รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

เมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา

Matrices as Γ-semigroups

นายธวัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2557

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ	เมทริกซ์ในฐานะที่เป็นแกมมากึ่งกรุป
แหล่งเงิน	ทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ	2557 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย	1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2556 ถึง 30 กันยายน 2557
หัวหน้าโครงการ	นายธวัชชัย คำประภัสสร สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

เราทราบว่า $M_{mn}(R)$ เซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บน R เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Γ ใดๆ บทความวิจัยนี้ เรากำหนดเซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ จุดประสงค์ก็คือหาเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$

คำสำคัญ : $\Gamma-$กึ่งกรุป และ $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย

Research Title: Matrices as Γ−semigroups

Researcher: Thawatchai Khumprapussorn

Faculty: Science

Department: Mathematics

ABSTRACT

We know that $M_{mn}(R)$, the set of all $m \times n$ matrices over R, is a $\Gamma-$semigroup under usual multiplication for any nonempty subsets Γ of $M_{nm}(R)$. In this research, we fix a nonempty subset T of $M_{mn}(R)$ and then we give a characterization of a nonempty subsets Γ of $M_{nm}(R)$ which T is a $\Gamma-$ subsemigroup of $M_{mn}(R)$.

Keywords : $\Gamma-$semigroup, $\Gamma-$subsemigroup

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้โอกาสในการเรียนรู้และทำงานวิจัย และขอขอบคุณบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่มอบมิตรไมตรี ความช่วยเหลือ ตลอดจนกระทั่งให้คำแนะนำในการจัดทำรูปเล่มงานวิจัยนี้ เป็นอย่างดี นอกจากนี้ผู้เขียนขอขอบคุณกองบรรณาธิการวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ที่ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา พร้อมทั้งนำผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 23 ฉบับที่ 2 ประจำเดือนกรกฎาคม – ธันวาคม 2557

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557

ธวัชชัย คำประกัสสร

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โครงสร้างของกึ่งกรุปแกมมาปรากฏครั้งแรกในปี 1986 โดย M.K. Sen และ N.K. Saha [2] ได้ให้ข้อสังเกตไว้ว่ากึ่งกรุปแกมมาเป็นการวางนัยทั่วไปของกึ่งกรุป แต่สิ่งที่น่าสนใจมากกว่านั้น ก็คือ โครงสร้างกึ่งกรุปแกมมาและกึ่งกรุป ให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน หมายความว่า ถ้า S เป็นกึ่งกรุป แล้ว S เป็น $S-$กึ่งกรุป ในทางกลับกัน ถ้า S เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุป และ $\alpha \in \Gamma$ แล้ว $(S, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป เมื่อการดำเนินการ $\circ$ บน S กำหนดโดย $a \circ b = a\alpha b$ สำหรับทุก $a, b \in S$

แนวทางหนึ่งที่น่าสนใจในการศึกษาโครงสร้างของกึ่งกรุปแกมมา คือ การพิจารณารูปแบบของกึ่งกรุปย่อยแกมมา ถึงแม้ว่ากึ่งกรุปย่อยแกมมาจะเป็นเซตที่เล็กกว่า แต่ก็มีสมบัติเช่นเดียวกับกึ่งกรุปย่อยแกมมาทุกประการ ยิ่งไปกว่านั้นเรากล่าวได้ว่า ทุกกึ่งกรุปย่อยแกมมาของกึ่งกรุปแกมมาใดๆ เป็นกึ่งกรุปแกมมา ดังนั้นการศึกษากึ่งกรุปย่อยแกมมาก็มีความสำคัญไม่ต่างอะไรกับการศึกษากึ่งกรุปแกมมา ตัวอย่างแนวทางการศึกษาชนิดนี้ เช่น จากงานวิจัย [1] ศึกษารูปแบบของช่วง I ที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R ทั้งภายใต้การบวกและการคูณปกติ และศึกษาว่าเมื่อใดที่ช่วงจริง I และ Γ ที่ทำให้ I เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ R นอกจากนั้น เซตของเมทริกซ์ให้โครงสร้างของกึ่งกรุปแกมมาด้วยเช่นกัน โดยงานวิจัย [1] ศึกษาเงื่อนไขสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ตามที่กำหนดให้

หลังจากการศึกษาเบื้องต้นพบว่ารูปแบบของเซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ ที่ถูกกำหนดโดย [1] นั้น มีถึง 11 รูปแบบ แต่ถึงกระนั้น ยังมีรูปแบบของ เซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ ที่น่าสนใจและยังไม่ถูกศึกษาอีกจำนวนมาก เช่น เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง เซตของเมทริกซ์สามแนวเฉียง หรือ เซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งมากกว่า 2 ตำแหน่งซึ่งอยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน ในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นการศึกษาไปที่เซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งมากกว่า 2 ตำแหน่งซึ่งอยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน เพราะคาดว่าผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นการวางนัยทั่วไปของรูปแบบของเมทริกซ์ที่ศึกษาไว้แล้วโดย [1]

นอกจากนี้อาจนำไปสู่งานวิจัยต่อเนื่องในอนาคตสำหรับนักศึกษาหรือผู้วิจัยได้อีกด้วย กล่าวคือ ในงานวิจัยนี้มุ่งประเด็นไปที่ เมื่อกำหนดเซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ เราศึกษาเงื่อนไขและแยกแยะเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ แต่สำหรับงานวิจัยต่อเนื่องในอนาคตอาจจะศึกษาในทางกลับกัน นั่นคือ กำหนดเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ เราศึกษาเงื่อนไขและแยกแยะเซตย่อยไม่ว่าง T ของ $M_{mn}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ หรือศึกษาในทำนองเดียวกันนี้ในเซตอื่นๆ เช่น เซตของการแปลงเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ เซตของจำนวนตรรกยะ หรือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) เพื่อศึกษารูปแบบที่เป็นไปได้ของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$
2) เพื่อศึกษาเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$
3) เพื่อรวบรวมรูปแบบจากเดิมที่มีอยู่ นำเสนอให้เห็นภาพรวมของผลลัพธ์ชนิดต่างๆ พร้อมทั้งขยายผลลัพธ์และนำไปสู่กรณีทั่วไปมากยิ่งขึ้น
4) เพื่อศึกษาแนวโน้มการต่อยอดงานวิจัยในอนาคต

1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

ศึกษาเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ที่เรากำหนดรูปแบบแตกต่างกันดังนี้

1) $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ เมื่อ $k \in N_n$, $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน
2) $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ เมื่อ $k \in N_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R\backslash\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน
3) $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_2\}$
4) $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 3$
5) $T = \left\{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ เมื่อ } i \neq j\right\}$

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

1) ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งกรุปแกมมา
2) สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปแกมมา
3) วิเคราะห์และพิสูจน์สมบัติบางประการของกึ่งกรุปแกมมา
4) วิเคราะห์ข้อมูลตัวอย่างเพื่อให้เห็นถึงแนวโน้มรูปแบบของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ โดยเริ่มจากเมทริกซ์ขนาดเล็กไปสู่ขนาด $m \times n$ ใดๆ
5) แยกแยะเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$
6) ศึกษาการวางนัยทั่วไปของบางผลลัพธ์ของงานวิจัย [2]
7) สรุปผลการวิจัย

แผนการดำเนินงานวิจัย

ตารางผลงานในแต่ละช่วงเวลา

การดำเนินงาน	ระยะเวลา											
	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.
ศึกษาความรู้พื้นฐานของกึ่งกรุปแกมมา	⟵	—	⟶									
สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปแกมมา	⟵	—	⟶									

วิเคราะห์และพิสูจน์สมบัติบางประการของกึ่งกรุปแกมมา												
วิเคราะห์ข้อมูลตัวอย่างเพื่อให้เห็นถึงแนวโน้มรูปแบบของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ โดยเริ่มจากเมทริกซ์ขนาดเล็กไปสู่ขนาด $m \times n$ ใดๆ												
แยกแยะเงื่อนไขของสมาชิกในเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$												
ศึกษาการวางนัยทั่วไปของบางผลลัพธ์ของงานวิจัย [2]												
สรุปผลการวิจัย												

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราเริ่มต้นโดยการกล่าวถึงบทนิยามของ $\Gamma-$กึ่งกรุป ถือได้ว่าเป็นบทนิยามที่สำคัญสำหรับงานวิจัยชิ้นนี้

2.1 $\Gamma-$กึ่งกรุป

บทนิยาม 2.1.1 [2] ให้ S และ Γ เป็นเซตไม่ว่าง เราเรียก S ว่า *Γ-กึ่งกรุป* ถ้ามีการส่ง $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ เราแทนการส่ง (a, γ, b) ด้วย $a\gamma b$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติ

$$(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c) \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in S \text{ และสำหรับทุก } \alpha, \beta \in \Gamma$$

เราเรียกเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง B ของ S ว่า *Γ-กึ่งกรุปย่อย* ถ้า $a\gamma b \in B$ สำหรับทุกๆ $a, b \in B$ และ $\gamma \in \Gamma$

ตัวอย่าง 2.1.2 [1] ให้ Γ เป็นเซตย่อยของ $M_{nm}(R)$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า $M_{mn}(R)$ เป็น Γ-กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 2.1.3 [1] ให้ X และ Y เป็นเซตไม่ว่าง $S = \{ f: X \rightarrow Y \mid f \text{ เป็นฟังก์ชัน}\}$ และ $\Gamma = \{ f: Y \rightarrow X \mid f \text{ เป็นฟังก์ชัน}\}$ จะได้ว่า S เป็น Γ-กึ่งกรุปภายใต้การประกอบของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 2.1.4 [3] ให้ $S = [-1,1]$ และ $\Gamma = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\right\}$ จะได้ว่า S เป็น Γ-กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.1.5 [4] ให้ $\Gamma = S = \{-i, 0, i\}$ จะได้ว่า S เป็น Γ-กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับกึ่งกรุป ใดๆ เราสามารถสร้าง Γ-กึ่งกรุปได้จากกึ่งกรุป S โดยการกำหนดให้ $S = \Gamma$ ในทางกลับกัน สำหรับ Γ-กึ่งกรุป S ใดๆ และ $\alpha \in \Gamma$ จะได้ว่า $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุป โดยที่ $a * b = a\alpha b$ ทุกๆ $a, b \in S$ ดังนั้นเราจึงกล่าวได้ว่า Γ-กึ่งกรุปและกึ่งกรุปให้โครงสร้างซึ่งกันและกัน

ผลจากการทบทวนวรรณกรรม ทำให้เรามองเห็นได้อย่างชัดเจนว่าโครงสร้าง Γ-กึ่งกรุป เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างกึ่งกรุป ทั้งนี้จากผลการแยกแยะชนิดของ Γ-กึ่งกรุปย่อยจากงานวิจัย [1] นำไปอธิบายชนิดของกึ่งกรุปย่อยบนจำนวนจริง ภายใต้การบวกและการคูณปกติ โดยการกำหนด Γ ที่เหมาะสม ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.6 [1] ให้ $\Gamma = \{a\}$ จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง I เป็น Γ-กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I. R

II. $\{-a\}$

III. $[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq -a$

IV. (y, ∞) เมื่อ $y \geq -a$

V. $(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq -a$

VI. $(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq -a$

จากบทนิยามของ Γ-กึ่งกรุปย่อย ทำให้เราทราบว่า ภายใต้การบวกปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{0\}$-กึ่งกรุปย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน ดังนั้นเมื่อเราแทนค่า $a = 0$ ลงไปในทฤษฎีบทข้างต้น เราจะได้ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R ดังนี้

บทแทรก 2.1.7 ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า I เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การบวกปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I. R IV. (y, ∞) เมื่อ $y \geq 0$

II. $\{0\}$ V. $(-\infty, y]$ เมื่อ $y \leq 0$

III. $[y, \infty)$ เมื่อ $y \geq 0$ VI. $(-\infty, y)$ เมื่อ $y \leq 0$

สำหรับรูปแบบของช่วง I ที่เป็น $\{a\}$-กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การคูณปกติ มีผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1.8 [1] ให้ $a > 0$ จะได้ว่า ช่วงของจำนวนจริง I เป็น $\{a\}$-กึ่งกรุปย่อยของเซตของจำนวนจริง R ภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I. R

II. $\{0\}$

III. $\left\{\frac{1}{a}\right\}$

IV. $(0, \infty)$

V. $[0, \infty)$

VI. (x, ∞) เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$

VII. $[x, \infty)$ เมื่อ $x \geq \frac{1}{a}$

VIII. $[x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2a \leq y \leq \frac{1}{a}$

IX. $[x, y)$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2a < y \leq \frac{1}{a}$

X. $(x, y]$ เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2a \leq y \leq \frac{1}{a}$

XI. (x, y) เมื่อ $-\frac{1}{a} \leq x \leq 0 \leq x^2a \leq y \leq \frac{1}{a}$

ข้อสังเกตหนึ่งที่เห็นได้ชัดจากบทนิยามของ Γ-กึ่งกรุปย่อย นั่นคือ ภายใต้การคูณปกติ ช่วงที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R และ $\{1\}$-กึ่งกรุปย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน จากทฤษฎีบทข้างต้น เมื่อแทนค่า $a = 1$ เราจะได้รูปแบบทั้งหมดของช่วง I ที่เป็นกึ่งกรุปย่อยของ R ดังนี้

บทแทรก 2.1.9 ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริง จะได้ว่า I เป็นกึ่งกรุปย่อยภายใต้การคูณปกติ ก็ต่อเมื่อ I อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

I. R

II. $\{0\}$

III. $\{1\}$

IV. $(0, \infty)$

V. $[0, \infty)$

VI. (x, ∞) เมื่อ $x \geq 1$

VII. $[x, \infty)$ เมื่อ $x \geq 1$

VIII. $(0, y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$

IX. $(0, y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$

X. $[0, y)$ เมื่อ $0 < y \leq 1$

XI. $[0, y]$ เมื่อ $0 < y \leq 1$

XII. $(x, y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$

XIII. $[x, y)$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 < y \leq 1$

XIV. $[x, y]$ เมื่อ $-1 \leq x < 0 < x^2 \leq y \leq 1$

เราทราบจากตัวอย่าง 2.1.2 ว่า $M_{mn}(R)$ เซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บน R เป็น Γ-กึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติ สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง Γ ใดๆ ของ $M_{nm}(R)$ การแยกแยะว่าเมื่อใดที่เซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ ทำให้ T เป็น Γ-กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ตามที่กำหนดให้ ได้ศึกษาไว้แล้วโดย [1] ต่อจากนี้ไปจะกล่าวถึงผลลัพธ์เพียงบางส่วนจาก [1] ซึ่งเป็นแนวคิดหลักของงานวิจัยนี้

กำหนดสัญลักษณ์

$N_n = \{1,2,\dots,n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1, & \text{ถ้า } i = j \end{cases}$

R แทนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.1.10 [1] ให้ $i \in N_m,\ j \in N_n$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i\}$

เราสังเกตว่า เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุเพียงหนึ่งตำแหน่งมีค่าเป็น 0 (สมมติว่าในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 หรือ $a_{ij} = 0$) จะเห็นว่าลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน Γ ส่วนมากมีค่าเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่อยู่ในแนว แถวที่ j และหลักที่ i

ต่อไปจะพิจารณาเมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุเพียงหนึ่งตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 (สมมติว่าในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 หรือ $a_{ij} \neq 0$)

ทฤษฎีบท 2.1.11 [1] ให้ $\alpha \in R\setminus\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j \in N_n$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \alpha\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \left\{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{ji} = \frac{1}{\alpha} \text{ นอกนั้นเป็น } 0\right\}$

ทฤษฎีต่อไป จะพิจารณาลักษณะของ Γ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 (สมมติว่า $a_{ij} = a_{it} = 0$ โดยที่ $j \neq t$)

ทฤษฎีบท 2.1.12 [1] ให้ $i \in N_m,\ j,t \in N_n$ และ $j \neq t$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j,t \text{ และ } q \neq i\}$

