



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การวางนัยทั่วไปของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ

Generalization of various types of prime (R,S)-submodules

นายธวัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากกองทุนวิจัยสถาบันฯ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ.2556

คณะวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

b. 12802141

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 143723

รับเดือน.ปี 29 ก.ย. 2559

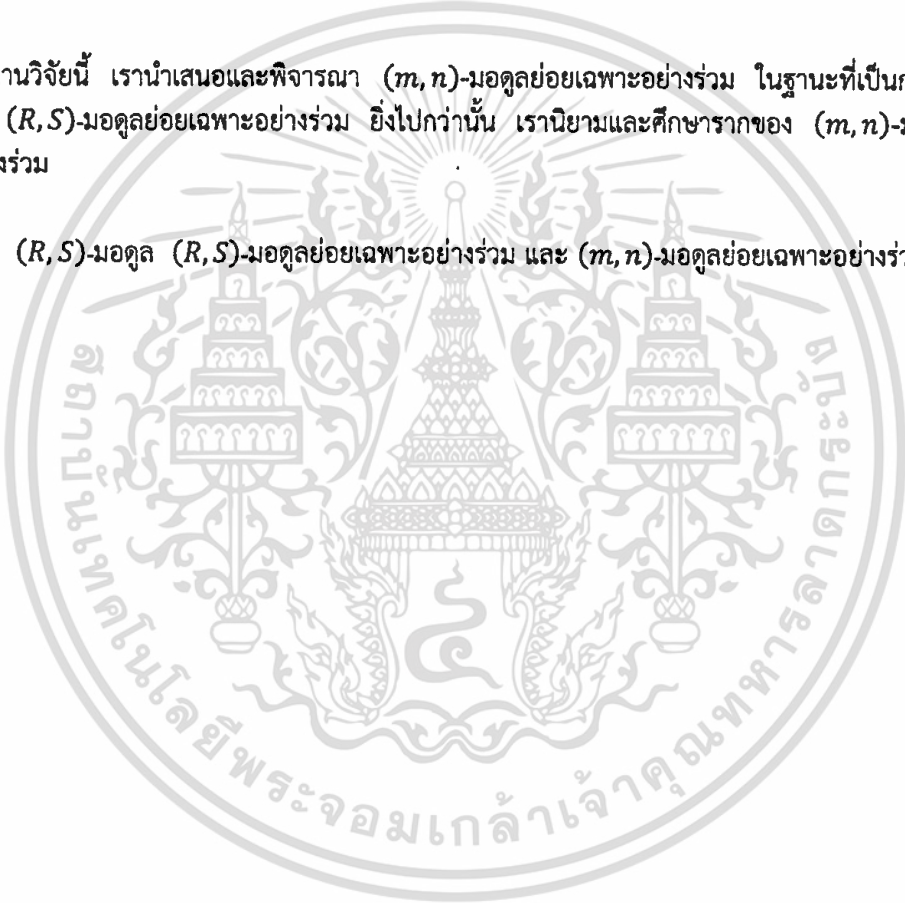
เอกสารฉบับนี้...
สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ	การวางนัยทั่วไปของ (R, S) -มอดุลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ
แหล่งเงิน	กองทุนวิจัยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ประจำปีงบประมาณ	2556 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 240,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย	2 ปี ตั้งแต่ 14 พฤษภาคม 2556 ถึง 14 พฤษภาคม 2558
หัวหน้าโครงการ	นายธวัชชัย คำประภัสสร ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เรานำเสนอและพิจารณา (m, n) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ยิ่งไปกว่านั้น เรานิยามและศึกษารากของ (m, n) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

คำสำคัญ : (R, S) -มอดุล (R, S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ (m, n) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม



Research Title : Generalization of various types of prime (R, S) -submodules

Researcher : Thawatchai Khumprapussorn

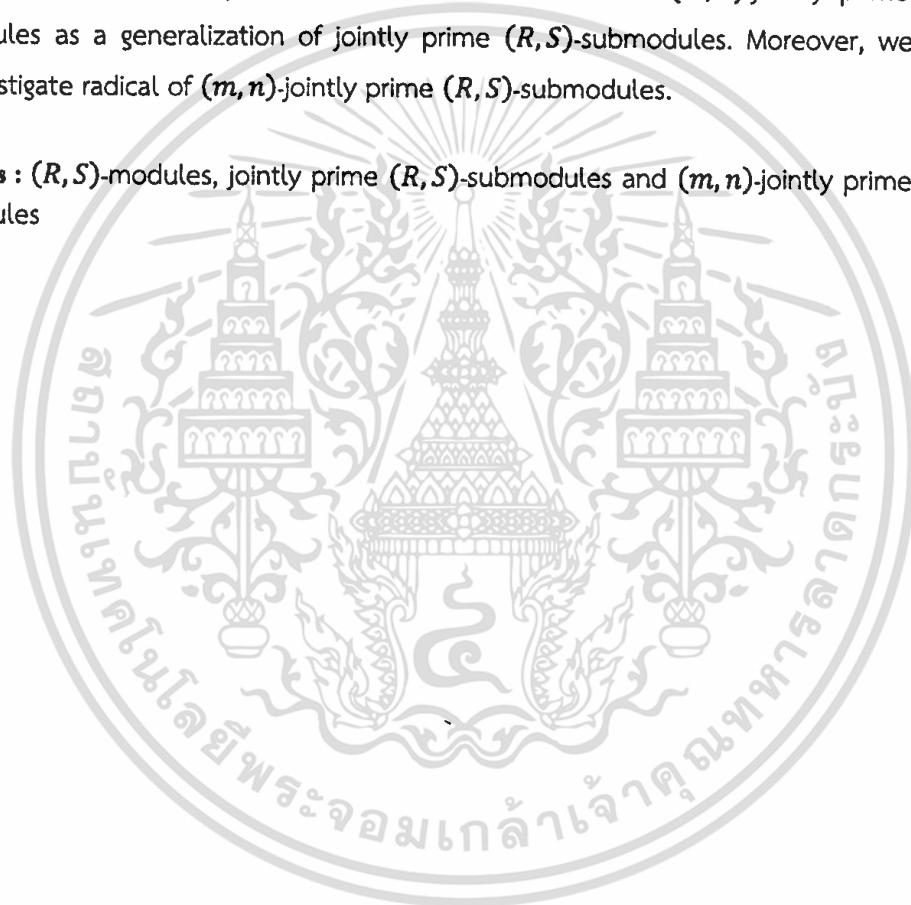
Faculty : Science

Department : Mathematics

ABSTRACT

In this research, we present and discuss the notion of (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules as a generalization of jointly prime (R, S) -submodules. Moreover, we define and investigate radical of (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules.

Keywords : (R, S) -modules, jointly prime (R, S) -submodules and (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้โอกาสในการเรียนรู้ และทำงานวิจัย ขอขอบคุณบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่มอบมิตรไมตรี ความช่วยเหลือ ตลอดจนกระทั่งให้คำแนะนำในการ จัดทำรูปเล่มงานวิจัยนี้ เป็นอย่างดี

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากกองทุนวิจัยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2556



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เนื้อหา..... หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ II

กิตติกรรมประกาศ..... III

สารบัญ IV

บทที่ 1 บทนำ 1

 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

 1.3 ขอบเขตของการวิจัย 2

 1.4 วิธีดำเนินการวิจัยและแผนการดำเนินงานวิจัย..... 3

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 6

 2.1 (R, S) -มอดูล 6

 2.2 (R, S) -มอดูลการคูณทางซ้าย..... 11

 2.3 แนวคิดและเหตุผล 14

บทที่ 3 สมบัติบางประการของ (R, S) -มอดูล 17

 3.1 สมบัติบางประการของ (R, S) -มอดูล..... 17

 3.2 ลักษณะเฉพาะของ (R, S) -มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม 19

บทที่ 4 การวางนัยทั่วไปของ (R, S) -มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม 21

 4.1 สมบัติบางประการของ (R, S) -มอดูล 21

 4.2 $(1, k)$ -มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม 27

 4.3 (m, n) -มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม..... 34

 4.4 (m, n) -ระบบผลคูณ..... 41

 4.5 รากเฉพาะของ (m, n) -มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม 42

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย..... 45

บทที่ 6 สรุปผลผลิตที่ได้จากการวิจัย..... 48

เอกสารอ้างอิง 49

รายงานการเงิน 50

ประวัติผู้วิจัย 51

ภาคผนวก 54



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์นอกจาก กึ่งกลุ่ม (Semigroup), กลุ่ม (Group), วง (Ring) และ สนาม (Field) นักคณิตศาสตร์ในยุคสมัยก่อนยังได้พัฒนาโครงสร้างที่สำคัญอีกโครงสร้างหนึ่งขึ้นมานั่นคือ โมดูลทางซ้ายและโมดูลทางขวา (Left Module และ Right Module) เราวมเรียกสั้นๆว่า โมดูล (Module) ความสำคัญของโมดูลนั้นนอกจากจะเป็นโครงสร้างที่เป็นการวางนัยทั่วไปของทั้งกลุ่มและวงแล้ว ยังเป็นโครงสร้างที่อธิบายได้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างกลุ่มและวงอีกด้วย ตัวอย่างสำคัญของโมดูลคือปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Spaces) มีการศึกษาปริภูมิเวกเตอร์อย่างแพร่หลายทั้งในวงการคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ ที่สำคัญสามารถแก้ไขปัญหาทางคอมพิวเตอร์และวิศวกรรมหลายๆอย่างด้วยความรู้ที่ได้จากปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิเวกเตอร์เป็นประเด็นสำคัญของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นและการประยุกต์ (Linear Algebra and Application) และเป็นหนึ่งในวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์สาขาคณิตศาสตร์ สาขาสถิติ และสาขาคอมพิวเตอร์

โครงสร้างไบโมดูล (Bimodule) สร้างขึ้นในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างโมดูล ไบโมดูลมีบทบาทอย่างชัดเจนในแง่ที่ว่า หลากหลายความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลทางซ้ายและโมดูลทางขวาสามารถอธิบายได้ง่ายขึ้นเมื่อศึกษาในรูปแบบของไบโมดูล สิ่งเหล่านี้ชี้ให้เห็นว่าความพยายามที่จะวางนัยทั่วไปของโครงสร้างต่างๆ ตลอดจนการศึกษาลักษณะและทฤษฎีบทต่างๆ เป็นสิ่งที่จำเป็นและสำคัญเพื่อสะดวกแก่การต่อ ยอดองค์ความรู้ในอนาคต ทั้งนี้เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาโครงสร้างที่เรียกว่า (R,S)-โมดูล ซึ่งในปี 2012 T. Khumprapussorn, S. Pianskool และ M. Hall ได้ให้บทนิยามไว้ดังนี้

ให้ R และ S เป็นวงและ M เป็นกลุ่มสลับที่ เราเรียก M ว่า (R,S)-โมดูล ถ้ามีฟังก์ชัน $\cdot : R \times M \times S \rightarrow M$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข 4 ข้อต่อไปนี้ : สำหรับทุกๆ $r, r_1, r_2 \in R, s, s_1, s_2 \in S$ และ $m \in M$

- 1) $r \cdot (m + n) \cdot s = r \cdot m \cdot s + r \cdot n \cdot s$
- 2) $(r_1 + r_2) \cdot m \cdot s = r_1 \cdot m \cdot s + r_2 \cdot m \cdot s$
- 3) $r \cdot m \cdot (s_1 + s_2) = r \cdot m \cdot s_1 + r \cdot m \cdot s_2$
- 4) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m \cdot s_1) \cdot s_2 = (r_1 r_2) \cdot m \cdot (s_1 s_2)$

เพื่อความสะดวกเราจะแทนสัญลักษณ์ $r \cdot m \cdot s$ ด้วย rms และเราเรียกกลุ่มย่อย N ของ (R,S)-โมดูลว่า (R,S)-โมดูลย่อย ถ้า $RNS \subseteq N$

โครงสร้างของ (R,S)-โมดูลเป็นการวางนัยทั่วไปของไบโมดูล ผลลัพธ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งที่ T. Khumprapussorn, S. Pianskool และ M. Hall ได้แสดงไว้ “ถ้าวง S มี idempotent [เรียกสมาชิก x ของ S ว่า idempotent ถ้า $x^2 = x$] แล้วสามารถสร้างโมดูลทางซ้ายบน R จาก (R,S)-โมดูล” ในทำนองเดียวกัน “ถ้าวง R มี idempotent แล้วสามารถสร้างโมดูลทางขวาบน S จาก (R,S)-โมดูล” ยิ่งไปกว่านั้น “ถ้าวง R และ S มี central idempotent [เรียกสมาชิก x ของวง R ใดๆว่า central idempotent ถ้า x เป็น idempotent และ $xy = yx$ ทุก $y \in R$] แล้ว (R,S)-โมดูลให้โครงสร้างของไบโมดูล” นอกจากนี้ T. Khumprapussorn, S. Pianskool และ M. Hall ยังได้ศึกษาความเป็น

เฉพาะของ (R,S) -มอดุลย่อยของ (R,S) -มอดุลและของ (R,S) -มอดุลการคูณทางซ้าย โดยให้นิยามของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะของ (R,S) -มอดุลไว้ถึง 3 ชนิดได้แก่ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ (R,S) -มอดุลย่อย R -เฉพาะทางซ้าย

จากการศึกษาโครงสร้าง (R,S) -มอดุลและบทนิยามของความเป็นเฉพาะของ (R,S) -มอดุลย่อยอย่างละเอียด พบว่ายังมีความเป็นไปได้ที่จะนิยาม (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะชนิดอื่นๆ ซึ่งนอกเหนือไปจาก (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ (R,S) -มอดุลย่อย R -เฉพาะทางซ้าย ในงานวิจัยนี้ในขั้นต้นเรานิยามและศึกษาสมบัติของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด (m,n) [(m,n) -jointly prime (R,S) -submodule] ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม พร้อมทั้งยังให้ลักษณะเฉพาะของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด (m,n) ทั้งใน (R,S) -มอดุลและ (R,S) -มอดุลการคูณทางซ้าย และโดยอาศัยแนวคิดและหลักการเดียวกันจะได้ผลลัพธ์จากการขยายแนวคิดไปสู่ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างเต็มชนิด (m,n) และ (R,S) -มอดุลย่อย R -เฉพาะทางซ้ายชนิด (m,n) ส่งผลให้เกิดการขยายฐานความรู้และสะดวกต่อการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1) ขยายแนวคิดของ jointly prime (R,S) -submodule ไปสู่ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule เพื่อขยายองค์ความรู้และก่อให้เกิดแนวทางการวิจัยในสาขาคณิตศาสตร์แขนงใหม่
- 2) ศึกษาสมบัติของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule บน (R,S) -module และบน left multiplication (R,S) -module ซึ่งเป็นการพัฒนาฐานความรู้ของโครงสร้าง (R,S) -module
- 3) ศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module
- 4) พัฒนาและส่งเสริมการศึกษาวิจัยโครงสร้าง (R,S) -module ให้แพร่หลายมากยิ่งขึ้น
- 5) เพื่อเพิ่มพูนประสบการณ์ทางด้านการวิจัย

1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

- 1) ให้นิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของ jointly prime (R,S) -submodule
- 2) ขยายสมบัติของ jointly prime (R,S) -submodule ไปสู่ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule เพื่อขยายฐานความรู้ไปสู่โครงสร้างที่เป็นกรณีทั่วไป
- 3) สำหรับแต่ละจำนวนนับ m_1, m_2, n_1 และ n_2 ที่แตกต่างกัน ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง (m_1, n_1) -jointly prime (R,S) -submodule และ (m_2, n_2) -jointly prime (R,S) -submodule
- 4) ศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module
- 5) ขยายแนวความคิดเช่นเดียวกับ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ไปสู่ prime (R,S) -submodule ชนิดอื่นๆ เพื่อสร้างฐานงานวิจัยให้หลากหลายยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

- 1) ศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้อง
- 2) ให้บทนิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule
- 3) เปรียบเทียบบทนิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule กับ jointly prime (R,S) -submodule
- 4) ศึกษาสมบัติของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module
- 5) ศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -modules และ left multiplication (R,S) -module
- 6) วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้

แผนการดำเนินงานวิจัย

ตารางผลงานในแต่ละช่วงเวลา

ปีที่	เดือนที่	ผลงานที่คาดว่าจะสำเร็จ
๑	๑-๔	ได้ความรู้พื้นฐานมากพอเพื่อนำไปสู่การให้บทนิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule อย่างชัดเจนและถูกต้อง
	๕-๖	ให้นิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule และเปรียบเทียบระหว่าง (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule กับ jointly prime (R,S) -submodule พร้อมทั้งให้ตัวอย่างเพื่อแสดงว่า (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule เป็นการวางนัยทั่วไปของ jointly prime (R,S) -submodule
	๗-๘	1.ให้ทฤษฎีบทเพื่ออธิบายถึงสมบัติทั่วไปของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module 2.ให้ลักษณะเฉพาะของ (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -modules และ left multiplication (R,S) -module
	๙-๑๒	1. ส่งผลงานตีพิมพ์ในวารสารการวิชาการระดับชาติหรือนานาชาติ 2. นำเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการระดับชาติหรือนานาชาติ
๒	๑-๓	ได้ความรู้พื้นฐานมากพอเพื่อนำไปสู่การขยายผลไปยัง (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) - left R-prime (R,S) -submodule
	๔-๖	ได้ผลลัพธ์จากการศึกษา (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) - left R-prime (R,S) -submodule
	๗-๘	ได้ผลลัพธ์จากการศึกษา (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) - left R-prime (R,S) -submodule
	๙-๑๒	1. ส่งผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับชาติหรือนานาชาติ 2. นำเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการระดับชาติหรือนานาชาติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางแผนงานวิจัย

กิจกรรมปีที่ 1	ปีที่ 1				ผู้รับผิดชอบ
	เดือนที่ ๑-๔	เดือนที่ ๕-๖	เดือนที่ ๗-๘	เดือนที่ ๙-๑๒	
1. สืบค้นและศึกษาความรู้ พื้นฐานที่เกี่ยวข้อง	✓				ธวัชชัย
2. ให้บทนิยามของ (m,n) - jointly prime (R,S) - submodule		✓			ธวัชชัย
3. เปรียบเทียบบทนิยามของ (m,n) -jointly prime (R,S) - submodule กับ jointly prime (R,S) -submodule		✓			ธวัชชัย
4. ศึกษาสมบัติของ (m,n) - jointly prime (R,S) - submodule ทั้งใน (R,S) - module และ left multiplication (R,S) -module		✓			ธวัชชัย
5. ศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m,n) -jointly prime (R,S) - submodule ทั้งใน (R,S) - modules และ left multiplication (R,S) -module			✓	✓	ธวัชชัย
6. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้			✓	✓	ธวัชชัย
7. ส่งผลงานตีพิมพ์และนำเสนอ ผลงาน			✓	✓	ธวัชชัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิจกรรมปี 2	ปีที่ 2				ผู้รับผิดชอบ
	เดือนที่ ๑-๓	เดือนที่ ๔-๖	เดือนที่ ๗-๘	เดือนที่ ๙-๑๒	
๑. สืบค้นและศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้อง	✓				ธวัชชัย
๒. ให้บทนิยามของ (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) -left R -prime (R,S) -submodule		✓			ธวัชชัย
๓. เปรียบเทียบบทนิยามระหว่าง (m,n) -jointly prime (R,S) -submodule, (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) -left R -prime (R,S) -submodule					
๔. เปรียบเทียบบทนิยามของ (m,n) -fully prime (R,S) -submodule กับ fully prime (R,S) -submodule		✓	✓		ธวัชชัย
๕. เปรียบเทียบบทนิยามของ (m,n) -left R -prime (R,S) -submodule กับ Left R -prime (R,S) -submodule					
๖. ศึกษาสมบัติของ (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) -left R -prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module		✓	✓		ธวัชชัย
๗. ศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m,n) -fully prime (R,S) -submodule และ (m,n) -left R -prime (R,S) -submodule ทั้งใน (R,S) -module และ left multiplication (R,S) -module		✓	✓		ธวัชชัย
๘. ส่งผลงานตีพิมพ์และนำเสนอผลงาน				✓	ธวัชชัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

โมดูลเป็นโครงสร้างพื้นฐานทางพีชคณิต ประกอบไปด้วยกลุ่มสลับที่ M ที่เป็นทั้งมอดูลทางซ้ายบนวง R และมอดูลทางขวาบนวง S ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติ $r(ms) = (rm)s$ สำหรับทุก $r \in R, s \in S$ และ $m \in M$ ในปี 2012 T. Khumprapussorn, S. Pianskool และ M. Hall ได้ริเริ่มแนวคิดของ (R, S) – มอดูล ซึ่งเป็นโครงสร้างทางพีชคณิต ที่ทำให้เกิดการดำเนินการได้ทั้งทางซ้ายและทางขวาของกลุ่มสลับที่ M โดยที่วง R ดำเนินการทางซ้ายของ M และ วง S ดำเนินการทางขวาของ M อีกทั้ง M ไม่จำเป็นต้องเป็นมอดูลทางซ้าย หรือ มอดูลทางขวา มาก่อน ทั้งนี้ กล่าวได้ว่าโครงสร้าง (R, S) – มอดูล เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างโมดูล เราจึงเริ่มต้นบทนี้ด้วยบทนิยามของ (R, S) – มอดูล

2.1 (R, S) – มอดูล

บทนิยาม 2.1.1 ให้ R และ S เป็นวง และ $(M, +)$ เป็นกลุ่มสลับที่ เรากล่าวว่า M เป็น (R, S) – มอดูล ถ้ามีฟังก์ชัน $\cdot : R \times M \times S \rightarrow M$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุก $r, r_1, r_2 \in R, m, n \in M$ และ $s, s_1, s_2 \in S$

- 1) $r \cdot (m + n) \cdot s = r \cdot m \cdot s + r \cdot n \cdot s$
- 2) $(r_1 + r_2) \cdot m \cdot s = r_1 \cdot m \cdot s + r_2 \cdot m \cdot s$
- 3) $r \cdot m \cdot (s_1 + s_2) = r \cdot m \cdot s_1 + r \cdot m \cdot s_2$
- 4) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m \cdot s_1) \cdot s_2 = (r_1 r_2) \cdot m \cdot (s_1 s_2)$

เพื่อความสะดวกเราแทนการส่ง $r \cdot m \cdot s$ ด้วย rms

จากบทนิยาม 2.1.1 จะเห็นความแตกต่างระหว่างโมดูลและ (R, S) – มอดูล อย่างหนึ่งที่ชัดเจน นั่นคือโครงสร้างโมดูล ประกอบขึ้นมาจากมอดูลทางซ้ายและมอดูลทางขวา ในขณะที่โครงสร้าง (R, S) – มอดูลไม่ได้กล่าวถึงมอดูล

บทนิยาม 2.1.2 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล เราเรียกกลุ่มย่อย N ของ M ว่า (R, S) – มอดูลย่อยของ M ถ้า $rns \in N$ สำหรับทุก $r \in R, n \in M$ และ $s \in S$

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ R เป็นวง เราจะได้ว่า R เป็น (R, R) – มอดูล ภายใต้การคูณของวง R ยิ่งไปกว่านั้น ทุกไอดิลของวง R เป็น (R, R) – มอดูลย่อย ของ R แต่โดยทั่วไป (R, R) – มอดูลย่อย ของ R อาจไม่เป็นไอดิลของ R ตัวอย่างเช่น ให้ $SU_4(R)$ เป็นเซตของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนอย่างเข้มเหนือวง R ขนาด 4×4 ภายใต้การบวกและการคูณปกติของเมทริกซ์ จะทำให้ได้ว่า $SU_4(R)$ เป็นวง และให้ $N = \{(a_{ij})_{4 \times 4} | a_{13}, a_{24} \in R \text{ นอกนั้นเป็น } 0\}$ นี่เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า N เป็น $(SU_4(R), SU_4(R))$ – มอดูลย่อยของ $SU_4(R)$ แต่ N ไม่เป็นไอดิลของ $SU_4(R)$

เนื่องจากเราสามารถพิจารณา R เป็น R – มอดูลทางซ้าย และเราทราบว่า ไอเดียลทางซ้ายและ R – มอดูลทางซ้ายของ R เป็นสิ่งเดียวกัน แต่ทว่าเราได้ข้อสังเกตที่สำคัญจากตัวอย่าง 1 นั่นคือเมื่อพิจารณา R ในฐานะที่เป็น (R, R) – มอดูล เราเห็นว่าอาจจะมี (R, R) – มอดูลย่อยของ R ที่ไม่เป็นไอเดียล (ทางซ้าย, ทางขวา) ของ R

สำหรับกรณีทั่วไป ให้ A และ B เป็นมอดูลย่อยของ R จะได้ว่า R เป็น (A, B) – มอดูล ภายใต้การคูณของวง R

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ A เป็นวง โดยที่ m และ n เป็นจำนวนนับ

กำหนดให้ $M_{m \times n}(A)$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บนวง A

$M_{n \times n}(A)$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ บนวง A

$M_{m \times m}(A)$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times m$ บนวง A

ภายใต้การบวกและการคูณปกติของเมทริกซ์ จะได้ว่า $M_{m \times n}(A)$ เป็นกลุ่มสลับที่ และ $M_{n \times n}(A)$ และ $M_{m \times m}(A)$ เป็นวง ยิ่งไปกว่านั้น $M_{m \times n}(A)$ เป็น $(M_{m \times m}(A), M_{n \times n}(A))$ – มอดูล ภายใต้การคูณปกติของเมทริกซ์

สำหรับทุกไอเดียล I ของวง A จะได้ว่า $M_{m \times n}(I)$ เป็น $(M_{m \times m}(A), M_{n \times n}(A))$ – มอดูลย่อยของ $M_{m \times n}(A)$

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ $\{M_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตของ (R, S) – มอดูล เราเรียกเซตของลำดับ $(x_i)_{i \in I}$ โดยที่ $x_i \in M_i$ สำหรับทุก $i \in I$ ว่าผลคูณ (product) และเขียนแทนด้วย $\prod M_i$ นั่นคือ $\prod M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$

นิยามการดำเนินการโดย $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$ และ $r(x_i)s = (rx_i)s$ สำหรับทุก $(x_i), (y_i) \in \prod M_i$, $r \in R$ และ $s \in S$ จะได้ว่า $\prod M_i$ เป็น (R, S) – มอดูล

เราเรียกเซตย่อยของ $\prod M_i$ ซึ่งประกอบไปด้วยลำดับ $(x_i)_{i \in I}$ โดยที่มีแค่จำนวนจำกัดตัวเท่านั้นของ x_i ที่มีค่าไม่เป็น 0 ว่า ผลบวกตรง (direct sum) และเขียนแทนด้วย $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ยิ่งไปกว่านั้น $\bigoplus_{i \in I} M_i$ เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ $\prod M_i$

ตัวอย่าง 2.1.6 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ N เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M จะได้ว่า $\left(\frac{M}{N}, \oplus \right)$

เป็นกลุ่มสลับที่ เมื่อ $\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$ และ $(a + N) \oplus (b + N) = (a + b) + N$

ทุก $a, b \in M$ ยิ่งไปกว่านั้น $\frac{M}{N}$ เป็น (R, S) – มอดูล โดยที่ $(r, m + N, s) \rightarrow rms + N$

สาคิสสัณฐานเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาาระหว่างสองโครงสร้างทางพีชคณิต เพื่อใช้เปรียบเทียบลักษณะระหว่างโครงสร้าง เช่น ความเหมือนและความต่างกันของสองโครงสร้างนั้นๆ การศึกษาเครื่องมือสำคัญนี้จะเป็นส่วนช่วยที่สำคัญในการศึกษาโครงสร้าง (R, S) – มอดูล

บทนิยาม 2.1.7 ให้ M และ N เป็น (R, S) – มอดูล เราเรียกฟังก์ชัน $\varphi: M \rightarrow N$ ว่า (R, S) – สาคิสสัณฐาน $((R, S) - \text{homomorphism})$ ถ้า φ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ (i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ และ (ii) $\varphi(ras) = r\varphi(a)s$ ทุกๆ $a, b \in M, r \in R$ และ $s \in S$

เราเรียก (R, S) – สาคิสสัณฐาน φ ว่าเป็น (R, S) – เอกสัณฐาน $((R, S) - \text{monomorphism})$ ถ้า φ เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง

เราเรียก (R, S) – สาคิสสัณฐาน φ ว่าเป็น (R, S) – อุปสัณฐาน $((R, S) - \text{epimorphism})$ ถ้า φ เป็นฟังก์ชันชนิดทั่วถึง

เราเรียก (R, S) – สาคิสสัณฐาน φ ว่าเป็น (R, S) – สมสัณฐาน $((R, S) - \text{isomorphism})$ ถ้า φ เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

เรากล่าวได้ว่า M สมสัณฐานกับ N ถ้ามี (R, S) – สมสัณฐาน $\varphi: M \rightarrow N$ และเขียนแทนด้วย $M \cong N$

สมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับ สาคิสสัณฐาน ในโครงสร้างพีชคณิตอื่นๆ ยังคงเป็นจริงเมื่อนำมาศึกษาบน โครงสร้าง (R, S) – มอดูล ดังนี้

สมบัติ 2.1.8 ให้ $\varphi: M \rightarrow N$ เป็น (R, S) – สาคิสสัณฐาน จะได้ว่า

- 1) $\varphi(0) = 0$
- 2) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ ทุกๆ $a \in M$
- 3) $\ker \varphi = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ เป็น (R, S) – มอดูลย่อย ของ M
- 4) $\text{im} \varphi = \{\varphi(m) \mid m \in M\}$ เป็น (R, S) – มอดูลย่อย ของ N
- 5) ถ้า L เป็น (R, S) – มอดูลย่อย ของ N แล้ว $\varphi^{-1}(L) = \{m \mid \varphi(m) \in L\}$ เป็น (R, S) – มอดูลย่อย ของ M
- 6) $M/\ker \varphi \cong \text{im} \varphi$
- 7) $(A + B)/B \cong A/A \cap B$ ทุกๆ (R, S) – มอดูลย่อย A และ B ของ M

$$8) \frac{\left(\frac{M}{A}\right)}{\left(\frac{B}{A}\right)} \cong \frac{M}{B} \text{ ทุกๆ } (R, S) - \text{มอดูลย่อย } A \text{ และ } B \text{ ของ } M \text{ โดยที่ } A \subseteq B$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการศึกษาโครงสร้างทางพีชคณิต เช่น กิ่งกลุ่ม กลุ่ม วง มอดูล และ (R, S) — มอดูล สิ่งหนึ่งที่สำคัญสำหรับทุกโครงสร้างก็คือปริภูมิย่อย ในที่นี้หมายถึง กิ่งกลุ่มย่อย กลุ่มย่อย วงย่อย มอดูลย่อย และ (R, S) — มอดูลย่อย โดยเฉพาะปริภูมิย่อยที่เรียกว่า “เฉพาะ” เช่น ไอเดิลเฉพาะทั้งในกิ่งกลุ่มและวง มอดูลย่อยเฉพาะ รวมไปถึง (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะ ชนิดที่เรานำมาศึกษาในงานวิจัยนี้ เรียกว่า (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.9 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูล เราเรียก (R, S) — มอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอเดิลทางซ้าย I ของ R ไอเดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ตัวอย่าง 2.1.10 ให้ $r, s \in Z^+$ และ $p \in Z_0^+ \setminus \{1\}$ จะได้ว่า pZ เป็น (rZ, sZ) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$, p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p|rs$

ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ จะได้ว่า (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R และ ไอเดิลเฉพาะของ R เป็นสิ่งเดียวกัน

ต่อไปเป็นสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมอดูลย่อยสูงสุดและมอดูลเฉพาะอย่างร่วม

ทฤษฎีบท 2.1.12 ทุก (R, S) — มอดูลย่อยสูงสุดของ (R, S) — มอดูล M เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

โดยตัวอย่าง 2.1.10 ทำให้เราได้ตัวอย่างเพื่อบอกว่า (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมอาจไม่เป็น (R, S) — มอดูลย่อยสูงสุด ดังนี้

ตัวอย่าง 2.1.13 ให้ $r, s \in Z^+ \setminus \{1\}$ จะได้ว่า Z เป็น (rZ, sZ) — มอดูล และเห็นได้ชัดว่า $(rs)Z$ เป็น (rZ, sZ) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม แต่ไม่เป็น (rZ, sZ) — มอดูลย่อยสูงสุด

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ภายใต้เงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$

ทฤษฎีบท 2.1.14 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูล โดยที่ $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ M ซึ่ง $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม
- 2) สำหรับแต่ละไอเดิลทางขวา I ของ R , $m \in M$ และไอเดิลทางซ้าย J ของ S ,
 1. ถ้า $ImJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 3) สำหรับแต่ละไอเดิลทางขวา I ของ R , (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M และไอเดิลทางซ้าย J ของ S ,
 1. ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอเดิลทางซ้าย I ของ R , $m \in M$ และไอเดิลทางขวา J ของ S ,
 1. ถ้า $(IR)m(SJ) \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 5) สำหรับ $a \in R$, $m \in M$ และ $b \in S$,
 1. ถ้า $(aR)m(Sb) \subseteq P$ แล้ว $aMb \subseteq P$ หรือ $m \in P$

เงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ จะส่งผลให้ $RMS = M$ และด้วยสมบัติ $RMS = M$ ทำให้ได้

ลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม โดยใช้เพียงไอดีล ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.15 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล โดยที่ $RMS = M$ และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย ของ M ซึ่ง $P \neq M$ จะได้ว่า P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย เฉพาะอย่างร่วม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีล I ของ R , (R, S) — มอดุลย่อย N ของ M และไอดีล J ของ S , ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ต่อไปเป็นเซตย่อยของวง R ที่มีบทบาทสำคัญในงานวิจัยนี้

ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อย นิยามเซต $(N: M)_R$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของ R

ดังนี้ $(N: M)_R = \{r \in R | rMS \subseteq N\}$

สมบัติ 2.1.16 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อย จะได้ว่า

- 1) $(N: M)_R$ เป็นกลุ่มย่อยของ R ภายใต้การบวก
- 2) ถ้า $S^2 = S$ แล้ว $(N: M)_R$ เป็นไอดีลของ R
- 3) ถ้า $RMS = M$ แล้ว $(N: M)_R$ เป็นไอดีลของ R

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) — มอดุลย่อย N ของ (R, S) — มอดุล M และกลุ่มย่อย $(N: M)_R$ ของ R

ทฤษฎีบท 2.1.17 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M โดยที่ $(P: M)_R$ เป็นไอดีลของ R โดยที่ $(P: M)_R \neq R$ ถ้า P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_R$ เป็นไอดีลเฉพาะของ R

สมบัติ 2.1.18 ให้ $\varphi: M \rightarrow K$ เป็น (R, S) — สาทิสลักษณ์ จะได้ว่า

- 1) ถ้า L เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ K แล้ว $\varphi^{-1}(L)$ เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M โดยที่ $\ker \varphi \subseteq \varphi^{-1}(L)$ หรือ $\varphi^{-1}(L) = M$
- 2) ถ้า P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M โดยที่ $\ker \varphi \subseteq P$ และ φ เป็นฟังก์ชันซิงกูลาร์ทั่วถึง แล้ว $\varphi(P)$ เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ K

โดยสมบัติ 2.1.18 ทำให้สรุปได้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซตของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ซึ่งบรรจุ $\ker \varphi$ และ เซตของ (R, S) — มอดุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมของ K เมื่อ $\varphi: M \rightarrow K$ เป็น (R, S) — สาทิสลักษณ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.19 ให้ $\varphi: M \rightarrow K$ เป็น (R, S) — อุปริสัมพันธ์ฐาน จะได้ว่ามีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งระหว่าง เซตของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ซึ่งบรรจุ $\ker \varphi$ และ เซตของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ K

2.2 (R, S) —มอดุลการคูณทางซ้าย

“การคูณ” ในเชิงตัวเลขเป็นการดำเนินการสามัญที่ผู้คนทั่วไปรู้จักและสามารถคิดคำนวณได้ สำหรับในแนวคิดทางพีชคณิต “การคูณ” ปรากฏในโครงสร้างของวง บทบาทสำคัญอย่างหนึ่งของ “การคูณ” ในวง ก็คือ ให้ลักษณะเฉพาะของไอเดิลเฉพาะ สำหรับในโครงสร้างมอดุลเราจะเห็น “การคูณเชิงสเกลาร์” ซึ่งนำไปสู่การให้ลักษณะเฉพาะของมอดุลย่อยเฉพาะ เช่นเดียวกัน แต่ทว่า “การคูณเชิงสเกลาร์” เป็นการคูณกันระหว่างสมาชิกของวงและสมาชิกของกลุ่มสลับที่ สิ่งนี้เป็นข้อสังเกตที่ทำให้เห็นความแตกต่างระหว่าง “การคูณ” ในวง และ “การคูณเชิงสเกลาร์” ในมอดุล

R. Ameri ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับมอดุลการคูณ นำมาซึ่งการคูณระหว่างสองมอดุลย่อย ซึ่งเป็นเครื่องมือในการให้ลักษณะเฉพาะของมอดุลย่อยเฉพาะในมอดุลการคูณ ดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ M เป็น R — มอดุลทางซ้าย เราเรียก M ว่า มอดุลการคูณ หรือ R — มอดุลการคูณ ถ้าแต่ละมอดุลย่อย N ของ M มีไอเดิล I ของ R ที่ทำให้ $N = IM$

บทนิยาม 2.2.2 ให้ M เป็นมอดุลการคูณ และให้ N และ K เป็นมอดุลย่อยของ M ผลคูณของ N และ K เขียนแทนด้วย NK นิยามโดย $NK = IJM$ เมื่อ $N = IM$ และ $K = JM$ สำหรับบางไอเดิล I และ J ของ R

บทนิยาม 2.2.3 ให้ M เป็น R — มอดุลทางซ้าย และ N เป็นมอดุลย่อยของ M โดยที่ $N \neq M$ เราเรียก N ว่าเป็นมอดุลย่อยเฉพาะ ถ้า สำหรับแต่ละ $r \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $rm \in N$ แล้ว $rM \subseteq N$ หรือ $m \in N$

ทฤษฎีบท 2.2.4 ให้ M เป็นมอดุลการคูณ และ N เป็นมอดุลย่อยของ M โดยที่ $N \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) N เป็นมอดุลย่อยเฉพาะ
- 2) แต่ละมอดุลย่อย U และ V ของ M ถ้า $UV \subseteq N$ แล้ว $U \subseteq N$ หรือ $V \subseteq N$
- 3) แต่ละ $a, b \in M$ ถ้า $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq N$ แล้ว $a \in N$ หรือ $b \in N$

R.J. Nezhad และ M.H. Naderi ได้นำเสนอลักษณะเฉพาะของมอดุลย่อยเฉพาะในมอดุลการคูณ ในแนวทางที่แตกต่างไปดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ M เป็นมอดุลการคูณ และ L เป็นมอดุลย่อยของ M โดยที่ $L \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) L เป็นมอดุลย่อยเฉพาะ
- 2) แต่ละมอดุลย่อย N ของ M ถ้า $N \not\subseteq L$ แล้ว $L = \{m \in M \mid \langle m \rangle \langle n \rangle \subseteq L \text{ ทุก } n \in N\}$

มอดุลการคูณเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับการอธิบายลักษณะเฉพาะของมอดุลย่อยเฉพาะ H.A. Tavallaei ยืนยันถึงความสำคัญนี้ โดยพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ M เป็น R — มอดูลการคูณ และ N เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $N \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน.

- 1) N เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ
- 2) $Ann_R\left(\frac{M}{N}\right)$ เป็นไอดิลเฉพาะ
- 3) $N = PM$ สำหรับบางไอดิล P ของ R โดยที่ $Ann_R(M) \subseteq P$

ปิดท้ายด้วย ทฤษฎีบทของ Atul Gaur และ Alok Kumar Maloo ได้พิสูจน์ไว้ว่า ถ้ามอดูลทางซ้าย M มีมอดูลย่อยเฉพาะ แล้ว M จะมีมอดูลย่อยเฉพาะเล็กสุด

ทฤษฎีบท 2.2.7 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ M เป็น R — มอดูลทางซ้าย และให้

$$P = \{N \mid N \text{ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ } M\}$$

ถ้า $P \neq \emptyset$ แล้ว โดยบทตั้งของฮอร์น จะได้ว่า P มีสมาชิกเล็กสุด และเรียกสมาชิกเล็กสุดนี้ว่า มอดูลย่อยเฉพาะเล็กสุดของ M

แนวคิดของมอดูลการคูณและการประยุกต์ใช้มอดูลการคูณ โดยนำมาเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับอธิบายลักษณะเฉพาะของมอดูลย่อยเฉพาะ ดังกล่าวข้างต้น เป็นแรงบันดาลใจที่ทำให้เกิด (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และใช้เป็นเครื่องมือเพื่อพิสูจน์ลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ในแนวทางที่คล้ายกัน

บทนิยาม 2.2.8 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูล เราเรียก M ว่า (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย ถ้าแต่ละ (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M มีไอดิล I ของ R ซึ่ง $N = IMS$

สมบัติต่อไปนี้ เป็นผลที่ได้จาก (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ เป็นผลลัพธ์ที่มีประโยชน์ต่องานวิจัยของเรา

สมบัติ 2.2.9 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูล ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

- 1) ถ้า M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย แล้ว $M = RMS$
- 2) ถ้า $M = RMS$ แล้ว $(N:M)_R$ เป็นไอดิลของ R ทุก (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M
- 3) M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ $N = (N:M)_R MS$ ทุก (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M
- 4) M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $m \in M$ มีไอดิล I ของ R ซึ่ง $\langle m \rangle = IMS$

สำหรับ (R, S) — มอดูล M ทั่วไปนั้น ทฤษฎีบท 2.1.17 พิสูจน์ไว้ว่า ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P:M)_R$ เป็นไอดิลเฉพาะของ R แต่สำหรับ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย เราจะพบว่าข้อความ “ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม” และ “ $(P:M)_R$ เป็นไอดิลเฉพาะ” เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอต่อกัน เมื่อ R เป็นวงสลับที่ และ $S^2 = S$

สมบัติ 2.2.10 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_R$ เป็นไอดิลเฉพาะของ R

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า R เป็นวงสลับที่ และ $S^2 = S$ แล้ว บทกลับเป็นจริง

สมบัติต่อไปนี้มีส่วนสำคัญอย่างมากในการให้นิยามของการคูณกันของสอง (R, S) — มอดูลย่อย

สมบัติ 2.2.11 แต่ละ (R, S) — มอดูลย่อย N ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M จะได้ว่า $(N: M)_R$ เป็นไอดิลใหญ่สุดเพียงหนึ่งเดียวของ R ซึ่ง $N = (N: M)_R MS$

การที่ $(N: M)_R$ เป็นไอดิลใหญ่สุดเพียงหนึ่งเดียวของ R ซึ่ง $N = (N: M)_R MS$ สำหรับทุก (R, S) — มอดูลย่อย N ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M นั้น เป็นผลให้การคูณกันของสอง (R, S) — มอดูลย่อย นิยามได้ชัดเจน

บทนิยาม 2.2.12 ให้ N และ K เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M

เขียนแทนผลคูณของ N และ K ด้วย NK นิยามโดย $NK = (N: M)_R (K: M)_R MSS$

ผลคูณของ (R, S) — มอดูลย่อย N และ K ขึ้นอยู่กับไอดิล $(N: M)_R$ และ $(K: M)_R$ แต่เมื่อ R เป็นวงสลับที่ สมบัติต่อไปนี้อธิบายได้ว่าผลคูณของ (R, S) — มอดูลย่อย N และ K ไม่ขึ้นอยู่กับเพียงแคไอดิล $(N: M)_R$ และ $(K: M)_R$ เท่านั้น

สมบัติ 2.2.13 ให้ N และ K เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว $NK = ABMS$ เมื่อ A และ B เป็นไอดิลใดๆ ซึ่ง $N = AMS$ และ $K = BMS$

ลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดูลย่อย เฉพาะอย่างร่วม สามารถอธิบายได้ในรูปแบบของผลคูณของ (R, S) — มอดูลย่อย ดังนี้

สมบัติ 2.2.14 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ M โดยที่ $P \neq M$ ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว สำหรับแต่ละ (R, S) — มอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $UV \subseteq P$ แล้ว $U \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$

เมื่อเพิ่มเงื่อนไขว่า R เป็นวงสลับที่ และ $S^2 = S$ จะได้ว่าบทกลับเป็นจริง

สมบัติ 2.2.15 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ M โดยที่ $P \neq M$ ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว สำหรับแต่ละ $a, b \in M$

$$\text{ถ้า } \langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq P \text{ แล้ว } a \in P \text{ หรือ } b \in P$$

เมื่อเพิ่มเงื่อนไขว่า R เป็นวงสลับที่ และ $S^2 = S$ จะได้ว่าบทกลับเป็นจริง

สมบัติ 2.2.16 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ M โดยที่ $P \neq M$ ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว สำหรับแต่ละ (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $N \not\subseteq P$ แล้ว $P = \{m \in M \mid \langle m \rangle \langle n \rangle \subseteq P \text{ ทุก } n \in N\}$

เมื่อเพิ่มเงื่อนไขว่า R เป็นวงสลับที่ และ $S^2 = S$ จะได้ว่าบทกลับเป็นจริง

เราปิดท้ายบทย่อยนี้ด้วยทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะ อย่างร่วมที่อยู่ระหว่าง (R, S) — มอดูลย่อย N และ K กับ เซตของไอดิลเฉพาะที่อยู่ระหว่างไอดิล $(N:M)_R$ และ $(K:M)_R$ เมื่อ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย

สมบัติ 2.2.17 ให้ N และ K เป็น (R, S) — มอดูลย่อย ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M จะได้ว่า มีฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งที่คงสภาพความเป็นเซตย่อยระหว่างเซตของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะ อย่างร่วมที่อยู่ระหว่าง (R, S) — มอดูลย่อย N และ K กับ เซตของไอดิลเฉพาะที่อยู่ระหว่างไอดิล $(N:M)_R$ และ $(K:M)_R$

2.3 แนวคิด และ เหตุจูงใจ

ในบทย่อย 2.1 เรากล่าวถึงนิยามของโครงสร้าง (R, S) — มอดูล พร้อมทั้งชี้ให้เห็นว่าโครงสร้าง (R, S) — มอดูล เป็นการวางนัยทั่วไปของโครงสร้างโมดูล อย่างไรก็ดีตาม ด้วยข้อสังเกตที่ว่าโครงสร้าง (R, S) — มอดูล มีความคล้ายคลึงเป็นอย่างมากกับโครงสร้างโมดูล ดังนั้นสมบัติพื้นฐานของโครงสร้าง (R, S) — มอดูล “ก็ควรจะเป็นไปในทำนองเดียวกันกับสมบัติพื้นฐานของโครงสร้างโมดูล ด้วยเหตุนี้ ในส่วนต้นของงานวิจัย เราพัฒนาสมบัติพื้นฐานของ (R, S) — มอดูล ในแนวทางเดียวกันสมบัติพื้นฐานของมอดูล โดยเน้นไปที่สมบัติต่างๆของ (R, S) — สหสัมพันธ์ฐาน พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เป็นที่รู้จักกันดีอย่างเช่น The Snake Lemma, The Short Five Lemma และ The Five Lemma บนโครงสร้าง (R, S) — มอดูล ทั้งนี้ก็เพื่อประโยชน์แก่การนำไปศึกษาต่อสำหรับงานวิจัยด้าน Homology ของ (R, S) — มอดูล ในอนาคต จึงขอทบทวนทฤษฎีบทดังกล่าว ณ ที่นี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 (The Short Five Lemma for modules) สมมติแผนผังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ M'_1 & \xrightarrow{\beta_1} & M'_2 & \xrightarrow{\beta_2} & M'_3 & \xrightarrow{\beta_3} & M'_4 & \xrightarrow{\beta_4} & M'_5 \end{array}$$

แต่ละแถวเป็น exact และ $f_{i+1} \circ \alpha_i = \beta_i \circ f_i$ ทุกๆ $i = 1, 2, 3, 4$

ถ้า f_2 และ f_4 เป็นสมสัณฐาน, f_1 เป็นอุปสัณฐาน และ f_5 เป็นเอกสัณฐาน แล้ว f_3 เป็นอุปสัณฐาน

ทฤษฎีบท 2.3.2 (The Snake Lemma for modules) สมมติแผนผังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P \rightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & \downarrow \beta & \downarrow \gamma & \\ 0 \rightarrow M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' \end{array}$$

แต่ละแถวเป็น exact และ $\beta \circ f = f' \circ \alpha$ และ $\gamma \circ g = g' \circ \beta$ จะได้ว่า

มี $\ker \alpha \xrightarrow{\bar{f}} \ker \beta \xrightarrow{\bar{g}} \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{\bar{f}'} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{\bar{g}'} \operatorname{coker} \gamma$ เป็น exact

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า f เป็นเอกสัณฐาน แล้ว $\bar{f}$ เป็นเอกสัณฐาน และ ถ้า g' เป็นอุปรีสัณฐาน แล้ว $\bar{g}'$ เป็นอุปรีสัณฐาน

แรงบันดาลใจของแนวคิดต่อมา เกิดจากการสังเกตพฤติกรรมบางอย่างจากทฤษฎีบท 2.1.14 ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล โดยที่ $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ และ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อย ของ M ซึ่ง $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้เป็นมูลกัน

- 1) P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , $m \in M$ และไอดิลทางซ้าย J ของ S ,
 1. ถ้า $ImJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , (R, S) – มอดูลย่อย N ของ M และไอดิลทางซ้าย J ของ S ,
 1. ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , $m \in M$ และไอดิลทางขวา J ของ S ,
 1. ถ้า $(IR)m(SJ) \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 5) สำหรับ $a \in R$, $m \in M$ และ $b \in S$,
 1. ถ้า $(aR)m(Sb) \subseteq P$ แล้ว $aMb \subseteq P$ หรือ $m \in P$

เราเห็นได้จากทฤษฎีบท 2.1.14 ว่าลักษณะเฉพาะของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะ อย่างร่วม พิสูจน์ได้ภายใต้เงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ แรงบันดาลใจของงานวิจัยส่วนที่สองนี้ ก็คือ ให้ลักษณะเฉพาะของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม พิสูจน์ได้โดยละเว้นเงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ นอกจากนี้ยังพิจารณาลักษณะเฉพาะของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ในรูปแบบอื่นที่แตกต่างไปจากเดิมอีกด้วย

ต่อไปพิจารณานิยามของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ดังนี้

บทนิยาม 2.1.9 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล เราเรียก (R, S) – มอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แนวคิดหลักของงานวิจัยนี้คือ การพัฒนาองค์ความรู้ของ (R, S) — มอตุล โดยขยายบทนิยามของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วม ไปสู่ บทนิยามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วม งานวิจัยนี้ วางแผนงานเอาไว้เป็นลำดับขั้นตอน บทนิยามแรกที่เราเรียกว่า (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, 2)$ เป็นบทนำของการศึกษาในขั้นต้น เพื่อจะได้เห็นทิศทางและแนวโน้มงานวิจัยนำไปสู่การขยายผลไปในส่วนต่อไป จากนั้น เมื่อได้แนวทางที่ชัดเจน จึงขยายไปอีกชั้น สู่บทนิยามที่เรียกว่า (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, k)$ ในส่วนนี้ยังคงยึดแนวทางศึกษาแบบเดียวกับที่ศึกษาใน (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, 2)$ ท้ายที่สุด เราให้บทนิยามของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) เปรียบเทียบบทนิยามของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) กับ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วม พร้อมทั้งศึกษาสมบัติของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) ทั้งใน (R, S) — มอตุล และ (R, S) — มอตุลการคูณทางซ้าย รวมไปถึงศึกษาลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอตุลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) ทั้งใน (R, S) — มอตุล และ (R, S) — มอตุลการคูณทางซ้าย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3 สมบัติบางประการของ (R, S) —มอดูล

3.1 สมบัติบางประการของ (R, S) —มอดูล

สมบัติพื้นฐานต่อไปนี้แสดงไว้เพื่อความสะดวกต่อการนำไปใช้ในบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ จะได้ว่า

- 1) ไอเดิลของ R และ (R, R) — มอดูลย่อยของ R เป็นสิ่งเดียวกัน
- 2) ไอเดิลเฉพาะของ R และ (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R เป็นสิ่งเดียวกัน

บทพิสูจน์

- 1) บทพิสูจน์มาจาก [12]
- 2) แบ่งการพิสูจน์เป็นสองส่วนตามนี้

ส่วนแรก จะแสดงว่า ทุกไอเดิลเฉพาะของ R เป็น (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R

สมมติว่า P เป็นไอเดิลเฉพาะของ R และให้ I เป็นไอเดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอเดิลทางขวาของ R และ N เป็นไอเดิลของ R โดยที่ $INJ \subseteq P$ จะได้ว่า $(IR)N(RJ) \subseteq INJ \subseteq P$ เนื่องจาก IR และ RJ เป็นไอเดิลของ R และ P เป็นไอเดิลเฉพาะของ R จึงได้ว่า $IR \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ หรือ $RJ \subseteq P$ จะเห็นว่า ถ้า $IR \subseteq P$ หรือ $RJ \subseteq P$ แล้ว $IRJ \subseteq P$ นั่นคือ $IRJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ สรุปได้ว่า P เป็น (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R

ส่วนสอง จะแสดงว่า ทุก (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R ของ R เป็นไอเดิลเฉพาะของ R

ให้ P เป็น (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R และกำหนดให้ I และ J เป็นไอเดิลของ R โดยที่ $IJ \subseteq P$ เนื่องจาก $I(RRJ)R \subseteq IJ \subseteq P$ และ P เป็น (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ R ดังนั้น $IRR \subseteq P$ หรือ $RRJ \subseteq P$ เนื่องจาก R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ จึงได้ว่า $I \subseteq P$ หรือ $J \subseteq P$ สรุปได้ว่า P เป็นไอเดิลเฉพาะของ R

ต่อไปนี้เป็นเตรียมการสำหรับการพิสูจน์ The Short Five Lemma for modules ในบริบทของ (R, S) —มอดูล

บทนิยาม 3.1.2 ให้ i เป็นจำนวนเต็ม M_i เป็น (R, S) — มอดูล และ $f_i: M_i \rightarrow M_{i+1}$ เป็น (R, S) — สหสัมพันธ์ฐาน เราเรียกลำดับของ (R, S) — มอดูล $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ ว่า exact ที่ M_i ถ้า $\text{im} f_{i-1} = \ker f_i$

สำหรับกรณีทั่วไป เราเรียกลำดับของ (R, S) — มอดูล $\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow \cdots$ ว่า exact ถ้า $\text{im} f_{i-1} = \ker f_i$ ทุกจำนวนเต็ม i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 3.1.3 แผนผัง (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐาน

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow \\ L_1 & \xrightarrow{\beta_1} & L_2 \end{array}$$

โดยที่ M_1, M_2, L_1, L_2 เป็น (R, S) — มอดูล และ $f_1, f_2, \alpha_1, \beta_1$ เป็น (R, S) — สัทิสสัณฐาน เราเรียกแผนผัง (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐานนี้ว่าแผนผัง (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐานสลับที่ ถ้า $f_2 \circ \alpha_1 = \beta_1 \circ f_1$

สมบัติ 3.1.4 สมมติแผนภาพ (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐาน ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \\ L_1 & \xrightarrow{\beta_1} & L_2 & \xrightarrow{\beta_2} & L_3 & \xrightarrow{\beta_3} & L_4 \end{array}$$

ในแต่ละแถวของลำดับของ (R, S) — มอดูลเป็น exact และ แต่ละช่องเป็น (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐานสลับที่

ถ้า f_2 และ f_4 เป็น (R, S) — เอกสัณฐาน และ f_1 เป็น (R, S) — อูบิสัณฐาน แล้ว f_3 เป็น (R, S) — เอกสัณฐาน

สมบัติ 3.1.5 สมมติแผนภาพ (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐาน ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & M_5 \\ f_3 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ L_2 & \xrightarrow{\beta_2} & L_3 & \xrightarrow{\beta_3} & L_4 & \xrightarrow{\beta_4} & L_5 \end{array}$$

ในแต่ละแถวของลำดับของ (R, S) — มอดูลเป็น exact และ แต่ละช่องเป็น (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐานสลับที่

ถ้า f_2 และ f_4 เป็น (R, S) — อูบิสัณฐาน และ f_5 เป็น (R, S) — เอกสัณฐาน แล้ว f_3 เป็น (R, S) — อูบิสัณฐาน

สมบัติ 3.1.6 สมมติแผนภาพ (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐาน ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & M_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ L_1 & \xrightarrow{\beta_1} & L_2 & \xrightarrow{\beta_2} & L_3 & \xrightarrow{\beta_3} & L_4 & \xrightarrow{\beta_4} & L_5 \end{array}$$

ในแต่ละแถวของลำดับของ (R, S) — มอดูลเป็น exact และ แต่ละช่องเป็น (R, S) — มอดูลสัทิสสัณฐานสลับที่

ถ้า f_2 และ f_4 เป็น (R, S) — สมสัณฐาน, f_1 เป็น (R, S) — อูบิสัณฐาน และ f_5 เป็น (R, S) — เอกสัณฐาน แล้ว f_3 เป็น (R, S) — สมสัณฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ในบทย่อนี้เราศึกษาลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ทั้งนี้เพื่อให้เกิดแนวคิดสำหรับการศึกษาการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมในบทย่อต่อไป

บทตั้ง 3.2.1 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย ของ (R, S) — มอดุล M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , (R, S) — มอดุลย่อย N ของ M และไอดิลทางขวา J ของ S ,
 - i. ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , (R, S) — มอดุลย่อย N ของ M และไอดิลทางขวา J ของ S ,
 - i. ถ้า $I^kNJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราสมมติว่า $k > 1$

(1) $\rightarrow$ (2) สมมติว่า P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M ซึ่ง $INJ^k \subseteq P$ เนื่องจาก $I(INJ^{k-1})J = I^2NJ^k \subseteq INJ^k \subseteq P$ และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม เราจะได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $INJ^{k-1} \subseteq P$ ต่อไปสมมติว่า $INJ^{k-1} \subseteq P$ จะได้ว่า $I(INJ^{k-2})J = I^2NJ^{k-1} \subseteq INJ^{k-1} \subseteq P$

โดย (1) จะได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $INJ^{k-2} \subseteq P$ ดำเนินการตามกระบวนการนี้จนกระทั่งหมด $INJ \subseteq P$ ปรากฏ ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

(2) $\rightarrow$ (3) สมมติข้อความ (2) เป็นจริง ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M ซึ่ง $I^kNJ \subseteq P$ เนื่องจาก $I(I^{k-1}NJ)J = I^kNJ^2 \subseteq I^kNJ \subseteq P$ และ จากข้อความ (ii) ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $I^{k-1}NJ \subseteq P$ สมมติต่อไปว่า $I^{k-1}NJ \subseteq P$ จะได้ว่า $I(I^{k-2}NJ)J = I^{k-1}NJ^2 \subseteq I^{k-1}NJ \subseteq P$ โดยสมมติฐาน ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $I^{k-2}NJ \subseteq P$

โดยกระบวนการทำซ้ำนี้ จะปรากฏพจน์ของ $INJ \subseteq P$ และโดยข้อความ (2) เราสรุปได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

(3) $\rightarrow$ (1) สมมติข้อความ (3) เป็นจริง ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M ซึ่ง $INJ \subseteq P$ ดังนั้น $I^kNJ \subseteq INJ \subseteq P$ โดย (3) ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ นั่นคือ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ทั่วไปของบทตั้ง 3.2.1

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ (R, S) — มอดูล M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้เป็นสมมูลกัน

- 1) P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , (R, S) — มอดูลย่อย N ของ M และไอดิลทางขวา J ของ S ,
ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

บทพิสูจน์

(1) $\rightarrow$ (2) สมมติว่า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M ซึ่ง $I^m N J^n \subseteq P$ โดยบทตั้ง 3.2.1 (2) ทำให้เราได้ว่า

$I^m M J \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ และโดยบทตั้ง 3.2.1 (3) ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

(2) $\rightarrow$ (1) สมมติข้อความ (2) เป็นจริง ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M ซึ่ง $INJ \subseteq P$ ดังนั้น $I^m N J^n \subseteq INJ \subseteq P$ โดย (2) ทำให้ได้ว่า $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ นั่นคือ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

บทที่ 4 การวางนัยทั่วไปของ (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

4.1 บทนำของการวางนัยทั่วไปของ (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

แนวคิดของการวางนัยทั่วไปของ (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมเป็นแนวคิดหลักของงานวิจัยนี้ ซึ่งมีมากมายหลายแนวทาง ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ จึงขอเริ่มต้นด้วยบทนิยามของ (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ หรือ $(1,2)$ —jointly prime (R, S) —submodule

บทนิยาม 4.1.1 เราเรียก (R, S) —มอดุลย่อย P ของ (R, S) —มอดุล M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ หรือ $(1,2)$ —jointly prime (R, S) —submodule ถ้า สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) —มอดุลย่อย N ของ M ถ้า $INJ^2 \subseteq P$ แล้ว $IMJ^2 \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ในทำนองเดียวกัน เราเรียก (R, S) —มอดุลย่อย P ของ (R, S) —มอดุล M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(2,1)$ หรือ $(2,1)$ —jointly prime (R, S) —submodule ถ้า สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) —มอดุลย่อย N ของ M ถ้า $I^2NJ \subseteq P$ แล้ว $I^2MJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

เพื่อความสะดวก เราเขียนแทน (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ หรือ $(1,2)$ —jointly prime (R, S) —submodule ด้วย $(1,2)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ในทำนองเดียวกัน เราจะเขียนแทน (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(2,1)$ หรือ $(2,1)$ —jointly prime (R, S) —submodule ด้วย $(2,1)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

เห็นได้ชัดว่า (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมเป็นทั้ง $(1,2)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม สำหรับสมบัติต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่า $(1,2)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ยิ่งไปกว่านั้นสมบัตินี้เป็นตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นว่า $(1,2)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมนั้นแตกต่างกัน

สมบัติ 4.1.2 ให้ $r, s \in Z^+$ และ $p \in Z_0^+ \setminus \{1\}$ จะได้ว่า

- 1) pZ เป็น $(1,2)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) —มอดุล Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid rs^2$
- 2) pZ เป็น $(2,1)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) —มอดุล Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid r^2s$

บทพิสูจน์

(1) สมมติว่า pZ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดุล Z ให้ $p \neq 0$ และ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $p = mn$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m > 1$ และ $n > 1$ ทำให้ได้ว่า $(rmZ)(nZ)(s^2Z) = (rmns^2)Z \subseteq pZ$ เนื่องจาก pZ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $p \nmid n$ จึงได้ว่า $(rmZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$ นั่นคือ $(rZ)(mZ)(s^2Z) = (rmZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$ เนื่องจาก pZ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $p \nmid m$ จึงได้ว่า $(rZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$ ดังนั้น $p \mid rs^2$

ถ้า $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid rs^2$ แล้ว เห็นได้ชัดว่า pZ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดุล Z

(2) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับ (1)

ตัวอย่าง 4.1.3 ตัวอย่างนี้มีไว้เพื่ออธิบายว่า ทั้ง $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม โดยเราพิจารณา Z เป็น $(2Z, 3Z)$ –มอดุล

- 1) โดยสมบัติ 4.1.2 (i) ทำให้ได้ว่า $9Z$ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z แต่ว่า $9Z$ ไม่เป็น $(2Z, 3Z)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z
- 2) โดยสมบัติ 4.1.2 (ii) ทำให้ได้ว่า $4Z$ เป็น $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ –มอดุล Z แต่ว่า $4Z$ ไม่เป็น $(2Z, 3Z)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z

ตัวอย่าง 4.1.4 ตัวอย่างนี้มีไว้เพื่ออธิบายว่า $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม แตกต่างกัน โดยเราพิจารณา Z เป็น $(2Z, 3Z)$ – มอดุล

- 1) โดยสมบัติ 4.1.2 ทำให้ได้ว่า $9Z$ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z แต่ว่า $9Z$ ไม่เป็น $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z
- 2) โดยสมบัติ 4.1.2 ทำให้ได้ว่า $4Z$ เป็น $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z แต่ว่า $4Z$ ไม่เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z

ข้อสังเกตที่สำคัญสำหรับสมบัติ 4.1.2 ก็คือ แม้ว่า rZ เป็นวงสลับที่ สำหรับทุกๆ $r \in Z$ แต่ว่าการสลับที่ไม่มีผลต่อความแตกต่างกันของ $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ตัวอย่าง 4.1.5 พิจารณา Z เป็น $(2Z, 3Z)$ – มอดุล จะเห็นว่า pZ เป็น $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z และ $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z ก็ต่อเมื่อ pZ เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z

ตัวอย่าง 4.1.5 อธิบายความสัมพันธ์ของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุลย่อย pZ ของ Z เมื่อ pZ เป็นทั้ง $(1,2)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z และ $(2,1)$ –มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z

เพื่อที่จะศึกษาผลลัพธ์ทั่วไปที่ได้มาจากตัวอย่าง 4.1.5 จึงขอทบทวนความรู้พื้นฐานและสัญลักษณ์ทางทฤษฎีจำนวนดังต่อไปนี้

ตัวหารร่วมมาก หรือ ห.ร.ม. (greatest common divisor หรือ gcd) ของจำนวนเต็มสองจำนวนซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่หารทั้งสองจำนวนลงตัว เราเขียนแทนตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม a และ b ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ด้วย $gcd(a, b)$

ผลลัพธ์พื้นฐานต่อไปนี้เป็นประโยชน์ต่อสมบัติ 4.1.6

- 1) ตัวหารร่วมของ a และ b จะเป็นตัวหารของ $gcd(a, b)$
- 2) ถ้า m เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว $gcd(ma, mb) = m \cdot gcd(a, b)$

สมบัติ 4.1.6 ให้ Z เป็น (rZ, sZ) — มอดุล โดยที่ $gcd(r, s) = 1$ และ p เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

pZ เป็น $(1, 2)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z และ $(2, 1)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z ก็ต่อเมื่อ pZ เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z

บทพิสูจน์

($\rightarrow$) สมมติว่า pZ เป็น $(1, 2)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z และ $(2, 1)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z

โดยที่ $p \neq 0$ และ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p \mid rs^2$ และ $p \mid r^2s$ จะได้ว่า $p \mid gcd(rs^2, r^2s)$

เนื่องจาก $gcd(r, s) = 1$ ดังนั้น $gcd(rs^2, r^2s) = rs$ จึงสรุปได้ว่า $p \mid rs$

ดังนั้น pZ เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z

($\leftarrow$) เห็นได้ชัดว่า ถ้า pZ เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z แล้ว pZ เป็น $(1, 2)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z และ $(2, 1)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ Z

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของเงื่อนไข $gcd(r, s) = 1$ ในสมบัติ 4.1.6

ตัวอย่าง 4.1.7 พิจารณา Z เป็น $(2Z, 4Z)$ — มอดุล จะเห็นว่า $16Z$ เป็น $(1, 2)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 4Z)$ — มอดุล Z และ $(2, 1)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 4Z)$ — มอดุล Z แต่ $16Z$ ไม่เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 4Z)$ — มอดุล Z

ตัวอย่าง 4.1.8 ให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in Z \right\}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in Z \right\}$ และ M เป็นเซต

ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 บนเซตของจำนวนเต็ม ภายใต้การดำเนินการบวกและคูณปกติของเมทริกซ์ จะได้ว่า R และ S เป็นวง และ M กับการดำเนินการบวกปกติของเมทริกซ์ เป็นกลุ่มกลับที่ ยิ่งไปกว่านั้น M เป็น (R, S) — มอดุลภายใต้การดำเนินการคูณปกติของเมทริกซ์ จะเห็นว่า $R^2 = 0 = S^2$ ทำให้ได้ว่าทุก (R, S) — มอดุลย่อยของ M เป็นทั้ง

(1,2) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ (2,1) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม แต่ 0 ไม่เป็นมอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M เรานิยามเซตย่อย $(N:M)_{R;S^2}$ ของ R ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ (1,2) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ดังนี้

$$(N:M)_{R;S^2} = \{r \in R \mid rMS^2 \subseteq N\}$$

$$(N:M)_{R;S} = \{r \in R \mid rMS \subseteq N\}$$

ต่อไปเป็นสมบัติพื้นฐานที่เราศึกษาได้จาก $(N:M)_{R;S^2}$ สามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย จึงขอละบทพิสูจน์

สมบัติ 4.1.9 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M

- 1) $(N:M)_{R;S^2}$ เป็นกลุ่มย่อยของ R ภายใต้การบวก
- 2) $(N:M)_{R;S} \subseteq (N:M)_{R;S^2}$
- 3) ถ้า $S^2 = S$ แล้ว $(N:M)_{R;S^2}$ เป็นไอดิลของ R

แม้ว่าแนวคิดของการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมจะเป็นแนวคิดหลักของงานวิจัยนี้ แต่ผลพลอยได้จากการศึกษานี้ ก็คือ เราได้บทนิยามที่เป็นการวางนัยทั่วไปของไอดิลเฉพาะของวง R ซึ่งเราจะศึกษาในแนวคู่ขนานไปกับแนวคิดหลักของงานวิจัยของเรา เริ่มต้นด้วยการพิจารณาบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1.10 ให้ R เป็นวงและ T เป็นไอดิลของ R โดยที่ $T \neq R$ เรากล่าวว่า T เป็น (2,1) —ไอดิลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดิล A และ B ของ R ถ้า $A^2B \subseteq T$ แล้ว $A^2 \subseteq T$ หรือ $B \subseteq T$

ในทำนองเดียวกัน เรากล่าวว่า T เป็น (1,2) —ไอดิลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดิล A และ B ของ R ถ้า $AB^2 \subseteq T$ แล้ว $A \subseteq T$ หรือ $B^2 \subseteq T$

ด้วยตัวบทนิยาม 4.1.10 เราจะเห็นว่า ทุกไอดิลเฉพาะ เป็นทั้ง (2,1) —ไอดิลเฉพาะ และ (1,2) —ไอดิลเฉพาะ แต่สำหรับบทกลับนั้น โดยทั่วไปไม่จริง พิจารณาได้จากสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 4.1.11 ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับแต่ละ $a, b \in \mathbb{Z}$ ถ้า $q^2 \mid ab^2$ แล้ว $q^2 \mid a$ หรือ $q^2 \mid b^2$

บทพิสูจน์ ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $q^2 \mid ab^2$ และ $q^2 \nmid a$ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q \mid ab^2$ จึงได้ว่า

$q \mid a$ หรือ $q \mid b^2$ สมมติว่า $q \mid b^2$ ดังนั้น $q \mid b$ ส่งผลให้ได้ว่า $q^2 \mid b^2$ ต่อไปสมมติว่า $q \mid a$ เนื่องจาก $q^2 \mid ab^2$ และ $q \mid a$ จึงได้ว่า $q^2k = ab^2$ และ $qt = a$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และ t สมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า $q \nmid t$ ดังนั้น $qr = t$ สำหรับบางจำนวนเต็ม r ทำให้ได้ว่า $a = qt = q^2r$ ดังนั้น $q^2 \mid a$

จึงเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน ดังนั้น $q \nmid t$ เนื่องจาก $q^2k = ab^2 = qtb^2$ จึงได้ว่า $qk = tb^2$ หมายความว่า $q \mid tb^2$ เนื่องจาก q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $q \nmid t$ นั่นคือ $q \mid b^2$ จึงสรุปได้ว่า $q^2 \mid b^2$ ตามต้องการ

สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $p_1, p_2, \dots, p_k$ กำหนดสัญลักษณ์เพื่อสะดวกต่อการใช้งานดังนี้

$$p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = \begin{cases} p_1 p_2 \cdots p_{t-1} p_{t+1} \cdots p_k & \text{ถ้า } 1 < t < k \\ p_1 p_2 \cdots p_{k-1} & \text{ถ้า } t = k \\ p_2 \cdots p_k & \text{ถ้า } t = 1 \end{cases}$$

สมบัติ 4.1.12 ให้ p เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า pZ เป็น $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะของ Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p = q^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ

บทพิสูจน์ สมมติว่า pZ เป็น $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะของ Z โดยที่ $p \neq 0$ และ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

เนื่องจาก pZ เป็น $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะของ Z ทำให้ได้ว่าสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

สำหรับแต่ละ $a, b \in Z$, ถ้า $p \mid ab^2$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b^2$

ให้ $p = p_1 p_2 \cdots p_k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $k \geq 2$ และ $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ

เราสมมติขั้นแรกเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า $k > 2$ และ t เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1 \leq t \leq k$ เนื่องจาก $p_1 p_2 \cdots p_k \mid p_1 p_2 \cdots p_t^2 \cdots p_k$ จะได้ $p_1 p_2 \cdots p_k \mid p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$ หรือ $p_1 p_2 \cdots p_k \mid p_t^2$

เนื่องจาก $p_1 p_2 \cdots p_k > p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$ ทำให้ได้ว่า $p_1 p_2 \cdots p_k \nmid p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$

จึงได้ว่า $p_1 p_2 \cdots p_k \mid p_t^2$ ดังนั้น $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k \mid p_t$ เนื่องจาก p_t เป็นจำนวนเฉพาะ เราจะได้ว่า $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = 1$ หรือ $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = p_t$ ซึ่งนำไปสู่ข้อขัดแย้ง ดังนั้น $k = 2$

นั่นคือ $p = p_1 p_2$ เนื่องจาก $p_1 p_2 \mid p_1 p_2^2$ และ $p_1 p_2 \mid p_1^2 p_2$ จะได้ว่า $(p_1 p_2 \mid p_1 \text{ หรือ } p_1 p_2 \mid p_2^2)$ และ $(p_1 p_2 \mid p_2 \text{ หรือ } p_1 p_2 \mid p_1^2)$ เพราะว่า $p_1 p_2 > p_1$ และ $p_1 p_2 > p_2$ ทำให้ได้ว่า $p_1 \mid p_2$ และ $p_2 \mid p_1$ สรุปได้ว่า $p_1 = p_2$ ดังนั้น $p = q^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ

จากสมบัติ 4.1.12 ทำให้ได้ตัวอย่างเพื่อแสดงว่า $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะ เป็นการวางนัยทั่วไปของไอติลเฉพาะ ดังนี้

ตัวอย่าง 4.1.13 จะเห็นว่า $4Z$ เป็น $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะของ Z แต่ $4Z$ ไม่เป็น ไอติลเฉพาะของ Z ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับกรณีทั่วไป $p^2 Z$ เป็น $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะของ Z แต่ $p^2 Z$ ไม่เป็น ไอติลเฉพาะของ Z สำหรับทุกๆจำนวนเฉพาะ p

ข้อสังเกต

- 1) จากบทนิยาม 4.1.10 ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว $(2,1)$ – ไอติลเฉพาะ และ $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะ เป็นสิ่งเดียวกัน จึงทำให้ได้ว่า $(2,1)$ – ไอติลเฉพาะ และ $(1,2)$ – ไอติลเฉพาะ ของ Z เหมือนกัน

- 2) ทฤษฎีบท 3.1.1 อธิบายไว้ว่า ถ้า R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ แล้ว ไอเดิลเฉพาะของ R และ (R, R) — มอดูลย่อยเฉพาะของ R เป็นสิ่งเดียวกัน แต่ว่าข้อความนี้เป็นเท็จ เมื่อพิจารณาระหว่าง $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R และ $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R ดังแสดงไว้ในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 4.1.14 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ R เป็น (R, R) — มอดูล ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) ถ้า P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R แล้ว P เป็น $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R
- 2) ถ้า P เป็น $(2, 1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R แล้ว P เป็น $(2, 1)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R

