์ชันผลเฉลยของ $f^q(n) = an + b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดได้

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. รวบรวมเอกสารที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศเพื่อให้ได้ข้อมูลทั้งหมดที่จำเป็นต่อการวิจัย
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำจากเอกสารอ้างอิงต่างๆเพื่อให้ได้ความรู้เกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยและเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป
3. พิจารณาสมบัติของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = an + b$ บนเซตจำนวนเต็มไม่เป็นลบ
4. ใช้ผลที่ได้จากข้อ 3. หารูปแบบของฟังก์ชันผลเฉลย

1.6 แผนการดำเนินงาน

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.รวบรวมเอกสารอ้างอิงที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศ										
2.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันทำซ้ำในรูปแบบความสัมพันธ์ต่างๆ										
3.หาสมบัติที่เกี่ยวข้องและรูปแบบของฟังก์ชัน f บน $\mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=an+b$ ทุกๆ n กับเงื่อนไขต่างๆที่กำหนด										
4.ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหาทั้งหมด										
5.จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งจัดทำแบบการนำเสนอ										
6.ซ้อมนำเสนอปัญหาพิเศษ										
7.นำเสนอปัญหาพิเศษ										

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

สำหรับฟังก์ชัน f และ $q \in \mathbb{N}$

นิยามการทำซ้ำ q ครั้งของ f โดย

$$f^q = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (q \text{ ครั้ง})$$

เมื่อ $\circ$ แทนฟังก์ชันประกอบ (composition of function)

ทฤษฎีของสมการฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equations) มีมาอย่างยาวนานและแพร่หลายมาก [4] ในที่นี้ เราจะพิจารณาสมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (polynomial-like functional equations) ระดับขั้นที่ n มีรูปแบบ

$$a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + a_{n-2} f^{n-2}(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x = F(x) \qquad (2.1)$$

เมื่อ $f : X \to X$ คือฟังก์ชันไม่ทราบ (unknown function), F คือฟังก์ชันกำหนดให้ และ $a_0, \ldots, a_{n-1}$ คือจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

นิยามสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของ (2.1) มีรูปแบบ

$$P(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (2.2)$$

และ $P(r)$ เรียกว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของ (2.2)

2.1 กรณีเซตไม่วิยุต (Non-discrete set case)

ให้ X เป็นปริภูมิเชิงเส้นจำนวนจริงหรือเชิงซ้อน

ในปี 1996 Jarczyk,[3] หาผลเฉลยของกรณีพิเศษของ (2.1)

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f^{n_i}(x) = x \qquad (2.3)$$

ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1 ([3]) สมมติให้ $\gcd(n_1,\dots,n_k)=1$ ถ้าแต่ละ $D\subset(-\infty,0)$ หรือ $D\subset(0,\infty)$ และถ้า $f:D\to D$ สอดคล้องกับ (2.3) เมื่อ $a_1,\dots,a_k$ เป็นจำนวนบวก แล้ว

$$cD\subset D \text{ และ } f(x)=cx \qquad (x\in D),$$

เมื่อ c เป็นรากบวกรากเดียวของสมการลักษณะเฉพาะ $\sum_{i=1}^{k} a_i\lambda^{n_i}=1$

นอกจากนี้ ถ้า $\gcd(n_1,\dots,n_k)=p$ แล้ว

$$c^pD\subset D \quad \text{และ} \quad f^p(x)=c^px \qquad (x\in D).$$

แนวคิดหลักของการพิสูจน์คือแปลง (2.3) ให้เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้น (linear difference equation) บน $\mathbb{N}^k$ และสนใจวิธีการเวียนบังเกิด(recurrent method)

ในปี 2000,Matkowski และ Zhang [7] แสดงในทฤษฎีบทถัดไปว่าผลเฉลยของสมการฟังก์ชันเหมือนพหุนามที่มีระดับขั้นที่ต่ำกว่าเป็นผลเฉลยของ สมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนามที่มีระดับขั้นที่สูงกว่า เช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.1.2 ([7]) ให้ X แทนปริภูมิเชิงเส้นจำนวนจริงหรือเชิงซ้อนและให้

$$Q(x)=x^k-b_{k-1}x^{k-1}-\cdots-b_1x-b_0\in\mathbb{C}[x]$$
$$P(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0\in\mathbb{C}[x]$$

สมมติ $k\le n$ และ $Q|P$ ถ้า $f:X\to X$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f^k(x)=b_{k-1}f^{k-1}(x)+b_{k-2}f^{k-2}(x)+\cdots+b_0x, \quad (x\in X) \tag{2.4}$$

แล้ว f สอดคล้อง

$$f^n(x)=a_{n-1}f^{n-1}(x)+a_{n-2}f^{n-2}(x)+\cdots+a_0x, \quad (x\in X)$$

ในปีเดียวกัน พวกเขาอธิบายความเกี่ยวข้องกันของผลเฉลยต่อเนื่องของ (2.4) ที่มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวกับพฤติกรรมของค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะของมัน พวกเขาวิเคราะห์กรณี $k=2$ คือสมการ

$$f^2(x)=a_1f(x)+a_0x, \qquad a_0\ne 0, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

และอธิบายกรณีทั่วไป ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.3 ([8]) (i) ให้ $a_k \in \mathbb{R}\ \ (k=1,\ldots,n)$, $a_0 \neq 0$ สมมติพหุนาม

$$r^{n+1}-a_n r^n - a_{n-1}r^{n-1}-\ldots-a_0$$

มีสองค่ารากคือ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $1<r_1<r_2$ หรือ $0<r_1<r_2<1$ หรือ $0<r_1<1<r_2$ หรือ $r_1<r_2<-1$ หรือ $-1<r_1<1<r_2<0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง แล้วผลเฉลยฟังก์ชันต่อเนื่องของ

$$f^{n+1}(x)=a_n f^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)+\ldots+\mathrm{a}_0\,x \quad , \quad a_0\neq 0 \qquad (x\in\mathbb{R}) \qquad (2.6)$$

ขึ้นอยู่กับฟังก์ชั่นต่างๆ นอกจากนั้นฟังก์ชันผลเฉลยต่อเนื่องเป็นสมานสัณฐาน (homeomorphism) ของ $\mathbb{R}$

(ii) ให้ $a_k \geq 0\ \ (k=1,\ldots,n)$, $a_0 \neq 0$ ที่ซึ่ง $a_0+a_1+\ldots+a_n=1$

ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยต่อเนื่องของ (2.6) แล้ว $f(x)=x$ สำหรับทุก $x\geq 0$

ในปี 2004 Yang และ Zhang [11] ได้ศึกษาทฤษฎีลักษณะเฉพาะ(Characteristic Theory)ของสมการ การใช้ที่ดูเสมือนพหุนาม ในกรณีทั่วไปเมื่อภาวะรากซ้ำของค่าลักษณะเฉพาะรวมอยู่ด้วย พวกเขาพิจารณาสมการ (2.1) เมื่อ $a_0=0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\in\mathbb{R}$ และ $x\in\mathbb{R}$

งานของพวกเขาใช้ความคิดของ ออยเลอร์ เกี่ยวกับผลเฉลยลักษณะเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วพวกเขาได้หาผลเฉลยรูปแบบ $f(x)=rx$ เมื่อ $r\in\mathbb{C}$ ไม่ทราบว่า พวกเขาได้แสดงว่า สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำไม่มีผลเฉลยฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้าสมการนั้นไม่มีรากลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง

ในปี 2009 Berg[2] พิจารณาสมการเชิงฟังก์ชัน $f^k=F(x,f,\ldots f^{k-1})$

เมื่อ $k\in\mathbb{N}$ และ $F:I^k\to I$ โดยที่ $I\subset\mathbb{R}$ โดยใช้สมการที่สัมพันธ์กัน

$$y_{n+k}(z)=F(y_n(\mathrm{z}),y_{n+1}(z),\ldots,y_{n+k-1}(z))$$

ให้ $y:\mathbb{R}\to I\subset\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางเดียวโดยแท้ (Getrictly monotone continuous function) และผกผันของ y คือ $y^{[-1]}:I\to\mathbb{R}$ ฟังก์ชัน

$$f^n(x)=y(n+y^{[-1]}(x)) \qquad ;n\in\mathbb{Z}$$

คือการทำซ้ำกัน n ครั้งของ f

ประพจน์ 2.1.4 ถ้า y_n เป็นผลเฉลยของสมการ $y_{n+2}=y_n(1+y_{n+1})$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $y_0=y_1=z$ เมื่อ z เป็นพารามิเตอร์ที่กำหนดให้ แล้วฟังก์ชัน $f_n=y_{n+1}(y_n^{[-1]})$