เมื่อนำทฤษฎีบท 2.1.10 และ ทฤษฎีบท 2.1.12 มาเปรียบเทียบจะเห็นว่า ในขณะที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุตำแหน่งที่มีค่าเป็น 0 เพิ่มขึ้นในแนวแถวเดียวกัน มีผลทำให้ลักษณะของแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์ใน Γ เกิดหลักที่ไม่เป็น 0 เพิ่มตามไปด้วย

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงกรณีที่ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง โดยทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 2.1.13 [1] ให้ $\lambda, \mu \in R\setminus\{0\}$, $i,p \in N_m$ และ $j,q \in N_n$ โดยที่ $p \neq i$ และ $q \neq j$
ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{pq} = \mu\}$ จะได้ว่า T ไม่เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ สำหรับทุกๆ เซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$

ทฤษฎีบท 2.1.14 [1] ให้ $\lambda, \mu \in R\setminus\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j,q \in N_n$ โดยที่ $q \neq j$

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda \text{ และ } a_{iq} = \mu\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq$ $\{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m\setminus\{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt}$ และ

$$\forall x \in N_n\setminus\{j,q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\}$$

2.2 แนวคิด และ เหตุจูงใจ

ทฤษฎีบท 2.1.13 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งต่างแถวและต่างหลักกัน ผลที่ได้คือไม่มีเซตย่อยไม่ว่างใดๆ Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุป ของ $M_{mn}(R)$ สำหรับทฤษฎีบท 2.1.14 อธิบายถึงกรณี T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 2 ตำแหน่ง ทั้งสองตำแหน่งมีค่าไม่เป็น 0 โดยที่ทั้งสองตำแหน่งอยู่ในแถวเดียวกัน จะได้เงื่อนไขของเมทริกซ์ใน Γ ดังนี้

$$1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}, \forall t \in N_m \backslash \{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt} \text{ และ } \forall x \in N_n \backslash \{j, q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0$$

งานวิจัยของ Khumprapussorn [1] ศึกษารูปแบบของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยที่กำหนด T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ 1 ตำแหน่ง และ 2 ตำแหน่ง อีกทั้งในตำแหน่งที่ศึกษานั้น ระบุทั้งที่มีค่าเป็น 0 และไม่เป็น 0 นำมาซึ่งแรงบันดาลใจของงานวิจัยเล่มนี้ ที่จะขยายผลลัพธ์จากการระบุเพียง 1 หรือ 2 ตำแหน่ง ไปสู่จากระบุ k ตำแหน่งใดๆ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 และ ทฤษฎีบท 2.1.14

บทที่ 3 เมทริกซ์ในฐานะที่เป็น Γ—กึ่งกรุป

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บนเซตของจำนวนจริง โดยมีแนวทางดำเนินการซึ่งกล่าวง่ายๆ ได้ว่า "กำหนด $T \subseteq M_{mn}(R)$ เป้าหมายคือ หา $\Gamma \subseteq M_{mn}(R)$ ทั้งหมด ที่ทำให้ T เป็น Γ−กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$" โดยเริ่มจากการขยายผลของทฤษฎีบท 2.1.13 นั่นคือ กำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ k ตำแหน่งมีค่าเป็น 0 โดยที่ทั้ง k ตำแหน่งนั้นอยู่ในแถวเดียวกัน

สำหรับ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$ และ $[b_{\beta\alpha}] \in M_{nm}(R)$ จะได้ว่า $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}] \in M_{mn}(R)$ ยิ่งไปกว่านั้น ตำแหน่งแถวที่ i และ หลักที่ j ของเมทริกซ์ $[a_{r\beta}][b_{\beta\alpha}][c_{\alpha s}]$ คือ $\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j}$ สำหรับทุกๆ $i \in N_m$ และ $j \in N_n$

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ−กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i\}$

$(\rightarrow)$ สมมติ T เป็น Γ−กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ และให้ $[b_{pq}] \in M_{nm}(R)$ โดยที่ $p \neq j_1, j_2, \dots, j_k$ และ $q \neq i$

ให้ $[a_{r\beta}], [c_{\alpha v}] \in T$ โดยที่ $a_{i\beta} = \delta_{p\beta}$ และ $c_{\alpha j_1} = \delta_{\alpha q}$ สำหรับทุกๆ $\beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k$ และ $\alpha \neq i$

จะได้ว่า $[a_{r\beta}][b_{pq}][c_{\alpha v}] \in T$ ดังนั้น

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_1} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{m} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k}}^{n} \delta_{p\beta} b_{\beta\alpha} \delta_{\alpha q} = b_{pq}$$

$(\leftarrow)$ สมมติว่า $\Gamma \subseteq M$

ให้ $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$ และ $[b_{pq}] \in \Gamma$ เราต้องแสดงว่าในตำแหน่งแถวที่ i และ หลักที่ t ของเมทริกซ์ $[a_{rs}][b_{pq}][c_{uv}]$ มีค่าเป็น 0 สำหรับทุกๆ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า $c_{it} = 0$ ทุกๆ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

ให้ $t \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

จะได้ว่า

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} + \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta i} c_{it} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{m} \left(\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq j_1, j_2, \dots, j_k}}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha t} \right) = 0$$

บทตั้งต่อไปนี้มีส่วนช่วยให้เราขยายผลลัพธ์ได้มากยิ่งขึ้น โดยกำหนดสัญลักษณ์เพื่อความสะดวก ดังนี้ A^{tr} แทน ทรานสโพสของเมทริกซ์ A และ $S^{tr} = \{A^{tr} \mid A \in S\}$ โดยที่ $\emptyset \neq S \subseteq M_{mn}(R)$

บทตั้ง 3.2 [1] ให้ T และ Γ เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ $M_{mn}(R)$ และ $M_{nm}(R)$ ตามลำดับ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ T^{tr} เป็น $\Gamma^{tr}-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$

โดยทฤษฎีบท 3.1 และ บทตั้ง 3.2 ทำให้ได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

บทแทรก 3.3 สำหรับ $k \in N_m$ ให้ $j \in N_n$ และ $i_1, i_2, \ldots, i_k \in N_m$ โดยที่ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i_\gamma j} = 0 \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$ กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

$(\rightarrow)$ สมมติว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ โดยบทตั้ง 2.2 ทำให้ได้ว่า T^{tr} เป็น $\Gamma^{tr}-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$ จะเห็นว่า

$$T^{tr} = \{[a_{rs}] \in M_{nm}(R) \mid a_{j i_\gamma} = 0 \text{ ทุก } \gamma \in N_k\} \text{ และ}$$

$$M^{tr} = \{[b_{pq}] \in M_{mn}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ และ } q \neq j\}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$ เพราะฉะนั้น $\Gamma \subseteq M$

$(\leftarrow)$ สมมติว่า $\Gamma \subseteq M$ ดังนั้น $\Gamma^{tr} \subseteq M^{tr}$ จึงได้ว่า T^{tr} เป็น $\Gamma^{tr}-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$ เพราะฉะนั้น T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 โดยการกำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่ระบุ k ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกัน มีค่าไม่เป็น 0

ทฤษฎีบท 3.4 สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R\setminus\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \ldots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน

กำหนดให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{i j_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุก } \gamma \in N_k\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \;\middle|\; 1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ } \right.$$

$$\left. \forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\right\}$$

บทพิสูจน์ ให้ $M = \left\{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \;\middle|\; 1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ } \right.$

$$\left. \forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\right\}$$

$(\rightarrow)$ สมมติว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ และสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ ที่ทำให้ $b_{pi} \neq 0$

เลือก $\left[a_{r\beta}\right],[c_{\alpha v}]\in T$ ซึ่ง $a_{i\beta}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1+1-\lambda_1\sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t b_{j_t i}}{\lambda_1 b_{pi}}, & \text{ถ้า } \beta=p\\ 0, & \text{ถ้า } \beta\in N_n\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_k,p\}\end{cases}$