บทพิสูจน์

- 1) สมมติว่า P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R โดยทฤษฎีบท 3.1.1 (1) จะได้ว่า P เป็นไอเดิลของ R ต่อไปให้ A และ B เป็นไอเดิลของ R โดยที่ $AB^2 \subseteq P$ จะได้ $A(RRB^2)R^2 \subseteq AB^2 \subseteq P$ เนื่องจาก P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R ดังนั้น $ARR^2 \subseteq P$ หรือ $RRB^2 \subseteq P$ เพราะว่า R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ จึงทำให้ได้ว่า $A \subseteq P$ หรือ $B^2 \subseteq P$ สรุปได้ว่า P เป็น $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R
- 2) สมมติว่า P เป็น $(2, 1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R โดยทฤษฎีบท 3.1.1 (1) จะได้ว่า P เป็นไอเดิลของ R ต่อไปให้ A และ B เป็นไอเดิลของ R โดยที่ $A^2B \subseteq P$ จะได้ $A^2(RRB)R \subseteq A^2B \subseteq P$ เนื่องจาก P เป็น $(2, 1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ R ดังนั้น $A^2RR \subseteq P$ หรือ $RRB \subseteq P$ เพราะว่า R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ จึงทำให้ได้ว่า $A^2 \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$ สรุปได้ว่า P เป็น $(2, 1)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎีบท 4.1.14 เป็นเท็จ ถึงแม้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 4.1.14 พิจารณา Z เป็น (Z, Z) — มอดูล จะเห็นได้จากสมบัติ 3.3.12 ว่า $4Z$ เป็น $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ Z และจากสมบัติ 3.3.2 จะได้ว่า $4Z$ ไม่เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ Z

ใน (R, S) — มอดูล M เราเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ M และ $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R ได้จากสมบัติต่อไปนี้

สมบัติ 4.1.15 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูล และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M โดยที่ $(P: M)_{R;S^2}$ เป็นไอเดิลของ R ซึ่ง $(P: M)_{R;S^2} \neq R$ ถ้า P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R

บทพิสูจน์

สมมติ P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M และให้ A และ B เป็นไอเดิลของ R โดยที่ $AB^2 \subseteq (P: M)_{R;S^2}$ จะได้ว่า $AB^2MS^2S^2 \subseteq AB^2MS^2 \subseteq P$ ดังนั้น $A(B^2MS^2)S^2 \subseteq P$

เนื่องจาก P เป็น $(1, 2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M จะได้ $AMS^2 \subseteq P$ หรือ $B^2MS^2 \subseteq P$

นั่นคือ $A \subseteq (P: M)_{R;S^2}$ หรือ $B^2 \subseteq (P: M)_{R;S^2}$ สรุปได้ว่า $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น $(1, 2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ R

อย่างไรก็ตาม บทกลับของสมบัติ 4.1.15 ไม่เป็นจริง ซึ่งแสดงให้เห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1.16 พิจารณา Z เป็น $(Z, 2Z)$ — มอดูล จะเห็นได้จากสมบัติ 4.1.2 ว่า $6Z$ ไม่เป็น $(1,2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะของ Z แต่ $(6Z:Z)_{Z;(2Z)^2} = 3Z$ เป็น $(1,2)$ — ไอเดิลเฉพาะของ Z

4.2 $(1, k)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

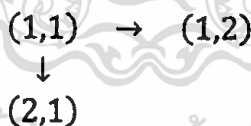
ในบทย่อ 4.1 เราได้นำถึงแนวทางการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม พร้อมทั้งแนะนำให้รู้จักกับ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ และ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(2,1)$ รวมถึงได้เห็นตัวอย่างเพื่ออธิบายว่าทั้งสองบทนิยามนั้น ต่างก็เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ยิ่งไปกว่านั้น เราได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ และไอเดิลบางชนิดของ R ทั้งนี้เพื่อความสะดวกเราเรียก (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1,2)$ แทนด้วย $(1,2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และเรียก (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(2,1)$ แทนด้วย $(2,1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

พิจารณาข้อความที่เราพิสูจน์แล้ว ดังนี้

“ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M แล้ว P เป็น $(1,2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M ” และ

“ถ้า P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M แล้ว P เป็น $(2,1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M ”

เราแทนความสัมพันธ์ของข้อความทั้งสองข้างต้นด้วยแผนภาพได้ดังนี้



แผนภาพ 1.1

โดยที่ $(1,1)$ แทนข้อความ “ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M ”

$(1,2)$ แทนข้อความ “ P เป็น $(1,2)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M ”

$(2,1)$ แทนข้อความ “ P เป็น $(2,1)$ — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดูล M ”

จากแผนภาพข้างต้น เราได้แนวคิดการวิจัยอย่างคร่าวๆ นั่นคือ “ขยายแผนภาพให้ใหญ่ขึ้น” แนวคิดนี้นำมาซึ่งหนทางในการศึกษาขั้นต่อไป นั่นคือ การให้บทนิยามของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, k)$ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม อีกชั้นหนึ่ง

บทนิยาม 4.2.1 ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ M เป็น (R, S) – มอดูล ให้ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ เราเรียก P ว่า (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, k)$ ถ้า สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ในทำนองเดียวกัน เราเรียก P ว่า (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(k, 1)$ ถ้า สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $I^kNJ \subseteq P$ แล้ว $I^kMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ข้อสังเกต (R, S) – มอดูลย่อย เฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, 1)$ และ (R, S) – มอดูลย่อย เฉพาะอย่างร่วม เป็นสิ่งเดียวกัน

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกข้อกำหนดความหมายของข้อความต่อไปนี้

เราเขียนแทน “ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, k)$ ด้วย $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม”

เราเขียนแทน “ (R, S) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(k, 1)$ ด้วย $(k, 1)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม”

สมบัติ 4.2.2 ให้ $r, s, k \in \mathbb{Z}^+$ และ $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$ จะได้ว่า

- 1) pZ เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid rs^k$
- 2) pZ เป็น $(k, 1)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid r^ks$

บทพิสูจน์

(1) $(\Rightarrow)$ สมมติว่า pZ เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z โดยที่ $p \neq 0$ และ p ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p = mn$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n โดยที่ $m > 1$ และ $n > 1$ จะได้ว่า $(rmZ)(nZ)(s^kZ) = rmns^kZ \subseteq pZ$ เนื่องจาก pZ เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z และ $p \nmid n$ จึงได้ว่า $(rmZ)Z(s^kZ) \subseteq pZ$ เพราะว่า $(rZ)(mZ)(s^kZ) = (rmZ)Z(s^kZ) \subseteq pZ$ และ เนื่องจาก pZ เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z และ $p \nmid m$ ทำให้ได้ว่า $(rZ)Z(s^kZ) \subseteq pZ$ นั่นคือ $p \mid rs^k$

($\Leftarrow$) เห็นได้ชัดว่า ถ้า $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid rs^k$ แล้ว pZ เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดูล Z

(2) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ข้อสังเกต จากสมบัติ 4.2.2 เราเห็นความแตกต่างระหว่าง $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดุล Z และ $(k, 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) – มอดุล Z ตรงที่ “ $p \mid rs^k$ ” และ “ $p \mid r^k s$ ” ดังนั้น การเลือกค่าของ r, s และ k ที่เหมาะสม จะทำให้เราได้ตัวอย่างที่ทำให้เห็นว่า $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม และ $(k, 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม แตกต่างกัน

สมบัติ 4.2.3 ให้ $k \in \mathbb{Z}^+$ และ M เป็น (R, S) – มอดุล

- 1) ถ้า P เป็น $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P เป็น $(1, k + 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) ถ้า P เป็น $(k, 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P เป็น $(k + 1, 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

บทพิสูจน์

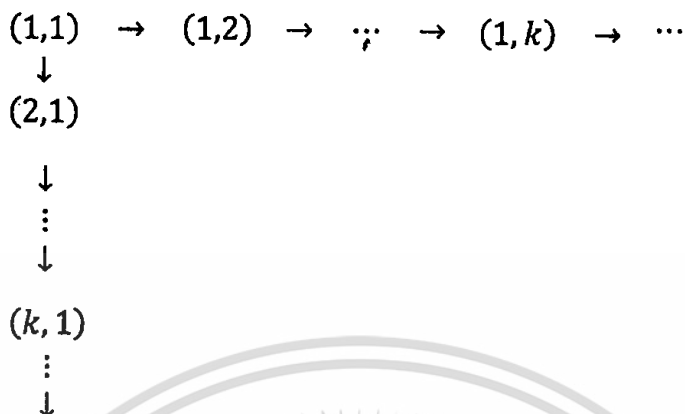
(1) สมมติว่า P เป็น $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ให้ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R , N เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M และ J เป็นไอดีลทางขวาของ S โดยที่ $INJ^{k+1} \subseteq P$ เนื่องจาก $I(INJ)^k \subseteq I^2NJ^{k+1} \subseteq INJ^{k+1} \subseteq P$ และ P เป็น $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ทำให้ได้ว่า $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $INJ \subseteq P$ ถ้า $IMJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^{k+1} \subseteq P$ สมมติว่า $INJ \subseteq P$ จะได้ว่า $INJ^k \subseteq P$ ดังนั้น $IMJ^{k+1} \subseteq IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ สรุปได้ว่า P เป็น $(1, k + 1)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

(2) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้ได้มาจากสมบัติ 4.2.2 เพื่อแสดงว่าบทกลับของสมบัติ 4.2.3 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 4.2.4 พิจารณา Z เป็น $(2Z, 3Z)$ – มอดุล จะได้ว่า $27Z$ และ $54Z$ เป็น $(1, 3)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z แต่ $27Z$ และ $54Z$ ไม่เป็น $(1, 2)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(2Z, 3Z)$ – มอดุล Z

แผนผังต่อไปนี้ได้มาจากสมบัติ 4.1.3



แผนภาพ 1.2

โดยที่ (m, n) แทนข้อความ “ P เป็น (m, n) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดุล M ”

ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M และให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก เรา นิยามเซตย่อย $(N: M)_{R;S^k}$ ของ R ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ $(1, k)$ —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ดังนี้

$$(N: M)_{R;S^k} = \{r \in R \mid rMS^k \subseteq N\}$$

ต่อไปเป็นสมบัติพื้นฐานที่เราศึกษาได้จาก $(N: M)_{R;S^k}$ สามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย จึงขอละบทพิสูจน์

สมบัติ 4.2.4 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ N เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M

- 1) $(N: M)_{R;S^k}$ เป็นกลุ่มย่อยของ R ภายใต้การบวก
- 2) $(N: M)_{R;S^k} \subseteq (N: M)_{R;S^{k+1}}$
- 3) ถ้า $S^2 = S$ แล้ว $(N: M)_{R;S^k}$ เป็นไอดิลของ R

บทนิยาม 4.2.5 ให้ R เป็นวงและ T เป็นไอดิลของ R โดยที่ $T \neq R$ และ ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก เรากล่าวว่า T เป็น $(k, 1)$ —ไอดิลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดิล A และ B ของ R ถ้า $A^k B \subseteq T$ แล้ว $A^k \subseteq T$ หรือ $B \subseteq T$

ในทำนองเดียวกัน เรากล่าวว่า T เป็น $(1, k)$ —ไอดิลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดิล A และ B ของ R ถ้า $AB^k \subseteq T$ แล้ว $A \subseteq T$ หรือ $B^k \subseteq T$

ต่อไปเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) — มอดุลย่อย และ ไอดิลของ R

สมบัติ 4.2.6 ให้ $k \in \mathbb{Z}^+$ และ M เป็น (R, S) – มอดูล และ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $(P: M)_{R;S^k}$ เป็นไอดิลของ R ซึ่ง $(P: M)_{R;S^k} \neq R$ ถ้า P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R;S^k}$ เป็น $(1, k)$ –ไอดิลเฉพาะของ R

บทพิสูจน์

สมมติ P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M และให้ A และ B เป็นไอดิลของ R โดยที่ $AB^k \subseteq (P: M)_{R;S^k}$ จะได้ว่า $AB^k MS^k S^k \subseteq AB^k MS^k \subseteq P$ ดังนั้น $A(B^k MS^k) S^k \subseteq P$

เนื่องจาก P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M จะได้ $AMS^k \subseteq P$ หรือ $B^k MS^k \subseteq P$

นั่นคือ $A \subseteq (P: M)_{R;S^k}$ หรือ $B^k \subseteq (P: M)_{R;S^k}$ สรุปได้ว่า $(P: M)_{R;S^k}$ เป็น $(1, k)$ –ไอดิลเฉพาะของ R

ก่อนที่จะศึกษาลักษณะเฉพาะของ $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม เราขอทบทวนสัญลักษณ์ต่างๆที่นำมาใช้ประกอบการพิสูจน์ ดังนี้

ให้ R และ S เป็นวง และ M เป็น (R, S) – มอดูล สำหรับแต่ละ $X \subseteq R$ และ $Y \subseteq M$

กำหนดสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$(X)_I$ แทนไอดิลทางซ้ายที่ก่อกำเนิดด้วย X

$(X)_r$ แทนไอดิลทางขวาที่ก่อกำเนิดด้วย X

$\langle Y \rangle$ แทน (R, S) – มอดูลย่อยที่ก่อกำเนิดด้วย Y

บทตั้งต่อไปนี้มีไว้เพื่อเป็นเครื่องมือในการศึกษาลักษณะเฉพาะของ $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

บทตั้ง 4.2.7 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $k \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $I^2 N(J)^k \subseteq P$
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $(I)_r N(J)^k \subseteq P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย P ของ M ,
ถ้า $(I)_r M(J)^k \subseteq P$ แล้ว $(I)_r \langle IMJ^k \rangle J^k \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย N และ P ของ M ,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ถ้า } INJ^k \subseteq P \text{ แล้ว } I^2N(J)_i^k \subseteq P$$

5) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R , ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย P ของ M ,

$$\text{ถ้า } I^2M(J)_i^k \subseteq P \text{ แล้ว } I\langle IMJ^k \rangle(J)_i^k \subseteq P$$

6) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R , ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N และ P ของ M ,

$$\text{ถ้า } INJ^k \subseteq P \text{ แล้ว } (I)_rN(J^2)^k \subseteq P$$

7) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R , ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย P ของ M ,

$$\text{ถ้า } (I)_rM(J^2)^k \subseteq P \text{ แล้ว } (I)_r\langle IMJ^k \rangle J^k \subseteq P$$

บทพิสูจน์

(1) ให้ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดีลทางซ้ายของ S , N และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย M สมมติว่า $INJ^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} I^2N(J)_r^k &= I^2N(J + JS)^k \\ &\subseteq I^2N(J^k + J^kS) \\ &\subseteq INJ^k + I(INJ^k)S \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

(2) ให้ I เป็นไอดีลทางขวาของ R , J เป็นไอดีลทางซ้ายของ S , N และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย M สมมติว่า $INJ^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (I)_lN(J^2)^k &= (I + RI)N(J^k)^2 \\ &= (I + RI)NJ^kJ^k \\ &\subseteq INJ^kJ^k + RINJ^kJ^k \\ &\subseteq INJ^k + R(INJ^k)J^k \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

(3) ให้ I เป็นไอดีลทางขวาของ R , J เป็นไอดีลทางซ้ายของ S และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย M

สมมติว่า $(I)_lM(J^2)^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (I)_l\langle IMJ^k \rangle J^k &= (I)_l(Z(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)J^k \\ &\subseteq (I)_l(Z(IMJ^k))J^k + (I)_l(R(IMJ^k)S)J^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq \mathbb{Z}(I), IM(J^k)^2 + (I), RIMJ^k SJ^k \\
&\subseteq \mathbb{Z}(I), M(J^2)^k + (I), M(J^2)^k \\
&\subseteq P.
\end{aligned}$$

(4) ให้ I เป็นไอดัลทางขวาของ R , J เป็นไอดัลทางขวาของ S , N และ P เป็น (R, S) – มอดุลย่อย M สมมติว่า $INJ^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$I^2 N(J)_i^k = I^2 N(J + SJ)^k$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq I^2 N(J^k + SJ^k) \\
&\subseteq INJ^k + I(INS)J^k \\
&\subseteq INJ^k + INJ^k \\
&\subseteq P + P \\
&\subseteq P.
\end{aligned}$$

(5) ให้ I เป็นไอดัลทางขวาของ R , J เป็นไอดัลทางขวาของ S และ P เป็น (R, S) – มอดุลย่อย M สมมติว่า $I^2 M(J)_i^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
I(IMJ^k)(J)_i^k &= I(\mathbb{Z}(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)(J)_i^k \\
&\subseteq \mathbb{Z}(I^2 MJ^k(J)_i^k) + IRIMJ^k S(J)_i^k \\
&\subseteq \mathbb{Z}(I^2 M(J)_i^k) + I^2 M(J)_i^k \\
&\subseteq P.
\end{aligned}$$

(6) ให้ I เป็นไอดัลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดัลทางขวาของ S , N และ P เป็น (R, S) – มอดุลย่อย M สมมติว่า $INJ^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(I), N(J^2)^k &= (I + IR)NJ^k J^k \\
&\subseteq INJ^k J^k + (IR)NJ^k J^k \\
&\subseteq INJ^k + I(RNJ^k)J^k
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\subseteq INJ^k$$

$$\subseteq P.$$

(7) ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางขวาของ S และ P เป็น (R, S) – มอดุลย่อย M

สมมติว่า $(I)_r M(J^2)^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (I)_r \langle IMJ^k \rangle J^k &= (I)_r (\mathbb{Z}(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)J^k \\ &\subseteq \mathbb{Z}((I)_r IMJ^k J^k) + (I)_r RIMJ^k SJ^k \\ &\subseteq \mathbb{Z}(I)_r M(J^2)^k + (I)_r M(J^2)^k \\ &\subseteq P + P. \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

เราปิดท้ายบทย่อยนี้ด้วยลักษณะเฉพาะของ $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม โดยสามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายเพียงใช้บทตั้ง 4.2.7

ทฤษฎีบท 4.2.8 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล, P เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M และ $k \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) P เป็น $(1, k)$ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M ,
ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M ,
ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M ,
ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 5) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ $m \in M$,
ถ้า $I\langle m \rangle J^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 6) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ $m \in M$,
ถ้า $I\langle m \rangle J^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 7) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ $m \in M$
ถ้า $I\langle m \rangle J^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 8) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ $m \in M$,
ถ้า $I\langle m \rangle J^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $m \in P$

4.3 (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ในบทย่อนี้เราศึกษาการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ชนิดสุดท้าย ซึ่งกล่าวได้เพิ่มเติมอีกว่า เป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด $(1, k)$ ทั้งนี้ การศึกษาสมบัติต่างๆ ยังคงเป็นไปในแนวทางเดียวกับบทย่อก่อนหน้านี้ จึงขอเริ่มต้นด้วยบทนิยามของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n)

บทนิยาม 4.3.1 ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ M เป็น (R, S) — มอดุล ให้ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ เราเรียก P ว่า (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) ถ้า สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N ของ M ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m M J^n \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกของกำหนดความหมายของข้อความต่อไปนี้

เราเขียนแทน “ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมชนิด (m, n) ด้วย (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม”

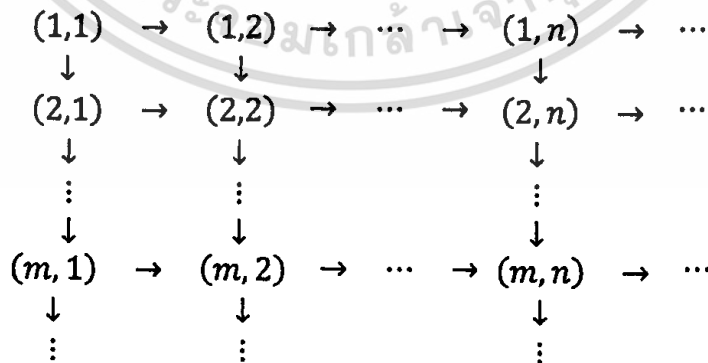
สมบัติ 4.3.2 ให้ $r, s, m, n \in \mathbb{Z}^+$ และ $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$ จะได้ว่า pZ เป็น (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (rZ, sZ) — มอดุล Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p \mid r^m s^n$

สมบัติต่อไปนี้จะทำให้แผนภาพ 1.2 สมบูรณ์

สมบัติ 4.3.3 ให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ และ M เป็น (R, S) — มอดุล ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) ถ้า P เป็น (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P เป็น $(m, n + 1)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) ถ้า P เป็น (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P เป็น $(m + 1, n)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

เราจึงได้แผนภาพที่สมบูรณ์ ดังนี้



แผนภาพ 1.3

โดยที่ (m, n) แทนข้อความ “ P เป็น (m, n) —มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ (R, S) — มอดุล M ”

บทแทรก 4.3.4 ให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ และ M เป็น (R, S) — มอดุล จะได้ว่า ถ้า P เป็น (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P เป็น (r, s) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม r และ s ซึ่ง $r \geq m$ และ $s \geq n$

บทตั้งต่อไปนี้มีไว้เพื่อเป็นเครื่องมือในการศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

บทตั้ง 4.3.5 ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $(I^m)^2 N (J^n)_r \subseteq P$
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $(I)_r^m N (J^n)^2 \subseteq P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย P ของ M ,
ถ้า $(I)_r^m M (J^n)^2 \subseteq P$ แล้ว $(I)_r^m \langle I^m M J^n \rangle J^n \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $(I^m)^2 N (J)_l^n \subseteq P$
- 5) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย P ของ M ,
ถ้า $(I^m)^2 M (J)_l^n \subseteq P$ แล้ว $I^m \langle I^m M J^n \rangle (J)_l^n \subseteq P$
- 6) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย N และ P ของ M ,
ถ้า $I^m N J^n \subseteq P$ แล้ว $(I)_r^m N (J^n)^2 \subseteq P$
- 7) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) — มอดุลย่อย P ของ M ,
ถ้า $(I)_r^m M (J^n)^2 \subseteq P$ แล้ว $(I)_r^m \langle I^m M J^n \rangle J^n \subseteq P$

บทพิสูจน์

- 1) ให้ I เป็นไอดิลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดิลทางซ้ายของ R และ N และ P เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M โดยที่ $I^m NJ^n \subseteq P$ เราจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} (I^m)^2 N(J^n) &= (I^m)^2 N(J + JS)^n \\ &\subseteq (I^m)^2 N(J^n + J^n S) \\ &\subseteq (I^m)^2 NJ^n + (I^m)^2 N(J^n S) \\ &\subseteq I^m NJ^n + I^m (I^m NJ^n) S \\ &\subseteq P \end{aligned}$$

สำหรับ 2) – 7) เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นลักษณะเฉพาะของ (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

ทฤษฎีบท 4.3.6 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล, P เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้มีสมมูลกัน

- 1) P เป็น (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M , ถ้า $I^m NJ^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 3) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางซ้าย J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M , ถ้า $I^m NJ^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอดิลทางขวา I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M , ถ้า $I^m NJ^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

บทพิสูจน์ เราพิสูจน์ได้โดยตรงจากบทตั้ง 4.3.5

บทแทรก 4.3.7 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล, P เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้มีสมมูลกัน

- 1) P เป็น (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ $x \in M$, ถ้า $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $x \in P$

บทแทรก 4.3.8 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล, P เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ข้อความต่อไปนี้มีสมมูลกัน

- 1) สำหรับแต่ละไอดิลทางซ้าย I ของ R , ไอดิลทางขวา J ของ S และ $x \in M$,

ถ้า $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $x \in P$

2) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R , ไอดีลทางซ้าย J ของ S และ $x \in M$,

ถ้า $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $x \in P$

3) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R , ไอดีลทางซ้าย J ของ S และ $x \in M$,

ถ้า $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $x \in P$

4) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R , ไอดีลทางขวา J ของ S และ $x \in M$,

ถ้า $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P$ แล้ว $I^m MJ^n \subseteq P$ หรือ $x \in P$

ต่อจากนี้ไปเราสมมติว่า M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย เราจะศึกษาลักษณะเฉพาะของ (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมใน (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย M ก่อนอื่นเราเริ่มต้นด้วยสมบัติพื้นฐานที่จะเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ผลลัพธ์อื่นๆ

สมบัติ 4.3.9 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้ายและ $k \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $(U: M)_R^k \subseteq (U^k: M)_R$ สำหรับทุก (R, S) – มอดูลย่อย U ของ M

บทพิสูจน์ ให้ U เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M และ $a_i \in (U: M)_R$ ทุกๆ $i = 1, 2, \dots, k$

เนื่องจาก $(U^k: M)_R = \{r \in R \mid rMS \subseteq (U: M)_R^k MS^k\}$ และ $RMS = M$

จะได้ว่า $(a_1 a_2 \cdots a_k)MS \subseteq (U: M)_R^k MS = (U: M)_R^k R^{k-1} MS^k \subseteq (U: M)_R^k MS^k$

ดังนั้น $(U: M)_R^k \subseteq (U^k: M)_R$

ให้ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย M และ $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ พิจารณาเงื่อนไขที่น่าสนใจดังนี้ สำหรับทุก (R, S) – มอดูลย่อย U และ V ของ M ,

$$\text{ถ้า } U^k V \subseteq P \text{ แล้ว } U^k \subseteq P \text{ หรือ } V \subseteq P \text{— (1)}$$

$$\text{ถ้า } U^k V^k \subseteq P \text{ แล้ว } U^k \subseteq P \text{ หรือ } V^k \subseteq P \text{— (2)}$$

$$\text{ถ้า } U^m V^n \subseteq P \text{ แล้ว } U^m \subseteq P \text{ หรือ } V^n \subseteq P \text{— (3)}$$

ทฤษฎีบท 4.3.10 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย และ $k \in \mathbb{Z}^+$

ถ้า P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P สอดคล้องกับเงื่อนไข (1)

บทพิสูจน์ สมมติว่า P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ให้ U และ V เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $U^k V \subseteq P$ จะได้ว่า

$$(U^k: M)_R (V: M)_R MSS^k \subseteq (U^k: M)_R (V: M)_R MSS \subseteq P$$

เนื่องจาก P เป็น $(1, k)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ทำให้ได้ว่า $(U^k: M)_R MSS^k \subseteq P$ หรือ $(V: M)_R MS \subseteq P$ เพราะว่า $(U: M)_R^k \subseteq (U^k: M)_R$ และ $V = (V: M)_R MS$ จึงสรุปได้ว่า $U^k = (U: M)_R^k MS^k \subseteq (U^k: M)_R MS^k \subseteq P$ หรือ $V = (V: M)_R MS \subseteq P$ นั่นคือ P สอดคล้องกับเงื่อนไข (1)

บทตั้ง 4.3.11 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย และ $k \in \mathbb{Z}^+$

ถ้า P เป็น (k, k) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P สอดคล้องกับเงื่อนไข (2)

บทพิสูจน์ สมมติว่า P เป็น (k, k) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ให้ U และ V เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $U^k V^k \subseteq P$ จะได้ว่า

$$(U: M)_R^k (V^k: M)_R MSS^k \subseteq (U^k: M)_R (V^k: M)_R MSS \subseteq P$$

เนื่องจาก P เป็น (k, k) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ทำให้ได้ว่า $(U: M)_R^k MS^k \subseteq P$ หรือ $(V^k: M)_R MS \subseteq P$ นั่นคือ $U^k \subseteq P$ หรือ $V^k \subseteq P$ จึงสรุปได้ว่า P สอดคล้องกับเงื่อนไข (2)

บทตั้ง 4.3.12 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $m \geq n$

ถ้า P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P สอดคล้องกับเงื่อนไข (3)

บทพิสูจน์ สมมติว่า P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ให้ U และ V เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $U^m V^n \subseteq P$ จะได้ว่า

$$(U: M)_R^m (V^n: M)_R MSS^n \subseteq (U^m: M)_R (V^n: M)_R MSS \subseteq P$$

เนื่องจาก P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ทำให้ได้ว่า $(U: M)_R^m MS^n \subseteq P$ หรือ $(V^n: M)_R MS \subseteq P$ เนื่องจาก $m \geq n$ จะได้ว่า $S^m \subseteq S^n$ ดังนั้น $(U: M)_R^m MS^m \subseteq P$ นั่นคือ $U^m \subseteq P$ หรือ $V^n \subseteq P$ จึงสรุปได้ว่า P สอดคล้องกับเงื่อนไข (3)

บทตั้ง 4.3.13 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ โดยที่ $m < n$

ถ้า P เป็น (m, n) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P สอดคล้องกับเงื่อนไข (3)

บทพิสูจน์ สมมติว่า P เป็น (m, n) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ให้ U และ V เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M โดยที่ $U^m V^n \subseteq P$ ในทำนองเดียวกับบทตั้ง 4.2.12 ทำให้ได้ว่า $(U: M)_R^m MS^n \subseteq P$ หรือ $V^n = (V^n: M)_R MS \subseteq P$ เนื่องจาก $R^m (U: M)_R^m \subseteq (U: M)_R^m$ และ $S^m S^n \subseteq S^n$ จึงได้ว่า $R^m (U: M)_R^m MS^m S^n \subseteq (U: M)_R^m MS^n \subseteq P$ เนื่องจาก P เป็น (m, n) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ทำให้ได้ว่า $R^m MS^n \subseteq P$ หรือ $U^m = (U: M)_R^m MS^m \subseteq P$ เนื่องจาก $m < n$ จะได้ว่า $S^n \subseteq S^m$ ดังนั้น $R^n MS^n \subseteq P$ เนื่องจาก $RMS = M$ ทำให้ได้ว่า $M = R^n MS^n \subseteq P$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $U^m \subseteq P$ หรือ $V^n \subseteq P$ จึงสรุปได้ว่า P สอดคล้องกับเงื่อนไข (3)

จากบทตั้ง 4.3.12 และ 4.3.13 เราสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3.14 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$

ถ้า P เป็น (m, n) — มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว P สอดคล้องกับเงื่อนไข (3)

บทตั้ง 4.3.15 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) สำหรับแต่ละ (R, S) — มอดูลย่อย A, B, C และ D ของ M ถ้า $A \subseteq C$ และ $B \subseteq D$ แล้ว $AB \subseteq CD$

2) ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว $(IMS)^2 \cdot JMS \subseteq (I^2J)MS^2$ สำหรับทุกไอดีล I และ J ของ R

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $S^2 = S$ แล้ว $(IMS)^2 \cdot JMS = (I^2J)MS$ สำหรับทุกไอดีล I และ J ของ R

โดยใช้บทตั้ง 4.3.11 ทำให้เราได้รับความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) — มอดูลย่อยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (1) เมื่อ $k = 2$ และ $(2, 1)$ — ไอดีลเฉพาะ ดังนี้

หมายเหตุ ผลลัพธ์ต่อไปนี้พิสูจน์ได้ภายใต้เงื่อนไขว่า R เป็นวงสลับที่

ข้อสังเกต ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว $(2, 1)$ — ไอดีลเฉพาะ และ $(2, 1)$ — ไอดีลเฉพาะ เป็นสิ่งเดียวกัน

บทตั้ง 4.3.16 ให้ M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ P เป็น (R, S) — มอดูลย่อยของ M

ถ้า P สอดคล้องกับเงื่อนไขว่า

สำหรับทุก (R, S) — มอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $U^2V \subseteq P$ แล้ว $U^2 \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$

แล้ว $(P: M)_{R; S^2}$ เป็น $(1, 2)$ — ไอดีลเฉพาะของ R

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $S^2 = S$ แล้ว บทกลับเป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 4.3.10 และบทตั้ง 4.3.15 เราได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.3.17 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย ถ้า P เป็น $(1, 2)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R; S^2}$ เป็น $(1, 2)$ – ไอดีลเฉพาะของ R

4.4 (m, n) – ระบบผลคูณ

ในบทย่อนี้ เราจะให้บทนิยามของ (m, n) – ระบบผลคูณ และเราใช้ (m, n) – ระบบผลคูณ เพื่อเป็นลักษณะเฉพาะของ (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

บทนิยาม 4.4.1 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ กำหนดให้ $X \subseteq M \setminus \{0\}$ โดยที่ $X \neq \emptyset$ เราเรียก X ว่า (m, n) – ระบบผลคูณ ถ้า สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย K, L ของ M ถ้า $(K + L) \cap X \neq \emptyset$ และ $(K + I^m M J^n) \cap X \neq \emptyset$ แล้ว $(K + I^m L J^n) \cap X \neq \emptyset$

สมบัติที่ศึกษาได้ต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่าง (m, n) – ระบบผลคูณ และ (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

สมบัติ 4.4.2 ให้ P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ก็ต่อเมื่อ $M \setminus P$ เป็น (m, n) – ระบบผลคูณ

สมบัติ 4.4.3 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ เรากำหนดให้ $X = M \setminus P$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M
- 2) X เป็น (m, n) – ระบบผลคูณ
- 3) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ (R, S) – มอดูลย่อย L ของ M ถ้า $L \cap X \neq \emptyset$ และ $I^m M J^n \cap X \neq \emptyset$ แล้ว $I^m L J^n \cap X \neq \emptyset$
- 4) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ $x \in M$ ถ้า $\langle x \rangle \cap X \neq \emptyset$ และ $I^m M J^n \cap X \neq \emptyset$ แล้ว $I^m \langle x \rangle J^n \cap X \neq \emptyset$

สมบัติ 4.4.4 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ สมมติว่า X เป็น (m, n) – ระบบผลคูณ

ถ้า P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเทียบกับสมบัติว่า $P \cap X = \emptyset$ แล้ว P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

บทพิสูจน์ สมมติว่า P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเทียบกับสมบัติว่า $P \cap X = \emptyset$

ให้ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R , J เป็นไอดีลทางขวาของ S และ N เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M ซึ่ง $N \not\subseteq P$ และ $I^m M J^n \not\subseteq P$ เพราะว่า P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเทียบกับสมบัติว่า $P \cap X = \emptyset$

ดังนั้น $(P + N) \cap X \neq \emptyset$ และ $(P + I^m M J^n) \cap X \neq \emptyset$ เพราะว่า X เป็น (m, n) – ระบบผลคูณ
จึงได้ว่า $(P + I^m N J^n) \cap X \neq \emptyset$ เนื่องจาก $P \cap X = \emptyset$ ทำให้ทราบว่า $I^m N J^n \not\subseteq P$ จึงสรุปได้ว่า
 P เป็น (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

4.5 รากเฉพาะของ (m, n) -มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

บทย่อนี้ เราได้แรงบันดาลใจมาจากผลงานของ D.Yuwaningsih และ I.Wijayanti [22] ได้แสดงไว้ว่า
 $rad_{(R,S)}(M) = \bigoplus_{i \in \Delta} rad_{(R,S)}(N_i)$ โดยที่ $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ดังกล่าว
D.Yuwaningsih และ I.Wijayanti พิสูจน์ไว้ภายใต้เงื่อนไข $a \in RaS$ ทุกๆ $a \in M$ แต่ทว่า ในงานวิจัยนี้ เรานำ
ผลลัพธ์ของ D.Yuwaningsih และ I.Wijayanti มาศึกษาเพิ่มเติม พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่า $rad_{(R,S)}^{(m,n)}(M) =$
 $\bigoplus_{i \in \Delta} rad_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i)$ โดยที่ $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ และไม่จำเป็นต้องมีเงื่อนไข $a \in RaS$ ทุกๆ $a \in M$

บทนิยาม 4.5.1 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$

สำหรับแต่ละ (R, S) – มอดุลย่อย N ของ M ถ้ามี (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ซึ่งบรรจุ N แล้ว
เรานิยาม ${}^{(m,n)}\sqrt{N} = \{x \in M \mid \text{ทุก } (m, n) \text{ – ระบบผลคูณ } X \text{ ซึ่งบรรจุ } x \text{ นั้น } X \cap N \neq \emptyset\}$

ในทางกลับกัน ถ้าไม่มี (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ซึ่งบรรจุ N แล้ว เรานิยาม ${}^{(m,n)}\sqrt{N} = M$

ทฤษฎีบท 4.5.2 ให้ M เป็น (R, S) – มอดุล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ สมมติให้ N เป็น (R, S) – มอดุลย่อยของ M

จะได้ว่า ${}^{(m,n)}\sqrt{N} = M$ หรือ

$${}^{(m,n)}\sqrt{N} = \bigcap_P \{P \text{ เป็น } (m, n) \text{ – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ } M \text{ ซึ่งบรรจุ } N\}$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า ${}^{(m,n)}\sqrt{N} \neq M$ และ $x \in {}^{(m,n)}\sqrt{N}$

ให้ P เป็น (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ซึ่งบรรจุ N

เนื่องจาก $M \setminus P$ เป็น (m, n) – ระบบผลคูณ และ $N \cap (M \setminus P) = \emptyset$ เราจึงได้ว่า $x \in P$

ในอีกทางหนึ่ง ให้ $x \in M$ ซึ่ง $x \notin {}^{(m,n)}\sqrt{N}$ ดังนั้นจึงมี (m, n) – ระบบผลคูณ X ซึ่ง $x \in X$ และ
 $N \cap X = \emptyset$ ทำให้ได้ว่า $\{J \mid J \text{ เป็น } (R, S) \text{ – มอดุลย่อย } M \text{ ซึ่งบรรจุ } N \text{ และ } J \cap X = \emptyset\}$ ไม่เป็นเซตว่าง

โดยบทตั้งของซอร์น เราจะได้ว่ามี (R, S) – มอดุลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม K ของ M ซึ่ง $K \cap X = \emptyset$

โดยสมบัติ 4.4.4 เราจึงได้ว่า K เป็น (m, n) – มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M ยิ่งไปกว่านั้น $x \notin K$

บทตั้ง 4.5.3 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ สมมติให้ N เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M

ถ้า P เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $P \cap N$ เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ N

ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ เรานิยามสัญลักษณ์ $\text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)$

โดย $\text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M) = \{P \mid P \text{ เป็น } (m, n) \text{ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ } M\}$

บทนิยาม 4.5.4 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ เรานิยามสัญลักษณ์ $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$

โดย $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M) = \begin{cases} \bigcap_{P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)} P & , \text{ ถ้า } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M) \neq \emptyset \\ M & , \text{ ถ้า } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M) = \emptyset \end{cases}$

ในกรณีทั่วไป เราเห็นได้ชัดว่า (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูล เป็น (R, S) – มอดูล ซึ่งทำให้เรานิยามสัญลักษณ์ $\text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)$ ดังนี้

ให้ N เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูล M เรานิยามสัญลักษณ์ $\text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)$

โดย $\text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M) = \{P \mid P \text{ เป็น } (m, n) \text{ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ } N\}$

เราเห็นได้ชัดจากบทตั้ง 4.5.3 ว่า ถ้า $P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)$ แล้ว $P \cap N \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)$

ฉะนั้น เราจึงนิยาม $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N)$ ดังนี้

$$\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) = \begin{cases} \bigcap_{P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)} P & , \text{ ถ้า } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M) \neq \emptyset \\ N & , \text{ ถ้า } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M) = \emptyset \end{cases}$$

สมบัติ 4.5.6 ให้ N เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูล M และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

$$\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) \subseteq \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$$

บทตั้ง 4.5.7 ให้ $\{N_i\}_{i \in \Delta}$ เป็นคอลเล็กชันของ (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูล M โดยที่ $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า $N_k^* \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N_k \# M)$ เมื่อ $k \in \Delta$ แล้ว $N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i) \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้นำมาขยายมาจาก สมบัติ 3.2 [22]

สมบัติ 4.5.8 ให้ $\{N_i\}_{i \in \Delta}$ เป็นคอลเล็กชันของ (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูล M โดยที่ $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M) = \bigoplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i)$

บทพิสูจน์ เราเห็นได้ชัดจากสมบัติ 4.5.6 ว่า $\bigoplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i) \subseteq \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$

ต่อไป เราให้ $x \in M$ โดยที่ $x \notin \bigoplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i)$ เพราะว่า $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$

ฉะนั้น x เป็นผลบวกจำกัดของบางสมาชิกใน N_i เราจึงสมมติได้ว่า $x = \sum_{i \in \Delta} n_i$

เนื่องจาก $x \notin \bigoplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i)$ เราจึงทราบว่า $n_k \notin \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N_i)$ สำหรับบาง $k \in \Delta$

ดังนั้น $n_k \notin N_k^*$ สำหรับบาง (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม N_k^* ของ M

โดยบทตั้ง 4.5.7 เราจึงได้ว่า $N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$ เป็น (m, n) – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M

เราสมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า $x \in N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$ เราจะได้ว่า $x = y_k + \sum_{i \in \Delta \setminus \{k\}} y_i$

โดยที่ $y_k \in N_k^*$ และ $y_i \in N_i$ ทุกๆ $i \in \Delta \setminus \{k\}$ จึงทำให้เราได้ว่า $\sum_{i \in \Delta} n_i = x = \sum_{i \in \Delta} y_i$

ซึ่งเป็นเหตุผลที่นำไปสู่ $n_k = y_k \in N_k^*$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $x \notin N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$

ดังนั้น $x \notin \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย

เราปิดท้ายรายงานการวิจัยด้วยข้อสังเกต ที่เห็นได้ผลงานวิจัย ดังนี้

ข้อสังเกต 1 พิจารณา สมบัติ 4.1.15 และ บทแทรก 4.3.17

“สมบัติ 4.1.15 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูล และ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ M โดยที่ $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น ไอติลของ R ซึ่ง $(P: M)_{R;S^2} \neq R$ ถ้า P เป็น $(1, 2)$ – มอดูล ย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น $(1, 2)$ – ไอติลเฉพาะของ R ”

“บทแทรก 4.3.17 ให้ M เป็น (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย ถ้า P เป็น $(1, 2)$ – มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น $(1, 2)$ – ไอติลเฉพาะของ R ”

ทั้งสองผลลัพธ์ดังกล่าวพิสูจน์สิ่งเดียวกัน นั่นคือ “ถ้า P เป็น $(1, 2)$ – มอดูล ย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P: M)_{R;S^2}$ เป็น $(1, 2)$ – ไอติลเฉพาะของ R ” เพียงแต่จะใช้เงื่อนไขแตกต่างกัน

ข้อสังเกต 2 ให้ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย M และ $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ พิจารณาเงื่อนไขที่น่าสนใจดังนี้ สำหรับทุก (R, S) – มอดูลย่อย U และ V ของ M ,

$$\text{ถ้า } U^k V \subseteq P \text{ แล้ว } U^k \subseteq P \text{ หรือ } V \subseteq P \text{ — (1)}$$

$$\text{ถ้า } U^2 V \subseteq P \text{ แล้ว } U^2 \subseteq P \text{ หรือ } V \subseteq P \text{ — (1')}$$

$$\text{ถ้า } U^k V^k \subseteq P \text{ แล้ว } U^k \subseteq P \text{ หรือ } V^k \subseteq P \text{ — (2)}$$

$$\text{ถ้า } U^m V^n \subseteq P \text{ แล้ว } U^m \subseteq P \text{ หรือ } V^n \subseteq P \text{ — (3)}$$

เราแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) – มอดูลย่อย P ที่สอดคล้อง (1') กับ $(P: M)_{R;S^2}$ ไปแล้วในบทตั้ง 4.3.16 แต่ยังไม่มียกทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง (R, S) – มอดูลย่อย P ที่สอดคล้อง (1) กับ $(P: M)_{R;S^2}$ ทั้งนี้ เป็นเพราะเหตุผลต่อไปนี้

ให้ P เป็น (R, S) – มอดูลย่อยของ (R, S) – มอดูลการคูณทางซ้าย M ซึ่งสอดคล้องกับ (1) และ $k \in \mathbb{Z}^+$

ให้ A และ B เป็นไอติลของ R โดยที่ $A^k B \subseteq (P: M)_{R;S^k}$ จะได้ว่า $(A^k B)MS^k \subseteq P$

สมมติเพิ่มเติมว่า “ R เป็นวงสลับที่” และ “ $S^2 = S$ ”

$$\text{จะได้ว่า } (AMS)^k \cdot BMS = A^k MS \cdot BMS = A^k BMS = A^k BMS^k \subseteq P$$

โดยเงื่อนไข (1) จึงได้ว่า $(AMS)^k \subseteq P$ หรือ $BMS \subseteq P$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $A^kMS^k \subseteq P$ หรือ $BMS^k \subseteq P$ สรุปได้ว่า $(P:M)_{R;S^k}$ เป็น $(k, 1)$ — ไอติลเฉพาะของ R

คำอธิบายข้างต้นสรุปได้ดังนี้

“ให้ R เป็นวงสลับที่, $S^2 = S$, M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ $k \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า P สอดคล้องกับเงื่อนไข

สำหรับทุก (R, S) — มอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $U^kV \subseteq P$ แล้ว $U^k \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$ — (1)

แล้ว $(P:M)_{R;S^k}$ เป็น $(k, 1)$ — ไอติลเฉพาะของ R ”

ยิ่งไปกว่านั้น เงื่อนไข “ R เป็นวงสลับที่” และ “ $S^2 = S$ ” ทำให้บทกลับเป็นจริงด้วย เราจึงสรุปได้ว่า

สมบัติ 5.1 ให้ R เป็นวงสลับที่, $S^2 = S$, M เป็น (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย และ $k \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า P สอดคล้องกับเงื่อนไข

สำหรับทุก (R, S) — มอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $U^kV \subseteq P$ แล้ว $U^k \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$ — (1)

ก็ต่อเมื่อ $(P:M)_{R;S^k}$ เป็น $(k, 1)$ — ไอติลเฉพาะของ R ”

การเพิ่มเงื่อนไข R เป็นวงสลับที่ ก่อให้เกิดผลที่ตามมาที่สำคัญคือ

- 1) ทำให้ $(k, 1)$ — ไอติลเฉพาะ และ $(k, 1)$ — ไอติลเฉพาะ เป็นสิ่งเดียวกัน
- 2) ทำให้การคูณกันของสอง (R, S) — มอดูล ใน (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย ไม่ขึ้นอยู่กับไอติล กล่าวคือ สำหรับแต่ละ (R, S) — มอดูล N และ K ของ (R, S) — มอดูลการคูณทางซ้าย M ผลคูณของ N และ K คือ $NK = IJMSS$ เมื่อ $N = IMS$ และ $K = JMS$ โดยที่ I และ J เป็นไอติลของ R

ยิ่งไปกว่านั้น จะทำให้ $IMS \cdot JMS = IJMSS$ สำหรับทุกไอติล I และ J ของ R

การเพิ่มเงื่อนไข $S^2 = S$ ก่อให้เกิดผลที่ตามมาที่สำคัญคือ

$$(P:M)_{R;S^k} = (P:M)_{R;S^{k+1}} \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } k$$

$$\text{ยิ่งไปกว่านั้น } (P:M)_{R;S^k} = (P:M)_R$$

ข้อสังเกต 3 เราเห็นความสัมพันธ์ของ

(R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม P กับ ไอติล $(P: M)_R$ ในทฤษฎีบท 2.1.17

$(1, 2)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม P กับ ไอติล $(P: M)_{R;S^2}$ ในสมบัติ 4.1.15 และ

$(1, k)$ — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม P กับ ไอติล $(P: M)_{R;S^k}$ ในสมบัติ 4.1.15

แต่เราไม่มีความสัมพันธ์ของ (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม กับ ไอติลใดๆของ R อันเนื่องมาจาก เราไม่สามารถให้บทนิยามสำหรับไอติลของ R ที่มีความสัมพันธ์กับ (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ที่เหมาะสมได้

ข้อสังเกต 4 ในปี 2012 Khumprapussorn, Pianskool และ Hall ได้ให้บทนิยามของโครงสร้าง (R, S) — มอดุล

พร้อมทั้งได้ให้ลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.2 [12] ให้ M เป็น (R, S) — มอดุล โดยที่ $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ และ P เป็น (R, S) — มอดุลย่อย ของ M ซึ่ง $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- 1) P เป็น (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม
- 2) สำหรับแต่ละไอติลทางขวา I ของ R , $m \in M$ และไอติลทางซ้าย J ของ S ,
ถ้า $ImJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 3) สำหรับแต่ละไอติลทางขวา I ของ R , (R, S) — มอดุลย่อย N ของ M และไอติลทางซ้าย J ของ S ,
ถ้า $INJ \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
- 4) สำหรับแต่ละไอติลทางซ้าย I ของ R , $m \in M$ และไอติลทางขวา J ของ S ,
ถ้า $(IR)m(SJ) \subseteq P$ แล้ว $IMJ \subseteq P$ หรือ $m \in P$
- 5) สำหรับ $a \in R$, $m \in M$ และ $b \in S$,
ถ้า $(aR)m(Sb) \subseteq P$ แล้ว $aMb \subseteq P$ หรือ $m \in P$

เราสังเกตได้ว่าลักษณะเฉพาะของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม พิสูจน์ได้บนเงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$

ต่อมาในปี 2015 D.Yuwaningsih และ I.Wijayanti [22] ได้ใช้ทฤษฎีบท 5.2 เพื่อพิสูจน์ว่า $rad_{(R,S)}(M) = \bigoplus_{i \in \Delta} rad_{(R,S)}(N_i)$ โดยที่ $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ ซึ่งแน่นอนว่าบทพิสูจน์ยังคงใช้เงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$

ในงานวิจัยนี้ เราให้บทนิยามของ (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของ (R, S) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม พร้อมทั้งในลักษณะเฉพาะของ (m, n) — มอดุลย่อยเฉพาะอย่างร่วม โดยปราศจากเงื่อนไข $a \in RaS$ ทุก $a \in M$ ปรากฏในทฤษฎีบท 4.3.6 ยิ่งไปกว่านั้น เรานำทฤษฎีบท 4.3.6 ไปขยายผลการศึกษาโดยใช้แนวคิดของ D.Yuwaningsih และ I.Wijayanti นำมาสู่ สมบัติ 4.5.8

บทที่ 6 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

- 1) นำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการงาน ICMSSC 2013 : International Conference on Mathematics, Statistics and Scientific Computing เรื่อง (R,S) -Modules and $(1,k)$ -Jointly Prime (R,S) -submodules วันที่ 12-13 กันยายน 2556 ประเทศสิงคโปร์
- 2) นำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการงาน The 19th Annual Meeting in Mathematics เรื่อง Generalization of jointly prime (R,S) -submodules วันที่ 20-22 มีนาคม 2557 ประเทศไทย
- 3) ได้รับการตอบรับเพื่อเผยแพร่ผลงานวิจัย เรื่อง On the (m,n) -jointly prime radical (R,S) -submodules ลงในวารสาร Far East Journal of Mathematical Science (FJMS) เมื่อวันที่ 10 มีนาคม 2559

พร้อมเอกสารแนบในภาคผนวก



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- 1) Anderson, D. D. and Bataineh, M. : Generalizations of Prime Ideals, *Communications in Algebra* Vol. 36, Iss. 2, 2008
- 2) Anderson, D. D. and Smith, E. : Weakly prime ideals. *Houston J. Math.* 29(2003), No.4, 831–840 (electronic).
- 3) Ameri, R.: On the prime submodules of multiplication modules, *Int. J. Math. Math. Sci.* 27, 1715-1724 (2003)
- 4) Bakhshizade , F.: multiplication Module, *Int. J. Contemp. Math. Sciences.*, 7, 1213-1216 (2012)
- 5) Bracic, J.: The prime spectrum of a module, *Functional analysis IX-proceedings of the postgraduate school and conference held at the inter-university centre* (2005)
- 6) Callialp, F., Unsal T.: On finite union of prime submodules, *Pakistan J. Appl. Math.* 2(11), 1016-1017 (2002)
- 7) Dauns, J.: Prime modules, *J. Reine Angew. Math.* 298, 156-181 (1978)
- 8) Dheena. P and Manivasan. S. : P-prime and Small P-prime ideals in Semirings, *International Journal of Algebra and Statistics*, Vol 1, 2(2012), 89–93
- 9) El-bast, Z., Smith, P.: Multiplication modules, *Comm. Algebra.* 16, 755-779 (1988)
- 10) Gupta, V., Chaudhari, J.: Prime ideals in semirings, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 34, 417-421 (2001)
- 11) Jayprakash Ninu Chaudhari, 2-Absorbing Ideals in Semirings, *International Journal of Algebra*, Vol. 6, 2012, no. 6, 265 - 270
- 12) Khumrapussorn, T., Pianskool, S., Hall, M.: (R,S) -Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematics Forum* Vol.7 (2012), 1631-1643
- 13) Khumrapussorn, T., (R,S) -modules and $(1,k)$ -Jointly Prime (R,S) -Submodule, *International Journal of Mathematical, Computational Science and Engineering*, 7 (2013), 502 - 505.
- 14) Khumrapussorn, T., Generalization of jointly prime (R,S) -submodules, *Proceeding of The 19th Annual Meeting in Mathematics* (2014)
- 15) Kim, E., Choi, C.: On multiplication modules, *Kyungpook Math. J.* 32(5), 97-102 (1992)
- 16) Kursat Hakan Oral, : Pseudo prime and Pseudo irreducible submodules, *World applied sciences journal* 9(12), 1350-1352 (2010)
- 17) Nezhad, R., Naderi, M.: On prime and semiprime submodules of multiplication modules, *Int. J. Math. Math. Sci.* 26, 1257-1266 (2009)
- 18) Sanh, N., Vu, N., Ahmed, K., Thao, L.: Primeness in Module Category, *Proceedings of international conference on algebra and Geometry in phuket*, 127-137 (2009)
- 19) Tekir, U.: On multiplication modules, *Int. Math. Forum.* 29, 1415-1420 (2007)
- 20) Tsi-Yuen Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Science & Business
- 21) Yasuyuki Hirano, Edward Poon, and Hisaya Tsutsui, : ON RINGS IN WHICH EVERY IDEAL IS WEAKLY PRIME, *Bull. Korean Math. Soc.* 47 (2010), No. 5, pp. 1077-1087
- 22) Yawaningsih, D., Wijayanti, I.: On jointly prime radicals of (R,S) -modules, *J. Indones. Math. Soc.*, 21, 25-34, (2015)

สัญญาเลขที่ KREF015604

โครงการ การวางนัยทั่วไปของ (R, S) -มอดุลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ
Generalization of various types of prime (R, S) -submodules

รายงานสรุปการเงินรอบ.....24.....เดือน

ชื่อหัวหน้าโครงการวิจัย ผู้รับทุน.....นายธวัชชัย คำประภัสสร.....
รายงานในช่วงตั้งแต่วันที่.....ถึงวันที่.....

สรุปงบประมาณค่าใช้จ่ายที่ใช้ นับตั้งแต่เริ่มทำการวิจัยถึงปัจจุบัน

หมวดค่าใช้จ่าย	งบประมาณรวม ทั้งโครงการ	ค่าใช้จ่าย จากรายงานครั้งก่อน	ค่าใช้จ่าย งวดปัจจุบัน	รวมค่าใช้จ่าย สะสมถึงปัจจุบัน	คงเหลือ (หรือเกิน)
ค่าตอบแทน	0	0	0	0	0
ค่าวัสดุ	74,000	37,000	37,000	74,000	0
ค่าเดินทางระหว่าง ปฏิบัติการในโครงการ	146,000	73,000	73,000	146,000	0
ค่าทำรายงาน	20,000	10,000	10,000	20,000	0
รวม	240,000	120,000	120,000	240,000	0

จำนวนเงินที่ได้รับและจำนวนเงินที่ใช้จ่าย

งวดเงินที่ได้รับ	จำนวนเงินที่ได้รับ(บาท)	เมื่อ (ระบุนวัน เดือน ปี)
งวดที่ 1	120,000	19 มิถุนายน 2556
งวดที่ 2	108,000	27 กุมภาพันธ์ 2558
รวม	228,000	①

งวดที่	จำนวนเงินที่ใช้จ่าย (บาท)	
งวดที่ 1	120,000	
งวดที่ 2	120,000	
รวม	240,000	②

จำนวนเงินคงเหลือ ① - ② 12,000.....บาท

.....
ลงนามหัวหน้าโครงการวิจัยผู้รับทุน

.....
ลงนามเจ้าหน้าที่การเงินโครงการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติส่วนตัว

ชื่อ - นามสกุล นายธวัชชัย คำประภัสสร
ตำแหน่ง อาจารย์

ประวัติการศึกษา

คุณวุฒิ	ปี พ.ศ. ที่จบ	ชื่อสถานศึกษาและประเทศ
วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต	2555	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประเทศไทย
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต	2549	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประเทศไทย
วิทยาศาสตรบัณฑิต	2546	ศิลปากร ประเทศไทย

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ

คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (พีชคณิตนามธรรม)

ทุนการศึกษาที่เคยได้รับ

ทุนการศึกษา	สถาบันที่ให้
ทุนโครงการพัฒนาอาจารย์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง ปี พ.ศ. 2551-2555
ทุนโครงการพัฒนาอาจารย์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง ปี พ.ศ. 2547-2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทุนการวิจัยที่เคยได้รับ

ทุนวิจัย	หน่วยงานที่ให้
ทุนวิจัยเรื่อง เมทริกซ์ในฐานที่เป็นแกมมากรุป ประเภททุนส่งเสริมนักวิจัย	คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปี พ.ศ. 2557 ระยะเวลา 1 ปี จำนวนเงิน 50,000 บาท
ทุนวิจัยเรื่อง สมบัติบางประการของ $(1,k)$ -ไอดัลเฉพาะ ประเภททุนส่งเสริมนักวิจัย	คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปี พ.ศ. 2558 ระยะเวลา 1 ปี จำนวนเงิน 50,000 บาท
ทุนวิจัยเรื่อง การวางนัยทั่วไปของ (R,S) -มอดุลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ระยะเวลา 2 ปี จำนวนเงิน 240,000 บาท

ผลงานวิจัย

เรื่อง	เผยแพร่
LETF R-PRIME (R,S) -SUBMODULES	International Mathematical Forum, Vol. 8, 2013, no. 13, 619 - 626
เมทริกซ์ในฐานที่เป็นแกมมากรุป	วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 23 ฉบับที่ 2 เดือนกรกฎาคม-ธันวาคม 2557
ON THE (m,n) -JOINTLY PRIME RADICAL (R,S) -SUBMODULES	Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 100, Issue 1, Pages 99 - 116
ON $(1,k)$ -PRIME IDEALS	Accepted by special issue Thai Journal of Mathematics

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเสนอผลงานวิชาการ

เรื่อง	เผยแพร่
Left R-prime (R,S) -submodules	International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM 2012), Singapore
(R,S) -modules and $(1,k)$ -Jointly Prime (R,S) -Submodules	International Conference on Mathematics, Statistics and Scientific Computing (ICMSSC 2013), Singapore
Generalization of Jointly Prime (R,S) -submodules	The 19th Annual Meeting in Mathematics (AMM 2014), Thailand
A study on $(1,k)$ -prime ideals	The 11th IMT-GT International conference on mathematics, statistics and its applications (ICMSA 2015), Thailand



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(R, S) -Modules and $(1, k)$ -Jointly Prime (R, S) -Submodules

Thawatchai Khumprapussorn

Abstract—We introduced the notions of $(1, k)$ -prime ideal and $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule as a generalization of prime ideal and jointly prime (R, S) -submodule, respectively. We provide a relationship between $(1, k)$ -prime ideal and $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule. Characterizations of $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodules are also given.

Keywords— (R, S) -module, $(1, k)$ -prime ideal, $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule.

I. INTRODUCTION

THROUGHOUT this paper, let R and S be rings and M an abelian group.

Definition 1.1: [1] Let R and S be rings and M an abelian group under addition. We say that M is an (R, S) -module if there is a function $\cdot : R \times M \times S \rightarrow M$ satisfying the following properties: for all $r, r_1, r_2 \in R$, $m, n \in M$ and $s, s_1, s_2 \in S$,

- (i) $r \cdot (m + n) \cdot s = r \cdot m \cdot s + r \cdot n \cdot s$
- (ii) $(r_1 + r_2) \cdot m \cdot s = r_1 \cdot m \cdot s + r_2 \cdot m \cdot s$
- (iii) $r \cdot m \cdot (s_1 + s_2) = r \cdot m \cdot s_1 + r \cdot m \cdot s_2$
- (iv) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m \cdot s_1) \cdot s_2 = (r_1 r_2) \cdot m \cdot (s_1 s_2)$.

We usually abbreviate $r \cdot m \cdot s$ by $rm s$. We may also say that M is an (R, S) -module under $+$ and $\cdot$.

An (R, S) -submodule of an (R, S) -module M is a subgroup N of M such that $rm s \in N$ for all $r \in R$, $n \in N$ and $s \in S$.

Definition 1.2: [1] Let M be an (R, S) -module. A proper (R, S) -submodule P of M is called **jointly prime** if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ \subseteq P \text{ implies } IMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

The structure of an (R, S) -module was created as a generalization of a module structure. The basic results of an (R, S) -module structure have been given by [1] and [2]. Almost all of those results was studied analogous to a module structure such as the primalities of (R, S) -submodules of (R, S) -modules and left multiplication (R, S) -modules; see [1] and [2].

In this paper, we introduce the notions of $(1, 2)$ -prime ideal, $(1, k)$ -prime ideal, $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule and $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule and obtain equivalent conditions for an (R, S) -submodule to be $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule.

T. Khumprapussorn is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand, e-mail: khthawat@kmitl.ac.th).

II. $(1, 2)$ -JOINTLY PRIME (R, S) -SUBMODULES

In this research, we modify the structure of a jointly prime (R, S) -submodules for more general. Now, we start this section by giving the definition of $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodules.

Definition 2.1: A proper (R, S) -submodule P of M is called **$(1, 2)$ -jointly prime** if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^2 \subseteq P \text{ implies } IMJ^2 \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

By the dual of $(1, 2)$ -jointly prime, we define $(2, 1)$ -jointly prime as follow.

A proper (R, S) -submodule P of M is called **$(2, 1)$ -jointly prime** if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$I^2 NJ \subseteq P \text{ implies } I^2 MJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

It is clear that a jointly prime (R, S) -submodule is $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime. Next, we give a characterization of $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime (rZ, sZ) -submodule of Z where $r, s \in Z^+$.

Proposition 2.2: Let $r, s \in Z^+$ and $p \in Z_0^+ \setminus \{1\}$. Then

- (i) pZ is an $(1, 2)$ -jointly prime (rZ, sZ) -module of Z if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p | rs^2$.
- (ii) pZ is a $(2, 1)$ -jointly prime (rZ, sZ) -module of Z if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p | r^2 s$.

Proof: (i) $(\Rightarrow)$ Assume that pZ is a $(1, 2)$ -jointly prime (rZ, sZ) -module of Z . Suppose that $p \neq 0$ and p is not a prime integer. Then $p = mn$ for some integer $m, n > 1$. It implies that $(rmZ)(nZ)(s^2Z) = (rmns^2)Z \subseteq pZ$. Since pZ is $(1, 2)$ -jointly prime and $p \nmid n$, $(rmZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$. Note that $(rZ)(mZ)(s^2Z) = (rmZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$. Since pZ is $(1, 2)$ -jointly prime and $p \nmid m$, $(rZ)Z(s^2Z) \subseteq pZ$. Hence $p | rs^2$.

$(\Leftarrow)$ If $p = 0$ or p is a prime integer or $p | rs^2$, then it is clear that pZ is $(1, 2)$ -jointly prime. ■

Now, we already have an example of $(1, 2)$ -jointly prime but is not jointly prime.

Example 2.3: It is clear that Z is a $(2Z, 3Z)$ -module. Then $9Z$ is a $(1, 2)$ -jointly prime $(2Z, 3Z)$ -submodule of Z but $9Z$ is not a jointly prime $(2Z, 3Z)$ -submodule of Z .

The following is an example showing that $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime are exactly different.

Example 2.4: Recall that Z is a $(2Z, 3Z)$ -module. Then $4Z$ is a $(2, 1)$ -jointly prime $(2Z, 3Z)$ -submodule of Z but $4Z$ is not a $(1, 2)$ -jointly prime $(2Z, 3Z)$ -submodule of Z and $9Z$

is a $(1, 2)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ but $9\mathbb{Z}$ is not a $(2, 1)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$.

Moreover, $p\mathbb{Z}$ is both a $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ if and only if $p\mathbb{Z}$ is a jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$.

Note that $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime may be different even if ring R and S are commutative.

We have a question from Example 2.4 that for general, if P is $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime, then can P be a jointly prime (R, S) -submodule? The following is an answers.

Example 2.5: It easy to see that $\mathbb{Z}$ is a $(2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$ -module. Then $16\mathbb{Z}$ is both a $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ but $16\mathbb{Z}$ is not a jointly prime $(2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$.

Example 2.6: Let $\mathbb{Z}$ be a ring of integer and let

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \text{ and}$$

M is the set of all 3×3 matrices on integer. Then M is an (R, S) -module. Since $R^2 = 0 = S^2$, all proper (R, S) -submodules of M are both $(1, 2)$ -jointly prime and $(2, 1)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M . However, 0 is not a jointly prime (R, S) -submodule of M .

For each (R, S) -submodule P of M and $k \in \mathbb{Z}^+$, let

$$(P : M)_{R, S^k} = \{r \in R \mid rMS^k \subseteq P\}.$$

Proposition 2.7: Let P be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M and $k \in \mathbb{Z}^+$. The followings hold.

- $(P : M)_{R, S^k}$ is a subgroup of R under addition.
- $(P : M)_{R, S^k} \subseteq (P : M)_{R, S^{k+1}}$.
- If $S^2 = S$, then $(P : M)_{R, S^k}$ is an ideal of R .

Proof: The proof is straightforward. ■

Next, we introduced a particular nonempty subset of R which play a role in this research.

Let R be a ring and T a proper ideal of R . Then T is said to be a $(1, 2)$ -prime ideal of R if for each ideal A and B of R , if $AB^2 \subseteq T$, then $A \subseteq T$ or $B^2 \subseteq T$. A prime ideal of R is a $(1, 2)$ -prime ideal of R but the converse is not true. We show by observing the following example.

Example 2.8: Let p be an integer. If $p = 0$ or p is a prime integer or $p = q^2$ where q is a prime integer, then $p\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$.

It clear that $4\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$ but is not a prime ideal of $\mathbb{Z}$.

Proposition 2.9: Let P be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M such that $(P : M)_{R, S^k}$ is a proper ideal of R . If P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , then $(P : M)_{R, S^k}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of R .

Proof: Assume that P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let A and B be ideals of R such that $AB^2 \subseteq (P : M)_{R, S^k}$. Hence $(AB^2)MS^2S^2 \subseteq (AB^2)MS^2 \subseteq P$. Thus $A(B^2MS^2)S^2 \subseteq P$. Since P is $(1, 2)$ -jointly prime, $AMS^2 \subseteq P$ or $B^2MS^2 \subseteq P$. Therefore $A \subseteq (P : M)_{R, S^k}$

or $B^2 \subseteq (P : M)_{R, S^k}$. This means that $(P : M)_{R, S^k}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of R . ■

The converse of Proposition 2.9 is invalid. For example, $6\mathbb{Z}$ is a $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$. We see that $(6\mathbb{Z} : \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}, (2\mathbb{Z})^2} = 3\mathbb{Z}$ is a prime ideal of $\mathbb{Z}$, of course, $3\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$ but $6\mathbb{Z}$ is not a $(1, 2)$ -jointly prime $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$.

III. $(1, k)$ -JOINTLY PRIME (R, S) -SUBMODULES

In this section, we extend the notion of $(1, 2)$ -jointly prime to $(1, k)$ -jointly prime where $k \in \mathbb{Z}^+$. Similarly, we also extend the notion of $(2, 1)$ -jointly prime to $(k, 1)$ -jointly prime where $k \in \mathbb{Z}^+$.

Definition 3.1: Let $k \in \mathbb{Z}^+$ and M be an (R, S) -module. A proper (R, S) -submodule P of M is called $(1, k)$ -jointly prime if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Dually, a proper (R, S) -submodule P of M is called $(k, 1)$ -jointly prime if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$I^kNJ \subseteq P \text{ implies } I^kMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Note here that jointly prime and $(1, 1)$ -jointly prime are identical.

Proposition 3.2: Let $r, s, k \in \mathbb{Z}^+$ and $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$. Then

- $p\mathbb{Z}$ is a $(1, k)$ -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p \mid rsk$.
- $p\mathbb{Z}$ is a $(k, 1)$ -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p \mid rks$.

Proof: $(\Rightarrow)$ Assume that $p\mathbb{Z}$ is a $(1, k)$ -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$. Suppose that $p \neq 0$ and p is not a prime integer. Then $p = mn$ for some integer $m, n > 1$. It implies that $(rm\mathbb{Z})(n\mathbb{Z})(s^k\mathbb{Z}) = (rmns^k)\mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$. Since $p\mathbb{Z}$ is $(1, k)$ -jointly prime and $p \nmid n$, $(rm\mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^k\mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Note that $(r\mathbb{Z})(m\mathbb{Z})(s^k\mathbb{Z}) = (rm\mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^k\mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Since $p\mathbb{Z}$ is $(1, k)$ -jointly prime and $p \nmid m$, $(r\mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^k\mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Hence $p \mid rsk$.

$(\Leftarrow)$ If $p = 0$ or p is a prime integer or $p \mid rsk$, then it is clear that $p\mathbb{Z}$ is $(1, k)$ -jointly prime. ■

Proposition 3.3: Let $k \in \mathbb{Z}^+$ and M be an (R, S) -module. Then

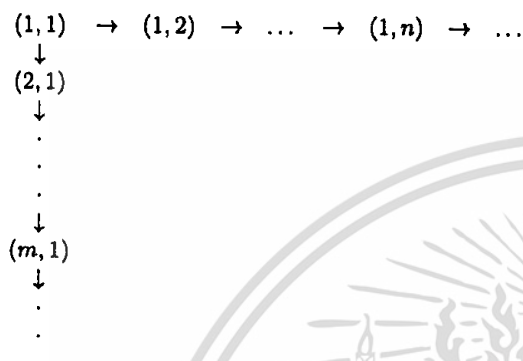
- If P is $(1, k)$ -jointly prime, then P is $(1, k+1)$ -jointly prime.
- If P is $(k, 1)$ -jointly prime, then P is $(k+1, 1)$ -jointly prime.

Proof: Assume that P is a $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let I be a left ideal of R , N an (R, S) -submodule of M and J be a right ideal of S such that $INJ^{k+1} \subseteq P$. Note that $I(INJ)J^k \subseteq I^2NJ^{k+1} \subseteq INJ^{k+1} \subseteq P$. Since P is $(1, k)$ -jointly prime, $IMJ^k \subseteq P$ or $INJ \subseteq P$. Note that $J^{k+1} \subseteq J^k \subseteq J$. If $IMJ^k \subseteq P$, then $IMJ^{k+1} \subseteq P$. Assume that $INJ \subseteq P$. Then $INJ^k \subseteq P$. Since P is $(1, k)$ -jointly prime, $IMJ^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$. ■

The following example shows that the converse of Proposition 3.3 is false in general.

Example 3.4: Recall that $\mathbb{Z}$ is a $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -module. Then $27\mathbb{Z}$ and $54\mathbb{Z}$ are $(1, 3)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ but $27\mathbb{Z}$ and $54\mathbb{Z}$ are not $(1, 2)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$.

We obtain the following diagram from Proposition 3.3. Note that the order pair (m, n) means P is a (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M .



In this point, we present a generalization of a $(1, 2)$ -prime ideal of R which is called $(1, k)$ -prime ideal of R where $k \in \mathbb{Z}^+$. Let R be a ring and T a proper ideal of R and $k \in \mathbb{Z}^+$. Then T is said to be a $(1, k)$ -prime ideal of R if for each ideal A and B of R , if $AB^k \subseteq T$, then $A \subseteq T$ or $B^k \subseteq T$.

Proposition 3.5: Let $k \in \mathbb{Z}^+$ and P be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M such that $(P : M)_{R, S^*}$ is a proper ideal of R . If P is a $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , then $(P : M)_{R, S^*}$ is a $(1, k)$ -prime ideal of R .

Note that $(X)_l$ and $(X)_r$ is the left ideal generated by X and the right ideal generated by X , respectively, for any subset X of a ring R . (Y) is the (R, S) -submodule generated by Y for any (R, S) -submodule Y of an (R, S) -module M . Next result needs the following lemma.

Lemma 3.6: Let M be an (R, S) -module and $k \in \mathbb{Z}^+$. The following statements hold:

- (i) For all left ideal I of R , left ideal J of S and (R, S) -submodule N and P of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } I^2N(J)_r^k \subseteq P.$$

- (ii) For all right ideal I of R , left ideal J of S and (R, S) -submodule N and P of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } (I)_lN(J^2)^k \subseteq P.$$

- (iii) For all right ideal I of R , left ideal J of S and (R, S) -submodule P of M ,

$$(I)_lM(J^2)^k \subseteq P \text{ implies } (I)_l(IMJ^k)J^k \subseteq P.$$

- (iv) For all right ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N and P of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } I^2N(J)_l^k \subseteq P.$$

- (v) For all right ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule P of M ,

$$I^2M(J)_l^k \subseteq P \text{ implies } I(IMJ^k)(J)_l^k \subseteq P.$$

- (vi) For all left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N and P of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } (I)_rN(J^2)^k \subseteq P.$$

- (vii) For all left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule P of M ,

$$(I)_rM(J^2)^k \subseteq P \text{ implies } (I)_r(IMJ^k)J^k \subseteq P.$$

Proof: (i) Let I be a left ideal of R , J a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $INJ^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 I^2N(J)_r^k &= I^2N(J + JS)^k \\
 &\subseteq I^2N(J^k + J^kS) \\
 &\subseteq INJ^k + I(INJ^k)S \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

- (ii) Let I be a right ideal of R , J a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $INJ^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 (I)_lN(J^2)^k &= (I + RI)N(J^k)^2 \\
 &= (I + RI)N(J^k)J^k \\
 &\subseteq INJ^k + RINJ^k \\
 &\subseteq INJ^k + R(INJ^k)J^k \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

- (iii) Let I be a right ideal of R , J a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $(I)_lM(J^2)^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 (I)_l(IMJ^k)J^k &= (I)_l(Z(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)J^k \\
 &\subseteq (I)_l(Z(IMJ^k))J^k + (I)_l(R(IMJ^k)S)J^k \\
 &\subseteq Z(I)_lM(J^k)^2 + (I)_lRIMJ^kS \\
 &\subseteq Z(I)_lM(J^2)^k + (I)_lM(J^2)^k \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

- (iv) Let I be a right ideal of R , J a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $INJ^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 I^2N(J)_l^k &= I^2N(J + SJ)^k \\
 &\subseteq I^2N(J^k + SJ^k) \\
 &\subseteq INJ^k + I(INS)J^k \\
 &\subseteq INJ^k + INJ^k \\
 &\subseteq P + P \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

- (v) Let I be a right ideal of R , J a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $I^2M(J)_l^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 I(IMJ^k)(J)_l^k &= I(Z(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)(J)_l^k \\
 &\subseteq Z(I^2M(J)_l^k) + IRIMJ^kS(J)_l^k \\
 &\subseteq Z(I^2M(J)_l^k) + I^2M(J)_l^k \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

(vi) Let I be a left ideal of R , J a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $INJ^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}(I)_r N(J^2)^k &= (I + IR)NJ^k J^k \\ &\subseteq INJ^k J^k + (IR)NJ^k J^k \\ &\subseteq INJ^k + I(RNJ^k)J^k \\ &\subseteq INJ^k \\ &\subseteq P.\end{aligned}$$

(vii) Let I be a left ideal of R , J a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $(I)_r M(J^2)^k \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}(I)_r \langle IMJ^k \rangle J^k &= (I)_r (\mathbb{Z}(IMJ^k) + R(IMJ^k)S)J^k \\ &\subseteq \mathbb{Z}((I)_r IMJ^k J^k) + (I)_r RIMJ^k S J^k \\ &\subseteq \mathbb{Z}(I)_r M(J^2)^k + (I)_r M(J^2)^k \\ &\subseteq P + P \\ &\subseteq P.\end{aligned}$$

Next, we obtain equivalent conditions for an (R, S) -submodule to be $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodules.

Theorem 3.7: Let M be an (R, S) -module and P a proper (R, S) -submodule of M and $k \in \mathbb{Z}^+$. The following statements are equivalent:

- (i) P is an $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) For all left ideal I of R , left ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

- (iii) For all right ideal I of R , left ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

- (iv) For all right ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

- (v) For all left ideal I of R , right ideal J of S and $m \in M$,

$$I\langle m \rangle J^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } m \in P.$$

- (vi) For all left ideal I of R , left ideal J of S and $m \in M$,

$$I\langle m \rangle J^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } m \in P.$$

- (vii) For all right ideal I of R , left ideal J of S and $m \in M$,

$$I\langle m \rangle J^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } m \in P.$$

- (viii) For all right ideal I of R , right ideal J of S and $m \in M$,

$$I\langle m \rangle J^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } m \in P.$$

Proof: This follows from Lemma 3.6. ■

REFERENCES

- [1] T. Khumprapussorn, S. Pianskool and M. Hall, (R, S) -modules and Their Fully prime and Jointly prime Submodules, *IMF*, 7 (2012), 1631 - 1643.
- [2] T. Khumprapussorn, Left R -prime (R, S) -submodules, *IMF*, 8 (2013), 619 - 626.

Generalization of jointly prime (R, S) -submodules

Thawatchai Khumprapussorn*

Department of Mathematics, Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang 10520, THAILAND
khthawat@kmitl.ac.th

Abstract : In this paper the terms $(2, 1)$ -prime ideal and $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule are introduced. Characterizations of $(2, 1)$ -prime ideals in terms of products of (R, S) -submodules are obtained. Moreover, we prove that if P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , then $(P : M)_{R, S}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R .

Keywords : (R, S) -module; (R, S) -submodule; jointly prime (R, S) -submodule; $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule.

2010 Mathematics Subject Classification : 16D99

1 Introduction

First we recall the definition and examples of (R, S) -modules.

Definition 1.1. [1] Let R and S be rings and M an abelian group under addition. We say that M is an (R, S) -module if there is a function $\cdot : R \times M \times S \rightarrow M$ satisfying the following properties: for all $r, r_1, r_2 \in R$, $m, n \in M$ and $s, s_1, s_2 \in S$,

- (i) $r \cdot (m + n) \cdot s = r \cdot m \cdot s + r \cdot n \cdot s$
- (ii) $(r_1 + r_2) \cdot m \cdot s = r_1 \cdot m \cdot s + r_2 \cdot m \cdot s$
- (iii) $r \cdot m \cdot (s_1 + s_2) = r \cdot m \cdot s_1 + r \cdot m \cdot s_2$
- (iv) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m \cdot s_1) \cdot s_2 = (r_1 r_2) \cdot m \cdot (s_1 s_2)$.

We usually abbreviate $r \cdot m \cdot s$ by rms . We may also say that M is an (R, S) -module under $+$ and $\cdot$.

Example 1.2. [1] A ring R is an (R, R) -module via the usual multiplication on the ring R . In particular, $\mathbb{Z}$ is a $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -module.

Furthermore, R is an (A, B) -module via the usual multiplication on R for any subring A and B of R . In particular, $\mathbb{Z}$ is an $(a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z})$ -module for all $a, b \in \mathbb{Z}$.

Example 1.3. [1] Let A be a ring and $m, n \in \mathbb{Z}^+$. We know that $M_{m \times n}(A)$, the set of all $m \times n$ matrices over A , is an abelian group under usual matrix addition and $M_m(A)$, the set of all $m \times m$ matrices over A , is a ring under usual matrix addition and multiplication. Then $M_{m \times n}(A)$ is an $(M_m(A), M_n(A))$ -module under usual matrix multiplication.

Throughout this paper, let R and S be rings and M an abelian group. Let M be an (R, S) -module. Then for any nonempty subsets X, Y and Z of R, M and S , respectively, define

$$XYZ = \left\{ \sum_{\text{finite}} x_i y_i z_i \mid x_i \in X, y_i \in Y \text{ and } z_i \in Z \text{ for all } i \right\}.$$

*Copyright © 2014 by the AMM2014. All rights reserved.

Definition 1.4. [1] An (R, S) -submodule of an (R, S) -module M is a subgroup N of M such that $RNS \subseteq N$.

Example 1.5. [1] All $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ -submodules of $\mathbb{Z}$ are of the form $n\mathbb{Z}$ where $n \in \mathbb{Z}$. Similarly, for each integer a and b , $(a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z})$ -submodules of $\mathbb{Z}$ are of form $n\mathbb{Z}$ where $n \in \mathbb{Z}$.

Example 1.6. [1] Let $SU_4(R)$ be the ring of all 4×4 strictly upper triangular matrices over a ring R and

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in R \right\}.$$

Then N is an $(SU_4(R), SU_4(R))$ -submodule of $SU_4(R)$ and N is not an ideal of the ring $SU_4(R)$.

Example 1.7. Let A be a ring and I be an ideal of R . Then $M_{m \times n}(I)$ is an $(M_m(A), M_n(A))$ -submodule of $M_{m \times n}(A)$ for all positive integers m and n .

Note that R is a left R -module. Obviously, I is a left ideal of R if and only if I is a submodule of R . In fact, every ideal of R is an (R, R) -submodule of R . In Example 1.6 shows the difference between (R, R) -modules and R -modules. That is, there is an (R, R) -submodule of R but is not an ideal of R .

2 Preliminaries

We recall the following basic results from [1] and [2].

Definition 2.1. [1] Let M be an (R, S) -module. A proper (R, S) -submodule P of M is called *jointly prime* if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ \subseteq P \text{ implies } IMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Proposition 2.2. [2] The following statements valid.

- (i) If R is a ring with identity, then jointly prime (R, R) -submodules of R and prime ideals of R are the same.
- (ii) Let $r, s \in \mathbb{Z}^+$ and $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$. Then $p\mathbb{Z}$ is a jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p \mid rs$.

Definition 2.3. [2] Let $k \in \mathbb{Z}^+$ and M be an (R, S) -module. A proper (R, S) -submodule P of M is called $(1, k)$ -jointly prime if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Dually, a proper (R, S) -submodule P of M is called $(k, 1)$ -jointly prime if for each left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$I^kNJ \subseteq P \text{ implies } I^kMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

In fact, $(1, 1)$ -jointly prime (R, S) -submodules and jointly prime (R, S) -submodules are identical. Every $(1, 1)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M is a $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M for all integer k .

Proposition 2.4. [2] Let $r, s, k \in \mathbb{Z}^+$ and $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$. Then

- (i) $p\mathbb{Z}$ is a $(1, k)$ -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p \mid rs^k$.
- (ii) $p\mathbb{Z}$ is a $(k, 1)$ -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer or $p \mid r^k s$.

The following example obtains that the notion of $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodules is a generalization of jointly prime (R, S) -submodules.

Example 2.5. [2] We know from Example 1.2 that $\mathbb{Z}$ is a $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -module. Proposition 2.4 (i) obtains that $4\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -jointly prime $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$. However, $4\mathbb{Z}$ is not a jointly prime $(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$ -submodule of $\mathbb{Z}$ by Proposition 2.2. This means $(1, k)$ -jointly prime (R, S) -submodules are generalization of jointly prime (R, S) -submodules.

Let N be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M and $k \in \mathbb{Z}^+$. Then $(N : M)_R = \{r \in R \mid rMS \subseteq N\}$ and $(N : M)_{R, S^k} = \{r \in R \mid rMS^k \subseteq N\}$ are additive subgroups of R . Note that $(N : M)_{R, S^k} = (N : M)_R$ if $k = 1$.

Definition 2.6. [1] Let R and S be rings and M an (R, S) -module. Then M is called a left multiplication (R, S) -module provided that for each (R, S) -submodule N of M , there exists an ideal I of R such that $N = IMS$.

Note here that in left multiplication (R, S) -module M , $RMS = M$ and $(N : M)_R$ is an ideal of R . Moreover, for each (R, S) -submodule N of M , $(N : M)_R$ is a unique maximal ideal of R such that $N = (N : M)_R MS$. The following proposition shows that the set $(N : M)_{R, S^k}$ is an ideal of R for all positive integer k .

Proposition 2.7. [2] Let M be a left multiplication (R, S) -module and N an (R, S) -submodule of M . For each positive integer k , $(N : M)_{R, S^k} = \{r \in R \mid rMS^k \subseteq N\}$ is an ideal of R .

Proof. Let $k \in \mathbb{Z}^+$, $r \in R$ and $a \in (N : M)_{R, S^k}$. Then

$$\begin{aligned}
 (ra)MS^k &= (ra)(RMS)S^k \\
 &= (raR)M(SS^k) \\
 &= (raR)(RMS)(SS^k) \\
 &= (raRR)M(SSS^k) \\
 &\subseteq (raR)M(SS^kS) \\
 &= r(aRMS)S^k \\
 &= r(aMS^k)S \\
 &\subseteq N
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 (ar)MS^k &= (ar)(RMS)S^k \\
 &= (arR)M(SS^k) \\
 &\subseteq (aR)M(SS^k) \\
 &= a(RMS)S^k \\
 &= aMS^k \\
 &\subseteq N.
 \end{aligned}$$

Therefore $ar, ra \in (N : M)_R$. This implies that $(N : M)_{R,S}$ is an ideal of R . $\square$

Definition 2.8. [1] Let N and K be (R, S) -submodules of a left multiplication (R, S) -module M . The product of N and K , denoted by NK , is defined by

$$(N : M)_R(K : M)_{R,S}.$$

We see that the product NK is an (R, S) -submodule of M and is contained in $N \cap K$. Moreover, if R is commutative, then $NK = (IJ)M(SS)$ for any ideals I and J of R such that $N = IMS$ and $K = JMS$.

3 Main Results

Our goal of the first part of this section is to provide various characterization of jointly prime (R, S) -submodules. The second, we give a relationship between $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodules and $(2, 1)$ -prime ideals.

3.1 Jointly prime (R, S) -submodule

Another characterization of jointly prime (R, S) -submodule is given.

Lemma 3.1. Let $k \in \mathbb{Z}^+$ and P be a proper (R, S) -submodule of an (R, S) -module M . The following statements are equivalent :

- (i) P is a jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) For all left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

- (iii) For all left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$I^kNJ \subseteq P \text{ implies } IMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Proof. Without loss of generality, we assume that $k > 1$.

(i) $\rightarrow$ (ii), assume that (i) holds. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $INJ^k \subseteq P$. Since $I(INJ^{k-1})J = I^2NJ^k \subseteq INJ^k \subseteq P$ and P is jointly prime, we have $IMJ \subseteq P$ or $INJ^{k-1} \subseteq P$. Assume that $INJ^{k-1} \subseteq P$. Then $I(INJ^{k-2})J = I^2NJ^{k-1} \subseteq INJ^{k-1} \subseteq P$. By (i), $IMJ \subseteq P$ or $INJ^{k-2} \subseteq P$. Applying this process until the term $INJ \subseteq P$ occurs, this implies that $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$.

(ii) $\rightarrow$ (iii), assume that (ii) holds. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $I^kNJ \subseteq P$. Since $I(I^{k-1}NJ)J = I^kNJ^2 \subseteq I^kNJ \subseteq P$ and by assumption, $IMJ \subseteq P$ or $I^{k-1}NJ \subseteq P$. Assume that $I^{k-1}NJ \subseteq P$. Then $I(I^{k-2}NJ)J = I^{k-1}NJ^2 \subseteq I^{k-1}NJ \subseteq P$. This implies from (ii) that $IMJ \subseteq P$ or $I^{k-2}NJ \subseteq P$. We continue this process until the term of $INJ \subseteq P$ occurs. This implies from (ii) that $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$.

(iii) $\rightarrow$ (i), assume that (iii) holds. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $INJ \subseteq P$. Then $I^kNJ \subseteq INJ \subseteq P$. By (ii), $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$. Hence P is a jointly prime (R, S) -submodule of M . $\square$

The following proposition is a general result of Lemma 3.1.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proposition 3.2. Let $m, n \in \mathbb{Z}^+$ and P be a proper (R, S) -submodule of an (R, S) -module M . The following statements are equivalent :

- (i) P is a jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) For all left ideal I of R , right ideal J of S and (R, S) -submodule N of M ,

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } IMJ \subseteq P \text{ or } N \subseteq P.$$

Proof. (i) $\rightarrow$ (ii), assume that (i) holds. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $I^m N J^n \subseteq P$. It follows from Lemma 3.1 (ii) that $I^m M J \subseteq P$ or $N \subseteq P$. By Lemma 3.1 (iii), we have $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$.

(ii) $\rightarrow$ (i), assume that (ii) holds. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $INJ \subseteq P$. Since $I^m N J^n \subseteq INJ \subseteq P$, $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$. Hence P is a jointly prime (R, S) -submodule of M . $\square$

3.2 (1, 2)-Jointly prime (R, S) -submodule

In this section, we introduce and study a generalization of jointly prime (R, S) -submodules. In order to determine a relationship between (R, S) -submodules P of an (R, S) -module M and ideals $(P : M)_{R, S}$ of R . We first consider the definition of $(2, 1)$ -prime ideals which is a generalization of prime ideals.

Definition 3.3. Let R be a ring and T a proper ideal of R . Then T is said to be a $(2, 1)$ -prime ideal of R if for each ideal A and B of R , $A^2 B \subseteq T$ implies $A^2 \subseteq T$ or $B \subseteq T$.

Similarly, T is said to be a $(1, 2)$ -prime ideal of R if for each ideal A and B of R , $AB^2 \subseteq T$ implies $A \subseteq T$ or $B^2 \subseteq T$.

Note that a prime ideal is a $(1, 2)$ -prime ideal but the converse is not true. We show by giving the following results.

Lemma 3.4. Let q be a prime integer. For all $a, b \in \mathbb{Z}$, if $q^2 \mid ab^2$, then $q^2 \mid a$ or $q^2 \mid b^2$.

Proof. Let $a, b \in \mathbb{Z}$ be such that $q^2 \mid ab^2$ and $q^2 \nmid a$. Since q is a prime integer and $q \mid ab^2$, $q \mid a$ or $q \mid b^2$. If $q \nmid b^2$, then $q \nmid b$. It implies that $q^2 \nmid b^2$. Assume that $q \mid a$. Since $q^2 \mid ab^2$ and $q \mid a$, $q^2 k = ab^2$ and $qt = a$ for some integers k and t . If $q \nmid t$, then $qr = t$ for some integer r . Thus $a = qt = q^2 r$. Hence $q^2 \mid a$ which is a contradiction. Therefore $q \nmid t$. Since $q^2 k = ab^2 = qt b^2$, $qk = t b^2$. This implies that $q \mid t b^2$. Since q is a prime integer and $q \nmid t$, $q \mid b^2$. It implies that $q \mid b$. Hence $q^2 \mid b^2$. $\square$

For each integer $p_1, p_2, \dots, p_k$, let

$$p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = \begin{cases} p_1 p_2 \cdots p_{t-1} p_{t+1} \cdots p_k, & \text{if } 1 < t < k \\ p_1 p_2 \cdots p_{k-1}, & \text{if } t = k \\ p_2 \cdots p_k, & \text{if } t = 1 \end{cases}$$

Proposition 3.5. Let p be an integer. Then $p\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$ or p is a prime integer or $p = q^2$ where q is a prime integer.

Proof. Assume that $p\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$. Suppose that $p \neq 0$ and p is not a prime integer. Since $p\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$, we have this fact : For all $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \mid ab^2$ implies $p \mid a$ or $p \mid b^2$. Let $p = p_1 p_2 \cdots p_k$ for some integer $k \geq 2$ and $p_1, p_2, \dots, p_k$

are prime integers. First we suppose for a contradiction that $k > 2$. Let t be an integer such that $1 \leq t \leq k$. Since $p_1 p_2 \cdots p_k | p_1 p_2 \cdots p_t^2 \cdots p_k$, we have $p_1 p_2 \cdots p_k | p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$ or $p_1 p_2 \cdots p_k | p_t^2$. Since $p_1 p_2 \cdots p_k > p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$, we have $p_1 p_2 \cdots p_k \nmid p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k$. If $p_1 p_2 \cdots p_k | p_t^2$, then $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k | p_t$. It implies that $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = 1$ or $p_1 p_2 \cdots \hat{p}_t \cdots p_k = p_t$ which leads to a contradiction. Hence $k = 2$. That is $p = p_1 p_2$. Since $p_1 p_2 | p_1 p_2^2$ and $p_1 p_2 | p_2^2 p_1$, we have $(p_1 p_2 | p_1 \text{ or } p_1 p_2 | p_2^2)$ and $(p_1 p_2 | p_2 \text{ or } p_1 p_2 | p_1^2)$. Since $p_1 p_2 > p_1$ and $p_1 p_2 > p_2$, we have $p_1 p_2 \nmid p_1$ and $p_1 p_2 \nmid p_2$. Hence $p_1 p_2 | p_1^2$ and $p_1 p_2 | p_2^2$. Thus $p_1 | p_2$ and $p_2 | p_1$. This means $p_1 = p_2$. Therefore $p = q^2$ for some prime integer q . $\square$

Proposition 3.5 shows that $4\mathbb{Z}$ is a $(1, 2)$ -prime ideal of $\mathbb{Z}$ but is not a prime ideal of $\mathbb{Z}$. The following Lemma is a major tool to help characterize $(2, 1)$ -prime ideals.

Lemma 3.6. *Let M be a left multiplication (R, S) -module. Then*

- (i) *For all (R, S) -submodules A, B, C and D of M , if $A \subseteq C$ and $B \subseteq D$, then $AB \subseteq CD$.*
- (ii) *Let R be a commutative ring. Then $(IMS)^2 \cdot JMS \subseteq (I^2 J)MS^2$ for all ideals I and J of R .*

Moreover, if $S^2 = S$, then $(IMS)^2 \cdot JMS = (I^2 J)MS$ for all ideals I and J of R .

Proof. (i) Let A, B, C and D be (R, S) -submodules of M such that $A \subseteq C$ and $B \subseteq D$. Then $(A : M)_R \subseteq (C : M)_R$ and $(B : M)_R \subseteq (D : M)_R$. Hence $AB = (A : M)_R (B : M)_R MSS \subseteq (C : M)_R (D : M)_R MSS = CD$.

(ii) Let I and J be ideals of R . This implies from (i) that

$$(IMS)^2 \cdot JMS = I^2 MS^2 \cdot JMS \subseteq I^2 MS \cdot JMS = (I^2 J)MS^2 \subseteq (I^2 J)MS.$$

Next, assume that $S^2 = S$. Then

$$(IMS)^2 \cdot JMS = I^2 MS^2 \cdot JMS = I^2 MS \cdot JMS = (I^2 J)MS^2 = (I^2 J)MS.$$

$\square$

Next, a characterization of $(2, 1)$ -prime ideals is given.

Theorem 3.7. *Let M be a left multiplication (R, S) -module and P an (R, S) -submodule of M . Assume in addition that R is a commutative ring. If P satisfies condition that for all (R, S) -submodules U and V of M ,*

$$U^2 V \subseteq P \text{ implies } U^2 \subseteq P \text{ or } V \subseteq P, \quad (3.1).$$

then $(P : M)_{R, S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R .

Furthermore, if $S^2 = S$, then the converse is valid, i.e., if $(P : M)_{R, S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R , then the condition (3.1) holds for all (R, S) -submodules U and V of M .

Proof. Assume that the condition (3.1) holds for all (R, S) -submodules U and V of M . Let I and J be ideals of R such that $I^2 J \subseteq (P : M)_{R, S^2}$. Then $(I^2 J)MS^2 \subseteq (P : M)_{R, S^2} MS^2 \subseteq P$. By Lemma 3.6, $(IMS)^2 \cdot JMS \subseteq (I^2 J)MS^2 \subseteq P$. Since P satisfies condition (3.1), $(IMS)^2 \subseteq P$ or $JMS \subseteq P$. Note that $(IMS)^2 = I^2 MS^2$. Hence $I^2 MS^2 \subseteq P$ or $JMS^2 \subseteq P$. Therefore $I^2 \subseteq (P : M)_{R, S^2}$ or $J \subseteq (P : M)_{R, S^2}$. This shows that $(P : M)_{R, S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R .

Next, assume that $S^2 = S$. Assume that $(P : M)_{R,S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R . Let U and V be (R, S) -submodules of M such that $U^2V \subseteq P$. Since M is a left multiplication (R, S) -module, $U = IMS$ and $V = JMS$ for some ideals I and J of R . It follows from Lemma 3.6 that $(I^2J)MS^2 = (I^2J)MS = (IMS)^2 \cdot JMS = U^2V \subseteq P$. Then $I^2J \subseteq (P : M)_{R,S^2}$. Since $(P : M)_{R,S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R , $I^2 \subseteq (P : M)_{R,S^2}$ or $J \subseteq (P : M)_{R,S^2}$. This implies that $U^2 = I^2MS \subseteq P$ or $V = JMS \subseteq P$. Therefore P satisfies condition (3.1). $\square$

Theorem 3.8. *Let M be a left multiplication (R, S) -module and R is a commutative ring. If P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , then P satisfies condition (3.1).*

Proof. Assume that P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let U and V be (R, S) -submodules of M such that $U^2V \subseteq P$. Then

$$(U^2 : M)_R(V : M)_R M S S^2 \subseteq (U^2 : M)_R(V : M)_R M S S \subseteq P.$$

Thus $(U^2 : M)_R M S^2 \subseteq P$ or $V = (V : M)_R M S \subseteq P$. Next, if $(U^2 : M)_R M S^2 \subseteq P$, then $(U : M)_R^2 (U^2 : M)_R M S S^2 \subseteq P$. Since P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , $U^2 = (U : M)_R^2 M S^2 \subseteq P$ or $U^2 = (U^2 : M)_R M S \subseteq P$. Therefore P satisfies condition (3.1). $\square$

The following corollary follows from Theorem 3.7 and Theorem 3.8.

Corollary 3.9. *Let M be a left multiplication (R, S) -module and R is a commutative ring. If P is a $(1, 2)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M , then $(P : M)_{R,S^2}$ is a $(2, 1)$ -prime ideal of R .*

Acknowledgement(s) : I would like to thank the referee(s) for comments and suggestions on the manuscript.

References

- [1] T. Khumprapussorn, S. Pianskool and M. Hall, *(R, S) -modules and Their Fully prime and Jointly prime Submodules*, International Mathematical Forum, 7 (2012), 1631 - 1643.
- [2] T. Khumprapussorn, *(R, S) -modules and $(1, k)$ -Jointly Prime (R, S) -Submodule*, International Journal of Mathematical, Computational Science and Engineering, 7 (2013), 502 - 505.



ON THE (m, n) -JOINTLY PRIME RADICAL (R, S) -SUBMODULES

Thawatchai Khumprapussorn

Department of Mathematics

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

Bangkok 10520, Thailand

e-mail: thawatchai.kh@kmitl.ac.th

Abstract

In this paper, we present and discuss the notion of (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules as a generalization of jointly prime (R, S) -submodules.

1. Preliminaries

Let R and S be rings and M be an abelian group under addition. We say that M is an (R, S) -module if there is a function $\cdot : R \times M \times S \rightarrow M$ satisfying the following properties: for all $r, r_1, r_2 \in R$, $m, n \in M$ and $s, s_1, s_2 \in S$,

$$(i) \quad r \cdot (m + n) \cdot s = r \cdot m \cdot s + r \cdot n \cdot s.$$

Received: January 23, 2016; Accepted: March 10, 2016

2010 Mathematics Subject Classification: 16D99.

Keywords and phrases: (R, S) -module, (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule, (m, n) -multiplicative system, (m, n) -jointly prime radical.

Communicated by K. K. Azad

$$(ii) (\eta_1 + \eta_2) \cdot m \cdot s = \eta_1 \cdot m \cdot s + \eta_2 \cdot m \cdot s.$$

$$(iii) r \cdot m \cdot (s_1 + s_2) = r \cdot m \cdot s_1 + r \cdot m \cdot s_2.$$

$$(iv) \eta_1 \cdot (r_2 \cdot m \cdot s_1) \cdot s_2 = (\eta_1 r_2) \cdot m \cdot (s_1 s_2).$$

An (R, S) -submodule of an (R, S) -module M is a subgroup N of M such that $RNS \subseteq N$. For a subset X of an (R, S) -module M , the (R, S) -submodule of M generated by X is the intersection of all (R, S) -submodules of M containing X , denoted by $\langle X \rangle$. It easy to prove that $\langle X \rangle = \mathbb{Z}X + RXS$ for all subset X of M , where $\mathbb{Z}$ is the set of all integers. In particular, if $X = \{x\}$, where $x \in M$, then we denote $\langle X \rangle$ by $\langle x \rangle$ and then $\langle x \rangle = \mathbb{Z}x + RxS$.

A proper (R, S) -submodule N of M is called a *jointly prime* (R, S) -submodule if for each left ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule N of M , if $INJ \subseteq P$, then $IMJ \subseteq P$ or $N \subseteq P$. Characterizations of jointly prime (R, S) -submodules are given below.

Theorem 1.1 [1]. *Let M be an (R, S) -module satisfying $a \in RaS$ for all $a \in M$ and let P be a proper (R, S) -submodule of M . Then the following statements are equivalent:*

- (i) P is jointly prime.
- (ii) For each right ideal I of R , $m \in M$ and left ideal J of S , $ImJ \subseteq P$ implies $IMJ \subseteq P$, or $m \in P$.
- (iii) For each right ideal I of R , an (R, S) -submodule N of M and left ideal J of S , $INJ \subseteq P$ implies $IMJ \subseteq P$, or $N \subseteq P$.
- (iv) For each left ideal I of R , $m \in M$ and right ideal J of S , $(IR)m(SJ) \subseteq P$ implies $IMJ \subseteq P$, or $m \in P$.
- (v) For each $a \in R$, $m \in M$ and $b \in S$, $(aR)m(Sb) \subseteq P$ implies $aMb \subseteq P$, or $m \in P$.

A jointly prime radical of an (R, S) -module is defined by Yuwaningsih and Wijayanti [2]. That is, if there is a jointly prime (R, S) -submodule of an (R, S) -module M , then a jointly prime radical of an (R, S) -module M is the intersection of all jointly prime (R, S) -submodules of M . Otherwise, a jointly prime radical of an (R, S) -module M is equal to M . We denote a jointly prime radical of an (R, S) -module M by $rad_{(R,S)}(M)$. The following proposition still requires that M is an (R, S) -module such that $a \in RaS$ for all $a \in M$.

Proposition 1.2 [2]. *Let M be an (R, S) -module and $\{N_i\}_{i \in \Delta}$ be a collection of (R, S) -submodules of M . If M satisfies $a \in RaS$ for all $a \in M$ and $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$, then $rad_{(R,S)}(M) = \bigoplus_{i \in \Delta} rad_{(R,S)}(N_i)$.*

We observe that the condition $a \in RaS$ for all $a \in M$ first appears in Theorem 1.1. This is a reason why this condition appears again in Proposition 1.2. We extend jointly prime (R, S) -submodules to (m, n) -jointly prime submodules, where m and n are positive integers. Also, a characterization of (m, n) -jointly prime submodules is given. In particular, we do not use the condition $a \in RaS$ for all $a \in M$ to obtain a characterization of an (m, n) -jointly prime submodule. Furthermore, we provide some results like Proposition 1.2, of course, without the condition $a \in RaS$ for all $a \in M$.