สอดคล้องกับ $f_{2n}<f_{2n+2}<f_{2n+3}<f_{2n+1}$ สำหรับ $x>0$ และทุกๆจำนวนเต็ม $n\geq 0$

2.2 กรณีเซตวิยุต (Discrete set case)

ตามที่กล่าวไว้ใน [1] Mallows สังเกตว่ามีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว $(a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n))=2n$ สำหรับ $n\neq 1$ ในปี 1979 Propp [9,10] แนะนำ ลำดับ $(s(n))_{n\geq 0}$ ที่นิยามให้เป็นลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว ที่ซึ่ง $s(s(n))=3n$ ในปี 2005 Allouche และคณะ [1] แสดงว่ามีลำดับเพิ่มเป็นจำนวนนับไม่ได้ $(a(n))_{n\geq 0}$ ที่ซึ่ง $a(a(n))=dn$ สำหรับทุก $d\geq 4$ ขณะที่มีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับ $a(a(n))=dn$ สำหรับ $d=2,3$

ทฤษฎีบท 2.2.1 ([1]). ให้ $b_1,\ldots,b_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $b_i\in\{2\cdot d^i-3, 2\cdot d^i-2\}$ เมื่อ $i=1,2,\ldots$ มีลำดับเพิ่ม $a=(a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n))=dn; d\geq 4$ และ $a(d^i-1)=b_i$

ในปี 2008 Sarkaria,[5] พิจารณาฟังก์ชันทั้งหมด $f:X\to X$ เมื่อ $X=\mathbb{N},\mathbb{Z}$ หรือ $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n)=n+k$ สำหรับ $q,k\in\mathbb{N}$ ที่กำหนดให้คิดมาจากสมการนี้ ปัญหาหนึ่งของคณิตศาสตร์โอลิมปิกวิชาการนานาชาติ (International Mathematical Olympiad) ในปี 1987: จงพิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $f(f(n))=n+1987$

นอกจากนี้, Sarkaria พิสูจน์ว่า

- สำหรับ $q\geq 1, k\geq 1,$ มีจริงฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ สอดคล้องกับ $f^q(n)=n+k$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัว
- มีฟังก์ชันดังกล่าวจำนวน $k!/(k/q)!$
- มีฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ จำนวนอนันต์ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=n+k$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัว
- มีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องกับ $f^q(n)=n+k$ และรูปแบบของฟังก์ชันได้ถูกพิจารณา

ในปี 2014 ผลของ Propp [9,10] และ Allouche และคณะ [1] ได้ถูกขยาย โดย Laohakosol และ Yuttanan ใน [6] ซึ่งได้แสดงว่า สำหรับ $q\geq 2, D\geq 2$ ถ้า $D-1$ หาร q ลงตัว แล้วมีฟังก์ชันเพิ่ม $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น ที่สอดคล้องกับ $f^q(n)=Dn, (\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\})$; นอกจากนี้ มีฟังก์ชันเพิ่มจำนวนอนันต์ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำนี้

2.3 รากของการเลื่อนขนาน (Root of translations)

ปัญหาพิเศษนี้ต้องการขยายงานวิจัยของ Sarkaria [5] ดังนั้นต้องศึกษางานวิจัยของ Sarkaria ตามรายละเอียดต่อไปนี้

ให้ $q,k \in \mathbb{N}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f : X \to X \;\; ; X = \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ สำหรับทุกจำนวน $n \in X$

ประพจน์ 2.3.1 ถ้า q หาร k ลงตัว แล้วฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k \;\; ; n \in \mathbb{N}_0$ เป็นรูปแบบหนึ่งของ f_π ที่นิยามต่อไปนี้

ให้ $m_i \in \mathbb{N}_0$ โดยที่ ไม่มีจำนวน $n \in \mathbb{N}_0$ ที่ซึ่ง $f^q(n) = m_i$

ให้ $C_i = \{m_i + tk; t \geq 0\}$ และ $0 \leq i < q$ เรียกเซต C_i นี้ว่า โคเซต (Coset)

ให้ $(C_0, C_1, \ldots, C_{q-1})$ เป็น วงโคจร (orbit) ใดๆ

นิยาม $f_\pi : C_i \to C_{i+1}$ โดย $f_\pi(m_i + tk) = m_{i+1} + tk$ สำหรับ $0 \leq i < q-1$

และ $f_\pi : C_{q-1} \to C_0 - \{m_0\}$ โดย $f_\pi(m_{q-1} + tk) = m_0 + (t+1)k$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $k = 6$ และ $q = 3$ พิจารณาการส่งของ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง $f^3(n) = n+6$

เซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ m_i ที่ไม่มีจำนวน $n \in \mathbb{N}_0$

ซึ่ง $f^q(n) = m_i$ คือ $\{0,1,2,3,4,5\}$

ดังนั้นมีโคเซตทั้งหมด 6 โคเซต

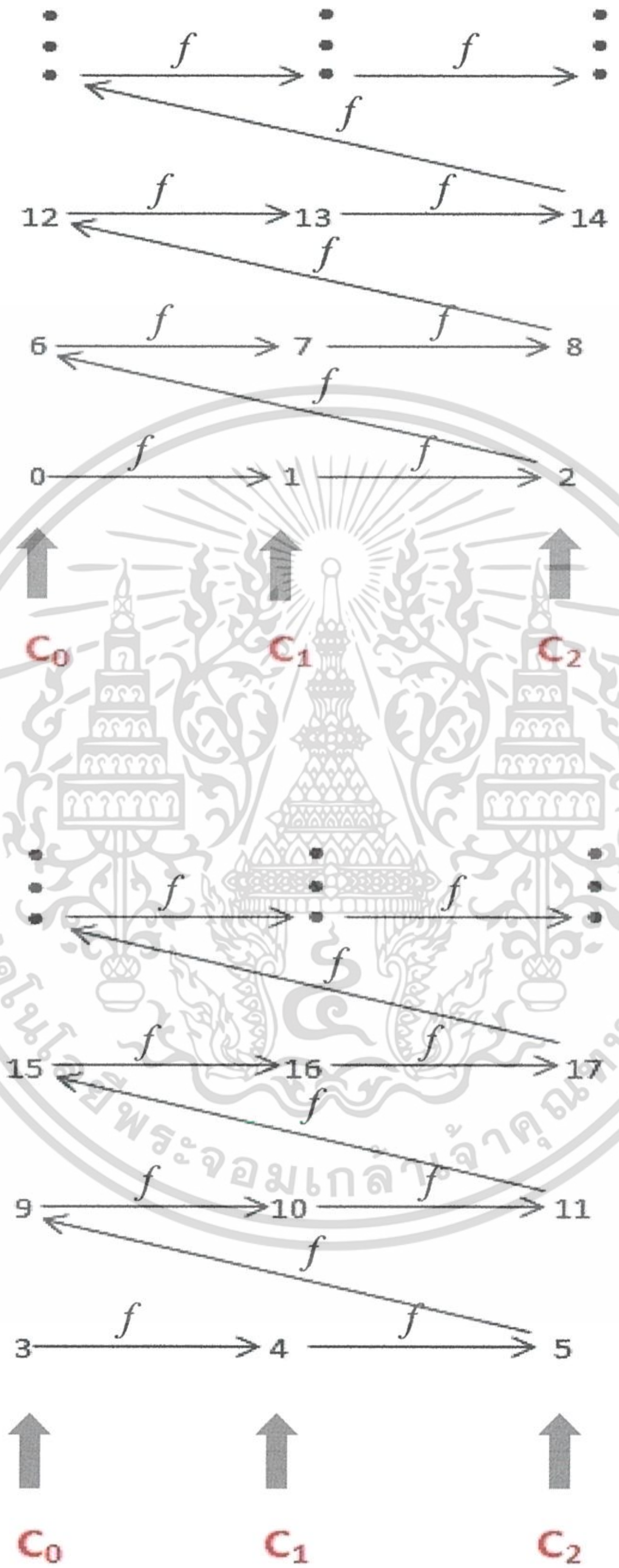
เมื่อเลือก $m_0 = 0,\; m_1 = 1,\; m_2 = 2,\; m_3 = 3,\; m_4 = 4$ และ $m_5 = 5$

จะได้

$$C_0 = \{0, 6, 12, 18, \ldots, 0+6t, \ldots\}$$
$$C_1 = \{1, 7, 13, 19, \ldots, 1+6t, \ldots\}$$
$$C_2 = \{2, 8, 14, 20, \ldots, 2+6t, \ldots\}$$
$$C_3 = \{3, 9, 15, 21, \ldots, 3+6t, \ldots\}$$
$$C_4 = \{4, 10, 16, 22, \ldots, 4+6t, \ldots\}$$
$$C_5 = \{5, 11, 17, 23, \ldots, 5+6t, \ldots\}$$

