รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

สมบัติบางประการของ (1,k) -ไอดีลเฉพาะ
Some properties of (1,k) -prime ideals

นายธวัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2558
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ สมบัติบางประการของ $(1, k)$-ไอดีลเฉพาะ

แหล่งเงิน ทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ 2558 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2557 ถึง 30 กันยายน 2558

หัวหน้าโครงการ นายธวัชชัย คำประภัสสร ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราศึกษาการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะของวง R ให้ k เป็นจำนวนเต็ม เราเรียกไอดีลย่อยแท้ I ของวง R ว่า $(1, k)$-ไอดีลเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A ของวง R และแต่ละไอดีลทางขวา B ของวง R ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $A \subseteq I$ หรือ $B^k \subseteq I^{\frac{1}{k}}$ โดยที่ $I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\}$ เราสังเกตว่าจำนวนเฉพาะบนวงของจำนวนเต็มเทียบเท่ากับไอดีลเฉพาะบนวงใดๆ เราใช้พื้นฐานความรู้ในทฤษฎีวง เพื่อแสดงว่าจำนวนเฉพาะยกกำลัง k บนวงของจำนวนเต็มเทียบเท่ากับ $(1, k)$-ไอดีลเฉพาะบนวงใดๆ

คำสำคัญ : $(1, k)$-ไอดีลเฉพาะ (R, S)-มอดูล $(1, k)$-มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มและ $(1, k)$-ระบบผลคูณอย่างเต็ม

Research Title: Some properties of $(1,k)$-prime ideals

Researcher: Thawatchai Khumprapussorn

Faculty: Science

Department: Mathematics

ABSTRACT

In this paper, we study a generalization of prime ideal of a ring R. Let k be a natural number. A proper ideal I of R is called a $(1,k)$-prime ideal of R if for every left ideal A of R and right ideal B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Note that $I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\}$. Our inspiration come from an observation that a prime number in a ring of integers is equivalent to a prime ideal in a ring. We use only basic knowledge in ring theory to obtain that a prime number power of k in a ring of integers is equivalent with respect to a $(1,k)$-prime ideal in a ring.

Keywords : $(1,k)$-prime ideals, (R,S)-modules, $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodules, $(1,k)$-fully multiplication systems

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้โอกาสในการเรียนรู้และทำงานวิจัย และขอขอบคุณบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่มอบมิตรไมตรี ความช่วยเหลือ ตลอดจนกระทั่งให้คำแนะนำในการจัดทำรูปเล่มงานวิจัยนี้ เป็นอย่างดี

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนส่งเสริมนักวิจัยเงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558

ธวัชชัย คำประภัสสร

สารบัญ

เนื้อหา .... หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ II
กิตติกรรมประกาศ III
สารบัญ IV

บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย 2
1.4 วิธีดำเนินการวิจัยและแผนการดำเนินงานวิจัย 2
บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4
2.1 ไอดีลเฉพาะ 4
2.2 แนวคิดและเหตุจูงใจ 8
บทที่ 3 การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ 9
3.1 $(1, k)$-ไอดีลเฉพาะ 9
3.2 มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม 11
3.3 $(1, k)$-มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม 14
บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย 18
เอกสารอ้างอิง 19
ภาคผนวก 20
ประวัติผู้เขียน 32

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ไอดีลเฉพาะ (prime ideal) เป็นเซตย่อยของวง (ring) ซึ่งมีสมบัติเกี่ยวเนื่องกันกับตัวเลขจำนวนเฉพาะ กล่าวคือ ไอดีลเฉพาะของวงของจำนวนเต็ม ก็คือ เซตของพหุคูณของจำนวนเฉพาะจำนวนหนึ่งนั่นเอง

พิจารณาบทนิยามของไอดีลเฉพาะอย่างคร่าวๆ กล่าวไว้ว่า P เป็นไอดีลเฉพาะของวง R ก็ต่อเมื่อ

สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

พิจารณาสมบัติของจำนวนเฉพาะอย่างคร่าวๆ ที่ว่า

สำหรับจำนวนเฉพาะ p ถ้า $p|ab$ แล้ว $p|a$ หรือ $p|b$

เมื่อเราให้ความหมายของ การเป็นเซตย่อย "$\subseteq$" กับการหารลงตัว "$|$" เป็นสิ่งเดียวกัน ทำให้เราเปรียบเทียบได้ว่า บทนิยามของไอดีลเฉพาะกับสมบัติของจำนวนเฉพาะ คล้ายคลึงกันมาก ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่า *"การศึกษาสมบัติของไอดีลเฉพาะของวงของจำนวนเต็ม ก็คือการศึกษาสมบัติของจำนวนเฉพาะนั่นเอง"* ภายใต้หลักการนี้ นักคณิตศาสตร์หลายท่านจึงต่อยอดแนวคิด โดยศึกษาในเชิงทั่วไปมากยิ่งขึ้น จึงเกิดบทนิยามของไอดีลชนิดใหม่ๆ ขึ้นมาเพื่อเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ ส่งผลให้ได้ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับจำนวนตัวเลข ยกตัวอย่างเช่น weakly prime ideal, semiprime ideal, P-prime ideal, almost prime, 2-absorbing ideal และ (1,2)-prime ideal เป็นต้น

การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะรูปแบบหนึ่งที่น่าสนใจคือ (1,2)-prime ideal ซึ่งสังเกตเห็นถึงความน่าสนใจดังนี้ เรากล่าวว่า P เป็น (1,2)-ไอดีลเฉพาะของวง R ก็ต่อเมื่อ

สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB^2 \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B^2 \subseteq P$

ซึ่งสอดคล้องกับจำนวนเต็ม p ที่มีสมบัติว่า

สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม a และ b ถ้า $p|ab^2$ แล้ว $p|a$ หรือ $p|b^2$

และเมื่อลงศึกษาในส่วนลึกจะพบว่า จำนวนเต็ม p ที่มีสมบัติดังกล่าวเป็นไปได้ 3 กรณี คือ

$p=0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p=q^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลจากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง พบว่า (1,2)-ไอดีลเฉพาะ มีความสัมพันธ์ระหว่างวง (ring) และ (R,S)-มอดูล นั่นคือ [เอกสารอ้างอิงหมายเลข 14]

ถ้า P เป็น (1,2)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P,M)_{R;S^2}$ เป็น (2,1)-ไอดีลเฉพาะ ของ R

นับเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัดว่าการศึกษา (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ (เรานิยามได้ในทำนองเดียวกันกับ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ) นอกเสียจากจะเป็นการวางนัยทั่วไปของ ไอดีลเฉพาะ เรายังได้ผลลัพธ์ที่เป็นสมบัติของจำนวนเต็ม และ ได้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง 2 โครงสร้าง ทั้งในวง (ring) และ (R,S)-มอดูล

ด้วยหลักการและเหตุผลดังกล่าวข้างต้น จึงนำมาสู่โครงงานวิจัยนี้ โดยเสนอการศึกษา (1,k)-ไอดีลเฉพาะ ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ พร้อมทั้งศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง วง (ring) และ (R,S)-มอดูล ผ่านทาง(1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) เพื่อศึกษาลักษณะของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์
2) เพื่อวางนัยทั่วไปของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ
3) เพื่อศึกษาลักษณะของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
4) เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง วง (ring) และ (R,S)-มอดูล
5) เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ทางพีชคณิต
6) เพื่อสร้างเสริมประสบการณ์ในการทำงานวิจัย

1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

1) อธิบายลักษณะของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์
2) ศึกษาและให้บทนิยามที่เป็นรูปแบบทั่วไปมากยิ่งขึ้นของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ โดยเบื้องต้นได้ให้บทนิยามที่เหมาะสมของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
3) อธิบายลักษณะของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
4) พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของวง นั่นคือ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ กับโครงสร้างของ (R,S)-มอดูล นั่นคือ (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม และ (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม
5) พิจารณาถึงแนวทางการต่อยอดงานวิจัยในอนาคต กล่าวคือ พิจารณาความเป็นไปได้ในการให้บทนิยามของ (m,n)-ไอดีลเฉพาะ เมื่อ m และ n คือจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

1) สืบค้นข้อมูลและวิเคราะห์การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ ที่มีอยู่หลากหลายแนวทางในขณะนี้ เพื่อให้เห็นภาพรวมและแนวทางในการพัฒนาต่อไป
2) ศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์
3) ศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ บนวงทั่วไป, บนวงสลับที่ และ บนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
4) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
5) ศึกษาสมบัติของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ เมื่อ k คือจำนวนเต็มบวกใดๆ
6) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของวง นั่นคือ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ กับโครงสร้างของ (R,S)-มอดูล นั่นคือ (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม และ (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม
7) พิจารณาความเป็นไปได้ในการให้บทนิยามของ (m,n)-ไอดีลเฉพาะ เมื่อ m และ n คือจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่งจะเป็นการวางนัยทั่วไปของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ
8) สรุปผลการวิจัย

แผนการดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงาน	ระยะเวลา											
	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.
สืบค้นข้อมูลและวิเคราะห์การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ	↔	↔	↔	↔								
ศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะของ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ					↔	↔	↔					
ศึกษาและวิเคราะห์ลักษณะของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ					↔	↔	↔					
ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ								↔	↔	↔		
ศึกษาสมบัติของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ								↔	↔	↔		
ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโครงสร้างของวงกับโครงสร้างของ (R,S)-มอดูลที่เกี่ยวข้องกับ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ และ (k,1)-ไอดีลเฉพาะ								↔	↔	↔		
พิจารณาความเป็นไปได้ในการให้บทนิยามของ (m,n)-ไอดีลเฉพาะ											↔	
สรุปผลการวิจัย											↔	↔

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ไอดีลเฉพาะ

ให้ R เป็นวงใดๆ และ P เป็นไอดีลของ R
เรากล่าวว่า P เป็นไอดีลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ $P \neq R$ และ สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

ให้ $X \subseteq R$ เราเขียนสัญลักษณ์แทนไอดีลเล็กที่สุดซึ่งบรรจุ X ด้วย (X)

ในกรณีที่ $X = \{a\}$ เราเขียนสัญลักษณ์แทนไอดีลเล็กที่สุดซึ่งบรรจุ $\{a\}$ ด้วย (a)

ตัวอย่าง 2.1.1

1) เราทราบว่า เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ เป็นวง ยิ่งไปกว่านั้น $n\mathbb{Z}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ $n = 0$ หรือ n เป็นจำนวนเฉพาะ
2) เราทราบว่า เซตของพหุนามตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}[x]$ เป็นวง ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า ไอดีลเฉพาะทั้งหมดของ $\mathbb{Z}[x]$ คือ (0), (p), (x) และ (p,x)
3) $\mathbb{Z}\times\{0\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นลักษณะเฉพาะของไอดีลเฉพาะบนวงใดๆ

ทฤษฎีบท 2.1.2 ให้ R เป็นวง และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นไอดีลเฉพาะของ R
2) สำหรับแต่ละสมาชิก $a,b \in R$ ถ้า $aRb \subseteq P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$
3) สำหรับแต่ละสมาชิก $a,b \in R$ ถ้า $(a)(b) \subseteq P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$
4) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$
5) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นลักษณะเฉพาะของไอดีลเฉพาะบนวงสลับที่

ทฤษฎีบท 2.1.3 ให้ R เป็นวงสลับที่ และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นไอดีลเฉพาะของ R
2) สำหรับแต่ละสมาชิก $a,b \in R$ ถ้า $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นลักษณะเฉพาะของไอดีลเฉพาะบนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ R เป็นวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นไอดีลเฉพาะของ R
2) R/P เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ความสัมพันธ์ระหว่างไอดีลเฉพาะและไอดีลใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ R เป็นวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

ถ้า P เป็นไอดีลใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ R แล้ว P เป็นไอดีลเฉพาะของ R

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ R เป็นวงจำกัดสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

ทุกไอดีลเฉพาะ เป็นไอดีลใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม

การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์มากมาย ดังจะเห็นได้จากผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะ ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่มาอย่างต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่น D. D. Anderson and E. Smith [2] ได้ศึกษาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน (weakly prime ideal) ในวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

บทนิยาม 2.1.7 [2] ให้ P เป็นไอดีลของวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่าเป็น **ไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน** (weakly prime ideal) ของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ แต่ละสมาชิก $a, b \in R$ ถ้า $0 \neq ab \in P$ แล้ว $a \in P$ **หรือ** $b \in P$

D. D. Anderson and E. Smith ได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับไอดีลที่จะเป็นไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.8 [2] ให้ R เป็นวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P ว่าเป็น ไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน (weakly prime ideal) ของ R
2) สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $0 \neq AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

Yasuyuki Hirano, Edward Poon, and Hisaya Tsutsui [21] นำแนวคิดของ D. D. Anderson and E. Smith มาขยายความต่อ โดยมองว่านิยามไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน ที่ศึกษาในตอนเริ่มต้นของ D. D. Anderson and E. Smith เป็นนิยามที่กำหนดบนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ Yasuyuki Hirano, Edward Poon, and Hisaya Tsutsui จึงได้ให้บทนิยามของไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนบนวงใดๆ ดังนี้

บทนิยาม 2.1.9 [21] ให้ R เป็นวงและ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่าเป็น **ไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน** (weakly prime ideal) ของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $0 \neq AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

ทั้งนี้ Yasuyuki Hirano, Edward Poon, and Hisaya Tsutsui ให้ทฤษฎีที่อธิบายถึงลักษณะของไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนบนวงที่มีเอกลักษณ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.10 [19] ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนของ R
2) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A และ B ของ R ถ้า $0 \neq AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$
3) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A และ B ของ R ถ้า $0 \neq AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$
4) สำหรับแต่ละสมาชิก $a, b \in R$ ถ้า $0 \neq aRb \subseteq P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

จากทฤษฎีบท 2.1.2 และ ทฤษฎีบท 2.1.10 จะเห็นว่าลักษณะของไอดีลเฉพาะและไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนคล้ายกันมาก สำหรับข้อแตกต่างที่เห็นก็คือบนวงที่ศึกษาในทฤษฎีบท 2.1.2 เป็นวงใดๆ แต่ในทฤษฎีบท 2.1.10 เป็นวงที่มีเอกลักษณ์

Anderson, D. D. and Bataineh [1] ได้ศึกษาการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะบนวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ ดังนี้

บทนิยาม 2.1.11 [1] ให้ R เป็นวงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และ $\mathrm{I}(R)$ เป็นเซตของไอดีลทั้งหมดของ R สมมติว่า $\phi : \mathrm{I}(R) \to \mathrm{I}(R) \cup \{\varnothing\}$ เป็นฟังก์ชัน เราเรียกไอดีล P ของ R โดยที่ $P \neq R$ ว่า $\phi-$ไอดีลเฉพาะ ของ R ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละสมาชิก $a, b \in R$ ถ้า $ab \in P \setminus \phi(P)$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

ข้อสังเกตจากบทนิยาม 2.11 เมื่อเรากำหนดฟังก์ชัน ϕ โดยเฉพาะเจาะจงลงไป เราได้ข้อสังเกตที่น่าสนใจดังนี้

$$\phi_{\varnothing}(N) = \varnothing \text{ สำหรับทุกๆ } N \in \mathrm{I}(R)$$

$$\phi_0(N) = \{0\} \text{ สำหรับทุกๆ } N \in \mathrm{I}(R)$$

เราพบว่า

1) P เป็นไอดีลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ P เป็น $\phi_{\varnothing}-$ไอดีลเฉพาะ ของ R
2) P เป็นไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนของ R ก็ต่อเมื่อ P เป็น ϕ_0-ไอดีลเฉพาะ ของ R

ยิ่งไปกว่านั้นการศึกษาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน เป็นเพียงกรณีย่อยของ $\phi-$ไอดีลเฉพาะ เท่านั้น

นอกจากนี้ยังมีการศึกษาการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะรูปแบบอื่นๆ ที่ไม่ได้เป็นกรณีย่อยของ $\phi-$ไอดีลเฉพาะ เช่น semiprime ideal [20], P-prime ideal [8], almost prime, 2-absorbing ideal [11] เป็นต้น

Khumprapussorn [14] ศึกษา (1,2)-ไอดีลเฉพาะ ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะบนวงใดๆ โดยให้บทนิยามของ (1,2)-ไอดีลย่อยไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.1.12 [14] ให้ R เป็นวงใดๆ และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่าเป็น **(1,2)-ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB^2 \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B^2 \subseteq P$

นอกจากนี้เราสามารถให้บทนิยามของ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ ได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ เราเรียก P ว่าเป็น **(2,1)-ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $A^2B \subseteq P$ แล้ว $A^2 \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

Khumprapussorn ยังได้แจกแจงรูปแบบของไอดีลย่อยของวงของจำนวนเต็ม ที่เป็น (1,2)-ไอดีลเฉพาะ ซึ่งทำให้เห็นได้ชัดว่า (1,2)-ไอดีลเฉพาะเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ

ทฤษฎีบท 2.1.13 [14] ให้ p เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $p\mathbb{Z}$ เป็น (1,2)-ไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ $p=0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p=q^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ

เราได้ข้อสังเกตจาก ทฤษฎีบท 2.1.13 ว่า $4\mathbb{Z}$ เป็น (1,2)-ไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ แต่ $4\mathbb{Z}$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$

ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูลการคูณ และ N เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยของ M (อ้างอิงจาก [12] และ [14]) กำหนดสัญลักษณ์ $(N,M)_{R;S} = \{r \in R \mid rMS \subseteq N\}$ และ $(N,M)_{R;S^2} = \{r \in R \mid rMS^2 \subseteq N\}$

สมบัติของ $(N,M)_{R;S}$ และ $(N,M)_{R;S^2}$ ที่น่าสนใจมีดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.14 [14] ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูลการคูณ และ N เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยของ M จะได้ว่า $(N,M)_{R;S}$ และ $(N,M)_{R;S^2}$ เป็นไอดีลของ R

บทนิยาม 2.1.15 [13] ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ M เป็น $(R,S)-$มอดูล เราเรียก $(R,S)-$มอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (1,k)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R, ไอดีลทางขวา J ของ S และ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ในทำนองเดียวกัน เราเรียก $(R,S)-$มอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า (k,1)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R, ไอดีลทางขวา J ของ S และ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $I^kNJ \subseteq P$ แล้ว $I^kMJ \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

ผลลัพธ์ที่น่าสนใจคือความสัมพันธ์ระหว่าง (1,2)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วม และ (2,1)-ไอดีลเฉพาะ ซึ่งศึกษาโดย Khumprapussorn [14]

ทฤษฎีบท 2.1.16 [14] ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูลการคูณ

ถ้า P เป็น (1,2)-มอดูลเฉพาะอย่างร่วมของ M แล้ว $(P,M)_{R;S^2}$ เป็น (2,1)-ไอดีลเฉพาะ ของ R

2.2 แนวคิด และ เหตุจูงใจ

การศึกษาไอดีลเฉพาะ เราพบเห็นได้มากมายหลากหลายแนวทาง เช่น ไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน (weakly prime ideal) $\phi-$ไอดีลเฉพาะ ($\phi-$prime ideal) และ (1,2)-ไอดีลเฉพาะ ((1,2)-prime ideal) ทั้งหมดนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ เช่นเดียวกับงานวิจัยนี้ เราให้บทนิยามของ (1,k)-ไอดีลเฉพาะ ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดมาจาก (1,2)-ไอดีลเฉพาะ อีกทั้งยังเป็นที่น่าสนใจว่าสมบัติพื้นฐานของไอดีลเฉพาะ ยังคงเป็นจริงสำหรับ (1,k)-ไอดีลเฉพาะหรือไม่

บทที่ 3 การวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ

3.1 $(1,k)$-ไอดีลเฉพาะ

ให้ R เป็นวง และ I เป็นไอดีลของวง R สำหรับแต่ละจำนวนนับ k เรานิยาม $I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\}$ ซึ่งเราเห็นได้ชัดว่า $I^{\frac{1}{k}} \subseteq I^{\frac{1}{k+1}}$

ตัวอย่าง 3.1.1 เราจะเห็นว่า $(8Z)^{\frac{1}{2}} = \{x \in Z \mid 8 \mid x^2\}$ และ $(8Z)^{\frac{1}{3}} = \{x \in Z \mid 8 \mid x^3\}$

ดังนั้น $(8Z)^{\frac{1}{2}} \subset (8Z)^{\frac{1}{3}}$ เพราะว่า $2 \in (8Z)^{\frac{1}{3}}$ แต่ $2 \notin (8Z)^{\frac{1}{2}}$

สำหรับกรณีทั่วไป $I^{\frac{1}{k}}$ เป็นเซตย่อยแท้ของ $I^{\frac{1}{k+1}}$ เราแสดงให้เห็นโดยพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ a และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เราสังเกตได้ว่า $a \in (a^{n+1}Z)^{\frac{1}{n+1}}$ แต่ $a \notin (a^{n+1}Z)^{\frac{1}{n}}$ ซึ่งหมายความว่า $(a^{n+1}Z)^{\frac{1}{n}} \subset (a^{n+1}Z)^{\frac{1}{n+1}}$

การศึกษาสมบัติของ $(1,k)$ – ไอดีล จำเป็นต้องศึกษาควบคู่ไปกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ

สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $ab^k \in I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b^k \in I$ --- (1.1)

ในเบื้องต้นเราพบผลลัพธ์ที่น่าสนใจเกี่ยวข้องกับไอดีลที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (1.1) ดังนี้

สมบัติ 3.1.3 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ

ถ้า I สอดคล้องกับเงื่อนไข (1.1) แล้ว $I^{\frac{1}{k}} = I^{\frac{1}{k+1}}$

สัญลักษณ์ สำหรับแต่ละไอดีล I ของวง R เราทราบว่า $Rad(I) = \{x \in R \mid$ มีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $x^n \in I\}$

สมบัติ 3.1.4 ให้ I เป็นไอดีลของวง R จะได้ว่า $\bigcap_{n\in Z^+} I^{\frac{1}{n}} = I$ และ $\bigcup_{n\in Z^+} I^{\frac{1}{n}} = Rad(I)$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า I เป็นไอดีลเฉพาะของ R แล้ว $\bigcap_{n\in Z^+} I^{\frac{1}{n}} = I = Rad(I) = \bigcup_{n\in Z^+} I^{\frac{1}{n}}$

สมบัติ 3.1.5 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ

พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $ab^k \in I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b^k \in I^{\frac{1}{k}}$

(ii) สำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB^k \subseteq I$ แล้ว $A \subseteq I$ หรือ $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$

จะได้ว่า ถ้า (i) เป็นจริง แล้ว (ii) เป็นจริง

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว เงื่อนไข (i) สมมูลกับ เงื่อนไข (ii)

ตัวอย่าง 3.1.6 ให้ R เป็นวงของเมทริกซ์จำนวนจริง ขนาด 2×2 และ $I = \left\{ [0]_{2\times 2} \right\}$

จะได้ว่า I เป็นไอดีลของ R ซึ่งเราสังเกตได้ว่า $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

นั่นหมายความว่า $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in I^{\frac{1}{2}}$

ยิ่งไปกว่านั้น $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin I^{\frac{1}{2}}$

ข้อสังเกตนี้นำเราไปสู่ข้อสรุปว่า $I^{\frac{1}{2}}$ อาจไม่มีสมบัติปิดภายใต้การบวก

สมบัติ 3.1.7 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า (i) ถ้า $x \in I^{\frac{1}{k}}$ แล้ว $-x \in I^{\frac{1}{k}}$

(ii) ถ้า R เป็นวงสลับที่ และ $x \in I^{\frac{1}{k}}$ แล้ว $rx \in I^{\frac{1}{k}}$ ทุกๆ $r \in R$

ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ $a \in R \setminus I$ เรากำหนดให้ k เป็นจำนวนนับ และนิยามเซต $(a;I)_k = \left\{ x \in R \mid ax^k \in I \right\}$

สมบัติ 3.1.8 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ $a \in R \setminus I$ โดยสมมติว่า k เป็นจำนวนนับ

ถ้า I สอดคล้องกับ (1.1) แล้ว $(a;I)_k = I^{\frac{1}{k}}$

ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ $a \in R \setminus I$ เรากำหนดให้ k เป็นจำนวนนับ และนิยามเซต $\left[a^k;I\right] = \left\{x \in R \,\middle|\, a^k x \in I\right\}$ และ $\left(a^k;I\right) = \left\{x \in R \,\middle|\, x a^k \in I\right\}$

สมบัติ 3.1.9 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ $a \in R \setminus I$ โดยสมมติว่า k เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า (i) ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว $\left[a^k;I\right]$ เป็นไอดีลของ R

(ii) ถ้า I สอดคล้องกับ (1.1) แล้ว $\left(a^k;I\right) = I$

3.2 มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม

ในหัวข้อนี้เราแนะนำการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ ซึ่งเราเรียกว่า $(1,k)-$ ไอดีลเฉพาะ เมื่อ k เป็นจำนวนนับ พร้อมทั้งได้พิสูจน์ 4 ข้อความที่สมมูลกัน ซึ่งเราใช้เป็นบทนิยามของ $(1,k)-$ ไอดีลเฉพาะ ในท้ายที่สุด เราได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการที่ไอดีลเป็น $(1,k)-$ ไอดีลเฉพาะ

บทตั้ง 3.2.1 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ

ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A และ B ของ R ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $AR(B)_r^k \subseteq I$

(ii) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A ของ R และไอดีลทางซ้าย B ของ R ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $(A)_\ell RB^k \subseteq I$

(iii) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A และ B ของ R ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $AR(B)_\ell^k \subseteq I$

(iv) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A ของ R และไอดีลทางขวา B ของ R ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $(A)_r RB^k \subseteq I$

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A ของ R และไอดีลทางขวา B ของ R

ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $A \subseteq I$ หรือ $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$

(ii) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A และ B ของ R

ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $A \subseteq I$ หรือ $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$

(iii) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A ของ R และ ไอดีลทางซ้าย B ของ R

$$\text{ถ้า } ARB^k \subseteq I \text{ แล้ว } A \subseteq I \text{ หรือ } B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$$

(iv) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา A และ B ของ R

$$\text{ถ้า } ARB^k \dot{\subseteq} I \text{ แล้ว } A \subseteq I \text{ หรือ } B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$$

เรากล่าวว่า ไอดีล P ของ R เป็นไอดีลเฉพาะ ของ R ถ้า $P \neq R$ และสำหรับแต่ละไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$ ในลำดับถัดไปเป็นนิยามของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ ซึ่งเรียกได้ว่า $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ

บทนิยาม 3.2.3 ให้ k เป็นจำนวนนับ และ I เป็นไอดีลของวง R โดยที่ $I \neq R$ เรากล่าวว่า I เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ ของ R ถ้า I สอดคล้องกับหนึ่งในเงื่อนไขที่ปรากฏในทฤษฎีบท 3.2.2

เราสังเกตได้ไม่ยากว่า ถ้า $k=1$ แล้ว ไอดีลเฉพาะ และ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ เป็นสิ่งเดียวกัน ยิ่งไปกว่านั้น ทุก $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ เป็น $(1,k+1)-$ไอดีลเฉพาะ

ต่อจากนี้ไป สำหรับจำนวนนับ k เรากำหนดให้ $N_k = \{1,2,\ldots,k\}$

บทตั้ง 3.2.4 ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ r เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ถ้า $q^r \mid ab^r$ แล้ว $q^r \mid a$ หรือ $q^r \mid b^r$

บทตั้ง 3.2.5 ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ r เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า $q^r Z$ เป็น $(1,r)-$ไอดีลเฉพาะของ Z

สมบัติต่อไปนี้เราศึกษามาจาก [2]

สมบัติ 3.2.6 ให้ p เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า pZ เป็น $(1,r)-$ไอดีลเฉพาะของ Z ก็ต่อเมื่อ $p=0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p=q^2$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราแสดงให้เห็นถึงลักษณะของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ Z โดยที่ k เป็นจำนวนนับใดๆ ก่อนอื่นขอตกลงถึงสัญลักษณ์ ดังต่อไปนี้

สำหรับจำนวนเต็ม $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เราให้

$$p_1p_2\cdots\hat{p}_t\cdots p_k = \begin{cases} p_1p_2\cdots p_{t-1}p_{t+1}\cdots p_k & \text{ถ้า} \quad 1<t<k \\ p_1p_2\cdots p_{k-1} & \text{ถ้า} \quad t=k \\ p_2\cdots p_k & \text{ถ้า} \quad t=1 \end{cases}$$

สมบัติ 3.2.7 ให้ p และ k เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า pZ เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ Z ก็ต่อเมื่อ $p=0$ หรือ $p=q^r$ เมื่อ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \in N_k$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย A ของ R และไอดีลทางขวา B ของ R

ถ้า $ARB^k \subseteq I$ แล้ว $A \subseteq I$ หรือ $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$

(ii) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $(a)_\ell R(b)_r^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

บทแทรก 3.2.9 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $(a)_t R(b)_r^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

(ii) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $(a)_t R(b)_t^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

(iii) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $(a)_r R(b)_t^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

(iv) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $(a)_r R(b)_r^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

บทแทรก 3.2.10 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $aR(b)_r^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

(ii) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $aR(b)_t^k \subseteq I$ แล้ว $a \in I$ หรือ $b \in I^{\frac{1}{k}}$

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) สำหรับแต่ละ $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$ จะได้ว่า $I = \left\{ x \in R \middle| xRa^k \subseteq I \right\}$

(ii) I เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ R

ทฤษฎีบท 3.2.12 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ k เป็นจำนวนนับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(i) สำหรับแต่ละ $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$ จะได้ว่า $\left(a^k; I\right) = I$

(ii) I เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ R

จะได้ว่า ถ้า (i) เป็นจริง แล้ว (ii) เป็นจริง ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า R เป็นวงสลับที่ แล้ว (i) สมมูลกับ (ii)

ให้ R เป็นวง และ k เป็นจำนวนนับ เราเรียกเซตย่อย S ของ R ว่า $(1,k)-$ระบบผลคูณ ถ้า (i) $S \neq \varnothing$ และ (ii) สำหรับแต่ละ $a,b \in R$ ถ้า $a \in S$ และ $b^k \in S$ แล้วจะมี $r \in R$ ที่ทำให้ $arb^k \in S$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ทำให้เราทราบถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับไอดีล B ที่เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ บน $(1,k)-$ระบบผลคูณ

ทฤษฎีบท 3.2.13 ให้ R เป็นวงสลับที่ ซึ่ง R มีเอกลักษณ์ $1_R \neq 0_R$ และ I เป็นไอดีลของ R โดยที่ $I \neq R$ จะได้ว่า I เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ R ก็ต่อเมื่อ $R \setminus I$ เป็น $(1,k)-$ระบบผลคูณ

3.3 $(1,k)$-มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม

ต่อจากนี้ไป เราให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูล[1] และ k เป็นจำนวนนับ เราเรียก $(R,S)-$มอดูลย่อยแท้ P ของ M ว่า $(1,k)-$**มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม** ถ้าแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMJ^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ ทั้งนี้ สมบัติบางประการของ $(1,k)-$มอดูลเฉพาะอย่างร่วมศึกษาได้ใน [2] ลำดับถัดไป เราให้บทนิยามของ $(1,k)-$มอดูลเฉพาะอย่างเต็ม

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ และ k เป็นจำนวนนับ เราเรียก P ว่า $(1,k)-$**มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม** ถ้าแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R ไอดีลทางขวา J ของ S และ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMS^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ หรือ $RMJ^k \subseteq P$

เราเห็นได้ชัดว่า ใน $(R,S)-$มอดูล ทุก $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม เป็น $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม ในสมบัติ 3.3.2 แสดงให้เห็นว่า ใน $(R,R)-$มอดูล R เราพิสูจน์ได้ว่า $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม และ $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมเป็นสิ่งเดียวกัน

สมบัติ 3.3.2 ให้ R เป็นวง และ k เป็นจำนวนนับ จะได้ว่าทุก $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(R,R)-$มอดูล R เป็น $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ $(R,R)-$มอดูล R

ผลลัพธ์ถัดไป เราอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ และ $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม

สมบัติ 3.3.3 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ 1_R โดยที่ $1_R \neq 0_R$ และ k เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า ทุก $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ $(R,R)-$มอดูล R เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ R

ในทำนองเดียวกัน เราแสดงได้ไม่ยากว่า ทุก $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(R,R)-$มอดูล R เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ R

หลังจากที่เราได้ศึกษาผลงานวิจัย [1] เราทราบว่ามอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม และมอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วมของ $(R,R)-$มอดูล R เป็นสิ่งเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ เราทราบว่า ไอดีลเฉพาะของ R มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม และมอดูลย่อยเฉพาะอย่างร่วม อง $(R,R)-$มอดูล R ทั้งสามสิ่งนี้เป็นสิ่งเดียวกัน ทั้งนี้รวมไปถึงไอดีลของวง R นับเป็นสิ่งเดียวกันกับ มอดูลย่อยของ $(R,R)-$มอดูล R อีกด้วย แต่ทว่าเรามองเห็นความแตกต่างกันของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ และ $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม ดังจะแสดงให้เห็น ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3.4 เราเห็นว่า $4Z$ เป็น $(1,2)-$ไอดีลเฉพาะของ Z แต่ว่า $4Z$ ไม่เป็น $(1,2)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ $(Z,Z)-$มอดูล Z

ทฤษฎีบท 3.3.5 ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูล และ k เป็นจำนวนนับ และ P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อย ของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม

(ii) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M และแต่ละไอดีลทางซ้าย J ของ S

ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMS^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ หรือ $RMJ^k \subseteq P$

(iii) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R แต่ละ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M และแต่ละไอดีลทางซ้าย J ของ S

ถ้า $INJ^k \subseteq P$ แล้ว $IMS^k \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$ หรือ $RMJ^k \subseteq P$

(iv) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R แต่ละ $(R,S)-$มอดูลย่อย N ของ M และแต่ละไอดีลทางขวา J ของ S

$$\text{ถ้า } INJ^k \subseteq P \text{ แล้ว } IMS^k \subseteq P \text{ หรือ } N \subseteq P \text{ หรือ } RMJ^k \subseteq P$$

บทแทรก 3.3.6 ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูล และ k เป็นจำนวนนับ และ P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อย ของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็ม

(ii) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละ $x \in M$ และแต่ละไอดีลทางขวา J ของ S

$$\text{ถ้า } I<x>J^k \subseteq P \text{ แล้ว } IMS^k \subseteq P \text{ หรือ } x \in P \text{ หรือ } RMJ^k \subseteq P$$

(iii) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละ $x \in M$ และแต่ละไอดีลทางซ้าย J ของ S

$$\text{ถ้า } I<x>J^k \subseteq P \text{ แล้ว } IMS^k \subseteq P \text{ หรือ } x \in P \text{ หรือ } RMJ^k \subseteq P$$

(iv) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R แต่ละ $x \in M$ และแต่ละไอดีลทางซ้าย J ของ S

$$\text{ถ้า } I<x>J^k \subseteq P \text{ แล้ว } IMS^k \subseteq P \text{ หรือ } x \in P \text{ หรือ } RMJ^k \subseteq P$$

(v) สำหรับแต่ละไอดีลทางขวา I ของ R แต่ละ $x \in M$ และแต่ละไอดีลทางขวา J ของ S

$$\text{ถ้า } I<x>J^k \subseteq P \text{ แล้ว } IMS^k \subseteq P \text{ หรือ } x \in P \text{ หรือ } RMJ^k \subseteq P$$

บทนิยาม 3.3.7 ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูล และ k เป็นจำนวนนับ เราเรียกเซตย่อย X ของ M ที่ไม่ใช่เซตว่าง โดยที่ $X \subseteq M \setminus \{0\}$ ว่า$(1,k)-$ระบบผลคูณอย่างเต็ม ถ้าแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละไอดีลทางขวา J ของ S และแต่ละ k และ L ซึ่งเป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยของ M ถ้า $(K+IMS^k)\cap X \neq 0$ และ $(K+L)\cap X \neq 0$ และ $(K+RMJ^k)\cap X \neq 0$ แล้ว $(K+ILJ^k)\cap X \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยแท้ของ $(R,S)-$มอดูล M และ k เป็นจำนวนนับ เราได้ว่า P เป็น $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ M ก็ต่อเมื่อ $M \setminus P$ เป็น $(1,k)-$ระบบผลคูณอย่างเต็ม

สมบัติ 3.3.9 ให้ M เป็น $(R,S)-$มอดูล และ P เป็น $(R,S)-$มอดูลย่อยแท้ของ M เรากำหนดให้ k เป็นจำนวนนับ และ $X = M \setminus P$ เราได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) P เป็น $(1,k)-$มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ M