และ $c_{\alpha j_1}=0$ สำหรับทุกๆ $\alpha\neq i$

จะได้ว่า $\lambda_1=\sum\limits_{\alpha=1}^{m}\sum\limits_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}$

$$=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta i}c_{ij_1}$$

$$=\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}b_{j_t i}c_{ij_1}+a_{ip}b_{pi}c_{ij_1}$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{k}\lambda_t b_{j_t i}\right)\lambda_1+\left(\frac{\lambda_1+1-\lambda_1\sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_t b_{j_t i}}{\lambda_1 b_{pi}}\right)b_{pi}\lambda_1$$

$=\lambda_1+1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $b_{pi}=0$ สำหรับทุกๆ $p\in N_n\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_k\}$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\left[a_{r\beta}\right],[c_{\alpha v}]\in T$ จะได้ว่า

$$\lambda_1=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta i}c_{ij_1}=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\sum_{t=1}^{k}a_{ij_t}b_{j_t i}c_{ij_1}$$

$$=\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq i}}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}a_{i\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha j_1}+\lambda_1\sum_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma i}$$

ต่อไปสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $p\in N_n\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_k\}$ มี $t\in N_m\setminus\{i\}$ ที่ทำให้ $b_{pt}\neq 0$

ให้ $\left[a_{r\beta}\right],[c_{\alpha v}]\in T$ ซึ่ง $a_{i\beta}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1+1-\sum\limits_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma t}-\lambda_1\sum\limits_{\gamma=1}^{k}a_{ij_\gamma}b_{j_\gamma i}}{b_{pt}}, & \text{ถ้า } \beta=p\\ 0, & \text{ถ้า } \beta\in N_n\setminus\{j_1,j_2,\dots,j_k,p\}\end{cases}$

และ $c_{\alpha j_1} = \begin{cases} 1, & \alpha = t \\ 0, & \alpha \in N_m \setminus \{i,t\} \end{cases}$

จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j_1} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta t} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma t}$

$$= \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma t} + a_{ip} b_{pt} + \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} = \lambda_1 + 1$$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ทุกๆ $p \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ และทุกๆ $t \in N_m \setminus \{i\}$ ทำให้ $b_{pt} = 0$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\left[a_{r\beta}\right], [c_{\alpha v}] \in T$ จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\alpha}^{m} \sum_{\gamma}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma \alpha} c_{\alpha j_1}$

ในขั้นสุดท้ายเราสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มี $u \in N_m \setminus \{i\}$ ที่ทำให้ $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} \neq 0$

เลือก $\left[c_{\alpha v}\right] \in T$ ซึ่ง $c_{\alpha j_1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 + 1 - \lambda_1 \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i}}{\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u}}, & \text{ถ้า } \alpha = u \\ 0, & \text{ถ้า } \alpha \in N_m \setminus \{i,u\} \end{cases}$

จะได้ว่า $\lambda_1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} c_{ij_1} + \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} c_{uj_1} = \lambda_1 + 1$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ทุกๆ $u \in N_m \setminus \{i\}$ ทำให้ $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma u} = 0$ ยิ่งไปกว่านั้น $\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} = 1$

สรุปได้ว่า $\Gamma \subseteq M$

($\leftarrow$) สมมติ $\Gamma \subseteq M$ และ กำหนดให้ $\left[a_{r\beta}\right], [c_{\alpha v}] \in T$ และ $\left[b_{\beta\alpha}\right] \in \Gamma$

ให้ $v \in \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$

จะได้ว่า $\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma \alpha} c_{\alpha v} = \sum_{\gamma=1}^{k} a_{ij_\gamma} b_{j_\gamma i} c_{iv} = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} c_{iv} = c_{iv} = \lambda_v$

ส่วนที่เหลือต่อจากนี้เราจะศึกษาบน $M_n(R)$ เซตของเมทริกซ์จตุรัสขนาด $n \times n$ บนจำนวนจริง ที่นิยมนำมาศึกษาบ่อยๆ เช่น เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง และ เซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 0

การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปจะสะดวกขึ้น เมื่อเราทราบบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.5 [1] ให้ $i, p \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $i \neq p$ และ $q \neq j$

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_{nm}(R) \mid b_{jp}, b_{qi} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

โดยใช้บทตั้ง 3.5 ทำให้เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.6 ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_2\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_2(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_2(R) \mid b_{12}, b_{21} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 3$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุกๆ } i \in N_n\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma = \{0\}$

บทพิสูจน์($\rightarrow$) เราพิสูจน์โดยการพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่ โดยสมมติว่า $\Gamma \neq \{0\}$ ดังนั้น จะมีเมทริกซ์ $[b_{xy}] \in \Gamma$ โดยที่ $b_{pq} \neq 0$ สำหรับบางจำนวนนับ $p, q \in N_n$ เราจะแสดงว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ โดยแสดงว่า $T\Gamma T \not\subset T$ และแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี คือ $p = q$ และ $p \neq q$

กรณี 1 $p = q$

กรณีย่อย 1.1 $p = 1$

นั่นคือ $b_{11} \neq 0$

เลือก $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{1j} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & j = 1 \\ 0, \text{ ถ้า } & j \neq 1 \end{cases}$ และ $c_{i1} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & i = 1 \\ 0, \text{ ถ้า } & i \neq 1 \end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{11} b_{1\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{1\alpha} c_{\alpha 1} = b_{11} \neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 1.2 $p \neq 1$

นั่นคือ $b_{pp} \neq 0$ เมื่อ $p \neq 1$

เลือก $[a_{rs}], [c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{1j} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & j = p \\ 0, \text{ ถ้า } & j \neq p \end{cases}$ และ $c_{i1} = \begin{cases} 1, \text{ ถ้า } & i = p \\ 0, \text{ ถ้า } & i \neq p \end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{1p} b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{p\alpha} c_{\alpha 1} = b_{pp} \neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณี 2 $p \neq q$

กรณีย่อย 2.1 $p=1$ หรือ $q=1$

สมมติว่า $p=1$ ดังนั้น $q \neq 1$ และ $b_{1q} \neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ $q \neq n$ และ $q=n$

กรณีย่อย 2.1.1 $q \neq n$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{nj}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=1\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq 1\end{cases}$ และ $c_{in}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=q\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq q\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{n\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha n}=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{n1}b_{1\alpha}c_{\alpha n}=b_{1q}\neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.2 $q=n$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{2j}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=1\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq 1\end{cases}$ และ $c_{i2}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=n\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq n\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{2\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 2}=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{21}b_{1\alpha}c_{\alpha 2}=b_{1q}\neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

ต่อไปสมมติว่า $q=1$ ดังนั้น $p\neq 1$ และ $b_{p1}\neq 0$

เราแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ $p\neq n$ และ $p=n$

กรณีย่อย 2.1.3 $p\neq n$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}] \in T$ โดยที่ $a_{nj}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } j=p\\ 0, \text{ ถ้า } j\neq p\end{cases}$ และ $c_{in}=\begin{cases}1, \text{ ถ้า } i=1\\ 0, \text{ ถ้า } i\neq 1\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{n\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha n}=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{np}b_{p\alpha}c_{\alpha n}=b_{p1}\neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}] \notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.1.4 $p=n$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}]\in T$ โดยที่ $a_{2j}=\begin{cases}1, \text{ถ้า } j=p \\ 0, \text{ถ้า } j\neq p\end{cases}$ และ $c_{i2}=\begin{cases}1, \text{ถ้า } i=1 \\ 0, \text{ถ้า } i\neq 1\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{2\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 2}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{2p}b_{p\alpha}c_{\alpha 2}=b_{p1}\neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xv}][c_{uv}]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

กรณีย่อย 2.2 $p\neq 1$ และ $q\neq 1$

นั่นคือ $b_{pq}\neq 0$ เมื่อ $p\neq 1$ และ $q\neq 1$

เลือก $[a_{rs}],[c_{uv}]\in T$ โดยที่ $a_{1j}=\begin{cases}1, \text{ถ้า } j=p \\ 0, \text{ถ้า } j\neq p\end{cases}$ และ $c_{i1}=\begin{cases}1, \text{ถ้า } i=q \\ 0, \text{ถ้า } i\neq q\end{cases}$