เมื่อ $t = 0, 1, 2, \ldots$

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน f


f
12
13
14
6
7
8
0
1
2
C0
C1
C2
15
16
17
9
10
11
3
4
5
C0
C1
C2

การส่งของฟังก์ชัน f ดังภาพข้างบนนี้เป็นเพียงหนึ่งตัวอย่างจากทั้งหมด ซึ่งการส่งของ f ขึ้นอยู่กับการเลือกค่า m_i เมื่อ $i=0,1,\ldots,5$

ประพจน์ 2.3.3 บน $\mathbb{N}_0$ จำนวนฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง $f^q(n)=n+k$ เมื่อ $k=qr$ บางจำนวนเต็มบวก r คือ $k!/r!$

ตัวอย่าง 2.3.4 จากตัวอย่าง 2.3.2

จำนวน $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง $f^3(n)=n+6$

มีทั้งหมด $6!/2!=360$ ฟังก์ชัน

ประพจน์ 2.3.5 มีฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ที่สอดคล้อง $f^q(n)=n+k$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ q หาร k ลงตัว และมีฟังก์ชันผลเฉลย f ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของ f_π ที่นิยามต่อไปนี้

ให้ $m_i\in\mathbb{N}_0$ เมื่อ $0\le i\le q-1$

โดย $m_i\notin C_j$ เมื่อ $i\ne j,\ 0\le j\le q-1$

ให้ $C_i=\{m_i+tk;t\in\mathbb{Z}\}$ และ $0\le i<q$ เรียกว่า โคเซต (Coset)

ให้ $(C_0,C_1,\ldots,C_{q-1})$ เป็นวงโคจร (orbit) ใดๆ

นิยาม $f_\pi:C_i\to C_{i+1}$ โดย $f_\pi(m_i+tk)=m_{i+1}+tk$ สำหรับ $0\le i<q-1$

และ $f_\pi:C_{q-1}\to C_0-\{m_0\}$ โดย $f_\pi(m_{q-1}+tk)=m_0+(t+1)k$

ตัวอย่าง 2.3.6 สมมติ $k=6$ และ $q=3$

เนื่องจาก $q\mid k$ จากประพจน์ 2.3.5 มี $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ เป็นผลเฉลยของ $f^3(n)=n+6$ ดังตัวอย่างแผนภาพต่อไปนี้

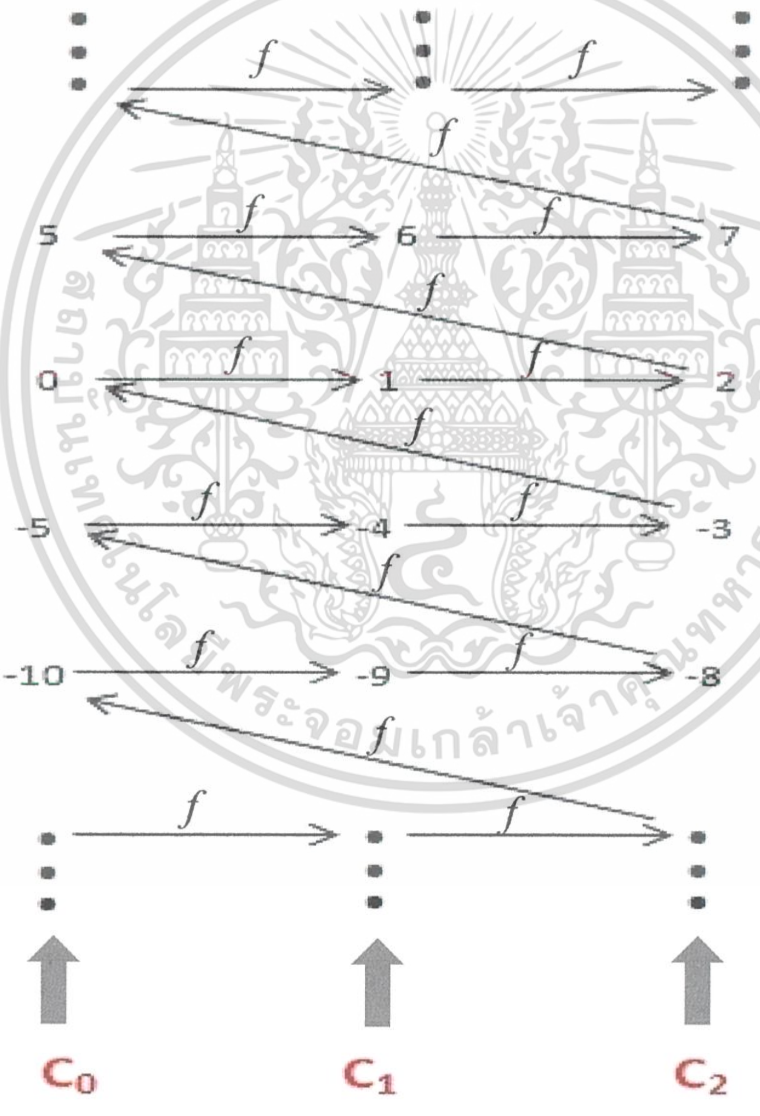
แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน f

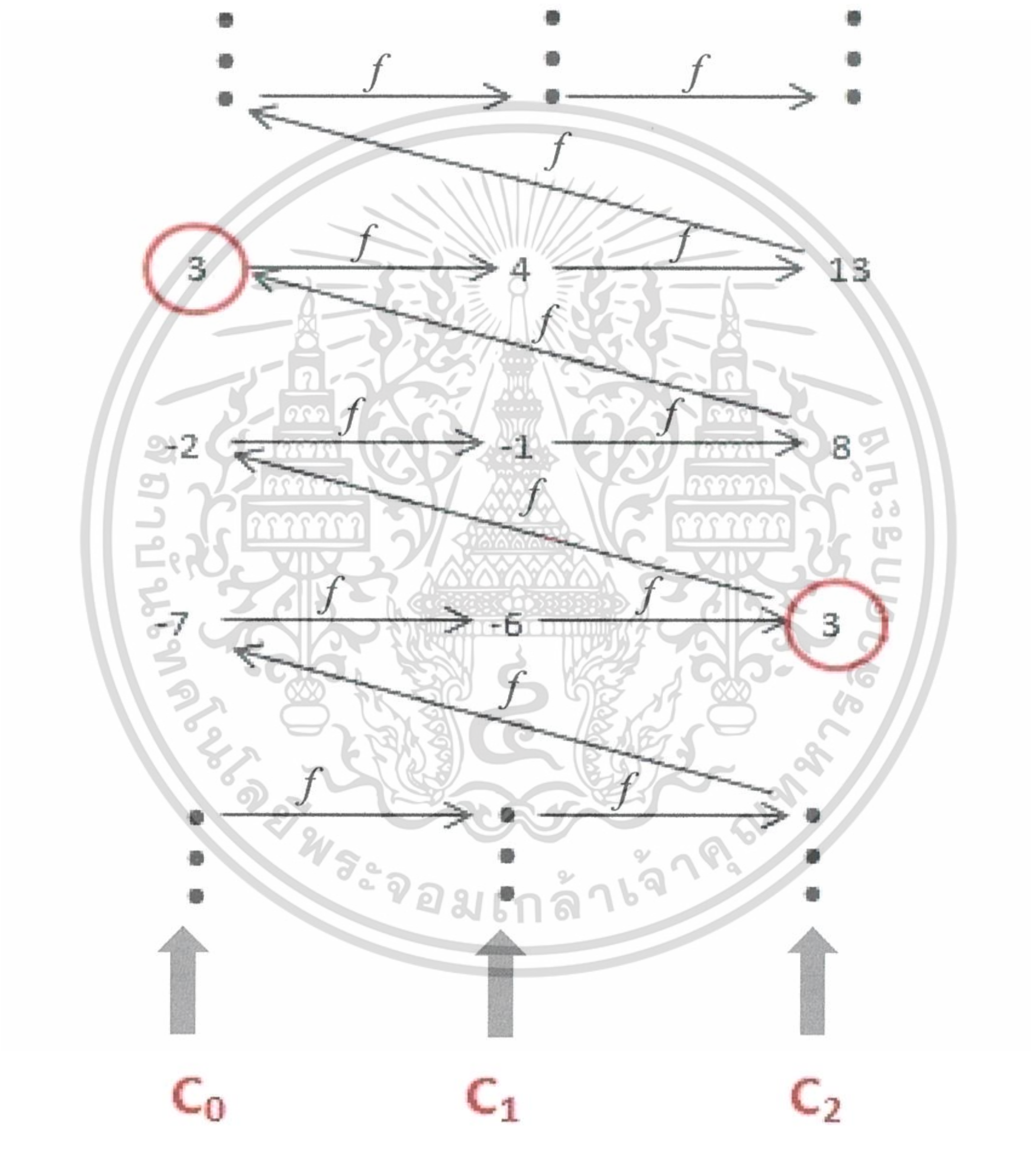
ตัวอย่าง 2.3.7 สมมติ $k=5$ และ $q=3$

เนื่องจาก $q \nmid k$ ไม่มี $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ เป็นผลเฉลยของ $f^3(n)=n+5$