(ii) X เป็น $(1,k)-$ ระบบผลคูณอย่างเต็ม

(iii) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละไอดีลทางขวา J ของ S และแต่ละ $(R,S)-$ มอดูลย่อย L ของ M

ถ้า $IMS^k \cap X \neq 0$ และ $L \cap X \neq 0$ และ $RMJ^k \cap X \neq 0$ แล้ว $ILJ^k \cap X \neq 0$

(iv) สำหรับแต่ละไอดีลทางซ้าย I ของ R แต่ละไอดีลทางขวา J ของ S และ $x \in M$

ถ้า $IMS^k \cap X \neq 0$ และ $<x> \cap X \neq 0$ และ $RMJ^k \cap X \neq 0$ แล้ว $I<x>J^k \cap X \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.3.10 ให้ M เป็น $(R,S)-$ มอดูล และ k เป็นจำนวนนับ เราสมมติว่า X เป็น $(1,k)-$ ระบบผลคูณอย่างเต็ม ถ้า P เป็น $(R,S)-$ มอดูลย่อยที่สุดเฉพาะกลุ่ม ซึ่งเทียบกับสมบัติว่า $P \cap X \neq \varnothing$ แล้ว P เป็น $(1,k)-$ มอดูลย่อยเฉพาะอย่างเต็มของ M

บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

เผยแพร่ผลงานวิจัยโดยนำเสนอในงานประชุมวิชาการนานาชาติ THE 11th IMT-GT INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS, STATISTICS AND ITS APPLICATIONS 2015, 23-25 NOVEMBER 2015, PATTAYA, THAILAND ชื่อเรื่อง A STUDY ON (1,k)-PRIME IDEALS

เอกสารอ้างอิง

1) Anderson, D. D. and Bataineh, M. : Generalizations of Prime Ideals, *Communications in Algebra* Vol. 36, Iss. 2, 2008

2) Anderson, D. D. and Smith, E. : Weakly prime ideals. Houston J. Math. 29(2003), No.4, 831–840 (electronic).

3) Ameri, R.: On the prime submodules of multiplication modules, *Int. J. Math. Math. Sci.* 27, 1715-1724 (2003)

4) Bakhshizade , F.: multiplication Module, *Int. J. Contemp. Math. Sciences.*, 7, 1213-1216 (2012)

5) Bracic, J.: The prime spectrum of a module, *Functional analysis IX-proceedings of the postgraduate school and conference held at the inter-university centre* (2005)

6) Callialp, F., Unsal T.: On finite union of prime submodules, *Pakistan J. Appl. Math.* 2(11), 1016-1017 (2002)

7) Dauns, J.: Prime modules, *J. Reine Angew. Math.* 298, 156-181 (1978)

8) Dheena. P and Manivasan. S, : P-prime and Small P-prime ideals in Semirings, *International Journal of Algebra and Statistics*, Vol 1, 2(2012), 89–93

9) El-bast, Z., Smith, P.: Multiplication modules, *Comm. Algebra.* 16, 755-779 (1988)

10) Gupta, V., Chaudhari, J.: Prime ideals in semirings, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 34, 417-421 (2001)

11) Jayprakash Ninu Chaudhari, 2-Absorbing Ideals in Semirings, International Journal of Algebra, Vol. 6, 2012, no. 6, 265 - 270

12) Khumprapussorn, T., Pianskool, S., Hall, M.: (R,S)-Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules, *International Mathematics Forum* Vol.7 (2012), 1631-1643

13) Khumprapussorn, T., (R,S)-modules and (1,k)-Jointly Prime (R,S)-Submodule, International Journal of Mathematical, Computational Science and Engineering, 7 (2013), 502 - 505.

14) Khumprapussorn, T., Generalization of jointly prime (R,S)-submodules, Proceeding of The 19th Annual Meeting in Mathematics (2014)

15) Kim, E., Choi, C.: On multiplication modules, *Kyungpook Math. J.* 32(5), 97-102 (1992)

16) Kursat Hakan Oral, : Pseudo prime and Pseudo irreducible submodules, World applied sciences journal 9(12), 1350-1352 (2010)

17) Nezhad, R., Naderi, M.: On prime and semiprime submodules of multiplication modules, *Int. J. Math. Math. Sci.* 26, 1257-1266 (2009)

18) Sanh, N., Vu, N., Ahmed, K., Thao, L.: Primeness in Module Category, *Proceedings of international conference on algebra and Geometry in phuket*, 127-137 (2009)

19) Tekir, U.: On multiplication modules, *Int. Math. Forum.* 29, 1415-1420 (2007)

20) Tsi-Yuen Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer Science & Business

21) Yasuyuki Hirano, Edward Poon, and Hisaya Tsutsui, : ON RINGS IN WHICH EVERY IDEAL IS WEAKLY PRIME, *Bull. Korean Math. Soc.* 47 (2010), No. 5, pp. 1077-1087

ภาคผนวก

On $(1,k)$-Prime Ideals

Thawatchai Khumprapussorn

Department of Mathematics, Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,
Bangkok 10520, Thailand
e-mail : thawatchai.kh@kmitl.ac.th

Abstract : In this paper, we study a generalization of prime ideal of a ring R. Let k be a natural number. A proper ideal I of R is called a $(1,k)$-prime ideal of Rif for every left ideal A of R and right ideal B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Note that $I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\}$. Our inspiration come from an observation that a prime number in a ring of integers is equivalent to a prime ideal in a ring. We use only basic knowledge in ring theory to obtain that a prime number power of k in a ring of integers is equivalent with respect to a $(1,k)$-prime ideal in a ring.

Keywords : $(1,k)$-prime ideals, (R,S)-modules, $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodules, $(1,k)$-fully multiplication systems
2010 Mathematics Subject Classification : 13C05, 13C13.

1 Introduction

Let R be a ring and I be an ideal of R. For each a natural number k, we define a set $I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\}$.

It is clearly to see that $I^{\frac{1}{k}} \subseteq I^{\frac{1}{k+1}}$.

Example 1.1. We have $(8\mathbb{Z})^{\frac{1}{2}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \mid x^2\}$ and $(8\mathbb{Z})^{\frac{1}{3}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \mid x^3\}$. Hence $(8\mathbb{Z})^{\frac{1}{2}} \subset (8\mathbb{Z})^{\frac{1}{3}}$ because of $2 \in (8\mathbb{Z})^{\frac{1}{3}}$ but $2 \notin (8\mathbb{Z})^{\frac{1}{2}}$.

In general, $I^{\frac{1}{k}}$ is a proper subset of $I^{\frac{1}{k+1}}$. We show by given the following example.

Example 1.2. Let $a,n \in \mathbb{Z}^+$. We observe that $a \in (a^{n+1}\mathbb{Z})^{\frac{1}{n+1}}$ but $a \notin (a^{n+1}\mathbb{Z})^{\frac{1}{n}}$. This means that $(a^{n+1}\mathbb{Z})^{\frac{1}{n}} \subset (a^{n+1}\mathbb{Z})^{\frac{1}{n+1}}$.

Proposition 1.3. Let R be a ring and I be an ideal of R. For a fixed natural number k, if I satisfies the condition that for all $a,b \in R$,

$$ab^k \in I \text{ implies } a \in I \text{ or } b^k \in I, \tag{1.1}$$

then $I^{\frac{1}{k}} = I^{\frac{1}{k+1}}$.

Proof. It is clear that $I^{\frac{1}{k}} \subseteq I^{\frac{1}{k+1}}$. Assume that the condition (1.1) holds. Next, let $x \in I^{\frac{1}{k+1}}$. Then $x^{k+1} \in I$. Since $xx^k = x^{k+1} \in I$ and our assumption, we have $x \in I$ or $x^k \in I$. All of cases implies that $x^k \in I$. That is $x \in I^{\frac{1}{k}}$.

For each ideal I of a ring R, $Rad(I) = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ for some } n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Proposition 1.4. Let R be a ring and I be an ideal of R. Then $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} I^{\frac{1}{n}} = I$ and $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} I^{\frac{1}{n}} = Rad(I)$. Moreover, if I is a prime ideal of R, then $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} I^{\frac{1}{n}} = I = Rad(I) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} I^{\frac{1}{n}}$.

Proof. It is clear.

Proposition 1.5. Let R be a ring, I be an ideal of R and k be a natural number. Consider the following conditions

(i) For all $a,b \in R$, $ab^k \in I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$

(ii) For all ideals A and B of R, $AB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

Then (i) implies (ii). Moreover, if R is a commutative ring, then (i) is equivalent to (ii).

Proof. Assume (i) holds. Let A and B be ideals of R such that $AB^k \subseteq I$ and $B \not\subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Let $a \in A$ and $b \in B \setminus I^{\frac{1}{k}}$. Then $b \in B$ and $b^k \notin I$. We will see that $ab^k \in AB^k \subseteq I$. By our assumption, we have $a \in I$. Hence $A \subseteq I$.

Next, assume that R is a commutative ring and (ii) holds. Let $a,b \in R$ be such that $ab^k \in I$. Then $(a)_t(b)_t^k = (\mathbb{Z}a + Ra)(\mathbb{Z}b + Rb)^k \subseteq \mathbb{Z}ab^k + Rab^k \subseteq I$.

