ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

BLOCK HADAMARD CONVOLUTION PRODUCT OF RIEMANN INTEGRABLE MATRIX-VALUED FUNCTIONS

ตรีศุลพร ขันนาก
รพีพรรณ ธนะเสน
วศิน วังสมบัติ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

BLOCK HADAMARD CONVOLUTION PRODUCT OF RIEMANN INTEGRABLE MATRIX-VALUED FUNCTIONS

TREESULAPORN KHANNARK
RAPEEPAN THANASEN
WASIN WANGSOMBUT

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ	ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ Block Hadamard Convolution Product of Riemann Integrable Matrix-Valued Functions
ชื่อนักศึกษา	นางสาวตรีศุลพร ขันนาก รหัสนักศึกษา 56050047 นางสาวรพีพรรณ ธนะเสน รหัสนักศึกษา 56050108 นายวศิน วังสมบัติ รหัสนักศึกษา 56050128
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานกรรมการ	
รศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการ	
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงงานพิเศษ	ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้
ชื่อนักศึกษา	นางสาวตรีศุลพร ขันนาก รหัสนักศึกษา 56050047
	นางสาวรพีพรรณ ธนะเสน รหัสนักศึกษา 56050108
	นายวศิน วังสมบัติ รหัสนักศึกษา 56050128
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษนี้เรานิยามผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณดังกล่าวที่เกี่ยวข้องกับ การบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน และผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก ยิ่งกว่านั้นเราพัฒนาโปรแกรมประยุกต์สำหรับการคำนวณผลคูณดังกล่าวด้วยภาษาจาวาและไลบารีของ Wolfram Mathmatica

คำสำคัญ : ฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ คอนโวลูชัน ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก ภาษาจาวา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	Block Hadamard Convolution Product of Riemann Integrable Matrix-Valued Functions	
Students	Miss Treesunlaporn Khannark	Student ID 56050047
	Miss Rapeeparn Thanasen	Student ID 56050108
	Mr. Wasin Wangsombut	Student ID 56050128
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)	
Department	Mathematics	
Faculty	Science	
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)	
Academic Year	2016	
Advisor	Asst.Prof.Dr. Pattrawut Chansangiam	

Abstract

In this special problem, we define the block Hadamard convolution product of Riemann integrable matrix-valued functions and study its algebraic properties involoving the addition, the scalar multiplication, the transposition, and the block Kronecker convolution product. Moveover, we develop an application for computing the block Hadamard convolution product via Java Language and library of Wolfram Mathematica

Key words : Riemann integrable function, convolution, matrix-valued function, block Hadamard convolution product, Java Language

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ท่านได้ให้โอกาสในการศึกษาปัญหาพิเศษนี้ อีกทั้งยังให้คำแนะนำ คำปรึกษา ติดตามงาน ขั้นตอนการดำเนินงานและช่วยแก้ไขปัญหาต่างๆอยู่เสมอ คณะผู้จัดทำรู้สึกทราบซึ้งเป็นอย่างยิ่งในความกรุณาของท่าน จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ทั้งนี้ต้องขอกราบขอบพระคุณ รศ. ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษในครั้งนี้ที่ได้แนะนำ ติชม แก้ไข และเพิ่มเติมในส่วนที่ผิดพลาด ตลอดจนคณาจารย์ทุกท่านที่ให้วิชาความรู้ต่างๆแก่คณะผู้จัดทำมาโดยตลอด รวมถึงเจ้าหน้าที่ทุกท่านในภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในส่วนของอุปกรณ์และการติดต่อประสานงานตลอดระยะเวลาที่ผ่านมา

สุดท้ายนี้ต้องขอขอบพระคุณครอบครัวและเพื่อนๆ ที่คอยสนับสนุน และให้กำลังใจตลอดมา รวมถึงผู้เกี่ยวข้องที่ไม่ได้กล่าวนามในข้างต้นที่มีส่วนช่วยให้ปัญหาพิเศษนี้ได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ตรีศุลพร ขันนาก
รพีพรรณ ธนะเสน
วศิน วังสมบัติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ข
กิตติกรรมประกาศ ..... ค
สารบัญ ..... ง
สารบัญตาราง ..... จ
สารบัญรูป ..... ฉ
สัญลักษณ์ ..... ซ
บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ 1
1.2 วัตถุประสงค์ 2
1.3 ขอบเขต 2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน 3
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน 4
2.1 ปริพันธ์รีมันน์ 4
2.2 คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าจริง 8
2.2.1 คอนโวลูชัน 9
2.2.2 สมบัติคอนโวลูชัน 14
2.3 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ 14
2.4 ผลคูณฮาดามาร์ด 23
2.5 โปรแกรม Wolfram Mathematica 24
2.6 การเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุด้วยภาษา JAVA 24
บทที่ 3 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด 30
3.1 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด 30
บทที่ 4 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก 34
4.1 ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก 34
4.2 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก 39
4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก และผลคูณคอนโวลูชันคอนเน็คเคอร์แบบบล็อก 46
บทที่ 5 การออกแบบและการใช้งานโปรแกรม 50
5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแสดงผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก 50
5.2 หน้าต่างของโปรแกรมแสดงผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก 51
5.3 ขั้นตอนและตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม 54
เอกสารอ้างอิง 63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.2.1 ตารางแสดงผลการคอนโวลูชัน 13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปภาพที่ **หน้า**

2.1.1 การแบ่งของช่วงปิด $[a,b]$ 4

2.1.2 การแบ่งแบบติดป้ายของช่วงปิด 5

2.1.3 ผลบวกรีมันน์ 5

2.1.4 ตัวอย่างฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง 7

2.2.1 กราฟ $f(\tau)$, $g(\tau)$, $g(-\tau)$ และ $g(t-\tau)$ 9

2.2.2 กราฟความสัมพันธ์ของ $f(\tau)$ และ $g(t-\tau)$ 9

2.6.1 แผนภาพคลาสก่อนใช้การสืบทอด 27

2.6.2 แผนภาพคลาสหลังใช้การสืบทอด 27

2..3 เมท็อด main() สำหรับภาวะที่มีหลายรูปแบบ 28

2.6.4 ผลลัพธ์จากเมท็อด main() 28

5.1.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม 1 50

5.2.1 หน้าต่าง Home 51

5.2.2 หน้าต่างโต้ตอบ กำหนดขอบเขตคอนโวลูชัน 51

5.2.3 หน้าต่างใส่ขนาดเมทริกซ์ 52

5.2.4 หน้าต่างเลือกตำแหน่งสมาชิก 52

5.2.5 หน้าต่างใส่ฟังก์ชัน 53

5.2.6 หน้าต่างผลลัพธ์ 53

5.3.1 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 1 54

5.3.2 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 2 54

5.3.3 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 3 54

5.3.4 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 4 55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปภาพที่ **หน้า**

5.3.5 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 5 55
5.3.6 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 6 55
5.3.7 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 7 56
5.3.8 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 8 56
5.3.9 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 9 56
5.3.10 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 10 57
5.3.11 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 11 57
5.3.12 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 12 58
5.3.13 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 13 59
5.3.14 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 14 60
5.3.15 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 15 60
5.3.16 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 16 61
5.3.17 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 17 61
5.3.18 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 18 62

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญลักษณ์

คำย่อ/สัญลักษณ์	คำอธิบาย
$*$	คอนโวลูชัน
$\odot$	ผลคูณฮาดามาร์ด
$\tilde{\odot}$	ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด
$\tilde{\otimes}$	ผลคูณคอนโวลูชันโครเน็คเคอร์
$\boxdot$	ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก
$\tilde{\boxdot}$	ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก
$\tilde{\boxtimes}$	ผลคูณคอนโวลูชันโครเน็คเคอร์แบบบล็อก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในทางวิทยาศาสตร์และสารสนเทศ เราจะพิจารณาเมทริกซ์เป็นอาเรย์ที่มี 2 มิติ ซึ่งใช้ในการเก็บข้อมูล การดำเนินการต่างๆของเมทริกซ์ เช่น การคูณเมทริกซ์ในแบบต่างๆซึ่งจะมีการประยุกต์ใช้ในหลายหลายสาขาของวิทยาศาสตร์และสารสนเทศ

ในพีชคณิตเชิงเส้น มีการคูณเมทริกซ์หลายแบบที่ต่างจากการคูณเมทริกซ์ปกติ รวมถึงการคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ด ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\odot$ โดยการคูณเมทริกซ์ดังกล่าวได้ชื่อมากจากนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส Jacques Hadamard ผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)$ นิยามโดย

$$A\odot B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]\in M_{m,n}\left(\mathbb{R}\right)$$

แนวคิดของผลคูณฮาดามาร์ดถูกขยายไปเป็น ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก $A\in M_{m,n}$ และ $B=[B_{kl}]\in M_{p,q}$ ดังนี้

$$A\boxdot B=[A\odot B_{kl}]_{kl}\in M_{p,q}$$

นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ยังให้ความสนใจกับผลคูณคอนโวลูชัน เป็นที่ทราบกันดีว่า คอนโวลูชันเป็นสิ่งที่มีประโยชน์อย่างมากในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและได้มีการนำไปใช้อย่างแพร่หลายในสาขาวิชาอื่นๆ ไม่ว่าจะเป็นทางด้านวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ ทางด้านฟิสิกส์ รวมถึงได้นำมาประยุกต์ใช้กับเมทริกซ์อีกด้วย

ในปัญหาพิเศษนี้ เราจะศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ เช่น สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การเปลี่ยนกลุ่ม เมทริกซ์ย่อย ด้วยตัวดำเนินการเป็นคอนโวลูชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) พิจารณาสมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ได้แก่ สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณด้วยสเกลาร์ การเปลี่ยนกลุ่ม เมทริกซ์ย่อย
2) สร้างโปรแกรมแสดงผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ด้วยภาษาจาวาโดยใช้ Wolfram Mathematica ในการคำนวณคอนโวลูชัน

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) พิจารณาสมบัติเชิงพีชคณิตพื้นฐานของผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ตามหัวข้อดังนี้
   - สมบัติการแจกแจงเหนือการบวก
   - สมบัติการสลับที่
   - การเปลี่ยนกลุ่ม
   - สมบัติการสลับที่กับฟังก์ชัน
   - สมบัติการสลับเปลี่ยน
   - เมทริกซ์ย่อย
   - ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกและผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก
2) โปรแกรมแสดงตัวอย่างผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ด้วยภาษาจาวา และใช้ Library ของ Wolfram Mathematica ในการหาคอนโวลูชัน ทำงานบนคอมพิวเตอร์ที่สามารถรองรับ Wolfram Mathematica และภาษาจาวา

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) มีความรู้ความเข้าใจสมบัติของผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์และคอนโวลูชัน
2) มีการพัฒนาทักษะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์
3) มีการพัฒนาทักษะการสร้างโปรแกรมประยุกต์ด้วยภาษาจาวา
4) เป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในสาขาคณิตศาสตร์หรือสาขาอื่นที่เกี่ยวข้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนการดำเนินการ

1) ศึกษาความรู้พื้นฐานของปริพันธ์
2) ศึกษาสมบัติพื้นฐานของคอนโวลูชัน ทฤษฎีเมทริกซ์ และ ผลคูณฮาดามาร์ด จากงานวิจัยและแหล่งข้อมูลต่างๆ
3) ศึกษาการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุด้วยภาษาจาวา และพื้นฐานของ WSTP
4) พิจารณาสมบัติสมบัติการแจกแจงเหนือการบวก การเปลี่ยนกลุ่ม ความสัมพันธ์กับการดำเนินการพีชคณิตพื้นฐานอื่นๆ ของผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกสำหรับฟังก์ชันค่าเมทริกซ์
5) จัดทำโปรแกรมแสดงผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้จากภาษาจาวา
6) จัดทำเอกสารประกอบปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึง ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ เช่น ปริพันธ์รีมันน์ คอนโวลูชันสำหรับฟังก์ชันค่าจริงฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด พื้นฐานการใช้ Wolfram Symbolic Transfer Protocolและ พื้นฐานการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุด้วยภาษา JAVA

2.1 ปริพันธ์รีมันน์ (Riemann Integral)

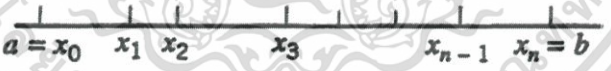
พิจารณาช่วงปิด $I=[a,b]$ ผลแบ่งกั้น(Partitions)ของ I จะเป็นเซตจำกัด โดยเซตของจุดใน I นั้น จะแทนด้วย $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ ซึ่ง $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ และแต่ละจุดในเซต P นั้น เราจะใช้ในการแบ่ง $I=[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ ดังนี้

$$I_1=[x_0,x_1],\ I_2=[x_1,x_2],\ I_3=[x_2,x_3],\ ...,\ I_n=[x_{n-1},x_n]$$

เราจะแทนผลแบ่งกั้น P ด้วยสัญลักษณ์

$$P=\{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^{n}$$

เรากำหนดให้นอร์ม (norm) ของ P เป็น $\|P\|=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,...,x_n-x_{n-1}\}$ ซึ่งเราจะเห็นว่านอร์มของผลแบ่งกั้นเป็นความยาวของช่วงย่อยๆซึ่งยาวที่สุดที่ได้จากการแบ่งช่วง



รูปภาพที่ 2.1.1 การแบ่งของช่วงปิด $[a,b]$

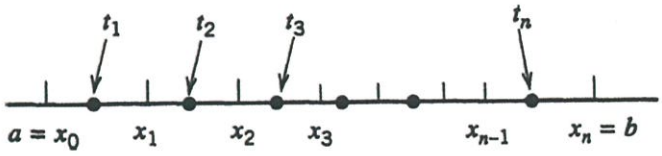
ถ้ากำหนดให้ t_i เป็นจุดที่ถูกเลือกมาจากช่วงย่อยๆ $I_i=[x_{i-1},x_i]$ สำหรับ $i\in\{1,2,3,...,n\}$ แล้วเราจะเรียกจุด t_i ว่า ป้าย (Tags) ของช่วงย่อย I_i ซึ่งเรากำหนดให้เซตของคู่อันดับของช่วงย่อยที่สัมพันธ์กับป้ายนั้นแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^{n}$$

และจะเรียกว่า ผลแบ่งกั้นแบบติดป้าย (Tagged partitions) ของ I ซึ่งในการเลือกป้ายนั้น เราสามารถเลือกได้หลายแบบ ยกตัวอย่างเช่น เลือกป้ายเป็นจุดที่ขอบซ้าย ขอบขวา หรือจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยนั้นๆ เป็นต้น ซึ่งจะสังเกตว่า ที่จุดขอบของช่วงย่อยๆ สามารถถูกใช้เป็นป้ายสำหรับสองช่วงย่อยที่ติดกัน เนื่องจากแต่ละป้ายสามารถถูกเลือกได้หลายแบบ ดังนั้นในแต่ละการแบ่งจึงสามารถติด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ป้ายได้หลายแบบเช่นกัน ส่วนนอร์มของผลแบ่งกั้นแบบติดป้าย จะนิยามเหมือนกับผลแบ่งกั้น ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการเลือกป้ายนั่นคือ $\|\dot{P}\| = \|P\|$



รูปภาพที่ 2.1.2 ผลแบ่งกั้นแบบติดป้ายของช่วงปิด $[a,b]$

ถ้ากำหนดให้ $\dot{P}$ คือผลแบ่งกั้นแบบติดป้ายข้างต้น แล้วเราจะนิยาม ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) ของฟังก์ชัน $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับ $\dot{P}$ โดย

$$S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกทั้งหมดบนช่วง $[a,b]$ แล้วจะได้ว่าผลบวกรีมันน์ คือผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด n รูป โดยที่มีความยาวของฐาน คือช่วงย่อย $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ และความสูง คือค่าของฟังก์ชัน ณ จุด t_i หรือ $f(t_i)$ ซึ่งสามารถดูได้จากรูปภาพที่ 2.1.3

รูปภาพที่ 2.1.3 ผลบวกรีมันน์

ต่อไปเราจะกำหนดนิยามของปริพันธ์รีมันน์ (Riemann integral) ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a,b]$

บทนิยาม 2.1.1 ฟังก์ชัน $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า หาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable) บนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่งทำให้สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_\varepsilon > 0$ ซึ่งถ้า $\dot{P}$ เป็นการแบ่งแบบติดป้ายของช่วงปิด $[a,b]$ โดยที่ $\|\dot{P}\| < \delta_\varepsilon$ แล้ว

$$\left|S(f;\dot{P}) - L\right| < \varepsilon$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราจะแทนเซตของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วง $[a,b]$ ด้วยสัญลักษณ์ $\Re[a,b]$

ในบางครั้งเราอาจกล่าวได้ว่า L คือลิมิตของผลบวกรีมันน์ $S(f;\dot{P})$ โดยที่นอร์ม $\|\dot{P}\| \to 0$ อย่างไรก็ตาม ถ้าฟังก์ชัน $f \in \Re[a,b]$ แล้วจะมีปริพันธ์รีมันน์ของ f บนช่วงปิด $[a,b]$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น โดยแทนด้วย L ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$L = \int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad L = \int_a^b f(x)\,dx$$

ในลำดับถัดไป เราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทต่างๆ ที่สำคัญเกี่ยวกับการปริพันธ์ ซึ่งจะใช้เป็นความรู้พื้นฐานสำหรับการทำปัญหาพิเศษในเรื่องนี้ โดยทฤษฎีบทต่างๆ ที่จะกล่าวถึงในส่วนนี้ เราจะละการพิสูจน์ไว้ทั้งหมด สามารถดูเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [1]

ทฤษฎีบท 2.1.2 สมมติให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในเซตของ $\Re[a,b]$ จะได้ว่า

(a) ถ้า $k \in \mathbb{R}$ แล้วฟังก์ชัน $kf \in \Re[a,b]$ และ $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

(b) $f+g \in \Re[a,b]$ และ $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(c) $fg \in \Re[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.1.3 ถ้า $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็น ฟังก์ชันขั้นบันได (Step function) แล้ว $\varphi \in \Re[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.1.4 ถ้า $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $f \in \Re[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.1.5 กำหนดให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ และ $c \in (a,b)$ จะได้ว่า $f \in \Re[a,b]$ ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f สามารถหาปริพันธ์รีมันน์ได้ ทั้งบนช่วง $[a,c]$ และ $[c,b]$ และในกรณีนี้เราได้ว่า $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

ทฤษฎีบท 2.1.6 (การมีขอบเขต) ถ้า $f \in \Re[a,b]$ แล้ว f มีขอบเขตบน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.1.7 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส) สมมติว่า E เป็นเซตจำกัดในช่วงปิด $[a,b]$ และมีฟังก์ชัน $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

(b) $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a,b] \setminus E$

แล้วเราจะได้ว่า $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.1.8 (การเปลี่ยนตัวแปรของปริพันธ์) กำหนดให้ $J=[\alpha,\beta]$ และ $\varphi: J \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบน J ถ้า $f: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ซึ่งบรรจุ $\varphi(J)$ แล้ว

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$$

ทฤษฎีบท 2.1.9 (การหาปริพันธ์ทีละส่วน) กำหนดให้ F, G เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $[a,b]$ และกำหนดให้ $f = F'$, $g = G'$ $\Re[a,b]$ แล้ว

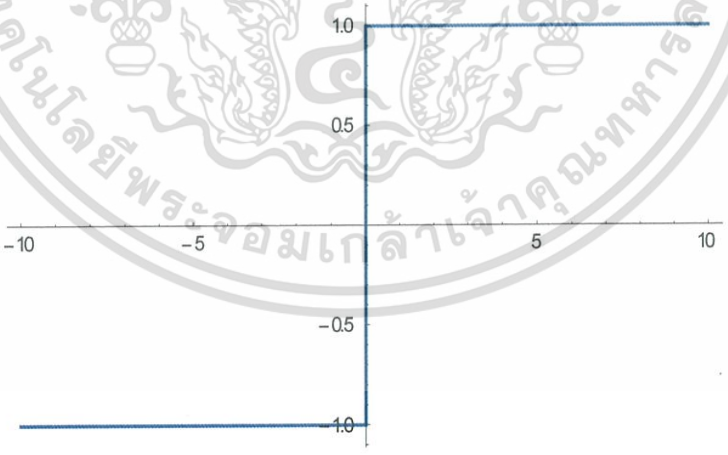
$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b + \int_a^b Fg$$

บทนิยาม 2.1.10

ให้ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง (Piecewise Continous functions) บนช่วง $[a,b]$ ถ้าในช่วง $[a,b]$ มีวิธีการแบ่งเป็นช่วงย่อย ซึ่งทำให้ f ต่อเนื่องในช่วงย่อยดังกล่าว

ตัวอย่าง 2.1.11

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;x < 0 \\ 0 & ;x = 0 \\ 1 & ;x > 0 \end{cases}$$



รูปภาพที่ 2.1.4 ตัวอย่างฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 คอนโวลูชันของฟังก์ชันค่าจริง (Convolution of real-valued functions)

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ $t>0$ และ $f,g:[0,t]\to\mathbb{R}$ ถ้า f และ g หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$ แล้วฟังก์ชัน $H:[0,t]\to\mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย $H(\tau)=f(\tau)g(t-\tau)$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.1.2 (c) เพียงพอที่จะแสดงว่าฟังก์ชัน $H:[0,t]\to\mathbb{R}$, $H(\tau)=g(t-\tau)$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,t]$

ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก g สามารถหาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[0,b]$ แล้วจะมีผลแบ่งกั้น Q บน $[0,b]$ ที่ซึ่ง $U(g;Q)-L(g:Q)<\varepsilon$ และ g มีขอบเขตบน $[0,b]$ โดย ทฤษฎีบท 2.1.6

ให้ $m_i=\inf\{g(x):x\in[X_{i-1},X_i]\}$

$M_i=\sup\{g(x):x\in[X_{i-1},X_i]\}$

เรานิยาม ผลบวกบน $U(g;Q)=\sum_{i=1}^{n}M_i(X_i-X_{i-1})$

และ ผลบวกล่าง $L(g:Q)=\sum_{i=1}^{n}m_i(X_i-X_{i-1})$

สร้าง $U(h;P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(X_i-X_{i-1})$ โดย $M_i=M_{n+1-i}$

$L(h;P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(X_i-X_{i-1})$ โดย $m_i=m_{n+1-i}$

ดังนั้น $U(h;P)=U(g;Q)$ และ $L(h;P)=L(g;Q)$

$\therefore U(h;P)-L(h;P)=U(g;Q)-L(g;Q)<\varepsilon$

นั่นคือ h สามารถหาปริพันธ์รีมันน์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.1 คอนโวลูชัน(Convolution)

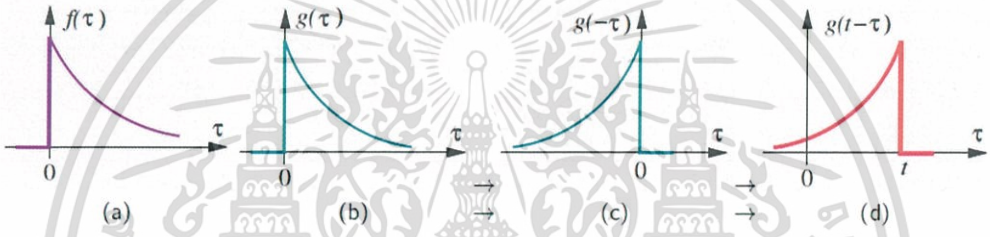
บทนิยาม 2.2.2

ถ้า $x(t)$ และ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ สำหรับ $t>0$ แล้วคอนโวลูชัน ของ x และ h เขียนแทนด้วย $x*h$ นิยามโดย

$$x(t)*h(t)=(x*h)(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

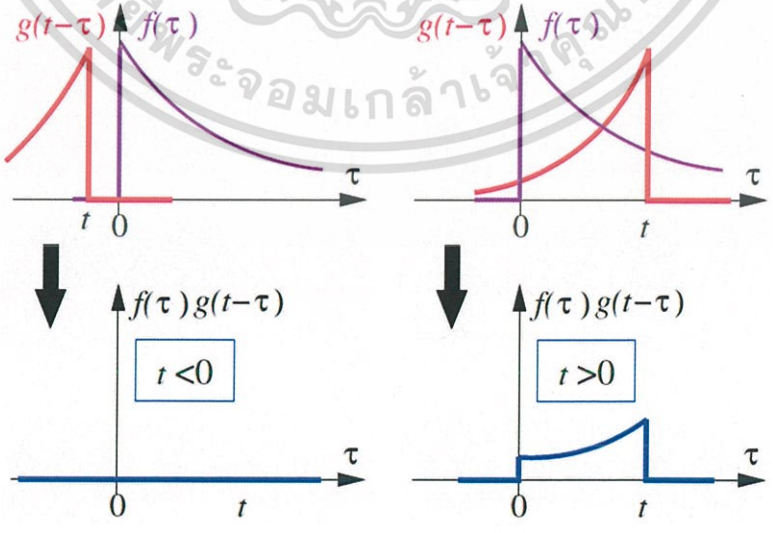
ตัวอย่าง 2.2.3 ให้ $f(t)=u(t)e^{-at}$ และ $g(t)=u(t)e^{-bt}$ จะได้ว่า

$$(f*g)(t)=\int_0^b f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$



รูปภาพที่ 2.2.1 กราฟ $f(\tau)$, $g(\tau)$, $g(-\tau)$ และ $g(t-\tau)$

พิจารณา $f(\tau)$ และ $g(t-\tau)$ เมื่อ τ เป็นตัวแปร จะเห็นว่า $g(\tau)$ จะดูเหมือนกับ $f(\tau)$ ทุกประการแต่ $g(t-\tau)$ จะเป็นการสะท้อน $g(\tau)$ ตามแกน Y และเลื่อนไปตามแกน X ไป t หน่วย



รูปภาพที่ 2.2.2 กราฟความสัมพันธ์ของ $f(\tau)$ และ $g(t-\tau)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.4

ให้ $f(t)=e^{at}$ และ $g(t)=\sin(bt)$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$(f*g)(t)=\int_0^t e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))\,d\tau$$

จากการหาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{b}e^{a\tau}\cos(b(t-\tau))-\frac{a}{b^2}e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))-\frac{a^2}{b^2}\int e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))d\tau$$

$$\frac{b^2+a^2}{b^2}\int e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))d\tau = -e^{a\tau}\frac{\cos(b(t-\tau))}{b}-\frac{a}{b^2}e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))$$

$$\int e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))d\tau = \frac{-e^{a\tau}b\cos(b(t-\tau))-ae^{a\tau}\sin(b(t-\tau))}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^t e^{a\tau}\sin(b(t-\tau))d\tau = \left.\frac{-e^{a\tau}b\cos(b(t-\tau))-ae^{a\tau}\sin(b(t-\tau))}{a^2+b^2}\right|_0^t$$

$$=\frac{-e^{at}b\cos(b(t))-ae^{at}\sin(b(t))}{a^2+b^2}+\frac{-e^{a\tau}b\cos(b(0))-ae^{a\tau}\sin(0))}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{be^{at}-b\cos(bt)-a\sin(bt)}{a^2+b^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.5

ให้ $f(t)=\cos(at)$ และ $g(t)=\cos(bt)$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$(f*g)(t)=\int_0^t \cos(at)\cos(b(t-\tau))\,d\tau$$

จากการหาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int \cos(a\tau)\cos(b(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{b}\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-\frac{a}{b^2}\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau)) + \frac{a^2}{b^2}\int \cos(a\tau)\cos(b(t-\tau))d\tau$$

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}\int \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{b}\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-\frac{a}{b^2}\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))$$

$$\int \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = \frac{-b\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-a\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))}{b^2-a^2}$$

$$\int_0^t \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = \left.\frac{-b\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-a\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))}{b^2-a^2}\right|_0^t$$

$$= \frac{-b\cos(at)\sin(0)-a\sin(at)\cos(0)}{b^2-a^2} - \frac{-b\cos(0)\sin(bt)-a\sin(0)\cos(bt)}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{0-a\sin(at)+b\sin(bt)+0}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{-a\sin(at)+b\sin(bt)}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{a\sin(at)-b\sin(bt)}{a^2-b^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.2.6

ให้ $f(t)=\sin(at)$ และ $g(t)=\sin(bt)$ เมื่อ $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$(f*g)(t)=\int_0^t \cos(at)\cos(b(t-\tau))\,d\tau$$

จากการหาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int \cos(a\tau)\cos(b(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{b}\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-\frac{a}{b^2}\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau)) + \frac{a^2}{b^2}\int \cos(a\tau)\cos(b(t-\tau))d\tau$$

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}\int \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = -\frac{1}{b}\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-\frac{a}{b^2}\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))$$

$$\int \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = \frac{-b\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-a\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))}{b^2-a^2}$$

$$\int_0^t \cos(at)\cos(b(t-\tau))d\tau = \left.\frac{-b\cos(a\tau)\sin(b(t-\tau))-a\sin(a\tau)\cos(b(t-\tau))}{b^2-a^2}\right|_0^t$$

$$= \frac{-b\cos(at)\sin(0)-a\sin(at)\cos(0)}{b^2-a^2} - \frac{-b\cos(0)\sin(bt)-a\sin(0)\cos(bt)}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{0-a\sin(at)+b\sin(bt)+0}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{-a\sin(at)+b\sin(bt)}{b^2-a^2}$$

$$= \frac{a\sin(at)-b\sin(bt)}{a^2-b^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$f(t)$	$g(t)$	$(f*g)(t)$
$\sin(at)$	$\sin(bt)$	$\frac{-b\sin(at)+a\sin(bt)}{a^2-b^2}$; $a \neq \pm b$ $\frac{-at\cos(at)+at\cos(at)}{2a}$; $a=b\neq 0$
$\sin(at)$	$\cos(bt)$	$\frac{a(-\cos(at)+\cos(bt))}{(a-b)(a+b)}$; $a \neq \pm b$ $\frac{1}{2}t\sin(at)$; $a=b$
$\sin(at)$	e^{bt}	$\frac{ae^{bt}-a\cos(at)-b\sin(at)}{a^2+b^2}$; $a^2+b^2\neq 0$
$\cos(at)$	$\cos(bt)$	$\frac{a\sin(at)-b\sin(bt)}{a^2-b^2}$; $a \neq \pm b$ $\frac{at\cos(at)-\sin(at)}{2a}$; $a=b\neq 0$
$\cos(at)$	e^{bt}	$\frac{be^{bt}-b\cos(at)+a\sin(at)}{a^2+b^2}$; $a^2+b^2\neq 0$
e^{at}	t^m	$-\left(m!-m!e^{at}+\sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{k!}t^k\right)\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)$; $a\neq 0$
e^{at}	e^{bt}	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$; $a\neq b$
t^n	t^m	$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{t^{n+m+1}}{i+m+1}$; $n,m\in\mathbb{N}$

ตารางที่ 2.2.1 ตารางแสดงผลการคอนโวลูชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.2.7 สมบัติคอนโวลูชัน (Convolution properties)

1. $f*g=g*f$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
2. $f*(g*h)=(f*g)*h$ เมื่อ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
3. $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$
4. $kf*g=f*kg=k(f*g)$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

พิสูจน์ จากเอกสารอ้างอิง [4]

2.3 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ (Matrix-valued functions)

บทนิยาม 2.3.1 ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $\varnothing \neq T \subset \mathbb{R}$ เรียกฟังก์ชัน $A:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ ที่กำหนดโดย

$$A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\ \forall t\in T$$

ว่าฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ บน T

ตัวอย่าง 2.3.2 ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์บน $[0,1]$

$$A(t)=\begin{bmatrix} t^3 & \sin(t) \\ \cos(t) & e^t \end{bmatrix},\quad B(t)=\begin{bmatrix} t^3 & \sin 2t & e^{3t} \\ 3 & t^2 & \cos t \\ 4t & e^t & t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.3 การบวกฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ เรานิยาม

$$A(t)+B(t)=[A+B](t)=[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)],t\in \mathrm{T}$$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t^3 & \sin(t) \\ \cos(t) & e^t \end{bmatrix}$ และ $B(t)=\begin{bmatrix} 2 & \sin(t) \\ e^t & 4t \end{bmatrix}$ จะได้

$$A(t)+B(t)=\begin{bmatrix} t^3 & \sin(t) \\ \cos(t) & e^t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & \sin(t) \\ e^t & 4t \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} t^3+2 & 2\sin(t) \\ \cos(t)+e^{2t} & e^t+4t \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.3.5 ผลบวกตรง

ผลบวกตรงของ $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$A\oplus B=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\in M_{m+p,n+q}$$

ตัวอย่าง 2.3.6

ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A\oplus B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.3.7

ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.3.8 ผลบวกตรงของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ผลบวกตรงของ $A(t) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B(t) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$(A \oplus B)(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix} \in M_{m+p,n+q}$$

ตัวอย่าง 2.3.9

ให้ $A(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 \\ \sin t & e^{2t} \end{bmatrix}$ และ $B(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t & t^2 & t^2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$(A \oplus B)(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 3t & t^2 & t^2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.3.10 สมบัติการบวกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A, B, C : T \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $f, g : T \to (\mathbb{R})$ จะได้ว่าสำหรับทุกค่า $t \in T$

1. $(A+B)(t) = (B+A)(t)$
2. $((A+B)+C)(t) = (A+(B+C))(t)$
3. $A(t)+0 = A(t)$ เมื่อ $0 : T \to M_{m,n}(\mathbb{R}), 0(t) = 0$
4. เมื่อ $(A+(-A))(t) = 0 = ((-A)+A)(t)$
   $(-A) : T \to M_{m,n}(\mathbb{R}), (-A)(t) = -(A(t))$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. $(A+B)(t)=(B+A)(t)$

พิสูจน์

$$(A+B)(t)=[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)]$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=[b_{ij}(t)+a_{ij}(t)]$$

$$=(B+A)(t)$$

$$(A+B)(t)=(B+A)(t)$$

2. $((A+B)+C)(t)=(A+(B+C))(t)$

พิสูจน์

$$((A+B)+C)(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1}(t) & \cdots & c_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1}(t) & \cdots & c_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]\right]+\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1}(t) & \cdots & c_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=(A+(B+C))(t)$$

$$A+[B+C](t)=[A+B]+C(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.3.11 การคูณฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชันค่าจริง

ให้ $A:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ และ $f:T\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เรานิยาม

$$f(t)A(t)=\left[f(t)a_{ij}(t)\right]_{m,n} \quad ,\forall t\in T$$

ตัวอย่าง 2.3.12

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t^3 & \sin(t) \\ \cos(t) & e^t \end{bmatrix}$ และ $f(t)=4t$

$$f(t)A(t)=4t\begin{bmatrix} t^3 & \sin(t) \\ \cos(t) & e^t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4t^4 & 4t\sin(t) \\ 4t\cos(t) & 4te^t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.3.13 สมบัติการคูณของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ด้วยฟังก์ชัน

ให้ $A,B:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์และ $f,g:T\to\mathbb{R}$

1. $f(gA)=(fg)A$
2. $f(A+B)=fA+fB$
3. $(g+f)A=gA+fA$

1. เราจะแสดงว่า $(f(gA))(t)=((fg)A)(t)$ สำหรับทุกค่า t ∈ T

พิสูจน์

$$(f(gA))(t)=f(t)\begin{bmatrix} g(t)a_{11}(t) & \cdots & g(t)a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(t)a_{i1}(t) & \cdots & g(t)a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=f(t)\begin{bmatrix} f(t)g(t)a_{11}(t) & \cdots & f(t)g(t)a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t)g(t)a_{i1}(t) & \cdots & f(t)g(t)a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=f(t)g(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=((fg)A)(t)$$

$$(f(gA))(t)=((fg)A)(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. เราจะแสดงว่า $\big(f(A+B)\big)(t)=(fA)(t)+(fB)(t)$ สำหรับทุกค่า $t \in T$

พิสูจน์

$$\big(f(A+B)\big)(t) = f(t)\left[\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]$$

$$= f(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t)+b_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t)+b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t)+b_{i1}(t) & \cdots & a_{i1}(t)+b_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(t)[a_{11}(t)+b_{11}(t)] & \cdots & f(t)[a_{1j}(t)+b_{1j}(t)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t)[a_{i1}(t)+b_{i1}(t)] & \cdots & f(t)[a_{i1}(t)+b_{ij}(t)] \end{bmatrix}$$

$$\big(f(A+B)\big)(t) = \begin{bmatrix} f(t)a_{11}(t)+f(t)b_{11}(t) & \cdots & f(t)a_{1j}(t)+f(t)b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t)a_{i1}(t)+f(t)b_{i1}(t) & \cdots & f(t)a_{i1}(t)+f(t)b_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} f(t)a_{11}(t) & \cdots & f(t)a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t)a_{i1}(t) & \cdots & f(t)a_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f(t)b_{11}(t) & \cdots & f(t)b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(t)b_{i1}(t) & \cdots & f(t)b_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]$$

$$= \left[f(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+f(t)\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}(t) & \cdots & b_{ij}(t) \end{bmatrix}\right]$$

$$= (fA)(t)+(fB)(t)$$

$$\big(f(A+B)\big)(t)=(fA)(t)+(fB)(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. เราจะแสดงว่า $\big((g+f)A\big)(t)=(gA)(t)+(fA)(t)$ สำหรับทุกค่า $t \in T$

พิสูจน์

$$\big((g+f)A\big)(t)=[g+f](t)\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \big(g(t)+f(t)\big)a_{11}(t) & \cdots & \big(g(t)+f(t)\big)a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \big(g(t)+f(t)\big)a_{i1}(t) & \cdots & \big(g(t)+f(t)\big)a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} g(t)a_{11}(t)+f(t)a_{11}(t) & \cdots & g(t)a_{1j}(t)+f(t)a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(t)a_{i1}(t)+f(t)a_{i1}(t) & \cdots & g(t)a_{ij}(t)+f(t)a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ga_{11}(t) & \cdots & ga_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ga_{i1}(t) & \cdots & ga_{ij}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} fa_{11}(t) & \cdots & fa_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ fa_{i1}(t) & \cdots & fa_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=g(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}+f(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1j}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{ij}(t) \end{bmatrix}$$

$$=(gA)(t)+(fA)(t)$$

$$\big((g+f)A\big)(t)=(gA)(t)+(fA)(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.3.14 การสลับเปลี่ยนฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ เรานิยาม

$$A^{\mathrm{T}}(t)=\left[a_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}\in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

ทฤษฎีบท 2.3.15 สมบัติสลับเปลี่ยนของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์

ให้ $A,B:T\to M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $f:T\to\mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$
3. $\left(fA\right)^T=fA^T$

1. $\left(A^T\right)^T=A$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\left(A(t)^T\right)^T&=\left(\left(\left[a_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{m,n}\right)^T\right)^T\\&=\left[\left[a_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}\right]^T\\&=\left[a_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{m,n}\\&=A(t)\end{aligned}$$

2. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\left(A(t)+B(t)\right)^T&=\left(\left[a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\right]_{i,j=1}^{m,n}\right)^T\\&=\left[\left[a_{ji}(t)+b_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}\right]\\&=\left[a_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}+\left[b_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}\\&=A(t)^T+B(t)^T\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. $(fA)^T = fA^T$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}((fA)(t))^T &= ((fA)(t))^T \\ &= \left[\left[(fa_{ij})(t)\right]_{i,j=1}^{m,n}\right]^T \\ &= \left[\left[(fa_{ji})(t)\right]_{i,j=1}^{n,m}\right] \\ &= f(t)\left[a_{ji}(t)\right]_{i,j=1}^{n,m} \\ &= f(t)A(t)^T\end{aligned}$$

บทนิยาม 2.3.15

ให้ $A:T \to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=[a_{ij}(t)]$ เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ เราจะกล่าวว่า A หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ถ้า $a_{ij}(t)$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน T สำหรับทุก $1 \le i \le m$ และ $1 \le j \le n$

2.4 ผลคูณฮาดามาร์ด (Hadamard Product)

บทนิยาม 2.4.1 ผลคูณฮาดามาร์ดของ $A=\left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=\left[b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ นิยามโดย

$$\left[A \odot B\right]_{ij} = \left[a_{ij}b_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 2.4.2 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 10\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}\left[A \odot B\right] &= \begin{bmatrix}1(1) & 4(2)\\ 2(3) & 1(10)\\ 7(7) & 1(7)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 8\\ 6 & 10\\ 49 & 7\end{bmatrix}\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 โปรแกรม Wolfram Mathematica

โปรแกรม Wolfram Mathematica เป็นซอฟต์แวร์ที่ช่วยในการเรียนการสอนและการทำวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มีศักยภาพที่โดดเด่นเพื่อใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์และการคำนวณ รวมทั้งการพล็อตผลลัพธ์ก่อให้เกิดความเข้าใจในความหมายทางกายภาพได้โดยง่ายในเวลาอันสั้น จุดเด่นประการหนึ่งของซอฟต์แวร์นี้คือ คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ผู้ใช้สามารถกรอกสมการทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ตารางสัญลักษณ์) ให้ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ในรูปแบบที่เราเขียนด้วยมือหรือเรียนกันในชั้น ทำให้การลดการจดจำภาษาคอมพิวเตอร์สำหรับการใช้ซอฟต์แวร์ลงไปได้มาก

ในโปรแกรม Wolfram Mathematica จะเป็นการรับ ข้อมูลเข้า เป็นคำสั่งต่างๆ ตามด้วยสมการ และ ทำการหาคำตอบของ คำสั่งเหล่านั้น

พื้นฐานการใช้ Wolfram Symbolic Transfer Protocol (WSTP)

Wolfram Symbolic Transfer Protocol คือ ข้อกำหนดในการสื่อสารระหว่าง ภาษาจาวากับ Wolfram Mathematica โดย จะ ส่งข้อมูลภายนอกมายัง Wolfram โดยแปลงข้อมูลนั้นมาเป็นภาษา Wolfram เพื่อทำการหาคำตอบ

การเรียกใช้ Wolfram Mathematica จากโปรแกรมภายนอก

1. เรียกใช้ Wolfram จาก โปรแกรมภายนอก

2.เลือกข้อมูลที่จะส่งไปยัง Wolfram

3.ส่งข้อมูลนั้นไปยัง Wolfram

4. Wolfram ทำการหาผลลัพธ์ โดยส่งไปยัง Wolfram System processes เพื่อทำการหาคำตอบและ สามารถส่งข้อมูลกลับมาที่โปรแกรมภายนอกนั้น

2.6 การเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุด้วยภาษา JAVA

การเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ คือการเขียนโปรแกรมโดย การมองว่า ส่วนประกอบของโปรแกรมเป็นเสมือนวัตถุชิ้นหนึ่งที่ประกอบไปด้วยคุณสมบัติ (property) ซึ่งจะสามารถอธิบายได้ว่าวัตถุนี้คืออะไร และ วิธีการ(method) ซึ่งจะสามารถอธิบายพฤติกรรมของวัตถุนั้นว่าสามารถทำอะไรได้ การเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ เป็นการแบ่งซอฟท์แวร์หรือโปรแกรมออกเป็นส่วนๆ เรียกว่า class โดยการนิยาม class และ object ก็เพื่อทำให้สามารถนำส่วนของซอฟท์แวร์หรือโปรแกรมส่วนนั้นกลับมา เรียกใช้งานได้อีกเพื่อลดความซ้ำซ้อนและเวลาในการพัฒนาโปรแกรมลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.1 หลักสำคัญของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ ด้วย ภาษา JAVA

1. Class คือ กลุ่มของ objects ที่มีคุณสมบัติและพฤติกรรมที่เหมือนกัน โดย class จะต้องประกอบไปด้วย Attribute (Data Member , Property , Data) และ Method (Code , Behavior)

2.Object คือ สิ่งใดๆก็ตาม ซึ่งมีคุณลักษณะ (State) บ่งบอกถึงความเป็นตัวเองในขณะนั้น และสามารถแสดงพฤติกรรม (Behavior) ของตัว เองออกมาได้ เช่น รถยนต์สีน้ำเงิน : มีความหมายคือวัตถุประเภทรถยนต์มีคุณลักษณะของสีเป็นสีน้ำเงิน และมีพฤติกรรมที่แสดงถึงการเคลื่อนที่ และหยุดได้ หรือ กล่าวได้ว่า object ก็คือข้อ มูลของ class ซึ่งทุกๆ อย่างจะจัดเป็น objects โดยต้องประกอบไปด้วย – ชื่อ (Identity) - สถานะ (State) คุณสมบัติหรือค่าของข้อมูล ซึ่งแทนด้วย value - พฤติกรรม (Behavior) ที่ระบุว่าสามารถทำอะไรได้บ้าง ซึ่งแทนด้วย method

3.method คือ ลำดับขั้นตอนการทำงานของ class เพื่อบอกพฤติกรรมของ object ว่าสามารถทำอะไรได้บ้าง กำหนดไว้ใน class จะประกอบด้วย ชื่อของ method เรียกว่า Identifier

Message คือ คำสั่งหรือข้อความที่จะให้ข้อมูลหรือตัวแปรใดทำงาน ก็คือ parameter ในภาษาอื่นที่ไม่ใช่ OOP คือใช้เพื่อนำส่งค่าข้อมูลระหว่าง object

<OBJECT_NAME>.<METHOD_NAME>(<args>);

Object declaration

คือ การประกาศชื่อของ object และระบุว่า object นั้น สร้างมาจาก class ใด มีรูปแบบดังนี้

<CLASS_NAME> <OBJECT_NAME>

Object creation

คือ การสร้าง object ขึ้นจริงโดยการใช้ 'new' operator และระบุให้เข้าถึง object ผ่านทางชื่อตัวแปรที่ประกาศไว้ก่อนแล้วมีรูปแบบดังนี้

<OBJECT_NAME> = new <CLASS_NAME>(<args>);

Constructor

Constructor คือ method ที่มีชื่อเหมือนกับ class มีหน้าที่กำหนดค่าให้กับตัวแปรของ class (data member) โดยมี syntax ดังนี้

public < CLASS _NAME> (< parametor >) { <statement> }

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. Encapsulation

Information hiding

Information hiding คือ การซ่อนข้อมูลเพื่อไม่ให้ user เปลี่ยนแปลงข้อมูลที่จำเป็นหรือสามารถเข้าถึงข้อมูลได้ ซึ่งการเขียนแบบ object-oriented programming นั้นจะแนะนาให้ออกแบบโดยให้ data member เป็น private และmethod นั้นยังคงเป็น public

เมื่อเราใช้งาน statement โดยเราไม่สามารถเข้า ไปควบคุมหรือเปลี่ยนค่ามันได้นั้น ยกตัวอย่างเช่น หุ่นยนต์มี method สั่งการให้เคลื่อนที่ คือ method move() เราสามารถสั่งให้มันเคลื่อนที่ไปตามทิศทางที่กำหนดไว้ได้เป็นจำนวนหน่วย แต่เราไม่สามารถเข้าไปแก้ไขค่าใดๆ ใน method นั้นได้ เราจะเรียกว่า information hiding และตัวรีโมทควบคุมหุ่นยนต์ที่ซ่อนการทำงานทั้งหมดไว้เราจะเรียกว่า Encapsulation

Class Constants

การใช้ตัวแปร constants นั้นเราจะประกาศ final ไว้ที่ตัวแปรนั้น และ ประกาศ static สำหรับ data member

public และ private method

public method : ทุก class สามารถเข้าถึงได้

private method : สามารถเข้า ถึงได้แค่ class ที่ประกาศไว้เท่านั้น

public และ private data member

public data member : ทุก class สามารถเข้าถึงได้

private data member : สามารถเข้า ถึงได้แค่ class ที่ประกาศไว้เท่านั้น

static และ non-static method

static method : เป็น class method การ call static method ต้องใช้ดังรูปแบบนี้

ClassName.staticMethod(<parametor>)

non-static method : เป็น instance method ซึ่งการ call instance method นั้นต้องสร้าง object มาเพื่อเรียกดังรูปแบบนี้

objectName.nonStaticMethod(<parametor>)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Exception

ความผิดพลาดของ Java แบ่งออกเป็น 2 ชนิด Error เป็นความผิดพลาดชนิดร้ายแรง ซึ่งเมื่อเกิดขึ้นแล้ว โปรแกรมจะหยุดทำงานทันที เช่น Disk เสีย, หน่วยความจำไม่พอ Exception เป็นความผิดพลาดชนิดที่ สามารถควบคุมให้โปรแกรมทำงานต่อไปได้ โดยมีกระบวนการจับการผิดพลาดซึ่งเราจะใช้ try-catch block มาช่วยในการแก้ปัญหา

5.Inheritance and Polymorphism

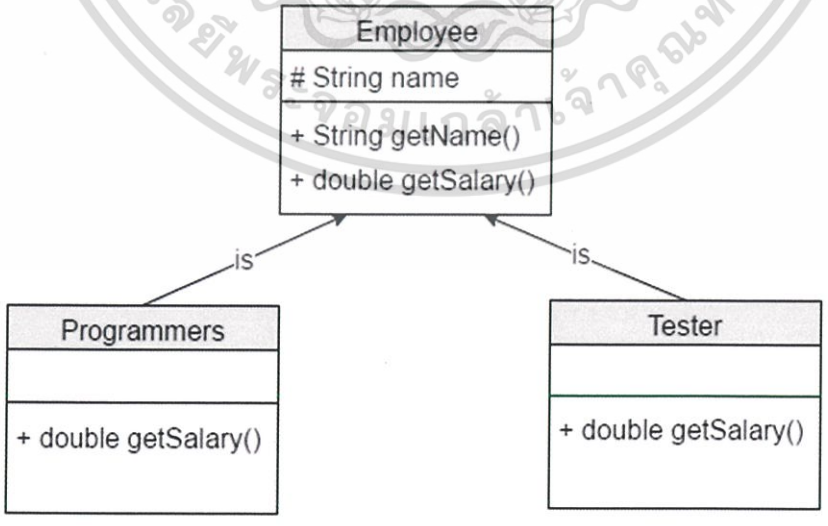
Inheritance **คือ** การสืบทอดคุณสมบัติ และคุณลักษณะ

ในภาษา java นั้น ส่วนที่สามารถสืบทอดได้นั้นจะต้องเป็น non private ถ้าเป็น private นั้น จะไม่สามารถสืบทอดได้ โดยเราจะเรียก class ต่างๆที่สืบทอดมานั้นว่า subclass และเรียก class แม่ว่า superclass โดยทุกๆ class ใน java นั้นจะมีการสืบทอดจาก class อื่นเสมอ โดย keyword ที่ใช้ในการระบุว่า จะสืบทอดคุณสมบัตินั้น เราจะใช้คำว่า extend ในการระบุ

- Class diagram ก่อนใช้ Inheritance

รูปภาพที่ 2.6.1 แผนภาพคลาสก่อนใช้การสืบทอด

- Class diagram หลังใช้ Inheritance



รูปภาพที่ 2.6.2 แผนภาพคลาสหลังใช้การสืบทอด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพิ่มเติม : ถ้า class ที่เราจะ extend มี private data member หรือ method ให้เราเปลี่ยน keyword คำว่า private เป็น protected แทนเพื่อที่จะให้ส่วนที่เป็น private สืบทอดมาทางสาย hierarchy ได้

Overiding Method เป็น Method ชนิดหนึ่ง ที่อยู่ในกระบวนการ การสืบทอด (Inheritance) เป็นการสร้าง Method ซ้ำใน subclass โดยที่ method นั้นมีการสร้างเอาไว้แล้วที่ superclass เพื่อสร้างหน้าที่การทำงานใหม่ให้เกิดขึ้น และแตกต่างไปจากเดิมแต่ยังคงชื่อ method เดิมเอาไว้

6.Polymorphism คือ คุณสมบัติที่ทำให้การทำงานของ Object หนึ่งมีได้หลายรูปแบบ (เรียกว่าหนึ่งรูปหลายพฤติกรรม) เช่น คนก็มีพฤติกรรม การวิ่ง สุนัข ก็มี พฤติกรรม การวิ่ง แต่การวิ่งของคนและสุนัขต่างกัน กล่าวคือ คนใช้ขา 2 ขาในการวิ่ง แต่สุนัข ใช้ 4 ขา

ตัวอย่าง 2.7.1 class Employee ที่มีการทำงานของ getSalary ที่แตกต่างกันเพราะเป็น object คนละตัวกัน

main() method

```
package main;

public class Main {

    public static void main(String[] args) {

        Employee e1 = new Programmers("wasin");
        System.out.println(e1.getName() + " SALARY : " + e1.getSalary());

        Employee e2 = new Tester("rapeepan");
        System.out.println(e2.getName() + " SALARY : " + e2.getSalary());
    }

}
```

รูปภาพที่ 2.6.3 เมท็อด main() สำหรับภาวะที่มีหลายรูปแบบ

- ผลลัพธ์

```
run:
wasin SALARY : 22000.0
rapeepan SALARY : 18000.0
BUILD SUCCESSFUL (total time: 2 seconds)
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปภาพที่ 2.6.4 ผลลัพธ์จากเมท็อด main()

7. Abstraction

คือ Class ชนิดหนึ่งที่สามารถกำหนด Method ทั้งในรูปแบบที่ระบุขั้นตอนการทำงาน (Method Description Process) และแบบระบุเพียงแค่ชื่อ Method และให้ Class อื่น ๆ ที่เรียกใช้งานนำไปเขียน ขั้นตอนการดำเนินงานเอง โดย abstraction concept นั้น จะแบ่ง class ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. Abstract Class คือ Class ที่ไม่ได้อยู่ล่างสุดของ hierarchy ถูกออกแบบมาเพื่อเป็น Super Class เท่านั้น เพื่อให้สืบทอดและไม่เหมาะที่จะสร้าง object เองที่ Class นี้ โดย class นี้จะ มี keyword คำว่า abstract อยู่หน้า class
2. Concrete Class คือ Class ที่อยู่ล่างสุดของ hierarchy เป็น class ที่ใช้งานจริง และ จะไม่มี abstract method ใน class นี้

การใช้ keyword abstract นั้น สามารถใช้ได้ทั้ง class และ method เมื่อประกาศ abstract ที่ method แล้วจะต้องประกาศที่ class ด้วย แต่หาก ประกาศที่ class นั้นไม่จำเป็นต้องประกาศที่ method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด

ในบทนี้จะกล่าวถึง สมบัติต่างๆของผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ เช่น สมบัติสลับที่ สมบัติการแจกแจงเหนือการบวก สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติสลับที่กับฟังก์ชัน สมบัติการเรียงสลับเปลี่ยน

3.1 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด (Hadamard convolution product)

บทนิยาม 3.1.1

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=[a_{ij}(t)]$ และ $B:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]$ โดยที่ $A(t), B(t)$ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดเขียนแทนด้วย

$$(A\tilde{\odot}B)(t)=[a_{ij}(t)*b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

บทตั้ง 3.1.2 ให้ $f:[0,b]\to\mathbb{R}$

$$A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R}), A(t)=[a_{ij}(t)]$$

$$B:[0,b]\to M_{p,q}(\mathbb{R}), B=(t)=[b_{ij}(t)]$$

สมมติว่า f, A, B ต่อเนื่อง

จะได้ว่า $(f(t)*A(t))\tilde{\odot}B(t)=A(t)\tilde{\odot}(f(t)*B(t))=f(t)*(A(t)\tilde{\odot}B(t))$ สำหรับทุก $t\in[0,b]$

ตัวอย่าง 3.1.3

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ \sin t\end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix}e^t\\ e^t\end{bmatrix}$

$$(A\tilde{\odot}B)(t)=\begin{bmatrix}a_{11}*b_{11}\\ a_{21}*b_{21}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^t*e^t\\ \sin t*e^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^t t\\ \frac{1}{2}(e^t-\cos t-\sin t)\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ... เนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 3.1.4 สมบัติการคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ด

1 $(A(t)+B(t))\tilde{\odot}C(t)=(A(t)\tilde{\odot}C(t))+(B(t)\tilde{\odot}C(t))$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), C(t)=[c_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

โดยที่ A,B,C หาปริพันธ์รีมันน์ได้

$$\begin{aligned}(A(t)+B(t))\tilde{\odot}C(t) &= [(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))]\tilde{\odot}C(t)\\ &= [(a_{ij}(t)+b_{ij}(t))*c_{ij}(t)]\\ &= [a_{ij}(t)*c_{ij}(t)]+[b_{ij}(t)*c_{ij}(t)]\\ &= (A(t)\tilde{\odot}C(t))+(B(t)\tilde{\odot}C(t))\end{aligned}$$

2 $A(t)\tilde{\odot}(\mathrm{B(t)}+C(t))=(\mathrm{A(t)}\tilde{\odot}B(t))+(\mathrm{A(t)}\tilde{\odot}C(t))$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), C(t)=[c_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

โดยที่ A,B,C หาปริพันธ์รีมันน์ได้

$$\begin{aligned}A(t)\tilde{\odot}(\mathrm{B(t)}+C(t)) &= A(t)\tilde{\odot}[(b_{ij}(t)+c_{ij}(t))]\\ &= [a_{ij}(t)*(b_{ij}(t)+c_{ij}(t))]\\ &= [a_{ij}(t)*b_{ij}(t)]+[a_{ij}(t)*c_{ij}(t)]\\ &= (A(t)\tilde{\odot}B(t)]+(A(t)\tilde{\odot}C(t))\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3 $A(t)\tilde{\odot}B(t)=B(t)\tilde{\odot}A(t)$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดยที่ A,B ต่อเนื่อง

พิจารณา $A(t)\tilde{\boxdot}B(t) = \left[a_{ij}(t)*b_{ij}(t)\right]$

$$=\left[b_{ij}(t)*a_{ij}(t)\right]$$

$$=B(t)\tilde{\odot}A(t)$$

4 $A(t)\tilde{\odot}(B(t)\tilde{\odot}C(t))=(A(t)\tilde{\odot}B(t))\tilde{\odot}C(t)$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), C(t)=[c_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

โดยที่ A,B,C ต่อเนื่อง

$A(t)\tilde{\odot}(B(t)\tilde{\odot}C(t)) = A(t)\tilde{\odot}[b_{ij}(t)*c_{ij}(t)]$

$$=[a_{ij}(t)*(b_{ij}(t)*c_{ij}(t))]$$

$$=[(a_{ij}(t)*b_{ij}(t))*c_{ij}(t)]$$

$$=[(a_{ij}(t)*b_{ij}(t))]\tilde{\odot}C(t)$$

$$=(A(t)\tilde{\odot}B(t))\tilde{\odot}C(t)$$

5 $(f(t)*A(t))\tilde{\odot}B(t)=f(t)*(A(t)\tilde{\odot}B(t))=A(t)\tilde{\odot}(f(t)*B(t))$

พิสูจน์ ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $t>0$ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ
$B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

โดยที่ f,A,B ต่อเนื่อง

$(f(t)*A(t))\tilde{\odot}B(t) = [f(t)*a_{ij}(t)]\tilde{\odot}B(t)$

$$=[f(t)*a_{ij}(t)*b_{ij}(t)]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\begin{aligned}
(f(t)*A(t))\tilde{\odot}B(t) &= f(t)*[a_{ij}(t)*b_{ij}(t)] \\
&= f(t)*(A(t)\tilde{\odot}B(t)) \\
&= [f(t)*a_{ij}(t)]\tilde{\odot}B(t) \\
&= [f(t)*a_{ij}(t)*b_{ij}(t)] \\
&= [a_{ij}(t)*f(t)*b_{ij}(t)] \\
&= A(t)*[f(t)*b_{ij}(t)] \\
&= A(t)\tilde{\odot}(f(t)*B(t))
\end{aligned}
$$

6 $(A(t)\tilde{\odot}B(t))^T = A(t)^T\tilde{\odot}B(t)^T$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดยที่ A,B ต่อเนื่อง

$$
\begin{aligned}
(A(t)\tilde{\odot}B(t))^T &= [(a_{ij}(t)*b_{ij}(t)]^T \\
&= [(a_{ji}(t)*b_{ji}(t)] \\
&= A(t)^T\tilde{\odot}B(t)^T
\end{aligned}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก

ในบทนี้จะกล่าวถึง สมบัติต่างๆของผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก และผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ เช่น สมบัติการแจกแจง สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการเรียงสลับเปลี่ยน เมทริกซ์ย่อย และความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกและผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก

4.1 ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก (Block Hadamard product)

บทนิยาม 4.1.1

ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B=[B_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ B_{kl} เป็นเมทริกซ์ย่อย A และ B มีความสัมพันธ์ $m \mid p$ และ $n \mid q$

ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย $A \boxdot B = \left[A \odot B_{kl}\right]_{kl} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

ตัวอย่าง 4.1.2

ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right]$ จะได้

$$A \boxdot B = \begin{bmatrix} A \odot B_{11} & A \odot B_{12} & A \odot B_{13} \\ A \odot B_{21} & A \odot B_{22} & A \odot B_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \boxdot \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} (1)1 & (2)4 & (1)5 & (2)1 & (1)2 & (2)2 \\ (3)3 & (4)4 & (3)4 & (4)1 & (3)1 & (4)2 \\ \hline (1)3 & (2)4 & (1)1 & (2)1 & (1)4 & (2)1 \\ (3)1 & (4)2 & (3)1 & (4)7 & (3)1 & (4)2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 8 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 16 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ \hline 3 & 8 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 3 & 28 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A \boxdot B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 16 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 3 & 28 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 4.1.3 สมบัติของผลคูณของฮาดามาร์ดแบบบล็อกของเมทริกซ์

1 $(A+B)\boxdot C = (A\boxdot C)+(B\boxdot C)$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B=\left[b_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), C=\left[C_{kl}\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m \mid p$ และ $n \mid q$

$$\begin{aligned}(A+B)\boxdot C &= \left[(A+B)\odot C_{kl}\right]_{kl} \\ &= \left[(A\odot C_{kl})+(B\odot C_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[A\odot C_{kl}\right]_{kl}+\left[B\odot C_{kl}\right]_{kl} \\ &= (A\boxdot C)+(B\boxdot C)\end{aligned}$$

2 $A\boxdot(B+C)=(A\boxdot B)+(A\boxdot C)$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B=\left[\mathrm{B}_{kl}\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R}), C=\left[C_{kl}\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m \mid p$ และ $n \mid q$

$$\begin{aligned}A\boxdot(\mathrm{B}+C) &= \left[\mathrm{A}\odot(\mathrm{B}_{kl}+C_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[(A\odot B_{kl})+(A\odot C_{kl})\right]_{kl} \\ &= \left[A\odot B_{kl}\right]_{kl}+\left[A\odot C_{kl}\right]_{kl} \\ &= (A\boxdot B)+(A\boxdot C)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3 $A \boxdot B = B \boxdot A$

พิสูจน์

สมบัตินี้เป็นจริงเมื่อ A และ B มีเพียงบล็อกเดียว และมีขนาดเท่ากัน ดังนี้

ให้ $A = \left[a_{ij} \right] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B = \left[b_{ij} \right] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

พิจารณา $A \boxdot B = A \odot B$

$= B \odot A$

4 $A \boxdot (B \boxdot C) = (A \boxdot B) \boxdot C$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), C = [C_{kl}] \in M_{p,q}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m \mid p \quad p \mid r \quad n \mid q \quad q \mid s$

$A = \left[a_{ij} \right] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B = \left[B_{kl} \right]_{kl} \in M_{p,q}(\mathbb{R}), C = \left[C_{uv} \right]_{uv} \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m \mid p \quad p \mid r \quad n \mid q \quad q \mid s$

$A \boxdot (B \boxdot C) = A \boxdot \left[B \odot C_{uv} \right]_{uv}$

$= A \boxdot \left[B_{kl} \odot C_{uv,kl} \right]_{uv,kl}$

$= A \boxdot [B_{kl} \odot C_{uv,kl}]_{uv,kl}$

$= \left[A \odot \left[B_{kl} \odot C_{uv,kl} \right]_{uv,kl} \right]_{uv,kl}$

$= \left[\left[A \odot B_{kl} \right]_{kl} \odot C_{uv,kl} \right]_{uv,kl}$

$= \left[(A \boxdot B) \odot C_{uv,kl} \right]_{uv,kl}$

$= (A \boxdot B) \boxdot C$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5 $(s*A)\boxdot B = s(A\boxdot B) = A\boxdot(sB)$

พิสูจน์ ให้ $s\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ

โดยที่ $m\mid p \quad n\mid q$

$$
\begin{aligned}
(sA)\tilde{\boxdot}B &= \left[(k*A)\odot B_{kl}\right]_{kl} \\
&= \left[k(A\odot B_{kl})\right]_{kl} \\
&= k\left[A\odot B_{kl}\right]_{kl} \\
&= k(A\boxdot B) \\
&= k\left[(A\odot B_{kl})\right]_{kl} \\
&= \left[k(A\odot B_{kl})\right]_{kl} \\
&= \left[A\odot(kB_{kl})\right]_{kl} \\
&= A\boxdot(kB)
\end{aligned}
$$

6 $(A\boxdot B)^T = A^T\boxdot B^T$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B=\left[B_{kl}\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\mid p, n\mid q$

$$
\begin{aligned}
(A\boxdot B)^T &= \left(\left[A\odot B_{kl}\right]_{kl}\right)^T \\
&= \left[A^T\odot {B_{lk}}^T\right]_{lk} \\
&= A^T\boxdot B^T
\end{aligned}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7 $A\boxdot B=\left[A\boxdot \hat{B}_{ij}\right]_{ij}$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B=\left[B_{kl}\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\mid p, n\mid q$

$$A\boxdot B = \left[A\odot B_{kl}\right]_{kl}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} A\odot B_{11}(t) & \cdots & A\odot B_{1\frac{q}{n}} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A\odot B_{\frac{p}{m}1} & & A\odot B_{\frac{p}{m}\frac{q}{n}} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} A\boxdot \hat{B}_{11} & \cdots & A\boxdot \hat{B}_{1v} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A\boxdot \hat{B}_{1u} & \cdots & A\boxdot \hat{B}_{uv} \end{array}\right], \begin{cases} u\in\mathbb{N}\ ;\ u\le \dfrac{p}{m} \\ v\in\mathbb{N}\ ;\ v\le \dfrac{q}{n} \end{cases}$$

$$= \left[A\boxdot \hat{B}_{ij}\right]_{ij}, i\in\{1,2,...,u\}, j\in\{1,2,...,v\}$$

8 $A\boxdot(B\oplus C)=A\boxdot B\oplus A\boxdot C$

พิสูจน์ ให้ $A\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B\in M_{p,q}(\mathbb{R}), C\in M_{x,y}(\mathbb{R})$ และ $C=[C_{kl}]\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\mid(p+x), n\mid(q+y)$

$$A\boxdot(B\oplus C) = A\boxdot\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\boxdot B & A\boxdot 0 \\ A\boxdot 0 & A\boxdot C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\boxdot B & 0 \\ 0 & A\boxdot C \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก (Block Hadamard convolution product)

บทนิยาม 4.2.1

ให้ $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=[b_{ij}(t)]\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $A(t), B(t)$ ฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และมีความสัมพันธ์ $m \mid p$ และ $n \mid q$ มี $B_{kl}(t)$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ $B(t)$ ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกนิยามโดย

$$A(t)\tilde{\boxdot}B(t)=\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$$

ตัวอย่างที่ 4.2.2

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & \sin t & e^t \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}
A\tilde{\boxdot}B &= \left[A\tilde{\odot}B_{11} \quad A\tilde{\odot}B_{12} \quad A\tilde{\odot}B_{13}\right] \\
&= \begin{bmatrix} e^t \\ \sin t \end{bmatrix}\tilde{\boxdot}\left[\begin{array}{c|cc} e^t & \cos t & \sin t \\ e^t & \sin t & e^t \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|cc} e^t\tilde{\odot}e^t & e^t\tilde{\odot}\cos t & e^t\tilde{\odot}\sin t \\ \sin t\tilde{\odot}e^t & \sin t\tilde{\odot}\sin t & \sin t\tilde{\odot}e^t \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} e^t t & \frac{1}{2}(e^t-\cos t+\sin t) & \frac{1}{2}(e^t-\cos t-\sin t) \\ \frac{1}{2}(e^t-\cos t-\sin t) & \frac{1}{2}(-t\cos t+\sin t) & \frac{1}{2}(e^t-\cos t-\sin t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.2.3

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t^3 \end{bmatrix}, B(t)=\begin{bmatrix} \cos 3t & t^2 \\ e^{2t} & \sin t \\ \sin 2t & \sin 3t \\ t^4 & e^t \\ e^{3t} & t^4 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \tilde{\boxdot} B = \begin{bmatrix} A \tilde{\odot} B_{11} \\ A \tilde{\odot} B_{21} \\ A \tilde{\odot} B_{31} \\ A \tilde{\odot} B_{41} \\ A \tilde{\odot} B_{51} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 & t^3 \end{bmatrix} \tilde{\boxdot} \begin{bmatrix} \cos 3t & t^2 \\ e^{2t} & \sin t \\ \sin 2t & \sin 3t \\ t^4 & e^t \\ e^{3t} & t^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 & t^3 \end{bmatrix} \tilde{\boxdot} \begin{bmatrix} \cos 3t & t^2 \\ \hline e^{2t} & \sin t \\ \hline \sin 2t & \sin 3t \\ \hline t^4 & e^t \\ \hline e^{3t} & t^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 \tilde{\odot} \cos 3t & t^3 \tilde{\odot} t^2 \\ \hline t^2 \tilde{\odot} e^{2t} & t^3 \tilde{\odot} \sin t \\ \hline t^2 \tilde{\odot} \sin 2t & t^3 \tilde{\odot} \sin 3t \\ \hline t^2 \tilde{\odot} t^4 & t^3 \tilde{\odot} e^t \\ \hline t^2 \tilde{\odot} e^{3t} & t^3 \tilde{\odot} t^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{27}(-3t+\sin 3t) & \frac{t^6}{60} \\ \frac{1}{4}(-1+e^{2t}-2t-2t^2) & -6t+t^3+6\sin t \\ \frac{1}{4}(-1+2t^2+\cos 2t) & \frac{1}{27}(-6t+9t^3+2\sin 3t) \\ \frac{t^7}{105} & -6+6e^t-t(6+t(3+t)) \\ \frac{t}{27}(-2+2e^{3t}-6t-9t^2) & \frac{t^7}{105} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.2.4

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \end{bmatrix}$, $B(t)=\begin{bmatrix} t^2 & \sin 2t & \sin t \\ \sin 2t & e^t & \cos t \\ \cos t & t^3 & e^t \\ \sin t & \sin 2t & \cos t \end{bmatrix}$ จะได้

$$A \tilde{\boxdot} B=\begin{bmatrix} A \tilde{\odot} B_{11} & A \tilde{\odot} B_{12} & A \tilde{\odot} B_{13} \\ A \tilde{\odot} B_{21} & A \tilde{\odot} B_{22} & A \tilde{\odot} B_{23} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \end{bmatrix} \tilde{\boxdot} \left[\begin{array}{c|c|c} t^2 & \sin 2t & \sin t \\ \hline \sin 2t & e^t & \cos t \\ \hline \cos t & t^3 & e^t \\ \hline \sin t & \sin 2t & \cos t \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} t^2 \tilde{\odot} t^2 & t^2 \tilde{\odot} \sin 2t & t^2 \tilde{\odot} \sin t \\ \hline \sin t \tilde{\odot} \sin 2t & \sin t \tilde{\odot} e^t & \sin t \tilde{\odot} \cos t \\ \hline t^2 \tilde{\odot} \cos t & t^2 \tilde{\odot} t^3 & t^2 \tilde{\odot} e^t \\ \hline \sin t \tilde{\odot} \sin t & \sin t \tilde{\odot} \sin 2t & \sin t \tilde{\odot} \cos t \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{t^5}{30} & \frac{1}{4}(-1+2t^2+\cos 2t) & -2+t^2+2\cos t \\ -\frac{2}{3}(-1+\cos t)\sin t & \frac{1}{2}e^t-\cos t-\sin t & \frac{1}{2}t\sin t \\ 2(t-\sin t) & \frac{t^6}{60} & -2+2e^t-t(2+t) \\ \frac{1}{2}(-t\cos t+\sin t) & -\frac{2}{3}(-1+\cos t)\sin t & \frac{1}{2}t\sin t \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 4.2.5 สมบัติการคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก

1 $\left(A(t)+B(t)\right)\tilde{\boxdot}C(t)=\left(A(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)+\left(B(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)$

พิสูจน์ ให้

$$A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}),B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}),C(t)=\left[C_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$$

โดยที่ $m\mid p$ และ $n\mid q$ และ A,B,C หาปริพันธ์รีมันน์ได้

$$\begin{aligned}\left(A(t)+B(t)\right)\tilde{\boxdot}C(t) &=\left[\left(A(t)+B(t)\right)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right]_{kl}\\ &=\left[\left(A(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right)+\left(B(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &=\left[A(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right]_{kl}+\left[B(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right]_{kl}\\ &=\left(A(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)+\left(B(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)\end{aligned}$$

2 $A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)+C(t)\right)=\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)+\left(A(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)$

พิสูจน์ ให้

$$A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}),B(t)=\left[B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R}),C(t)=\left[C_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$$

โดยที่ $m\mid p$ และ $n\mid q$ และ A,B,C หาปริพันธ์รีมันน์ได้

$$\begin{aligned}A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)+C(t)\right) &=\left[A(t)\tilde{\odot}\left(\mathrm{B}_{kl}(t)+C_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &=\left[\left(A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right)+\left(A(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &=\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}+\left[A(t)\tilde{\odot}C_{kl}(t)\right]_{kl}\\ &=\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)+\left(A(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3 $A(t)\tilde{\boxdot}B(t)=B(t)\tilde{\boxdot}A(t)$

สมบัตินี้เป็นจริงเมื่อ $A(t)$ และ $B(t)$ มีพียงบล็อกเดียว และมีขนาดเท่ากัน ดังนี้

พิสูจน์ สมบัตินี้เป็นจริงเมื่อ $A(t)$ และ $B(t)$ มีพียงบล็อกเดียว และมีขนาดเท่ากัน ดังนี้

ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ โดยที่ A,B ต่อเนื่อง

พิจารณา $A(t)\tilde{\boxdot}B(t)=A(t)\tilde{\odot}B(t)$

$$=B(t)\tilde{\odot}A(t)$$

$$=B(t)\tilde{\boxdot}A(t)$$

4 $A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)=\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)\tilde{\boxdot}C(t)$

พิสูจน์ ให้

$A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=\left[B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R}), C(t)=\left[C_{uv}(t)\right]_{uv}\in M_{r,s}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m\mid p \quad p\mid r \quad n\mid q \quad q\mid s \quad A,B,C$ ต่อเนื่อง

$$A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)\tilde{\boxdot}C(t)\right)=A(t)\tilde{\boxdot}\left[B(t)\tilde{\odot}C_{uv}(t)\right]_{uv}$$

$$=A(t)\tilde{\boxdot}\left[B_{kl}(t)\tilde{\odot}C_{uv,kl}(t)\right]_{uv,kl}$$

$$=A(t)\tilde{\boxdot}[B_{kl}(t)\tilde{\odot}C_{uv,kl}(t)]_{uv,kl}$$

$$=\left[A(t)\tilde{\odot}\left[B_{kl}(t)\tilde{\odot}C_{uv,kl}(t)\right]_{uv,kl}\right]_{uv,kl}$$

$$=\left[\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\tilde{\odot}C_{uv,kl}(t)\right]_{uv,kl}$$

$$=\left[\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)\tilde{\odot}C_{uv,kl}(t)\right]_{uv,kl}$$

$$=\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)\tilde{\boxdot}C(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5 $\left(f(t)*A(t)\right)\tilde{\boxdot}B(t)=f(t)*\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)=A(t)\tilde{\boxdot}\left(f(t)*B(t)\right)$

พิสูจน์ ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $t>0$ $A(t)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B(t)=\left[B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$

โดยที่ $m\,|\,p$ $n\,|\,q$ และ f,A,B ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned}\left(f(t)*A(t)\right)\tilde{\boxdot}B(t) &= \left[\left(f(t)*A(t)\right)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\\ &= \left[f(t)*\left(A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &= f(t)*\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\\ &= f(t)*\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)\\ &= f(t)*\left[\left(A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\right.\\ &= \left[f(t)*\left(A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &= \left[A(t)\tilde{\odot}\left(f(t)*B_{kl}(t)\right)\right]_{kl}\\ &= A(t)\tilde{\boxdot}\left(f(t)*B(t)\right)\end{aligned}$$

6 $\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)^{T}=A(t)^{T}\tilde{\boxdot}B(t)^{T}$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}),B(t)=\left[B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\,|\,p,n\,|\,q$

$$\begin{aligned}\left(A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\right)^{T} &= \left(\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}\right)^{T}\\ &= \left[A(t)^{T}\tilde{\odot}B_{lk}(t)\right]^{T}_{lk}\\ &= A(t)^{T}\tilde{\boxdot}B(t)^{T}\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7 $A(t)\tilde{\boxdot}B(t)=\left[A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{ij}(t)\right]_{ij}$

พิสูจน์ ให้ $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)=\left[B_{kl}(t)\right]_{kl}\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\mid p, n\mid q$

$$A(t)\tilde{\boxdot}B(t) = \left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} A(t)\tilde{\odot}B_{11}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\odot}B_{1\frac{q}{n}}(t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A(t)\tilde{\odot}B_{\frac{p}{m}1}(t) & & A(\mathrm{t})\tilde{\odot}B_{\frac{p}{m}\frac{q}{n}}(t) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{11}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{1v}(t) \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{1u}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{uv}(t) \end{array}\right], \begin{cases} u\in\mathbb{N}\ ;\ u\le\dfrac{p}{m} \\ v\in\mathbb{N}\ ;\ v\le\dfrac{q}{n} \end{cases}$$

$$= [A(t)\tilde{\boxdot}\hat{B}_{ij}(t)]_{ij}, i\in\{1,2,...,u\}, j\in\{1,2,...,v\}$$

8 $A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)\oplus C(t)\right)=A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\oplus A(t)\tilde{\boxdot}C(t)$

พิสูจน์ ให้ $A(t)\in M_{m,n}(\mathbb{R}), B(t)\in M_{p,q}(\mathbb{R}), C(t)\in M_{x,y}(\mathbb{R})$ และ $C(t)=[C_{kl}(t)]\in M_{p,q}(\Re)$ โดยที่ $m\mid(p+x), n\mid(q+y)$

$$A(t)\tilde{\boxdot}\left(B(t)\oplus C(t)\right) = A(t)\tilde{\boxdot}\begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(t)\tilde{\boxdot}B(t) & A(t)\tilde{\boxdot}0 \\ A(t)\tilde{\boxdot}0 & A(t)\tilde{\boxdot}C(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(t)\tilde{\boxdot}B(t) & 0 \\ 0 & A(t)\tilde{\boxdot}C(t) \end{bmatrix}$$

$$= A(t)\tilde{\boxdot}B(t)\oplus A(t)\tilde{\boxdot}C(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกและผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อก (Relation between block Hadamard convolution product and block Kronecker convolution product)

บทนิยาม 4.3.1 ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้

ให้ $A:[0,b]\to M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A(\mathrm{t})=\left[a_{ij}(\mathrm{t})\right]$ และ $B:[0,b]\to M_{p,q}(\mathbb{R})$, $B(\mathrm{t})=\left[B_{kl}(\mathrm{t})\right]$

เป็นฟังก์ชันค่าเมทริกซ์ที่หาปริพันธ์สัมบูรณ์ได้ ผลคูณคอนโวลูชันโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A(\mathrm{t})\tilde{\boxtimes}B(\mathrm{t})=\left[A(\mathrm{t})\tilde{\otimes}B_{kl}(\mathrm{t})\right]_{kl}\in M_{mp,nq}$$

นั่นคือ $A(\mathrm{t})\tilde{\boxtimes}B(\mathrm{t})$ มีบล็อกที่ (k,l) เป็น $A(\mathrm{t})\tilde{\otimes}B_{kl}(\mathrm{t})$ โดยที่แต่ละ $A(\mathrm{t})\tilde{\otimes}B_{kl}(\mathrm{t})$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด $mp_k\times nq_l$

แนวคิดของผลคูณฮาดามาร์ดถูกขยายไปเป็น ผลคูณฮาดามาร์ดแบบบล็อก $A\in M_{m,n}$ และ $B=[B_{kl}]\in M_{p,q}$ ดังนี้

$$A\boxdot B=[A\odot B_{kl}]_{kl}\in M_{p,q}$$

กำหนดให้ $u=\dfrac{p}{m}$, $v=\dfrac{q}{n}$ เมื่อ $B_{kl}(t)=\left[b_{ij,kl}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

กำหนดให้ $A(t)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ และ $B(t)\in M_{p,q}(\mathbb{R})$ โดยที่ $m\,|\,p$ and $n\,|\,q$ และ

$u=\dfrac{p}{m}$, $v=\dfrac{q}{n}$ เมื่อ $B_{kl}(t)=\left[b_{ij,kl}(t)\right]\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ แล้ว

$$A\tilde{\boxdot}B=[A\tilde{\boxtimes}B]_{\alpha,\beta}$$

โดยที่ $\mathrm{A}=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\ldots\cup\alpha_u$ ซึ่ง $\alpha_c=\left\{(c-1)m^2+(i-1)m+i:i=1,2,\ldots,m\right\}$

สำหรับ $c=1,2,\ldots,u$

$$\mathrm{B}=\beta_1\cup\beta_2\cup\ldots\cup\beta_v \text{ ซึ่ง } \beta_d=\left\{(d-1)n^2+(j-1)n+j:j=1,2,\ldots,n\right\}$$

สำหรับ $d=1,2,\ldots,v$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $A(t)=[a_{ij}(t)]\in M_{m,n}$ และ $B(t)=[B_{kl}(t)]=[b_{ij,kl}(t)]_{kl}\in M_{p,q}$ โดยที่ $m\mid p$ และ $n\mid q$

$$\left(A\tilde{\boxdot}B\right)(t)=\left[A(t)\tilde{\odot}B_{kl}(t)\right]_{kl}$$

$$=\begin{bmatrix} A(t)\tilde{\odot}B_{11}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\odot}B_{1v}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(t)\tilde{\odot}B_{u1}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\odot}B_{uv}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11}(t)*b_{11,11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{1n,11}(t) & & a_{11}(t)*b_{11,1v}(t) & \cdots & a_{1n}*b_{1n,1v}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t)*b_{m1,11}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{mn,11}(t) & & a_{m1}(t)*b_{m1,1v}(t) & \cdots & a_{mn}*b_{mn,1v}(t) \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{3}{c}{\vdots} \\ \hline a_{11}(t)*b_{11,u1}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{1n,u1}(t) & & a_{11}(t)*b_{11,uv}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{1n,uv}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t)*b_{m1,u1}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{mn,u1}(t) & & a_{m1}(t)*b_{m1,uv}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{mn,uv}(t) \end{array}\right]$$

$$\left(A\tilde{\boxtimes}B\right)(t)=\left[A\tilde{\otimes}B_{kl}\right]_{kl}(t)=\left[A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t)\right]_{kl}=\begin{bmatrix} A(t)\tilde{\otimes}B_{11}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\otimes}B_{1l}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(t)\tilde{\otimes}B_{k1}(t) & \cdots & A(t)\tilde{\otimes}B_{kl}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(\left[a_{ij}*B_{11}\right]_{ij}\right)(t) & \cdots & \left(\left[a_{ij}*B_{1v}\right]_{ij}\right)(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\left[a_{ij}*B_{u1}\right]_{ij}\right)(t) & \cdots & \left(\left[a_{ij}*B_{uv}\right]_{ij}\right)(t) \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11}(t)*B_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*B_{11}(t) & & a_{11}(t)*B_{1v}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*B_{1v}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t)*B_{11}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*B_{11}(t) & & a_{m1}(t)*B_{1v}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*B_{1v}(t) \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{3}{c}{\vdots} \\ \hline a_{11}(t)*B_{u1}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*B_{u1}(t) & & a_{11}(t)*B_{uv}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*B_{uv}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t)*B_{u1}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*B_{u1}(t) & & a_{m1}(t)*B_{uv}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*B_{uv}(t) \end{array}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(A\tilde{\boxtimes}B\right)(t)=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{11}(t)*b_{ij,11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{ij,11}(t) & & a_{11}(t)*b_{ij,1v}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{ij,1v}(t) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}(t)*b_{ij,11}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{ij,11}(t) & & a_{m1}(t)*b_{ij,1v}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{ij,1v}(t) \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{3}{c}{\vdots} \\
\hline
a_{11}(t)*b_{ij,u1}(t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{ij,u1}(t) & & a_{11}(t)*b_{ij,uv}](t) & \cdots & a_{1n}(t)*b_{ij,uv}(t) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}(t)*b_{ij,u1}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{ij,u1}(t) & & a_{m1}(t)*b_{ij,uv}(t) & \cdots & a_{mn}(t)*b_{ij,uv}(t)
\end{array}\right]$$

ดังนั้น จากการสังเกตสมาชิกในบล็อกย่อยของเมทริกซ์ $A\tilde{\boxdot}B$ และ $A\tilde{\boxtimes}B$ ทำให้เราเขียนความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

$$A\tilde{\boxdot}B=[A\tilde{\boxtimes}B]_{\alpha,\beta}$$

โดยที่ $\mathrm{A}=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\ldots\cup\alpha_u$ ซึ่ง $\alpha_c=\left\{(c-1)m^2+(i-1)m+i:i=1,2,\ldots,m\right\}$

สำหรับ $c=1,2,\ldots,u$

$$\mathrm{B}=\beta_1\cup\beta_2\cup\ldots\cup\beta_v \text{ ซึ่ง } \beta_d=\left\{(d-1)n^2+(j-1)n+j:j=1,2,\ldots,n\right\}$$

สำหรับ $d=1,2,\ldots,v$

ตัวอย่าง 4.3.1

ให้ $A(t)=\begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}$ $B(t)=\left[\begin{array}{cc|cc}\sin t & t^2 & \cos t & \sin t\\ \hline \cos t & \sin t & t^2 & 2t\\ \hline \cos t & t^2 & t & 3t\end{array}\right]$

$$A(t)\tilde{\boxdot}B(t)=\left[\begin{array}{c|c}\begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}\sin t & t^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}t^2 & 2t\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}\cos t & t^2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\sin t & \cos t\end{bmatrix}\tilde{\odot}\begin{bmatrix}t & 3t\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(-t\cos t+\sin t)}{2} & 2(t-\sin t) & \dfrac{t\sin t}{2} & \dfrac{t\sin t}{2}\\ \dfrac{t\sin t}{2} & \dfrac{t\sin t}{2} & t^2+2\cos t-2 & -2\cos t+2\\ \dfrac{t\sin t}{2} & 2(t-\sin t) & t-\sin t & -3\cos t+3\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(t)\tilde{\boxtimes}B(t)=\left[\begin{array}{cc|cc} \sin t*\left[\sin t\ \ t^2\right] & \cos t*\left[\sin t\ \ t^2\right] & \sin t*\left[\cos t\ \ \sin t\right] & \cos t*\left[\cos t\ \ \sin t\right] \\ \hline \sin t*\left[\cos t\ \ \sin t\right] & \cos t*\left[\cos t\ \ \sin t\right] & \sin t*\left[t^2\ \ 2t\right] & \cos t*\left[t^2\ \ 2t\right] \\ \hline \sin t*\left[\cos t\ \ t^2\right] & \cos t*\left[\cos t\ \ t^2\right] & \sin t*\left[t\ \ 3t\right] & \cos t*\left[t\ \ 3t\right] \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\left(-t\cos t+\sin t\right)}{2} & t^2+2\cos t-2 & \frac{t\sin t}{2} & 2\left(t-\sin t\right) & \frac{t\sin t}{2} & \frac{\left(-t\cos t+\sin t\right)}{2} & \frac{\left(t\cos t+\sin t\right)}{2} & \frac{t\sin t}{2} \\ \frac{t\sin t}{2} & \frac{\left(-t\cos t+\sin t\right)}{2} & \frac{\left(t\cos t+\sin t\right)}{2} & \frac{t\sin t}{2} & t^2+2\cos t-2 & 2\left(t-\sin t\right) & 2\left(t-\sin t\right) & -2\cos t+2 \\ \frac{t\sin t}{2} & t^2+2\cos t-2 & \frac{\left(t\cos t+\sin t\right)}{2} & 2\left(t-\sin t\right) & t-\sin t & 3\left(t-\sin t\right) & 1-\cos t & 3-3\cos t \end{array}\right]$$

จะเห็นว่า $u=\frac{3}{1}=3$, $v=\frac{4}{2}=2$

จะได้ $\mathrm{A}=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3$ $\alpha_1=\{i\}=\{1\}$

$$\alpha_2=\{2i\}=\{2\}$$

$$\alpha_2=\{2i+1\}=\{3\}$$

และ $\mathrm{B}=\beta_1\cup\beta_2$ $\beta_1=\{3j-2\}=\{1,4\}$

$$\beta_2=\{2+3j\}=\{5,8\}$$

นั่นคือ $\mathrm{A}=\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3=\{1,2,3\}$ และ $\mathrm{B}=\beta_1\cup\beta_2=\{1,4,5,8\}$

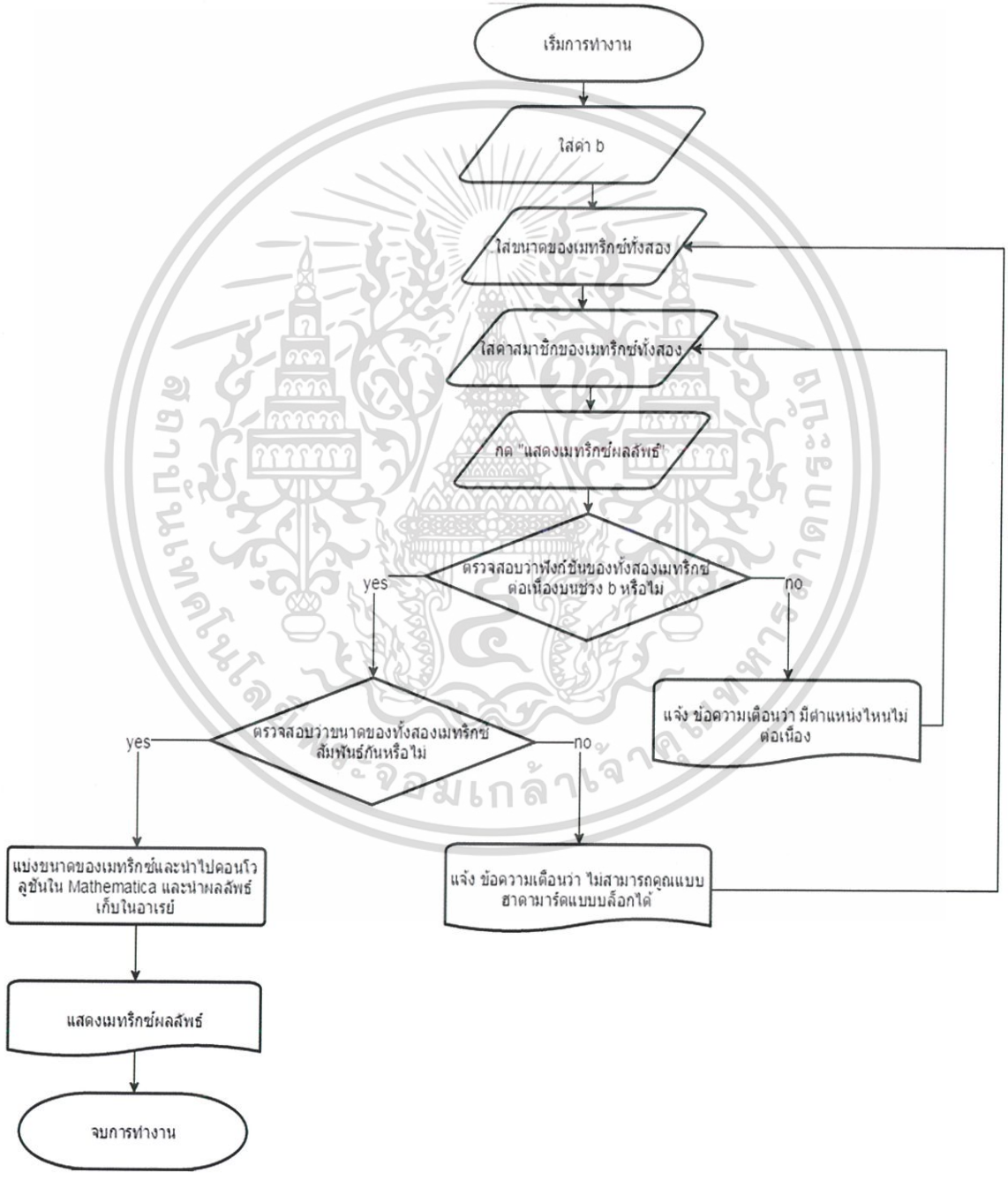
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การออกแบบและการใช้งานโปรแกรม

ในบทนี้จะกล่าวถึง ขั้นตอนการทำงาน หน้าต่างโปรแกรม ขั้นตอนการใช้งานและตัวอย่างการใช้งานโปรแกรมแสดงผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก

5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแสดงผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก

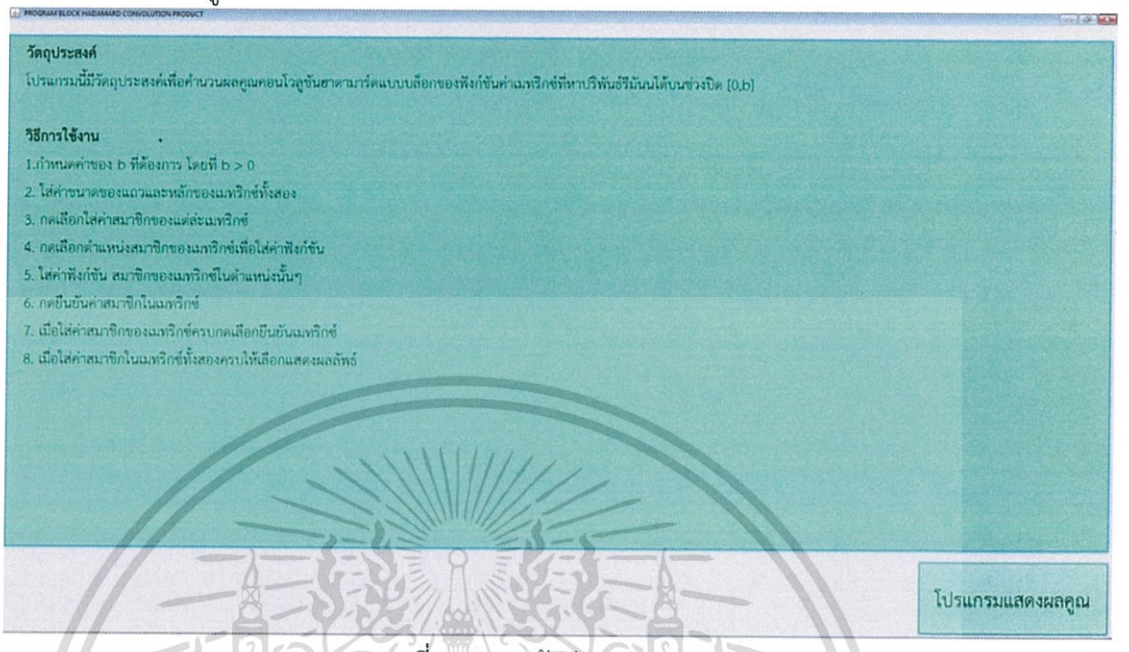


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปภาพที่ 5.1.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม 1

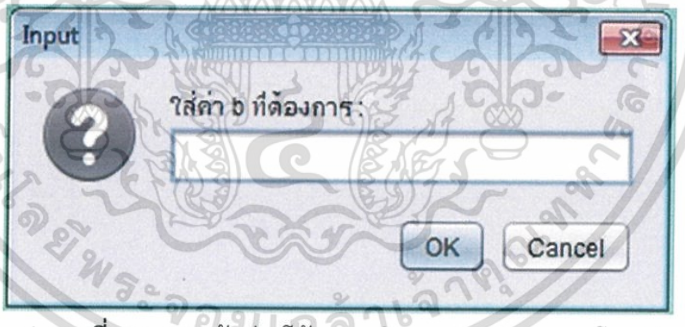
5.2 หน้าต่างของโปรแกรมแสดงผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อก

1. หน้า เริ่มต้นแสดงคู่มือการใช้งานเบื้องต้น



รูปภาพที่ 5.2.1 หน้าต่าง Home

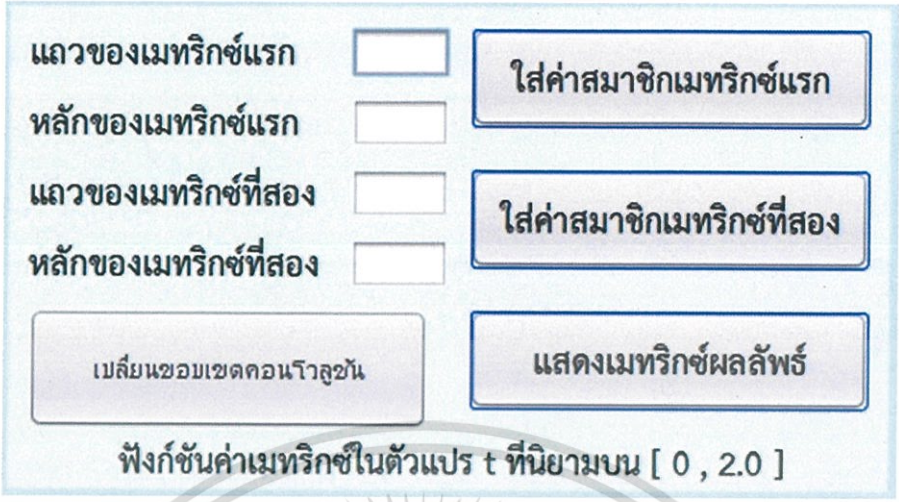
2. แสดงหน้าต่างโต้ตอบ ใส่ขอบเขตของการคอนโวลูชัน



รูปภาพที่ 5.2.2 หน้าต่างโต้ตอบ กำหนดขอบเขตคอนโวลูชัน

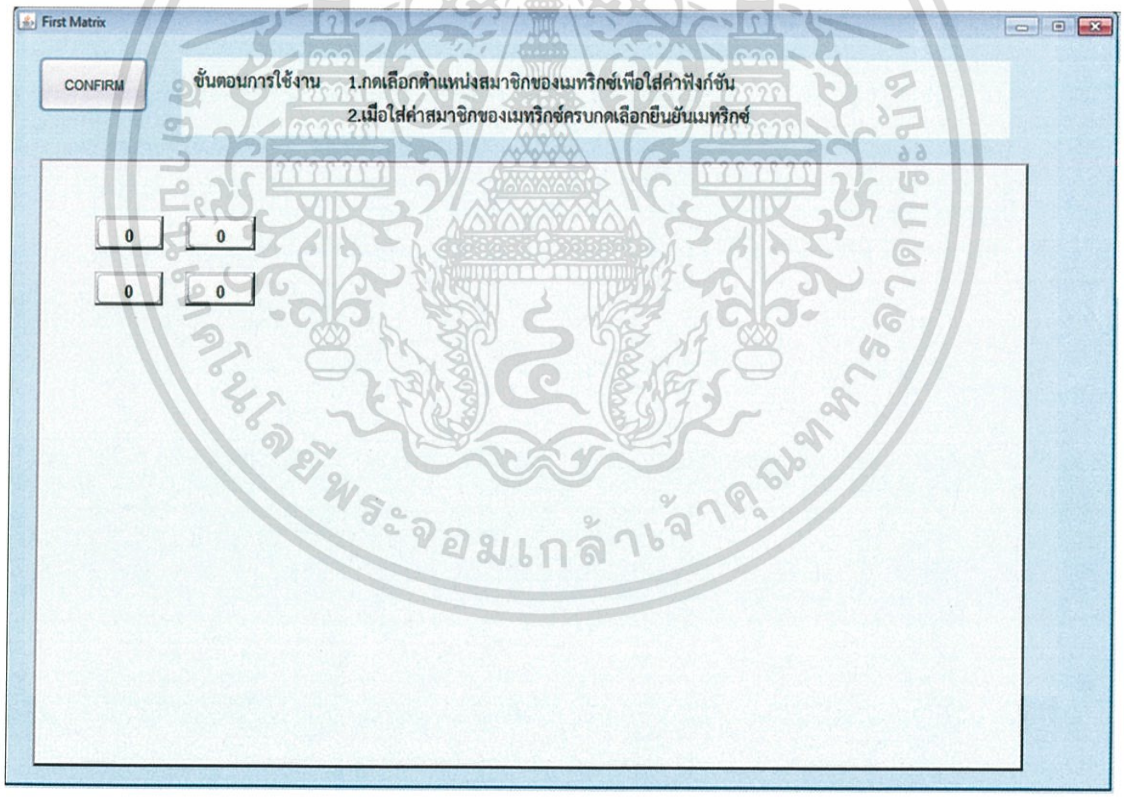
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. หน้าต่างใส่ขนาดเมทริกซ์ทั้ง 2 เมทริกซ์



รูปภาพที่ 5.2.3 หน้าต่างใส่ขนาดเมทริกซ์

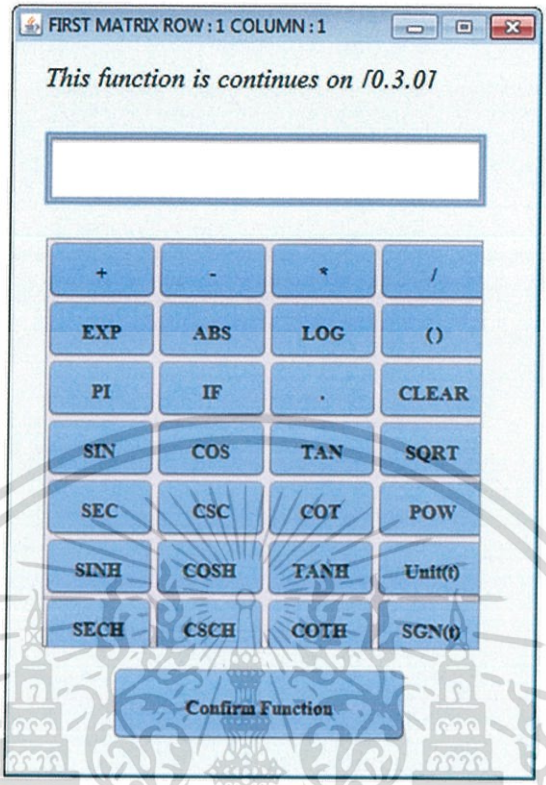
4. หน้าใส่สมาชิกของเมทริกซ์ของแต่ละเมทริกซ์



รูปภาพที่ 5.2.4 หน้าต่างเลือกตำแหน่งสมาชิก

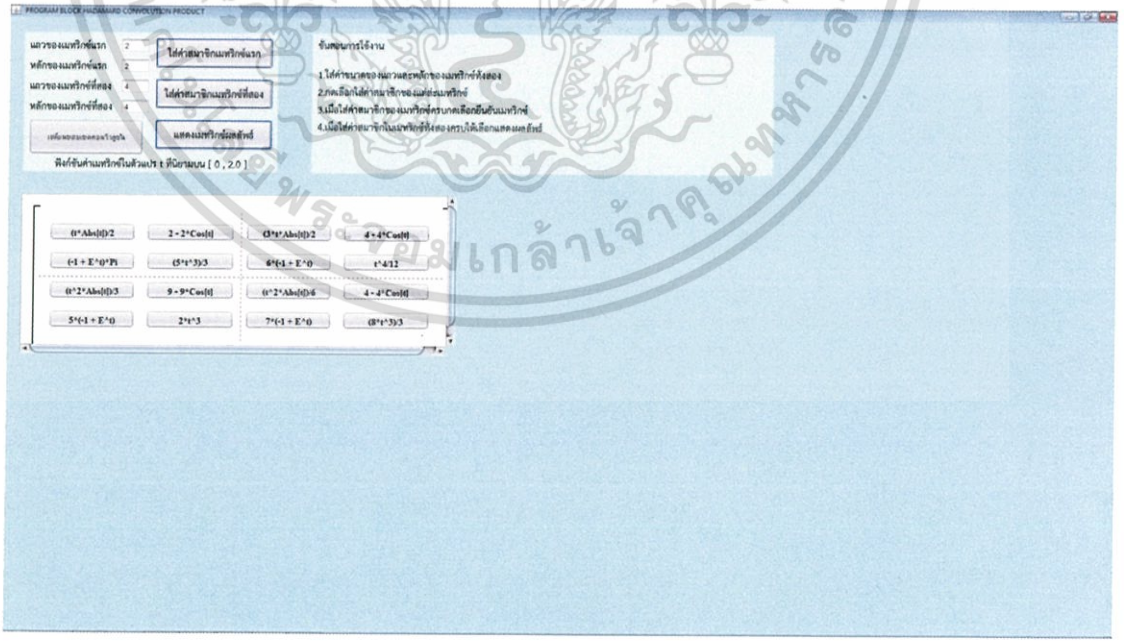
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. Input ค่าฟังก์ชัน $f(t)$



รูปภาพที่ 5.2.5 หน้าต่างใส่ฟังก์ชัน

6. ผลลัพธ์เมทริกซ์

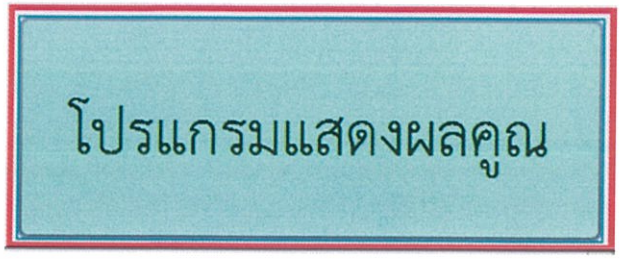


รูปภาพที่ 5.2.6 หน้าต่างผลลัพธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

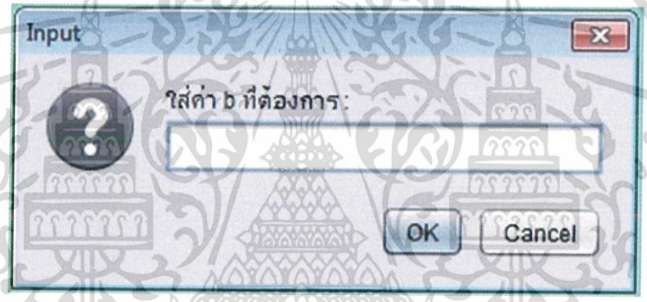
5.3 ขั้นตอนและตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม

1. เริ่มการทำงานของโปรแกรมโดยการกด “โปรแกรมแสดงผลคูณ”



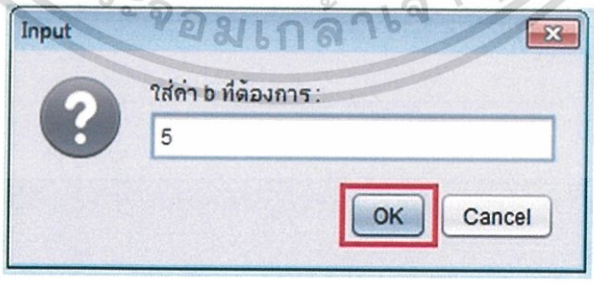
รูปภาพที่ 5.3.1 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 1

2. กำหนดขอบเขตของการคอนโวลูชันหลังจาก กด “โปรแกรมแสดงผลคูณ”



รูปภาพที่ 5.3.2 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 2

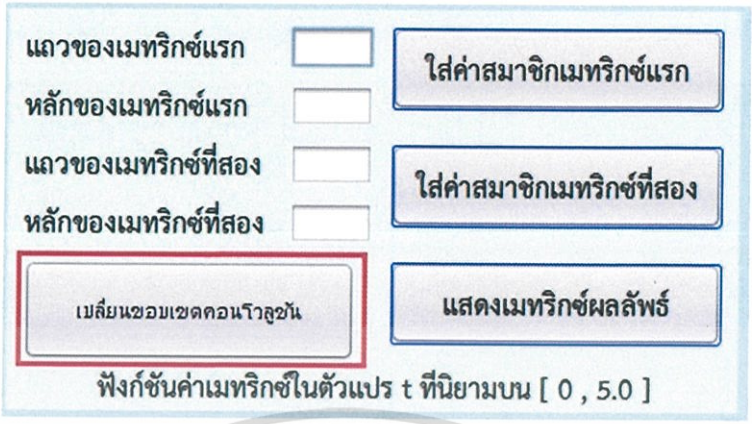
3.จากนั้นกด “ยืนยัน”



รูปภาพที่ 5.3.3 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 3

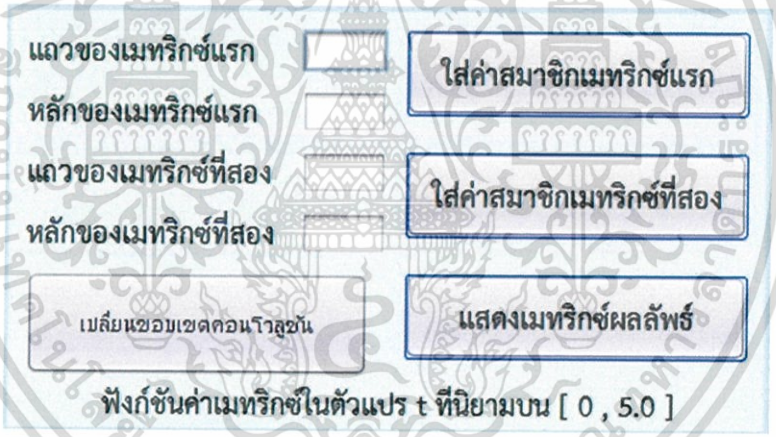
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. จะแสดงช่วงของการคอนโวลูชัน $[0,b]$



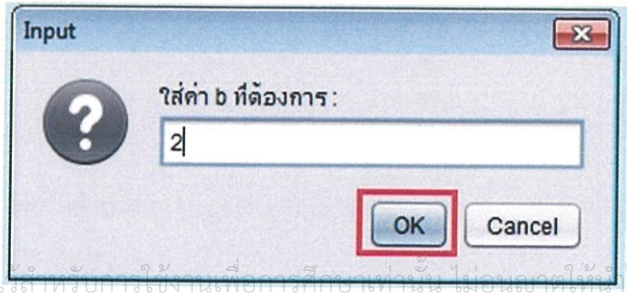
รูปภาพที่ 5.3.4 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 4

5.เมื่อต้องการเปลี่ยนช่วงของการคอนโวลูชันใหม่ ได้ด้วยการกด “เปลี่ยนขอบเขตคอนโวลูชัน”



รูปภาพที่ 5.3.5 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 5

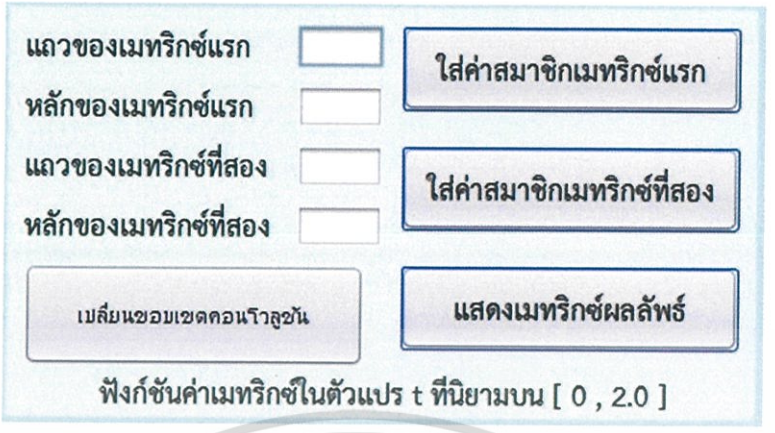
6.จากนั้น กำหนดขอบเขตการคอนโวลูชันใหม่ และกดยืนยัน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

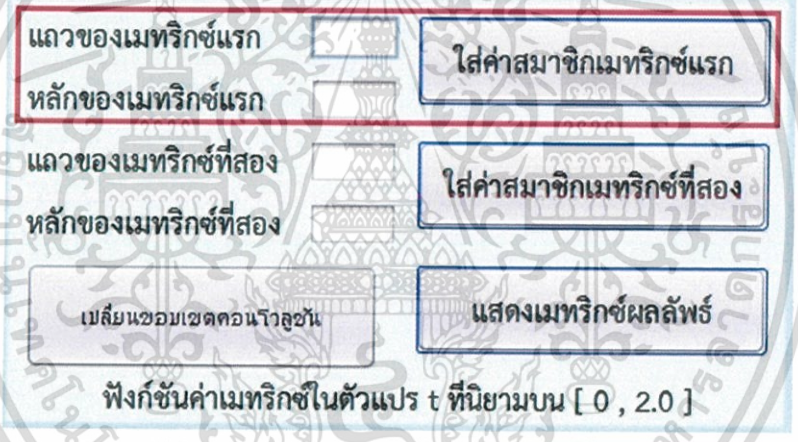
รูปภาพที่ 5.3.6 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 6

7.หน้าใส่ขนาดเมทริกซ์ จะแสดงขอบเขตการคอนโวลูชันใหม่



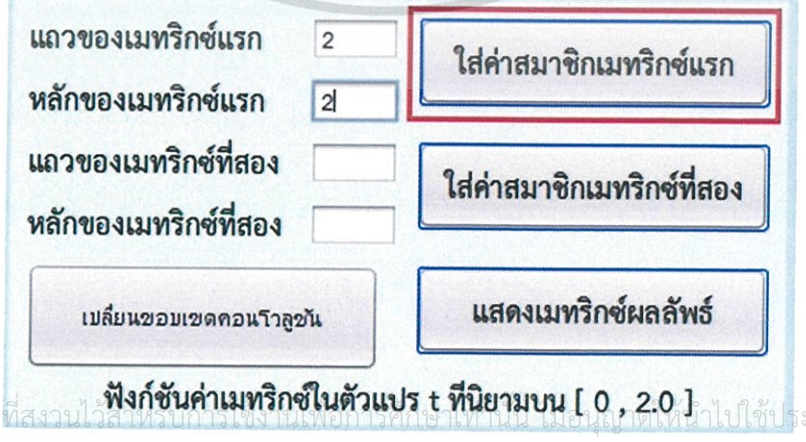
รูปภาพที่ 5.3.7 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 7

8.เลือกใส่ขนาดเมทริกซ์แรกก่อน



รูปภาพที่ 5.3.8 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 8

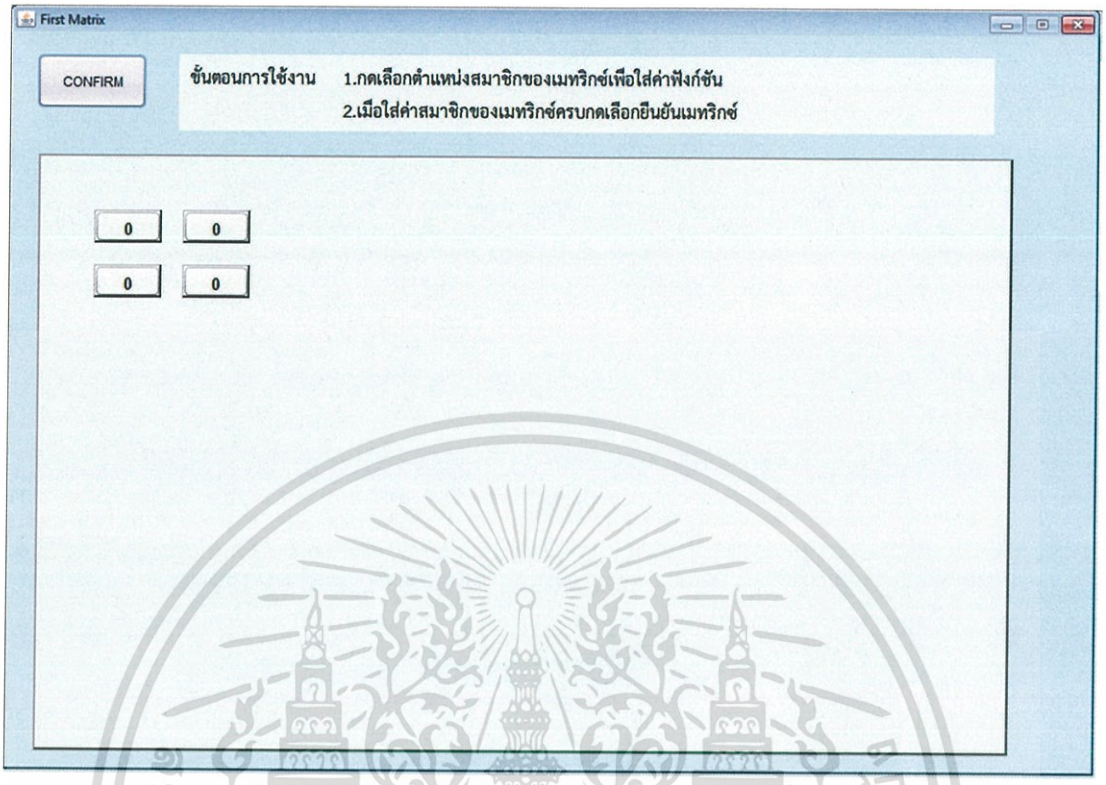
9.จากนั้น กด “ใส่ค่าสมาชิกเมทริกซ์แรก”



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

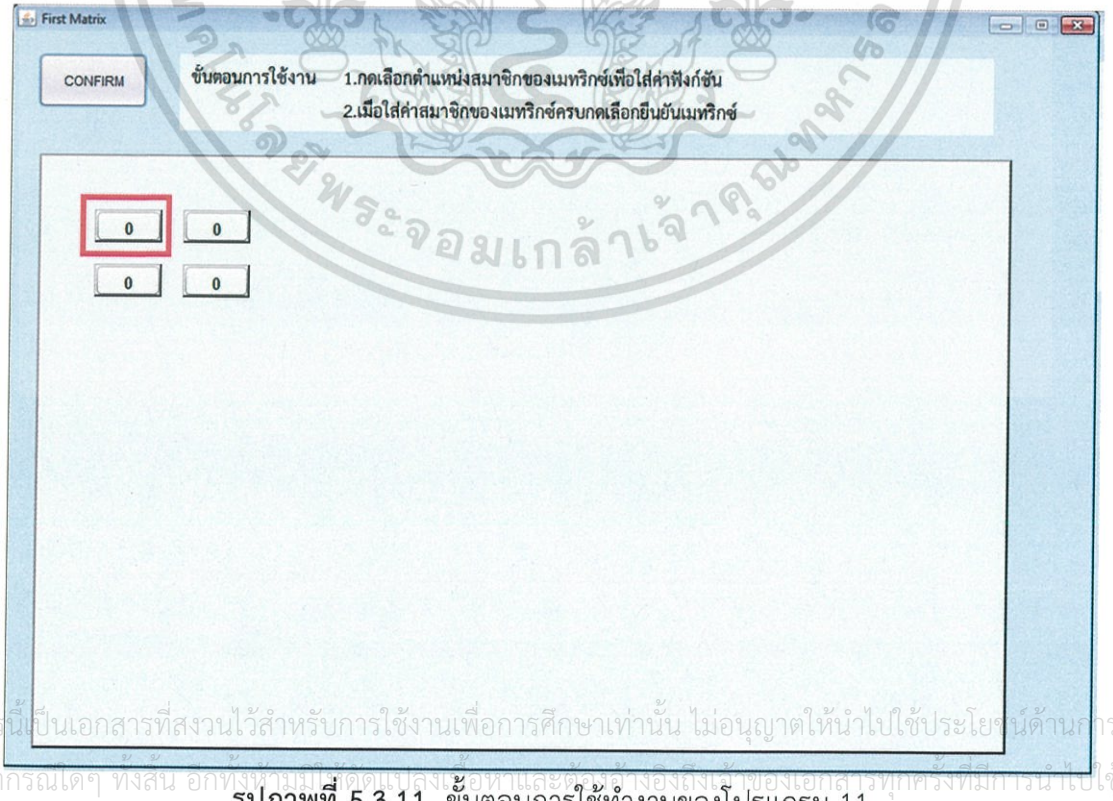
รูปภาพที่ 5.3.9 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 9

10.จะแสดงหน้าต่างเลือกตำแหน่งสมาชิก ของเมทริกซ์แรก



รูปภาพที่ 5.3.10 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 10

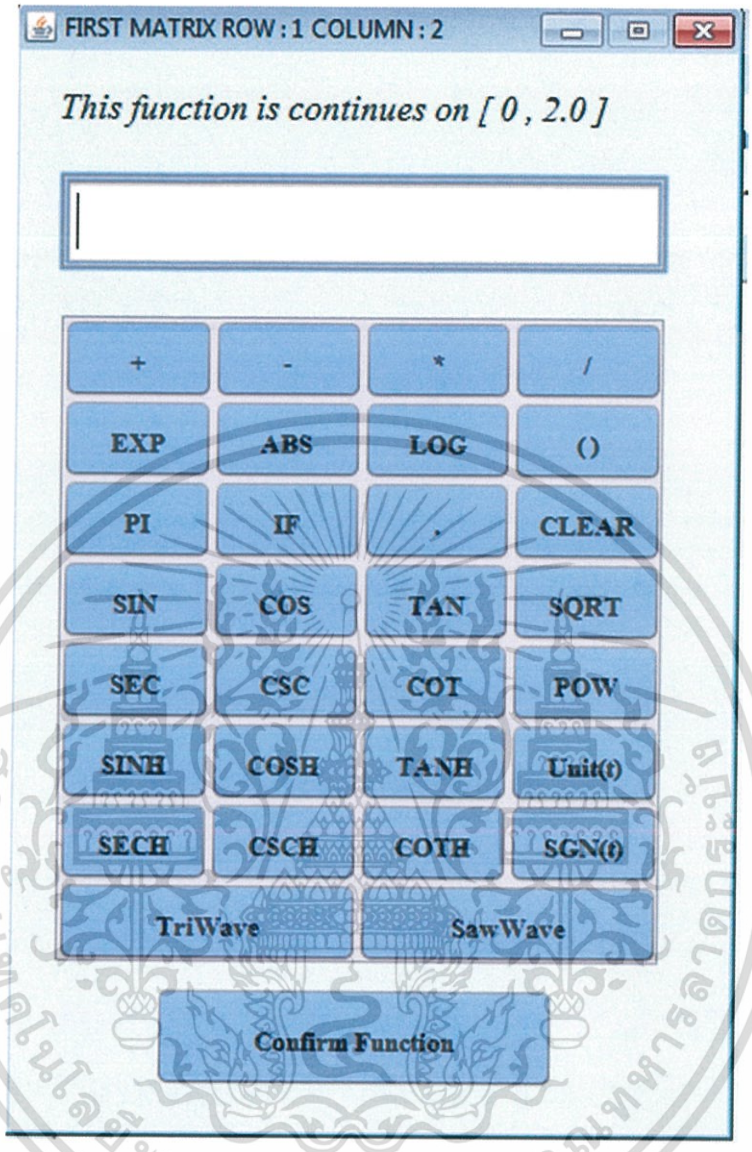
11.เลือกตำแหน่งสมาชิกที่ต้องการใส่ค่าฟังก์ชัน



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปภาพที่ 5.3.11 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 11

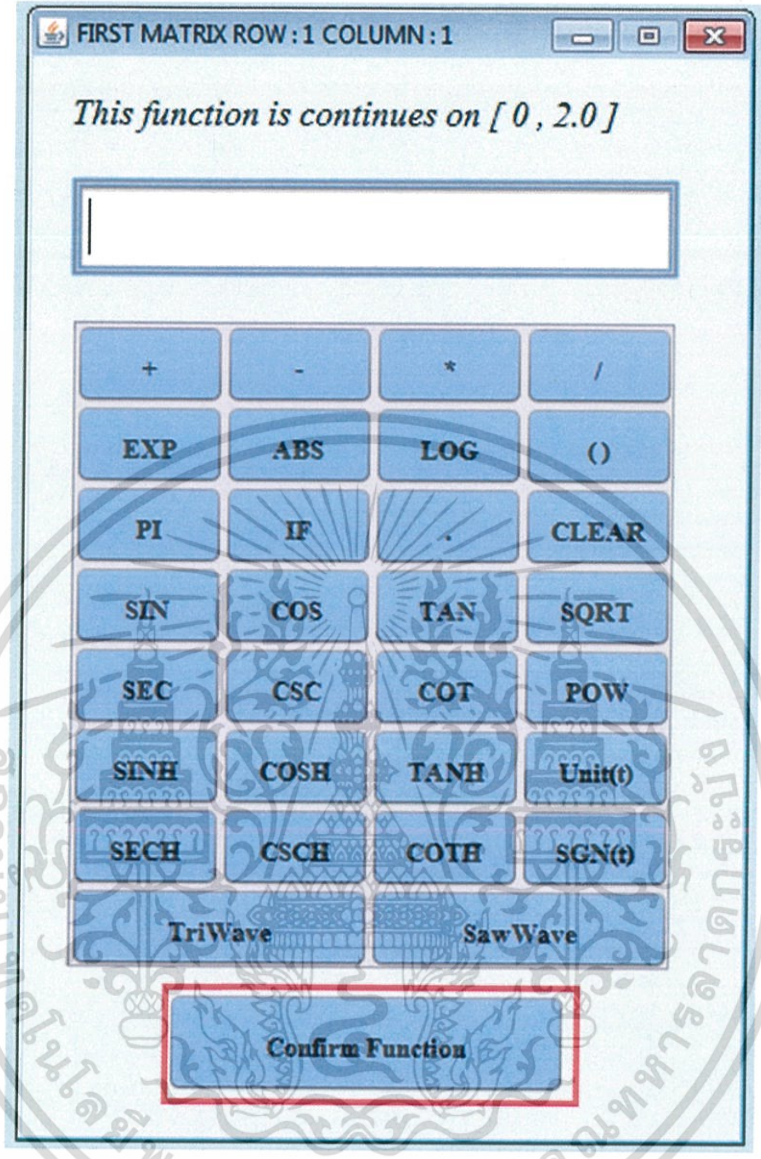
12. จะแสดงหน้าต่างใส่ฟังก์ชัน



รูปภาพที่ 5.3.12 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

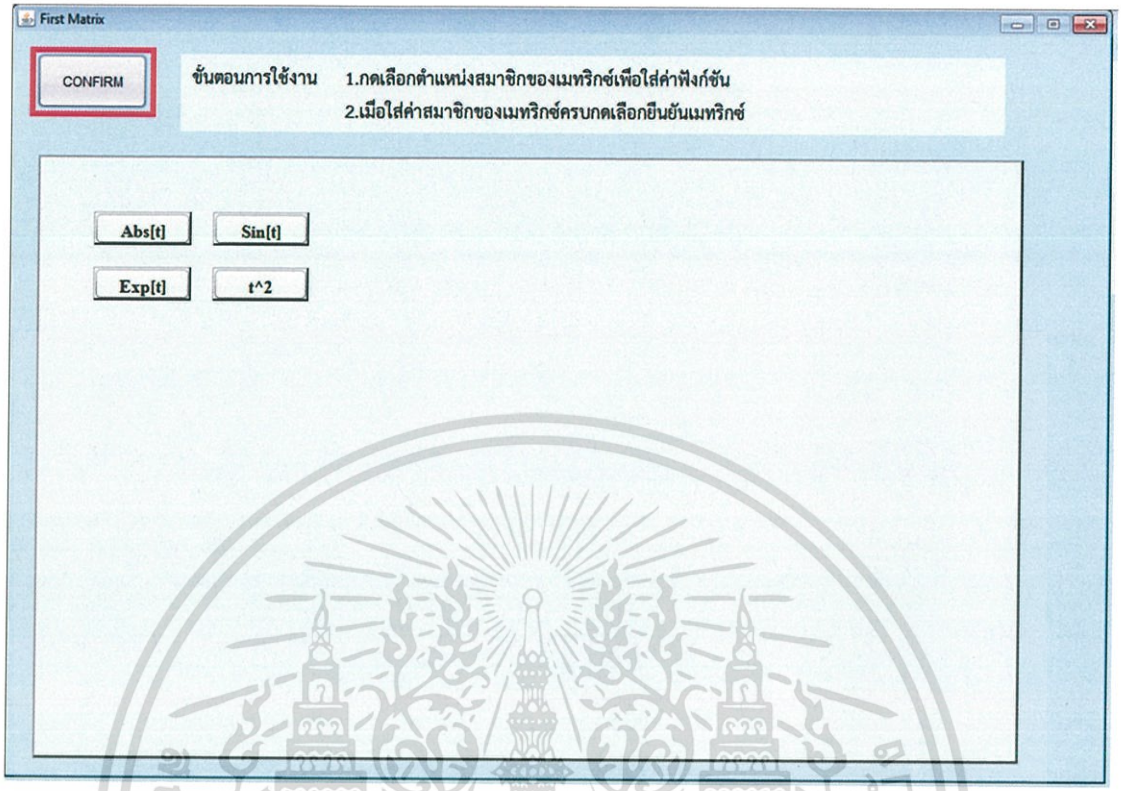
13.เมื่อใส่ฟังก์ชันเสร็จกด “Confirm Function”



รูปภาพที่ 5.3.13 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 13

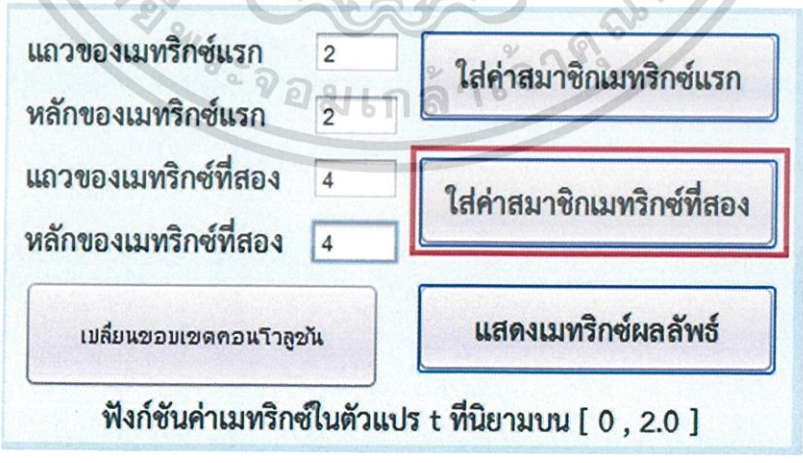
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

14.เมื่อใส่ค่าฟังก์ชันครบในเมทริกซ์แรก แล้วกด “CONFERM”



รูปภาพที่ 5.3.14 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 14

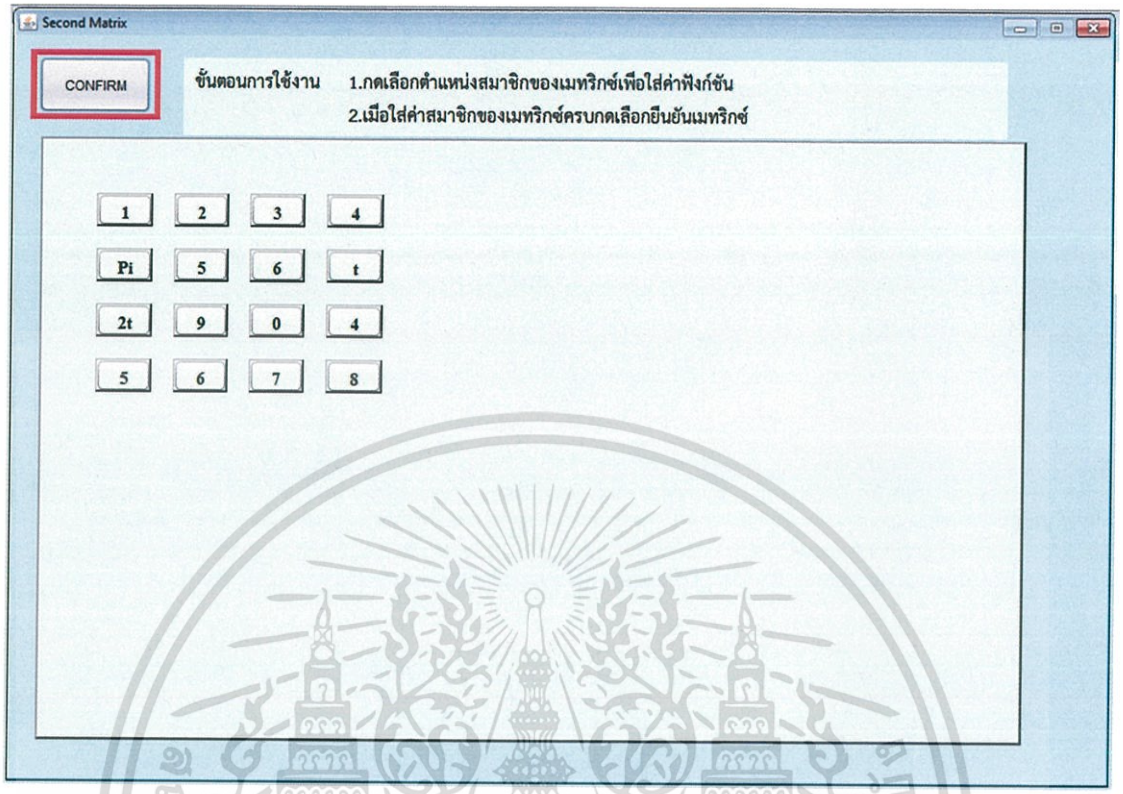
15.จากนั้นใส่ขนาดเมทริกซ์ที่สองให้สัมพันธ์กับขนาดของเมทริกซ์แรก แล้วกด “ใส่ค่าสมาชิกเมทริกซ์ที่สอง”



รูปภาพที่ 5.3.15 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 15

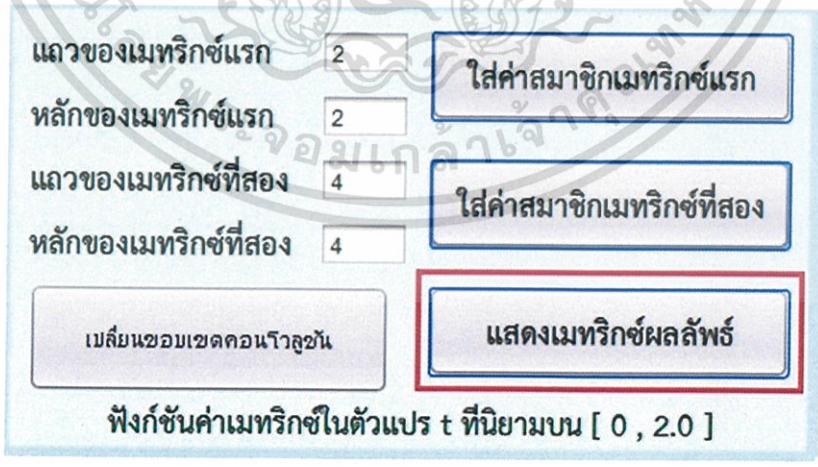
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

16.เมื่อใส่ค่าฟังก์ชันในเมทริกซ์ที่สองครบ กด “ยืนยัน”



รูปภาพที่ 5.3.16 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 16

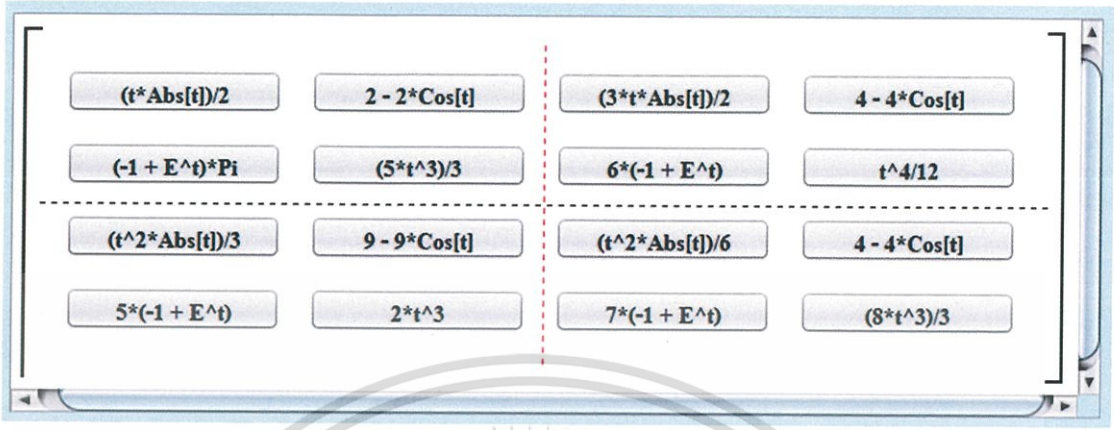
17.เมื่อใส่ฟังก์ชันให้สมาชิดทุกตัวของทั้ง 2 เมทริกซ์แล้ว กด “แสดงเมทริกซ์ผลลัพธ์”



รูปภาพที่ 5.3.17 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

18.หน้าต่างใส่ขนาดเมทริกซ์จะ แสดงเมทริกซ์ผลคูณคอนโวลูชันฮาดามาร์ดแบบบล็อกของทั้ง 2 เมทริกซ์



รูปภาพที่ 5.3.18 ขั้นตอนการใช้ทำงานของโปรแกรม 18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] Adem Kilicman and Zeyad Al Zhour. Some new connections between matrix product for partitioned and non-partition matrices. Computers & Mathematics with Applications. (2007,September) : 763–784

[2] David Murray. Topic 3 The δ function & convolution. Impulse response & Transfer function. 2nd year Time/Frequency Analysis. (2011,November) : 3/1-3/16

[3] László Erdős. Measures and Integration. [Online]. 2007. from : http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lerdos/WS07/FA/leb.pdf [2007,November]

[4] M. J. Roberts. Web Appendix D - Derivations. [Online]. 2007. from : http://web.eecs.utk.edu/~roberts/WebAppendices/D-ConvProperties.pdf [2007, Fabury]

[5] Elizabeth Million. The Hadamard Product. [Online]. 2012. from : http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/million-paper.pdf [2012, April]

[6] Kindred. Matrices, transposes, and inverses. [Online]. 2012. from : http://www.kindred.k12.nd.us/files/2017/03/curriculumguide1718.pdf [2012, February]

[7] Adem Kilicman and Zeyad Al Zhour. On the Connection between Kronecker and Hadamard Convolution Products of Matrices and Some Applications. [Online]. 2009 from : https://link.springer.com/article/10.1155/2009/736243 [2009, December]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้