ดังตัวอย่างแผนภาพต่อไปนี้

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่ง ของฟังก์ชัน f แต่เกิดข้อขัดแย้ง





f
3
4
13
-2
-1
8
-7
-6
3
C_0
C_1
C_2

บทที่ 3
ผลการดำเนินงาน

3.1 ผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n)=an+b$ บนจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

ให้ $f^0(x)=x\,, q\geq 2, a\geq 2$ และ b เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0\rightarrow\mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0$ แทนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่สอดคล้อง สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^q(n)=an+b \quad , \quad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

บทตั้ง 3.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.1)

(i) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น f^{-1} นิยามบน $R_f\subseteq\mathbb{N}_0$ เมื่อ R_f แทนเซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)

(ii) ฟังก์ชัน f แบ่ง (partition) $\mathbb{N}_0$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์

$$x\sim y\Leftrightarrow y=f^{sq}(x) \quad , \quad \text{สำหรับบาง } s\in\mathbb{Z}$$

(iii) ให้ $r,s\in\mathbb{N}_0$ และ $r\neq s$

ถ้า r และ s ไม่เป็นสมาชิกใน R_f แล้ว r และ s อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

(iv) มี r เป็นสมาชิกเดียวที่ไม่อยู่ในรูปแบบ $am+b(m\in\mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล และเป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดในคลาส

พิสูจน์

(i) ให้ $n_1,n_2\in\mathbb{N}_0$

สมมติ

$$f(n_1)=f(n_2)$$
$$f(f(n_1))=f(f(n_2))$$
$$f^2(n_1)=f^2(n_2)$$
$$f(f^2(n_1))=f(f^2(n_2))$$
$$f^3(n_1)=f^3(n_2)$$

$$\vdots$$

$$f^{q}(n_1) = f^{q}(n_2)$$

$$an_1 + b = an_2 + b$$

จะได้ $n_1 = n_2$

(ii) **1.) จะพิสูจน์ว่า** $x \sim x$

เนื่องจาก $x = f^{0}(x)$

$$f^{0}(f^{0}(x)) = f^{0}(x) = x$$

$$f^{0\cdot q}(x) = x$$

2.) จะพิสูจน์ว่าถ้า $x \sim y$ **แล้ว** $y \sim x$

ให้ $x \sim y$

ดังนั้น $y = f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f^{tq}(x))$$

$$f^{-1}(y) = f^{tq-1}(x)$$

$$f^{-1}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(f^{tq-1}(x))$$

$$f^{-2}(y) = f^{tq-2}(x)$$

$$\vdots$$

$$f^{-tq}(y) = f^{0}(x) = x$$

$x = f^{-tq}(y)$; $-t \in \mathbb{Z}$

3.) จะพิสูจน์ว่าถ้า $x \sim y$ **และ** $y \sim z$ **แล้ว** $x \sim z$

ให้ $x \sim y$ และ $y \sim z$

จะได้ $y = f^{tq}(x)$ และ $z = f^{sq}(y)$; สำหรับบาง $t, s \in \mathbb{Z}$

ฉะนั้น $z = f^{sq}(f^{tq}(x)) = f^{(s+t)q}(x)$; $s + t \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $x \sim z$

(iii) สมมติ r และ s อยู่ในคลาสเดียวกัน

ดังนั้น จะมี $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ที่ซึ่ง

$$r = f^{tq}(s) = f(f^{tq-1}(s))$$

กรณี $t > 0$, แสดงว่า $r \in R_f$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $r \notin R_f$

กรณี $t < 0$, $s = f^{-tq}(r)$; $-t > 0$

$s = f(f^{-tq-1}(r))$ แสดงว่า $s \in R_f$,เกิดข้อขัดแย้งกับ $s \notin R_f$

(iv) สมมติ ให้ C เป็นคลาสสมมูล

ให้ $r, w \in C$

สมมติ $r \neq am+b \quad , \exists m \notin \mathbb{N}_0$

$w \neq am+b \quad , \exists m \notin \mathbb{N}_0$

สมมติ $r < w$

เนื่องจาก $r, w \in C$

$$r = f^q\left(f^s(w)\right)$$
$$= af^s(w)+b \quad ; f^s(w) \in \mathbb{N}_0$$

ขัดแย้งกับ $r \neq am+b \quad , \exists m \in \mathbb{N}_0$

ให้ C_r แทน คลาสสมมูล เมื่อ $r \neq am+b \;; m \in \mathbb{N}_0$ และ r เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน C_r เรียก r ว่า จุดเริ่มต้น$(Starter)$

ให้ $C_r = \left\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m = a^m r + \left(a^m - 1\right)A; m \in \mathbb{N}_0\right\}$

และ $A = \dfrac{b}{a-1}$

ดังนั้น $C_r = \left\{r, ar+b, a^2 r + ab + b + \ldots\right\}$

$= \left\{f^{mq}(r); m \in \mathbb{N}_0\right\}$

บทตั้ง 3.2 คลาส C_r ทั้งหมดต้องแตกต่างกัน (disjoint)

พิสูจน์ ให้ $r, s \in \mathbb{N}_0$ โดยที่ $r \neq am+b$ และ $s \neq an+b$ สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}_0$

ให้ C_r และ C_s เป็นคลาสสมมูล

จะแสดงว่า $C_r \cap C_s = \varnothing$

สมมติ $C_r \cap C_s \neq \varnothing$

ให้ $X \in C_r \cap C_s$

เพราะฉะนั้น $X \in C_r$ และ $X \in C_s$

$X = a^m r + \left(a^m - 1\right)A \quad ; \exists m \in \mathbb{N}_0$

$X = a^n s + \left(a^n - 1\right)A \quad ; \exists n \in \mathbb{N}_0$

$a^m r + \left(a^m - 1\right)A = a^n s + \left(a^n - 1\right)A$

ถ้า $m \le n$

$$\begin{aligned} a^m r &= a^n s + (a^n - 1)A - (a^m - 1)A \\ r &= a^{n-m} s + \frac{1}{a^m}(a^n - 1)A - \frac{1}{a^m}(a^m - 1)A \\ &= a^{n-m} s + \frac{1}{a^m}(a^n - a^m)A \\ &= a^{n-m} s + (a^{n-m} - 1)A \quad ; n-m \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $r \in C_s$ ขัดแย้งกับ r เป็นสมาชิกเดียว โดยที่ $r \neq am+b \ \ (m \in \mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล

ถ้า $m > n$

$$\begin{aligned} a^n s &= a^m r + (a^m - 1)A - (a^n - 1)A \\ s &= a^{m-n} r + \frac{1}{a^n}(a^m - 1)A - \frac{1}{a^n}(a^n - 1)A \\ &= a^{m-n} r + \frac{1}{a^n}(a^m - a^n)A \\ &= a^{m-n} r + (a^{m-n} - 1)A \quad ; m-n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $s \in C_r$ ขัดแย้งกับ r เป็นสมาชิกเดียว โดยที่ $r \neq am+b \ \ (m \in \mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล

บทตั้ง 3.3 ให้ r เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับ C_r

(i) ฟังก์ชัน f ที่ส่งไปคลาส C_r ในคลาสที่บรรจุ $f(r)$ เท่านั้น

(ii) $f^q(C_r) \subseteq C_r$

(iii) แต่ละคลาส C_r ฟังก์ชัน $\dfrac{f(x)-x}{x-A}$ เป็นค่าคงที่ เมื่อทุก x อยู่ในคลาส C_r

(iv) มีสมาชิกใน $\mathbb{N}_0$ แต่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f

(v) ถ้า $k \in \mathbb{N}_0$ แต่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f แล้ว $k, f(k), f^2(k), \ldots, f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน และแต่ละตัวคือจุดเริ่มต้นของคลาสมันเอง