By (ii), we have $(a)_t \subseteq I$ or $(b)_t \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Hence $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

Example 1.6. Let R be the ring of 2×2 matrices with real number entries and I the singleton set of 2×2 zero matrix. Then I is an ideal of R. Moreover, we observe that $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$. That is, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} \in I^{\frac{1}{2}}$. Since $\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, we have $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} \notin I^{\frac{1}{2}}$. Therefore $I^{\frac{1}{2}}$ may be not close under addition in general.

Proposition 1.7. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. Then

(i) If $x \in I^{\frac{1}{k}}$, then $-x \in I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) If R is a commutative ring and $x \in I^{\frac{1}{k}}$, then $rx \in I^{\frac{1}{k}}$ for all $r \in R$.

Proof. (i) Let $x \in I^{\frac{1}{k}}$. Then $x^k \in I$. The first thing we note here is that $(-x)^k = \begin{cases} x^k & \text{, if } k \text{ is even,} \\ -x^k & \text{, if } k \text{ is odd.} \end{cases}$

. Then $(-x)^k \in I$. Hence $-x \in I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) Assume that R is a commutative ring and $x \in I^{\frac{1}{k}}$. Let $r \in R$.

Since I is an ideal of a commutative ring R, $(rx)^k = r^k x^k \in I$. Hence $rx \in I^{\frac{1}{k}}$.

Let I be an ideal of a ring R and $a \in R \setminus I$. Fix a natural number k, we define a set $(a;I)_k = \{x \in R \mid ax^k \in I\}$.

Proposition 1.8. Let I be an ideal of a ring R, $a \in R \setminus I$ and k be a natural number. If I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5, then $(a;I)_k = I^{\frac{1}{k}}$.

Proof. Assume that I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5. Firstly, let $x \in (a;I)_k$. Then $ax^k \in I$. Since I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5 and $a \notin I$, we have $x^k \in I$. Hence $x \in I^{\frac{1}{k}}$. Conversely, let $x \in I^{\frac{1}{k}}$. Then $x^k \in I$. Since I is an ideal of a ring R, $ax^k \in I$. Therefore $x \in (a;I)_k$.

Let I be an ideal of a ring R. Fix a natural number k and $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$, we define sets $[a^k;I] = \{x \in R \mid a^k x \in I\}$ and $(a^k;I) = \{x \in R \mid xa^k \in I\}$.

Proposition 1.9. Let I be an ideal of a ring R, k be a natural number and $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$. Then

(i) If R is a commutative ring, then $[a^k;I]$ is an ideal of R.
(ii) If I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5, then $(a^k;I) = I$.

Proof. (i) It is clear that $0 \in [a^k;I]$. Hence $[a^k;I]$ is not a empty set. Let $x, y \in [a^k;I]$. Then $a^k x, a^k y \in I$. This implies that $a^k(x-y) = a^k x - a^k y \in I$ Hence $x - y \in [a^k;I]$. Next, let $r \in R$ and $x \in [a^k;I]$. Then $a^k x \in I$. Since I is an ideal of a commutative ring R, we have $a^k rx \in I$. Hence $rx \in [a^k;I]$. This shows that $[a^k;I]$ is an ideal of R.
(ii) Assume that I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5. Let $x \in (a^k;I)$. Then $xa^k \in I$. Since I satisfies the condition (i) of Proposition 1.5 and $a^k \notin I$, we have $x \in I$. Conversely, let $x \in I$. Since I is an ideal of R, $xa^k \in I$. Hence $x \in (a^k;I)$. This implies that $(a^k;I) = I$.

2 $\left(1,k\right)$-Prime ideals

In this section, we introduce a generalization of prime ideals which is called a $\left(1,k\right)$-prime ideal of R where k is a natural number. Four equivalent statments are given as the definition of $\left(1,k\right)$-prime ideals. Characterization of $\left(1,k\right)$-prime ideals of $\mathbb{Z}$ in Proposition 2.4 obtains examples of $\left(1,k\right)$-prime ideals that are not prime ideals. Also, $\left(1,k\right)$-multiplication system is presented as a necessary and sufficient conditions for a proper ideal to be $\left(1,k\right)$-prime ideals.

Lemma 2.1. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. The following statements hold.

(i) For all left ideals A and B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $AR(B)_r^k \subseteq I$.

(ii) For all right ideals A of R and left ideal B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $(A)_l RB^k \subseteq I$.

(iii) For all right ideals A and B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $AR(B)_l^k \subseteq I$.

(iv) For all left ideals A of R and right ideal B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $(A)_r RB^k \subseteq I$.

Proof. (i) Let A and B be left ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$. Then

$$AR(B)_r^k = AR(B+BR)^k \subseteq AR(B^k + B^kR) \subseteq ARB^k + ARB^kR \subseteq I.$$

(ii) Let A be a right ideal of R and B be a left ideal of R such that $ARB^k \subseteq I$. Then $(A)_l RB^k = (A+RA)RB^k \subseteq ARB^k + RARB^k \subseteq I$.

(iii) Let A and B be right ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$. Then

$$AR(B)_l^k = AR(B+RB)^k \subseteq AR(B^k + RB^k) \subseteq ARB^k + ARRB^k \subseteq I.$$

(iv) Let A be a left ideal of R and B be a right ideal of R such that $ARB^k \subseteq I$. Then $(A)_r RB^k = (A+AR)RB^k \subseteq ARB^k + ARRB^k \subseteq I$.

Theorem 2.2. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. The following statements are equivalent.

(i) For all left ideals A of R and right ideals B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) For all left ideals A and B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(iii) For all right ideals A of R and left ideals B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(iv) For all right ideals A and B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

Proof. (i) $\rightarrow$ (ii) Assume that (i) holds and let A and B left ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$. Lemma 2.1 (i) implies that $AR(B)_r^k \subseteq I$. By assumption (i), $A \subseteq I$ or $(B)_r \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Therefore $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) $\rightarrow$ (iii) Assume that (ii) holds and let A be a right ideal of R and B be a left ideal of R such that $ARB^k \subseteq I$. Lemma 2.1 (ii) obtains that $(A)_l RB^k \subseteq I$. By (ii), $(A)_l \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. That is $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(iii) $\rightarrow$ (iv) Assume that (iii) holds and let A and B be right ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$. Lemma 2.1 (iii) yields again that $AR(B)_l^k \subseteq I$. By (iii), we have $A \subseteq I$ or $(B)_l \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Hence $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(iv) $\rightarrow$ (i) Assume that (iv) holds and let A be a left ideal of R and B be a right ideal of R such that $ARB^k \subseteq I$. We use Lemma 2.1 (iv) to obtain that $(A)_r RB^k \subseteq I$. By (iv), we conclude that $(A)_r \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Therefore $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

Recall a basic definition that a proper ideal P of R is called a prime ideal of R if for every left ideal A and B of R such that $AB \subseteq P$ we have $A \subseteq P$ or $B \subseteq P$. Next, we give the notion of $(1,k)$-prime ideal of R which is a generalization of prime ideals.

Definition 2.3. For a fix natural number k. A proper ideal I of a ring R is called **$(1,k)$-prime ideal** of R if I satisfies one of the conditions in Theorem 2.2.

In particular, if $k = 1$, then prime ideals and $(1,1)$-prime ideals coincide. Moreover, every $(1,k)$-prime ideal is a $(1,k+1)$-prime ideal. Notation that for each natural number k, let $N_k = \{1,2,\ldots,k\}$.

Lemma 2.4. Let q be a prime number and r be a natural number. For all integers a and b, if $q^r \mid ab^r$, then $q^r \mid a$ or $q^r \mid b^r$.
Proof. Let a and b be integers such that $q^r \mid ab^r$ and $q^r \nmid a$. Then $q^r t = ab^r$ for some integer t. Since q is a prime number, $q \mid a$ or $q \mid b$. If $q \mid b$, then $q^r \mid b^r$. Assume that $q \mid a$. Let $w = max\{k \in N_r \mid q^k \mid a\}$. There exists an integer f such that $q^w f = a$ and $q \nmid f$. Then $q^r t = ab^r = q^w f b^r$. Hence $q^{r-w} t = fb^r$. This implies that $q \mid b$. Hence $q^r \mid b^r$.

Lemma 2.5. Let q be a prime number and r be a natural number. Then $q^r\mathbb{Z}$ is a $(1,r)$-prime ideal of $\mathbb{Z}$.
Proof. This follows immediately from Lemma 2.4.

We recall the following result from [2].

Proposition 2.6. [2] Let p be an integer. Then $p\mathbb{Z}$ is a $(1,2)$-prime ideal of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$ or p is a prime integer or $p = q^2$ where q is a prime integer.

Now, we show character of $(1,k)$-prime ideals of $\mathbb{Z}$ where k is an arbitrary integer. Notation that for each integer $p_1, p_2, \dots, p_k$, let

$$p_1p_2\cdots\widehat{p_t}\cdots p_k = \begin{cases} p_1p_2\cdots p_{t-1}p_{t+1}\cdots p_k, & \text{if } 1<t<k \\ p_1p_2\cdots p_{k-1}, & \text{if } t=k \\ p_2\cdots p_k, & \text{if } t=1 \end{cases}$$

Proposition 2.7. Let p and k be natural numbers. Then $p\mathbb{Z}$ is a $(1,k)$-prime ideal of $\mathbb{Z}$ if and only if $p=0$ or $p=q^r$ where q is a prime number and $r \in N_k$.

Proof. Assume that $p\mathbb{Z}$ is a $(1,k)$-prime ideal of $\mathbb{Z}$ such that $p \neq 0$ and p is not prime. Hence for each integers a and b, if $p \mid ab^k$, then $p \mid a$ or $p \mid b^k$. Let $p = p_1p_2\cdots p_l$ for some integer $l \geq 2$ and $p_1, p_2, \dots, p_l$ are prime numbers. Let $t \in N_l$. We can see that $p_1p_2\cdots p_l \mid p_1p_2\cdots p_t^k\cdots p_l$. Then $p_1p_2\cdots p_l \mid p_1p_2\cdots\widehat{p_t}\cdots p_l$ or $p_1p_2\cdots p_l \mid p_t^k$. Since $p_1p_2\cdots p_l > p_1p_2\cdots\widehat{p_t}\cdots p_l$, we have $p_1p_2\cdots p_l \mid p_t^k$. This means $p_1p_2\cdots p_l \mid p_i^k$ for all $i \in N_l$. It implies that $p_i \mid p_j$ for all $i,j \in N_l$. Therefore $p_1 = p_2 = \cdots = p_l$. Hence $p = q^l$ where q is a prime number. Suppose that $l > k$. Then $p > q^{l-k}$ and $p > q^k$. Since $p \mid q^{l-k}q^k$, we have $p \mid q^{l-k}$ or $p \mid q^k$ which is a contradiction. Hence $l \leq k$. Therefore $p = q^r$ where q is a prime number and $r \in N_k$.

Theorem 2.8. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. The following statements are equivalent.

(i) For all left ideals A of R and right ideal B of R, $ARB^k \subseteq I$ implies $A \subseteq I$ or $B \subseteq I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) For all $a,b \in R$, $(a)_lR(b)_r^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

Proof. The proof of (i) $\rightarrow$ (ii) is clear. Next, assume that (ii) holds. Let A be a left ideal of R and B be a right ideal of R such that $ARB^k \subseteq I$ and $B \not\subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Then there is an element $b \in B$ such that $b \notin I^{\frac{1}{k}}$. This means $b^k \notin I$. If $a \in A$, then $(a)_lR(b)_r^k \subseteq ARB^k \subseteq I$. Hence $a \in I$.

Corollary 2.9. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. The following statements are equivalent.

(i) For all $a,b \in R$, $(a)_lR(b)_r^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) For all $a,b \in R$, $(a)_lR(b)_l^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

(iii) For all $a,b \in R$, $(a)_rR(b)_l^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

(iv) For all $a,b \in R$, $(a)_rR(b)_r^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

Proof. This follows from Theorem 2.2 and the analogously proof of Theorem 2.8.

Corollary 2.10. Let I be an ideal of a ring R and k be a natural number. The following statements are equivalent.

(i) For all $a,b \in R$, $aR(b)_r^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

(ii) For all $a,b \in R$, $aR(b)_l^k \subseteq I$ implies $a \in I$ or $b \in I^{\frac{1}{k}}$.

Proof. It is easy to see that (i) is equivalent to Corollary 2.9 (i) and the result (ii) is equivalent to Corollary 2.9 (ii).

Theorem 2.11. Let I be a proper ideal of R and k be a natural number. The following statements are equivalent.

(i) For all $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$, $I = \{x \in R \mid xRa^k \subseteq I\}$.

(ii) I is a $(1,k)$-prime ideal of R.

Proof. Assume that $I = \{x \in R \mid xRa^k \subseteq I\}$ for all $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$. Let A and B be left ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$ and $B \not\subseteq I^{\frac{1}{k}}$. If $b \in B$ and $b^k \notin I$, then $aRb^k \subseteq ARB^k \subseteq I$ for all $a \in A$. This implies that $A \subseteq I$.

Conversely, assume that I is a $(1,k)$-prime ideal of R and let $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$. If $x \in I$, then $xRa^k \subseteq I$. It is clear that $\{x \in R \mid xRa^k \subseteq I\}$ contains I. Next, let $x \in R$ with $xRa^k \subseteq I$. Then $xR(a)_l^k = xR(\mathbb{Z}a + Ra)^k \subseteq xR(\mathbb{Z}a^k + Ra^k) \subseteq \mathbb{Z}(xRa^k) + xRa^k \subseteq I$.
This follows from Corollary 2.10 (ii) that $x \in I$. The proof is complete.

Theorem 2.12. Let I be a proper ideal of R and k be a natural number. Consider the following statements.

(i) For all $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$, $(a^k;I) = I$.

(ii) I is a $(1,k)$-prime ideal of R.

Then (i) implies (ii). Furthermore, if R is commutative, then the converse holds.

Proof. Assume that $(a^k;I) = \{x \in R \mid xa^k \in I\} = I$ for all $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$. Let A and B be left ideals of R such that $ARB^k \subseteq I$ and $B \not\subseteq I^{\frac{1}{k}}$. Then there exists an element $b \in B$ and $b^k \notin I$. Let $a \in A$. Then $abb^k \in ARB^k \subseteq I$. Thus $ab \in (b^k;I) = I$ which leads to $ab^k \in I$. Hence $a \in (b^k;I) = I$. This means $A \subseteq I$. Therefore (i) implies (ii). Conversely, assume that R is commutative and I is a $(1,k)$-prime ideal of R. Let $a \in R \setminus I^{\frac{1}{k}}$. If $x \in I$, then $xa^k \in I$. Hence $x \in (a^k;I)$. Next, let $x \in (a^k;I)$. Then $xa^k \in I$. By the same proof of the previous Theorem, $xR(a)_l^k \subseteq I$. Corollary 2.10 (ii) obtains that $x \in I$. Hence $(a^k;I) = I$.

Let R be a ring and k be a natural number. A subset S of R is called a $(1,k)$**-multiplicative system** if

(i) $S \neq \varnothing$ and

(ii) For all $a,b \in R$, if $a \in S$ and $b^k \in S$, then there is an elememt $r \in R$ such that $arb^k \in S$.

Theorem 2.13. Let R be a commutative ring with nonzero identity and I a proper ideal of R. Then I is a $(1,k)$-prime ideal of R if and only if $R \setminus I$ is a $(1,k)$-multiplicative system.

Proof. Firstly, assume that I is a $(1,k)$-prime ideal of R. Let $a,b \in R$ be such that $a \in R \setminus I$ and $b^k \in R \setminus I$. By Corollary 2.9 (i), we have $(a)_l R(b)_r^k \nsubseteq I$. This implies that there is an element $r \in R$ such that $(a)_l r(b)_r^k \nsubseteq I$. If $arb^k \in I$, then $(a)_l R(b)_r^k = (Ra)r(bR)^k = R(arb^k)R \subseteq I$ which is a contradiction. Hence $arb^k \notin I$. Therefore $R \setminus I$ is a $(1,k)$-multiplicative system. Conversely, assume that $R \setminus I$ is a $(1,k)$-multiplicative system. Let $a,b \in R$ be such that $(a)_l R(b)_r^k \subseteq I$. Since R is a commutative ring with an identity, we have $aRb^k \subseteq (Ra)R(Rb)^k = (a)_l R(b)_r^k \subseteq I$. Thus $arb^k \notin R \setminus I$ for all $r \in R$. Since $R \setminus I$ is a $(1,k)$-multiplicative system, $a \notin R \setminus I$ or $b^k \notin R \setminus I$. Hence $a \in I$ or $b^k \in I$. This prove that I is a $(1,k)$-prime ideal of R.

3 (1,k)-Fully prime (R,S)-submodules

From now on, let M be an (R,S)-module, see [1], and k be a fixed natural number. A proper (R,S)-submodule P of M is called $(1,k)$-jointly prime if for each left ideal I of R, right ideal J of S and (R,S)-submodule N of M, $INJ^k \subseteq P$ implies $IMJ^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$. Some properties of $(1,k)$-jointly prime see in [2]. Next, we give the definition of $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodules.

Definition 3.1. A proper (R,S)-submodule P of M is called $(1,k)$**-fully prime** if for each left ideal I of R, right ideal J of S and (R,S)-submodule N of M,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMS^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P \text{ or } RMJ^k \subseteq P$$

We can see that every $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule is a $(1,k)$-jointly prime (R,S)-submodule. Proposition 3.2 show that $(1,k)$-fully prime (R,R)-submodules and $(1,k)$-jointly prime (R,R)-submodules are the same.

Proposition 3.2. Let R be a ring and k a natural number. Then every $(1,k)$-jointly prime (R,R)-submodule of R is a $(1,k)$-fully prime (R,R)-submodule of R.

Proof. Assume that P is a $(1,k)$-jointly prime (R,R)-submodule of R. Let I be a left ideal of R, N be an (R,R)-submodule of R and J be a right ideal of R such that $INJ^k \subseteq P$. This implies that $IRJ^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$. If $IRJ^k \subseteq P$, then $R(IRR^k)J^k = (RI)(RR^k)J^k \subseteq IRJ^k \subseteq P$. Hence $RRJ^k \subseteq P$ or $IRR^k \subseteq P$. Therefore P is $(1,k)$-fully prime.

The next results obtain relation between $(1,k)$-prime ideal and $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule.

Proposition 3.3. Let R be a ring with nonzero identity and k a natural number. Then every $(1,k)$-fully / $(1,k)$ *-jointly* / prime (R,R)-submodule of R is a $(1,k)$-prime ideal of R.

Proof. Assume that P is a $(1,k)$-fully prime (R,R)-submodule of R. Let I and J be left ideals of R such that $IRJ^k \subseteq P$. Since P is $(1,k)$-fully prime and $R \not\subseteq P$, we have $I \subseteq P$ or $J^k \subseteq P$. Hence P is a $(1,k)$-prime ideal of R.

In [1], the study of prime ideals, fully prime (R,R)-submodules and jointly prime (R,R)-submodules, we know that fully prime and jointly prime (R,R)-submodules of R are the same. Especially, if a ring R contains the identity, then prime ideals, fully prime (R,R)-submodules and jointly prime (R,R)-submodules are the same. Also, ideals of the ring R and (R,R)-submodules of R are identical when R is a ring with the identity. However, there are difference between $(1,k)$-prime ideal and $(1,k)$-fully prime given by the following example.

Example 3.4. We can see that $4\mathbb{Z}$ is a $(1,2)$-prime ideal of $\mathbb{Z}$ but $4\mathbb{Z}$ is not a $(1,2)$-fully prime $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodules of $\mathbb{Z}$.

Theorem 3.5. Let M be an (R,S)-module, k be a fixed natural number and P be a proper (R,S)-submodule of M. The following statements are equivalent.

(i) P is a $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule.

(ii) For all left ideals I of R, (R,S)-submodules N of M and left ideals J of S,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMS^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P \text{ or } RMJ^k \subseteq P.$$

(iii) For all right ideals I of R, (R,S)-submodules N of M and left ideals J of S,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMS^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P \text{ or } RMJ^k \subseteq P.$$

(iv) For all right ideals I of R, (R,S)-submodules N of M and right ideals J of S,

$$INJ^k \subseteq P \text{ implies } IMS^k \subseteq P \text{ or } N \subseteq P \text{ or } RMJ^k \subseteq P.$$

Proof. (i) $\rightarrow$ (ii) Assume (i). Let I be a left ideal of R, N be an (R,S)-submodule of M and J be a left ideal of S such that $INJ^k \subseteq P$. Then $I^2N(J)_r^k \subseteq P$. By (i), we have $I^2MS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RM(J)_r^k \subseteq P$. If $I^2MS^k \subseteq P$, then $I(IMS^k)S^k \subseteq I^2MS^k \subseteq P$. By (i), $IMS^k \subseteq P$ or $RMS^k \subseteq P$. This implies that $IMS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

(ii) $\rightarrow$ (iii) Assume (ii). Let I be a right ideal of R, N be an (R,S)-submodule of M and J be a left ideal of S such that $INJ^k \subseteq P$. Then $(I)_l N(J^k)^2 \subseteq P$. By (ii), we have $(I)_l MS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RM(J^k)^2 \subseteq P$. If $RM(J^k)^2 \subseteq P$, then $R\langle RMJ^k\rangle J^k \subseteq P$. By (ii), $RMS^k \subseteq P$ or $\langle RMJ^k\rangle \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$. These lead to $IMS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

(iii) $\rightarrow$ (iv) Assume (iii). Let I be a right ideal of R, N be an (R,S)-submodule of M and J be a right ideal of S such that $INJ^k \subseteq P$. Then $I^2N(J)_l^k \subseteq P$. By (iii), $I^2MS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RM(J)_l^k \subseteq P$. If $I^2MS^k \subseteq P$, then $I\langle IMS^k\rangle S^k \subseteq P$. By (iii), we have $IMS^k \subseteq P$ or $\langle IMS^k\rangle \subseteq P$ or $RMS^k \subseteq P$. This shows that $IMS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

(iv) $\rightarrow$ (i) Assume (iv) Let I be a left ideal of R, N be an (R,S)-submodule of M and J be a right ideal of S such that $INJ^k \subseteq P$. Then $(I)_r N(J^k)^2 \subseteq P$. By (iv), $(I)_r MS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RM(J^k)^2 \subseteq P$. If $RM(J^k)^2 \subseteq P$, then $R\langle RMJ^k\rangle J^k \subseteq P$. It implies from (iv) that $RMS^k \subseteq P$ or $\langle RMJ^k\rangle \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$. We conclude that $IMS^k \subseteq P$ or $N \subseteq P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

Corollary 3.6. Let M be an (R,S)-module, k be a fixed natural number and P be a proper (R,S)-submodule of M. The following statements are equivalent.

(i) P is a $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule.

(ii) For all left ideals I of R, $x \in M$ and right ideals J of S,

$$I\langle x\rangle J^k \subseteq P \text{ implies } IMS^k \subseteq P \text{ or } x \in P \text{ or } RMJ^k \subseteq P.$$

(iii) For all left ideals I of R, $x \in M$ and left ideals J of S,

$I\langle x\rangle J^k \subseteq P$ implies $IMS^k \subseteq P$ or $x \in P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

(iv) For all right ideals I of R, $x \in M$ and left ideals J of S,

$I\langle x\rangle J^k \subseteq P$ implies $IMS^k \subseteq P$ or $x \in P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

(v) For all right ideals I of R, $x \in M$ and right ideals J of S,

$I\langle x\rangle J^k \subseteq P$ implies $IMS^k \subseteq P$ or $x \in P$ or $RMJ^k \subseteq P$.

Proof. This result follows from (ii) is equivalent to Theorem 3.5 (i), (iii) is equivalent to Theorem 3.5 (ii), (iv) is equivalent to Theorem 3.5 (iii) and (v) is equivalent to Theorem 3.5 (iv).

Definition 3.7. Let M be an (R,S)-module and k a natural number. A nonempty set $X \subseteq M \setminus \{0\}$ is called a $(1,k)$**-fully multiplication system** if for each left ideal I of R, right ideal J of S and K, L (R,S)-submodules of M, if $(K + IMS^k) \cap X \neq \varnothing$ and $(K+L) \cap X \neq \varnothing$ and $(K + RMJ^k) \cap X \neq \varnothing$, then $(K + ILJ^k) \cap X \neq \varnothing$.

Theorem 3.8. Let P be a proper (R,S)-submodule of an (R,S)-module M and k be a natural number. Then P is a $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule M if and only if $M \setminus P$ is a $(1,k)$-fully multiplication system.

Proof. It is straightforward.

Proposition 3.9. Let M be an (R,S)-module, P be a proper (R,S)-submodule of M and k be a natural number. Let $X = M \setminus P$. The following statements are equivalent.

(i) P is a $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule of M.

(ii) X is a $(1,k)$-fully multiplication system.

(iii) For all left ideals I of R, right ideals J of S and L (R,S)-submodules of M,

$IMS^k \cap X \neq \varnothing$ and $L \cap X \neq \varnothing$ and $RMJ^k \cap X \neq \varnothing$ imply $ILJ^k \cap X \neq \varnothing$

(iv) For all left ideals I of R, right ideals J of S and $x \in M$,

$IMS^k \cap X \neq \varnothing$ and $\langle x\rangle \cap X \neq \varnothing$ and $RMJ^k \cap X \neq \varnothing$ imply $I\langle x\rangle J^k \cap X \neq \varnothing$

Proof. The proof is obvious.

Theorem 3.10. Let M be an (R,S)-module and k be a natural number. Assume that X is a $(1,k)$-fully multiplication system. If P is a maximal (R,S)-submodule of M respect to the property that $P \cap X = \varnothing$, then P is a $(1,k)$-fully prime (R,S)-submodule of M.

Proof. Assume that let I be a left ideal of R, J a right ideal of S and L an (R,S)-submodule of M such that $(IMS^k) \cap (M \setminus P) \neq \varnothing$, $L \cap (M \setminus P) \neq \varnothing$ and $(RMJ^k) \cap (M \setminus P) \neq \varnothing$. Since P is a maximal (R,S)-submodule of M respect to the property that $P \cap X = \varnothing$, we have that $(P + IMS^k) \cap X \neq \varnothing$,

$(P+L)\cap X \neq \varnothing$ and $(P+RMJ^k)\cap X \neq \varnothing$. Since X is a $(1,k)$-fully multiplication system, $(P+ILJ^k)\cap X \neq \varnothing$. This implies that $ILJ^k \cap (M\setminus P) \neq \varnothing$.

Acknowledgement : I would like to thank the referee(s) for comments and suggestions on the manuscript.

References

[1] T. Khumprapussorn, S. Pianskool and M. Hall, (R,S)-modules and Their Fully prime and Jointly prime Submodules, International Mathematical Forum, 7 (2012) 1631-1643.

[2] T. Khumprapussorn, Generalization of jointly prime (R,S)-submodules, Proceedings of 19th Annual Meeting in Mathematics, (2014) 101-107.

(Received 11 October 2015)
(Accepted 31 January 2016)

ประวัติผู้เขียน

1) ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายธวัชชัย คำประภัสสร
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Thawatchai khumprapussorn
2) เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3101203639019
3) ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
4) หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์
   <u>หน่วยงาน</u> สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520

   <u>ที่อยู่</u> 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120

   <u>E-mail</u> thawatchai.kh@kmitl.ac.th และ khthawat@hotmail.com

   <u>โทร</u> 0898191886
5) ประวัติการศึกษา

   วท.ด (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555

   วท.ม (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550

   วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2547
6) ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา
   กองทุนวิจัยสถาบัน ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่

   เรื่องการวางนัยทั่วไปของ (R,S)-มอดูลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ

   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย

   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี2557

   เรื่องเมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา

   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย