

การศึกษาสมบัติบางประการของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า
และรูปสามเหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ
THE STUDY OF SOME PROPERTIES
FOR EQUILATERAL POLYGON
AND TRIANGLE INSCRIBED IN A CIRCLE



ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์

ธนกฤต กวินสังคม

สุพัตรา อินชุม

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE STUDY OF SOME PROPERTIES
FOR EQUILATERAL POLYGON
AND TRIANGLE INSCRIBED IN A CIRCLE



A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ การศึกษาสมบัติบางประการของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า
และรูปสามเหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ

The Study Of Some Properties For Equilateral Polygon
And Triangle Inscribed In A Circle

ชื่อนักศึกษา นาย ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์ 56050052
นาย ธนภฤต กวินสังคม 56050055
นางสาว สุพัตรา อินชุ่ม 56050161

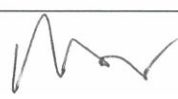
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม รศ.ดร.ภคินี ชิตสกุล

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหา
พิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เดชา สมณะ ประธานกรรมการ	
อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการ	
ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ กรรมการและที่ปรึกษา	
รศ.ดร.ภคินี ชิตสกุล กรรมการและที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อนักศึกษา	นาย ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์	56050052
	นาย ธนกฤต กวินสังคม	56050055
	นางสาว สุพัตรา อินชัม	56050161

ปริญญา วิทยาลัยการศึกษามหาสารคาม

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2559

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม รศ.ดร.ภักคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปหลายเหลี่ยม โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับวงกลม สามเหลี่ยมคล้าย สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ และทฤษฎีบทเขาวงกต โดยผลที่ได้จากการศึกษามีความสำคัญในการศึกษา สมบัติของบางประการของสามเหลี่ยม เกี่ยวกับ ศูนย์กลางวงล้อม ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์

Title	The Study Of Some Properties For Equilateral Polygon And Triangle Inscribed In A Circle		
Students	Tossawat	Wongwattanaanan	56050052
	Thanakit	Kwinsungkom	56050055
	Supatta	Inchum	56050161
Degree	Bachelor of science		
Major Program	Applied Mathematics		
Academic Year	2016		
Advisor	Dr.Wannaporn Sanprasert		
Co-Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul		

Abstract

In this research be study about the circumcenter of a polygon by using the properties of circle similar triangle congruent triangles and ceva's theorem. The results will be important in studying some properties of triangle concern on circumcenter incenter orthocenter and centroid.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง “การศึกษาสมบัติบางประการของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ” คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ และ รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล ผู้ให้ความอนุเคราะห์เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาทางด้านความรู้และปัญหาต่างๆ ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพื่อให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้เป็นไปในทิศทางที่ถูกต้องและสมบูรณ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างยิ่ง คณะผู้จัดทำตระหนักถึง ความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.เดชา สมณะ ประธานกรรมการสอบ และ อ.พรชัย ชัยสนิท กรรมการสอบ ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ และให้คำแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายนี้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การอุปการะอบรมเลี้ยงดู ตลอดจนส่งเสริมการศึกษา และให้กำลังใจเป็นอย่างดี อีกทั้งขอขอบคุณเพื่อนๆ ในสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ให้การสนับสนุนและช่วยเหลือด้วยดีเสมอมา ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่บริหารทั่วไปและเจ้าหน้าที่ดูแลห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่อำนวยความสะดวกในการทำงานต่างๆ และขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้ศึกษาค้นคว้าได้นำมาอ้างอิงในการทำวิจัย จนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์

ธนภุต กวินสังคม

สุพัตรา อินชัม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	ฉ
สารบัญรูป.....	ช
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหา.....	1
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	1
1.5 แผนการดำเนินงาน.....	2
บทที่ 2 นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 รูปวงกลม.....	3
2.1.1 ส่วนประกอบของวงกลม.....	4
2.1.2 สิ่งที่ควรทราบเกี่ยวกับวงกลม.....	5
2.2 สามเหลี่ยมคล้าย.....	6
2.3 สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ.....	7
2.4 มุม.....	12
2.5 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว.....	13
2.6) ทฤษฎีบทของเซวา.....	14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 การหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยม.....	18
3.1 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมด้านเท่า.....	19
3.2 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสี่เหลี่ยมด้านเท่า.....	25
3.3 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	32
3.4 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบหกเหลี่ยมด้านเท่า.....	40
3.5 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า.....	49
3.6 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบแปดเหลี่ยมด้านเท่า.....	59
3.7 การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบเก้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	70
บทที่ 4 การหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านไม่เท่า	
และสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	82
4 สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	82
4.1 จุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	83
4.2 สมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	90
4.3 จุดตัดกันของส่วนสูงรูปสามเหลี่ยม.....	93
4.4 เซนทรอย์.....	100
4.5 ข้อสังเกตที่ 1.....	103
4.6 ข้อสังเกตที่ 2.....	120
4.7 ข้อสังเกตที่ 3.....	121
4.8 ข้อสังเกตที่ 4.....	121
4.9 ข้อสังเกตที่ 5.....	122
4.10 ข้อสังเกตที่ 6.....	122
บทที่ 5 สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	123
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	123
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	127
เอกสารอ้างอิง.....	128

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1 ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน.....	2
2.1 ส่วนประกอบของวงกลม.....	4
4.1 แสดงศูนย์กลางวงกลม ที่มีลักษณะแตกต่างกันได้ดังนี้.....	89
4.2 แสดงศูนย์กลางวงกลมแนบใน ที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านเท่า.....	93
4.3 แสดงจุดออร์โทเซนเตอร์ ที่มีลักษณะแตกต่างกันดังนี้.....	99
4.4 แสดงเซนทรอยที่อยู่ภายใน ที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านเท่า.....	101
4.5 สรุปตารางที่ 4.1 – ตารางที่ 4.4 ได้ดังนี้.....	102
4.6 แสดงรูปจากตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.3.....	121
4.7 แสดงรูปจากตารางที่ 4.1.....	121
4.8 แสดงรูปจากตารางที่ 4.3.....	122

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 2

รูปที่ 2.1 วงกลม.....	3
รูปที่ 2.1.1 ส่วนประกอบของวงกลม.....	4
รูปที่ 2.1.2 รัศมีแบ่งเส้นรอบวงเป็น 6 ส่วนเท่าๆกัน.....	5
รูปที่ 2.2 สามเหลี่ยมคล้าย.....	6
รูปที่ 2.3(1)-2.3(2) สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ.....	7
รูปที่ 2.3.1 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน.....	8
รูปที่ 2.3.2 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน.....	8
รูปที่ 2.3.3 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม.....	8
รูปที่ 2.3.4 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน.....	9
รูปที่ 2.3.4(1)-2.3.4(2) พิสูจน์ มุม-มุม-ด้าน.....	9
รูปที่ 2.3.5 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน.....	10
รูปที่ 2.3.5(1)-2.3.5(2) พิสูจน์ ฉาก-ด้าน-ด้าน.....	11
รูปที่ 2.4.1 มุมแหลม.....	12
รูปที่ 2.4.2 มุมฉาก.....	12
รูปที่ 2.4.3 มุมป้าน.....	12
รูปที่ 2.5.1 สามเหลี่ยมด้านเท่า.....	13
รูปที่ 2.5.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมแหลม.....	13
รูปที่ 2.5.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก.....	14
รูปที่ 2.5.4 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน.....	14
รูปที่ 2.6 ทฤษฎีบทของเซวา.....	14
รูปที่ 2.6(1)-2.6(2) พิสูจน์ทฤษฎีบทของเซวา.....	15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3

รูปที่ 3.1 วงกลมล้อมรอบจุด 1 จุด.....	18
รูปที่ 3.2 วงกลมล้อมรอบจุด 2 จุด.....	18
รูปที่ 3.3 สามเหลี่ยมด้านเท่า.....	19
รูปที่ 3.3.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์สามเหลี่ยมด้านเท่า.....	20
รูปที่ 3.3(1)-3.3(3) พิสูจน์สามเหลี่ยมด้านเท่า.....	21
รูปที่ 3.3(4) วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า.....	24
รูปที่ 3.4 สี่เหลี่ยมด้านเท่า.....	25
รูปที่ 3.4.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์สี่เหลี่ยมด้านเท่า.....	26
รูปที่ 3.4(1)-3.4(4) พิสูจน์สี่เหลี่ยมด้านเท่า.....	27
รูปที่ 3.4(5) วงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า.....	31
รูปที่ 3.5 ห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	32
รูปที่ 3.5.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	33
รูปที่ 3.5(1)-3.5(5) พิสูจน์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	34
รูปที่ 3.5(6) วงกลมล้อมรอบรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	39
รูปที่ 3.6 หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	40
รูปที่ 3.6.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	41
รูปที่ 3.6(1)-3.6(6) พิสูจน์หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	42
รูปที่ 3.6(7) วงกลมล้อมรอบรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า.....	48
รูปที่ 3.7 เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า.....	49
รูปที่ 3.7.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า.....	50
รูปที่ 3.7(1)-3.7(7) พิสูจน์เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า.....	51
รูปที่ 3.7(8) วงกลมล้อมรอบรูปเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า.....	58
รูปที่ 3.8 แปดเหลี่ยมด้านเท่า.....	59
รูปที่ 3.8.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	60
รูปที่ 3.8(1)-3.8(8) พิสูจน์ห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	61
รูปที่ 3.8(9) วงกลมล้อมรอบรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า.....	69
รูปที่ 3.9 หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	70
รูปที่ 3.9.1 สร้างเพื่อการพิสูจน์หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	71

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.9(1)-3.9(9) พิสูจน์หกเหลี่ยมด้านเท่า.....	72
รูปที่ 3.9(10) วงกลมล้อมรอบรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า.....	81

บทที่ 4

รูปที่ 4.1(0) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	82
รูปที่ 4.1(1)-4.1(6) พิสูจน์สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า.....	83
รูปที่ 4.1.1 สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีศูนย์กลางวงล้อมอยู่ในสามเหลี่ยม.....	89
รูปที่ 4.1.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉากที่มีศูนย์กลางวงล้อมอยู่ใน สามเหลี่ยมและอยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม.....	89
รูปที่ 4.1.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้านที่มีศูนย์กลางวงล้อมอยู่นอก สามเหลี่ยม.....	89
รูปที่ 4.2(0) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีศูนย์กลางวงกลมแนบใน.....	90
รูปที่ 4.2(1)-4.2(2) พิสูจน์สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีศูนย์กลางวงกลมแนบใน.....	91
รูปที่ 4.2.1 สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีศูนย์กลางวงกลมแนบในอยู่ในสามเหลี่ยม.....	93
รูปที่ 4.3(0) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีจุดออร์โทเซนเตอร์.....	93
รูปที่ 4.3(1)-4.3(5) พิสูจน์สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีจุดออร์โทเซนเตอร์.....	95
รูปที่ 4.3.1 สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ในสามเหลี่ยม.....	99
รูปที่ 4.3.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉากและจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ใน สามเหลี่ยม.....	99
รูปที่ 4.3.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้านและจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่นอก สามเหลี่ยม.....	99
รูปที่ 4.4(0) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีเซนทรอยด์.....	100
รูปที่ 4.3(1)-4.3(5) พิสูจน์สามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีจุดออร์โทเซนเตอร์.....	100
รูปที่ 4.4.1 สามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีเซนทรอยด์.....	101
รูปที่ 4.5.1(1)-4.5.7(2) พิสูจน์ข้อสังเกตที่ 1.	103
รูปที่ 4.6 พิสูจน์ข้อสังเกตที่ 2.	120

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1) ที่มาและความสำคัญของปัญหา

วงกลมเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ทางด้านวิศวกรรม เป็นต้นแบบของเครื่องมือและอุปกรณ์ต่างๆ เช่น เฟือง ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม เป็นเครื่องกลที่ทำงานโดยการหมุน โดยการหมุนของตัวเฟืองที่มีฟันอยู่ในแนวนอน โดยการส่งกำลังจะสามารถเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีฟันเฟืองตั้งแต่สองตัวขึ้นไป

ในงานนี้จะศึกษาเกี่ยวกับวงกลมที่มีจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมเป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมตั้งแต่ 1 ถึง 9 จุด คณะผู้จัดทำจึงสนใจที่จะศึกษาภายใต้เงื่อนไขใด จึงจะสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีวงกลมล้อมรอบได้และสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

1.2) วัตถุประสงค์ของปัญหา

- 1.2.1 ศึกษาการหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแล้วสามารถสร้างวงกลมที่มีจุดอยู่บนเส้นรอบวงตั้งแต่ 1 ถึง 9 จุด
- 1.2.2 ศึกษาเงื่อนไขในการสร้างวงกลมที่ผ่านจุดตั้งแต่ 1 ถึง 9 จุด ว่าอยู่ภายใต้เงื่อนไขใด
- 1.2.3 ศึกษาสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

1.3) ขอบเขตของการศึกษา

- 1.3.1 ศึกษาการหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า และสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า
- 1.3.2 ศึกษาว่าภายใต้เงื่อนไขใดที่จะหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและด้านไม่เท่า ซึ่งเมื่อสร้างวงกลมแล้วเส้นรอบวงจะผ่านจุดเหล่านั้น
- 1.3.3 ศึกษาสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

1.4) ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 สามารถหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมที่สร้างวงกลมที่ผ่านจุดยอดมุมทั้งหมดได้
- 1.4.2 สามารถหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมตั้งแต่ 3 ถึง 9 เหลี่ยมด้านเท่าและสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า
- 1.4.3 สามารถหาเงื่อนไขที่ ศูนย์กลางวงล้อม ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์ เป็นจุดเดียวกันและอยู่บนเส้นตรงเดียวกันได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5) แผนการดำเนินงาน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2559					ปี 2560				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
วางแผนการวิจัย										
บทที่ 1 บทนำ										
บทที่ 2 นิยามและ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง										
บทที่ 3 การหาจุดศูนย์กลาง ของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า										
บทที่ 4 การหาจุดศูนย์กลาง และสมบัติบางประการของ สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า										
บทที่ 5 สรุปผลวิจัย และข้อเสนอแนะ										
ทำรูปเล่มหน้าปก										
ศึกษาและนำเสนอ										

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาเรื่องการหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและด้านไม่เท่า เพื่อสร้างวงกลมล้อมรอบที่จุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมอยู่ในเส้นรอบวง ต้องใช้ความรู้เรื่องวงกลม สามเหลี่ยมคล้าย สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ มุม สามเหลี่ยมหน้าจั่ว และทฤษฎีบทพีทาโกรัส เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาในบทต่อไป

2.1) รูปวงกลม (circle)[1]

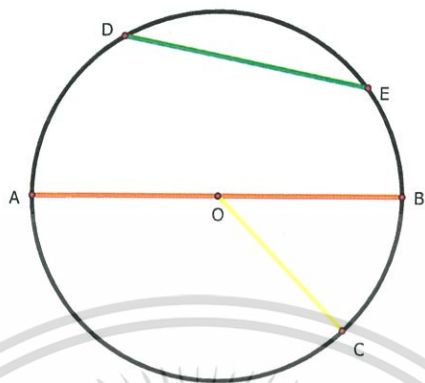


รูปที่ 2.1 วงกลม

วงกลม คือ รูปทรงทางเรขาคณิตรูปแบบหนึ่ง เป็นรูปปิด ไม่มีมุม สามารถวาดได้โดยกำหนดจุดศูนย์กลางขึ้นมา 1 จุด จากนั้นจึงลากเส้นให้มีระยะห่างจากจุดนี้เท่ากันโดยตลอด วนรอบจุดศูนย์กลางจนกลับมาถึงจุดเริ่มต้น โดยระยะห่างจากจุดศูนย์กลางนี้มีชื่อเรียกว่า “รัศมี”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.1) ส่วนประกอบของวงกลม



รูปที่ 2.1.1 ส่วนประกอบของวงกลม

ตารางที่ 2.1 ส่วนประกอบของวงกลมจากรูปที่ 2.1.1

1) จุด O	จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ จุดที่อยู่ตรงกลาง และห่างจากเส้นรอบวงเท่ากันโดยตลอด (ในวงกลมหนึ่งๆจะมีจุดศูนย์กลางเพียงจุดเดียว)
2) $\overline{OA}, \overline{OB}$ และ $\overline{OC}$	รัศมี คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวง รัศมีแต่ละเส้นยาวเท่ากัน (ในรูบวงกลมจะมีรัศมีมากมายนับไม่ถ้วน)
3) $\overline{AB}$	เส้นผ่านจุดศูนย์กลาง คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากเส้นรอบวงด้านหนึ่งโดยผ่านจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่ง
4) $\overline{DE}$	คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากเส้นรอบวงด้านหนึ่งไปยังเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่งโดยที่จุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2) สิ่งที่ควรทราบเกี่ยวกับวงกลม

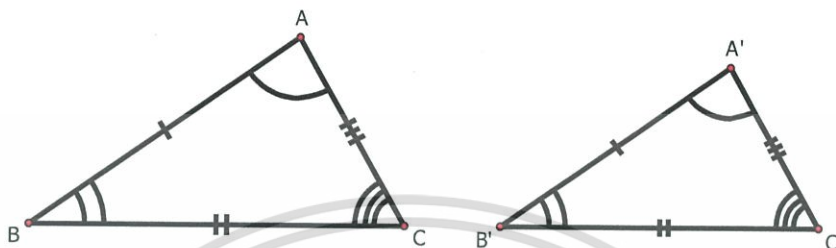
- 2.1.2.1) รัศมีวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน
- 2.1.2.2) เส้นผ่านศูนย์กลางยาวเป็นสองเท่าของรัศมี
- 2.1.2.3) คอร์ดยาวที่สุดของวงกลม คือ เส้นผ่านศูนย์กลาง
- 2.1.2.4) มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉากเสมอ
- 2.1.2.5) เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม จะแบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆกัน แต่ละส่วนเรียกว่า " ครึ่งวงกลม"
- 2.1.2.6) ถ้าใช้รัศมีของวงกลมตัดเส้นรอบวง จะแบ่งเส้นรอบวงออกเป็น 6 ส่วนเท่าๆกันและจะได้รูปหกเหลี่ยมด้านเท่าดังรูปที่ 2.1.2



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2) สามเหลี่ยมคล้าย[2]

นิยาม 2.2 รูปสามเหลี่ยมคล้าย คือรูปสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม และอัตราส่วนความยาวของด้านที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 สามเหลี่ยมคล้าย

จากรูปที่ 2.2 ถ้า $\triangle ABC$ และ $\triangle A'B'C'$ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้วเขียนแทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

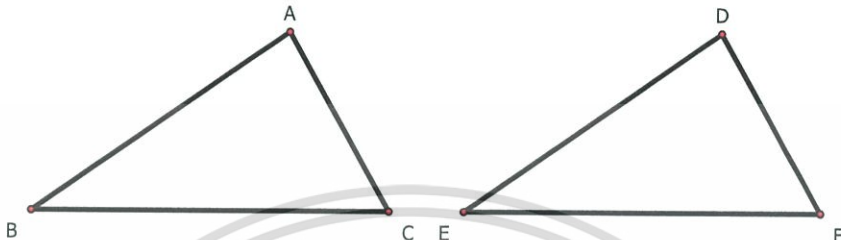
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ก็ต่อเมื่อ $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$ และ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ที่มีค่ามากกว่า 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

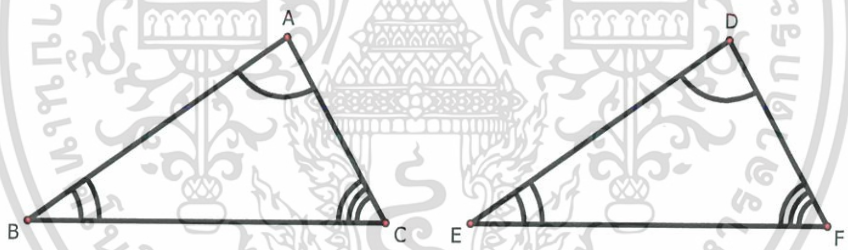
2.3) สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ[3]

ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ซึ่งเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3(1)



รูปที่ 2.3(1) สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ

เมื่อ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน คือ $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ และ $\overline{CA} = \overline{FD}$ และมีมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันคือ $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$ แล้ว $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ดังรูปที่ 2.3(2)

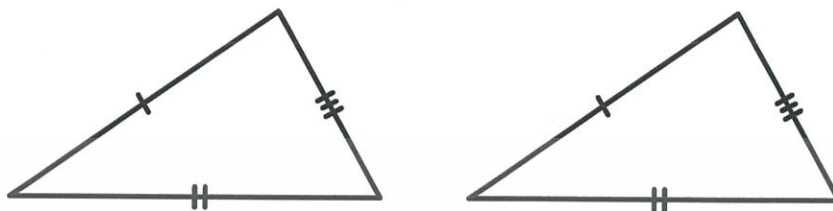


รูปที่ 2.3(2)

เมื่อตรวจสอบโดยการเคลื่อนที่ $\triangle ABC$ ให้ซ้อนกับ $\triangle DEF$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปซ้อนกันได้สนิท นั่นคือ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

สัจพจน์ 2.3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน[4]

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วรูปสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3.1



รูปที่ 2.3.1 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน

สัจพจน์ 2.3.2 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน[5]

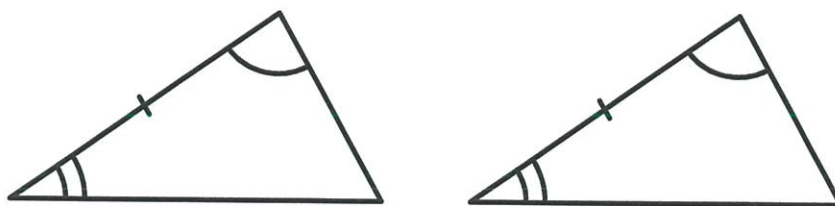
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3.2



รูปที่ 2.3.2 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

สัจพจน์ 2.3.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม[6]

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่อยู่ระหว่างมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3.3

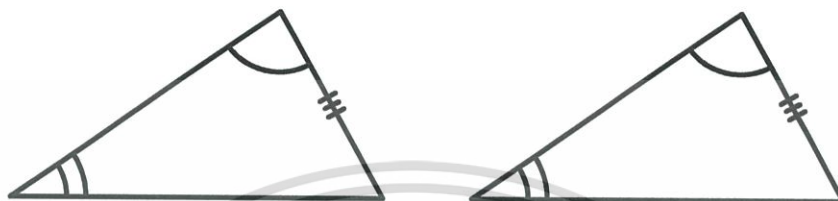


รูปที่ 2.3.3 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.3.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมเท่ากัน สองมุม และ ด้านที่ไม่ได้อยู่ระหว่างมุมนั้นยาวเท่ากันหนึ่งด้าน แล้วรูปสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3.4

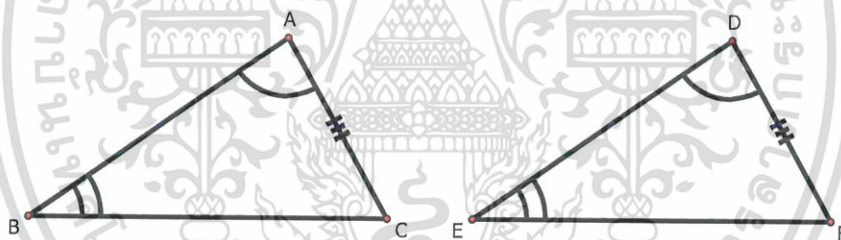


รูปที่ 2.3.4 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

พิสูจน์

กำหนดให้

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ และ } \overline{AC} = \overline{DF}$$



รูปที่ 2.3.4(1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

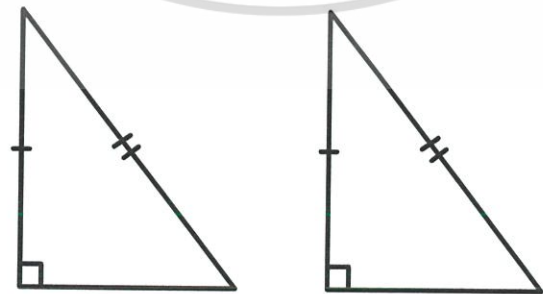
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ข้อความ	เหตุผล
2.3.4.1) $\hat{A} = \hat{D}$	กำหนดให้
2.3.4.2) $\hat{B} = \hat{E}$	กำหนดให้
2.3.4.3) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C}$	มุมภายในของสามเหลี่ยม ABC
2.3.4.4) $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$ $180^\circ - (\hat{D} + \hat{E}) = \hat{F}$	มุมภายในของสามเหลี่ยม DEF
2.3.4.5) $\hat{C} = \hat{F}$	จาก 2.3.4.1), 2.3.4.2), 2.3.4.3) และ 2.3.4.4)
2.3.4.6) $\overline{AC} = \overline{DF}$	กำหนดให้
2.3.4.7) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	มุม-ด้าน-มุม



ทฤษฎีบท 2.3.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

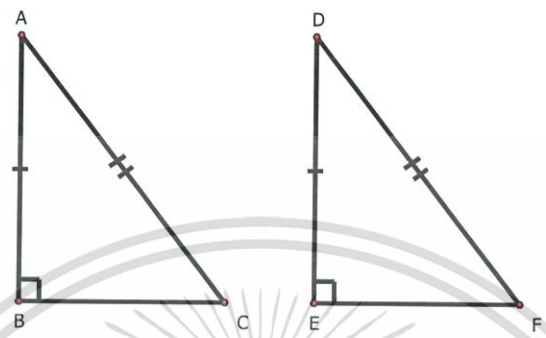
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีมุมหนึ่ง เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน ด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ดังรูปที่ 2.3.5



รูปที่ 2.3.5 สามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

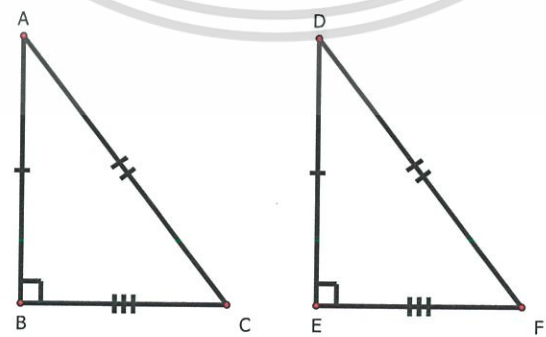
พิสูจน์
กำหนดให้
- $\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}$ และ $\hat{ABC} = \hat{DEF} = 90^\circ$



รูปที่ 2.3.5(1)

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ข้อความ	เหตุผล
2.3.5.1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2.3.5.2) $\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2$ $\overline{DE}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{EF}^2$	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
2.3.5.3) $\overline{AB} = \overline{DE}$	กำหนดให้
2.3.5.4) $\overline{AC} = \overline{DF}$	กำหนดให้
2.3.5.5) $\overline{BC} = \overline{EF}$	จาก 2.3.5.1), 2.3.5.2), 2.3.5.3) และ 2.3.5.4)
2.3.5.6) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	ด้าน-ด้าน-ด้าน



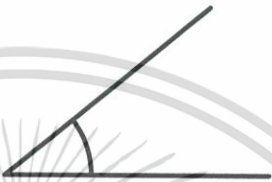
รูปที่ 2.3.5(2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4) มุม[7]

นิยาม 2.4 มุมเกิดจากปลายรังสี 2 เส้น เชื่อมกันที่จุดจุดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า จุดยอดมุม และหน่วยในการวัดมุมมีหน่วยเป็นองศาซึ่งเขียนในสัญลักษณ์ " $^{\circ}$ " จากความยาวรอบรูปของวงกลม(รัศมี 1 หน่วย) ในหน่วยองศา วงกลมจะมีมุมที่จุดศูนย์กลางมีค่า 360° ดังนั้นมุมฉากจะเป็นมุมมีค่า 90°

ตารางที่ 2.4 แสดงรูปภาพมุมในแบบต่างๆ

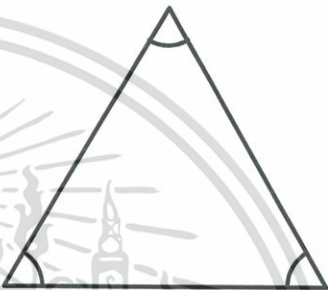
มุม	รูปภาพประกอบ
2.4.1 มุมแหลม คือมุมที่มีขนาด มากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 90°	 รูปที่ 2.4.1 มุมแหลม
2.4.2 มุมฉาก คือมุมที่มีขนาด เท่ากับ 90°	 รูปที่ 2.4.2 มุมฉาก
2.4.3 มุมป้าน คือมุมที่มีขนาด มากกว่า 90° แต่ น้อยกว่า 180°	 รูปที่ 2.4.3 มุมป้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

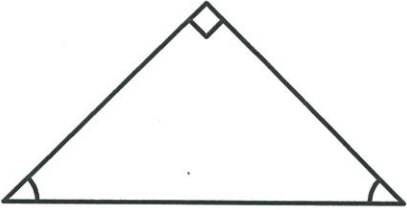
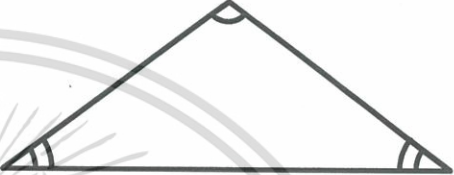
2.5) สามเหลี่ยมหน้าจั่ว[8]

นิยาม 2.5 สามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากันและมีมุมสองมุมขนาดเท่ากัน คือมุมที่ไม่ได้ประกอบด้วยด้านที่เท่ากันทั้งสองเรียกว่าสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (ตามความหมายเริ่มแรกโดยยุคลิด ถึงแม้ว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะสามารถจัดว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ด้วย เพราะมีด้านที่ยาวเท่ากันอย่างน้อยสองด้าน)

ตารางที่ 2.5 สามเหลี่ยมหน้าจั่วสามารถแบ่งออกเป็น 4 ประเภท

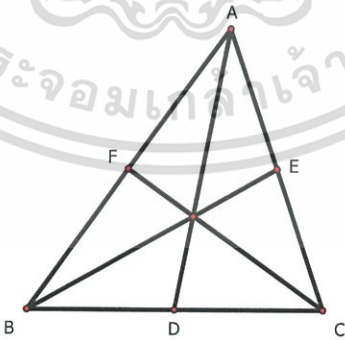
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	รูปภาพประกอบ
2.5.1 สามเหลี่ยมหน้าจั่วทุกมุมมีขนาดเท่ากัน หรือสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ สามเหลี่ยมที่ทุกมุมมีขนาด 60°	 รูปที่ 2.5.1 สามเหลี่ยมด้านเท่า
2.5.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมแหลม คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมีขนาดน้อยกว่า 90° และอีกสองมุมมีขนาดเท่ากัน	 รูปที่ 2.5.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมแหลม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมีขนาด 90° และอีกสองมุมมีขนาดเท่ากัน	 รูปที่ 2.5.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก
2.5.4 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมีขนาดมากกว่า 90° และอีกสองมุมมีขนาดเท่ากัน	 รูปที่ 2.5.4 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน

2.6) ทฤษฎีบทเชวา[9]

ทฤษฎีบทที่ 2.6 สำหรับสามเหลี่ยม ABC และจุด D, E, F ที่อยู่บน $\overline{BC}, \overline{CA}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ
จะได้ว่า $\overline{AD}, \overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ ตัดกันที่จุดเดียว ก็ต่อเมื่อ $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ ดังรูปที่ 2.6



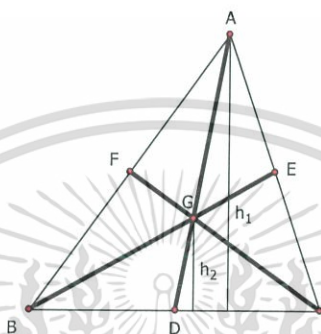
รูปที่ 2.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์($\Rightarrow$)

กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ
- D, E, F อยู่บน $\overline{BC}, \overline{CA}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ
- $\overline{AD}, \overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ ตัดกันที่จุด G
- $\triangle ABC$ สูง h_1 และ $\triangle GBC$ สูง h_2 ดังรูปที่ 2.6(1)



รูปที่ 2.6(1)

ต้องการพิสูจน์ว่า $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$

พิจารณา $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle GBD, \triangle GCD$ จะได้ว่า พื้นที่ A ของแต่ละรูปคือ

$$A_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h_1 = a \quad (1)$$

$$A_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times h_1 = b \quad (2)$$

$$A_{\triangle GBD} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h_2 = c \quad (3)$$

$$A_{\triangle GCD} = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times h_2 = d \quad (4)$$

(1) $\div$ (2);

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{A_{\triangle ABD}}{A_{\triangle ACD}} = \frac{a}{b} = k \quad (5)$$

(3) $\div$ (4);

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{A_{\triangle GBD}}{A_{\triangle GCD}} = \frac{c}{d} = k \quad (6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\frac{a}{b} = k$ และ $\frac{c}{d} = k$

ทำให้ $a = bk$ และ $c = dk$

จะได้ $a - c = bk - dk$

$$= (b - d)k$$

นำ $b - d$ หาคancelทั้งสมการ จะได้

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{(b - d)k}{b - d} = k$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d} \quad (7)$$

แทนค่าในสมการที่ (7) จะได้

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{A_{\triangle ABD} - A_{\triangle GBD}}{A_{\triangle ACD} - A_{\triangle GCD}} = \frac{A_{\triangle ABG}}{A_{\triangle ACG}} \quad (8)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{A_{\triangle ACG}}{A_{\triangle BCG}} \quad (9)$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{A_{\triangle BCG}}{A_{\triangle ACG}} \quad (10)$$

นำ (9) · (8) · (10) จะได้

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{A_{\triangle ACG}}{A_{\triangle BCG}} \cdot \frac{A_{\triangle ABG}}{A_{\triangle ACG}} \cdot \frac{A_{\triangle BCG}}{A_{\triangle ABG}} = 1$$