พิสูจน์

(i) สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้

$$f(an+b) = f(f^q(n)) = f^q(f(n)) = af(n)+b$$

ให้ $x \in C_r$ จาก $x = a^s r + (a^s - 1)A$ สำหรับบาง s ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a^s r + (a^s - 1)A) \\
&= f(a^s r + a^{s-1}b + a^{s-2}b + a^{s-3}b + \ldots + ab + b) \\
&= af(a^{s-1}r + a^{s-2}b + a^{s-3}b + \ldots + ab + b) + b \\
&= a^2 f(a^{s-2}r + a^{s-3}b + a^{s-4}b + \ldots + ab + b) + ab + b \\
&= a^3 f(a^{s-3}r + a^{s-4}b + a^{s-5}b + \ldots + a^2b + ab + b) + a^2b + ab + b \\
&\vdots \\
&= a^s f(r) + a^{s-1}b + a^{s-2}b + \ldots + ab + b \\
&= a^s f(r) + (a^s - 1)A
\end{aligned}$$

(ii) $f^q(C_r) \subseteq C_r$

สมมติว่า $x \in C_r$

แสดงว่า $x = a^m r + (a^m - 1)A \quad ,\exists m \in \mathbb{N}_0$

จะได้

$$\begin{aligned}
f^q(x) &= f^q(a^m r + (a^m - 1)A) \\
&= a(a^m r + (a^m - 1)A) + b \\
&= a^{m+1} r + (a^{m+1} - a)A + b \\
&= a^{m+1} r + (a^{m+1} - a)\frac{b}{a-1} + b \\
&= a^{m+1} r + (a^{m+1} - a + a - 1)\frac{b}{a-1} \\
&= a^{m+1} r + (a^{m+1} - 1)A
\end{aligned}$$

$$f^q(x) = a^n r + (a^n - 1)A \quad ,\exists n \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้น $f^q(x) \in C_r$

สรุปว่า $f^q(C_r) \subseteq C_r$

(iii) ให้ $x = a^s r + (a^s - 1)A \in C_r$

แล้ว
$$
\begin{aligned}
f(x) - x &= a^s f(r) + (a^s - 1)A - (a^s r + (a^s - 1)A) \\
&= a^s f(r) + (a^s - 1)A - a^s r - (a^s - 1)A \\
&= a^s f(r) - a^s r \\
&= a^s (f(r) - r)
\end{aligned}
$$

และเนื่องจาก $a^s = \dfrac{x + A}{r + A}$

จะได้
$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - x}{x + A} &= \frac{a^s (f(r) - r)}{a^s r + (a^s - 1)A + A} \\
&= \frac{a^s (f(r) - r)}{a^s r + A(a^s - 1 + 1)} \\
&= \frac{a^s (f(r) - r)}{a^s r + Aa^s} \\
&= \frac{f(r) - r}{r + A}
\end{aligned}
$$

(iv) ถ้าเซตเรนจ์ของ f คือ $\mathbb{N}_0$ แล้ว f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $x < y$ แล้ว

$$f^q(x) = ax + b < ay + b = f^q(y),$$

กล่าวคือ f^q เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และดังนั้น f^{-q} เป็นฟังก์ชันเพิ่มด้วย ใช้ f^{-q} ซ้ำๆ เป็นจำนวนจำกัดครั้งจนได้เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

(v) ให้ k เป็นสมาชิกที่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f ให้ $f^i(k) \in C_{r_i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$ r_i'sไม่จำเป็นต้องแตกต่างกันสำหรับตอนนี้

เราจะแสดงว่า $f^i(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ C_r

ใน $C_{r_{q-1}}$ ถ้ามี $k_{q-1} \in C_{r_{q-1}}$ ที่ซึ่ง $k_{q-1} < f^{q-1}(k)$ แล้ว

$$f(k_{q-1}) = k_{q-1} + (k_{q-1} + A)\left(\frac{f^{q}(k) - f^{q-1}(k)}{f^{q-1}(k) + A}\right)$$
$$< k_{q-1} + (f^{q-1}(k) + A)\left(\frac{f^{q}(k) - f^{q-1}(k)}{f^{q-1}(k) + A}\right)$$
$$= k_{q-1} + f^{q}(k) - f^{q-1}(k)$$
$$< f^{q}(k) = ak + b$$

เนื่องจาก $f(f^{q-1}(k)) = f^{q}(k) \in C_{r_0}$ โดย (i) , มี $f(k_{q-1}) \in C_{r_0}$

ไม่มีสมาชิกที่อยู่ระหว่าง k และ $ak+b$ ใน C_{r_0}

จะได้ $f(k_{q-1}) \le k$ นั่นหมายความว่า $f^{sq}(f(k_{q-1})) = k$ สำหรับบาง $s \ge 0$

กล่าวคือ k อยู่ในเรนจ์ของ f ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ด้วยเหตุนี้ $f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส

ใน $C_{r_{q-2}}$ ถ้ามี $k_{q-2} \in C_{r_{q-2}}$ ที่ซึ่ง $k_{q-2} < f^{q-2}(k)$ แล้ว

$$f(k_{q-2}) = k_{q-2} + (k_{q-2} + A)\left(\frac{f^{q-1}(k) - f^{q-2}(k)}{f^{q-2}(k) + A}\right)$$
$$< k_{q-2} + (f^{q-2}(k) + A)\left(\frac{f^{q-1}(k) - f^{q-2}(k)}{f^{q-2}(k) + A}\right)$$
$$= k_{q-2} + f^{q-1}(k) - f^{q-2}(k)$$
$$< f^{q-1}(k)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส ในลักษณะเดียวกัน $r_0 = k,$ $r_1 = f(k),\ r_2 = f^{2}(k), \ldots, r_{q-1} = f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส

□

ข้อสังเกต จากการพิสูจน์บทตั้ง 3.3 เรียกค่า $\dfrac{f(r)-r}{r+A}$ ว่าขนาดที่เพิ่มขึ้นของ f บนคลาส C_r ซึ่งสอดคล้องกับ

$$f(x) = x + (x+A) \times \text{จำนวนที่เพิ่มขึ้น}$$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $q \geq 2,\ a \geq 2$ และ $b \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับ

$$f^q(n) = an + b\left(n \in \mathbb{N}_0\right)$$

ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน f_π นิยามไว้ด้านล่าง

กำหนด

$$C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\},\ \ r_{j,i} = a^j i + \left(a^j - 1\right)A\ \left(j \in \mathbb{N}_0\right),\ \ A = \frac{b}{a-1}$$

พิสูจน์ นำเครื่องหมายด้านบนมาใช้

สังเกตได้ว่า $C_i \cap C_j = \varnothing$ ถ้า $i \neq j$ ให้ π เป็นผลแบ่งกั้นเซต $\{C_i\}$ เป็น วงโคจร (orbit) โดยแต่ละ วงโคจร (orbit) มีสมาชิก q ตัว

ให้ $\left(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_q}\right)$ เป็น วงโคจร (orbit)

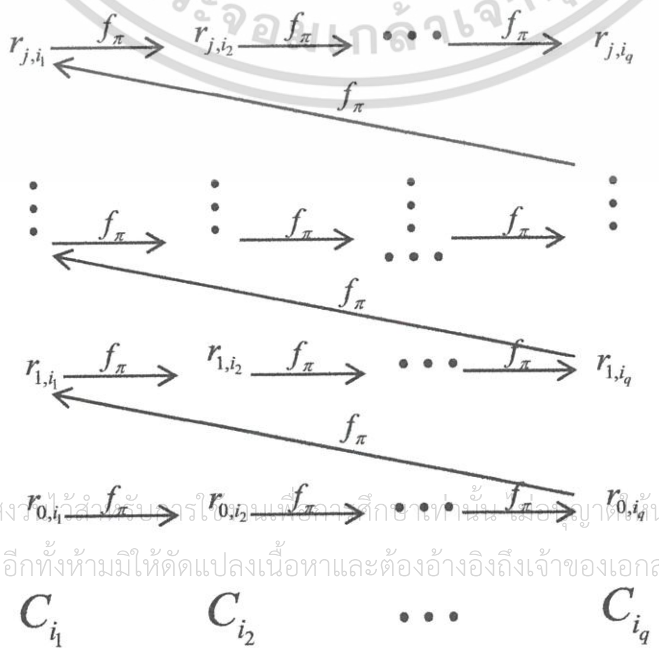
กำหนด $f_\pi : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}}\ \left(h = 1, 2, \ldots, q-1\right)$

โดย $f_\pi\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+1}}\ \left(j \in \mathbb{N}_0\right)$