2. Characterization of (m, n) -jointly Prime Submodules

In this section, we generalize the concept of jointly prime to (m, n) -jointly prime, where m and n are positive integers. We give necessary and sufficient conditions for an (R, S) -submodule to be an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule without the condition $a \in RaS$ for all $a \in M$. Thus, we improve earlier results [1]. Next, we introduce an (m, n) -multiplicative system and prove that a proper (R, S) -submodule of M is an (m, n) -jointly

prime (R, S) -submodule of M if and only if $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system. Furthermore, we show that a maximal (R, S) -submodule which is disjoint from an (m, n) -multiplicative system is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule.

Definition 2.1. Let m and n be positive integers and M be an (R, S) -module. A proper (R, S) -submodule P of M is called an (m, n) -jointly prime if for each left ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule N of M ,

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } I^m M J^n \subseteq P, \text{ or } N \subseteq P.$$

Let $\mathbb{Z}$ denote the set of all integers, $\mathbb{Z}^+$ denote the set of all positive integers and $\mathbb{Z}_0^+$ denote the set of all positive integers containing 0.

Proposition 2.2. Let $r, s, m, n \in \mathbb{Z}^+$ and $p \in \mathbb{Z}_0^+ \setminus \{1\}$. Then $p\mathbb{Z}$ is an (m, n) -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$, p is a prime integer, or $p \mid r^m s^n$.

Proof. $(\Rightarrow)$ Assume that $p\mathbb{Z}$ is an (m, n) -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$. Suppose that $p \neq 0$ and p is not a prime integer. Then $p = ab$ for some integer $a, b > 1$. It implies that $(r^m a\mathbb{Z})(b\mathbb{Z})(s^n \mathbb{Z}) = r^m a b s^n \mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$. Since $p\mathbb{Z}$ is an (m, n) -jointly prime and $p \nmid b$, $(r^m a\mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^n \mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Note that $(r^m \mathbb{Z})(a\mathbb{Z})(s^n \mathbb{Z}) \subseteq (r^m a\mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^n \mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Since $p\mathbb{Z}$ is an (m, n) -jointly prime and $p \nmid a$, $(r^m \mathbb{Z})\mathbb{Z}(s^n \mathbb{Z}) \subseteq p\mathbb{Z}$. Hence, $p \mid r^m s^n$.

$(\Leftarrow)$ If $p = 0$, or p is a prime integer, or $p \mid r^m s^n$, then it is clear that $p\mathbb{Z}$ is an (m, n) -jointly prime $(r\mathbb{Z}, s\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$. $\square$

Example 2.3. All $(1, 2)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -modules of $\mathbb{Z}$ are of the form $p\mathbb{Z}$, where $p = 0$, p is a prime integer or $p = 6, 9, 18$. Similarly,

All $(1, 3)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -modules of $\mathbb{Z}$ are of the form $p\mathbb{Z}$, where $p = 0$, p is a prime integer or $p = 6, 9, 18, 27, 54$.

We observe that all $(1, 2)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -modules of $\mathbb{Z}$ are $(1, 3)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -modules of $\mathbb{Z}$. The following proposition is a proof of this observation, in general.

Proposition 2.4. *Let $m, n \in \mathbb{Z}^+$ and M be an (R, S) -module. If P is an (m, n) -jointly prime, then P is an $(m, n+1)$ -jointly prime and is an $(m+1, n)$ -jointly prime.*

Proof. Assume that P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let I be a left ideal of R , N be an (R, S) -submodule of M and J be a right ideal of S such that $I^m NJ^{n+1} \subseteq P$. Then $I^m (INJ) J^n \subseteq P$. Since P is an (m, n) -jointly prime, $I^m MJ^n \subseteq P$ or $INJ \subseteq P$. If $I^m MJ^n \subseteq P$, then $I^m MJ^{n+1} \subseteq P$. Assume that $INJ \subseteq P$. Then $I^m NJ^n \subseteq P$. Since P is an (m, n) -jointly prime, $I^m MJ^n \subseteq P$ or $N \subseteq P$. Hence, P is an $(m, n+1)$ -jointly prime (R, S) -submodule of M . Similarly, we can show that if P is an (m, n) -jointly prime, then P is also an $(m+1, n)$ -jointly prime. $\square$

Example 2.5. We choose $27\mathbb{Z}$ and $54\mathbb{Z}$ from Example 2.3 to be examples that there exists a $(1, 3)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$ but is not a $(1, 2)$ -jointly prime $(2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ -module of $\mathbb{Z}$.

Corollary 2.6. *Let $m, n \in \mathbb{Z}^+$ and M be an (R, S) -module. If P is an (m, n) -jointly prime, then P is an (r, s) -jointly prime for all integers r and s with $r \geq m$ and $s \geq n$.*

Proof. Follows from Proposition 2.4. $\square$

We obtain the following diagram from Proposition 2.4. Notation that an order pair (m, n) means P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M :

$$\begin{array}{ccccccc}
(1, 1) & \rightarrow & (1, 2) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & (1, n) \rightarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(2, 1) & \rightarrow & (2, 2) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & (2, n) \rightarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(m, 1) & \rightarrow & (m, 2) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & (m, n) \rightarrow \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

For our convenience, we recall the basic properties of a ring. Let R be a ring. For any subset X of R , the principal right ideal generated by X is the smallest right ideal of R which contains X , written by $(X)_r$. Similarly, the principal left ideal generated by X is the smallest left ideal of R which contains X , written by $(X)_l$. If A is a left ideal of R , then $(A)_r = A + AR$. Similarly, if A is a right ideal of R , then $(A)_l = A + RA$. Let A be a right ideal of R and m be a positive integer. It is clear that $A^m \subseteq (A)_l^m$. This implies $RA^m \subseteq R(A)_l^m \subseteq (A)_l^m$ which leads to $(A)_l^m R = (A + RA)^m R \subseteq (A^m + RA^m)R \subseteq A^m R + RA^m R \subseteq A^m + RA^m \subseteq (A)_l^m$.

Lemma 2.7. *Let M be an (R, S) -module and $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Then the following statements hold:*

(i) *For each left ideal I of R , left ideal J of S and an (R, S) -submodule N and P of M ,*

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } (I^m)^2 N (J^n)_r \subseteq P.$$

(ii) *For each right ideal I of R , left ideal J of S and an (R, S) -submodule N and P of M ,*

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } (I)_l^m N (J^n)^2 \subseteq P.$$

(iii) For each right ideal I of R , left ideal J of S and an (R, S) -submodule P of M ,

$$(I)_l^m M(J^n)^2 \subseteq P \text{ implies } (I)_l^m \langle I^m M J^n \rangle J^n \subseteq P.$$

(iv) For each right ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule N and P of M ,

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } (I^m)^2 N(J)_l^n \subseteq P.$$

(v) For each right ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule P of M ,

$$(I^m)^2 M(J)_l^n \subseteq P \text{ implies } I^m \langle I^m M J^n \rangle (J)_l^n \subseteq P.$$

(vi) For each left ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule N and P of M ,

$$I^m N J^n \subseteq P \text{ implies } (I)_r^m N(J^n)^2 \subseteq P.$$

(vii) For each left ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule P of M ,

$$(I)_r^m M(J^n)^2 \subseteq P \text{ implies } (I)_r^m \langle I^m M J^n \rangle J^n \subseteq P.$$

Proof. (i) Let I be a left ideal of R , J be a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $I^m N J^n \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned} (I^m)^2 N(J)_r^n &= (I^m)^2 N(J + JS)^n \\ &\subseteq (I^m)^2 N(J^n + J^n S) \\ &\subseteq (I^m)^2 N J^n + (I^m)^2 N(J^n S) \\ &\subseteq I^m N J^n + I^m (I^m N J^n) S \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

(ii) Let I be a right ideal of R , J be a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $I^m NJ^n \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 (I)_l^m N(J^n)^2 &= (I + RI)^m N(J^n)^2 \\
 &= (I^m + RI^m) N(J^n)^2 \\
 &\subseteq I^m N(J^n)^2 + (RI^m) N(J^n)^2 \\
 &\subseteq I^m NJ^n + R(I^m NJ^n) J^n \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

(iii) Let I be a right ideal of R , J be a left ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $(I)_l^m M(J^n)^2 \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 (I)_l^m \langle I^m MJ^n \rangle J^n &= (I)_l^m [\mathbb{Z}(I^m MJ^n) + R(I^m MJ^n) S] J^n \\
 &\subseteq (I)_l^m [\mathbb{Z}(I^m MJ^n)] J^n + (I)_l^m [R(I^m MJ^n) S] J^n \\
 &\subseteq \mathbb{Z}(I)_l^m I^m M(J^n)^2 + (I)_l^m RI^m MJ^n SJ^n \\
 &\subseteq \mathbb{Z}(I)_l^m M(J^n)^2 + (I)_l^m M(J^n)^2 \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

(iv) Let I be a right ideal of R , J be a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $I^m NJ^n \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned}
 (I^m)^2 N(J)_l^n &= (I^m)^2 N(J + SJ)^n \\
 &\subseteq (I^m)^2 N(J^n + SJ^n) \\
 &\subseteq (I^m)^2 NJ^n + (I^m)^2 N(SJ^n) \\
 &\subseteq I^m NJ^n + I^m (I^m NS) J^n \\
 &\subseteq P + P \\
 &\subseteq P.
 \end{aligned}$$

(v) Let I be a right ideal of R , J be a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $(I^m)^2 M(J)_I^n \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned} I^m \langle I^m M J^n \rangle (J)_I^n &= I^m [\mathbb{Z}(I^m M J^n) + R(I^m M J^n) S] (J)_I^n \\ &\subseteq \mathbb{Z}[(I^m)^2 M J^n (J)_I^n] + I^m [R I^m M J^n S] (J)_I^n \\ &\subseteq \mathbb{Z}[(I^m)^2 M (J)_I^n] + (I^m)^2 M (J)_I^n \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

(vi) Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $I^m N J^n \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned} (I)_r^m N (J^n)^2 &= (I + I R)^m N (J^n)^2 \\ &\subseteq (I^m + I^m R) N (J^n)^2 \\ &\subseteq I^m N (J^n)^2 + (I^m R) N (J^n)^2 \\ &\subseteq I^m N J^n + I^m (R N J^n) J^n \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

(vii) Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S , N and P be (R, S) -submodules of M . Assume that $(I)_r^m M (J^n)^2 \subseteq P$. Then

$$\begin{aligned} (I)_r^m \langle I^m M J^n \rangle J^n &= (I)_r^m [\mathbb{Z}(I^m M J^n) + R(I^m M J^n) S] J^n \\ &\subseteq \mathbb{Z}[(I)_r^m I^m M J^n J^n] + (I)_r^m R I^m M J^n S J^n \\ &\subseteq \mathbb{Z}(I)_r^m M (J^n)^2 + (I)_r^m M (J^n)^2 \\ &\subseteq P. \end{aligned}$$

□

Characterization of an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule is given.

Theorem 2.8. *Let M be an (R, S) -module and P be a proper (R, S) -submodule of M and $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) For each left ideal I of R , left ideal J of S and an (R, S) -submodule N of M ,

$$I^m NJ^n \subseteq P \text{ implies } I^m MJ^n \subseteq P, \text{ or } N \subseteq P.$$

- (iii) For each right ideal I of R , left ideal J of S and an (R, S) -submodule N of M ,

$$I^m NJ^n \subseteq P \text{ implies } I^m MJ^n \subseteq P, \text{ or } N \subseteq P.$$

- (iv) For each right ideal I of R , right ideal J of S and an (R, S) -submodule N of M ,

$$I^m NJ^n \subseteq P \text{ implies } I^m MJ^n \subseteq P, \text{ or } N \subseteq P.$$

Proof. This is immediately obtained from Lemma 2.7. $\square$

Corollary 2.9. *Let M be an (R, S) -module and P be a proper (R, S) -submodule of M and $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) For each left ideal I of R , right ideal J of S and $x \in M$,

$$I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P \text{ implies } I^m MJ^n \subseteq P, \text{ or } x \in P.$$

Proof. (i) $\rightarrow$ (ii) This is obvious. (ii) $\rightarrow$ (i) Assume that (ii) holds. Let I be a left ideal of R , J be a left ideal of S , N be an (R, S) -submodule of M such that $I^m NJ^n \subseteq P$ and $N \not\subseteq P$. Let $x \in N \setminus P$. Then $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq I^m NJ^n \subseteq P$. It implies, from (ii), that $I^m MJ^n \subseteq P$. $\square$

The following corollary is a characterization of (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules.

Corollary 2.10. *Let M be an (R, S) -module and P be a proper (R, S) -submodule of M and $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Then the following statements are equivalent:*

(i) *For each left ideal I of R , right ideal J of S and $x \in M$,*

$$I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P \text{ implies } I^m M J^n \subseteq P, \text{ or } x \in P.$$

(ii) *For each left ideal I of R , left ideal J of S and $x \in M$,*

$$I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P \text{ implies } I^m M J^n \subseteq P, \text{ or } x \in P.$$

(iii) *For each right ideal I of R , left ideal J of S and $x \in M$,*

$$I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P \text{ implies } I^m M J^n \subseteq P, \text{ or } x \in P.$$

(iv) *For each right ideal I of R , right ideal J of S and $x \in M$,*

$$I^m \langle x \rangle J^n \subseteq P \text{ implies } I^m M J^n \subseteq P, \text{ or } x \in P.$$

Next, we give a notion of an (m, n) -multiplicative system. Moreover, we show it as a necessary and sufficient condition for an (R, S) -submodule to be an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule.

Definition 2.11. Let M be an (R, S) -module and m, n be positive integers. A nonempty set $X \subseteq M \setminus \{0\}$ is called an (m, n) -multiplicative system if for each left ideal I of R , right ideal J of S and $K, L (R, S)$ -submodules of M , if $(K + L) \cap X \neq \emptyset$ and $(K + I^m M J^n) \cap X \neq \emptyset$, then $(K + I^m L J^n) \cap X \neq \emptyset$.

Proposition 2.12. *Let P be a proper (R, S) -submodule of M and m, n be positive integers. Then P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M if and only if $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system.*

Proof. Assume that P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let I be a left ideal of R , J be right ideal of S and K, L be (R, S) -submodules of M such that $(K + I^m L J^n) \cap (M \setminus P) = \emptyset$. Thus, $K + I^m L J^n \subseteq P$. This implies that $K \subseteq P$ and $I^m L J^n \subseteq P$. Since P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M , $I^m M J^n \subseteq P$ or $L \subseteq P$. Therefore, $K + L \subseteq P$ or $K + I^m M J^n \subseteq P$. That is, $(K + L) \cap (M \setminus P) = \emptyset$ or $(K + I^m M J^n) \cap (M \setminus P) = \emptyset$. Hence, $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system.

Conversely, assume that $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system. Let I be a left ideal of R , N be an (R, S) -submodule of M and J be a right ideal of S such that $I^m N J^n \subseteq P$. Hence, $(I^m N J^n) \cap (M \setminus P)$ is an empty set. Since $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system, we have $N \cap (M \setminus P) = \emptyset$, and $(I^m M J^n) \cap (M \setminus P) = \emptyset$. Therefore, $N \subseteq P$ or $I^m M J^n \subseteq P$. This shows that P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . $\square$

Proposition 2.13. Let M be an (R, S) -module, P be a proper (R, S) -submodule of M and m, n be positive integers. Let $X = M \setminus P$. Then the following statements are equivalent:

- (i) P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M .
- (ii) X is an (m, n) -multiplicative system.
- (iii) For each left ideal I of R , right ideal J of S and L (R, S) -submodule of M ,

$$L \cap X \neq \emptyset \text{ and } I^m M J^n \cap X \neq \emptyset \text{ imply } I^m L J^n \cap X \neq \emptyset.$$

- (iv) For each left ideal I of R , right ideal J of S and $x \in M$,

$$\langle x \rangle \cap X \neq \emptyset \text{ and } I^m M J^n \cap X \neq \emptyset \text{ imply } I^m \langle x \rangle J^n \cap X \neq \emptyset.$$

Proof. It is obvious. $\square$

Proposition 2.14. *Let M be an (R, S) -module and m, n be positive integers. Assume that X is an (m, n) -multiplicative system. If P is a maximal (R, S) -submodule of M with respect to the property that $P \cap X = \emptyset$, then P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M .*

Proof. Assume that P is a maximal (R, S) -submodule of M with respect to the property that $P \cap X = \emptyset$. Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and N be an (R, S) -submodule of M such that $N \not\subseteq P$ and $I^m M J^n \not\subseteq P$. Since P is a maximal (R, S) -submodule of M with respect to the property that $P \cap X = \emptyset$, we have $(P + N) \cap X \neq \emptyset$ and $(P + I^m M J^n) \cap X \neq \emptyset$. Since X is an (m, n) -multiplicative system, $(P + I^m N J^n) \cap X \neq \emptyset$. Since $P \cap X = \emptyset$, we have $I^m N J^n \not\subseteq P$. This implies that P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . $\square$

3. Radical of (m, n) -jointly Prime (R, S) -submodules

This section contains partial results inspired from [2], wherein the symbol $\sqrt{(R, S)}N$ is introduced. We extend the notion of $\sqrt{(R, S)}N$ to $\sqrt{(m, n)}N$, and obtain some results. Moreover, we introduce an (m, n) -jointly prime radical of an (R, S) -module as a generalization of a jointly prime radical of an (R, S) -module. Finally, we show in general that if an (R, S) -module is a direct sum of its (R, S) -submodules, then the (m, n) -jointly prime radical of the (R, S) -module is also direct sum of (m, n) -jointly prime radical of its (R, S) -submodules.

Definition 3.1. Let M be an (R, S) -module and m, n be positive integers. For each (R, S) -submodule N of M , if there is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M containing N , then we define

$${}^{(m,n)}\sqrt{N} = \{x \in M \mid \text{every } (m, n)\text{-multiplicative system containing } x \text{ meets } N\}.$$

If there is no (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M containing N , then we define ${}^{(m,n)}\sqrt{N} = M$.

Theorem 3.2. *Let M be an (R, S) -module, m and n be positive integers and N be an (R, S) -submodule of M . Then either ${}^{(m,n)}\sqrt{N} = M$ or ${}^{(m,n)}\sqrt{N}$ equals the intersection of all (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules of M containing N .*

Proof. Assume that ${}^{(m,n)}\sqrt{N} \neq M$. Then there is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M containing N . Let $x \in {}^{(m,n)}\sqrt{N}$ and P be an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M containing N . Since $M \setminus P$ is an (m, n) -multiplicative system and $N \cap (M \setminus P) = \emptyset$, we have $x \in P$. On the other hand, let $x \in M$ be such that $x \notin {}^{(m,n)}\sqrt{N}$. Then there is an (m, n) -multiplicative system X such that $x \in X$ and $N \cap X = \emptyset$. Hence, the set of (R, S) -submodules J of M containing N and $J \cap X = \emptyset$ is not an empty set. Applying Zorn's lemma, we have a maximal (R, S) -submodule K of M such that $K \cap X = \emptyset$. By Proposition 2.14, K is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . Moreover, $x \notin K$. The proof is complete. $\square$

Lemma 3.3. *Let M be an (R, S) -module, m and n be positive integers and N be an (R, S) -submodule of M . If P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M , then $P \cap N$ is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of N .*

Proof. Assume that P is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . Let I be a left ideal of R , K be an (R, S) -submodule of N and J be a right ideal of S such that $I^m K J^n \subseteq N \cap P$. Then $I^m K J^n \subseteq P$. Since P is an

(m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M , we have $I^m MJ^n \subseteq P$ or $K \subseteq P$. This implies that $I^m NJ^n \subseteq P \cap N$, or $K \subseteq P \cap N$. Hence, $P \cap N$ is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of N . $\square$

Let M be an (R, S) -module and m, n be positive integers. The (m, n) -jointly prime spectrum of M is the set of all (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules of M , denoted by $\text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(M)$.

Definition 3.4. Let M be an (R, S) -module and m, n be positive integers. We denote an (m, n) -jointly prime radical of M by $\text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(M)$ defined by

$$\text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(M) = \begin{cases} \bigcap_{P \in \text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(M)} P, & \text{if } \text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(M) \neq \emptyset, \\ M, & \text{if } \text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(M) = \emptyset. \end{cases}$$

In general, an (R, S) -submodule of an (R, S) -module is an (R, S) -module. For each (R, S) -submodule N of M , the (m, n) -jointly prime spectrum of N is the set of all (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules of N , denoted by $\text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(N \# M)$. In fact, from Lemma 3.3, if

$$P \in \text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(M),$$

then $P \cap N \in \text{Spec}_{(R, S)}^{(m, n)-jp}(N \# M)$. We define an (m, n) -jointly prime radical of an (R, S) -submodule N of M as follows.

Definition 3.5. Let N be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M and m, n be positive integers. Then an (m, n) -jointly prime radical of N , $\text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N)$, is defined by

$$\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) = \begin{cases} \bigcap_{P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)} P, & \text{if } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M) \neq \emptyset, \\ N, & \text{if } \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M) = \emptyset. \end{cases}$$

Proposition 3.6. *Let N be an (R, S) -submodule of an (R, S) -module M and m, n be positive integers. Then $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) \subseteq \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$.*

Proof. Let $P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)$. Then $P \cap N \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)$.

This implies that

$$\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) = \bigcap_{P \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N \# M)} P \subseteq P \cap N \subseteq P.$$

Hence, $\text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(N) \subseteq \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$. □

Lemma 3.7. *Let $\{N_i\}_{i \in \Delta}$ be a collection of (R, S) -submodules of an (R, S) -module M such that $M = \bigoplus_{i \in \Delta} N_i$ and m, n be positive integers. If $N_k^* \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(N_k \# M)$, where $k \in \Delta$, then $N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i) \in \text{Spec}_{(R,S)}^{(m,n)-jp}(M)$.*

Proof. Assume that $k \in \Delta$ and N_k^* is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of N_k . Let I be a left ideal of R , J be a right ideal of S and $x \in M$ such that $I^m \langle x \rangle J^n \subseteq N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. Since $x \in M$, $x = \sum_{i \in \Delta} x_i$, where $x_i \in N_i$ for each $i \in \Delta$ and $x_i = 0$ except for finitely many indices $i \in \Delta$. Then $I^m \langle x_k \rangle J^n \subseteq I^m \langle x \rangle J^n \subseteq N_k^* \oplus (\bigoplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. Hence, $I^m \langle x_k \rangle J^n \subseteq N_k^*$. Since N_k^* is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of N_k , we have $I^m N_k J^n \subseteq N_k^*$ or $x_k \in N_k^*$. If $I^m N_k J^n \subseteq N_k^*$, then

$$\begin{aligned} I^m M J^n &= I^m (N_k \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)) J^n \subseteq I^m N_k J^n + I^m (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i) J^n \\ &\subseteq N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i). \end{aligned}$$

If $x_k \in N_k^*$, then $x = x_k + \sum_{i \in \Delta \setminus \{k\}} x_i \in N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. This shows that $I^m M J^n \subseteq N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$ or $x \in N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. Hence, $N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$ is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . $\square$

The following result is updated from Proposition 3.2 in [2].

Proposition 3.8. *Let $\{N_i\}_{i \in \Delta}$ be a collection of (R, S) -submodules of M such that $M = \oplus_{i \in \Delta} N_i$, and m, n be positive integers. Then $\text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(M) = \oplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N_i)$.*

Proof. It follows from Proposition 3.6, that $\oplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N_i) \subseteq \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(M)$. Next, let $m \in M$ be such that $m \notin \oplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N_i)$. We can write $m = \sum_{i \in \Delta} n_i$, where $n_i \in N_i$ for all $i \in \Delta$ and $n_i = 0$ for all but finitely many $i \in \Delta$. Since $m \notin \oplus_{i \in \Delta} \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N_i)$, we have $n_k \notin \text{rad}_{(R, S)}^{(m, n)}(N_k)$ for some $k \in \Delta$. Then $n_k \notin N_k^*$ for some (m, n) -jointly prime (R, S) -submodules N_k^* of N_k . Lemma 3.7 obtains that $N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$ is an (m, n) -jointly prime (R, S) -submodule of M . Suppose for a contradiction that $m \in N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. Then

$$m = y_k + \sum_{i \in \Delta \setminus \{k\}} y_i,$$

where $y_k \in N_k^*$ and $y_i \in N_i$ for all $i \in \Delta \setminus \{k\}$. This implies that $\sum_{i \in \Delta} n_i$

$= m = \sum_{i \in \Delta} y_i$. Hence, $n_i = y_i$ for all $i \in \Delta$. This leads to $n_k = y_k \in N_k^*$ which is a contradiction. Hence, $m \notin N_k^* \oplus (\oplus_{i \in \Delta \setminus \{k\}} N_i)$. This follows that $m \notin \text{rad}_{(R,S)}^{(m,n)}(M)$. The proof is complete. $\square$

Acknowledgements

The author would like to thank the referee(s) for comments and suggestions on the manuscript. This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KREF 015604).

References

- [1] T. Khumprapussorn, S. Pianskool and M. Hall, (R, S) -modules and their fully prime and jointly prime submodules, *IMF* 7 (2012), 1631-1643.
- [2] D. Yuwaningsih and I. Wijayanti, On jointly prime radicals of (R, S) -modules, *J. Indones. Math. Soc.* 21 (2015), 25-34.