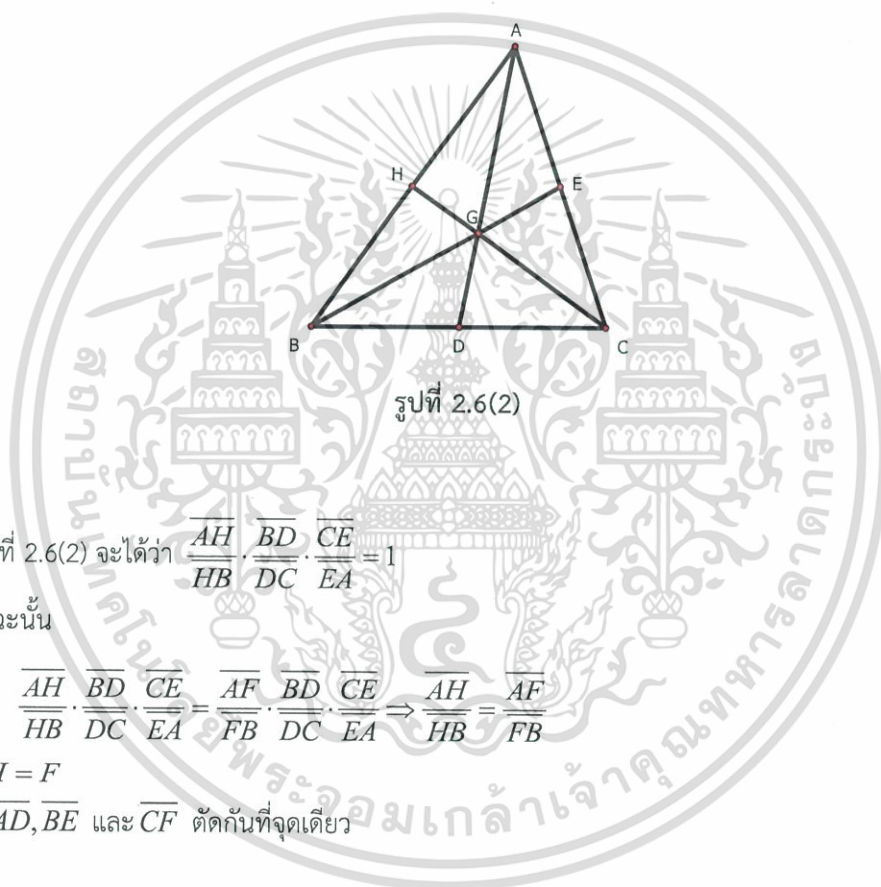
$$\text{ดังนั้น } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์($\Leftarrow$)

กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใดๆ
- D, E อยู่บน $\overline{BC}, \overline{CA}$ ตามลำดับ
- $\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ ตัดกันที่ G และ $\overline{CH}$ เป็นเส้นที่ผ่าน G ไปยัง $\overline{AB}$ ที่ H ดังรูปที่ 2.6(2)
- $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$



จากรูปที่ 2.6(2) จะได้ว่า $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$$

จะได้ $H = F$

ดังนั้น $\overline{AD}, \overline{BE}$ และ $\overline{CF}$ ตัดกันที่จุดเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

ในบทนี้จะศึกษาการหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าเพื่อสร้างวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า สี่เหลี่ยมด้านเท่า ห้าเหลี่ยมด้านเท่า หกเหลี่ยมด้านเท่า เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า แปดเหลี่ยมด้านเท่า และเก้าเหลี่ยมด้านเท่า เพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปดังกล่าวนี้

ในการศึกษาจะไม่พิจารณา 1 จุด และ 2 จุด จะพิจารณาตั้งแต่ 3 จุด ขึ้นไป เนื่องจากจุด 1 จุดและ 2 จุดสามารถสร้างวงกลมล้อมรอบได้นั้นต์ ดังรูปที่ 3.1 และรูปที่ 3.2



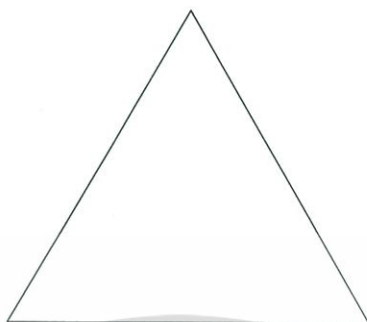
รูปที่ 3.1 วงกลมที่สร้างจากจุด 1 จุด



รูปที่ 3.2 วงกลมที่สร้างจากจุด 2 จุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.3 สามเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

-สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

- X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.3.1

จะได้ว่า

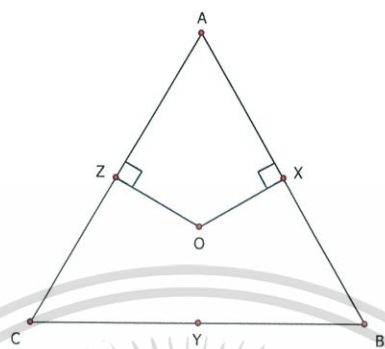
$$\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AB}$$

$$\overline{BY} + \overline{YC} = \overline{BC}$$

$$\overline{CZ} + \overline{ZA} = \overline{CA}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์
ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด X และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AC}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.3.1



รูปที่ 3.3.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
พิสูจน์ เนื่องจาก $\angle CAB = 60^\circ, \angle AXO = 90^\circ, \angle AZO = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°
เพราะฉะนั้น $\angle CAB + \angle AXO + \angle AZO + \angle XOZ = 360^\circ$
 $60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle XOZ = 360^\circ$
 $\angle XOZ = 120^\circ$

3.1.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $AXOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOX \cong \triangle AOZ$ ดังรูปที่ 3.3(1)

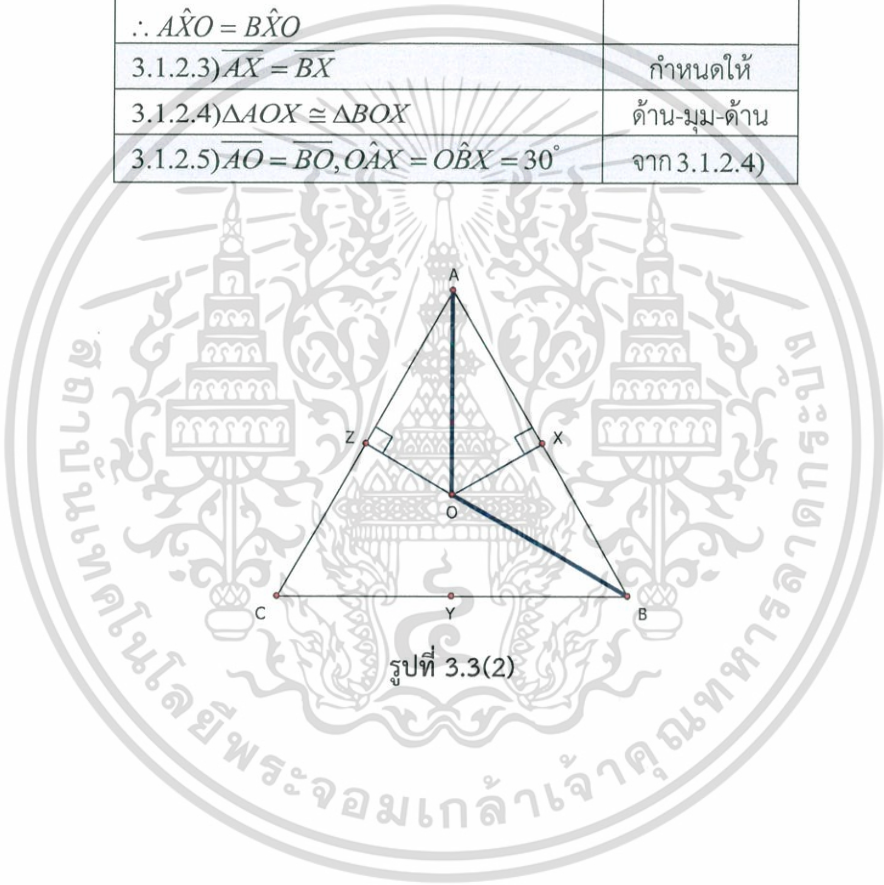
ข้อความ	เหตุผล
3.1.1.1) $\hat{A}XO = \hat{A}ZO = 90^\circ$	มุมฉาก
3.1.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.1.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AX}$	กำหนดให้
3.1.1.4) $\triangle AOX \cong \triangle AOZ$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.1.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OX}, \hat{OAZ} = \hat{OAX} = 30^\circ$	จาก 3.1.1.4)
3.1.1.6) $\hat{AOZ} = \hat{AOX} = 60^\circ$	จาก 3.1.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOX$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOX \cong \triangle BOX$ รูปที่ 3.3(2)

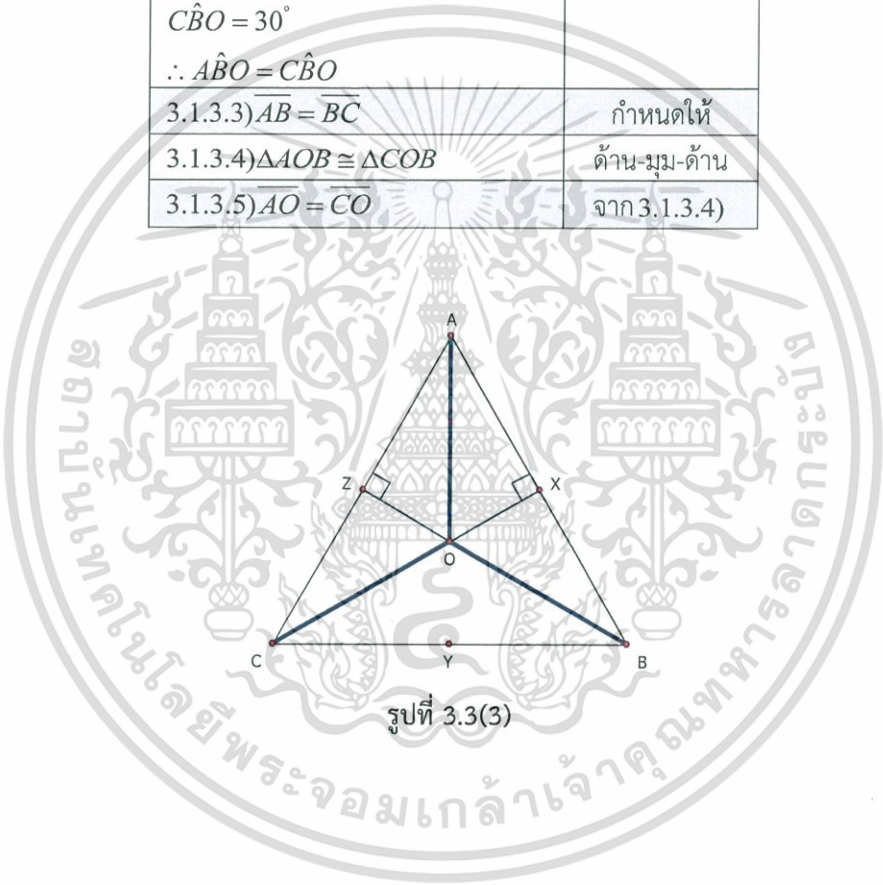
ข้อความ	เหตุผล
3.1.2.1) $\overline{OX}$	ด้านร่วม
3.1.2.2) $\angle A\hat{X}O = 90^\circ$ $\angle A\hat{X}O + \angle B\hat{X}O = 180^\circ$ $\angle B\hat{X}O = 90^\circ$ $\therefore \angle A\hat{X}O = \angle B\hat{X}O$	มุมเท่ากัน
3.1.2.3) $\overline{AX} = \overline{BX}$	กำหนดให้
3.1.2.4) $\triangle AOX \cong \triangle BOX$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.1.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \angle O\hat{A}X = \angle O\hat{B}X = 30^\circ$	จาก 3.1.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ รูปที่ 3.3(3)

ข้อความ	เหตุผล
3.1.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.1.3.2) $\angle ABO = 30^\circ, \angle ABC = 60^\circ$ $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO$ $60^\circ = 30^\circ + \angle CBO$ $\angle CBO = 30^\circ$ $\therefore \angle ABO = \angle CBO$	มุมเท่ากัน
3.1.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.1.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.1.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}$	จาก 3.1.3.4)

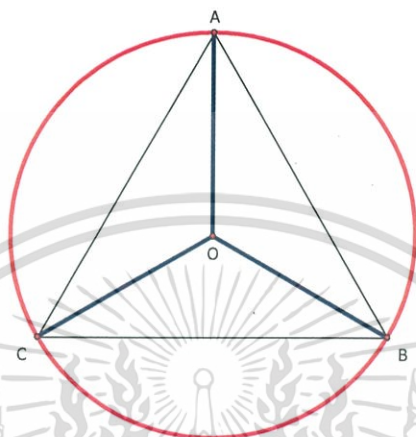


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก 3.1.2.5), 3.1.3.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

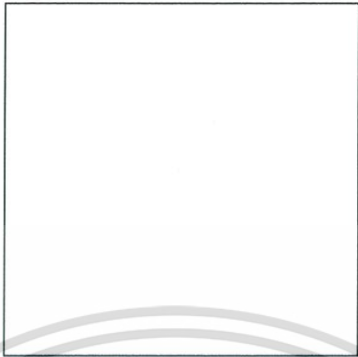
และ O เป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC



รูปที่ 3.3(4) วงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสี่เหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.4 สี่เหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

- สี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่า
- W, X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ และ $\overline{DA}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\overline{AW} + \overline{WB} = \overline{AB}$$

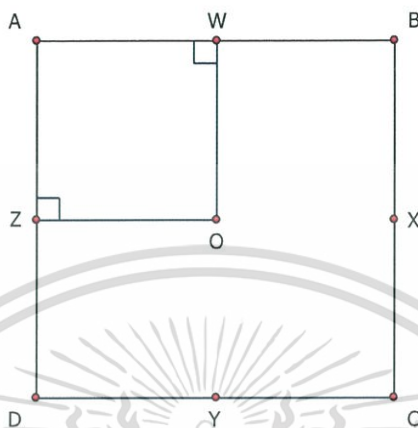
$$\overline{BX} + \overline{XC} = \overline{BC}$$

$$\overline{CY} + \overline{YD} = \overline{CD}$$

$$\overline{DZ} + \overline{ZA} = \overline{DA}$$

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด W และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AD}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.4.1



รูปที่ 3.4.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$ แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน

พิสูจน์ เนื่องจาก $\widehat{DAB} = 90^\circ$, $\widehat{AWO} = 90^\circ$, $\widehat{AZO} = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°

เพราะฉะนั้น $\widehat{DAB} + \widehat{AWO} + \widehat{AZO} + \widehat{W\hat{O}Z} = 360^\circ$

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \widehat{W\hat{O}Z} = 360^\circ$$

$$\widehat{W\hat{O}Z} = 90^\circ$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $AWOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOZ \cong \triangle AOW$ ดังรูปที่ 3.4(1)

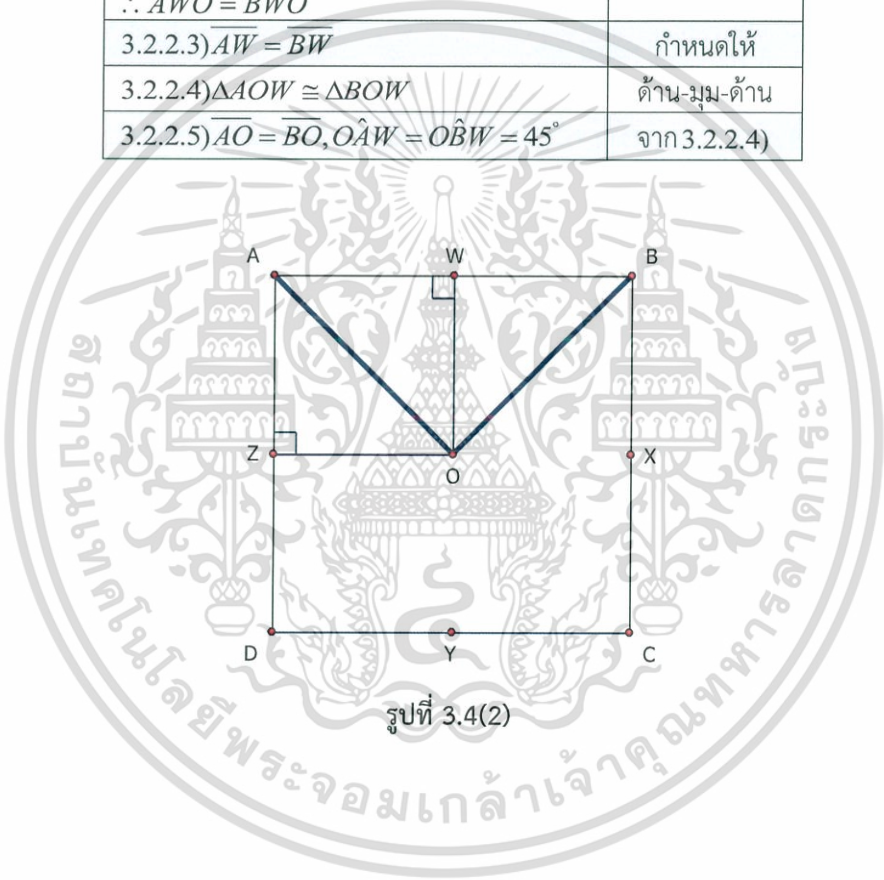
ข้อความ	เหตุผล
3.2.1.1) $\widehat{AWO} = \widehat{AZO} = 90^\circ$	มุมฉาก
3.2.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.2.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AW}$	กำหนดให้
3.2.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle AWO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.2.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OW}$, $\widehat{OAW} = \widehat{OAZ} = 45^\circ$	จาก 3.2.1.4)
3.2.1.6) $\widehat{AOZ} = \widehat{AOW} = 45^\circ$	จาก 3.2.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOW$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOW \cong \triangle BOW$ ดังรูปที่ 3.4(2)

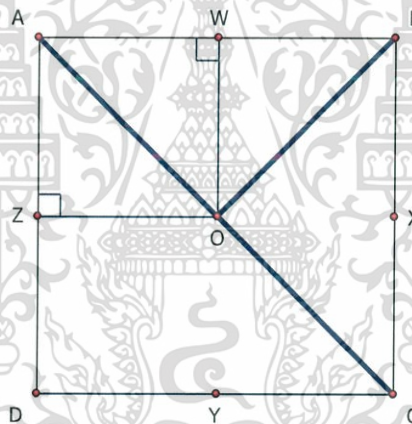
ข้อความ	เหตุผล
3.2.2.1) $\overline{OW}$	ด้านร่วม
3.2.2.2) $\hat{A}WO = 90^\circ$ $\hat{A}WO + \hat{B}WO = 180^\circ$ $\hat{B}WO = 90^\circ$ $\therefore \hat{A}WO = \hat{B}WO$	มุมเท่ากัน
3.2.2.3) $\overline{AW} = \overline{BW}$	กำหนดให้
3.2.2.4) $\triangle AOW \cong \triangle BOW$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.2.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \hat{OAW} = \hat{OBW} = 45^\circ$	จาก 3.2.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOZ \cong \triangle COZ$ ดังรูปที่ 3.4(3)

ข้อความ	เหตุผล
3.2.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.2.3.2) $\widehat{ABO} = 45^\circ, \widehat{ABC} = 90^\circ$ $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO}$ $90^\circ = 45^\circ + \widehat{CBO}$ $\widehat{CBO} = 45^\circ$ $\therefore \widehat{ABO} = \widehat{CBO}$	มุมเท่ากัน
3.2.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.2.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.2.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}, \widehat{OAB} = \widehat{OCB} = 45^\circ$	จาก 3.2.3.4)

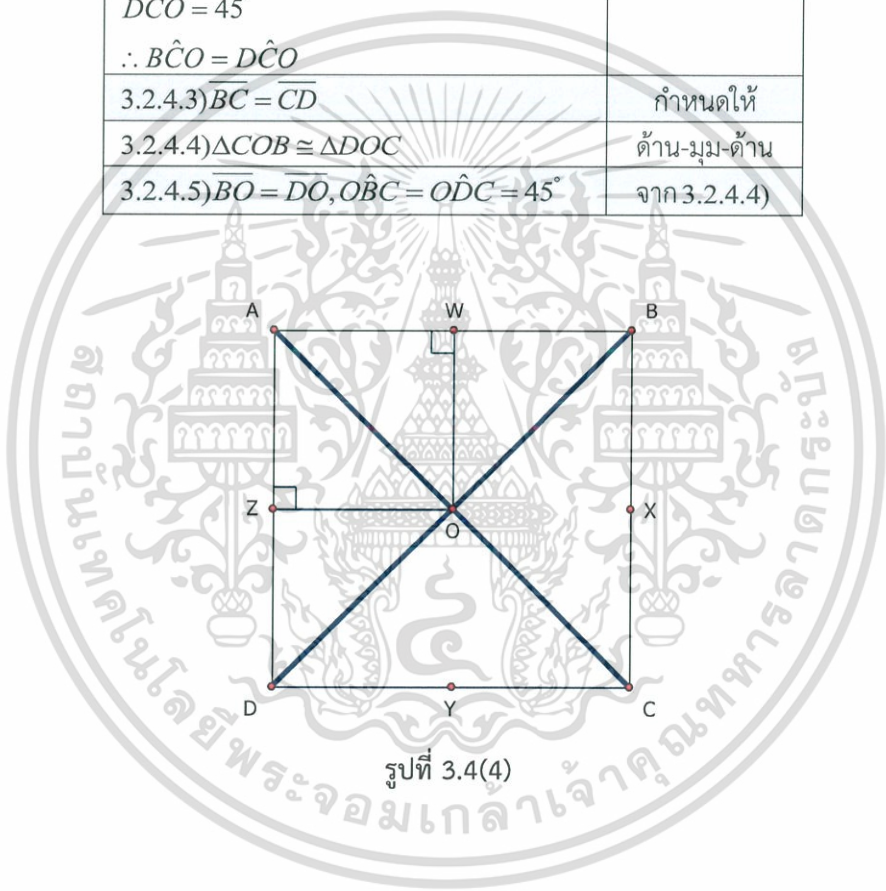


รูปที่ 3.4(3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

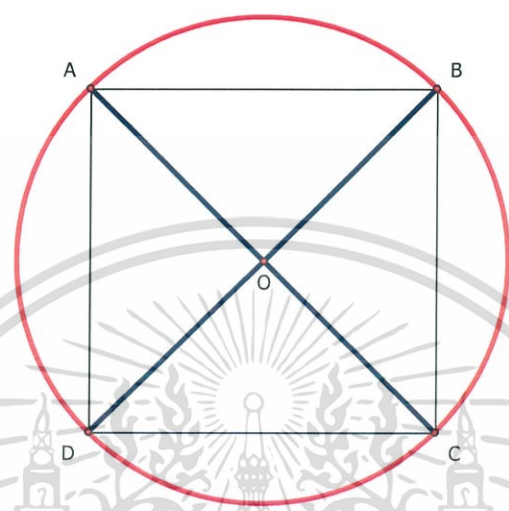
3.2.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOD \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.4(4)

ข้อความ	เหตุผล
3.2.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.2.4.2) $B\hat{C}O = 45^\circ, B\hat{C}D = 90^\circ$ $B\hat{C}D = B\hat{C}O + D\hat{C}O$ $90^\circ = 45^\circ + D\hat{C}O$ $D\hat{C}O = 45^\circ$ $\therefore B\hat{C}O = D\hat{C}O$	มุมเท่ากัน
3.2.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.2.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.2.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, O\hat{B}C = O\hat{D}C = 45^\circ$	จาก 3.2.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

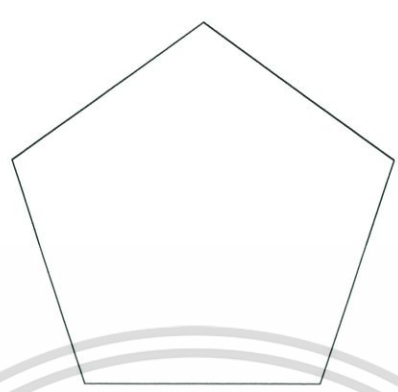
จาก 3.2.2.5), 3.2.3.5), 3.2.4.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$
ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบสี่เหลี่ยม $ABCD$
และ O เป็นจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมด้านเท่า $ABCD$



รูปที่ 3.4(5) วงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบห้าเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.5 ห้าเหลี่ยมด้านเท่า

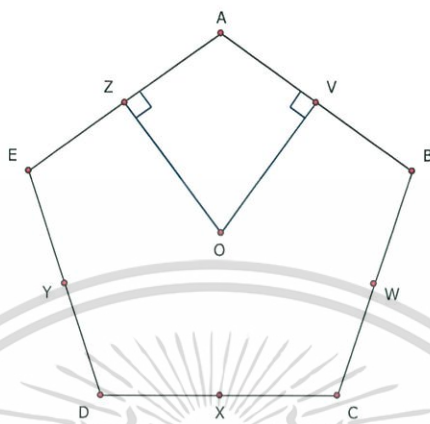
กำหนดให้

- ห้าเหลี่ยม $ABCDE$ เป็นห้าเหลี่ยมด้านเท่า
- V, W, X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ และ $\overline{EA}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\overline{AV} + \overline{VB} &= \overline{AB} \\ \overline{BW} + \overline{WC} &= \overline{BC} \\ \overline{CX} + \overline{XD} &= \overline{CD} \\ \overline{DY} + \overline{YE} &= \overline{DE} \\ \overline{EZ} + \overline{ZA} &= \overline{EA}\end{aligned}$$

สร้างเพื่อพิสูจน์
ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด V และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AE}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.5.1



รูปที่ 3.5.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO}$ แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}$
เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
พิสูจน์ เนื่องจาก $\angle EAB = 108^\circ, \angle AZO = 90^\circ, \angle AVO = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°
เพราะฉะนั้น $\angle EAB + \angle AZO + \angle AVO + \angle VOZ = 360^\circ$
 $108^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle VOZ = 360^\circ$
 $\angle VOZ = 72^\circ$

3.3.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $AVOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AZO \cong \triangle AVO$ ดังรูปที่ 3.5(1)

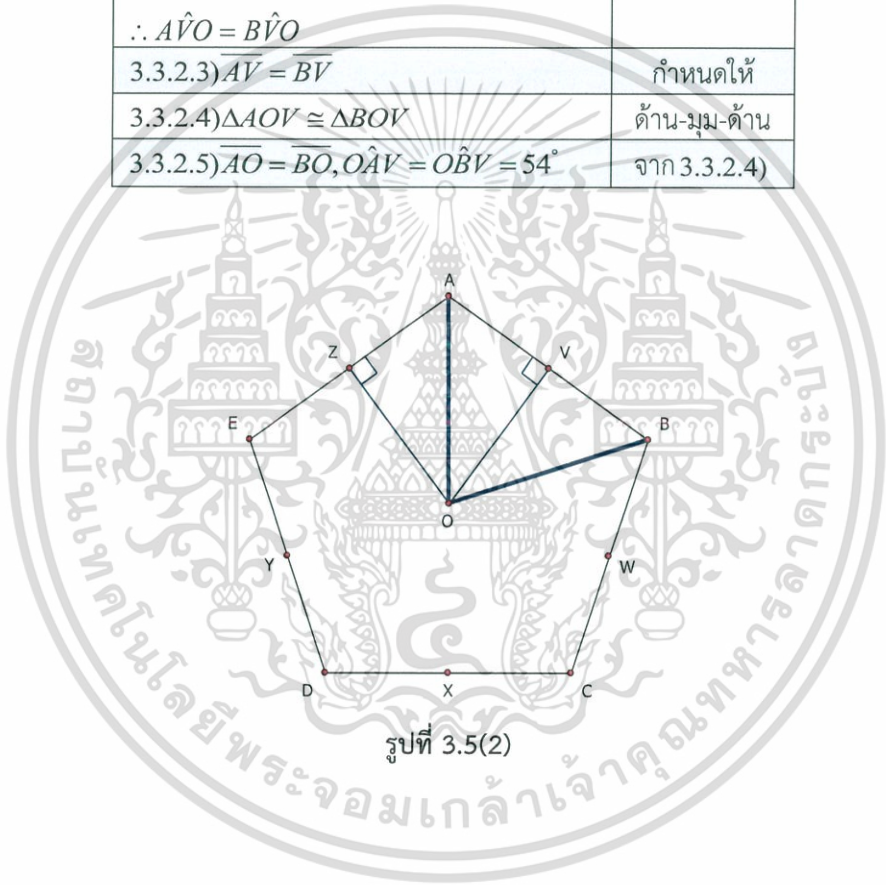
ข้อความ	เหตุผล
3.3.1.1) $\widehat{AVO} = \widehat{AZO} = 90^\circ$	มุมฉาก
3.3.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.3.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AV}$	กำหนดให้
3.3.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle AVO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.3.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OV}$, $\widehat{OAV} = \widehat{OAZ} = 54^\circ$	จาก 3.3.1.4)
3.3.1.6) $\widehat{AOZ} = \widehat{AOV} = 36^\circ$	จาก 3.3.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOV$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOV \cong \triangle BOV$ ดังรูปที่ 3.5(2)

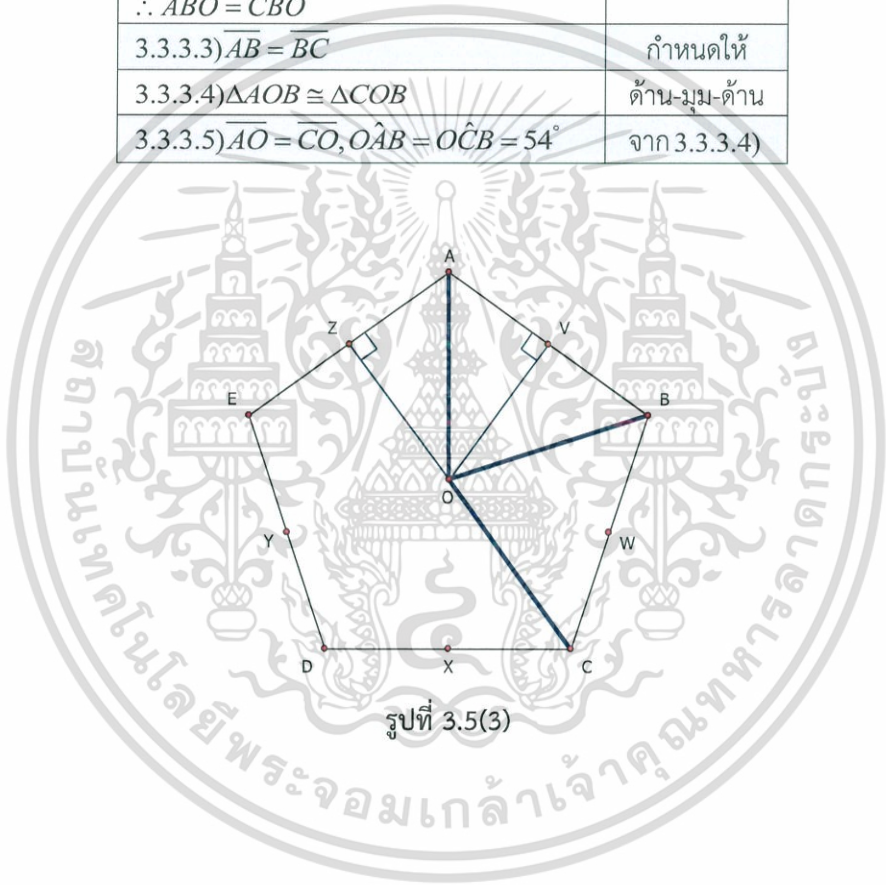
ข้อความ	เหตุผล
3.3.2.1) $\overline{OV}$	ด้านร่วม
3.3.2.2) $A\hat{V}O = 90^\circ$ $A\hat{V}O + B\hat{V}O = 180^\circ$ $B\hat{V}O = 90^\circ$ $\therefore A\hat{V}O = B\hat{V}O$	มุมเท่ากัน
3.3.2.3) $\overline{AO} = \overline{BO}$	กำหนดให้
3.3.2.4) $\triangle AOV \cong \triangle BOV$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.3.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, O\hat{A}V = O\hat{B}V = 54^\circ$	จาก 3.3.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ดังรูปที่ 3.5(3)

ข้อความ	เหตุผล
3.3.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.3.3.2) $\hat{A}BO = 54^\circ, \hat{A}BC = 108^\circ$ $\hat{A}BC = \hat{A}BO + \hat{C}BO$ $108^\circ = 54^\circ + \hat{C}BO$ $\hat{C}BO = 54^\circ$ $\therefore \hat{A}BO = \hat{C}BO$	มุมเท่ากัน
3.3.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.3.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.3.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}, \hat{OAB} = \hat{OCB} = 54^\circ$	จาก 3.3.3.4)

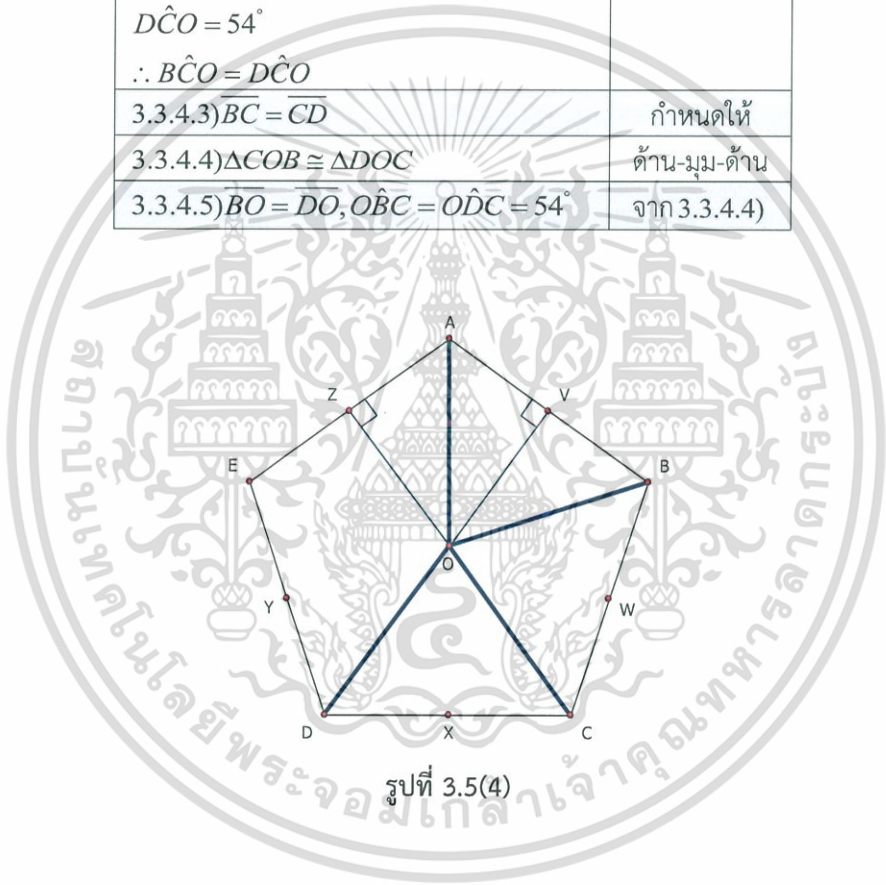


รูปที่ 3.5(3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle COB \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.5(4)

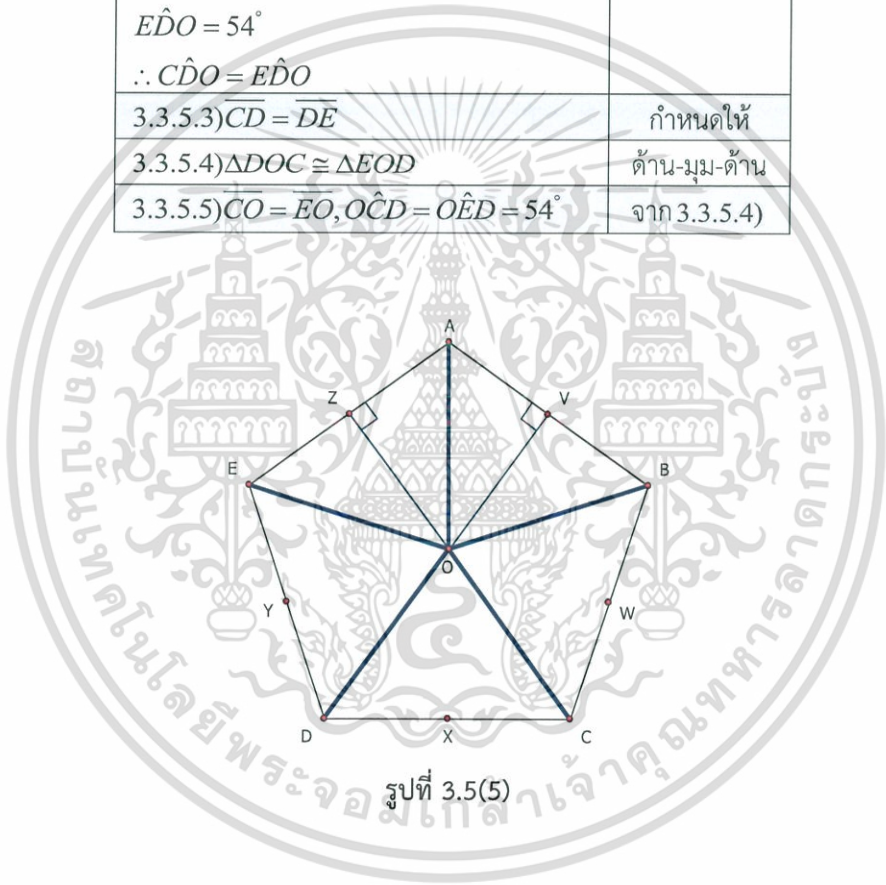
ข้อความ	เหตุผล
3.3.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.3.4.2) $\widehat{BCO} = 54^\circ, \widehat{BCD} = 108^\circ$ $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{DCO}$ $108^\circ = 54^\circ + \widehat{DCO}$ $\widehat{DCO} = 54^\circ$ $\therefore \widehat{BCO} = \widehat{DCO}$	มุมเท่ากัน
3.3.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.3.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.3.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, \widehat{OBC} = \widehat{ODC} = 54^\circ$	จาก 3.3.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

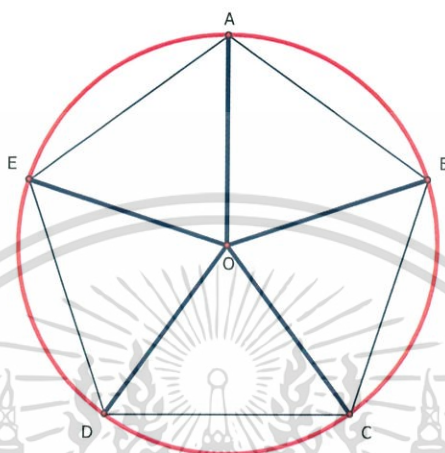
3.3.5) ลากเส้น $\overline{EO}$ จะได้ $\triangle EOD$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle DOC \cong \triangle EOD$ ดังรูปที่ 3.5(5)

ข้อความ	เหตุผล
3.3.5.1) $\overline{DO}$	ด้านร่วม
3.3.5.2) $\hat{CDO} = 54^\circ, \hat{CDE} = 108^\circ$ $\hat{CDE} = \hat{CDO} + \hat{EDO}$ $108^\circ = 54^\circ + \hat{EDO}$ $\hat{EDO} = 54^\circ$ $\therefore \hat{CDO} = \hat{EDO}$	มุมเท่ากัน
3.3.5.3) $\overline{CD} = \overline{DE}$	กำหนดให้
3.3.5.4) $\triangle DOC \cong \triangle EOD$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.3.5.5) $\overline{CO} = \overline{EO}, \hat{OCD} = \hat{OED} = 54^\circ$	จาก 3.3.5.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

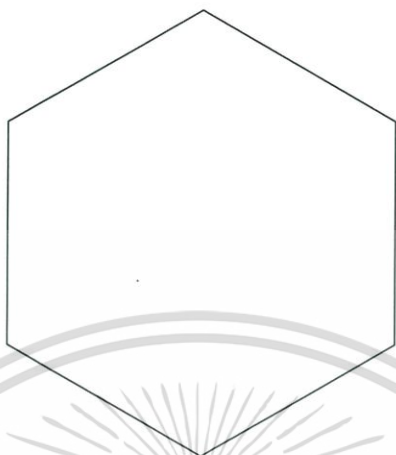
จาก 3.3.2.5), 3.3.3.5), 3.3.4.5), 3.3.5.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO}$
 ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบห้าเหลี่ยม $ABCDE$
 และ O เป็นจุดศูนย์กลางของห้าเหลี่ยมด้านเท่า $ABCDE$



รูปที่ 3.5(6) วงกลมล้อมรอบรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบหกเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.6 หกเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

-หกเหลี่ยม $ABCDEF$ เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า

- U, V, W, X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ และ $\overline{FA}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$\overline{AU} + \overline{UB} = \overline{AB}$$

$$\overline{BV} + \overline{VC} = \overline{BC}$$

$$\overline{CW} + \overline{WD} = \overline{CD}$$

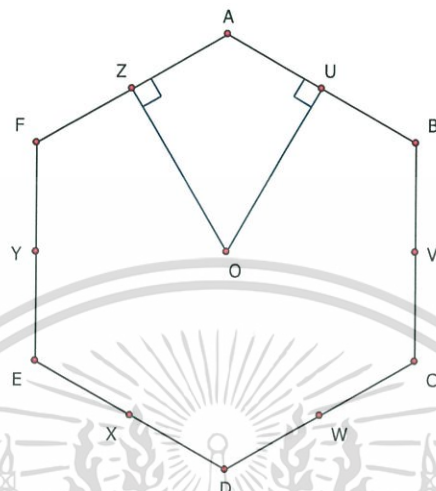
$$\overline{DX} + \overline{XE} = \overline{DE}$$

$$\overline{EY} + \overline{YF} = \overline{EF}$$

$$\overline{FZ} + \overline{ZA} = \overline{FA}$$

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด U และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AF}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.6.1



รูปที่ 3.6.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO}$ แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน

พิสูจน์ เนื่องจาก $\angle FAB = 120^\circ, \angle A\hat{U}O = 90^\circ, \angle A\hat{Z}O = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°

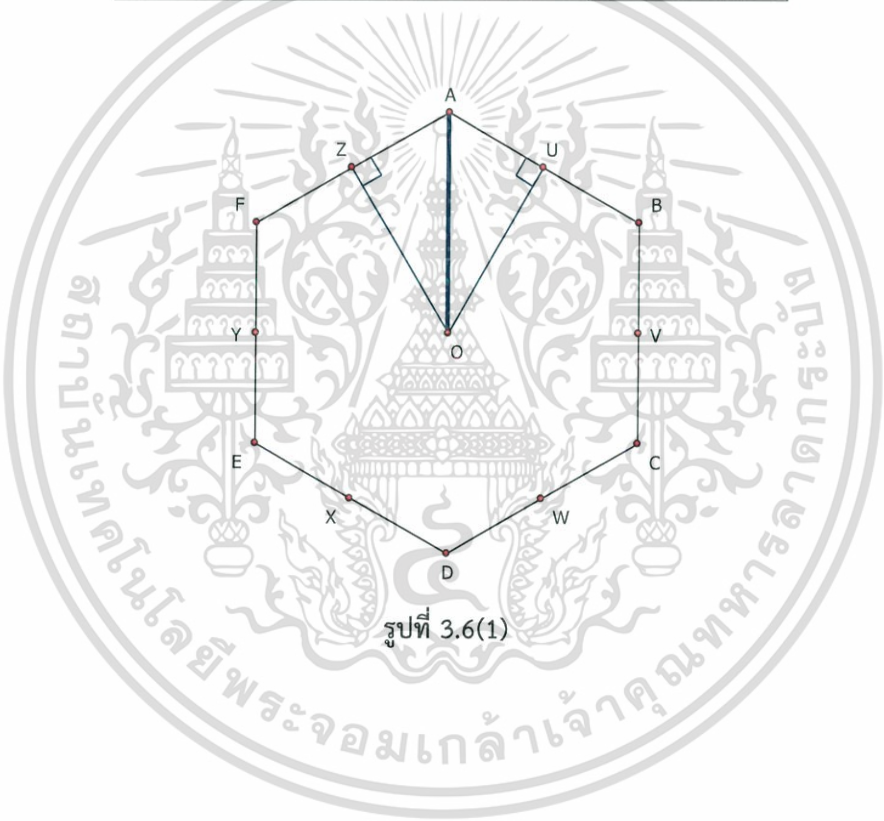
เพราะฉะนั้น $\angle FAB + \angle A\hat{U}O + \angle A\hat{Z}O + \angle U\hat{O}Z = 360^\circ$

$$120^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle U\hat{O}Z = 360^\circ$$

$$\angle U\hat{O}Z = 60^\circ$$

3.4.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $AUOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AZO \cong \triangle AUO$ ดังรูปที่ 3.6(1)

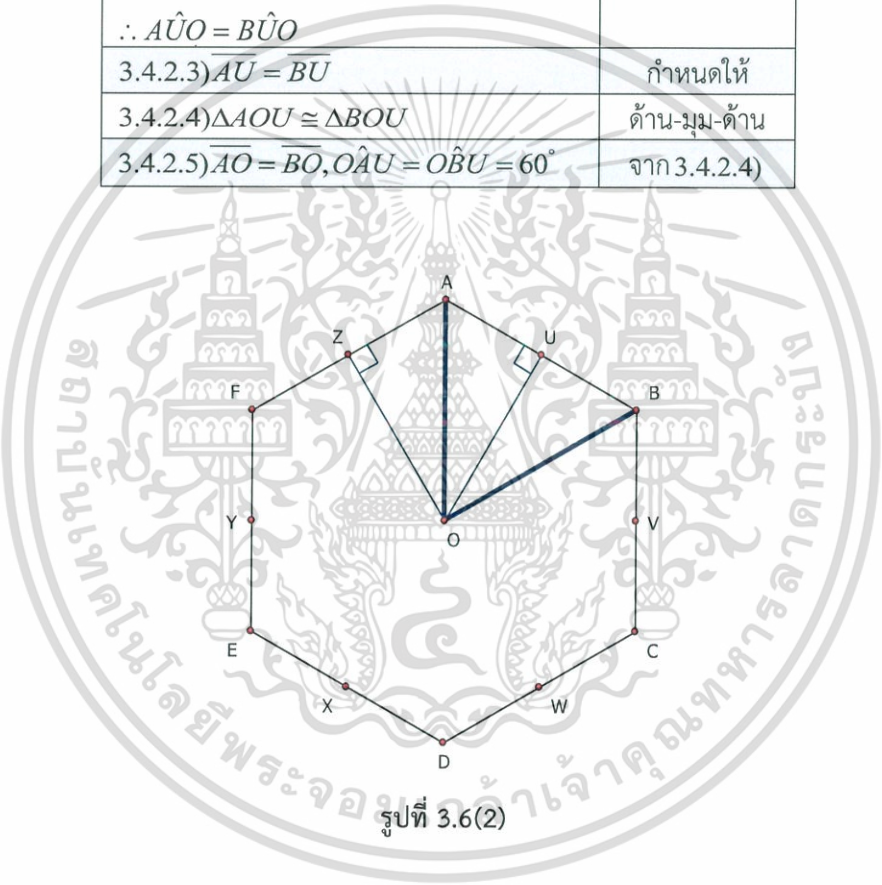
ข้อความ	เหตุผล
3.4.1.1) $\hat{A\hat{U}O} = \hat{A\hat{Z}O} = 90^\circ$	มุมฉาก
3.4.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.4.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AU}$	กำหนดให้
3.4.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle AUO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.4.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OU}, \hat{A\hat{U}O} = \hat{A\hat{Z}O} = 60^\circ$	จาก 3.4.1.4)
3.4.1.6) $\hat{A\hat{O}Z} = \hat{A\hat{O}U} = 30^\circ$	จาก 3.4.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOU$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOU \cong \triangle BOU$ ดังรูปที่ 3.6(2)

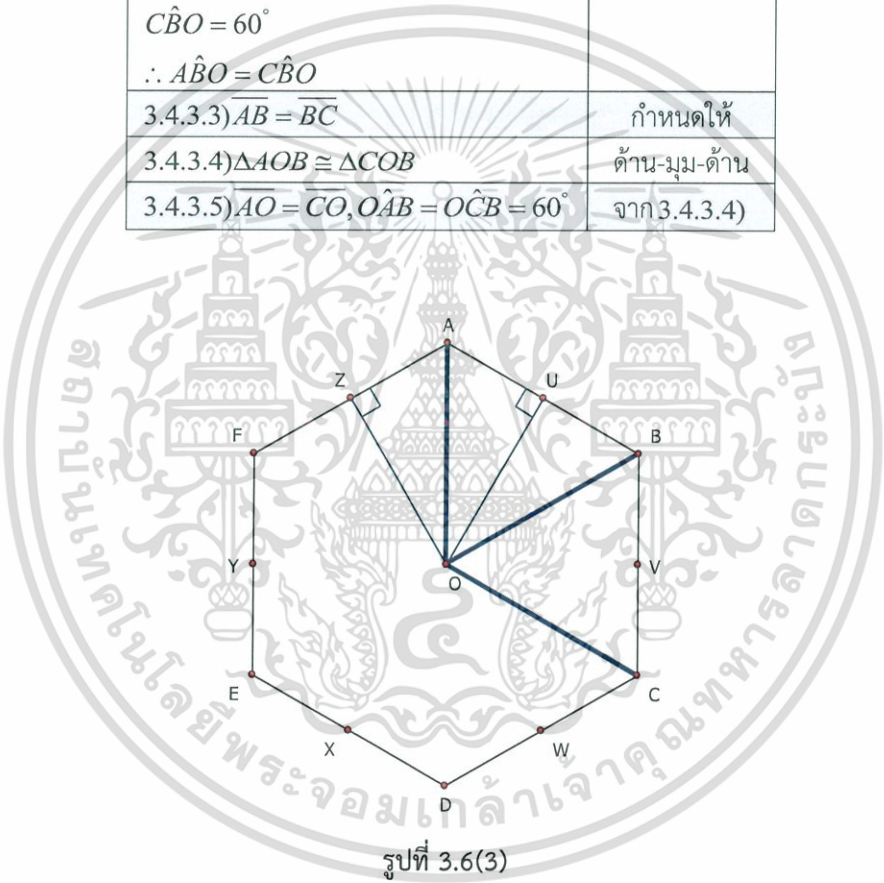
ข้อความ	เหตุผล
3.4.2.1) $\overline{OU}$	ด้านร่วม
3.4.2.2) $\angle A\hat{U}O = 90^\circ$ $\angle A\hat{U}O + \angle B\hat{U}O = 180^\circ$ $\angle B\hat{U}O = 90^\circ$ $\therefore \angle A\hat{U}O = \angle B\hat{U}O$	มุมเท่ากัน
3.4.2.3) $\overline{AU} = \overline{BU}$	กำหนดให้
3.4.2.4) $\triangle AOU \cong \triangle BOU$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.4.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \angle A\hat{O}U = \angle B\hat{O}U = 60^\circ$	จาก 3.4.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ดังรูปที่ 3.6(3)

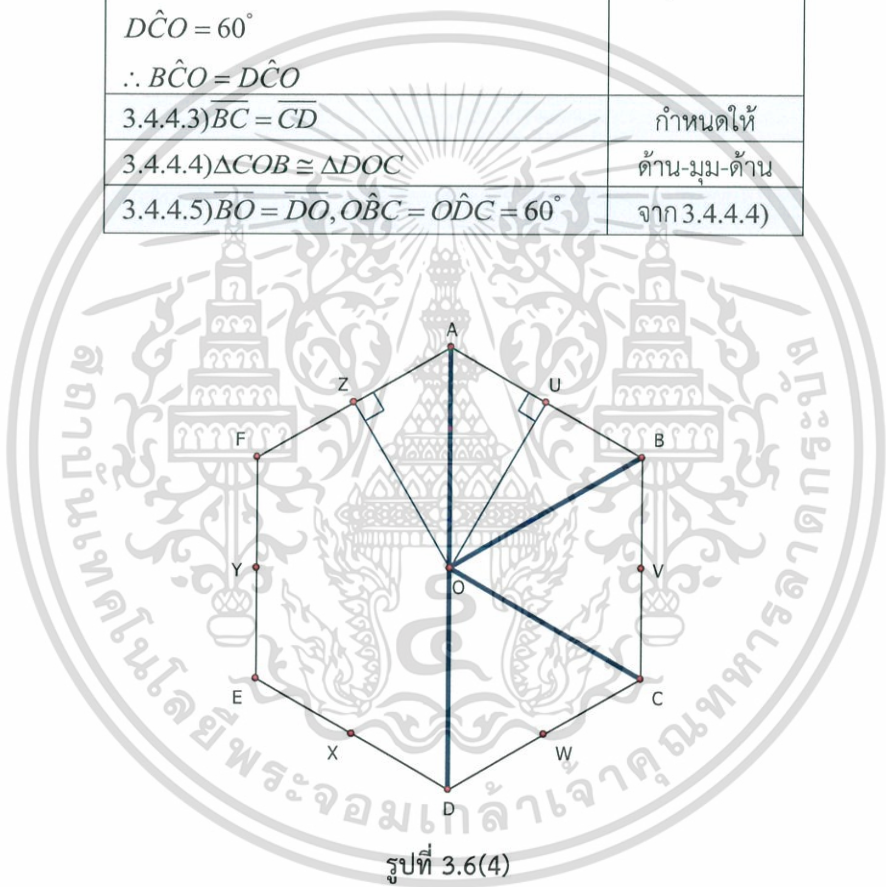
ข้อความ	เหตุผล
3.4.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.4.3.2) $\hat{A}BO = 60^\circ, \hat{ABC} = 120^\circ$ $\hat{ABC} = \hat{ABO} + \hat{CBO}$ $120^\circ = 60^\circ + \hat{CBO}$ $\hat{CBO} = 60^\circ$ $\therefore \hat{ABO} = \hat{CBO}$	มุมเท่ากัน
3.4.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.4.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.4.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}, \hat{OAB} = \hat{OCB} = 60^\circ$	จาก 3.4.3.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle COB \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.6(4)

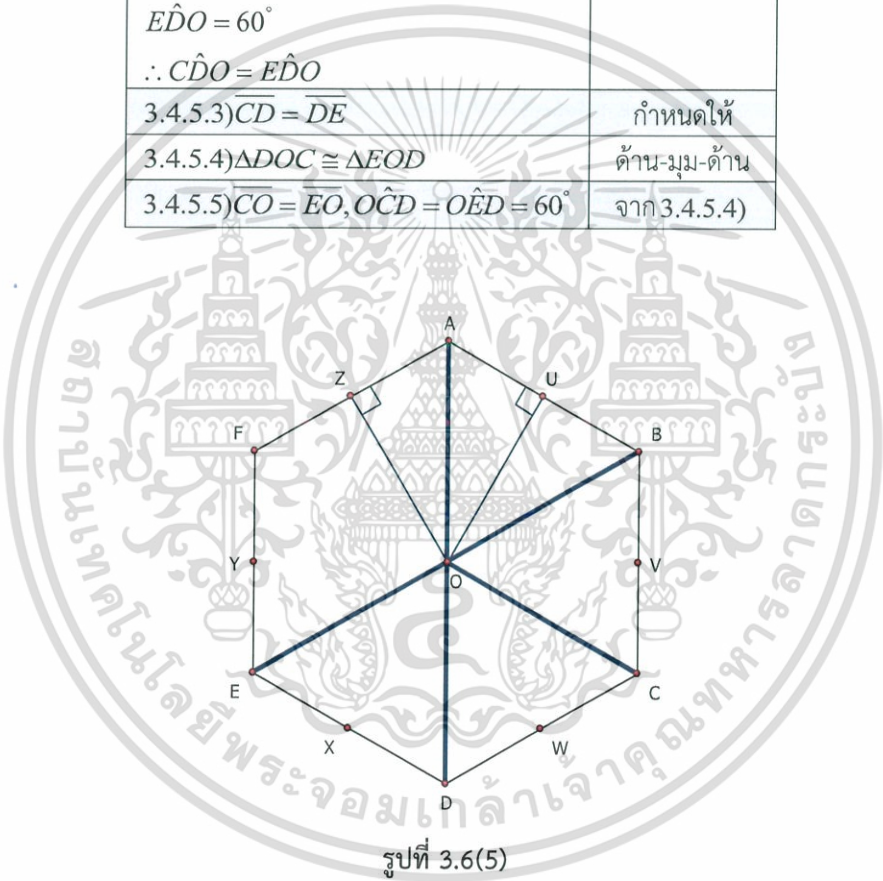
ข้อความ	เหตุผล
3.4.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.4.4.2) $\widehat{BCO} = 60^\circ, \widehat{BCD} = 120^\circ$ $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{DCO}$ $120^\circ = 60^\circ + \widehat{DCO}$ $\widehat{DCO} = 60^\circ$ $\therefore \widehat{BCO} = \widehat{DCO}$	มุมเท่ากัน
3.4.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.4.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.4.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, \widehat{OBC} = \widehat{ODC} = 60^\circ$	จาก 3.4.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.5) ลากเส้น $\overline{EO}$ จะได้ $\triangle EOD$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle DOC \cong \triangle EOD$ ดังรูปที่ 3.6(5)

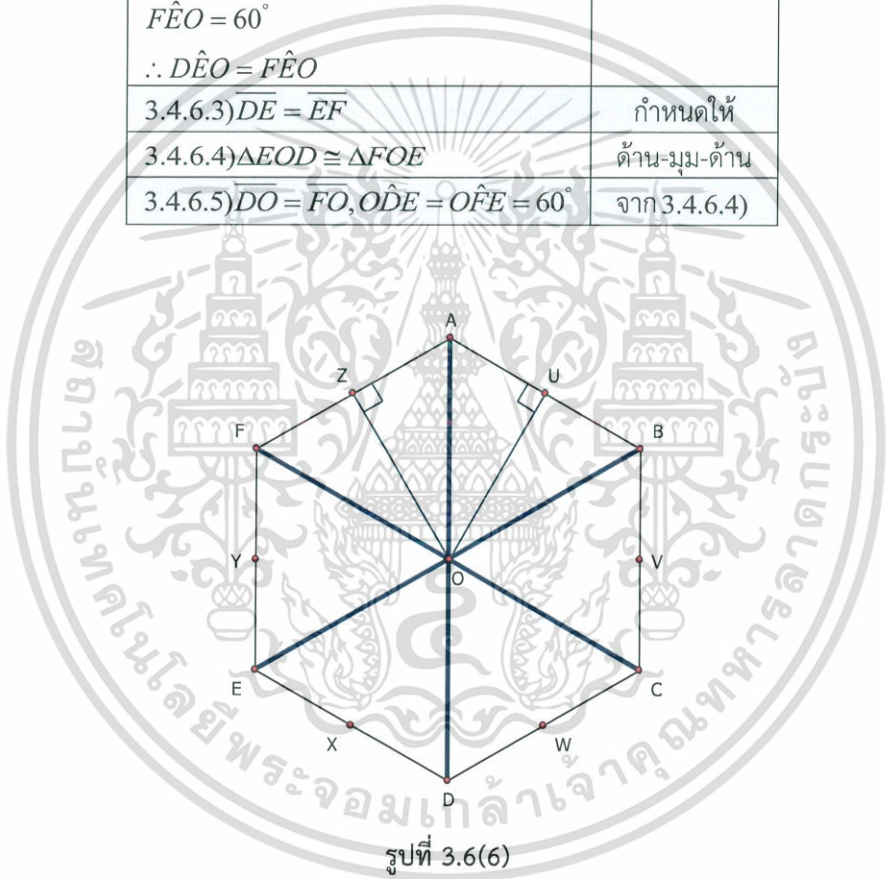
ข้อความ	เหตุผล
3.4.5.1) $\overline{DO}$	ด้านร่วม
3.4.5.2) $\angle C\hat{D}O = 60^\circ, \angle C\hat{D}E = 120^\circ$ $\angle C\hat{D}E = \angle C\hat{D}O + \angle E\hat{D}O$ $120^\circ = 60^\circ + \angle E\hat{D}O$ $\angle E\hat{D}O = 60^\circ$ $\therefore \angle C\hat{D}O = \angle E\hat{D}O$	มุมเท่ากัน
3.4.5.3) $\overline{CD} = \overline{DE}$	กำหนดให้
3.4.5.4) $\triangle DOC \cong \triangle EOD$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.4.5.5) $\overline{CO} = \overline{EO}, \angle O\hat{C}D = \angle O\hat{E}D = 60^\circ$	จาก 3.4.5.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.6) ลากเส้น $\overline{FO}$ จะได้ $\triangle FOE$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle EOD \cong \triangle FOE$ ดังรูปที่ 3.6(6)

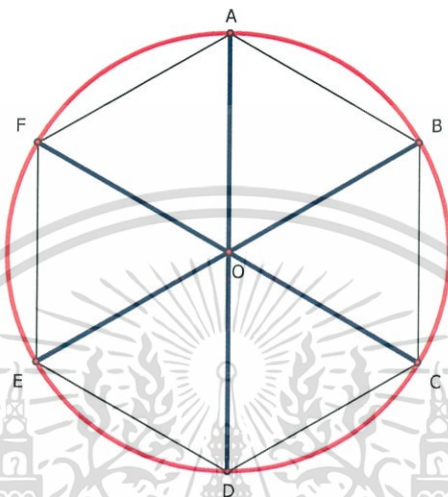
ข้อความ	เหตุผล
3.4.6.1) $\overline{EO}$	ด้านร่วม
3.4.6.2) $\widehat{DEO} = 60^\circ, \widehat{DEF} = 120^\circ$ $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{FEO}$ $120^\circ = 60^\circ + \widehat{FEO}$ $\widehat{FEO} = 60^\circ$ $\therefore \widehat{DEO} = \widehat{FEO}$	มุมเท่ากัน
3.4.6.3) $\overline{DE} = \overline{EF}$	กำหนดให้
3.4.6.4) $\triangle EOD \cong \triangle FOE$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.4.6.5) $\overline{DO} = \overline{FO}, \widehat{ODE} = \widehat{OFE} = 60^\circ$	จาก 3.4.6.4)



รูปที่ 3.6(6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

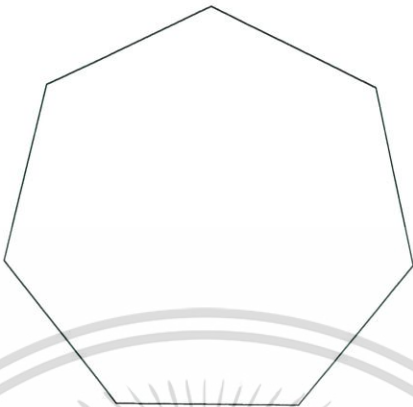
จาก 3.4.2.5), 3.4.3.5), 3.4.4.5), 3.4.5.5), 3.4.6.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO}$
ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบหกเหลี่ยม $ABCEDF$
และ O เป็นจุดศูนย์กลางของหกเหลี่ยมด้านเท่า $ABCEDF$



รูปที่ 3.6(7) วงกลมล้อมรอบรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.7 เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า

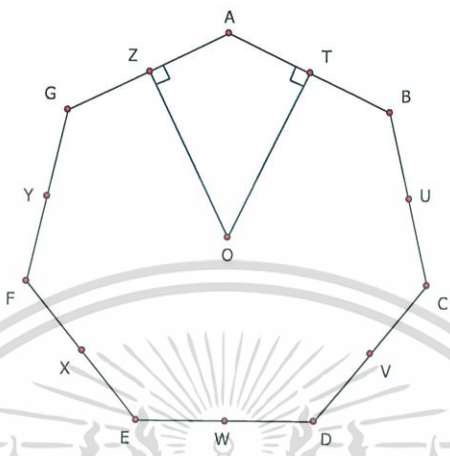
กำหนดให้

- เจ็ดเหลี่ยม $ABCDEFG$ เป็นเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า
 - T, U, V, W, X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}$ และ $\overline{GA}$ ตามลำดับ
- จะได้ว่า
- $$\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AB}$$
- $$\overline{BU} + \overline{UC} = \overline{BC}$$
- $$\overline{CV} + \overline{VD} = \overline{CD}$$
- $$\overline{DW} + \overline{WE} = \overline{DE}$$
- $$\overline{EX} + \overline{XF} = \overline{EF}$$
- $$\overline{FY} + \overline{YG} = \overline{FG}$$
- $$\overline{GZ} + \overline{ZA} = \overline{GA}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด T และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AG}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.7.1

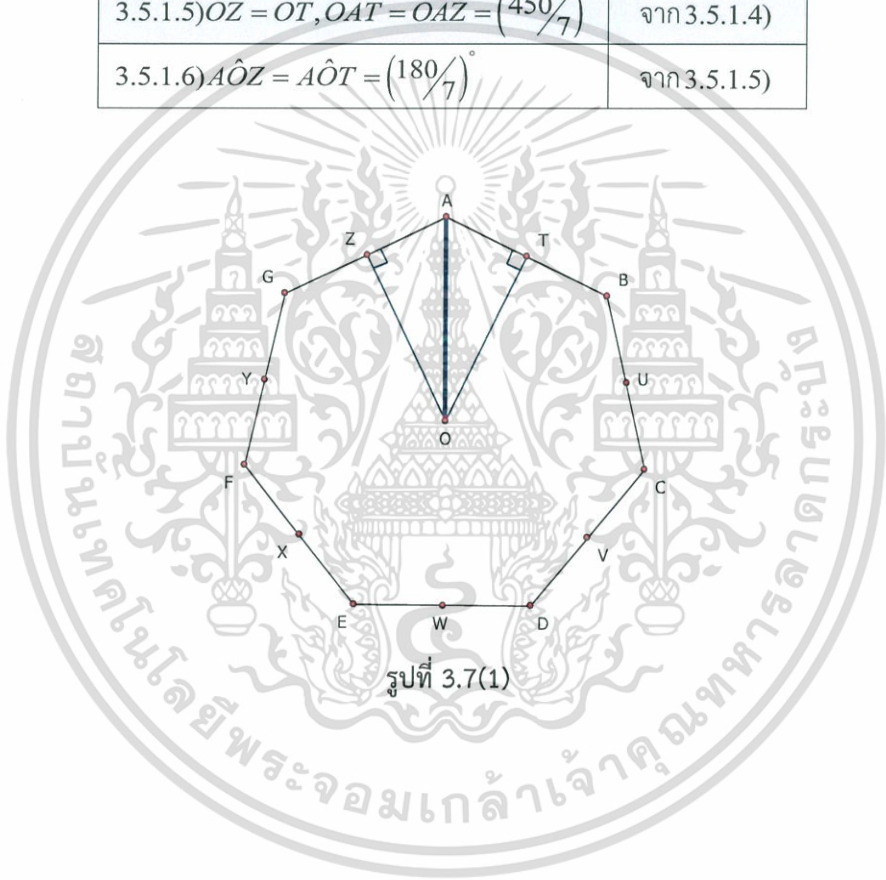


รูปที่ 3.7.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO}$
แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
พิสูจน์ เนื่องจาก $\widehat{GAB} = \left(\frac{900}{7}\right)^{\circ}$, $\widehat{ATO} = 90^{\circ}$, $\widehat{AZO} = 90^{\circ}$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°
เพราะฉะนั้น $\widehat{GAB} + \widehat{ATO} + \widehat{AZO} + \widehat{TÔZ} = 360^{\circ}$
 $\left(\frac{900}{7}\right)^{\circ} + 90^{\circ} + 90^{\circ} + \widehat{TÔZ} = 360^{\circ}$
 $\widehat{TÔZ} = \left(\frac{360}{7}\right)^{\circ}$

3.5.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $ATOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AZO \cong \triangle ATO$ ดังรูปที่ 3.7(1)

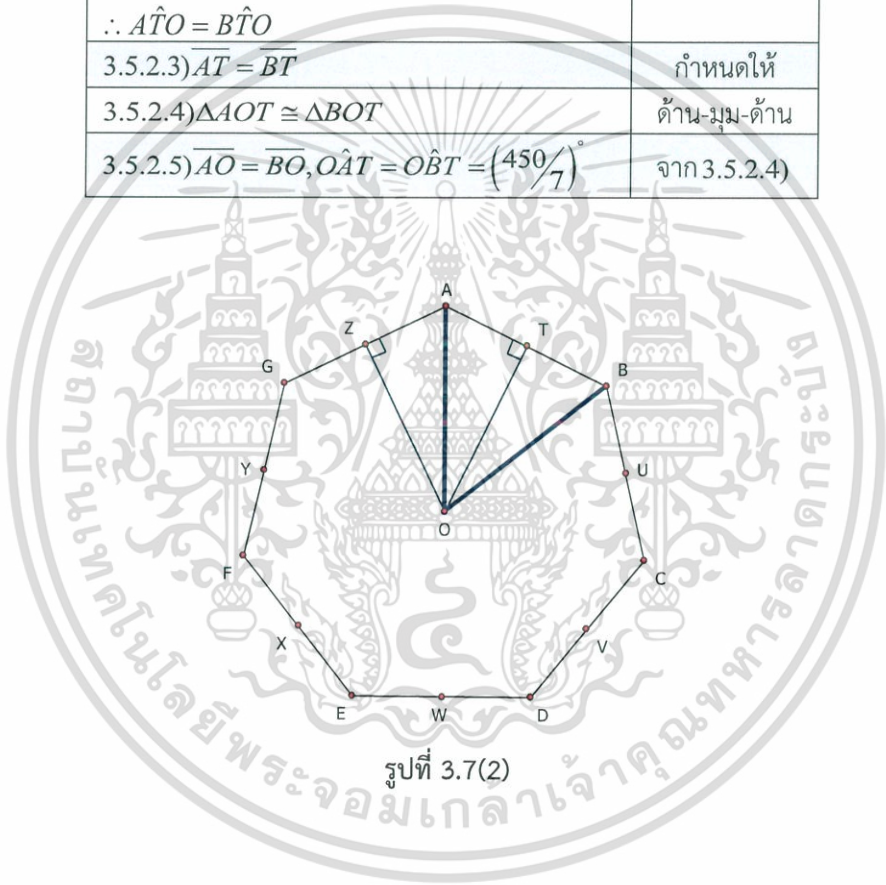
ข้อความ	เหตุผล
3.5.1.1) $\hat{A}TO = \hat{A}ZO = 90^\circ$	มุมฉาก
3.5.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.5.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AT}$	กำหนดให้
3.5.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle ATO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.5.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OT}, \hat{OAT} = \hat{OAZ} = (450/7)^\circ$	จาก 3.5.1.4)
3.5.1.6) $\hat{AOZ} = \hat{AOT} = (180/7)^\circ$	จาก 3.5.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOT$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOT \cong \triangle BOT$ ดังรูปที่ 3.7(2)

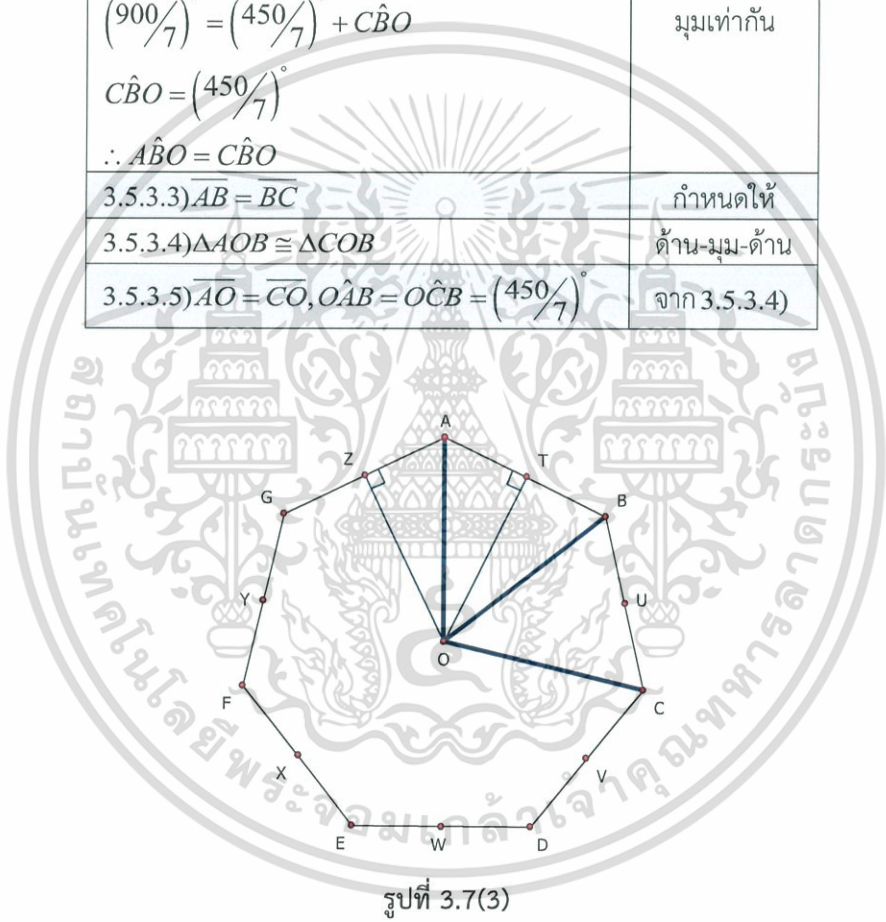
ข้อความ	เหตุผล
3.5.2.1) $\overline{OT}$	ด้านร่วม
3.5.2.2) $\hat{A}TO = 90^\circ$ $\hat{A}TO + \hat{B}TO = 180^\circ$ $\hat{B}TO = 90^\circ$ $\therefore \hat{A}TO = \hat{B}TO$	มุมเท่ากัน
3.5.2.3) $\overline{AT} = \overline{BT}$	กำหนดให้
3.5.2.4) $\triangle AOT \cong \triangle BOT$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \hat{OAT} = \hat{OBT} = \left(450/7\right)^\circ$	จาก 3.5.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ดังรูปที่ 3.7(3)

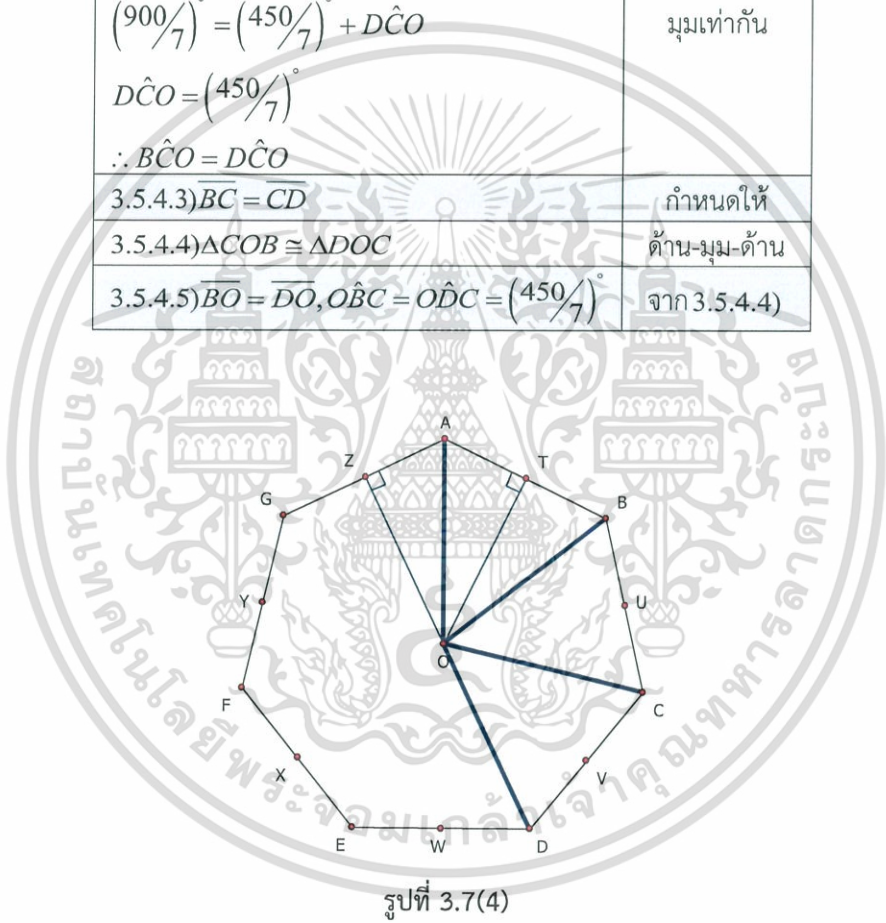
ข้อความ	เหตุผล
3.5.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.5.3.2) $\widehat{ABO} = \left(450/7\right)^{\circ}, \widehat{ABC} = \left(900/7\right)^{\circ}$ $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO}$ $\left(900/7\right)^{\circ} = \left(450/7\right)^{\circ} + \widehat{CBO}$ $\widehat{CBO} = \left(450/7\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{ABO} = \widehat{CBO}$	มุมเท่ากัน
3.5.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.5.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}, \widehat{OAB} = \widehat{OCB} = \left(450/7\right)^{\circ}$	จาก 3.5.3.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle COB \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.7(4)

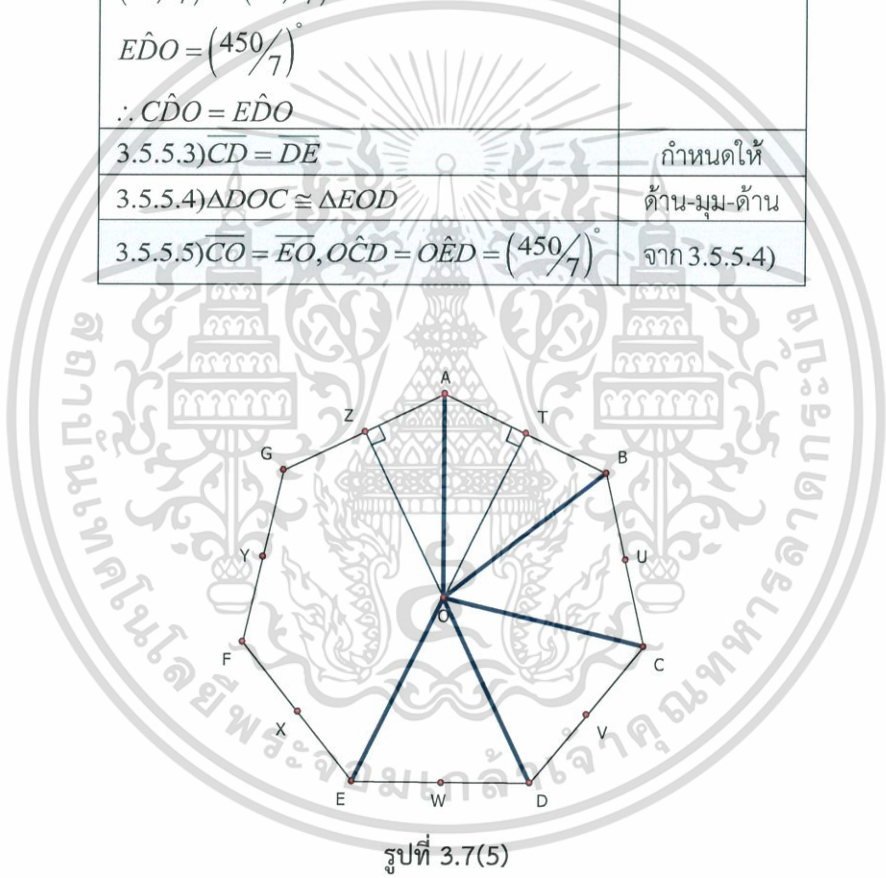
ข้อความ	เหตุผล
3.5.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.5.4.2) $B\hat{C}O = \left(450/7\right)^{\circ}, B\hat{C}D = \left(900/7\right)^{\circ}$ $B\hat{C}D = B\hat{C}O + D\hat{C}O$ $\left(900/7\right)^{\circ} = \left(450/7\right)^{\circ} + D\hat{C}O$ $D\hat{C}O = \left(450/7\right)^{\circ}$ $\therefore B\hat{C}O = D\hat{C}O$	มุมเท่ากัน
3.5.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.5.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, O\hat{B}C = O\hat{D}C = \left(450/7\right)^{\circ}$	จาก 3.5.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.6) ลากเส้น $\overline{EO}$ จะได้ $\triangle EOD$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle DOC \cong \triangle EOD$ ดังรูปที่ 3.7(5)

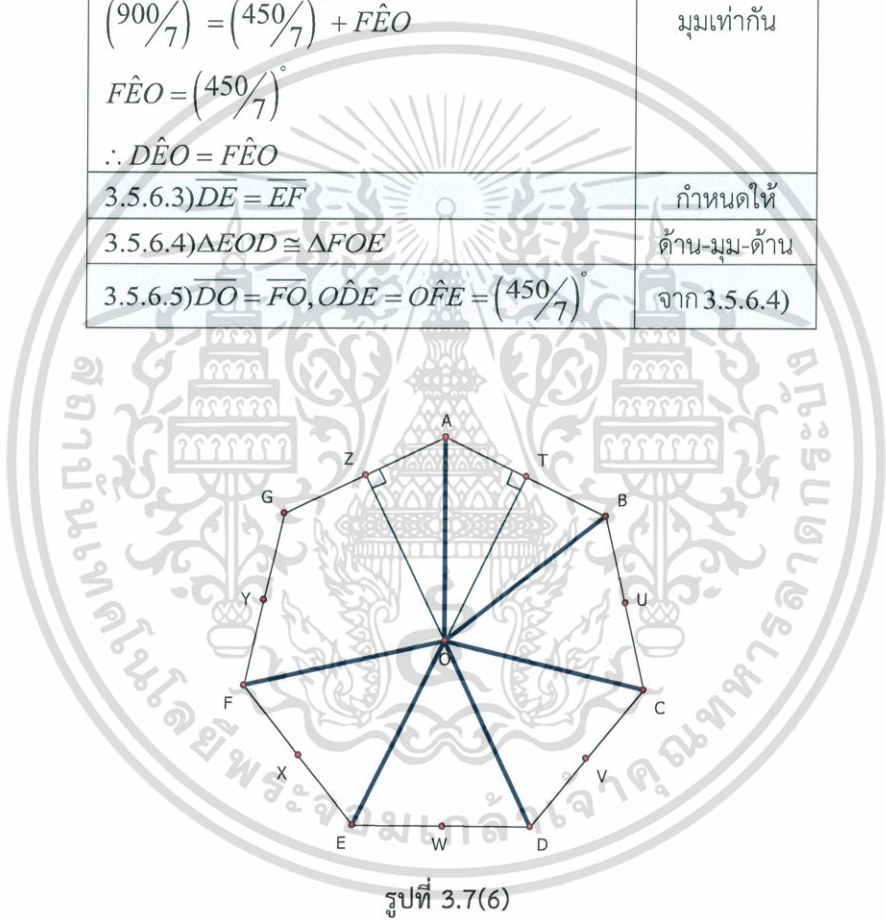
ข้อความ	เหตุผล
3.5.5.1) $\overline{DO}$	ด้านร่วม
3.5.5.2) $\widehat{CDO} = \left(450/7\right)^{\circ}, \widehat{CDE} = \left(900/7\right)^{\circ}$ $\widehat{CDE} = \widehat{CDO} + \widehat{EDO}$ $\left(900/7\right)^{\circ} = \left(450/7\right)^{\circ} + \widehat{EDO}$ $\widehat{EDO} = \left(450/7\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{CDO} = \widehat{EDO}$	มุมเท่ากัน
3.5.5.3) $\overline{CD} = \overline{DE}$	กำหนดให้
3.5.5.4) $\triangle DOC \cong \triangle EOD$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.5.5) $\overline{CO} = \overline{EO}, \widehat{OCD} = \widehat{OED} = \left(450/7\right)^{\circ}$	จาก 3.5.5.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.7) ลากเส้น $\overline{FO}$ จะได้ $\triangle FOE$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle EOD \cong \triangle FOE$ ดังรูปที่ 3.7(6)

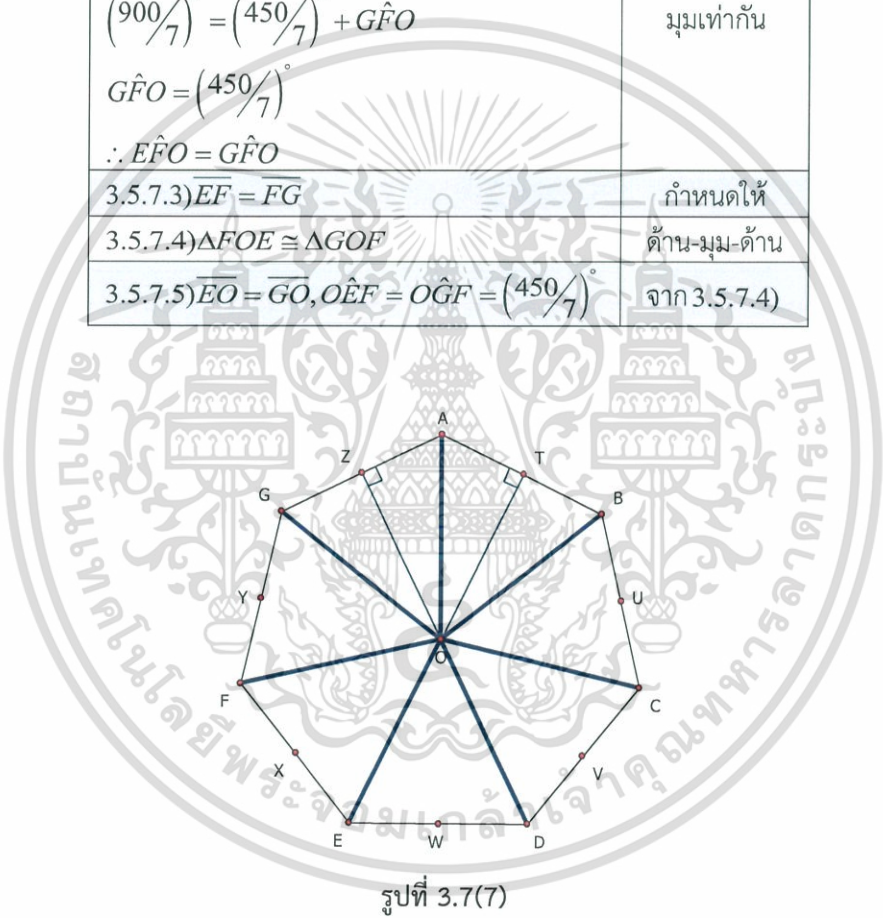
ข้อความ	เหตุผล
3.5.6.1) $\overline{EO}$	ด้านร่วม
3.5.6.2) $\widehat{DEO} = \left(450/7\right)^{\circ}, \widehat{DEF} = \left(900/7\right)^{\circ}$ $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{FEO}$ $\left(900/7\right)^{\circ} = \left(450/7\right)^{\circ} + \widehat{FEO}$ $\widehat{FEO} = \left(450/7\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{DEO} = \widehat{FEO}$	มุมเท่ากัน
3.5.6.3) $\overline{DE} = \overline{EF}$	กำหนดให้
3.5.6.4) $\triangle EOD \cong \triangle FOE$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.6.5) $\overline{DO} = \overline{FO}, \widehat{ODE} = \widehat{OFE} = \left(450/7\right)^{\circ}$	จาก 3.5.6.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.8) ลากเส้น $\overline{GO}$ จะได้ $\triangle GOF$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle FOE \cong \triangle GOF$ ดังรูปที่ 3.7(7)

ข้อความ	เหตุผล
3.5.7.1) $\overline{FO}$	ด้านร่วม
3.5.7.2) $E\hat{F}O = \left(450/7\right)^{\circ}, E\hat{F}G = \left(900/7\right)^{\circ}$ $E\hat{F}G = E\hat{F}O + G\hat{F}O$ $\left(900/7\right)^{\circ} = \left(450/7\right)^{\circ} + G\hat{F}O$ $G\hat{F}O = \left(450/7\right)^{\circ}$ $\therefore E\hat{F}O = G\hat{F}O$	มุมเท่ากัน
3.5.7.3) $\overline{EF} = \overline{FG}$	กำหนดให้
3.5.7.4) $\triangle FOE \cong \triangle GOF$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.5.7.5) $\overline{EO} = \overline{GO}, O\hat{E}F = O\hat{G}F = \left(450/7\right)^{\circ}$	จาก 3.5.7.4)

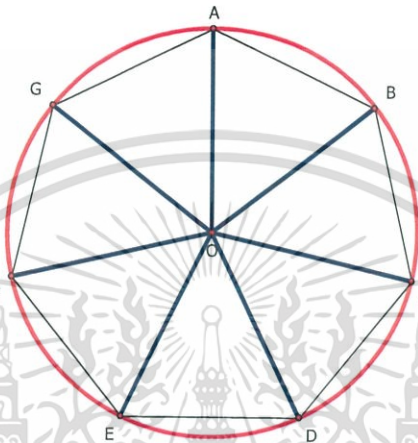


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก 3.5.2.5), 3.5.3.5), 3.5.4.5), 3.5.5.5), 3.5.6.5), 3.5.7.5)

จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO}$

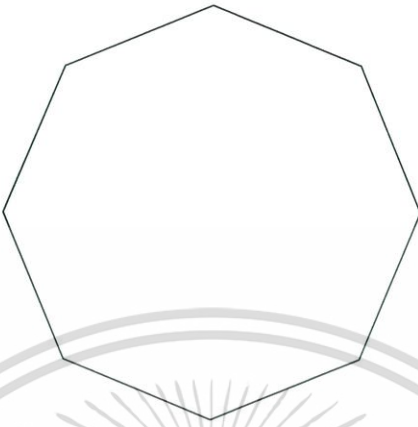
ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบเจ็ดเหลี่ยม $ABCDEFG$ และ O เป็นจุดศูนย์กลางของเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า $ABCDEFG$



รูปที่ 3.7(8) วงกลมล้อมรอบรูปเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบแปดเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3.8 แปดเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

- แปดเหลี่ยม $ABCDEFGH$ เป็นแปดเหลี่ยมด้านเท่า
- S, T, U, V, W, X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ และ $\overline{HA}$ ตามลำดับ

จะได้

$$\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AB}$$

$$\overline{BT} + \overline{TC} = \overline{BC}$$

$$\overline{CU} + \overline{UD} = \overline{CD}$$

$$\overline{DV} + \overline{VE} = \overline{DE}$$

$$\overline{EW} + \overline{WF} = \overline{EF}$$

$$\overline{FX} + \overline{XG} = \overline{FG}$$

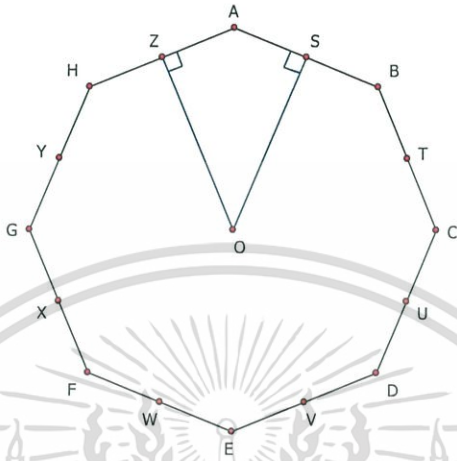
$$\overline{GY} + \overline{YH} = \overline{GH}$$

$$\overline{HZ} + \overline{ZA} = \overline{HA}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด S และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AH}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.8.1

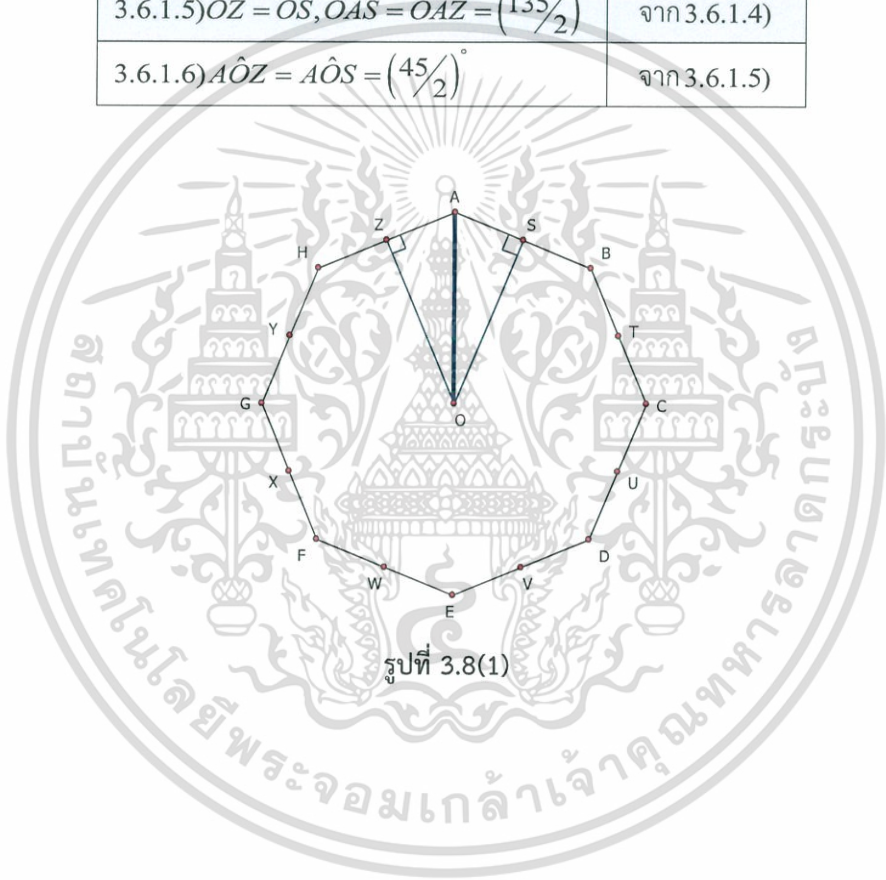


รูปที่ 3.8.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO} = \overline{HO}$
แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}, \overline{HO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
พิสูจน์ เนื่องจาก $\widehat{HAB} = 135^\circ, \widehat{ASO} = 90^\circ, \widehat{AZO} = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°
เพราะฉะนั้น $\widehat{HAB} + \widehat{ASO} + \widehat{AZO} + \widehat{SOZ} = 360^\circ$
 $135^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \widehat{SOZ} = 360^\circ$
 $\widehat{SOZ} = 45^\circ$

3.6.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $ASOZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AZO \cong \triangle ASO$ ดังรูปที่ 3.8(1)

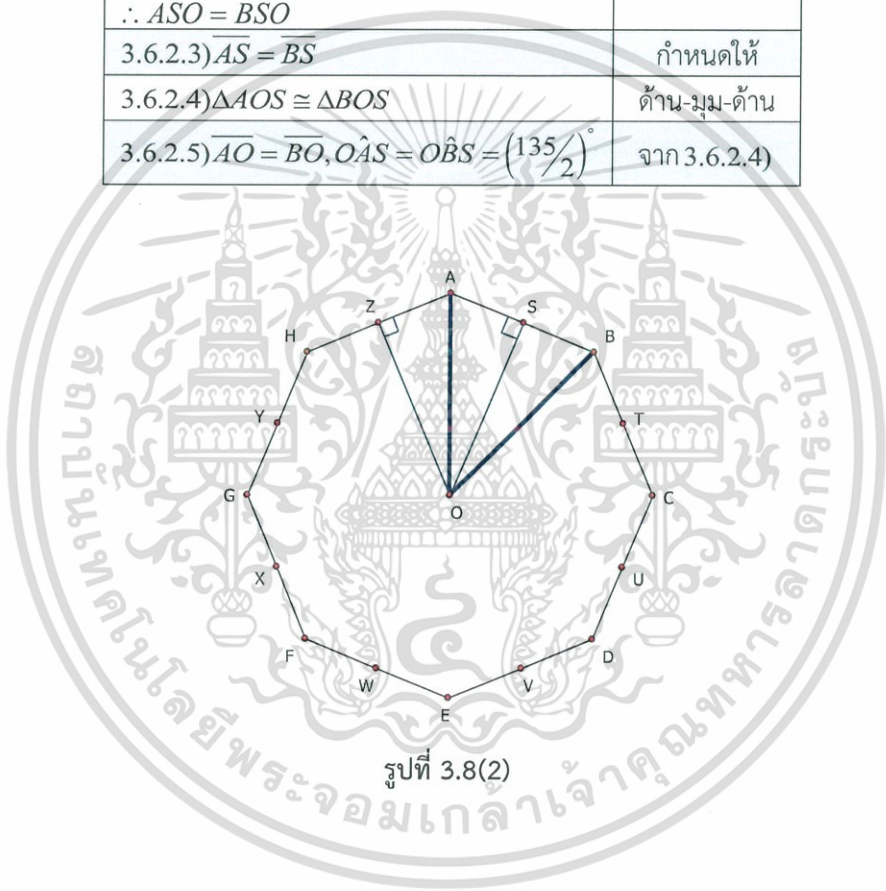
ข้อความ	เหตุผล
3.6.1.1) $\widehat{ASO} = \widehat{AZO} = 90^\circ$	มุมฉาก
3.6.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.6.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AS}$	กำหนดให้
3.6.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle ASO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.6.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OS}, \widehat{OAS} = \widehat{OAZ} = \left(135/2\right)^\circ$	จาก 3.6.1.4)
3.6.1.6) $\widehat{AOZ} = \widehat{AOS} = \left(45/2\right)^\circ$	จาก 3.6.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOS$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOS \cong \triangle BOS$ ดังรูปที่ 3.8(2)

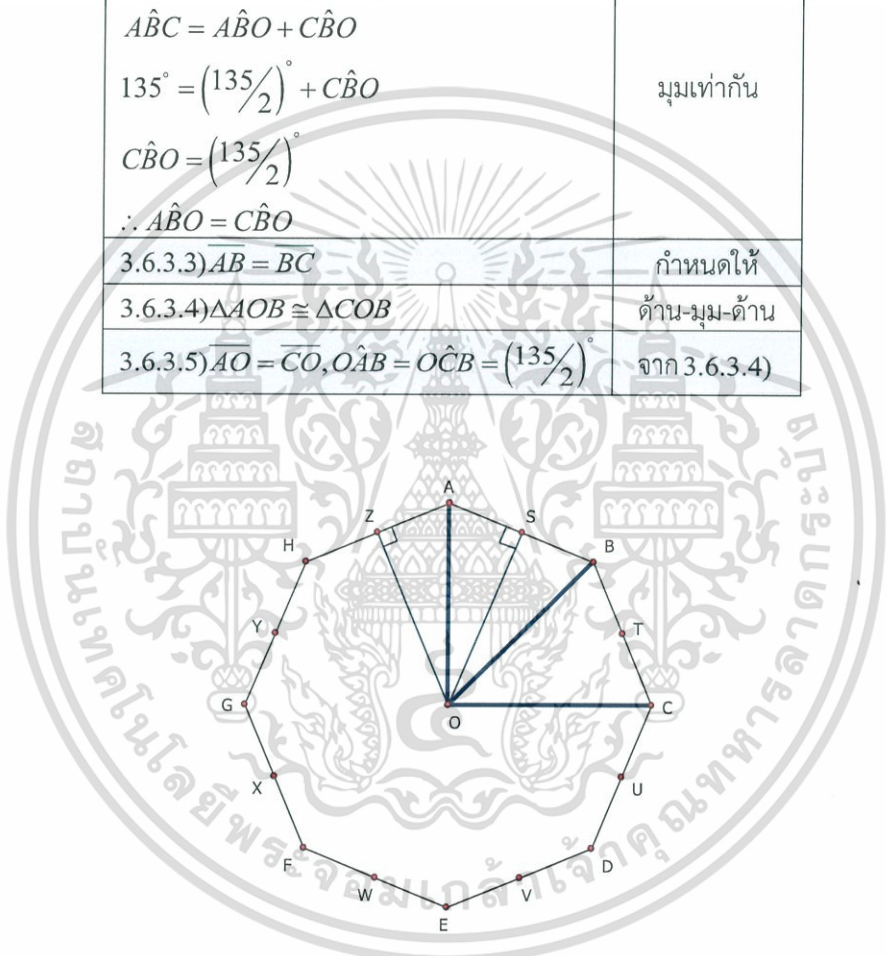
ข้อความ	เหตุผล
3.6.2.1) $\overline{OS}$	ด้านร่วม
3.6.2.2) $\angle ASO = 90^\circ$ $\angle ASO + \angle BSO = 180^\circ$ $\angle BSO = 90^\circ$ $\therefore \angle ASO = \angle BSO$	มุมเท่ากัน
3.6.2.3) $\overline{AS} = \overline{BS}$	กำหนดให้
3.6.2.4) $\triangle AOS \cong \triangle BOS$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \angle OAS = \angle OBS = \left(135\frac{1}{2}\right)^\circ$	จาก 3.6.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ดังรูปที่ 3.8(3)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.6.3.2) $\widehat{ABO} = \left(135 \div 2\right)^{\circ}$, $\widehat{ABC} = 135^{\circ}$ $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO}$ $135^{\circ} = \left(135 \div 2\right)^{\circ} + \widehat{CBO}$ $\widehat{CBO} = \left(135 \div 2\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{ABO} = \widehat{CBO}$	มุมเท่ากัน
3.6.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.6.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\widehat{OAB} = \widehat{OCB} = \left(135 \div 2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.3.4)

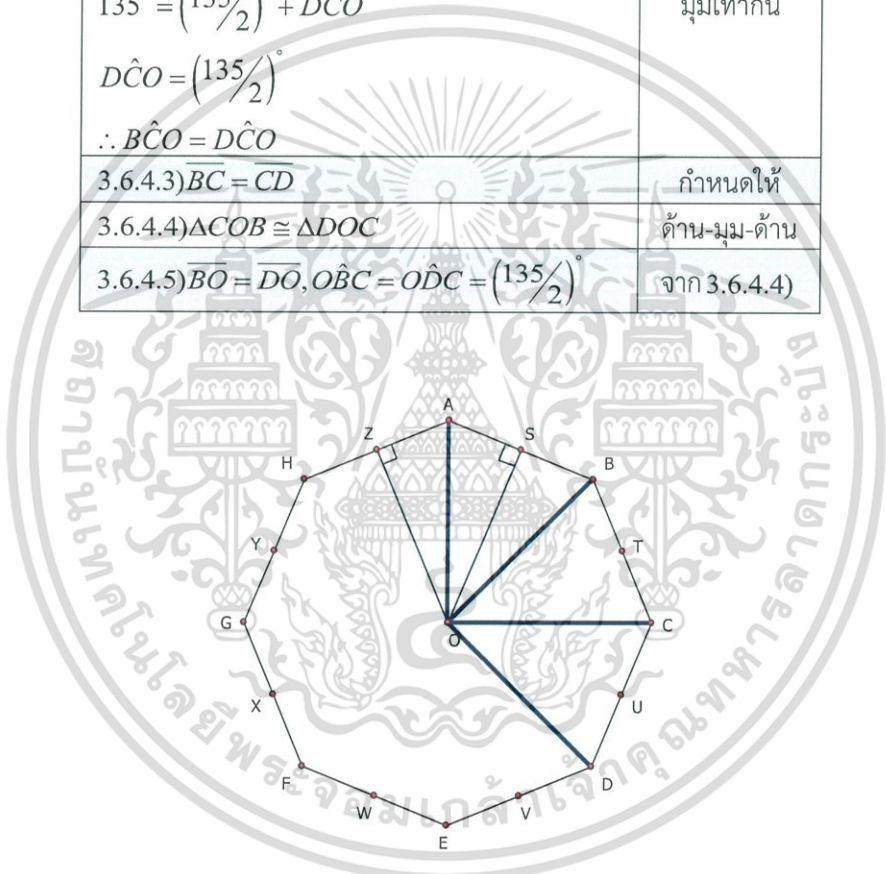


รูปที่ 3.8(3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle COB \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.8(4)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.6.4.2) $\widehat{BCO} = \left(135/2\right)^{\circ}, \widehat{BCD} = 135^{\circ}$ $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{DCO}$ $135^{\circ} = \left(135/2\right)^{\circ} + \widehat{DCO}$ $\widehat{DCO} = \left(135/2\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{BCO} = \widehat{DCO}$	มุมเท่ากัน
3.6.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.6.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, \widehat{OBC} = \widehat{ODC} = \left(135/2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.4.4)

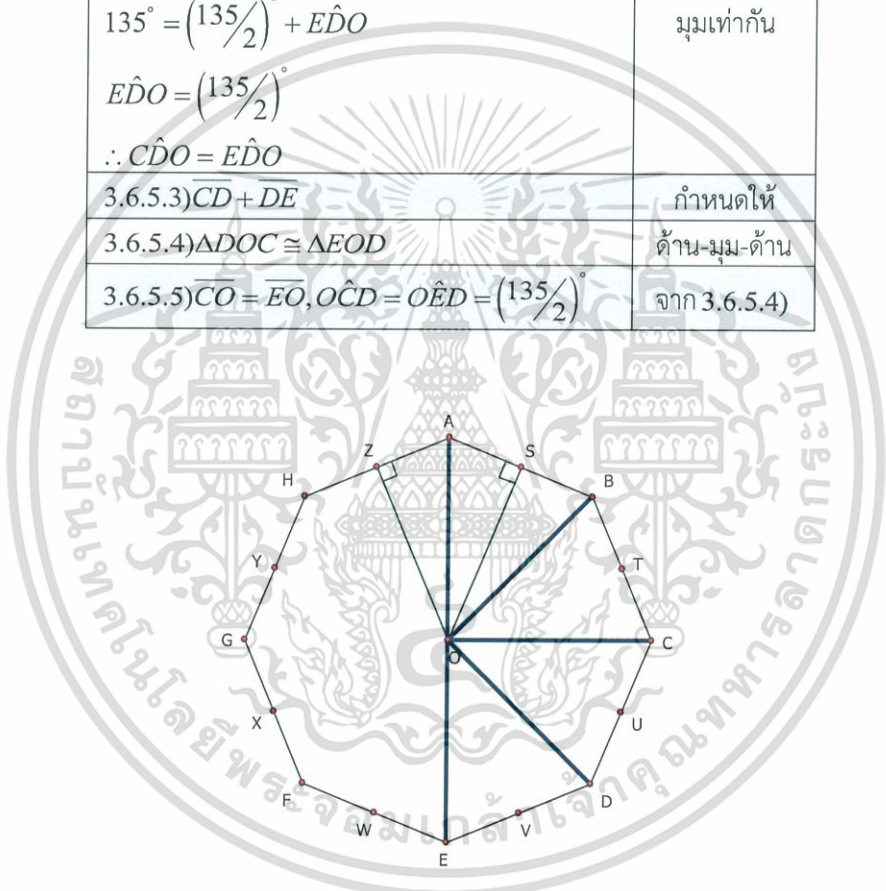


รูปที่ 3.8(4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.5) ลากเส้น $\overline{EO}$ จะได้ $\triangle EOD$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle DOC \cong \triangle EOD$ ดังรูปที่ 3.8(5)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.5.1) $\overline{DO}$	ด้านร่วม
3.6.5.2) $\widehat{CDO} = \left(135/2\right)^{\circ}, \widehat{CDE} = 135^{\circ}$ $\widehat{CDE} = \widehat{CDO} + \widehat{EDO}$ $135^{\circ} = \left(135/2\right)^{\circ} + \widehat{EDO}$ $\widehat{EDO} = \left(135/2\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{CDO} = \widehat{EDO}$	มุมเท่ากัน
3.6.5.3) $\overline{CD} + \overline{DE}$	กำหนดให้
3.6.5.4) $\triangle DOC \cong \triangle EOD$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.5.5) $\overline{CO} = \overline{EO}, \widehat{OCD} = \widehat{OED} = \left(135/2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.5.4)

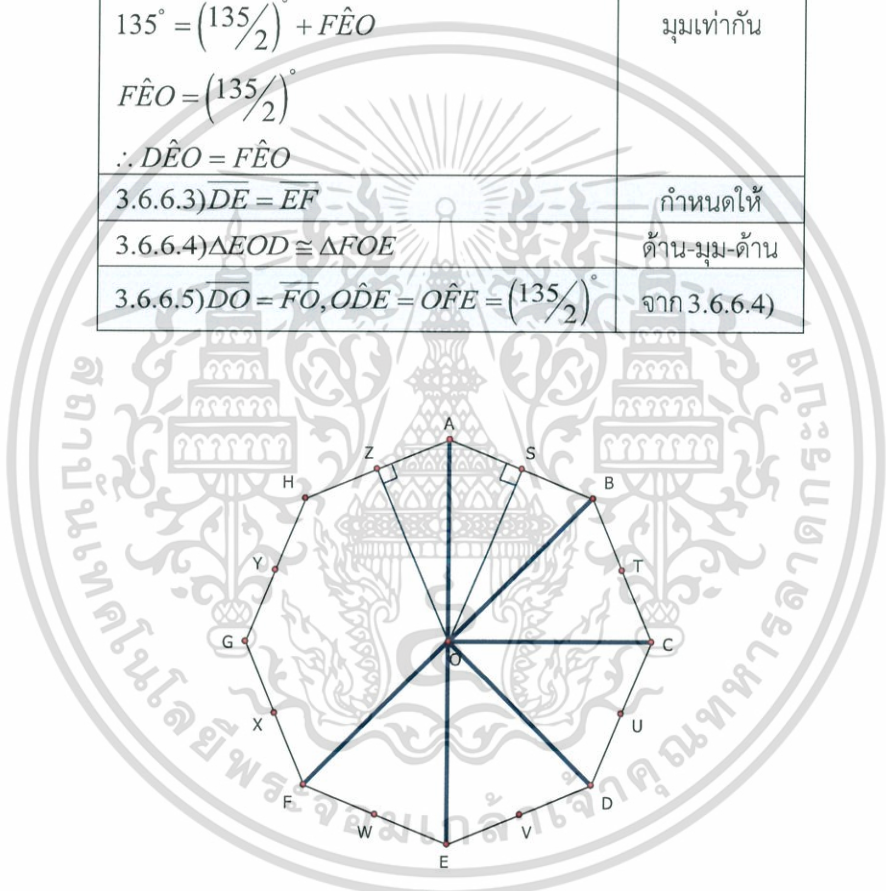


รูปที่ 3.8(5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.6) ลากเส้น $\overline{FO}$ จะได้ $\triangle FOE$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle EOD \cong \triangle FOE$ ดังรูปที่ 3.8(6)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.6.1) $\overline{EO}$	ด้านร่วม
3.6.6.2) $\widehat{DEO} = \left(135/2\right)^{\circ}, \widehat{DEF} = 135^{\circ}$ $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{FEO}$ $135^{\circ} = \left(135/2\right)^{\circ} + \widehat{FEO}$ $\widehat{FEO} = \left(135/2\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{DEO} = \widehat{FEO}$	มุมเท่ากัน
3.6.6.3) $\overline{DE} = \overline{EF}$	กำหนดให้
3.6.6.4) $\triangle EOD \cong \triangle FOE$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.6.5) $\overline{DO} = \overline{FO}, \widehat{ODE} = \widehat{OFE} = \left(135/2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.6.4)

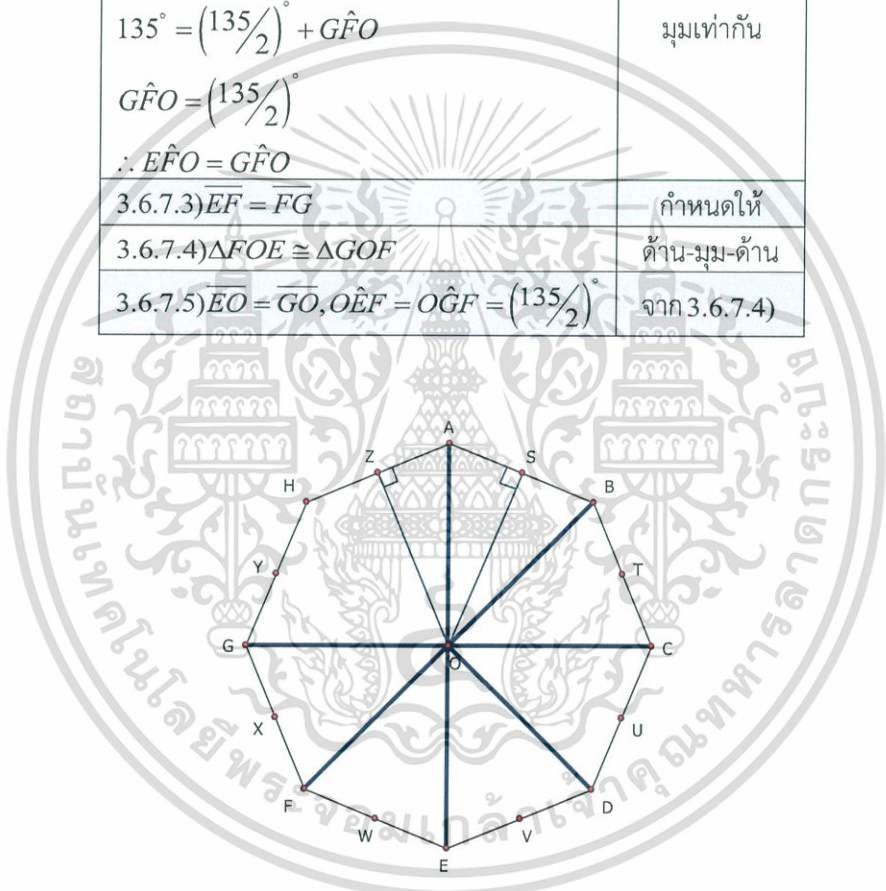


รูปที่ 3.8(6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.7) ลากเส้น $\overline{GO}$ จะได้ $\triangle GOF$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle FOE \cong \triangle GOF$ ดังรูปที่ 3.8(7)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.7.1) $\overline{FO}$	ด้านร่วม
3.6.7.2) $E\hat{F}O = \left(135/2\right)^{\circ}, E\hat{F}G = 135^{\circ}$ $E\hat{F}G = E\hat{F}O + G\hat{F}O$ $135^{\circ} = \left(135/2\right)^{\circ} + G\hat{F}O$ $G\hat{F}O = \left(135/2\right)^{\circ}$ $\therefore E\hat{F}O = G\hat{F}O$	มุมเท่ากัน
3.6.7.3) $\overline{EF} = \overline{FG}$	กำหนดให้
3.6.7.4) $\triangle FOE \cong \triangle GOF$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.7.5) $\overline{EO} = \overline{GO}, O\hat{E}F = O\hat{G}F = \left(135/2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.7.4)

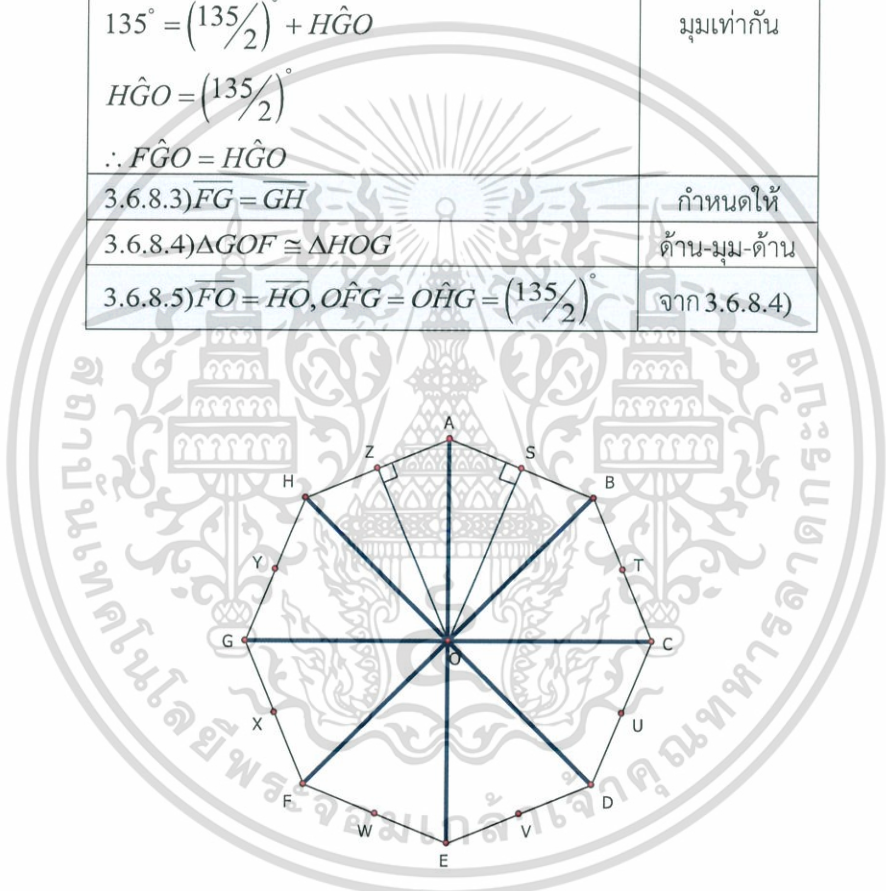


รูปที่ 3.8(7)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6.8) ลากเส้น $\overline{HO}$ จะได้ $\triangle HOG$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle GOF \cong \triangle HOG$ ดังรูปที่ 3.8(8)

ข้อความ	เหตุผล
3.6.8.1) $\overline{GO}$	ด้านร่วม
3.6.8.2) $\widehat{FGO} = \left(135/2\right)^{\circ}, \widehat{F\hat{G}H} = 135^{\circ}$ $\widehat{F\hat{G}H} = \widehat{FGO} + \widehat{HGO}$ $135^{\circ} = \left(135/2\right)^{\circ} + \widehat{HGO}$ $\widehat{HGO} = \left(135/2\right)^{\circ}$ $\therefore \widehat{FGO} = \widehat{HGO}$	มุมเท่ากัน
3.6.8.3) $\overline{FG} = \overline{GH}$	กำหนดให้
3.6.8.4) $\triangle GOF \cong \triangle HOG$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.6.8.5) $\overline{FO} = \overline{HO}, \widehat{O\hat{F}G} = \widehat{O\hat{H}G} = \left(135/2\right)^{\circ}$	จาก 3.6.8.4)



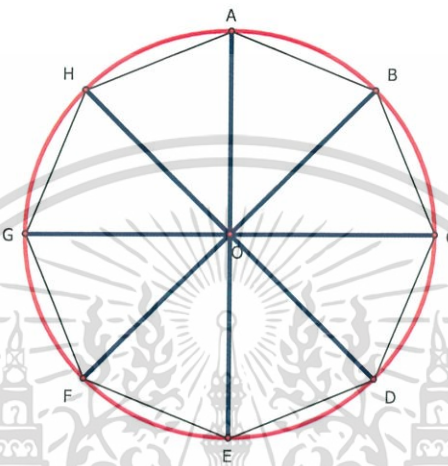
รูปที่ 3.8(8)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก 3.6.2.5), 3.6.3.5), 3.6.4.5), 3.6.5.5), 3.6.6.5), 3.6.7.5), 3.6.8.5)

จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO} = \overline{HO}$

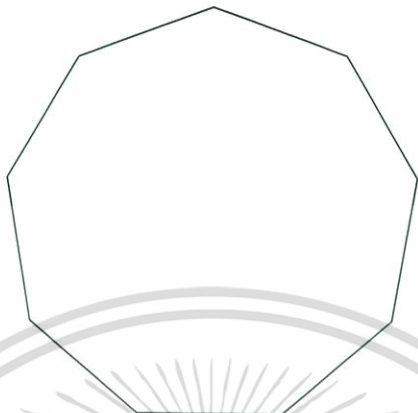
ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}, \overline{HO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบแปดเหลี่ยม
 $ABCDEFGH$ และ O เป็นจุดศูนย์กลางของแปดเหลี่ยมด้านเท่า $ABCDEFGH$



รูปที่ 3.8(9) วงกลมล้อมรอบรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7) การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบเก้าเหลี่ยมด้านเท่า



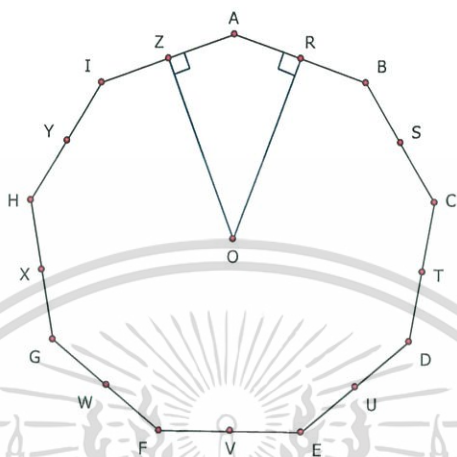
รูปที่ 3.9 เก้าเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้

- เก้าเหลี่ยม $ABCDEFGHI$ เป็นเก้าเหลี่ยมด้านเท่า
 - $R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HI}$ และ $\overline{IA}$ ตามลำดับ
- จะได้ว่า
- $$\begin{aligned}\overline{AR} + \overline{RB} &= \overline{AB} \\ \overline{BS} + \overline{SC} &= \overline{BC} \\ \overline{CT} + \overline{TD} &= \overline{CD} \\ \overline{DU} + \overline{UE} &= \overline{DE} \\ \overline{EV} + \overline{VF} &= \overline{EF} \\ \overline{FW} + \overline{WG} &= \overline{FG} \\ \overline{GX} + \overline{XH} &= \overline{GH} \\ \overline{HY} + \overline{YI} &= \overline{HI} \\ \overline{IZ} + \overline{ZA} &= \overline{IA}\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์
ลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AB}$ ที่จุด R และลากเส้นตั้งฉาก $\overline{AI}$ ที่จุด Z ให้เส้นทั้งสองตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 3.9.1

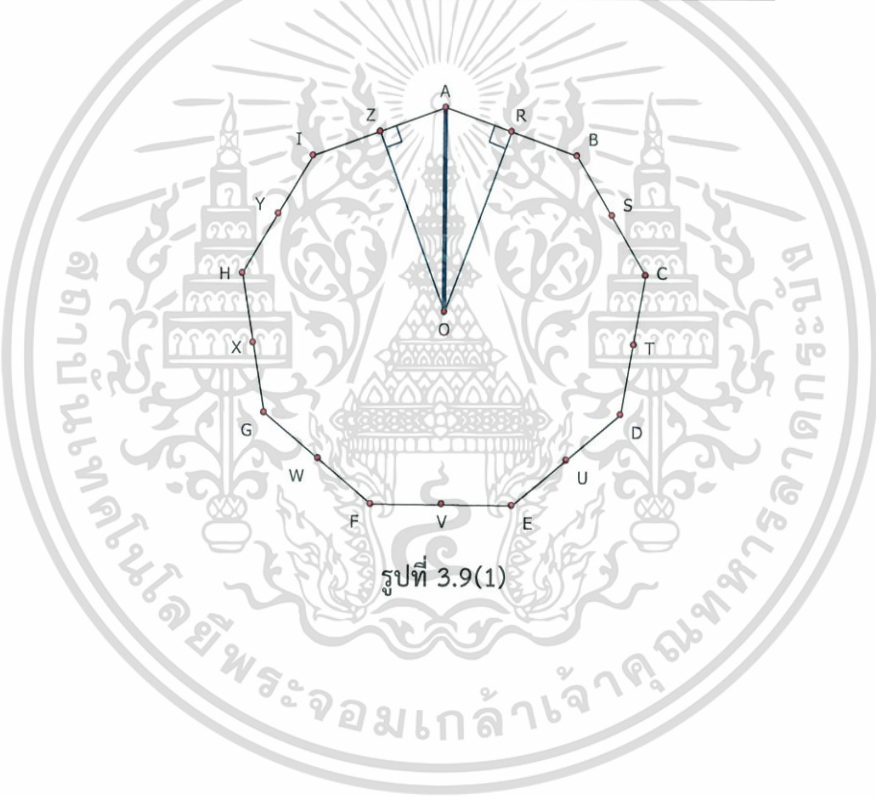


รูปที่ 3.9.1

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO} = \overline{HO} = \overline{IO}$
แล้ว $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}, \overline{HO}, \overline{IO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน
พิสูจน์ เนื่องจาก $\angle I\hat{A}B = 140^\circ, \angle A\hat{R}O = 90^\circ, \angle A\hat{Z}O = 90^\circ$ มุมภายในของสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°
เพราะฉะนั้น $\angle I\hat{A}B + \angle A\hat{R}O + \angle A\hat{Z}O + \angle R\hat{O}Z = 360^\circ$
 $140^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle R\hat{O}Z = 360^\circ$
 $\angle R\hat{O}Z = 40^\circ$

3.7.1) ลากเส้น $\overline{AO}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม $AROZ$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AZO \cong \triangle ARO$ ดังรูปที่ 3.9(1)

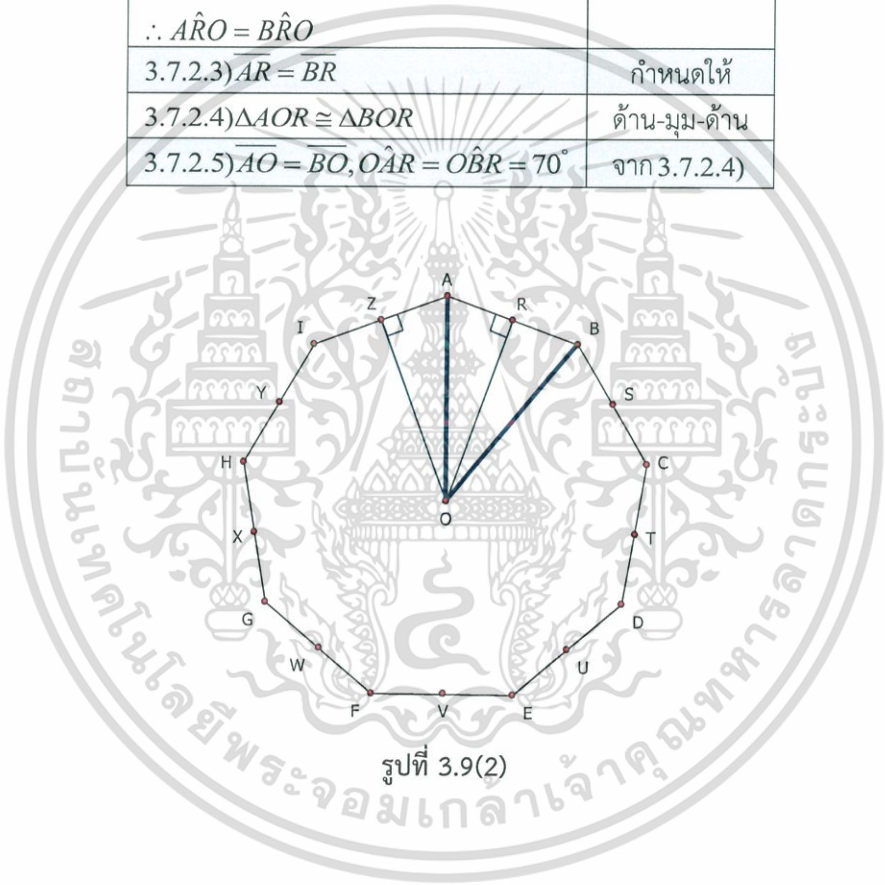
ข้อความ	เหตุผล
3.7.1.1) $\hat{A}RO = \hat{A}ZO = 90^\circ$	มุมฉาก
3.7.1.2) $\overline{AO}$	ด้านร่วม
3.7.1.3) $\overline{AZ} = \overline{AR}$	กำหนดให้
3.7.1.4) $\triangle AZO \cong \triangle ARO$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
3.7.1.5) $\overline{OZ} = \overline{OR}, \hat{O}AR = \hat{O}AZ = 70^\circ$	จาก 3.7.1.4)
3.7.1.6) $\hat{AOZ} = \hat{AOS} = 40^\circ$	จาก 3.7.1.5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.2) ลากเส้น $\overline{BO}$ จะได้ $\triangle BOR$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOR \cong \triangle BOR$ ดังรูปที่ 3.9(2)

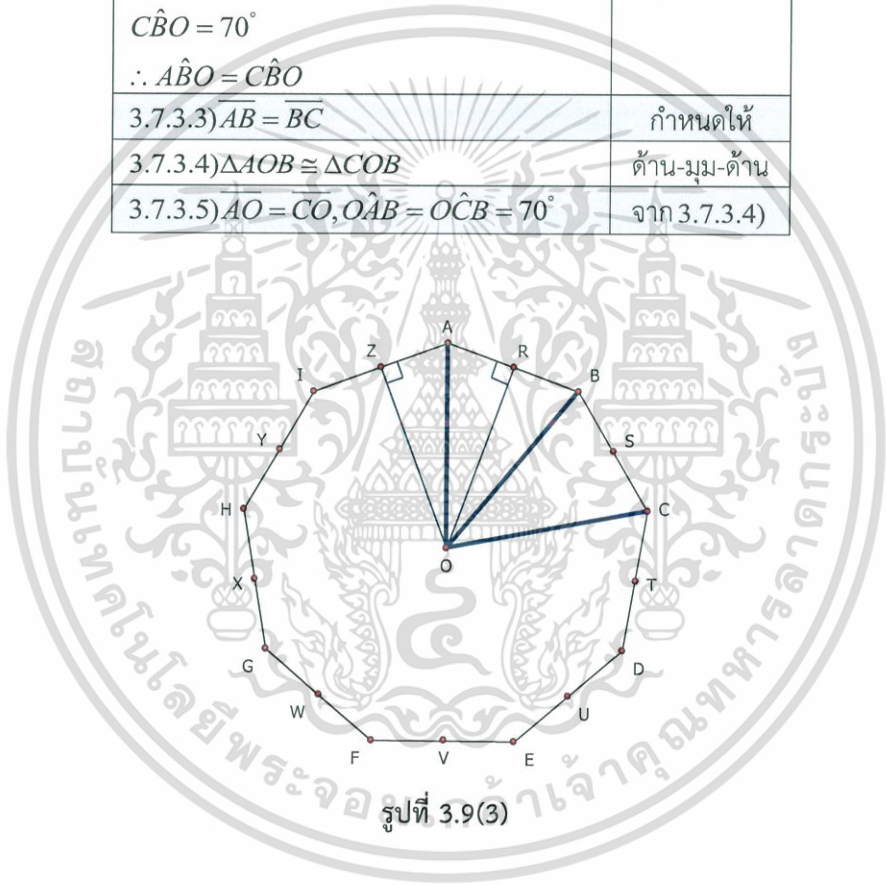
ข้อความ	เหตุผล
3.7.2.1) $\overline{OR}$	ด้านร่วม
3.7.2.2) $\hat{A}RO = 90^\circ$ $\hat{A}RO + \hat{B}RO = 180^\circ$ $\hat{B}RO = 90^\circ$ $\therefore \hat{A}RO = \hat{B}RO$	มุมเท่ากัน
3.7.2.3) $\overline{AR} = \overline{BR}$	กำหนดให้
3.7.2.4) $\triangle AOR \cong \triangle BOR$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.2.5) $\overline{AO} = \overline{BO}, \hat{OAR} = \hat{OBR} = 70^\circ$	จาก 3.7.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.3) ลากเส้น $\overline{CO}$ จะได้ $\triangle COB$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOB \cong \triangle COB$ ดังรูปที่ 3.9(3)

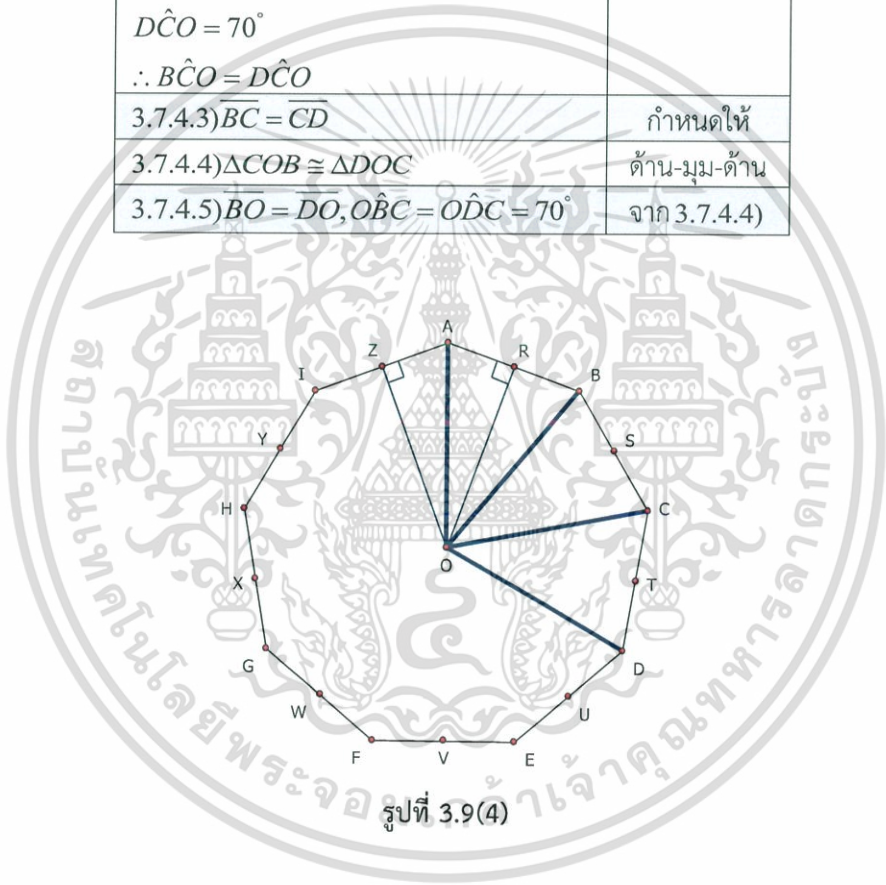
ข้อความ	เหตุผล
3.7.3.1) $\overline{BO}$	ด้านร่วม
3.7.3.2) $\widehat{ABO} = 70^\circ, \widehat{ABC} = 140^\circ$ $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{CBO}$ $140^\circ = 70^\circ + \widehat{CBO}$ $\widehat{CBO} = 70^\circ$ $\therefore \widehat{ABO} = \widehat{CBO}$	มุมเท่ากัน
3.7.3.3) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
3.7.3.4) $\triangle AOB \cong \triangle COB$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.3.5) $\overline{AO} = \overline{CO}, \widehat{OAB} = \widehat{OCB} = 70^\circ$	จาก 3.7.3.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.4) ลากเส้น $\overline{DO}$ จะได้ $\triangle DOC$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle COB \cong \triangle DOC$ ดังรูปที่ 3.9(4)

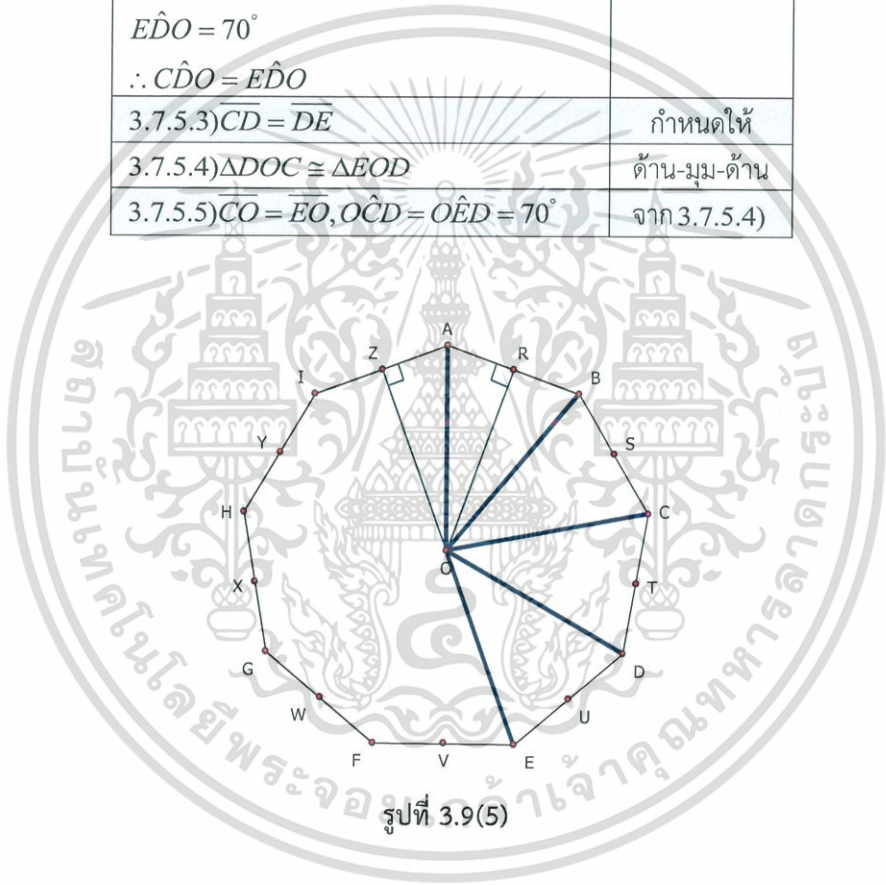
ข้อความ	เหตุผล
3.7.4.1) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
3.7.4.2) $\widehat{BCO} = 70^\circ, \widehat{BCD} = 140^\circ$ $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{DCO}$ $140^\circ = 70^\circ + \widehat{DCO}$ $\widehat{DCO} = 70^\circ$ $\therefore \widehat{BCO} = \widehat{DCO}$	มุมเท่ากัน
3.7.4.3) $\overline{BC} = \overline{CD}$	กำหนดให้
3.7.4.4) $\triangle COB \cong \triangle DOC$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.4.5) $\overline{BO} = \overline{DO}, \widehat{OBC} = \widehat{ODC} = 70^\circ$	จาก 3.7.4.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.5) ลากเส้น $\overline{EO}$ จะได้ $\triangle EOD$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle DOC \cong \triangle EOD$ ดังรูปที่ 3.9(5)

ข้อความ	เหตุผล
3.7.5.1) $\overline{DO}$	ด้านร่วม
3.7.5.2) $\widehat{CDO} = 70^\circ, \widehat{CDE} = 140^\circ$ $\widehat{CDE} = \widehat{CDO} + \widehat{EDO}$ $140^\circ = 70^\circ + \widehat{EDO}$ $\widehat{EDO} = 70^\circ$ $\therefore \widehat{CDO} = \widehat{EDO}$	มุมเท่ากัน
3.7.5.3) $\overline{CD} = \overline{DE}$	กำหนดให้
3.7.5.4) $\triangle DOC \cong \triangle EOD$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.5.5) $\overline{CO} = \overline{EO}, \widehat{OCD} = \widehat{OED} = 70^\circ$	จาก 3.7.5.4)

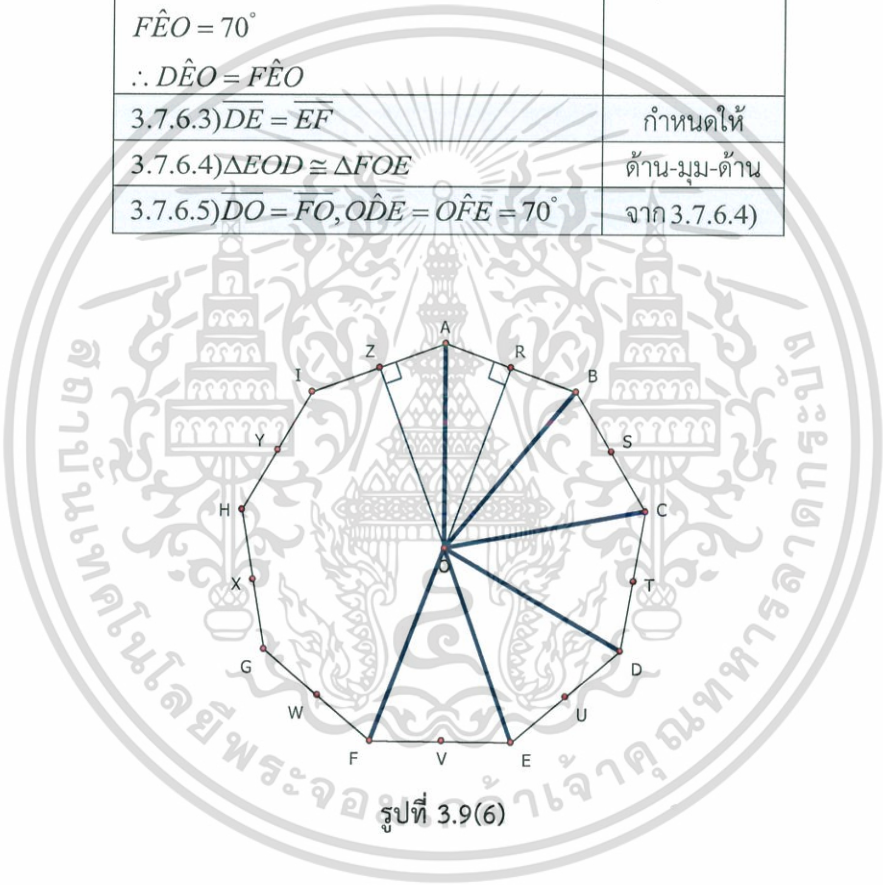


รูปที่ 3.9(5)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.6) ลากเส้น $\overline{FO}$ จะได้ $\triangle FOE$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle EOD \cong \triangle FOE$ ดังรูปที่ 3.9(6)

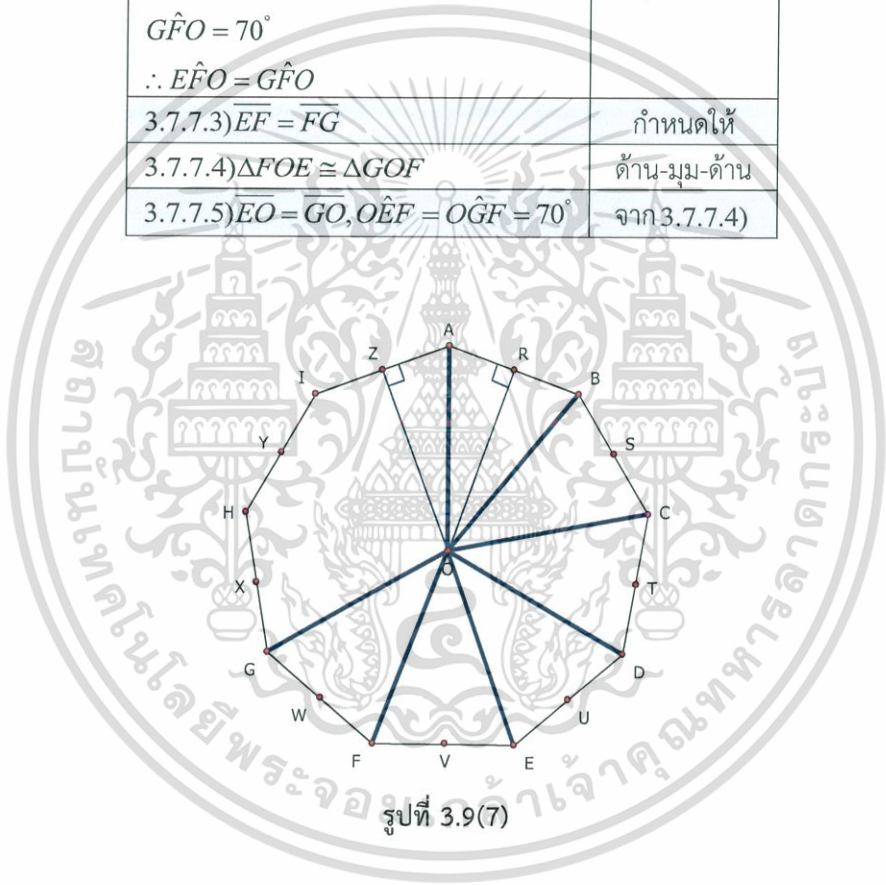
ข้อความ	เหตุผล
3.7.6.1) $\overline{EO}$	ด้านร่วม
3.7.6.2) $\widehat{DEO} = 70^\circ, \widehat{DEF} = 140^\circ$ $\widehat{DEF} = \widehat{DEO} + \widehat{FEO}$ $140^\circ = 70^\circ + \widehat{FEO}$ $\widehat{FEO} = 70^\circ$ $\therefore \widehat{DEO} = \widehat{FEO}$	มุมเท่ากัน
3.7.6.3) $\overline{DE} = \overline{EF}$	กำหนดให้
3.7.6.4) $\triangle EOD \cong \triangle FOE$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.6.5) $\overline{DO} = \overline{FO}, \widehat{ODE} = \widehat{OFE} = 70^\circ$	จาก 3.7.6.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.7) ลากเส้น $\overline{GO}$ จะได้ $\triangle GOF$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle FOE \cong \triangle GOF$ ดังรูปที่ 3.9(7)

ข้อความ	เหตุผล
3.7.7.1) $\overline{FO}$	ด้านร่วม
3.7.7.2) $\angle F\hat{O} = 70^\circ, \angle F\hat{G} = 140^\circ$ $\angle F\hat{G} = \angle F\hat{O} + \angle G\hat{F}O$ $140^\circ = 70^\circ + \angle G\hat{F}O$ $\angle G\hat{F}O = 70^\circ$ $\therefore \angle F\hat{O} = \angle G\hat{F}O$	มุมเท่ากัน
3.7.7.3) $\overline{EF} = \overline{FG}$	กำหนดให้
3.7.7.4) $\triangle FOE \cong \triangle GOF$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.7.5) $\overline{EO} = \overline{GO}, \angle O\hat{E}F = \angle O\hat{G}F = 70^\circ$	จาก 3.7.7.4)

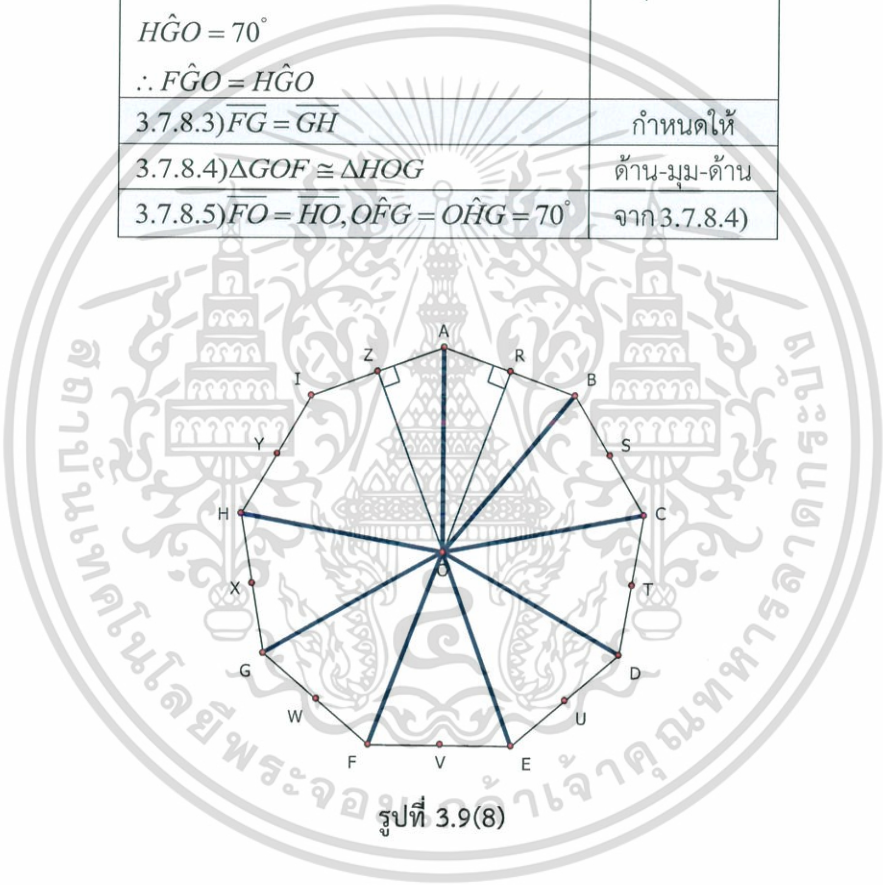


รูปที่ 3.9(7)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.8) ลากเส้น $\overline{HO}$ จะได้ $\triangle HOG$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle GOF \cong \triangle HOG$ ดังรูปที่ 3.9(8)

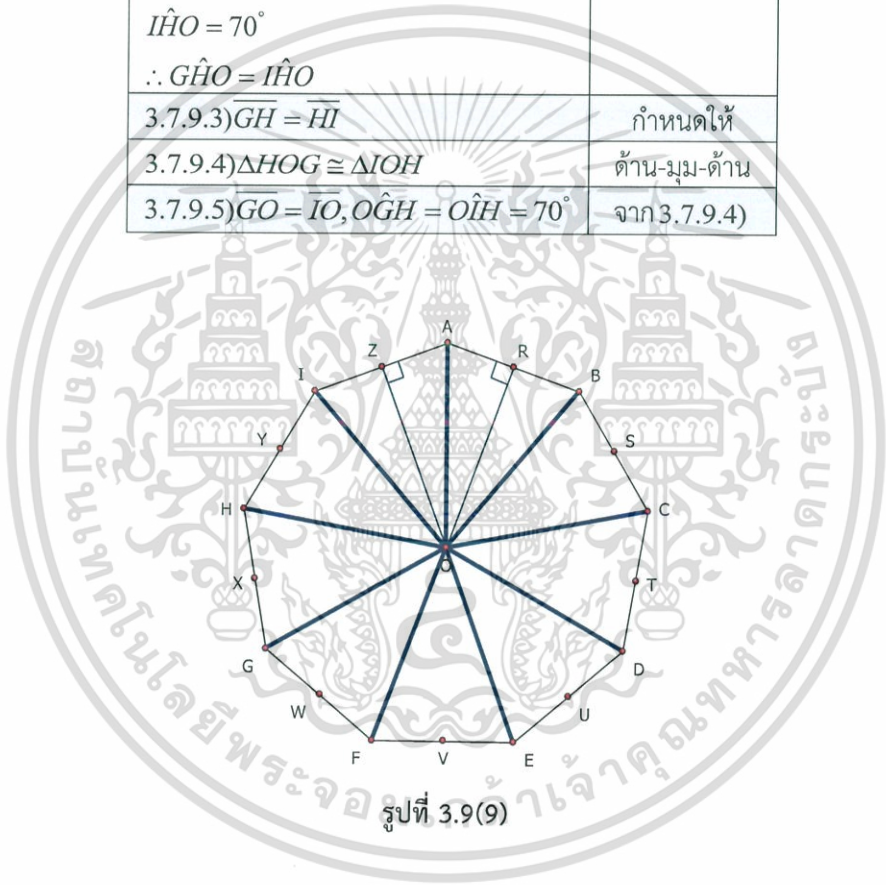
ข้อความ	เหตุผล
3.7.8.1) $\overline{GO}$	ด้านร่วม
3.7.8.2) $F\hat{G}O = 70^\circ, F\hat{G}H = 140^\circ$ $F\hat{G}H = F\hat{G}O + H\hat{G}O$ $140^\circ = 70^\circ + H\hat{G}O$ $H\hat{G}O = 70^\circ$ $\therefore F\hat{G}O = H\hat{G}O$	มุมเท่ากัน
3.7.8.3) $\overline{FG} = \overline{GH}$	กำหนดให้
3.7.8.4) $\triangle GOF \cong \triangle HOG$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.8.5) $\overline{FO} = \overline{HO}, O\hat{F}G = O\hat{H}G = 70^\circ$	จาก 3.7.8.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.7.9) ลากเส้น $\overline{IO}$ จะได้ $\triangle IOH$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle HOG \cong \triangle IOH$ ดังรูปที่ 3.9(9)

ข้อความ	เหตุผล
3.7.9.1) $\overline{HO}$	ด้านร่วม
3.7.9.2) $\widehat{GHO} = 70^\circ, \widehat{GHI} = 140^\circ$ $\widehat{GHI} = \widehat{GHO} + \widehat{IHO}$ $140^\circ = 70^\circ + \widehat{IHO}$ $\widehat{IHO} = 70^\circ$ $\therefore \widehat{GHO} = \widehat{IHO}$	มุมเท่ากัน
3.7.9.3) $\overline{GH} = \overline{HI}$	กำหนดให้
3.7.9.4) $\triangle HOG \cong \triangle IOH$	ด้าน-มุม-ด้าน
3.7.9.5) $\overline{GO} = \overline{IO}, \widehat{OGH} = \widehat{OIH} = 70^\circ$	จาก 3.7.9.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก 3.7.2.5), 3.7.3.5), 3.7.4.5), 3.7.5.5), 3.7.6.5), 3.7.7.5), 3.7.8.5), 3.7.9.5)

จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = \overline{GO} = \overline{HO} = \overline{IO}$

ดังนั้น $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}, \overline{EO}, \overline{FO}, \overline{GO}, \overline{HO}, \overline{IO}$ เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบเก้าเหลี่ยม
 $ABCDEFGHI$ และ O เป็นจุดศูนย์กลางของเก้าเหลี่ยมด้านเท่า $ABCDEFGHI$



รูปที่ 3.9(10) วงกลมล้อมรอบรูปเก้าเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

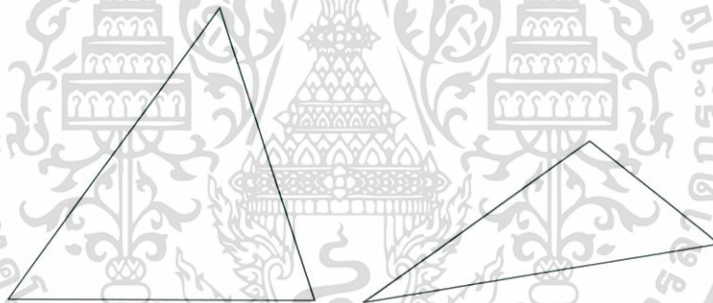
บทที่ 4

การหาจุดศูนย์กลาง และสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

ในหัวข้อต่อไปนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เส้นรอบวงผ่านจุดยอด และสมบัติบางประการของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า นอกจากความรู้เรื่องการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมด้านเท่าจากหัวข้อที่ผ่านมา เราจะศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมอีก 3 แบบ ได้แก่ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์

4) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

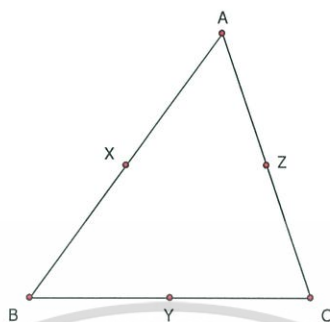
สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า คือ สามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาวไม่เท่ากัน ซึ่งอาจจะเป็นสามเหลี่ยมรูปใดรูปหนึ่ง ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.1(0) สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1) ศูนย์กลางวงล้อมสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า[9]



รูปที่ 4.1(1)

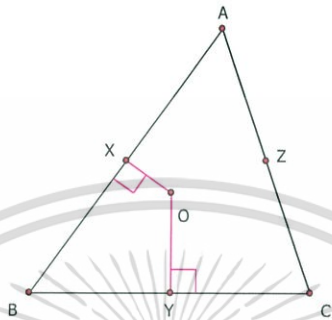
กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า
 - X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ ตามลำดับ
- จะได้ $\overline{AX} = \overline{XB}, \overline{BY} = \overline{YC}, \overline{CZ} = \overline{ZA}$ ดังรูปที่ 4.1(1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

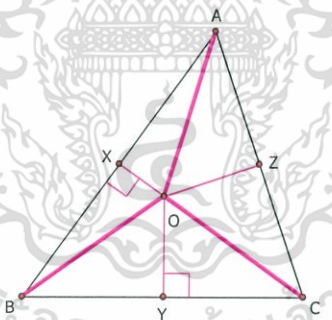
สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด X และลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด Y ให้เส้นตั้งฉากทั้งสองตัดกันที่ O
จะได้ $\overline{OX} \perp \overline{AB}, \overline{OY} \perp \overline{BC}$ ดังรูปที่ 4.1(2)



รูปที่ 4.1(2)

ลากเส้นจาก O ไปยังมุมยอดทั้งสาม และลากเส้นจากจุด Z ไปยังจุด O จะได้เส้นตรง $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{OZ}$
ดังรูปที่ 4.1(3)



รูปที่ 4.1(3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ และ $\overline{OZ} \perp \overline{AC}$ แล้ว O เป็นศูนย์กลางวงล้อมสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

พิสูจน์

4.1.1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO}$

ข้อความ	เหตุผล
4.1.1.1) $\overline{AX} = \overline{XB}$	กำหนดให้
4.1.1.2) $\angle O\hat{X}A = \angle O\hat{X}B = 90^\circ$	สร้าง
4.1.1.3) $\overline{OX}$	ด้านร่วม
4.1.1.4) $\triangle AOX \cong \triangle BOX$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.1.1.5) $\overline{AO} = \overline{BO}$	จาก 4.1.1.4)

4.1.2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{BO} = \overline{CO}$

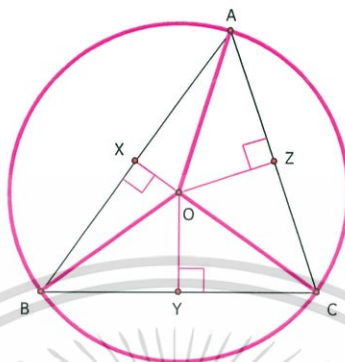
ข้อความ	เหตุผล
4.1.2.1) $\overline{BY} = \overline{YC}$	กำหนดให้
4.1.2.2) $\angle O\hat{Y}B = \angle O\hat{Y}C = 90^\circ$	สร้าง
4.1.2.3) $\overline{OY}$	ด้านร่วม
4.1.2.4) $\triangle BOY \cong \triangle COY$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.1.2.5) $\overline{BO} = \overline{CO}$	จาก 4.1.2.4)

4.1.3) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{OZ} \perp \overline{AC}$

ข้อความ	เหตุผล
4.1.3.1) $\overline{AZ} = \overline{ZC}$	กำหนดให้
4.1.3.2) $\overline{AO} = \overline{CO}$	พิสูจน์
4.1.3.3) $\overline{OZ}$	ด้านร่วม
4.1.3.4) $\triangle BOY \cong \triangle COY$	ด้าน-ด้าน-ด้าน
4.1.3.5) $\angle O\hat{Z}A = \angle O\hat{Z}C$ $\angle O\hat{Z}A + \angle O\hat{Z}C = 180^\circ$ $\therefore \overline{OZ} \perp \overline{AC}$	จาก 4.1.3.4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก 4.1.1.5), 4.1.2.5), 4.1.3.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ และ $\overline{OZ} \perp \overline{AC}$
 ดังนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมใดๆ ดังรูปที่ 4.1(4)



รูปที่ 4.1(4)

ข้อสังเกต จากพิสูจน์การหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เส้นรอบวงผ่านจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า จะได้ว่าสามเหลี่ยมใดๆมีจุดศูนย์กลางก็ต่อเมื่อจุดศูนย์กลางนั้นสามารถลากเส้นตั้งฉากกับจุดกึ่งกลางแต่ละด้าน และตัดกันที่จุดเดียวกัน เรียกจุดนั้นว่า **ศูนย์กลางวงล้อม**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์($\Leftarrow$)

กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าที่มีศูนย์กลางวงล้อม
- O เป็นศูนย์กลางวงล้อม
- X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับ
- $\overline{OX} \perp \overline{AB}, \overline{OY} \perp \overline{BC}, \overline{OZ} \perp \overline{AC}$ ดังรูปที่ 4.1(5)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นจาก O ไปยังมุมยอดทั้งสาม จะได้ $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ แล้ว O เป็นศูนย์กลางวงล้อม $\triangle ABC$

พิสูจน์

4.1.4) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AO} = \overline{BO}$

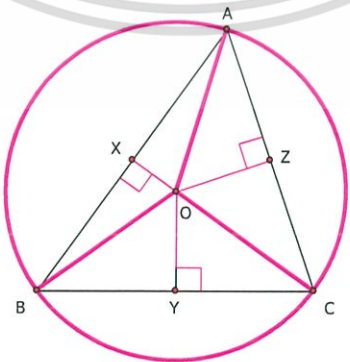
ข้อความ	เหตุผล
4.1.4.1) $\overline{AX} = \overline{XB}$	กำหนดให้
4.1.4.2) $\angle O\hat{X}A = \angle O\hat{X}B = 90^\circ$	สร้าง
4.1.4.3) $\overline{OX}$	ด้านร่วม
4.1.4.4) $\triangle AOX \cong \triangle BOX$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.1.4.5) $\overline{AO} = \overline{BO}$	จาก 4.1.4.4)

4.1.5) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{BO} = \overline{CO}$

ข้อความ	เหตุผล
4.1.5.1) $\overline{BY} = \overline{YC}$	กำหนดให้
4.1.5.2) $\angle O\hat{Y}B = \angle O\hat{Y}C = 90^\circ$	สร้าง
4.1.5.3) $\overline{OY}$	ด้านร่วม
4.1.5.4) $\triangle BOY \cong \triangle COY$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.1.5.5) $\overline{BO} = \overline{CO}$	จาก 4.1.5.4)

จาก 4.1.4.5), 4.1.5.5) จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$

ดังนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมใดๆ ดังรูปที่ 4.1(4)

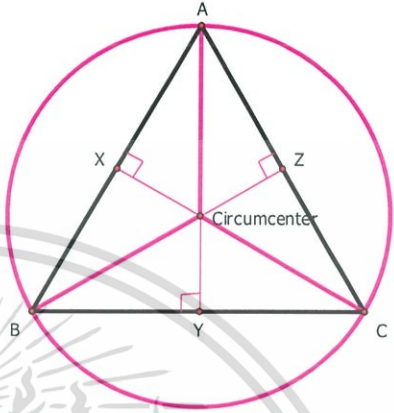
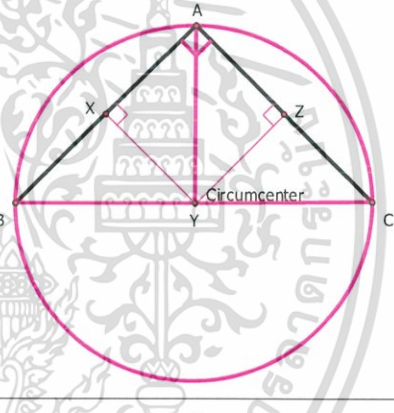
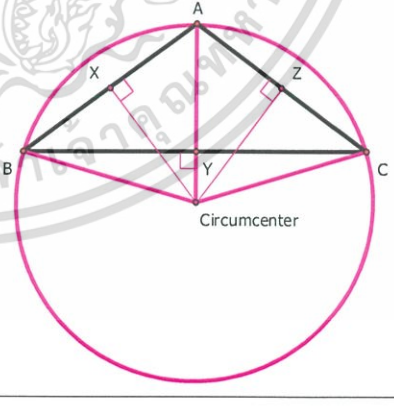


รูปที่ 4.1(6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนการหาศูนย์กลางวงล้อมรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า สามารถแสดงลักษณะที่แตกต่างกันของศูนย์กลางวงล้อมได้ดังนี้

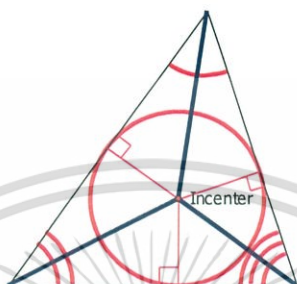
ตารางที่ 4.1 แสดงศูนย์กลางวงล้อมสามเหลี่ยม ที่มีลักษณะแตกต่างกันได้ดังนี้

รูปที่ 4.1.1 สามเหลี่ยมด้านเท่า และศูนย์กลางวงล้อมอยู่ภายในสามเหลี่ยม	
รูปที่ 4.1.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก และศูนย์กลางวงล้อมอยู่ภายในสามเหลี่ยม อยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม	
รูปที่ 4.1.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน และศูนย์กลางวงล้อมอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2) ศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า[9]

เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว คือ ศูนย์กลางวงกลมแนบใน ของรูปสามเหลี่ยม วงกลมแนบใน คือวงกลมที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม และสัมผัสด้านทั้งสามดังรูปที่ 4.2



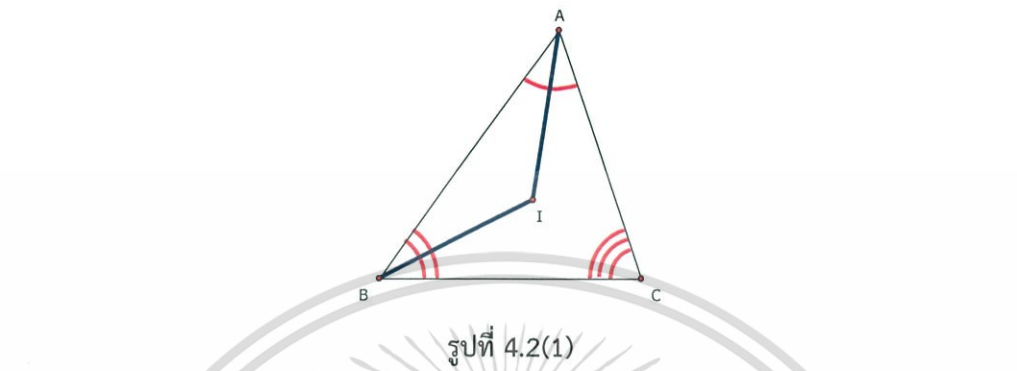
รูปที่ 4.2(0)

กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สร้างเพื่อการพิสูจน์
ลากเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{A}, \hat{B}$ ตัดกันที่จุด I ดังรูปที่ 4.2(1)



ลากจุด I ไปตั้งฉากกับ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ และลากเส้นตรง $\overline{CI}$ ดังรูปที่ 4.2(2)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{DI} = \overline{EI} = \overline{FI}$ และ $\overline{CI}$ แบ่งครึ่ง $\hat{C}$ แล้ว I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยม
ด้านไม่เท่า

พิสูจน์

4.2.1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{DI} = \overline{FI}$

ข้อความ	เหตุผล
4.2.1.1) $\hat{ADI} = \hat{FI} = 90^\circ$	สร้าง
4.2.1.2) $\hat{DAI} = \hat{FAI}$	สร้าง
4.2.1.3) $\overline{AI}$	ด้านร่วม
4.2.1.4) $\triangle AID \cong \triangle AIF$	มุม-มุม-ด้าน
4.2.1.5) $\overline{DI} = \overline{FI}$	จาก 4.2.1.4)

4.2.2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{DI} = \overline{EI}$

ข้อความ	เหตุผล
4.2.2.1) $\hat{BDI} = \hat{BEI} = 90^\circ$	สร้าง
4.2.2.2) $\hat{DBI} = \hat{EBI}$	สร้าง
4.2.2.3) $\overline{BI}$	ด้านร่วม
4.2.2.4) $\triangle BID \cong \triangle BIE$	มุม-มุม-ด้าน
4.2.2.5) $\overline{DI} = \overline{EI}$	จาก 4.2.2.4)

4.2.3) ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{ECI} = \hat{FCI}$

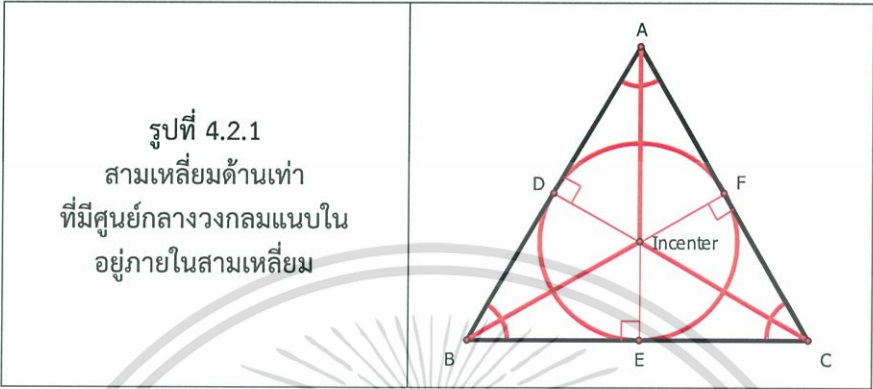
ข้อความ	เหตุผล
4.2.3.1) $\hat{CEI} = \hat{CFI} = 90^\circ$	สร้าง
4.2.3.2) $\overline{EI} = \overline{FI}$	พิสูจน์
4.2.3.3) $\overline{CI}$	ด้านร่วม
4.2.3.4) $\triangle CIE \cong \triangle CIF$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.2.3.5) $\hat{ECI} = \hat{FCI}$	จาก 4.2.3.4)

จาก 4.2.1.5), 4.2.2.5), 4.2.3.5) จะได้ว่า $\overline{DI} = \overline{EI} = \overline{FI}$ และ $\overline{CI}$ แบ่งครึ่ง $\hat{C}$
ดังนั้น I เป็นศูนย์กลางวงกลมแนบในภายในสามเหลี่ยมใดๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

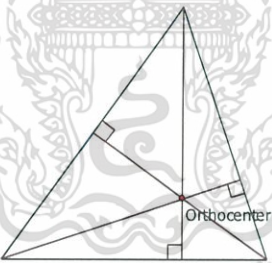
จากขั้นตอนการหาศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า สามารถแสดงลักษณะที่แตกต่างกันของ
ศูนย์กลางวงกลมแนบใน ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.2 แสดงศูนย์กลางวงกลมแนบใน ที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านเท่า



4.3) จุดออร์โทเซนเตอร์[9]

ส่วนสูงทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว เรียกจุดนั้นว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3(0)

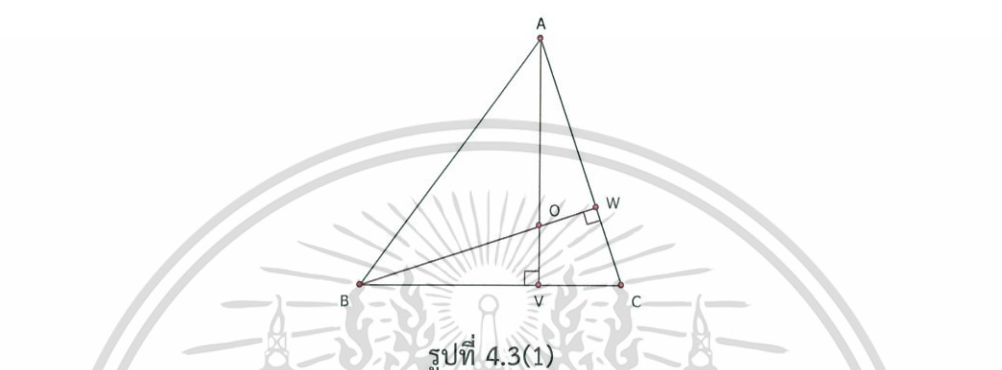
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

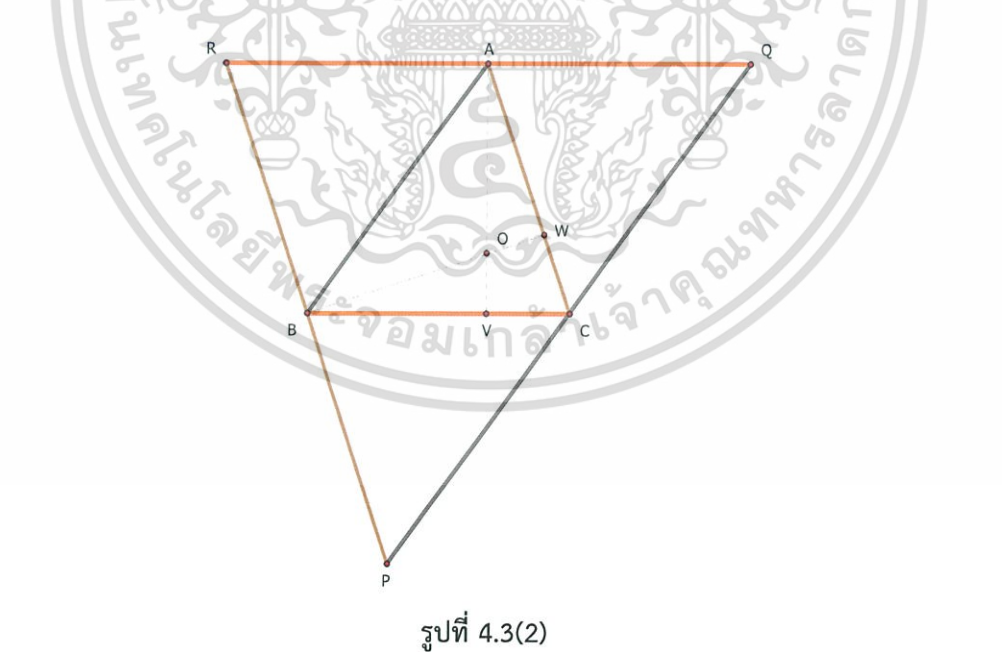
- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้น $\overline{AV} \perp \overline{BC}$ และ $\overline{BW} \perp \overline{AC}$ ตัดกันที่จุด O ดังรูปที่ 4.3(1)



ลากเส้น $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$, $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$, $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ และ $\overline{RQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$ ผ่านจุด A, B, C ตามลำดับ[10]
ดังรูปที่ 4.3(2)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3(2) มีความสัมพันธ์ดังนี้
 $\hat{BAC} = \hat{ABR}, \hat{ABC} = \hat{BAR}, \hat{ABC} = \hat{BCP}, \hat{ACB} = \hat{CBP}, \hat{BAC} = \hat{ACQ}, \hat{ACB} = \hat{CAQ}$
ดังรูปที่ 4.3(3)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

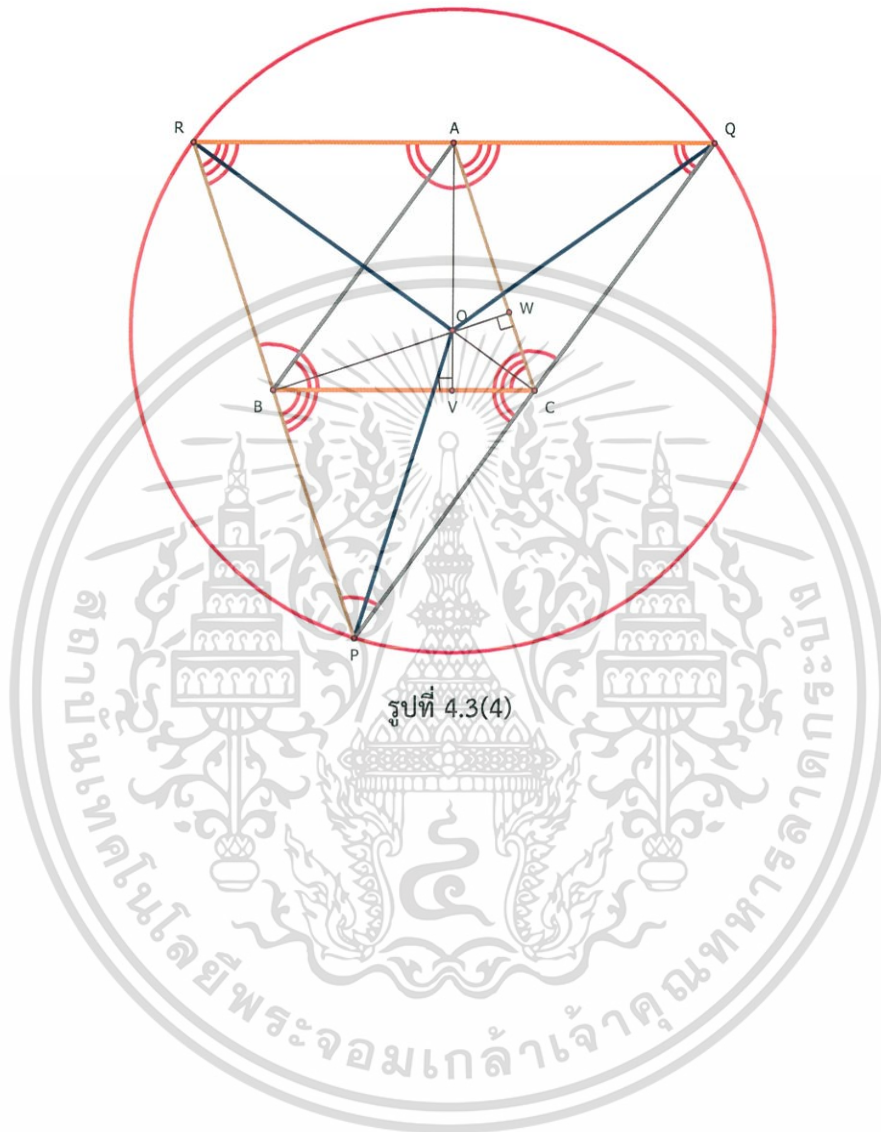
4.3.1) จากรูปที่ 4.3(3) มีความสัมพันธ์ดังนี้

ข้อความ	เหตุผล
4.3.1.1) $\widehat{BAC} = \widehat{ABR}$	มุมแย้ง
4.3.1.2) $\overline{AB}$	ด้านร่วม
4.3.1.3) $\widehat{ABC} = \widehat{ABR}$	มุมแย้ง
4.3.1.4) $\triangle ABC \cong \triangle ABR$	มุม-ด้าน-มุม
4.3.1.5) $\overline{BC} = \overline{RA}, \overline{AC} = \overline{RB}, \widehat{ACB} = \widehat{ARB}$	จาก 4.3.1.4)
4.3.1.6) $\widehat{ABC} = \widehat{BCP}$	มุมแย้ง
4.3.1.7) $\overline{BC}$	ด้านร่วม
4.3.1.8) $\widehat{ACB} = \widehat{BCP}$	มุมแย้ง
4.3.1.9) $\triangle ABC \cong \triangle BCP$	มุม-ด้าน-มุม
4.3.1.10) $\overline{AB} = \overline{CP}, \overline{AC} = \overline{BP}, \widehat{BAC} = \widehat{BPC}$	จาก 4.3.1.9)
4.3.1.11) $\widehat{BAC} = \widehat{ACQ}$	มุมแย้ง
4.3.1.12) $\overline{AC}$	ด้านร่วม
4.3.1.13) $\widehat{ACB} = \widehat{ACQ}$	มุมแย้ง
4.3.1.14) $\triangle ABC \cong \triangle ACQ$	มุม-ด้าน-มุม
4.3.1.15) $\overline{AB} = \overline{CQ}, \overline{BC} = \overline{AQ}, \widehat{ABC} = \widehat{AQC}$	จาก 4.3.1.14)
4.3.1.16) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$	จาก 4.3.1.5), 4.3.1.10), 4.3.1.15)

จากการพิสูจน์ จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle ABR \cong \triangle BCP \cong \triangle ACQ$ และ $\triangle ABC \sim \triangle PQR$
จะเห็นว่า A, B, C เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{QR}, \overline{PR}, \overline{PQ}$ ตามลำดับ
เนื่องจาก $\overline{AV} \perp \overline{BC}$ และ $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $\overline{AV} \perp \overline{RQ}$ เพราะฉะนั้น $\overline{AO} \perp \overline{QR}$
เนื่องจาก $\overline{BW} \perp \overline{AC}$ และ $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$ แล้ว $\overline{BW} \perp \overline{PR}$ เพราะฉะนั้น $\overline{BO} \perp \overline{PR}$

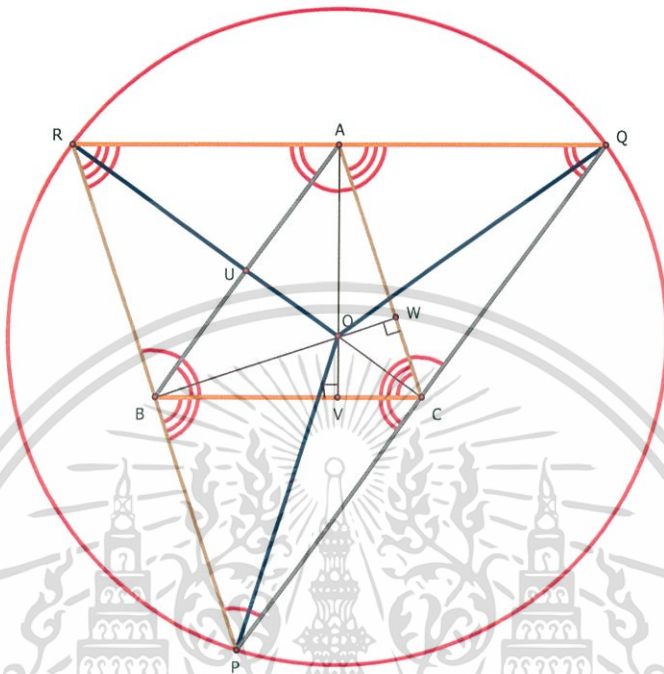
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น O เป็นศูนย์กลางวงล้อม $\triangle PQR$ และจากการพิสูจน์ศูนย์กลางวงล้อมจะได้ว่า $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$
 ดังรูปที่ 4.3(4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลากเส้นตรง $\overline{CU}$ ผ่านจุด O และสัมผัสด้าน $\overline{AB}$ ดังรูปที่ 4.3(5)



รูปที่ 4.3(5)

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{CU} \perp \overline{PQ}$ แล้ว $\overline{CU} \perp \overline{AB}$

4.3.2) ต้องพิสูจน์ว่า $\overline{OC} \perp \overline{PQ}$ แล้ว $\overline{CU} \perp \overline{PQ}$

ข้อความ	เหตุผล
4.3.2.1) $\overline{OP} = \overline{OQ}$	พิสูจน์
4.3.2.2) $\overline{CP} \perp \overline{CQ}$	พิสูจน์
4.3.2.3) $\overline{CO}$	ด้านร่วม
4.3.2.4) $\triangle COP \cong \triangle COQ$	ด้าน-ด้าน-ด้าน
4.3.2.5) $\angle OCP = \angle OCQ = 90^\circ$	จาก 4.3.2.4)

จาก 4.3.2.5) จะได้ว่า $\overline{OC} \perp \overline{PQ}$

เนื่องจาก $\overline{OC} \perp \overline{PQ}$ แล้ว $\overline{CU} \perp \overline{PQ}$

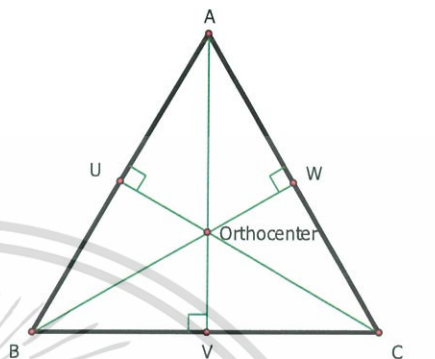
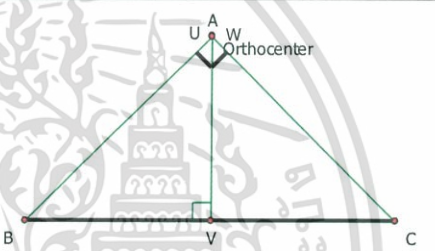
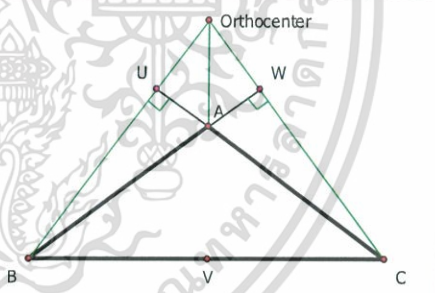
เนื่องจาก $\overline{CU} \perp \overline{PQ}$ แล้ว $\overline{CU} \perp \overline{AB}$

ดังนั้น O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนการหาจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า สามารถแสดงลักษณะที่แตกต่างกันของจุดออร์โทเซนเตอร์ได้ดังนี้

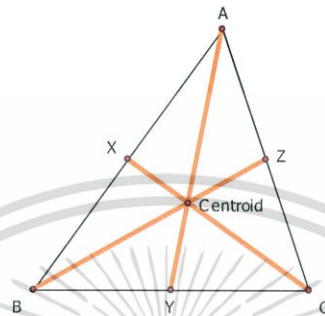
ตารางที่ 4.3 แสดงจุดออร์โทเซนเตอร์ ที่มีลักษณะแตกต่างกันได้ดังนี้

รูปที่ 4.3.1 สามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ในสามเหลี่ยม	 The diagram shows an equilateral triangle with vertices A, B, and C. Three altitudes are drawn from each vertex to the opposite side, intersecting at a single point labeled 'Orthocenter' inside the triangle. The points where the altitudes meet the sides are labeled U, V, and W. Right angle symbols are shown at these intersection points.
รูปที่ 4.3.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก และจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ในสามเหลี่ยม	 The diagram shows a right-angled isosceles triangle with vertices A, B, and C. Vertex A is the right angle. The altitudes from B and C meet at vertex A, which is labeled 'Orthocenter'. The altitude from A meets BC at V. Points U and W are marked on AB and AC respectively. Right angle symbols are shown at A, U, V, and W.
รูปที่ 4.3.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน และจุดออร์โทเซนเตอร์อยู่ภายนอกสามเหลี่ยม	 The diagram shows an obtuse isosceles triangle with vertices A, B, and C. Vertex A is the obtuse angle. The altitudes from B and C are extended outside the triangle and intersect at a point labeled 'Orthocenter' outside the triangle. The altitude from A meets BC at V. Points U and W are marked on AB and AC respectively. Right angle symbols are shown at U, V, and W.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4) เซนทรอยด์[9]

เส้นมัธยฐานทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว คือ เซนทรอยด์ (centroid) จุดนี้จะเป็นศูนย์ถ่วง (center of gravity) ของรูปสามเหลี่ยมด้วย



รูปที่ 4.4(0)

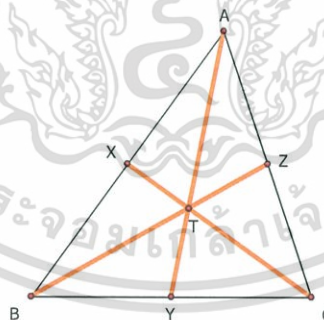
กำหนดให้

- $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ลากเส้นมัธยฐาน $\overline{AY}, \overline{BZ}, \overline{CX}$

จะได้ว่า $\overline{AX} = \overline{XB}, \overline{BY} = \overline{YC}, \overline{CZ} = \overline{ZA}$ ดังรูปที่ 4.4(1)



รูปที่ 4.4(1)

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AY}, \overline{BZ}, \overline{CX}$ ตัดกันที่จุดเดียวกัน

พิสูจน์

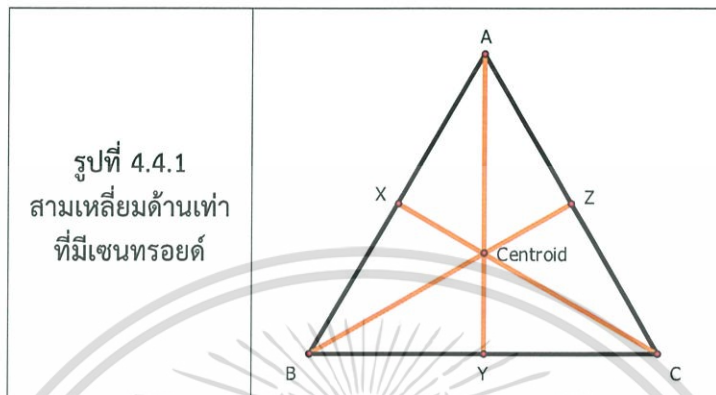
จากทฤษฎีบทของเซวา จะได้ว่า $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overline{ZA}}{\overline{CZ}} = 1$

ดังนั้น $\overline{AY}, \overline{BZ}, \overline{CX}$ ตัดกันที่จุดเดียวกัน และ T เป็นเซนทรอยด์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนการหาเซนทรอยด์สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า สามารถแสดงลักษณะที่แตกต่างกันของเซนทรอยด์ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.4 แสดงเซนทรอยด์ ที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมด้านเท่า



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.5 สรุปตารางที่ 4.1 – ตารางที่ 4.4 ได้ดังนี้

จุดศูนย์กลาง สามเหลี่ยม	Circumcenter	Incenter	Orthocenter	Centroid
ด้านเท่า	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม
หน้าจั่วมุมแหลม	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายใน สามเหลี่ยม
หน้าจั่วมุมฉาก	บนเส้น ผ่านศูนย์กลาง (รูปที่ 4.1.2)	ภายใน สามเหลี่ยม	บนมุมฉาก (รูปที่ 4.3.2)	ภายใน สามเหลี่ยม
หน้าจั่วมุมป้าน	ภายนอก สามเหลี่ยม (รูปที่ 4.1.3)	ภายใน สามเหลี่ยม	ภายนอก สามเหลี่ยม (รูปที่ 4.3.3)	ภายใน สามเหลี่ยม

ข้อสังเกต

1. จุดศูนย์กลางทั้ง 4 แบบ เป็นจุดเดียวกันก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
2. จุดศูนย์กลางทั้ง 4 แบบ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์จะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน
4. ศูนย์กลางวงล้อม จะอยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลางก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก
5. จุดออร์โทเซนเตอร์ จะอยู่บนมุมฉากก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก
6. ศูนย์กลางวงกลมแนบใน และเซนทรอยด์ จะอยู่ในสามเหลี่ยมเสมอ

4.5) จะพิสูจน์ข้อสังเกตที่ 1. จุดศูนย์กลางทั้ง 4 แบบ เป็นจุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์ ($\Rightarrow$)

กำหนดให้

- L เป็นศูนย์กลางวงล้อมและเป็นศูนย์กลางวงกลมแนบในของสามเหลี่ยมที่อยู่ภายใน $\triangle ABC$
 ทำให้ $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL}$, $\overline{XL} \perp \overline{AB}$, $\overline{YL} \perp \overline{BC}$, $\overline{ZL} \perp \overline{AC}$, $\overline{AX} = \overline{BX}$, $\overline{BY} = \overline{CY}$, $\overline{AZ} = \overline{CZ}$
 จะได้ว่า $\triangle ALB$, $\triangle ALC$, $\triangle BLC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วทำให้
 $\angle LAB = \angle LBA$, $\angle LAC = \angle LCA$, $\angle LBC = \angle LCB$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.5.1(1)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 4.5.1) ต้องการพิสูจน์ว่าถ้าศูนย์กลางวงล้อมและศูนย์กลางวงกลมแนบในเป็นจุดเดียวกันแล้ว สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์

ต้องการพิสูจน์ว่า D, E, F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับ

- 4.5.1.1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AD} = \overline{BD}, \overline{BE} = \overline{CE}, \overline{AF} = \overline{CF}$

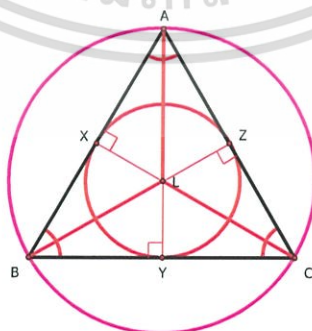
ข้อความ	เหตุผล
4.5.1.1.1) $\widehat{ADL} = \widehat{BDL} = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.1.1.2) $\overline{DL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.3) $\overline{AL} = \overline{BL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.4) $\triangle ADL \cong \triangle BDL$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.1.1.5) $\overline{AD} = \overline{BD}$	จาก 4.5.1.1.4)
4.5.1.1.6) $\widehat{BEL} = \widehat{CEL} = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.1.1.7) $\overline{EL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.8) $\overline{BL} = \overline{CL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.9) $\triangle BEL \cong \triangle CEL$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.1.1.10) $\overline{BE} = \overline{CE}$	จาก 4.5.1.1.9)
4.5.1.1.11) $\widehat{AFL} = \widehat{CFL} = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.1.1.12) $\overline{FL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.13) $\overline{AL} = \overline{CL}$	ด้านร่วม
4.5.1.1.14) $\triangle AFL \cong \triangle CFL$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.1.1.15) $\overline{AF} = \overline{CF}$	จาก 4.5.1.1.14)

จาก 4.5.1.1.5), 4.5.1.1.10), 4.5.1.1.15)

จะได้ว่า $\overline{AD} = \overline{BD}, \overline{BE} = \overline{CE}, \overline{AF} = \overline{CF}$ ตามลำดับ

ดังนั้น D, E, F เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับหรือ D, E, F เป็นจุดเดียวกับ X, Y, Z

ดังรูปที่ 4.5.1(2)



รูปที่ 4.5.1(2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

4.5.1.2) ต้องพิสูจน์ว่า $\overline{AB} = \overline{AC}$ และ $\overline{AB} = \overline{BC}$

ข้อความ	เหตุผล
4.5.1.2.1) $\angle A\hat{X}L = \angle A\hat{Z}L = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.1.2.2) $\overline{XL} = \overline{ZL}$	กำหนดให้
4.5.1.2.3) $\overline{AL}$	ด้านร่วม
4.5.1.2.4) $\triangle ALX \cong \triangle BLX$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.1.2.5) $\overline{AX} = \overline{AZ}$	จาก 4.5.1.2.4)
4.5.1.2.6) $\angle B\hat{X}L = \angle B\hat{Y}L = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.1.2.7) $\overline{XL} = \overline{YL}$	กำหนดให้
4.5.1.2.8) $\overline{BL}$	ด้านร่วม
4.5.1.2.9) $\triangle BLX \cong \triangle BLY$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.1.2.10) $\overline{BX} = \overline{BY}$	จาก 4.5.1.2.9)

เนื่องจาก $\overline{AX} = \overline{BX}$, $\overline{AZ} = \overline{CZ}$ และจากข้อ 4.5.1.2.5) จะได้ว่า

$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{AZ} = \overline{CZ}$ แล้ว $\overline{AB} = \overline{AC}$

และเนื่องจาก $\overline{AX} = \overline{BX}$, $\overline{BY} = \overline{CY}$ และจากข้อ 4.5.1.2.10) จะได้ว่า

$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{BY} = \overline{CY}$ แล้ว $\overline{AB} = \overline{BC}$

ดังนั้น $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

ดังนั้น ถ้าศูนย์กลางวงล้อมและศูนย์กลางวงกลมแนบในเป็นจุดเดียวกันแล้วสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

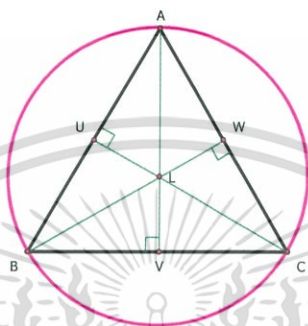
กำหนดให้

- L เป็นศูนย์กลางวงล้อมและศูนย์กลางวงกลมแนบในและเป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ที่อยู่ภายใน $\triangle ABC$

ทำให้ $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL}$ และ $\overline{AV} \perp \overline{BC}, \overline{BW} \perp \overline{AC}, \overline{CU} \perp \overline{AB}$

จะได้ว่า $\triangle ALB, \triangle BLC, \triangle ALC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วทำให้

$\angle LAB = \angle LBA, \angle LBC = \angle LCB, \angle LAC = \angle LCA$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.5.2(1)



รูปที่ 4.5.2(1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.2) ต้องการพิสูจน์ว่าถ้าศูนย์กลางวงล้อมและศูนย์กลางวงกลมแนบใน และจุดออร์โทเซนเตอร์ เป็นจุดเดียวกัน แล้วสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์

ต้องการพิสูจน์ว่า U, V, W เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับ

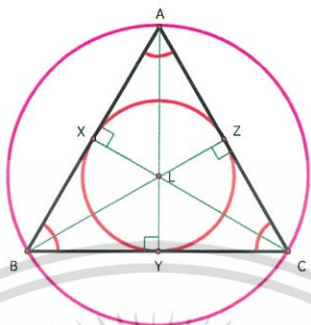
4.5.2.1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AU} = \overline{BU}, \overline{BV} = \overline{CV} = \overline{AW} = \overline{CW}$

ข้อความ	เหตุผล
4.5.2.1.1) $\angle AUL = \angle BUL = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.2.1.2) $\overline{UL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.3) $\overline{AL} = \overline{BL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.4) $\triangle AUL \cong \triangle BUL$	ฉก-ด้าน-ด้าน
4.5.2.1.5) $\overline{AU} = \overline{BU}$	จาก 4.5.2.1.4)
4.5.2.1.6) $\angle BVL = \angle CVL = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.2.1.7) $\overline{VL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.8) $\overline{BL} = \overline{CL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.9) $\triangle BVL \cong \triangle CVL$	ฉก-ด้าน-ด้าน
4.5.2.1.10) $\overline{BV} = \overline{CV}$	จาก 4.5.2.1.9)
4.5.2.1.11) $\angle AWL = \angle CWL = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.2.1.12) $\overline{WL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.13) $\overline{AL} = \overline{CL}$	ด้านร่วม
4.5.2.1.14) $\triangle AWL \cong \triangle CWL$	ฉก-ด้าน-ด้าน
4.5.2.1.15) $\overline{AW} = \overline{CW}$	จาก 4.5.2.1.14)

จาก 4.5.2.1.5), 4.5.2.1.10), 4.5.2.1.15) จะได้ว่า

$\overline{AU} = \overline{BU}, \overline{BV} = \overline{CV}, \overline{AW} = \overline{CW}$ ตามลำดับ

ดังนั้น U, V, W เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับหรือ U, V, W เป็นจุดเดียวกับ X, Y, Z และจากการพิสูจน์ 4.5.1 จะแสดงออกมารูปที่ 4.5.2(2)



รูปที่ 4.5.2(2)

จะเห็นว่ารูปที่ 4.5.2(2) คล้ายกับรูปที่ 4.5.1(2) แต่มีความสัมพันธ์เพิ่มเติมคือ $\overline{AY} = \overline{AL} + \overline{LY}, \overline{BZ} = \overline{BL} + \overline{LZ}, \overline{CX} = \overline{CL} + \overline{LX}$ ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

4.5.2.2 ต้องพิสูจน์ว่า $\overline{AB} = \overline{AC}$ และ $\overline{AB} = \overline{BC}$

ข้อความ	เหตุผล
4.5.2.2.1) $\overline{AY}$	ด้านร่วม
4.5.2.2.2) $\angle AYB = \angle AYC = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.2.2.3) $\overline{BY} = \overline{CY}$	กำหนดให้
4.5.2.2.4) $\triangle AYB \cong \triangle AYC$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.5.2.2.5) $\overline{AB} = \overline{AC}$	จาก 4.5.2.2.4)
4.5.2.2.6) $\overline{BZ}$	ด้านร่วม
4.5.2.2.7) $\angle BZA = \angle BZC = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.2.2.8) $\overline{AZ} = \overline{CZ}$	กำหนดให้
4.5.2.2.9) $\triangle BZA \cong \triangle BZC$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.5.2.2.10) $\overline{AB} = \overline{BC}$	จาก 4.5.2.2.9)

จากข้อ 4.5.2.2.5), 4.5.2.2.10) จะได้ว่า $\overline{AB} = \overline{AC}$ และ $\overline{AB}, \overline{BC}$ ตามลำดับ

ดังนั้น $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

ดังนั้น ถ้าศูนย์กลางวงล้อมและศูนย์กลางวงกลมแนบในและจุดออร์โทเซนเตอร์เป็นจุดเดียวกันแล้ว สามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

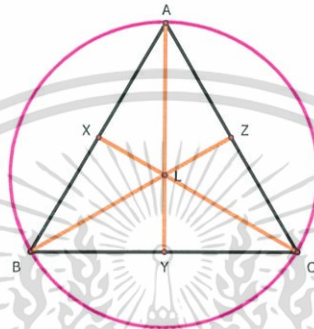
กำหนดให้

- L เป็นศูนย์กลางวงล้อม ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์ที่อยู่ภายใน $\triangle ABC$

ทำให้ $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL}$, $\overline{XL} \perp \overline{AB}$, $\overline{YL} \perp \overline{BC}$, $\overline{ZL} \perp \overline{AC}$, $\overline{AX} = \overline{BX}$, $\overline{BY} = \overline{CY}$, $\overline{AZ} = \overline{CZ}$

จะได้ว่า $\triangle ALB$, $\triangle BLC$, $\triangle ALC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วทำให้

$\angle LAB = \angle LBA$, $\angle LBC = \angle LCB$, $\angle LAC = \angle LCA$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.5.3(1)



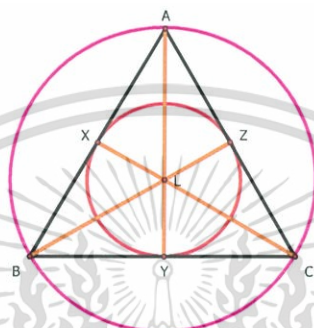
รูปที่ 4.5.3(1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.3) ต้องการพิสูจน์ว่าถ้าศูนย์กลางวงล้อม จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบ
ใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์เป็นจุดเดียวกันแล้วสามเหลี่ยมนั้นเป็น
สามเหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์

จากรูปที่ 4.5.3(1) เราสามารถสร้างวงกลมแนบในภายใน $\triangle ABC$ ได้ ดังรูปที่ 4.5.3(2)



รูปที่ 4.5.3(2)

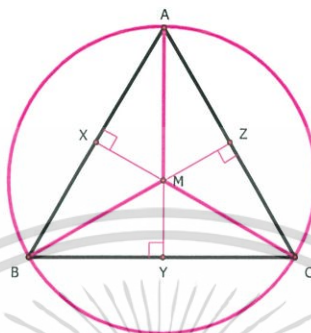
เนื่องจากรูปที่ 4.5.3(2) เหมือนกับรูปที่ 4.5.2(2) จากการพิสูจน์ 4.5.2)
จะได้ว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์เป็นจุดเดียวกัน
ดังนั้น ถ้าศูนย์กลางวงล้อม ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์เป็นจุดเดียวกัน
แล้วสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ ($\Leftarrow$)

กำหนดให้

- M แทนศูนย์กลางวงล้อม ดังรูปที่ 4.5.4(1)

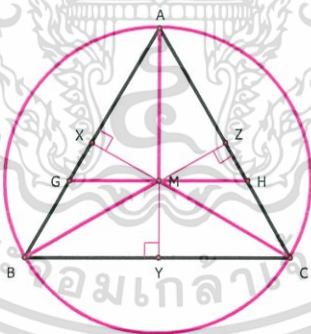


รูปที่ 4.5.4(1)

สร้างเพื่อการพิสูจน์

ให้ G, H เป็นจุดบนเส้นตรง $\overline{AB}, \overline{AC}$ ตามลำดับ

ลาก $\overline{GH} \parallel \overline{BC}$ และ $\overline{GH}$ ผ่านจุด M ดังรูปที่ 4.5.4(2)



รูปที่ 4.5.4(2)

จากรูปที่ 4.5.4(2) จะเห็นว่า $\triangle ABC \sim \triangle AGH$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.4) ต้องการพิสูจน์ว่าศูนย์กลางวงล้อม เป็นจุดเดียวกับจุดศูนย์กลางอื่นๆ

พิสูจน์ เราสามารถหาจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้านเท่าได้จากบทที่ 2 ข้อ 2.1)

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AY} \perp \overline{BC}$

4.5.4.1) ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{AMX} = \hat{AMZ}$

ข้อความ	เหตุผล
4.5.4.1.1) $\hat{AXM} = \hat{AZM} = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.4.1.2) $\overline{AX} = \overline{AZ}$	กำหนดให้
4.5.4.1.3) $\overline{AM}$	ด้านร่วม
4.5.4.1.4) $\triangle AMX \cong \triangle AMZ$	ฉาก-ด้าน-ด้าน
4.5.4.1.5) $\hat{AMX} = \hat{AMZ}$	จาก 4.5.4.1.4)

4.5.4.2) ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AM} \perp \overline{GH}$

$$\hat{GMH} = 180^\circ$$

$$\hat{AMX} + \hat{GMX} + \hat{AMZ} + \hat{HMZ} = 180^\circ$$

$$\hat{AMX} + (180^\circ - 90^\circ - 60^\circ) + \hat{AMZ} + (180^\circ - 90^\circ - 60^\circ) = 180^\circ$$

$$\hat{AMX} + 30^\circ + \hat{AMZ} + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{AMX} + \hat{AMZ} = 120^\circ$$

เนื่องจาก $\hat{AMX} = \hat{AMZ}$

จะได้

$$\hat{AMX} + \hat{AMZ} = 120^\circ$$

$$2\hat{AMX} = 120^\circ$$

$$\hat{AMX} = 60^\circ \text{ และ } \hat{AMZ} = 60^\circ$$

เพราะฉะนั้น $\hat{AMG} = \hat{AMX} + \hat{GMX} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

และ $\hat{AMH} = \hat{AMZ} + \hat{HMZ} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

ดังนั้น $\overline{AM} \perp \overline{GH}$ แล้ว $\overline{AY} \perp \overline{BC}$ เนื่องจาก $\triangle ABC \sim \triangle AGH$

4.5.4.3) ต้องการพิสูจน์ว่า M เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{GH}$

ข้อความ	เหตุผล
4.5.4.3.1) $\angle A\hat{G}M = \angle A\hat{H}M = 60^\circ$	สามเหลี่ยมคล้าย
4.5.4.3.2) $\angle A\hat{M}G = \angle A\hat{M}H = 90^\circ$	มุมฉาก
4.5.4.3.3) $\overline{AM}$	ด้านร่วม
4.5.4.3.4) $\triangle AMG \cong \triangle AMH$	มุม-มุม-ด้าน
4.5.4.3.5) $\overline{GM} = \overline{HM}$	จาก 4.5.4.3.4)

จากข้อ 4.5.4.3.5) สรุปได้ว่า M เป็นจุดกึ่งกลาง $\overline{GH}$

ดังนั้น $\angle A\hat{M}X = \angle A\hat{Y}B$ และ $\angle A\hat{M}Z = \angle A\hat{Y}C$

เนื่องจาก $\angle A\hat{Y}B$ และ $\angle A\hat{Y}C$ มีขนาด 90° และ $\overline{AY} \perp \overline{BC}$

ดังนั้น ศูนย์กลางวงล้อมอยู่บน $\overline{AY}$ และ $\overline{AY}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากกับ $\overline{BC}$



กำหนดให้

-จุด E, F อยู่บน $\overline{BC}, \overline{AC}$ ตามลำดับ

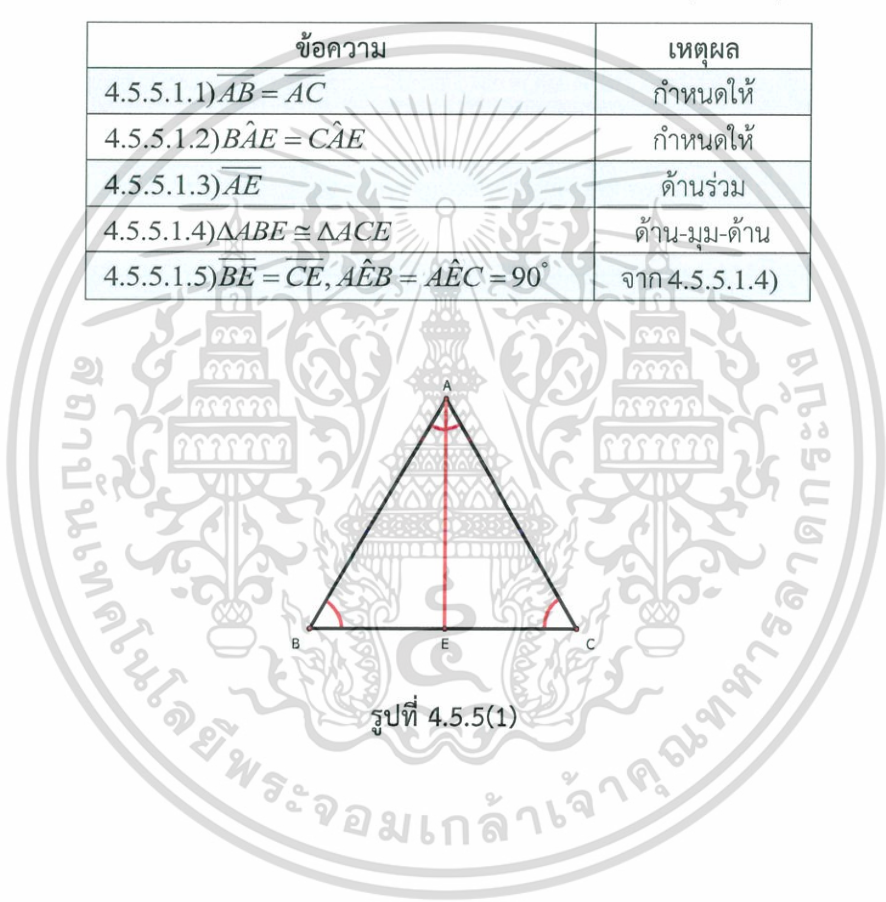
4.5.5) ต้องการพิสูจน์ว่าศูนย์กลางวงกลมแนบใน อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและอยู่จุดเดียวกับจุดศูนย์กลางอื่นๆ

พิสูจน์

สร้างเพื่อการพิสูจน์

4.5.5.1) ลากเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{A}$ โดยมี $\overline{BC}$ เป็นด้านรองรับตัดกันที่จุด E ดังรูปที่ 4.5.5(1)

ข้อความ	เหตุผล
4.5.5.1.1) $\overline{AB} = \overline{AC}$	กำหนดให้
4.5.5.1.2) $\hat{BAE} = \hat{CAE}$	กำหนดให้
4.5.5.1.3) $\overline{AE}$	ด้านร่วม
4.5.5.1.4) $\triangle ABE \cong \triangle ACE$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.5.5.1.5) $\overline{BE} = \overline{CE}, \hat{AEB} = \hat{AEC} = 90^\circ$	จาก 4.5.5.1.4)

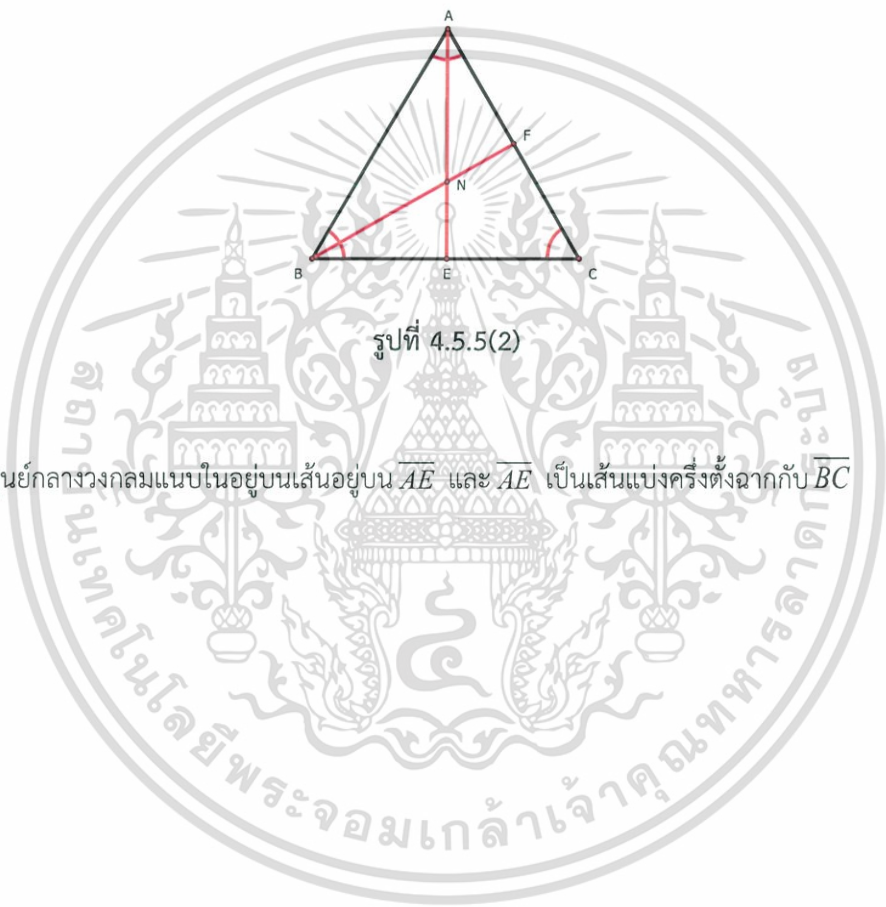


รูปที่ 4.5.5(1)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.5.2) ลากเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{B}$ ตัดกับ $\overline{AE}, \overline{AC}$ ที่จุด N, F ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.5.5(2)

ข้อความ	เหตุผล
4.5.5.2.1) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
4.5.5.2.2) $\hat{ABF} = \hat{CBF}$	กำหนดให้
4.5.5.2.3) $\overline{BF}$	ด้านร่วม
4.5.5.2.4) $\triangle BAF \cong \triangle BCF$	ด้าน-มุม-ด้าน
4.5.5.2.5) $\overline{AF} = \overline{CF}, \hat{BFA} = \hat{BFC} = 90^\circ$	จาก 4.5.5.2.4)



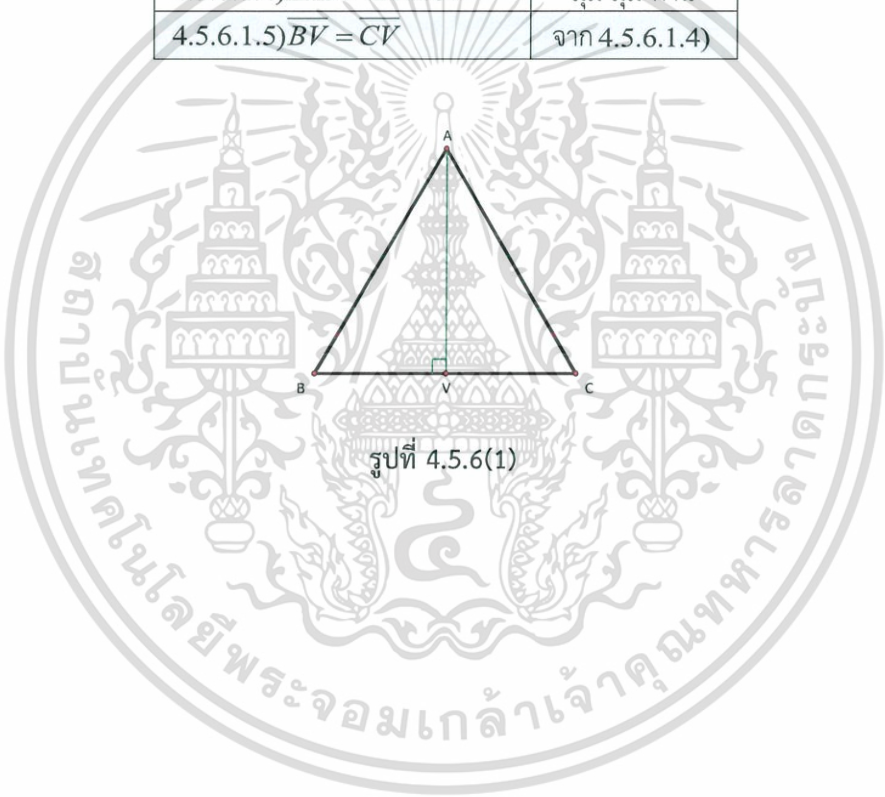
ดังนั้น ศูนย์กลางวงกลมแนบในอยู่บนเส้นอยู่บน $\overline{AE}$ และ $\overline{AE}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

4.5.6) ต้องการพิสูจน์ว่าจุดออร์โทเซนเตอร์ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและอยู่จุดเดียวกันกับจุดศูนย์กลางอื่นๆ

พิสูจน์
สร้างเพื่อการพิสูจน์

4.5.6.1) ลากเส้นตรงจากจุด A ไปยังจุด V และ $\overline{AV} \perp \overline{BC}$ ดังรูปที่ 4.5.6(1)

ข้อความ	เหตุผล
4.5.6.1.1) $\widehat{ABV} = \widehat{ACV}$	กำหนดให้
4.5.6.1.2) $\angle AVB = \angle AVC = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.6.1.3) $\overline{AV}$	ด้านร่วม
4.5.6.1.4) $\triangle ABV \cong \triangle ACV$	มุม-มุม-ด้าน
4.5.6.1.5) $\overline{BV} = \overline{CV}$	จาก 4.5.6.1.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.6.2) ลากเส้นตรงจากจุด B ไปยังจุด W และ $\overline{BW} \perp \overline{AC}$ ดังรูปที่ 4.5.6(2)

ข้อความ	เหตุผล
4.5.6.2.1) $\widehat{BAW} = \widehat{BCW}$	กำหนดให้
4.5.6.2.2) $\widehat{BWA} = \widehat{BWC} = 90^\circ$	กำหนดให้
4.5.6.2.3) $\overline{BW}$	ด้านร่วม
4.5.6.2.4) $\triangle BAW \cong \triangle BCW$	มุม-มุม-ด้าน
4.5.6.2.5) $\overline{AW} = \overline{CW}$	จาก 4.5.6.2.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.7) ต้องการพิสูจน์ว่าเซนทรอยด์ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและอยู่จุดเดียวกันกับจุดศูนย์กลางอื่นๆ
พิสูจน์
สร้างเพื่อการพิสูจน์

4.5.7.1) ลาก $\overline{AY}$ เป็นเส้นมัธยฐาน ดังรูปที่ 4.5.7(1)

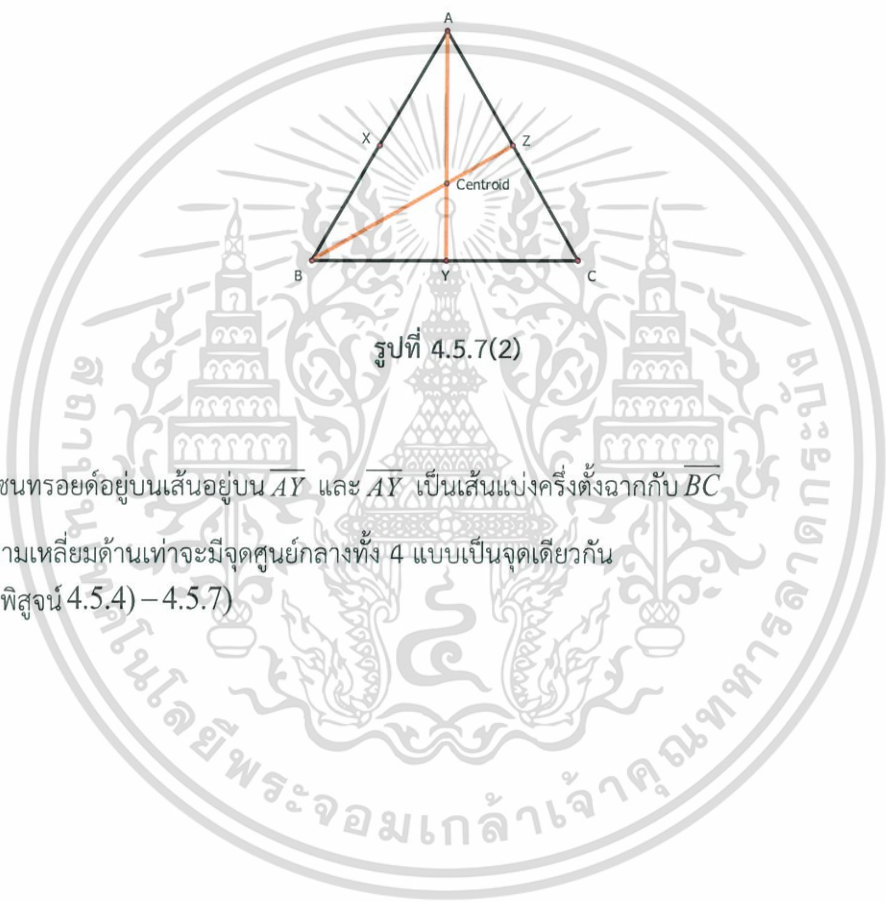
ข้อความ	เหตุผล
4.5.7.1.1) $\overline{AB} = \overline{AC}$	กำหนดให้
4.5.7.1.2) $\overline{AY}$	ด้านร่วม
4.5.7.1.3) $\overline{BY} = \overline{CY}$	กำหนดให้
4.5.7.1.4) $\triangle ABY \cong \triangle ACY$	ด้าน-ด้าน-ด้าน
4.5.7.1.5) $\angle AYB = \angle AYC = 90^\circ$	จาก 4.5.7.1.4)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5.7.2) ลาก $\overline{BZ}$ เป็นเส้นมัธยฐานดังรูปที่ 4.5.7(2)

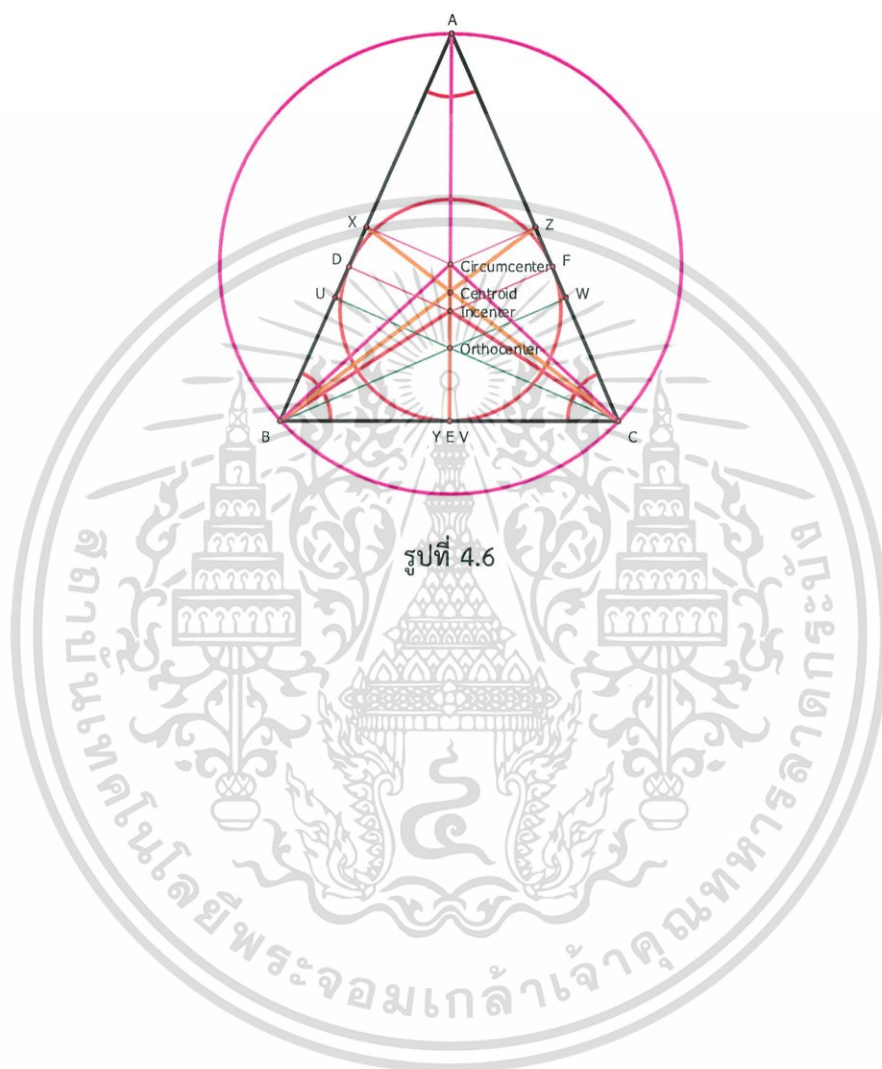
ข้อความ	เหตุผล
4.5.7.2.1) $\overline{AB} = \overline{BC}$	กำหนดให้
4.5.7.2.2) $\overline{BZ}$	ด้านร่วม
4.5.7.2.3) $\overline{AZ} = \overline{CZ}$	กำหนดให้
4.5.7.2.4) $\triangle BAZ \cong \triangle BCZ$	ด้าน-ด้าน-ด้าน
4.5.7.2.5) $\angle BZA = \angle BZC = 90^\circ$	จาก 4.5.7.2.4)



ดังนั้น เซนทรอยด์อยู่บนเส้นอยู่บน $\overline{AY}$ และ $\overline{AY}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากกับ $\overline{BC}$
ดังนั้น สามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีจุดศูนย์กลางทั้ง 4 แบบเป็นจุดเดียวกัน
จากการพิสูจน์ 4.5.4) – 4.5.7)

4.6) ข้อสังเกตที่ 2. จุดศูนย์กลางทั้ง 4 แบบ จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

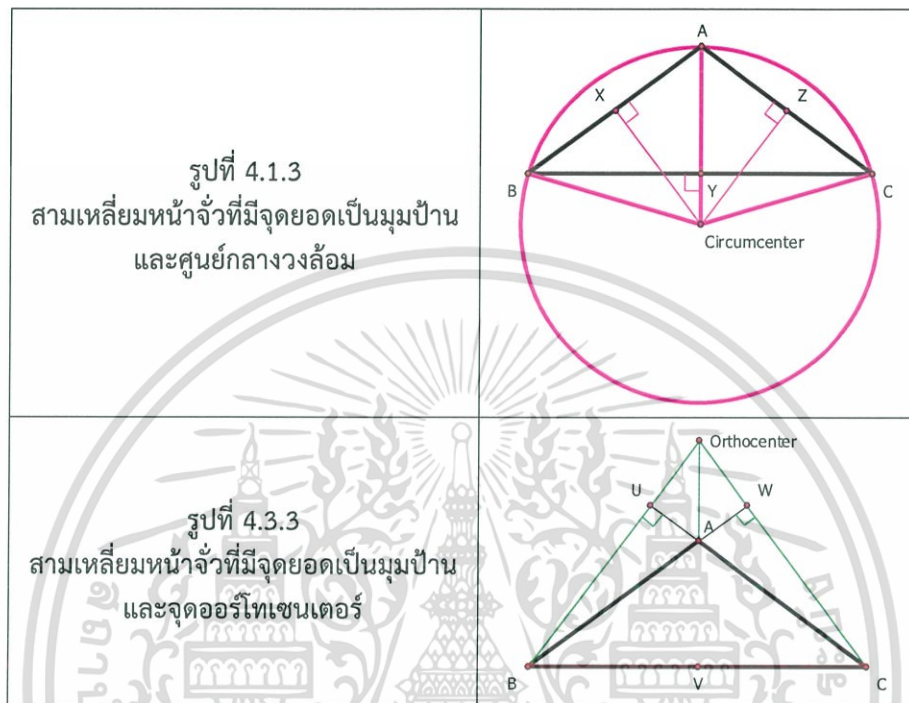
- เห็นชัดจากการพิสูจน์ 4.5) ดังรูปที่ 4.6



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

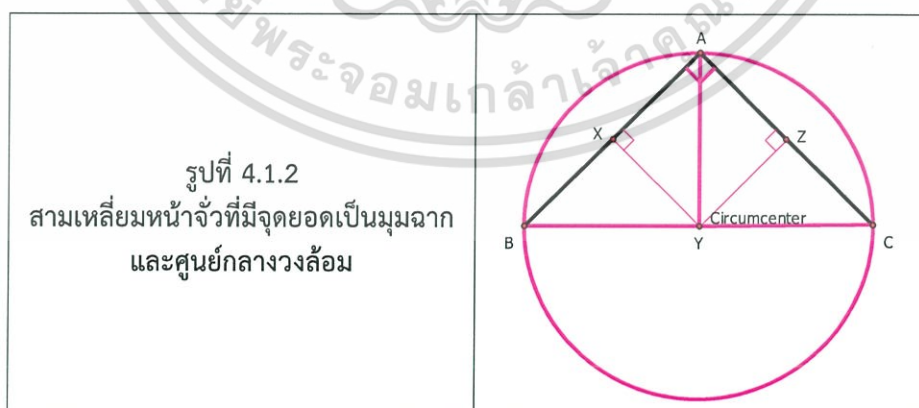
- 4.7) ข้อสังเกตที่ 3. ศูนย์กลางวงล้อม และจุดออร์โทเซนเตอร์ จะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม
ก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมป้าน

ตารางที่ 4.6 แสดงรูปจากตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.3



- 4.8) ข้อสังเกตที่ 4. ศูนย์กลางวงล้อม จะอยู่บนเส้นผ่านศูนย์กลางก็ต่อเมื่อเป็น
สามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก

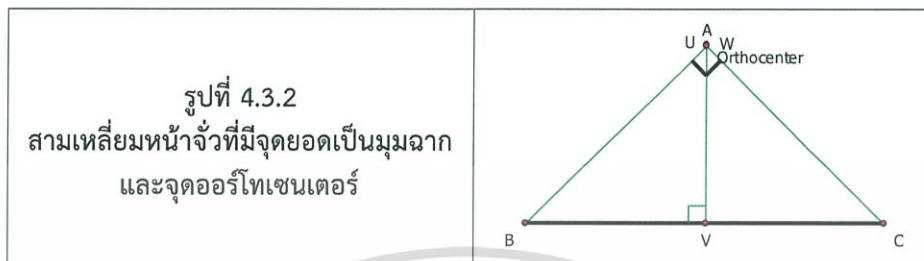
ตารางที่ 4.7 แสดงรูปจากตารางที่ 4.1



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 4.9) ข้อสังเกตที่ 5. จุดออร์โทเซนเตอร์ จะอยู่บนมุมฉากก็ต่อเมื่อเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีจุดยอดเป็นมุมฉาก

ตารางที่ 4.8 แสดงรูปจากตารางที่ 4.3



- 4.10) ข้อสังเกตที่ 6. ศูนย์กลางวงกลมแนบใน และเซนทรอยด์ จะอยู่ในสามเหลี่ยมเสมอ

- เห็นชัดในตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

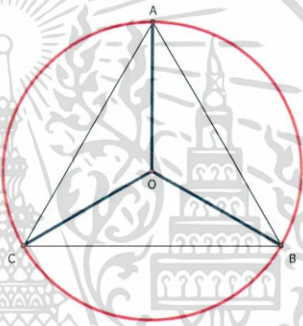
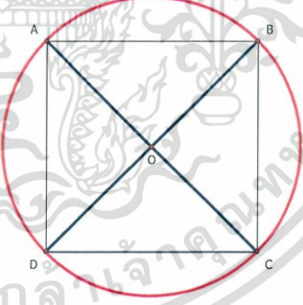
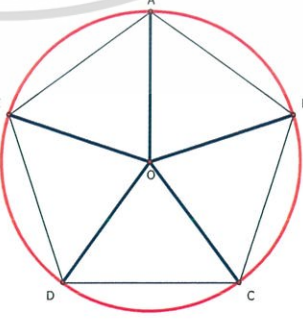
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาเกี่ยวกับการหาจุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และสมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ได้แก่ ศูนย์กลางวงล้อม ศูนย์กลางวงกลมแนบใน

จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์

5.1) สรุปผลการวิจัย

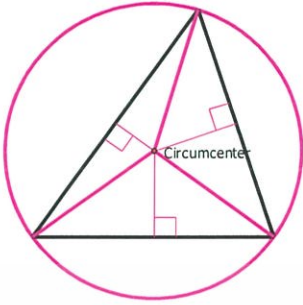
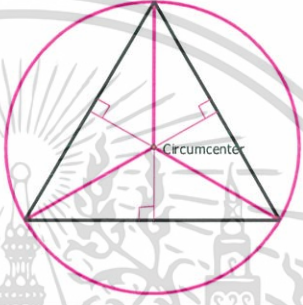
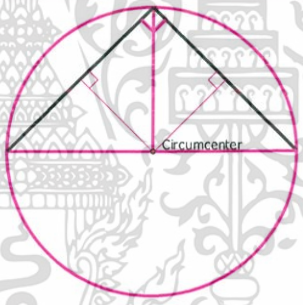
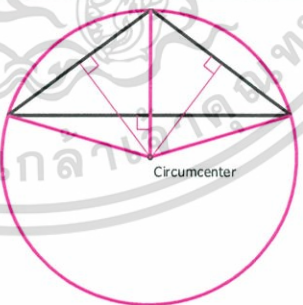
ตารางที่ 5.1 สรุปผลการวิจัย

สรุปผลการศึกษา	จุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า
สามเหลี่ยมด้านเท่า	
สี่เหลี่ยมด้านเท่า	
ห้าเหลี่ยมด้านเท่า	

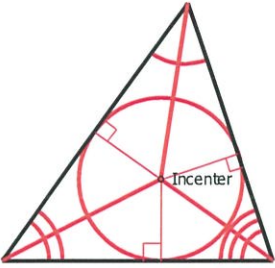
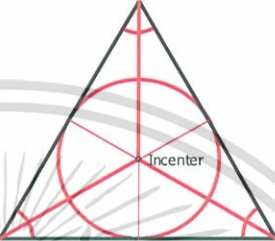
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

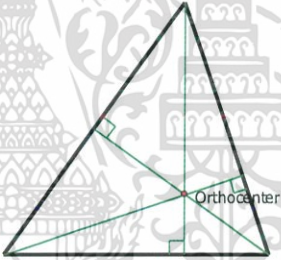
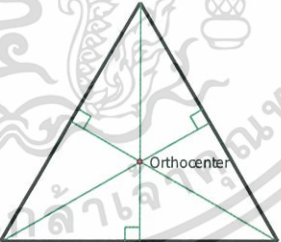
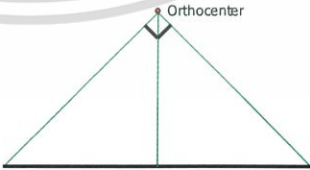
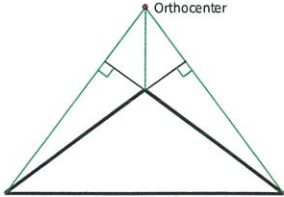
สรุปผลการศึกษา	จุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า
หกเหลี่ยมด้านเท่า	
เจ็ดเหลี่ยมด้านเท่า	
แปดเหลี่ยมด้านเท่า	
เก้าเหลี่ยมด้านเท่า	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

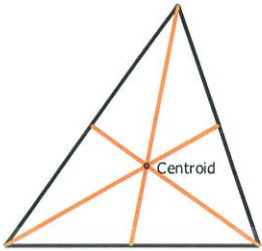
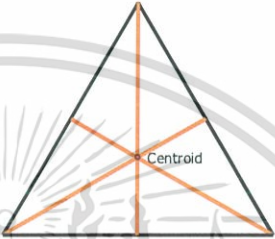
สรุปผลการศึกษา	ศูนย์กลางวงล้อม
สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	
สามเหลี่ยมด้านเท่า	
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีมุมยอดเป็นมุมฉาก	
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีมุมยอดเป็นมุมป้าน	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการศึกษา	ศูนย์กลางวงกลมแนบใน
สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	
สามเหลี่ยมด้านเท่า	

สรุปผลการศึกษา	จุดออร์โทเซนเตอร์
สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	
สามเหลี่ยมด้านเท่า	
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีมุมยอดเป็นมุมฉาก	
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีมุมยอดเป็นมุมป้าน	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการศึกษา	เซนทรอยด์
สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า	
สามเหลี่ยมด้านเท่า	

5.2) ข้อเสนอแนะ

จากศูนย์กลางวงล้อม : ศูนย์กลางวงกลมแนบใน จุดออร์โทเซนเตอร์ และเซนทรอยด์ ของ สามเหลี่ยมด้านเท่า จะเป็นจุดเดียวกัน ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จึงเป็นคำถาม ไปยังรูปสี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม ไปถึงหลายเหลี่ยมว่าจุดทั้ง 4 จุด จะเป็นจุดเดียวกันหรืออยู่บนเส้นตรง เดียวกันได้หรือไม่ และมีเงื่อนไขอย่างไร

เอกสารอ้างอิง

- [1]<https://sites.google.com/site/linkhaow35/two-dimensional-geometry-1/circle>
- [2]ภักคินี ชิตสกุล. (2560). ทฤษฎีบทรูปสี่เหลี่ยม วารสารคณิตศาสตร์MJ-MATH สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์, ฉบับที่ 691, 14.
- [3]<http://www.mathmyself.com/M2/P24/116/ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม.htm>
- [4]<http://www.mathmyself.com/M2/P24/119/รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ-ด้าน-ด้าน-ด้าน.htm>
- [5]<http://www.mathmyself.com/M2/P24/117/รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ-ด้าน-มุม-ด้าน.htm>
- [6]<http://www.mathmyself.com/M2/P24/118/รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ-มุม-ด้าน-มุม.htm>
- [7]<https://th.wikipedia.org/wiki/มุม>
- [8]<https://th.wikipedia.org/wiki/รูปสามเหลี่ยม>
- [9]H.S.M Coxeter and S.L. Greizer, Geometry Revisited, New York:The Mathematical Association of America Inc., 1967
- [10]<https://www.khanacademy.org/math/geometry-home/triangle-properties/altitudes/v/common-orthocenter-and-centroid>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้