จะเห็นว่า $\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{1\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha 1}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{1p}b_{p\alpha}c_{\alpha 1}=\sum_{\alpha=1}^{n}b_{p\alpha}c_{\alpha 1}=b_{pq}\neq 0$

ดังนั้น $[a_{rs}][b_{xy}][c_{uv}]\notin T$ สรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

จากทุกกรณีสรุปได้ว่า T ไม่เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

$(\leftarrow)$ เห็นได้ชัดว่า ถ้า $\Gamma=\{0\}$ แล้ว T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

ทฤษฎีบทสุดท้าย เราพิจารณาบนเซตของเมทริกซ์แนวเฉียง ซึ่งเซตของเมทริกซ์แนวเฉียงเป็นกึ่งกรุปภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์ ทำให้ได้ว่า เมื่อ T คือ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง จะได้ $T\Gamma T\subseteq T$ สำหรับทุกๆ$\emptyset\neq\Gamma\subseteq T$ แสดงให้เห็นว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ สำหรับทุกๆ $\emptyset\neq\Gamma\subseteq T$

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ $T=\{[a_{rs}]\in M_n(R)\mid a_{ij}=0 \text{ เมื่อ } i\neq j\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma\subseteq T$

บทพิสูจน์ $(\rightarrow)$ สมมติว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ และให้ $[b_{xy}]\in\Gamma$

กำหนดให้ $p,q\in N_n$ โดยที่ $p\neq q$ และ เลือก$[a_{rs}],[c_{uv}]\in T$โดยที่ $a_{pp}=1$ และ $c_{qq}=1$

จะได้ว่า $0=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{p\beta}b_{\beta\alpha}c_{\alpha q}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{pp}b_{p\alpha}c_{\alpha q}=a_{pp}b_{pq}c_{qq}=b_{pq}$ ดังนั้น$[b_{xy}]\in T$ สรุปได้ว่า $\Gamma\subseteq T$

$(\leftarrow)$ เห็นได้ชัดว่า ถ้า $\Gamma\subseteq T$ แล้ว T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$

บทที่ 4 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทความวิจัยขึ้นนี้ได้สร้างทฤษฎีบทที่เป็นการวางนัยทั่วไปกว่าเดิม นั่นคือ ทฤษฎีบท 3.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.13 และ ทฤษฎีบท 3.4 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.14 นอกจากนี้ เรายังศึกษารูปแบบของ เซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตของเมทริกซ์ที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 (บทแทรก 3.6 และ ทฤษฎีบท 3.7) และ เซตของเมทริกซ์แนวเฉียง (ทฤษฎีบท 3.8)

ผลจากงานวิจัยข้างต้นทำให้ได้ตัวอย่างของเซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ $M_{mn}(R)$ ตามกำหนด ส่งผลให้ได้รับความสะดวกในการขยายงานวิจัยในอนาคต เช่น การศึกษารูปแบบของ เซตย่อย Γ ของ $M_{nm}(R)$ ซึ่ง T เป็นไอดีลของ $M_{mn}(R)$ เป็นต้น

ขอบเขตงานวิจัยของเรา กล่าวอย่างง่ายได้ว่า "กำหนด $T \subseteq M_{mn}(R)$ จากนั้นพยายามหา $\Gamma \subseteq M_{mn}(R)$ ทั้งหมด ที่ทำให้ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$" เราแยกการกำหนดเซต T ตามผลงานวิจัยออกเป็น 2 ส่วน ตามนี้

ส่วนที่หนึ่ง ตำแหน่งที่กำหนดนั้นมีค่าเป็น 0 เราสรุปรูปแบบเซต T ได้ดังนี้

1. ให้ $i \in N_m,\ j \in N_n$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) | \ a_{ij} = 0\}$
   นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.10)

2. ให้ $i \in N_m,\ j, t \in N_n$ โดยที่ $j \neq t$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) | \ a_{ij} = a_{it} = 0\}$
   นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ j และหลักที่ t ของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.12)

3. สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน
   กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$
   นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.1)

4. ให้ $i, p \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $i \neq p$ และ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$
   นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่ p และหลักที่ q มีค่าเป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.5)

5. เซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งทุกสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 สำหรับกรณีนี้เราแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้ 5.1 $n = 2$ (บทแทรก 3.6) และ 5.2 $n \geq 3$ (บทแทรก 3.7)

ส่วนที่สอง ตำแหน่งที่กำหนดนั้นมีค่าไม่เป็น 0 เราสรุปรูปแบบเซต T ได้ดังนี้

1. ให้ $\alpha \in R\backslash\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j \in N_n$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) | \ a_{ij} = \alpha\}$
   นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.11)

2. ให้ $\lambda, \mu \in R\backslash\{0\}, i \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$ และ $a_{iq} = \mu\}$
นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ j และหลักที่ q ของแถวที่ i มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.14)

3. สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R\backslash\{0\}, i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \ldots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน
กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$
นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ของแถวที่ i มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 3.4)

4. ให้ $\lambda, \mu \in R\backslash\{0\}, i, p \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $p \neq i$ และ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$ และ $a_{pq} = \mu\}$
นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าไม่เป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่ p และหลักที่ q มีค่าไม่เป็น 0 (ทฤษฎีบท 2.1.13)

ลำดับถัดไปเราสรุปงานวิจัยโดยแบ่งตามผลงานวิจัยพร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างประกอบกับทฤษฎีบทที่เป็นแนวคิดสำคัญนำไปสู่งานวิจัย

4.1 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าเป็น 0

เราเริ่มด้วยการพิจารณาเซตของเมทริกซ์ซึ่งกำหนดเพียงตำแหน่งเดียว โดยผลจากทฤษฎีบท 2.1.10 อธิบายได้ดังนี้ ให้ $i \in N_m,\ j \in N_n$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0\}$ นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 ผลจากทฤษฎีบท 2.1.10 ได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j \text{ และ } q \neq i\}$

4.1 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.10

ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{32}(R) \mid a_{21} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22} \in R\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{13} \in R\right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \end{bmatrix} \mid b_{12}, b_{22} \in R \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \left[b_{pq} \right] \in M_{23}(R) \mid b_{21} \neq 0 \right\}$$

$$\Gamma_5 = \left\{ \left[b_{pq} \right] \in M_{23}(R) \mid b_{23} \neq 0 \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.10 ทำให้ได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ และ T เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ และ T เป็น Γ_3 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_4 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_4$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$ ในทำนองเดียวกัน T ไม่เป็น Γ_4 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma_4$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

ลำดับถัดไป เราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ j และหลักที่ t ของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 ทฤษฎีบท 2.1.12 อธิบายไว้ดังนี้

ให้ $i \in N_m,\ j, t \in N_n$ โดยที่ $j \neq t$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = a_{it} = 0\}$ นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ j และหลักที่ t ของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 เราได้ผลจากทฤษฎีบท 2.1.12 ดังนี้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0$ โดยที่ $p \neq j, t$ และ $q \neq i\}$

4.2 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.12

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{32}(R) \mid a_{21} = a_{22} = 0\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.12 ทำให้ได้ว่า ทุกๆเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{23}(R)$ จะได้ว่า T เป็น Γ –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{23}(R) \mid a_{21} = a_{23} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \mid b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{31}, b_{32} \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \left[b_{pq} \right] \in M_{32}(R) \mid b_{21} \neq 0 \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.12 ทำให้ได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{23}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

ผลจากทฤษฎีบทต่อไปเป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.12 โดยการกำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนด k หลักของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 ทฤษฎีบท 3.1 สรุปไว้ได้ดังนี้

สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \dots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \dots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน และกำหนดให้ $T = \left\{ [a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = 0 \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k \right\}$ ทฤษฎีบท 3.1 สรุปว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{ [b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{pq} = 0 \text{ โดยที่ } p \neq j_1, j_2, \dots, j_k \text{ และ } q \neq i \right\}$$

4.3 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.1

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{ [a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0 \}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \left[b_{pq} \right] \in M_{44}(R) \mid b_{21} = b_{23} = b_{24} = 0 \right\}$$

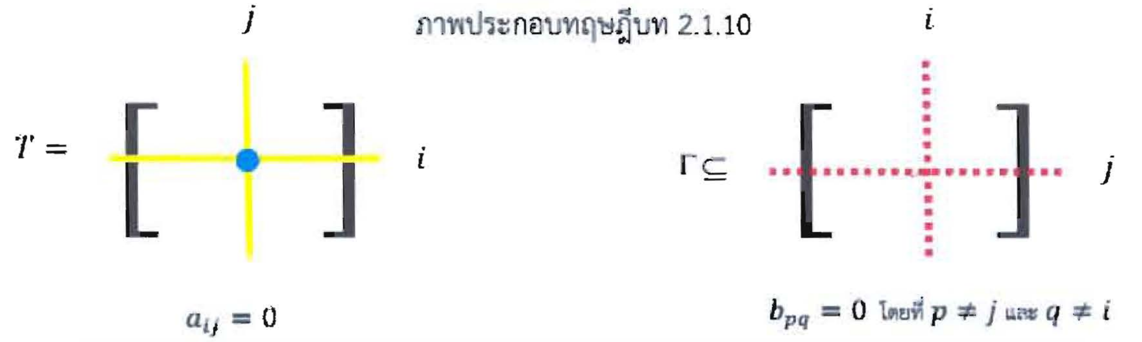
$$\Gamma_2 = \left\{ \left[b_{pq} \right] \in M_{44}(R) \mid b_{21} \neq 0 \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{44}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{32}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

เราเห็นพัฒนาการของทฤษฎีบทเป็นขั้นตอน ซึ่งจะเห็นว่าทฤษฎีบท 2.1.10 เรากำหนดเพียงตำแหน่งเดียวมีค่าเป็น 0 ต่อมาทฤษฎีบท 2.1.12 เรากำหนดสองตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 จนกระทั่งทฤษฎีบท 3.1 เป็นการวางนัยทั่วไปของทั้ง ทฤษฎีบท 2.1.10 และทฤษฎีบท 2.1.12 นั่นคือทฤษฎีบท 3.1 เรากำหนด k หลักของแถวที่ i มีค่าเป็น 0 เราสรุปด้วยรูปภาพดังนี้

4.4 ภาพรวมสรุปทฤษฎี 2.1.10, 2.1.12 และ 3.1

ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.10



ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.12

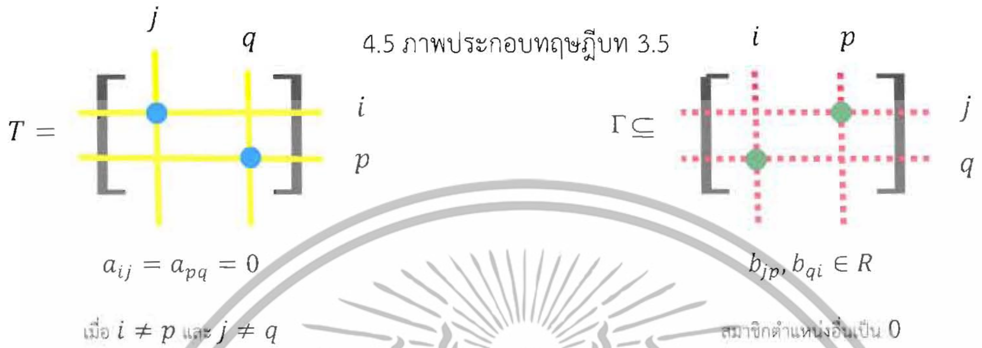
ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.1

จากรูปเราจะเห็นแนวโน้มว่า เมื่อ T เป็นเซตที่กำหนดตำแหน่งที่เป็น 0 มากขึ้น เราพบว่า ในแนวแถวของเมทริกซ์ในเซต Γ มีโอกาสที่จะไม่เป็น 0 มากขึ้น

ขั้นต่อไปเราขยายผลลัพธ์จากทฤษฎีบท 2.1.10 โดยการกำหนดตำแหน่งที่เป็น 0 เพิ่มเป็น 2 ตำแหน่ง โดยที่ทั้ง 2 ตำแหน่งนั้นไม่ได้อยู่ในแถวเดียวกัน และไม่ได้อยู่ในหลักเดียวกัน

ให้ $i,p \in N_m$ และ $j,q \in N_n$ โดยที่ $i \neq p$ และ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = 0 \text{ และ } a_{pq} = 0\}$ นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าเป็น 0 และกำหนดตำแหน่งแถวที่ p และหลักที่ q มีค่าเป็น 0 เราทราบจากทฤษฎีบท 3.5 ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_{nm}(R) \mid b_{jp}, b_{qi} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$

4.5 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.5



ตัวอย่าง 4.1.5 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{35}(R) \mid a_{14} = a_{32} = 0\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in R \right\}$$

โดยทฤษฎีบท 3.5 ทำให้ได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{35}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{35}(R)$

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

ลำดับต่อไปเราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งทุกสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 สำหรับกรณีที่ $n = 2$ เราได้ผลลัพธ์โดยตรงจากทฤษฎีบท 3.5 ทันที ดังนี้

ให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_2(R) \mid a_{ii} = 0$ ทุกๆ $i \in N_2\}$ บทแทรก 3.6 พิสูจน์ได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_2(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{\alpha\beta}] \in M_2(R) \mid b_{12}, b_{21} \in R$ นอกนั้นเป็น $0\}$

4.6 ภาพประกอบบทแทรก 3.6

$$T = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} \qquad \Gamma \subseteq \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับกรณีที่ $n \geq 3$ บทแทรก 3.7 อธิบายได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 3$ และ $T = \{[a_{rs}] \in M_n(R) \mid a_{ii} = 0$ ทุกๆ $i \in N_n\}$ จะได้ว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อย ของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma = \{0\}$

4.7 ภาพประกอบบทแทรก 3.7

$T =$  $\Gamma = [\,0\,]$

ตัวอย่าง 4.1.6 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_3(R) \mid a_{ii} = 0 \text{ ทุก } i \in N_3\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{[b_{pq}] \in M_3(R) \mid b_{11} \neq 0\right\}$$

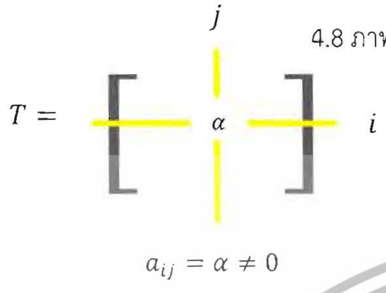
จะเห็นว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_1$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

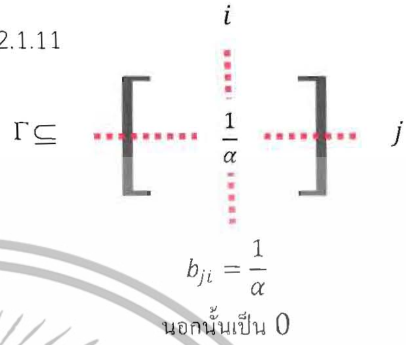
ดังนั้น T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_3(R)$

4.2 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าไม่เป็น 0

เมื่อเซตของเมทริกซ์ที่เราสนใจคือเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j มีค่าไม่เป็น 0 ทฤษฎีบท 2.1.11 กล่าวว่า ให้ $\alpha \in R\backslash\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j \in N_n$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \alpha\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \left\{[b_{pq}] \in M_{nm}(R) \mid b_{ji} = \frac{1}{\alpha} \text{ นอกนั้นเป็น } 0\right\}$

4.8 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.11





ตัวอย่าง 4.2.1 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{43}(R) \mid a_{12} = 1\}$$

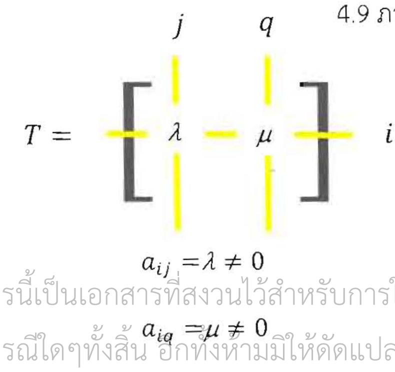
$$\Gamma_1 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