และ $f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$

โดย $f_\pi\left(r_{j,i_q}\right) = r_{j+1,i_1}\ \left(j \in \mathbb{N}_0\right)$

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน f_π



ให้ $r_{j,i_h} \in C_{i_h}$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
&f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+1}}, \\
&f_\pi^2(r_{j,i_h}) = f_\pi(f_\pi(r_{j,i_h})) = f_\pi(r_{j,i_{h+1}}) = r_{j,i_{h+2}}, \\
&f_\pi^3(r_{j,i_h}) = f_\pi(f_\pi^2(r_{j,i_h})) = f_\pi(f_\pi(r_{j,i_{h+1}})) = f_\pi^2(r_{j,i_{h+1}}) = r_{j,i_{h+3}}, \\
&\quad\vdots \\
&f_\pi^{g-h}(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+(g-h)}} = r_{j,i_g}, \\
&f_\pi^{(g-h)+1}(r_{j,i_h}) = f_\pi(f_\pi^{g-h}(r_{j,i_h})) = f_\pi(r_{j,i_g}) = r_{j+1,i_1}, \\
&\quad\vdots \\
&f_\pi^{g}(r_{j,i_h}) = f_\pi^{(g-h)+h}(r_{j,i_h}) = r_{j+1,i_h} \\
&ar_{j,i_h} + b = r_{j+1,i_h}
\end{aligned}
$$

เราจะได้ $f_\pi^q\left(r_{j,i_h}\right) = ar_{j,i_h} + b$

ให้ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับ $f^q = an + b \left(n \in \mathbb{N}_0\right)$

จากบทตั้ง 3.3 เราจะเห็นว่า $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส

โดยแท้จริงแล้ว $r_i = f^i\left(k\right)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ C_{r_i}

ต้องการแสดงว่า $r_i \neq r_j \quad ,\forall i, j \in \{0,1,2,\ldots,q-1\}$ ซึ่ง $i \neq j$

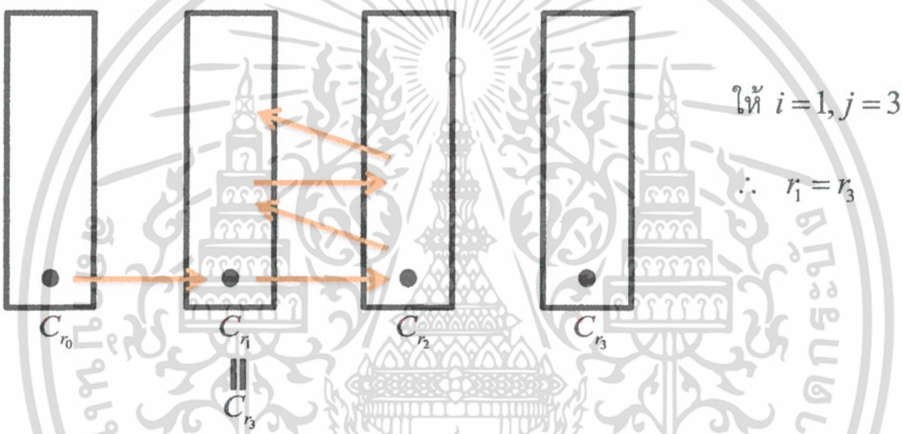
สมมติจะมี i และ j ซึ่ง $i \neq j$ ที่ทำให้ $r_i = r_j$

<u>กรณี</u> $i \neq 0$

เนื่องจาก f ส่งคลาสไปยังคลาส และ $i > 0$

ดังนั้น f ทำซ้ำ q ครั้งไม่อยู่ใน C_{r_0} เกิดข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 3.1 ให้ $q = 4$



<u>กรณี</u> $i = 0$

เนื่องจาก $f^q : C_{r_0} \to C_{r_0}$

ดังนั้น $j|q$

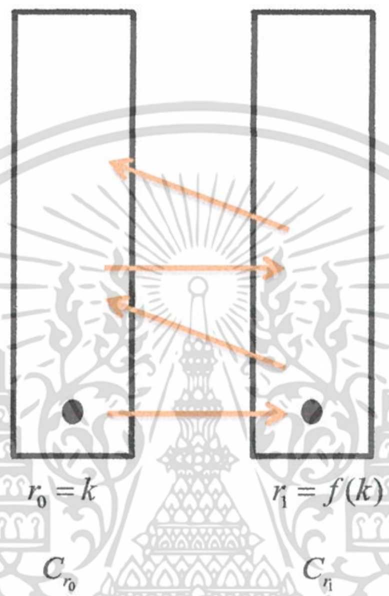
และเนื่องจาก $f^m(k); m = 0,1,2,\ldots,q-1$ เป็นจุดเริ่มต้นทุกตัว

ดังนั้น $k = f^q(k) = ak + b$ เกิดข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 3.2 เนื่องจาก $i=0$

$$r_0 = r_j ; j|q$$

เนื่องจาก $j=1$ ซึ่ง $1|q$



$$f(k) = r_1 = r_0 = k$$

$$\therefore \quad f(k) = k$$

$$f^2(k) = f(k) = k$$

$$\vdots$$

$$ak + b = f^q(k) = k$$

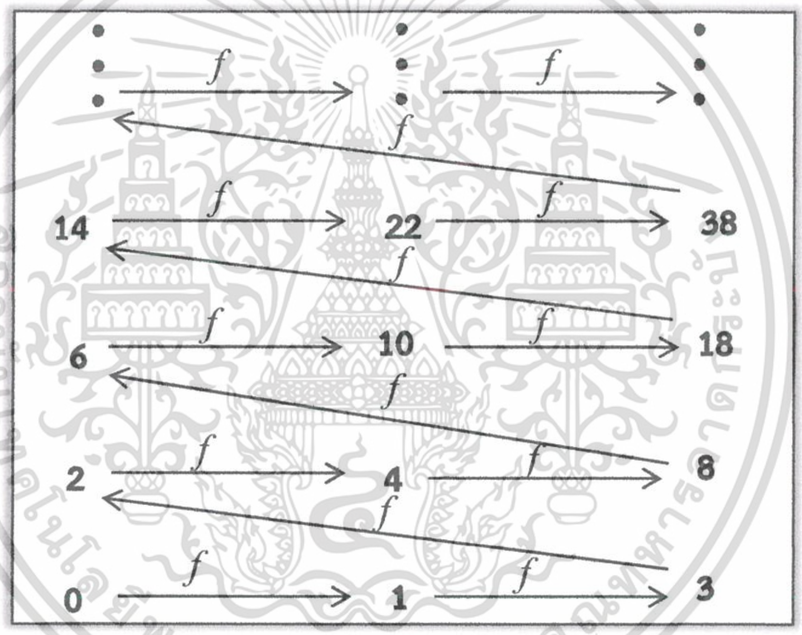
ดังนั้น ไม่เกิดกรณี $r_i = r_j$ เมื่อ $i \neq j$

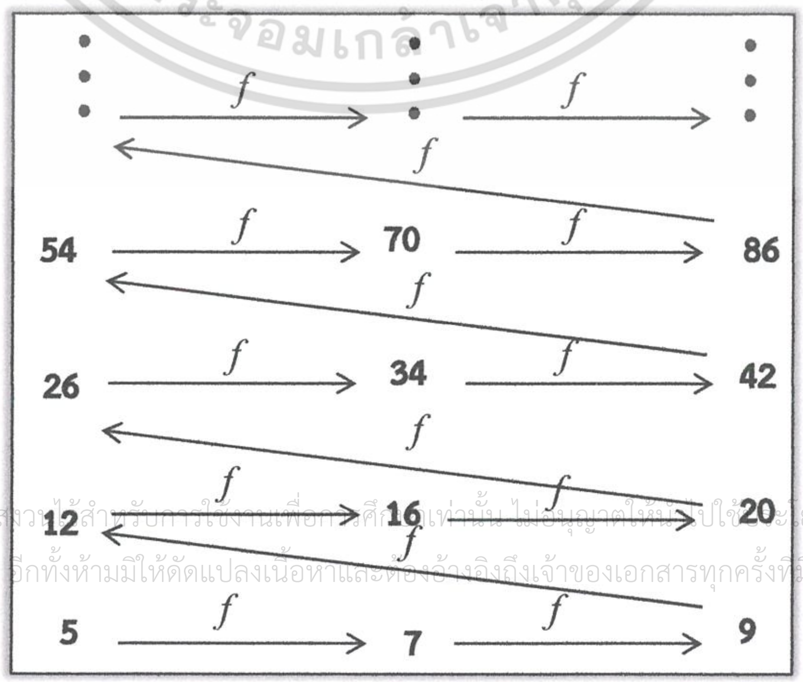
เราจะเรียก $\left(C_{r_0}, C_{r_1}, \ldots, C_{r_{q-1}}\right)$ ว่า วงโคจร (orbit) เมื่อใช้ขั้นตอนในบทตั้ง 3.3 อีกครั้งจะเหลือเซต $\mathbb{N}_0 \setminus \left(C_{r_0} \cup C_{r_1} \cup \ldots \cup C_{r_{q-1}}\right)$ เราจะได้ วงโคจร (orbit) อื่นๆ ทำซ้ำไปเรื่อยๆจนขั้นตอนสุดท้ายครบเซต $\mathbb{N}_0$ เราจะเห็นว่า f ส่งคลาสไปยังคลาสที่แตกต่างกัน และจำนวนสมาชิกในแต่ละวงโคจร (orbit) เป็น q ในแต่ละวงโคจร (orbit) จะมีหนึ่งสมาชิกที่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f จะแสดงให้เห็นว่า f เป็นรูปแบบหนึ่งของ f_π

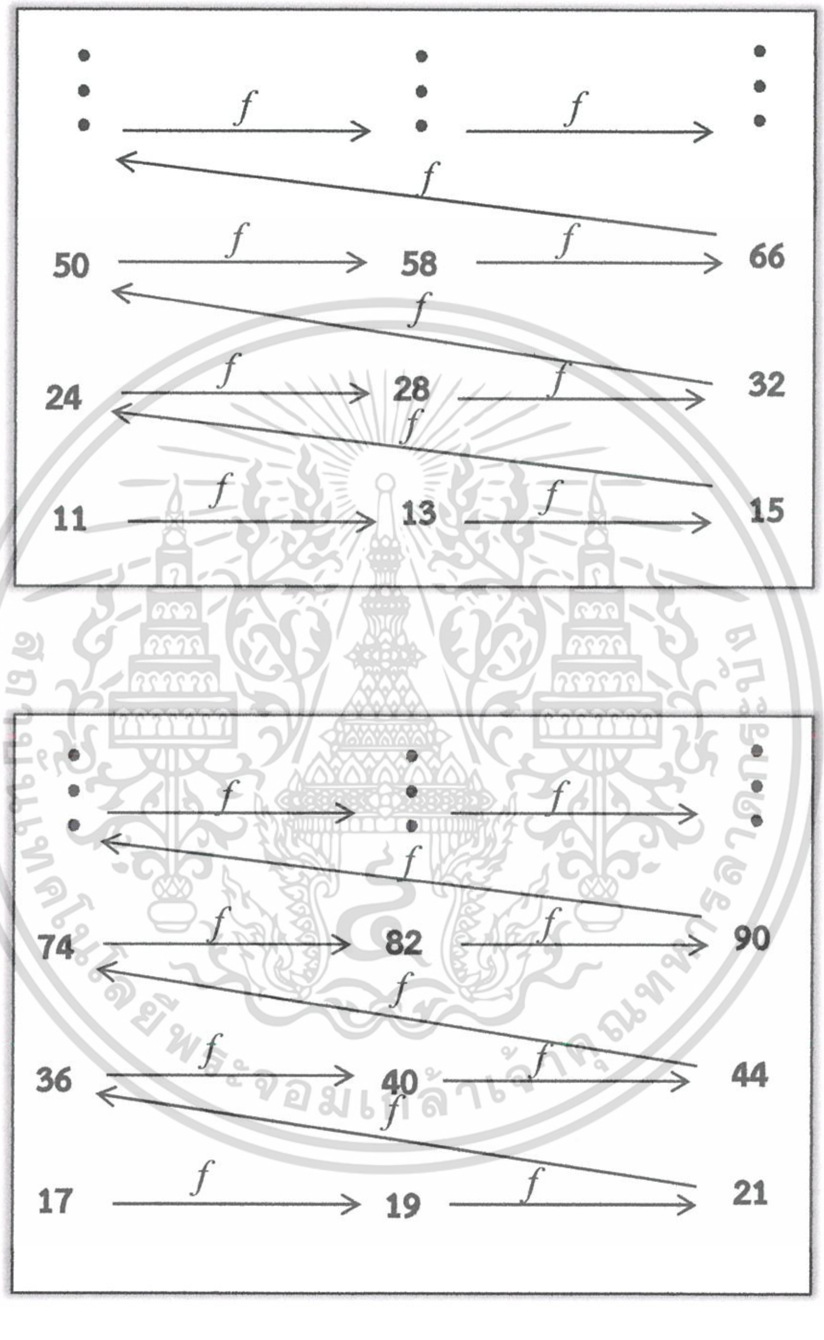
ตัวอย่าง 3.3 ให้ $q = 3,\ f^3(n) = 2n + 2$

เซตของจุดเริ่มต้น คือ $S = \{2n+1; n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน f



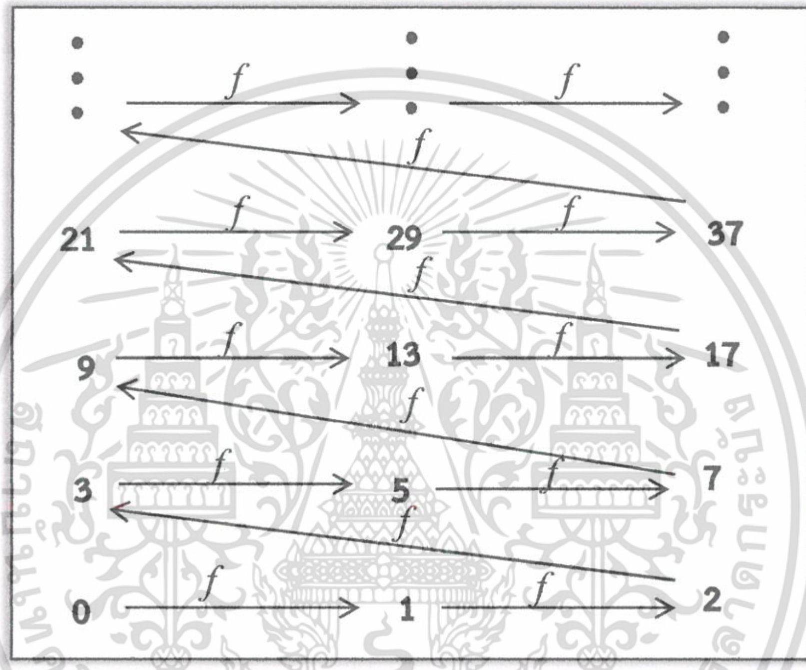


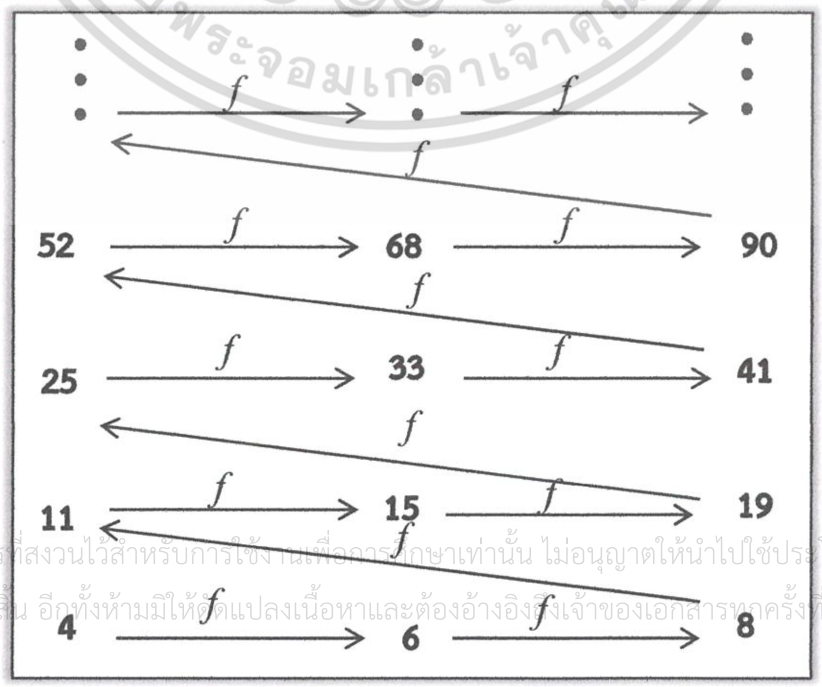

50
58
66
24
28
32
11
13
15
74
82
90
36
40
44
17
19
21

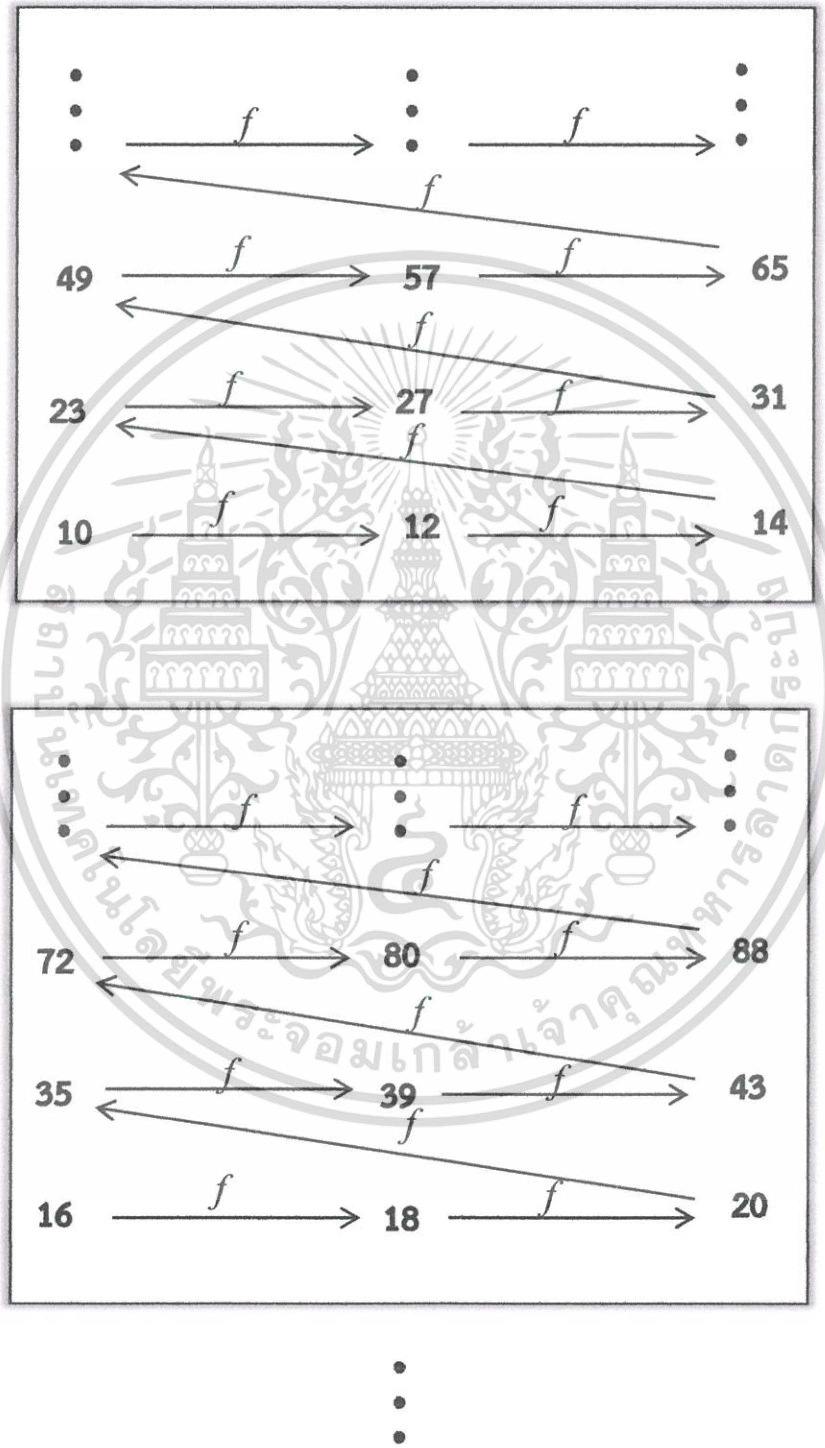
ตัวอย่าง 3.4 ให้ $q=3,\ f^3(n)=2n+3$

เซตของจุดเริ่มต้น คือ $S=\{2n; n\in\mathbb{N}_0\}\cup\{1\}$

แผนภาพด้านล่างแสดงตัวอย่างของการส่งรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน f







f
49
57
65
23
27
31
10
12
14
72
80
88
35
39
43
16
18
20

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

ให้ $f^0(x)=x, q\geq 2, a\geq 2$ และ b เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0$ แทนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่สอดคล้อง สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^q(n)=an+b \quad , \quad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{N}_0$$

บทตั้ง 3.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.1)

(i) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น f^{-1} นิยามบน $R_f\subseteq\mathbb{N}_0$ เมื่อ R_f แทนเซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)

(ii) ฟังก์ชัน f แบ่ง (partition) $\mathbb{N}_0$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์

$$x\sim y\Leftrightarrow y=f^{sq}(x) \quad , \quad \text{สำหรับบาง } s\in\mathbb{Z}$$

(iii) ให้ $r,s\in\mathbb{N}_0$ และ $r\neq s$

ถ้า r และ s ไม่เป็นสมาชิกใน R_f แล้ว r และ s อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

(iv) มี r เป็นสมาชิกเดียวที่ไม่อยู่ในรูปแบบ $am+b(m\in\mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล และเป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดในคลาส

บทตั้ง 3.2 คลาส C_r ทั้งหมดต้องแตกต่างกัน (disjoint)

บทตั้ง 3.3 ให้ r เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับ C_r

(i) ฟังก์ชัน f ที่ส่งไปคลาส C_r ในคลาสที่บรรจุ $f(r)$ เท่านั้น

(ii) $f^q(C_r) \subseteq C_r$

(iii) แต่ละคลาส C_r ฟังก์ชัน $\dfrac{f(x)-x}{x-A}$ เป็นค่าคงที่ เมื่อทุก x อยู่ในคลาส C_r

(iv) มีสมาชิกใน $\mathbb{N}_0$ แต่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f

(v) ถ้า $k \in \mathbb{N}_0$ แต่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f แล้ว $k, f(k), f^2(k), \ldots, f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน และแต่ละตัวคือจุดเริ่มต้นของคลาสมันเอง

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $q \geq 2$, $a \geq 2$ และ $b \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับ

$$f^q(n) = an + b \left(n \in \mathbb{N}_0\right)$$

ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน f_π ดังนิยามต่อไปนี้

กำหนด

$$C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\},\ r_{j,i} = a^j i + \left(a^j - 1\right) A \left(j \in \mathbb{N}_0\right),\ A = \frac{b}{a-1}$$

π เป็นผลแบ่งกั้นเซต $\{C_i\}$ เป็น วงโคจร (orbit) โดยแต่ละวงโคจร (orbit) มีสมาชิก q ตัว

ให้ $\left(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_q}\right)$ เป็น วงโคจร (orbit)

กำหนด $f_\pi : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}} \left(h = 1, 2, \ldots, q-1\right)$

โดย $f_\pi\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+1}} \left(j \in \mathbb{N}_0\right)$

และ $f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$

โดย $f_\pi\left(r_{j,i_q}\right) = r_{j+1,i_1} \left(j \in \mathbb{N}_0\right)$

4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการทำงานวิจัยเรื่องนี้สังเกตได้ว่า ปัญหาของการนิยามฟังก์ชันผลเฉลยคือ การหาจุดเริ่มต้นของแต่ละคลาส ซึ่งถ้าเปลี่ยนโดเมนของฟังก์ชัน คิดว่าการหาจุดเริ่มต้นวิธีนี้ใช้ไม่ได้ จะต้องคิดกระบวนการหาจุดเริ่มต้นใหม่ โดยต้องพิจารณารูปแบบของฟังก์ชัน f^q ด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] J.-P. Allouche, N. Rampersad, J.O. Shallit, On integer sequences whose first iterates are linear, Aequationes Math. 69 (1-2) (2005) 114-127.

[2] L. Berg, Iterative functional equations, Restock. Math. Kolloq. 64 (2009) 3-10.

[3] W. Jarczyk, On an equation of linear iteration, Aequationes Math. 51 (1996) 303-310.

[4] M. Kuczama, B. Choczewski and R. Ger, Iterative Functional Equations, Encyclopedia of Mathermatics and Its Applications, Vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[5] K.S. Sakaria, Roots of translations, Aequations Math. 75 (2008) 304-307.

[6] V. Laohakosol and B. Yuttanan, Iterates of increasing sequence of positive integers, Aequationes Math. 87 (2014) 89-103.

[7] J. Matkowski and W. Zhang, On linear dependence of iterates, J. of Appl. Anal. 6 (1) (2000) 149-157.

[8] J. Matkowski and W. Zhang, On the polynomial-like iterative functional equation, Th. M. Rassias (Ed.) Functional Equations and Inequalities (2000) 145-170.

[9] J. Propp, Problem proposal 474, Crux Math. 5 (1979) 229.

[10] J. Propp, Solution by G. Patruno, Crux Math. 6 (1980) 198.

[11] D. Yang and W. Zhang, Characteristic solutions of polynomial-like iterative equations, Aequationes Math. 67 (2004) 80-150.