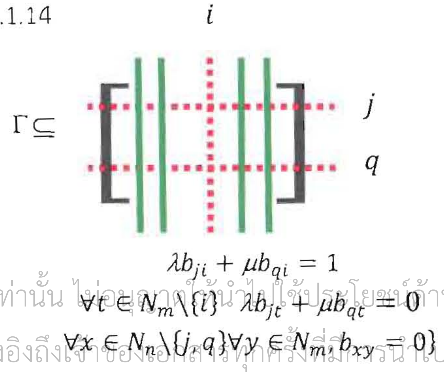
$$\Gamma_2 = \left\{[b_{pq}] \in M_{34}(R) \mid b_{11} \neq 0\right\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1.11 ทำให้ได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{35}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{43}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

สมมติว่า $\lambda, \mu \in R\backslash\{0\}$, $i \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$ และ $a_{iq} = \mu\}$ นั่นคือ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งหลักที่ j และหลักที่ q ของแถวที่ i มีค่าไม่เป็น 0 ทฤษฎีบท 2.1.14 พิสูจน์ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อย ของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ $\Gamma \subseteq \{[b_{xy}] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \lambda b_{ji} + \mu b_{qi}$, $\forall t \in N_m\backslash\{i\}, 0 = \lambda b_{jt} + \mu b_{qt}$ และ $\forall x \in N_n\backslash\{j,q\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0\}$

4.9 ภาพประกอบทฤษฎีบท 2.1.14





ตัวอย่าง 4.2.2 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{43}(R) \mid a_{12} = 1 \text{ และ } a_{13} = -1\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+z & w & u & v \\ z & w & u & v \end{bmatrix} \mid u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \left[b_{pq}\right] \in M_{34}(R) \mid b_{21} = b_{31} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \left[b_{pq}\right] \in M_{34}(R) \mid b_{11} \neq 0 \right\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \left[b_{pq}\right] \in M_{34}(R) \mid b_{23} \neq b_{33} \right\}$$

ผลจากทฤษฎีบท 2.1.14 ทำให้เราได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{43}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{43}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_2$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$

เช่นเดียวกัน T ไม่เป็น Γ_3 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{43}(R)$ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_3$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$ และจะเห็นว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Gamma_4$ แต่ว่า

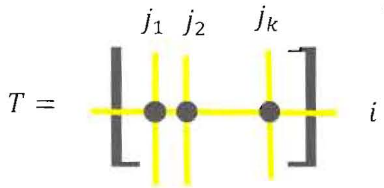
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T$$

ผลจากทฤษฎีบท 3.4 เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบท 2.1.14 โดยการกำหนดให้ T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนด k หลักของแถวที่ i มีค่าไม่เป็น 0 สรุปไว้ได้ดังนี้

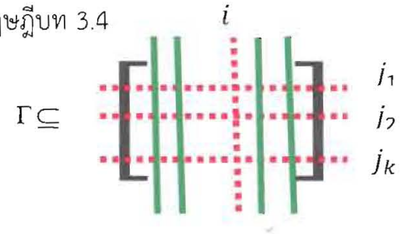
สำหรับ $k \in N_n$ ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R \backslash \{0\}$, $i \in N_m$ และ $j_1, j_2, \ldots, j_k \in N_n$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots, j_k$ ไม่ซ้ำกัน กำหนดให้ $T = \left\{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij_\gamma} = \lambda_\gamma \text{ ทุกๆ } \gamma \in N_k\right\}$ จะได้ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\Gamma \subseteq \left\{ \left[b_{xy}\right] \in M_{nm}(R) \mid 1 = \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} \text{ และ } \forall t \in N_m \backslash \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0 \text{ และ } \forall x \in N_n \backslash \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0 \right\}$$

4.10 ภาพประกอบทฤษฎีบท 3.4



$a_{ij_\gamma} \neq 0$ ทุกๆ $\gamma \in N_k$



$$\sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma i} = 1$$

$$\forall t \in N_m \setminus \{i\}, \sum_{\gamma=1}^{k} \lambda_\gamma b_{j_\gamma t} = 0$$

$$\forall x \in N_n \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \forall y \in N_m, b_{xy} = 0$$

ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

$$T = \{[a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{11} = a_{12} = 1 \text{ และ } a_{13} = -1\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ a+u-1 & b+v & c+w & d+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ a+u & b+v & c+w & d+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ทำให้เราได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{44}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{44}(R)$ เพราะว่า $[0]_{4\times4} \in \Gamma_2$ และ $[0]_{4\times4} \notin T$

ตัวอย่าง 4.2.4 กำหนดเซตดังต่อไปนี้

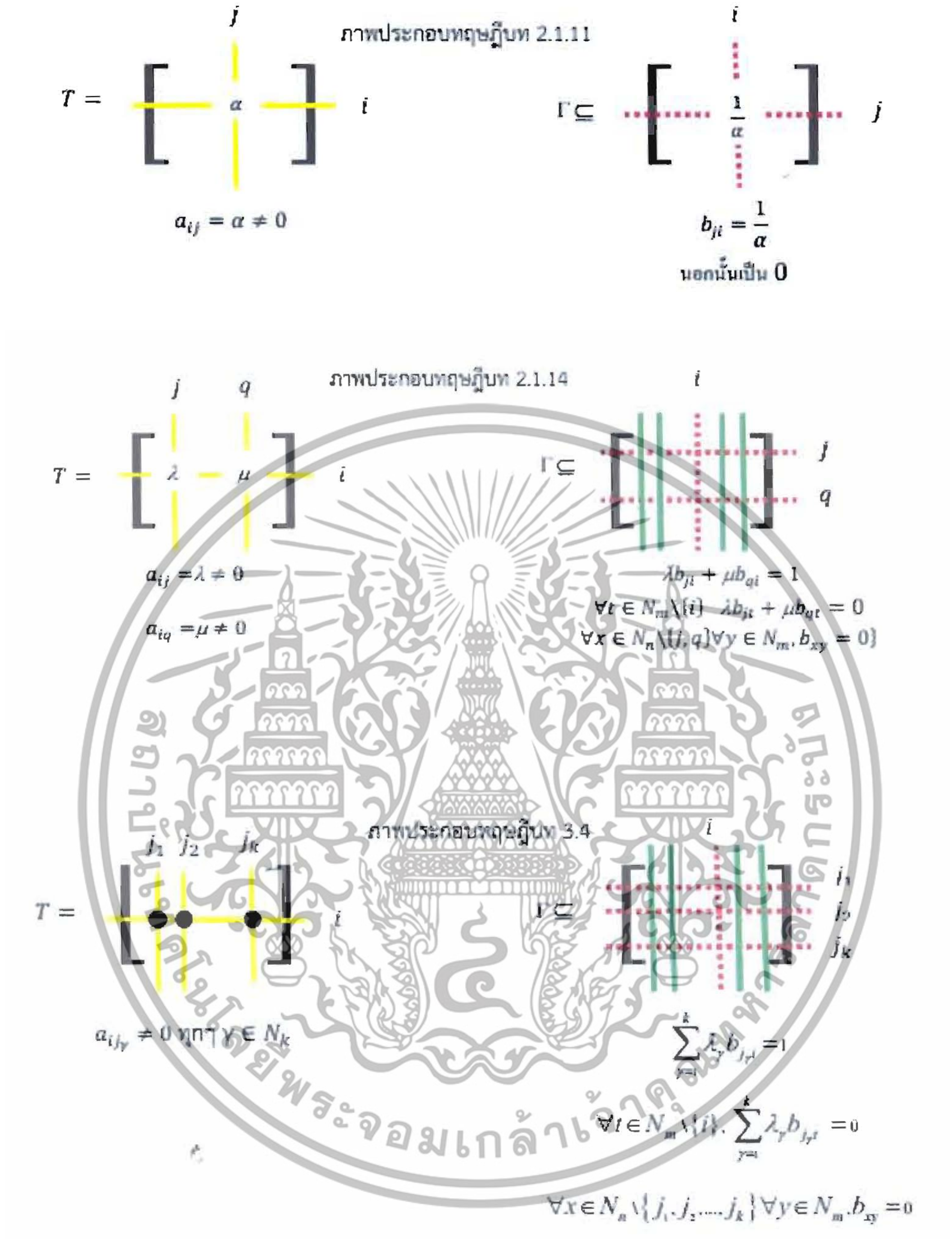
$$T = \left\{[a_{rs}] \in M_{44}(R) \mid a_{11} = 2, a_{12} = 3 \text{ และ } a_{13} = \tfrac{1}{4}\right\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ 4(1-2a-3u) & 4(-2b-3v) & 4(-2c-3w) & 4(-2d-3z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ u & v & w & z \\ 1-2a-3u & -2b-3v & -2c-3w & -2d-3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, u, v, w, z \in R \right\}$$

ทฤษฎีบท 3.4 ทำให้เราได้ว่า T เป็น Γ_1 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{44}(R)$ แต่ว่า T ไม่เป็น Γ_2 –กึ่งกรุปย่อยของ $M_{44}(R)$ เพราะว่า $[0]_{4\times4} \in \Gamma_2$ และ $[0]_{4\times4} \notin T$

4.11 ภาพรวมสรุปทฤษฎี 2.1.11, 2.1.14 และ 3.4



จากรูปทำให้เราสังเกตเห็นแนวโน้มได้ว่า ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์ซึ่งกำหนดตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 มากขึ้น จะทำให้แถวเมทริกซ์ใน เซต Γ เป็นแถว 0 น้อยลง

สุดท้ายเราพิจารณาเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งกำหนดตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 เพิ่มเป็น 2 ตำแหน่ง โดยที่ทั้ง 2 ตำแหน่งนั้นไม่ได้อยู่ในแถวเดียวกัน และไม่ได้อยู่ในหลักเดียวกัน
ให้ $\lambda, \mu \in R\backslash\{0\}, i, p \in N_m$ และ $j, q \in N_n$ โดยที่ $p \neq i$ และ $q \neq j$ และให้ $T = \{[a_{rs}] \in M_{mn}(R) \mid a_{ij} = \lambda$ และ $a_{pq} = \mu\}$ ผลของทฤษฎีบท 2.1.13 กล่าวว่าไม่มีเซตย่อยไม่ว่าง Γ ของ $M_{nm}(R)$ ที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$

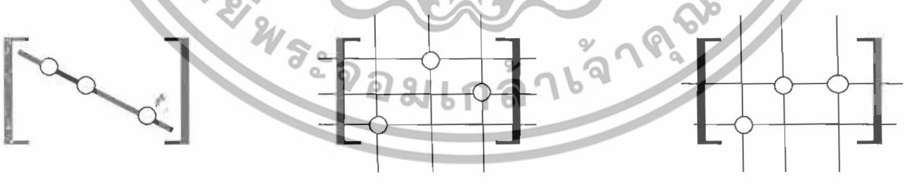
4.3 ข้อเสนอแนะ

จากการสรุปผลลัพธ์งานวิจัย 4.1 และ 4.2 ทำให้เราได้เห็นแนวโน้มงานวิจัยในอนาคต ดังนี้

4.3.1 ตำแหน่งที่กำหนดมีค่าเป็น 0 จำนวน 3 ตำแหน่ง

รูปแบบของทฤษฎีบท 2.1.10 ทฤษฎีบท 2.1.12 และ ทฤษฎีบท 3.1 คือการกำหนดเซต T ซึ่งเป็นเซตของเมทริกซ์ที่กำหนดหนึ่งตำแหน่งมีค่าเป็น 0 สองตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 และ k ตำแหน่งในแนวแถวเดียวกันมีค่าเป็น 0 ตามลำดับ นำมาซึ่งข้อสงสัยที่ว่า ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 แล้ว เซต Γ ควรเป็นเช่นไร เพื่อทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ เราแบ่งกรณีที่น่าสนใจดังนี้

1) ทั้งสามตำแหน่งอยู่ในแนวแถว หรือหลักเดียวกัน เราสามารถใช้ผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 3.1 เพื่อหาเซต Γ ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยได้
2) ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งอยู่บนแนวเส้นทแยงมุม เราใช้ผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 3.7 สรุปได้ทันทีว่ามีเพียง $\Gamma = \{0\}$ เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$
3) ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งอยู่บนแนวเส้นทแยงมุม แล้วลักษณะของเซต Γ ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร
4) ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และทั้งสามตำแหน่งนั้นอยู่ต่างแถวและต่างหลักกัน แล้วลักษณะของเซต Γ ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร
5) ถ้า T เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่กำหนดสามตำแหน่งมีค่าเป็น 0 โดยที่มีเพียงสองตำแหน่งอยู่ในแนวแถวเดียวกัน แล้วลักษณะของเซต Γ ทำให้ T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยควรเป็นเช่นไร



4.3.2 การดำเนินการบนเซตของเมทริกซ์

ให้ T และ Γ เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ $M_{mn}(R)$ และ $M_{nm}(R)$ ตามลำดับ หากเราพิจารณาการสลับเปลี่ยน (ทรานสโพส) คือการดำเนินการบนเซต T และ Γ เราเห็นจากบทตั้ง 3.2 ว่า T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ T^{tr} เป็น Γ^{tr}–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$ นำไปสู่ข้อสงสัยที่ว่าหากเราดำเนินการแบบอื่นบนเซต T ผลลัพธ์ที่ได้จะคล้ายกับบทตั้ง 3.2 หรือไม่ เช่น ให้ E เป็นเมทริกซ์มูลฐาน และสำหรับเซตของเมทริกซ์ใดๆ P กำหนดเซต $EP = \{EA \mid A \in P\}$

ข้อความคาดการณ์ 1 T เป็น Γ–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{mn}(R)$ ก็ต่อเมื่อ ET เป็น $E\Gamma$–กึ่งกรุปย่อยของ $M_{nm}(R)$

4.3.3 การแปลงเชิงเส้น

ให้ $L: M_n(R) \to M_n(R)$ โดยที่ $L(A) = A^t$ จะได้ว่า L เป็นการแปลงเชิงเส้น เรากำหนดสัญลักษณ์ ดังต่อไปนี้ สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง X ของ $M_n(R)$ กำหนด $L(X) = \{L(A) \mid A \in X\}$ ดังนั้นบทตั้ง 3.2 กล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $L(T)$ เป็น $L(\Gamma)-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$ นำมาสู่ปัญหาที่ว่า ถ้า $L: M_n(R) \to M_n(R)$ เป็นการแปลงเชิงเส้นใดๆ แล้ว เราจะได้ผลลัพธ์ที่คล้ายกับบทตั้ง 3.2 หรือไม่

ข้อความคาดการณ์ 2 สำหรับการแปลงเชิงเส้น $L: M_n(R) \to M_n(R)$ ใดๆ T เป็น $\Gamma-$กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$ ก็ต่อเมื่อ $L(T)$ เป็น $L(\Gamma)$ กึ่งกรุปย่อยของ $M_n(R)$

บทที่ 5 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 23 ฉบับที่ 2 ประจำเดือนกรกฎาคม – ธันวาคม 2557

เอกสารอ้างอิง

[1] Khumprapussorn, T., 2006. Some Γ−semigroup. M.Sc. Thesis, Chulalongkorn university.

[2] Saha, N.K. and Sen, M.K., 1986. On Γ−semigroup-I. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 78, 180-186.

ประวัติผู้เขียน

1) ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายธวัชชัย คำประภัสสร
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Thawatchai khumprapussorn
2) เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3101203639019
3) ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
4) หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์
   <u>หน่วยงาน</u> สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520
   <u>ที่อยู่</u> 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
   <u>E-mail</u> khthawat@kmitl.ac.th และ khthawat@hotmail.com
   <u>โทร</u> 0898191886
5) ประวัติการศึกษา
   วท.ด (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555
   วท.ม (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550
   วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2547
6) ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา
   กองทุนวิจัยสถาบัน ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่
   เรื่องการวางนัยทั่วไปของ (R,S)-มอดูลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี2557
   เรื่องเมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย