

สมบัติบางประการของคัทโลกัสบนบางพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานลักษณะ
กับระนาบ

SOME PROPERTIES OF CUT LOCUS ON SOME SURFACES OF
REVOLUTION HOMEOMORPHIC TO A PLANE

พิพัฒน์พงษ์ จันทร์ศรี

PIPATPONG CHANSRI

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2558

KMITL-2015-SC-M-001-015

SOME PROPERTIES OF CUT LOCUS ON SOME SURFACES OF
REVOLUTION HOMEOMORPHIC TO A PLANE

PIPATPONG CHANSRI

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENT FOR THE
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2015
KMITL-2015-SC-M-001-015

COPYRIGHT 2015

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์

“สมบัติบางประการของคัทโลกัสบนบางพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมสัณฐานกับ
ระนาบ”

“SOME PROPERTIES OF CUT LOCUS ON SOME SURFACES OF REVOLUTION
HOMEOMORPHIC TO A PLANE”

ชื่อนักศึกษา

นายพิพัฒน์พงษ์ จันทศรี

รหัสประจำตัว

56605055

ปริญญา





วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา

คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร.ภักคินี ชิตสกุล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม (ถ้ามี) -

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
ดร.เดชา สมณะ	
ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ	
ผศ.ดร.บุญญิติ สร้อยแสง	
รศ.ดร.ภักคินี ชิตสกุล	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 9 มิถุนายน พ.ศ.2558 เวลา 16.00-18.00 น.

สถานที่สอบ ห้อง 207 อาคารจุฬารามณ์วิทยาลัยลักษณะ 1 ชั้น 2

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.ตงณี ระเบียบพัฒน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ ๒๙ เดือน มิถุนายน พ.ศ. ๕๘



หัวข้อวิทยานิพนธ์	สมบัติบางประการของคัทโลกส์บนบางพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์กับระนาบ
นักศึกษา	พิพัฒน์พงษ์ จันทร์ศรี
รหัสประจำตัว	56605055
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ภักคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

คัทโลกส์ C_p ของจุด p ใดๆบนพื้นผิว M นิยามโดยเซตของทุกคัทพอยท์ q เมื่อพิจารณาบนเส้นโค้ง γ ที่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวที่มีจุด p เป็นจุดเริ่มต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการนำเสนอสมบัติบางประการของคัทโลกส์บนพื้นผิวรูปทรงใดๆ ซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์กับระนาบ

คำสำคัญ : คัทโลกส์ จีโอเดซิก พื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์กับระนาบ

Thesis Title	Some Properties of Cut Locus on Some Surfaces of Revolution Homeomorphic to a Plane
Student Name	Pipatpong Chansri
Student ID	56605055
Degree	Master of Science
Department	Applied Mathematics
Year	2015
Thesis Advisor	Assoc. Prof.Dr. Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

The cut locus C_p of any point p on a surface M is defined as the set of all the cut points q along a minimal geodesic γ emanating from p on the surface. In this research, we would like to present some properties of cut locus on each surface, which is a surface of revolution homeomorphic to a plane.

Keywords : cut locus, geodesic, a surface of revolution homeomorphic to a plane

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่อง สมบัติบางประการของคัทโลกัสบนบางพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัณฐานกับระนาบ สำเร็จได้ด้วยความรู้และช่วยตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์จนทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอขอบคุณท่านอาจารย์ ดร.เดชา สมณะ ประธานกรรมการสอบที่ช่วยให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ขอขอบคุณท่านอาจารย์ ผศ.ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ กรรมการการสอบที่ช่วยให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ขอขอบคุณท่านอาจารย์ ผศ.ดร.บัญญัติ สร้อยแสง กรรมการการสอบภายนอกที่ช่วยให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์อีกทั้งช่วยตรวจสอบในเรื่องภาษาและแนวคิดใหม่ๆในงานวิจัยเล่มนี้ด้วย

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดาและมารดาที่ช่วยเป็นกำลังใจและเป็นแรงบันดาลใจจนทำให้ผู้วิจัยสามารถทำงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี รวมถึงขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ที่ช่วยเหลืองานในด้านอื่นๆ ไว้ ณ ที่นี้ด้วย

พิพัฒน์พงษ์ จันทร์ศรี

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญรูป.....	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	3
1.6 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.1 สมานสัญญาฐาน.....	4
2.2 พื้นผิว.....	7
2.3 นอร์ม.....	8
2.4 ปริภูมิแบบยุคลิด.....	9
2.5 ระนาบสัมผัส.....	9
2.6 จีออเดซิก.....	10
2.7 พื้นผิวของการหมุนรอบ.....	10
2.8 สมการของออยเลอร์.....	13
2.9 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ.....	14
2.10 สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล.....	20
2.11 ทฤษฎีบทฮอป-รีนอฟ.....	27
2.12 คัทพอยท์และคัทโลกัส.....	28
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	30
3.1 สมการจีออเดซิก.....	30
3.1.1 สมการจีออเดซิกของทรงกระบอก.....	30
3.1.2 สมการจีออเดซิกของทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว.....	33
3.1.3 สมการจีออเดซิกของกรวยกลมตรง.....	36
3.1.4 สมการจีออเดซิกของทรงห้วงยาง.....	40

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2 ค่าความโค้งจีโอเดซิก และค่าความโค้งปกติ.....	43
3.2.1 ทรงกระบอกกลม.....	43
3.2.2 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว.....	46
3.2.3 กรวยกลมตรง.....	50
3.2.4 ทรงห้วงยาง.....	53
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล.....	57
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	65
เอกสารอ้างอิง.....	67
ภาคผนวก.....	69
ประวัติผู้เขียน.....	78

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
รูปที่ 2.1 การส่งแบบต่อเนื่อง.....	7
รูปที่ 2.2 พื้นผิวปรกติ.....	8
รูปที่ 2.3 ระนาบสัมผัส.....	9
รูปที่ 2.4 พื้นผิวของการหมุนรอบ.....	11
รูปที่ 2.5 ทรงกระบอก.....	11
รูปที่ 2.6 กรวยกลมตรง.....	11
รูปที่ 2.7 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว.....	12
รูปที่ 2.8 ทรงห่วย่าง.....	13
รูปที่ 2.9 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ (i)	14
รูปที่ 2.10 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ (ii)	15
รูปที่ 2.11 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ (iii)	15
รูปที่ 2.12 ลักษณะของพื้นผิวที่มีค่าความโค้งเป็นบวกและลบ.....	18
รูปที่ 2.13 สามเวกเตอร์ตั้งฉาก $\alpha'(t), e(u(t), v(t)) \times \alpha'(t)$ และ $e(u(t), v(t))$	18
รูปที่ 2.14 จีออเดซิกที่เชื่อมจุด p และ q สามารถยืดออกไปได้ทั้งสองทิศทาง.....	27
รูปที่ 2.15 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (i)	28
รูปที่ 2.16 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (ii).....	28
รูปที่ 2.17 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (iii).....	29
รูปที่ 3.1 ทรงกระบอก.....	30
รูปที่ 3.2 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว.....	33
รูปที่ 3.3 กรวยกลมตรง.....	36
รูปที่ 3.4 ทรงห่วย่าง.....	40
รูปที่ 4.1 จีออเดซิกบนระนาบ.....	57
รูปที่ 4.2 รูปประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2 (i).....	58
รูปที่ 4.3 รูปประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2 (ii).....	58
รูปที่ 4.4 คัทโลกส์บนทรงกระบอกกลม.....	59
รูปที่ 4.5 คัทโลกส์บนทรงห่วย่าง.....	61
รูปที่ 4.6 ไม่มีคัทโลกส์ของจุดยอดบนกรวยกลมตรง.....	61
รูปที่ 4.7 คัทโลกส์บนกรวยกลมตรง.....	62
รูปที่ 4.8 พาราเลล $u = 0$	63
รูปที่ 4.9 คัทโลกส์บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว.....	64
รูปที่ 5.1 คัทโลกส์บนทรงกระบอก กรวยกลมตรงทรง ไฮเพอร์โบล่า และ ทรงห่วย่าง.....	69

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

วอน แมนโกลด์ (H. von Mangoldt) [5] ได้ทำการกำหนดลักษณะจุดสองจุดใดๆบนพื้นผิวโดยพิจารณาจากลักษณะสมบัติของจีโอเดซิก (geodesic) ที่ผ่านจุดสองจุดนั้น

ถ้าทุกๆ จีโอเดซิกที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดเป็นเส้นที่สั้นที่สุดทุกเส้นจะเรียกจุดสองจุดนั้นว่า จุดจีโอเดซิกรูปแบบที่หนึ่ง มิฉะนั้นจะเรียกจุดสองจุดนั้นว่า จุดจีโอเดซิกรูปแบบที่สอง

แมนโกลด์ได้แสดงให้เห็นว่าจุดทุกจุดบนพื้นผิวที่มีค่าความโค้งเป็นบวกจะมีจีโอเดซิกรูปแบบที่สอง และในกรณีนี้ถ้ามีจุดจีโอเดซิกรูปแบบที่หนึ่งบนพื้นผิวด้วยแล้วเส้นจีโอเดซิกจะไม่เป็นเส้นปิด และจุดทุกจุดจะอยู่ในบริเวณที่จำกัด ซึ่งบริเวณดังกล่าวนี้ได้นำเสนอโดยแมนโกลด์ และบรานมันด์ (Brannmuhl) สำหรับพื้นผิวที่มีดีกรีสอง ที่มีค่าความโค้งเป็นบวก

เนื่องจากพื้นผิวของการหมุนรอบ (surface of revolution) มีสมบัติสมมาตร (symmetry) เมื่อเทียบกับระนาบที่ผ่านแกนหมุน ดังนั้นจะมีจีโอเดซิกสองเส้นที่แตกต่างกัน แต่มีความยาวเท่ากันที่เชื่อมจุดสองจุดที่อยู่ตรงข้ามกัน (Antipodal) บนพื้นผิว ซึ่งคลิงเกนเบิร์ก (Klingenberg) ได้พิสูจน์ว่า ถ้ามีกรณีเช่นนี้แล้วจุดสองจุดนี้จะเป็นคัทพอยท์ซึ่งกันและกัน คัทโลกส์ของจุดใดๆบนพื้นผิว จะนิยามโดยเซตของทุกคัทพอยท์ เมื่อพิจารณาบนจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวนั้น

อ็องรี ปวงกาเร (H. Poincare) [4] เป็นคนแรกที่น่าเสนอทฤษฎีเกี่ยวกับคัทโลกส์บนแมนนิโฟลด์แบบรีมันน์ (Riemannian manifold) หลังจากการนำเสนอของปวงกาเร ได้มีงานวิจัยของ ซัมเนอร์ ไบรอน ไมเออร์ (S. B. Myer) [15] จอห์น เฮอร์ คอนสแตนติน ไวท์เฮด (J. H. C. Whitehead) [7] และ เจมส์ ฮีบดา (J. Hebda) [6] แต่เป็นเรื่องยากมากที่จะพิจารณาโครงสร้างของคัทโลกส์บนแมนนิโฟลด์ หลังจาก ดัก อีเลอร์ธา (D. Elerath) [3] ได้นำเสนอโครงสร้างของคัทโลกส์บนพาราโบลอยด์ (paraboloid) และทรงไฮเพอร์โบล่าแบบสองแผ่น (hyperboloid of two sheet) แล้วโรเบิร์ต ซินแคลร์ ร่วมกับมิโนรุ ทานากะ (R. Sinclair and M. Tanaka) [14] และ จินอิชิ อิโตะร่วมกับคาซุโยชิ คิโยฮาระ (J. Itoh and K. Kiyohara) [8] ได้เสนอคัทโลกส์บนทรงรีทั้งแบบแบนข้าง (prolate) และแบบแบนขั้ว (oblate) ภัคคินี ชิตสกุล (P. Chitsakul) [12],[13] ได้นำเสนอทฤษฎีโครงสร้างของคัทโลกส์บนบางพื้นผิวของการหมุนรอบ จากงานวิจัยบนพื้นผิวกำลังสอง (Quadratic Surfaces) ดังกล่าวนี้นักวิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาสมบัติบางประการของคัทโลกส์บนทรงกระบอกกลม ทรงห่วยางตรง และกรวยกลมตรง ซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์ (Homeomorphic) กับระนาบ (plane)

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

ผู้วิจัยต้องการศึกษาลักษณะสมบัติของคัทโลกัสบนพื้นผิวของการหมุนรอบโดยการพิจารณาสมบัติและลักษณะของจีโอเดซิกบนแต่ละพื้นผิวนั้นๆ ซึ่งจะนำไปใช้อธิบายลักษณะสมบัติของคัทโลกัส ผู้วิจัยต้องการนำเสนอแนวคิดต่างๆ เพื่อที่จะใช้อธิบายลักษณะของจีโอเดซิกและคัทโลกัส ทั้งยังจะแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจีโอเดซิกและคัทโลกัสเมื่อพื้นผิวของการหมุนรอบสมานสัมพันธ์กับระนาบ

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

ในการศึกษาผู้วิจัยตั้งสมมติฐานว่าสามารถนำความรู้ในเรื่องแคลคูลัสของการแปรผันมาอธิบายลักษณะสมบัติของจีโอเดซิกและความรู้ทางเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์มาอธิบายคัทโลกัสบนพื้นผิวการหมุนรอบ นอกจากนี้จะสามารถหาความสัมพันธ์ของเส้นบนพื้นผิวการหมุนรอบที่สามารถแสดงบนระนาบ โดยใช้แนวคิดการผสมผสานระหว่างแคลคูลัสของการแปรผันและเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาทฤษฎีทางแคลคูลัสของการแปรผัน การหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันก้นอล เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์บนพื้นผิวของการหมุนรอบ ทฤษฎีจีโอเดซิก คัทพอยท์และคัทโลกัส ซึ่งจะเป็นความรู้พื้นฐานที่จะนำไปสู่การศึกษาลักษณะสมบัติของจีโอเดซิกและคัทโลกัสบนพื้นผิวของการหมุนรอบ

1.5 ขอบเขตการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาจีโอเดซิกและคัทโลกัสบนพื้นผิวใน \mathbb{R}^3 ที่มีลักษณะเป็นพื้นผิวเรียบ (smooth) แทนด้วย $f(u, v)$ ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ และศึกษาเฉพาะพื้นผิวของการหมุนรอบ ที่มีการหมุนรอบแกน z เท่านั้น และทุกพื้นผิวจัดอยู่ในรูปแบบของสมการอิงตัวแปรเสริม ดังนี้

$$f(u, v) = (r(v) \cos u, r(v) \sin u, z(v))$$

เมื่อ u, v เป็นพารามิเตอร์ของพื้นผิวใดๆ และ $r(v)$ เป็นรัศมีของการหมุนรอบ

1.6 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีจีโอเดซิก เพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัย

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท และข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการทำวิจัย

ขั้นตอนที่ 3 รวบรวมบทนิยามและการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาจีโอเดซิกและคัทโลก์สบน
พื้นผิว

ขั้นตอนที่ 4 พิสูจน์และแสดงการหาจีโอเดซิกและคัทโลก์สบนพื้นผิวของการหมุนรอบ

ขั้นตอนที่ 5 สรุปผลการวิจัย

ขั้นตอนที่ 6 เขียนวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมานสัญญาฐาน (Homeomorphic)

ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน ระหว่างสองปริภูมิโทโพโลยี (topological space) X และ Y จะเรียกว่าสมานสัญญาฐานซึ่งกันและกันถ้า f มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง
2. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
3. ฟังก์ชันผกผันของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 2.1 ทรงกระบอก (cylinder) สมานสัญญาฐานกับทรงห่วงยาง (torus)

พิสูจน์

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงกระบอก คือ $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ เมื่อ $0 \leq u \leq 2\pi$ และ $0 \leq v \leq 2\pi$

และรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงห่วงยาง คือ $Y(t, \theta) = ((1 + \cos t)\cos \theta, (1 + \cos t)\sin \theta, \sin t)$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

พิจารณา $f : X \rightarrow Y$ และ

$$f(\cos u, \sin u, v) = ((1 + \cos v)\cos u, (1 + \cos v)\sin u, \sin v)$$

กำหนดให้ $f(\cos u, \sin u, v) = f(\cos u', \sin u', v')$

นั่นคือ $((1 + \cos v)\cos u, (1 + \cos v)\sin u, \sin v) = ((1 + \cos v')\cos u', (1 + \cos v')\sin u', \sin v')$

จะได้ว่า

$$(1 + \cos v)\cos u = (1 + \cos v')\cos u'$$

$$(1 + \cos v)\sin u = (1 + \cos v')\sin u'$$

$$\sin v = \sin v'$$

เนื่องจาก $0 \leq v \leq 2\pi$ และ $\sin v = \sin v'$ จะได้ว่า

$$v = v'$$

ดังนั้น $(1 + \cos v)\cos u = (1 + \cos v)\cos u'$ นั่นคือ $\cos u = \cos u'$ เนื่องจาก $0 \leq u \leq 2\pi$ จะได้ว่า

$$u = u'$$

จะได้ว่า $(\cos u, \sin u, v) = (\cos u', \sin u', v')$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

และสำหรับทุกๆ $((1 + \cos t)\cos \theta, (1 + \cos t)\sin \theta, \sin t) \in Y$ จะมี $(\cos \theta, \sin \theta, t) \in X$ ซึ่งทำให้

$$f(\cos \theta, \sin \theta, t) = ((1 + \cos t)\cos \theta, (1 + \cos t)\sin \theta, \sin t)$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

พิจารณา $f(\cos u, \sin u, v) = ((1 + \cos v)\cos u, (1 + \cos v)\sin u, \sin v)$ เนื่องจาก

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} f(\cos u, \sin u, v) = f(\cos u_0, \sin u_0, v_0) = ((1 + \cos v_0)\cos u_0, (1 + \cos v_0)\sin u_0, \sin v_0)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

สำหรับฟังก์ชันผกผัน $f^{-1} : Y \rightarrow X$

กำหนด $f^{-1}((1 + \cos v)\cos u, (1 + \cos v)\sin u, \sin v) = (\cos u, \sin u, v)$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} f^{-1}((1 + \cos v)\cos u, (1 + \cos v)\sin u, \sin v) &= f^{-1}((1 + \cos v_0)\cos u_0, (1 + \cos v_0)\sin u_0, \sin v_0) \\ &= (\cos u_0, \sin u_0, v_0) \end{aligned}$$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง □

ตัวอย่าง 2.2 ทรงกระบอกสมานสัณฐานกับระนาบ (plane)

พิสูจน์

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของระนาบคือ $X(s, t) = (x_0 + a_1s + b_1t, y_0 + a_2s + b_2t, z_0 + a_3s + b_3t)$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงกระบอก คือ $Y(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ เมื่อ $u, v \in \mathbb{R}$

พิจารณา $f: X \rightarrow Y$ โดยที่

$$f(\cos u, \sin u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v)$$

กำหนดให้ $f(\cos u, \sin u, v) = f(\cos u', \sin u', v')$ นั่นคือ

$$(x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v) = (x_0 + a_1u' + b_1v', y_0 + a_2u' + b_2v', z_0 + a_3u' + b_3v')$$

จะได้ว่า

$$x_0 + a_1u + b_1v = x_0 + a_1u' + b_1v'$$

$$y_0 + a_2u + b_2v = y_0 + a_2u' + b_2v'$$

$$z_0 + a_3u + b_3v = z_0 + a_3u' + b_3v'$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$u = u', v = v'$$

จะได้ว่า $(\cos u, \sin u, v) = (\cos u', \sin u', v')$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

และสำหรับทุกๆ $(x_0 + a_1s + b_1t, y_0 + a_2s + b_2t, z_0 + a_3s + b_3t) \in X$ จะมี $(\cos s, \sin s, t) \in Y$ ซึ่งทำให้

$$f(\cos s, \sin s, t) = (x_0 + a_1s + b_1t, y_0 + a_2s + b_2t, z_0 + a_3s + b_3t)$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และเนื่องจาก

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} f(\cos u, \sin u, v) = f(\cos u_0, \sin u_0, v_0)$$

$$= (x_0 + a_1u_0 + b_1v_0, y_0 + a_2u_0 + b_2v_0, z_0 + a_3u_0 + b_3v_0)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}: Y \rightarrow X$ กำหนด

$$f^{-1}(x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v) = (\cos u, \sin u, v)$$

เนื่องจาก

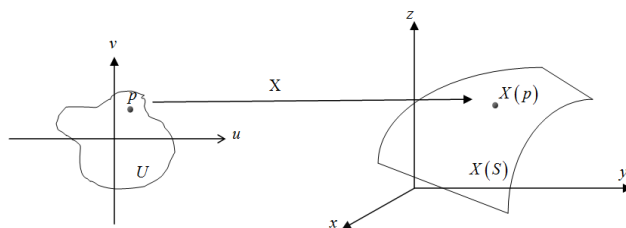
$$\begin{aligned} \lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} f^{-1}(x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v) \\ = f^{-1}(x_0 + a_1u_0 + b_1v_0, y_0 + a_2u_0 + b_2v_0, z_0 + a_3u_0 + b_3v_0) \\ = (\cos u_0, \sin u_0, v_0) \end{aligned}$$

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง □

2.2 พื้นผิว (Surface)

จากความรู้ในเรื่องแคลคูลัส เป็นที่ทราบกันดีว่าพื้นผิวคือกราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร $z = f(x, y)$ และในกรณี $f(x, y, z) = c$ จะเรียกว่า **พื้นผิวระดับ (level surface)** เช่น $x^2 + y^2 + z^2 = c$

นิยาม 2.1 พื้นผิวอิงพารามิเตอร์แบบต่อเนื่อง (Parametrized continuous surface) ใน \mathbb{R}^3 เป็นการส่งแบบต่อเนื่อง $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ เมื่อ $U \subset \mathbb{R}^2$ ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตเปิด



รูปที่ 2.1 การส่งแบบต่อเนื่อง

นิยาม 2.2 สับเซต $S \subset \mathbb{R}^3$ เป็นพื้นผิวปรกติ (regular surface) ถ้าสำหรับแต่ละ $p \in S$ จะมีย่านใกล้เคียง V ใน \mathbb{R}^3 และการส่ง $X:U \rightarrow V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทัวถึง $U \cap S \subset \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้

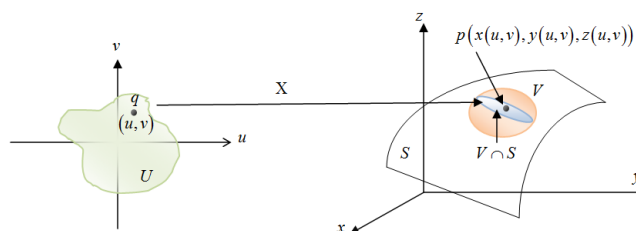
i) X สามารถหาอนุพันธ์ได้ หมายความว่า ถ้าเขียนอยู่ในรูป

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U$$

แล้วฟังก์ชัน $x(u,v), y(u,v)$ และ $z(u,v)$ มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องทุกอันดับใน U

ii) X เป็นสมานสัณฐาน เนื่องจาก X ต่อเนื่องจากเงื่อนไขที่ i) หมายความว่า X มีการส่งแบบผกผัน $X^{-1}:V \cap S \rightarrow U$ ซึ่งต่อเนื่องเช่นกัน

iii) (เงื่อนไขของความสม่ำเสมอ) สำหรับแต่ละ $q \in U$ เชนอนุพันธ์ $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



รูปที่ 2.2 พื้นผิวปรกติ

2.3 นอร์ม (Norm)

กำหนดปริภูมิเวกเตอร์ V บนฟิลด์ย่อย (subfield) F ของจำนวนเชิงซ้อน (complex number) นอร์มบน V เป็นฟังก์ชัน $p:V \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

สำหรับทุกๆ $a \in F$ และทุกๆ $u, v \in V$,

1. $p(av) = \|a\|p(v)$
2. $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$
3. ถ้า $p(v) = 0$ แล้ว v เป็นเวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)

2.4 ปริภูมิแบบยุคลิด (Euclidean space)

นิยาม 2.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วปริภูมิของจำนวนจริงที่มี n มิติ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \mathbb{R}^n หมายถึงเซตของจุดต่างๆ ที่อยู่ในรูปของ $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริง และจะเรียก \mathbb{R}^n เป็นปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ (n - dimensional Euclidean space)

นิยาม 2.4 ถ้า $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ และ $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน \mathbb{R}^n แล้วผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean inner product) นิยามโดย

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n$$

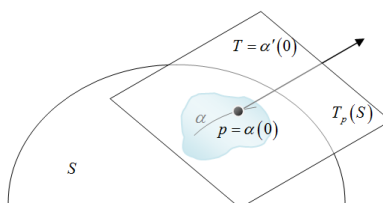
และนอร์ม (Norm) ของเวกเตอร์ u ใน \mathbb{R}^n คือ

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}$$

2.5 ระนาบสัมผัส (Tangent plane)

นิยาม 2.5 ให้ S เป็นพื้นผิวปรกติและสำหรับทุกๆ จุด $p \in S$ แล้วเวกเตอร์สัมผัสกับ S ที่ $p \in S$ เป็นเวกเตอร์ความเร็ว $\alpha'(0)$ ของบางเส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ และ $\alpha(0) = p$

นิยาม 2.6 เซตของทุกๆ เวกเตอร์สัมผัสกับ S ที่ p จะเรียกว่า ระนาบสัมผัส S ที่ p และจะเขียนแทนด้วย $T_p(S)$



รูปที่ 2.3 ระนาบสัมผัส

2.6 จีออเดซิก (Geodesic)

ให้ $\gamma:[a,b]\rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ C^∞ บนพื้นผิว M เส้นโค้ง γ เรียกว่า จีออเดซิกบน M ถ้า $\gamma''(s)$ ตั้งฉากกับปริภูมิสัมผัส $T_{\gamma(s)}M$ หรือขนานกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติ e (จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป) สำหรับแต่ละ $s\in[a,b]$ ถ้า $\gamma:[a,b]\rightarrow M$ เป็นจีออเดซิกบน M แล้ว $\frac{d}{ds}|\gamma'(s)|^2=0$ หรือ $\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ นั่นคือ $\gamma(s)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่

2.7 พื้นผิวของการหมุนรอบ (Surface of revolution)

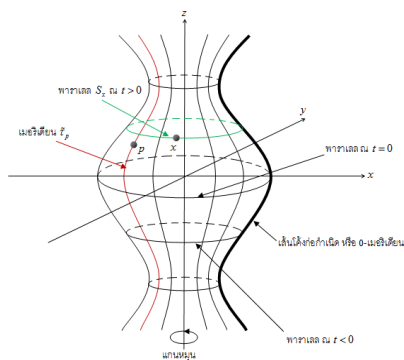
นิยาม 2.7 ให้ M เป็นพื้นผิวในปริภูมิแบบยูคลิด ที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งในระนาบ xz รอบแกน z ให้ γ เป็นเส้นโค้งในระนาบ xz ที่แทนด้วย $x=f(t)$ และ $z=z(t)$ เมื่อ $t\in I$ เป็นพารามิเตอร์ที่แทน ความยาวเส้นโค้ง จะเรียก M ว่าพื้นผิวของการหมุนรอบถ้ารูปแบบอิงพารามิเตอร์ของ M คือ

$$\varphi(t,\theta)=(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, z(t)), (t,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

เมื่อ $t\in I$ และ $\theta\in[0,2\pi)$

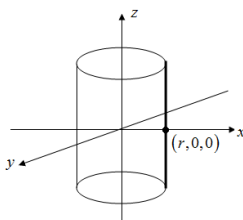
นิยาม 2.8 สำหรับแต่ละจุด x ซึ่ง $x\in M$ ให้ $S_x:\mathbb{R}\rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งเรียบใน M ซึ่ง $S_x(s)=(t(x), s+\theta(x))$ สำหรับแต่ละ s ซึ่ง $s\in\mathbb{R}$ แล้ว เรียก S_x ว่าพาราเลล (parallel) ที่ผ่าน x

นิยาม 2.9 สำหรับแต่ละจุด p ซึ่ง $p\in M$ ให้ $\tilde{\tau}_p:\mathbb{R}\rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งเรียบใน M ซึ่ง $\tilde{\tau}_p(s)=(t(p)+s, \theta(p))$ สำหรับแต่ละ s ซึ่ง $s\in\mathbb{R}$ แล้วเรียก $\tilde{\tau}_p$ ว่าเมอริเดียน (meridian) ที่ผ่านจุด p



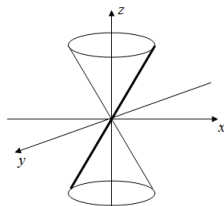
รูปที่ 2.4 พื้นผิวของการหมุนรอบ

ตัวอย่างของพื้นผิวของการหมุนรอบ



รูปที่ 2.5 ทรงกระบอก

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นตรง $(r, 0, t)$ รอบแกน z มีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น $(r \cos \theta, r \sin \theta, t)$ เรียกว่าทรงกระบอก (Cylinder) รูปที่ 2.5



รูปที่ 2.6 กรวยกลมตรง

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นตรง $(r, 0, r)$ รอบแกน z มีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น $(t \cos \theta, t \sin \theta, t)$ เรียกว่ากรวยกลมตรง(Cone) รูปที่ 2.6

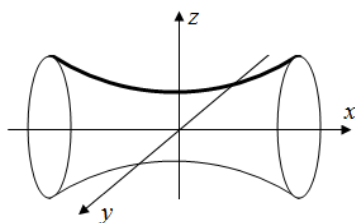
นอกจากนี้ยังสามารถสร้างพื้นผิวของการหมุนรอบแกน x และ y โดย

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \phi(t)$ และ $z = \psi(t)$ รอบแกน x จะมีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น

$$X(t, \theta) = (\phi(t), \psi(t) \cos \theta, \psi(t) \sin \theta)$$

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \phi(t)$ และ $y = \psi(t)$ รอบแกน y จะมีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น

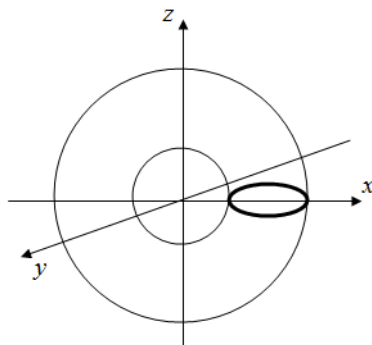
$$X(t, \theta) = (\phi(t) \cos \theta, \psi(t), \phi(t) \sin \theta)$$



รูปที่ 2.7 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $(t, 0, t^2)$ รอบแกน x มีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น $(t, t^2 \cos \theta, t^2 \sin \theta)$

เรียกว่าทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว (hyperboloid of One Sheet) รูปที่ 2.7



รูปที่ 2.8 ทรงห่วงยาง

พื้นผิวที่เกิดจากการหมุนวงกลม $(1 + \cos t, \sin t, 0)$ รอบแกน y มีรูปแบบอิงพารามิเตอร์เป็น $((1 + \cos t) \cos \theta, \sin t, (1 + \cos t) \sin \theta)$ เรียกว่าทรงห่วงยาง (Torus) รูปที่ 2.8

2.8 สมการของออยเลอร์ (Euler equation)

ให้ $F(y, y')$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกำหนด

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x)) dx$$

และ

$$y(a) = A, y(b) = B$$

โดยการหาอนุพันธ์ของ I จะได้

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx \end{aligned}$$

โดยการเทคนิคการหาปริพันธ์แบบแยกส่วนจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx\end{aligned}\quad (1)$$

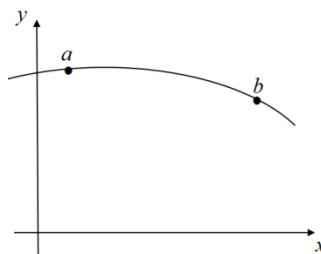
ถ้า $\delta I = 0$ แล้ว I มีค่าสุดขีด และจากสมการ(1) จะได้ว่า $\delta I = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับฟังก์ชัน $F(y, y')$ ที่นิยามบนเซตของ y ที่เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งมีค่าสุดขีดบนฟังก์ชันที่กำหนด แล้ว $F(y, y')$ จะต้องเป็นไปตามสมการของออยเลอร์ ซึ่งกล่าวว่า

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (2)$$

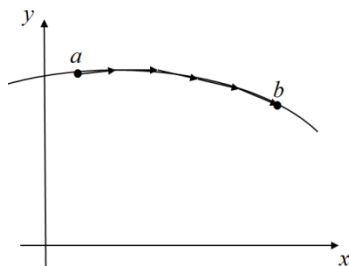
2.9 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ

ในหัวข้อนี้จะคำนวณหาความยาวเส้นโค้ง เริ่มด้วยการกำหนดส่วนโค้ง c และให้จุดสองจุดที่แตกต่างกัน a, b เป็นจุดบนเส้นโค้งที่กำหนดดังรูป



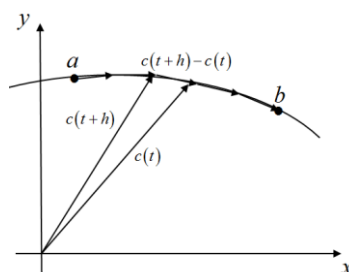
รูปที่ 2.9 ความยาวเส้นโค้งในพื้นผิวปรกติ (i)

จะได้ว่ามีเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน n เวกเตอร์ ที่เชื่อมระยะทางจาก a ไป b



รูปที่ 2.10 ความยาวเส้นโค้งในพื้นที่ปริภูมิ (ii)

โดยขนาดของเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์หาได้จากสูตรการหาเวกเตอร์ลัมป์ ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ความยาวเส้นโค้งในพื้นที่ปริภูมิ (iii)

เนื่องจาก $c(t+h) - c(t) = \frac{c(t+h) - c(t)}{h} h$ และ $h = \Delta t = \frac{b-a}{n}$ เมื่อทำการแบ่งช่วงให้ได้ n ที่มาก

ที่สุดนั่นคือ $n \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $h \rightarrow 0$ นั่นคือ $c(t+h) - c(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \Delta t = c'(t) \Delta t$

พิจารณา $\|c(t+h) - c(t)\| = \|c'(t) \Delta t\| = \|c'(t)\| \Delta t$ จะได้ว่าความยาวในแต่ละช่วงคือ $\|c'(t)\| \Delta t$

นั่นคือความยาวรวมของช่วง a ไป b คือ

$$\text{length}(ab) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|c'(t_i)\| \Delta t = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{c'(t) \cdot c'(t)} dt$$

นิยาม 2.10 กำหนดส่วนโค้ง c บนช่วง $[a, b]$ ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง c กำหนดโดย

$$\text{length}(ab) = L(c) := \int_a^b \sqrt{c'(t) \cdot c'(t)} dt$$

ถ้ารูปแบบของพื้นผิวนิยามโดย

$$\varphi = \varphi(u(t), v(t))$$

และ

$$\varphi'(u(t), v(t)) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$$

แล้วฟังก์ชันความยาวเส้นโค้ง φ บนพื้นผิวคือ

$$\begin{aligned} L &:= \int_a^b \sqrt{\varphi'(t) \cdot \varphi'(t)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(\varphi_u u' + \varphi_v v') \cdot (\varphi_u u' + \varphi_v v')} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\varphi_u u'^2 + \varphi_v v'^2 + 2v'u'\varphi_u \cdot \varphi_v} dt \end{aligned}$$

ให้

$$\varphi_u \cdot \varphi_u = E, \varphi_v \cdot \varphi_v = G, \varphi_u \cdot \varphi_v = F$$

จะได้ว่า

$$L = \int_a^b \sqrt{u'^2 E + v'^2 G + 2u'v'F} dt \quad (3)$$

นิยาม 2.11 จากสมการ (3) โดยการแทน $du = \phi'(t)dt$ และ $dv = \psi'(t)dt$ นิพจน์

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdu^2 \text{ เรียกว่ารูปแบบมูลฐานแบบที่หนึ่ง (First fundamental form)}$$

กำหนดรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวของการหมุนรอบคือ

$$\varphi(t_1, t_2) = (f(t_1)\cos t_2, f(t_1)\sin t_2, z(t_1))$$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ t_1 และ t_2 ได้ว่า

$$\varphi_{t_1}(t_1, t_2) = (f'(t_1)\cos t_2, f'(t_1)\sin t_2, z'(t_1))$$

$$\varphi_{t_2}(t_1, t_2) = (-f(t_1)\sin t_2, f(t_1)\cos t_2, 0)$$

จาก $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdu^2$

โดย $E = \varphi_{t_1}(t_1, t_2) \cdot \varphi_{t_1}(t_1, t_2) = f'(t_1)^2 \cos^2 t_2 + f'(t_1)^2 \sin^2 t_2 + z'(t_1)^2 = f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2$

$$F = \varphi_{t_1}(t_1, t_2) \cdot \varphi_{t_2}(t_1, t_2) = -f(t_1)\sin t_2 f'(t_1)\cos t_2 + f(t_1)\cos t_2 f'(t_1)\sin t_2 = 0$$

$$G = \varphi_{t_2}(t_1, t_2) \cdot \varphi_{t_2}(t_1, t_2) = f(t_1)^2 \sin^2 t_2 + f(t_1)^2 \cos^2 t_2 = f(t_1)^2$$

จะได้ว่า

$$ds^2 = (f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2) dt_1^2 + f(t_1)^2 dt_2^2$$

เรียกสมการนี้ว่า รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน

นิยาม 2.12 สำหรับเส้นโค้ง φ ใดๆ บนพื้นผิวกำหนด $e(u, v)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่นิยามโดย

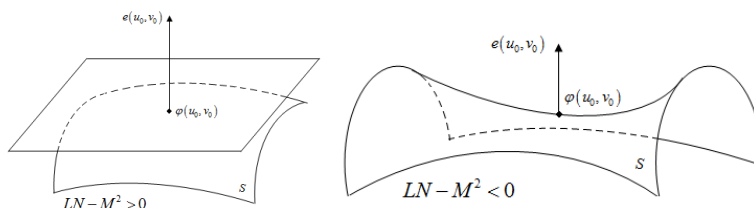
$$e(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

เมื่อ $\varphi_u \times \varphi_v$ เป็นผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product) ของ φ_u กับ φ_v และ $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ คือขนาดของเวกเตอร์ $\varphi_u \times \varphi_v$ แล้วจะเรียก $e(u, v)$ ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติ (the unit normal vector)

นิยาม 2.13 กำหนดฟังก์ชัน L, M และ N นิยามโดย

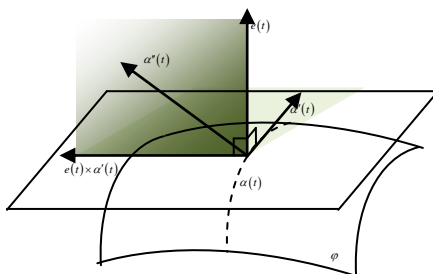
$$L(u, v) := e \cdot \varphi_{uu}(u, v), \quad M(u, v) := e \cdot \varphi_{uv}(u, v), \quad N(u, v) := e \cdot \varphi_{vv}(u, v)$$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $LN - M^2$ เป็นค่าบวก ณ จุด (u_0, v_0) แล้วบริเวณในช่วงเล็กๆ ที่ล้อมรอบ $\varphi(u_0, v_0)$ จะถูกกำหนดขอบเขตโดยระนาบสัมผัส ณ จุด $\varphi(u_0, v_0)$ ดังรูป และถ้า $LN - M^2$ มีค่าเป็นลบ ณ จุด (u_0, v_0) แล้วจุด $\varphi(u_0, v_0)$ จะเป็นจุดอานม้า (saddle point) ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 ลักษณะของพื้นผิวที่มีค่าความโค้งเป็นบวกและลบ

กำหนดเส้นโค้งอัตราเร็วหนึ่งหน่วย $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ เป็นเส้นบนพื้นผิว φ แล้วจะได้ว่า $\alpha'(t)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ณ จุด t บน φ และตั้งฉากกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติ $e(u, v)$ ที่จุดเดียวกัน แล้วจะได้ว่าเวกเตอร์สามเวกเตอร์ $\alpha'(t), e(u(t), v(t)) \times \alpha'(t)$ และ $e(u(t), v(t))$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และเนื่องจาก $\|\alpha'(t)\| = 1$ โดยการหาอนุพันธ์จะได้ว่า $\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = 0$ นั่นคือ $\alpha''(t)$ ตั้งฉากกับ $\alpha'(t)$ (รูปที่ 2.13)



รูปที่ 2.13 สามเวกเตอร์ตั้งฉาก $\alpha'(t), e(u(t), v(t)) \times \alpha'(t)$ และ $e(u(t), v(t))$

ดังนั้นจาก $\alpha'(t), e(u(t), v(t)) \times \alpha'(t)$ และ $e(u(t), v(t))$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ถ้า

$$\alpha''(t) = C_1 \alpha'(t) + C_2 e(u, v) + C_3 e(u, v) \times \alpha'(t)$$

จะได้ว่า

$$\alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = C_1 \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) + C_2 e(u, v) \cdot \alpha'(t) + C_3 e(u, v) \times \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)$$

เนื่องจาก $e(u, v) \cdot \alpha'(t) = (e(u, v) \times \alpha'(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$ และ $\|\alpha'(t)\|^2 = 1$

จะได้ $C_1 = \alpha''(t) \cdot \alpha'(t)$ และในทำนองเดียวกันจะได้ $C_2 = \alpha''(t) \cdot e(u, v)$ และ

$C_3 = \alpha''(t) \cdot (e(u, v) \times \alpha'(t))$ นั่นคือ

$$\alpha''(t) = (\alpha''(t) \cdot \alpha'(t)) \alpha'(t) + (\alpha''(t) \cdot e(u, v)) e(u, v) + (\alpha''(t) \cdot (e(u, v) \times \alpha'(t))) e(u, v) \times \alpha'(t)$$

และเนื่องจาก $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$ จะได้ว่า

$$\alpha''(t) = (\alpha''(t) \cdot e(u, v)) e(u, v) + (\alpha''(t) \cdot (e(u, v) \times \alpha'(t))) e(u, v) \times \alpha'(t)$$

โดยการแทน $\alpha''(t) \cdot e(u, v) = K_n$ และ $\alpha''(t) \cdot (e(u, v) \times \alpha'(t)) = K_g$ สิ่งที่ได้ก็คือ

$$\alpha''(t) = K_n e(u, v) + K_g e(u, v) \times \alpha'(t)$$

นิยาม 2.14 ฟังก์ชัน $K_n(t_0)$ และ $K_g(t_0)$ จะเรียกว่าเป็นค่าความโค้งปกติ (normal curvature) และค่าความโค้งจีโอเดสิก (geodesic curvature) ของเส้นโค้ง α บนพื้นผิว φ ณ จุด t_0 ถ้าฟังก์ชันทั้งสองนิยามโดย

$$K_n(t) = \alpha''(t) \cdot n(t), K_g(t) = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$$

เมื่อ $n(t) = e(u(t), v(t)) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปกติ

ทฤษฎีบท 2.3 เส้นโค้งอัตราเร็วคงที่ α เป็นจีโอเดสิกบนพื้นผิว φ ก็ต่อเมื่อ ค่าความโค้งจีโอเดสิกมีค่าเป็น 0

พิสูจน์ กำหนดเส้นโค้งอัตราเร็วคงที่ α บนพื้นผิว φ และค่าความโค้งจีโอเดสิกนิยามโดย

$$K_g(t) = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$$

ถ้า $\alpha(t)$ เป็นจีโอเดสิก ตามนิยามจะได้ว่า $\alpha''(t)$ ขนานกับ $n(t)$ จะได้ว่า α'' ทำมุมตั้งฉากกับ $n(t) \times \alpha'(t)$ นั่นคือทำให้ $\alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t)) = 0$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนด $\alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t)) = 0$ โดยที่ $\alpha''(t) \neq 0$ จะได้ว่า $\alpha''(t)$ ทำมุมตั้งฉากกับ $n(t) \times \alpha'(t)$ และเนื่องจาก $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = c$ จะได้ว่า $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$ นั่นคือ $\alpha'(t) \perp \alpha''(t)$ ทำให้ $\alpha''(t)$ ขนานกับ $\alpha'(t) \times (n(t) \times \alpha'(t))$ จะได้ว่า α'' ขนานกับ $n(t)$ \square

2.10 สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล (Christoffel symbols)

กำหนด $u_1 := u, u_2 := v, \varphi_i := \varphi_{u_i}, \varphi_{ij} := \varphi_{u_i u_j}, (i=1,2)$ และ $e(u,v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ เป็นเวกเตอร์ตั้ง

ฉากหนึ่งหน่วย จาก $\{x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), e(u_1, u_2)\}$ เป็นฐานหลักของ \mathbb{R}^3 แล้ว $x_{ij}(u_1, u_2)$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ฐานหลักทั้งสามได้ ดังนั้นมีฟังก์ชัน $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}(i, j, k=1,2)$ ซึ่งทำให้

$$\varphi_{ij}(u_1, u_2) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(u_1, u_2) x_k(u_1, u_2) + h_{ij}(u_1, u_2) \cdot e(u_1, u_2)$$

เป็นจริง โดยที่

$$h_{11} = L(u, v) = e \cdot \varphi_{uu}(u, v), h_{12} = h_{21} = M(u, v) = e \cdot \varphi_{uv}(u, v), h_{22} = N(u, v) = e \cdot \varphi_{vv}(u, v)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการเกาส์ (Gauss equation) และฟังก์ชัน Γ_{ij}^k เรียกว่าสัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล

นิยาม 2.15 $g_{ij} := x_i \cdot x_j (i, j=1,2)$

นิยาม 2.16 $g^{ij} := (g_{ij})^{-1}$ โดยที่ g^{ij} แทนส่วนประกอบ (i, j) ของอินเวอร์สของเมทริกซ์ $(g_{ij})^{-1}$

ทฤษฎีบท 2.4 จะมีจำนวนนับ $i, j, k = (1, 2)$ ซึ่งทำให้

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

เมื่อ $g_{ij,l} = \frac{\delta}{\delta u_l} g_{ij}$ และ Γ_{ij}^k อยู่ในรูป g_{ij} และอนุพันธ์ของ g_{ij}

พิสูจน์ จาก

$$g_{il} = x_i \cdot x_l$$

หาอนุพันธ์เทียบ j จะได้

$$g_{il,j} = x_{ij} \cdot x_l + x_i \cdot x_{lj}$$

โดยสมการของเกาส์ จะได้

$$\begin{aligned} g_{il,j} &= \left(\sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k x_k + h_{ij} \cdot e \right) \cdot x_l + x_i \cdot \left(\sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{lj}^k x_k + h_{lj} \cdot e \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k x_k \cdot x_l + h_{ij} e \cdot x_l + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{lj}^k x_k \cdot x_i + h_{lj} e \cdot x_i \\ &= \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k x_k \cdot x_l + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{lj}^k x_k \cdot x_i \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$g_{il,j} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ik})$$

เนื่องจาก $g_{il} = x_i \cdot x_l = x_l \cdot x_i = g_{li}$ จะได้ว่า

$$g_{jl,i} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ji}^k g_{kl} + \Gamma_{li}^k g_{jk})$$

ในการทำงานเดียวกันจะได้ว่า

$$g_{ji,l} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{jl}^k g_{ki} + \Gamma_{il}^k g_{jk})$$

จากนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} &= \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ik}) + \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ji}^k g_{kl} + \Gamma_{li}^k g_{lk}) - \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{jl}^k g_{ki} + \Gamma_{il}^k g_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{lj}^k) g_{kl} + \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ji}^k + \Gamma_{li}^k) g_{kl} - \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{jl}^k + \Gamma_{il}^k) g_{jk} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ และ $x_{ij} = x_{ji}$ จะได้ว่า

$$g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{lk}$$

คูณด้วย g^{lm} ตลอดสมการ และผลรวมแปรไปตาม l นั่นคือ

$$2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \sum_{l=1}^2 g^{lm} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

เมื่อ

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

กำหนดเส้นโค้งจีโอเดซิก

$$\alpha(s) = \varphi(t_1(s), t_2(s))$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร s จะได้ว่า

$$\alpha'(s) = \varphi_1(t_1(s), t_2(s)) t_1'(s) + \varphi_2(t_1(s), t_2(s)) t_2'(s)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s)$$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ $\alpha(s)$ เทียบตัวแปร s จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \varphi_{12}(t_1(s), t_2(s)) t_1'(s) t_2'(s) + \varphi_{11}(t_1(s), t_2(s)) t_1'(s)^2 + \varphi_1(t_1(s), t_2(s)) t_1''(s) \\ &+ \varphi_{21}(t_1(s), t_2(s)) t_1'(s) t_2'(s) + \varphi_{22}(t_1(s), t_2(s)) t_2'(s)^2 + \varphi_2(t_1(s), t_2(s)) t_2''(s) \end{aligned}$$

จากสมการเกาส์

$$\varphi_{ij}(t_1(s), t_2(s)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{ij}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s))$$

จะได้ว่า

$$\varphi_{11}(t_1(s), t_2(s)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{11}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s))$$

$$\varphi_{12}(t_1(s), t_2(s)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{12}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s))$$

$$\varphi_{21}(t_1(s), t_2(s)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{21}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s))$$

$$\varphi_{22}(t_1(s), t_2(s)) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{22}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s))$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{11}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s)) \right) t_1'(s) t_2'(s) \\ &+ \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{12}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s)) \right) t_1'(s)^2 \\ &+ \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{21}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s)) \right) t_1'(s) t_2'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) + h_{22}(t_1(s), t_2(s)) e(t_1(s), t_2(s)) \right) t_2'(s)^2 \\
& + \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t_1(s), t_2(s)) t_i''(s)
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t_1(s), t_2(s)) t_i''(s) + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) \\
& + \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) e(t_1(s), t_2(s))
\end{aligned}$$

ถ้า α เป็นจีโอเดซิกจะได้ว่า $\alpha' \cdot \alpha'' = 0$ และเนื่องจาก $e(t_1(s), t_2(s)) \cdot \alpha' = 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\alpha' \cdot \alpha'' &= \left(\sum_{i=1}^2 \varphi_i(t_1(s), t_2(s)) t_i''(s) + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) \right) \cdot \alpha' \\
& + \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) e(t_1(s), t_2(s)) \cdot \alpha' = 0 \\
& = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t_1(s), t_2(s)) t_i''(s) + \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t_1(s), t_2(s)) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) = 0.
\end{aligned}$$

จะได้

$$\sum_{k=1}^2 \left(t_k''(s) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t_1(s), t_2(s)) t_i'(s) t_j'(s) \right) \varphi_k(t_1(s), t_2(s)) = 0$$

สิ่งที่ตามมาจะได้เป็นบทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 2.1 ให้ $\alpha(s) = \alpha(t_1(s), t_2(s))$ เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ แล้ว α เป็นจีโอเดซิกก็ต่อเมื่อ α เป็นไปตามสมการ

$$t_i''(s) + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(t_1(s), t_2(s)) t_j'(s) t_k'(s) = 0, (i=1,2)$$

กำหนดรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวของการหมุนรอบ

$$\gamma((t(s), \theta(s))) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, t)$$

จะได้ว่า

$$g_{11} = E = f'^2(t) + 1, \quad g_{12} = g_{21} = F = 0, \quad g_{22} = G = f^2(t)$$

โดยสัญลักษณ์คริสทอฟเฟิลจะได้ว่า

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} (g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{12} (g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})) = \frac{1}{2} \frac{1}{f'^2(t) + 1} (2f'(t)f''(t))$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} (g^{11} (g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) + g^{12} (g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2})) = \frac{1}{2} \frac{1}{f'^2(t) + 1} (-2f(t)f'(t))$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} (g^{11} (g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) + g^{12} (g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2})) = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} (g^{11} (g_{21,1} + g_{11,2} - g_{21,1}) + g^{12} (g_{22,1} + g_{12,2} - g_{21,2})) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} (g^{21} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + g^{22} (g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2})) = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} (g^{21} (g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) + g^{22} (g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2})) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} (g^{21} (g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) + g^{22} (g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2})) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} (g^{21} (g_{21,1} + g_{11,2} - g_{21,1}) + g^{22} (g_{22,1} + g_{12,2} - g_{21,2})) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

จาก บทแทรก 2.1 จะได้ว่า

$$t''(s) + \frac{f'(t)f''(t)}{f'^2(t)+1}t'^2 - \frac{f(t)f'(t)}{f'^2(t)+1}\theta'^2 = 0 \quad (4)$$

$$\theta''(s) + \frac{f'(t)}{f(t)}t'\theta' + \frac{f'(t_1)}{f(t_1)}t'\theta' = 0 \quad (5)$$

เรียกสมการนี้ว่าสมการจีโอเดซิกของพื้นผิวของการหมุนรอบ

จาก

$$\theta''(s) + 2\frac{f'(t)}{f(t)}t'\theta' = 0$$

$$f^2(t)\theta''(s) + 2f(t)f'(t)t'\theta' = 0$$

$$d(f^2(t)\theta'(s)) = 0$$

ดังนั้นสำหรับ s ใดๆ ซึ่ง $s \in [a, b]$ จะมีค่าคงที่ v ซึ่ง

$$f^2(t)\theta'(s) = v$$

สำหรับ s ใดๆ ซึ่ง $s \in [a, b]$ ค่าคงที่ v เรียกว่าค่าคงที่แกลโล (Clairaut constant) สำหรับจีโอเดซิก $\gamma(s)$

จากสมการจีโอเดซิก (4) และ (5) สิ่งที่ได้ตามมาคือประพจน์ดังต่อไปนี้

ประพจน์ 1 [3,5] พาราเลลที่ผ่านจุด $p_0 = (t_0, \theta_0)$ ในพื้นผิว M เป็นจีโอเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(t_0) = 0$

พิสูจน์ ให้พาราเลลที่ผ่านจุด p_0 นิยามโดย

$$t(s) = t(p_0) \text{ และ } \theta(s) = s + \theta(p_0)$$

สำหรับ s ใดๆ ซึ่ง $s \in \mathbb{R}$ สมมติพาราเลลเป็นจีโอเดซิก ดังนั้นพาราเลลเป็นไปตามสมการ (4) และ (5)

จะได้ $-f(t(s_0))f'(t(s_0)) = 0$ เนื่องจาก $f(t) > 0$ ใน $(0, \infty)$ ใน M ดังนั้น $f'(t(s_0)) = 0$

ในทางตรงข้าม สมมติ $f'(t(s_0))=0$ ดังนั้นพาราเลลเป็นไปตามสมการจีโอเดซิก

นั่นคือมีบางพาราเลลเป็นจีโอเดซิกในพื้นที่ผิว M ก็ต่อเมื่อ $f'(t(s_0))=0$ \square

ประพจน์ 2 [3,5] ทุกๆเมอริเดียนในพื้นที่ผิว M เป็นจีโอเดซิกและค่าคงที่แกลโรของเมอริเดียนเป็นศูนย์เสมอ

พิสูจน์ ให้ $\tau: \mathbb{R} \rightarrow M$ เป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์ความยาวเส้นโค้งของเมอริเดียน ดังนั้นมีค่าคงที่ $s_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

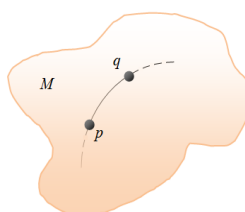
$$\tau(s) = (s + s_0, \theta_0)$$

สำหรับ s ใดๆ ซึ่ง $s \in \mathbb{R}$ จะได้ $t(\tau(s)) = s + s_0$ และ $\theta(\tau(s)) = \theta_0$ ดังนั้นจาก (4) และ (5) จะได้ว่า τ เป็นไปตามสมการจีโอเดซิกนั่นคือ เมอริเดียนใน M เป็นจีโอเดซิก และเนื่องจาก $\theta'(s) = 0$ จะได้ $\nu = 0$ นั่นคือ ค่าคงที่ของแกลโรของเมอริเดียนเป็นศูนย์ \square

ประพจน์ 3 [1,2,4] เส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด

2.11 ทฤษฎีบทฮอป-รีนอฟ (Hopf-Rinow Theorem)

ให้ M เป็นแมนิโฟลด์แบบรีมันด์ที่เชื่อมโยงอย่างบริบูรณ์ (complete connected Riemannian manifold) สำหรับแต่ละคู่ของจุด p และ q ที่อยู่บน M แล้ว p และ q สามารถเชื่อมด้วยจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด และทุกๆ จีโอเดซิกบน M สามารถยืดออกไปได้ทั้งสองทิศทาง



รูปที่ 2.14 จีโอเดซิกที่เชื่อมจุด p และ q สามารถยืดออกไปได้ทั้งสองทิศทาง

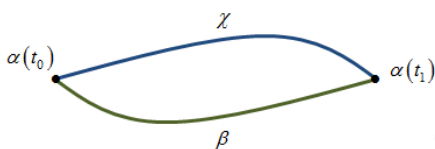
2.12 คัทพอยท์และคัทโลกัส (Cut point and Cut locus)

ให้ $\gamma|_{[a,t_1]}$ เป็นจีโอเดสิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วยที่สั้นที่สุด ที่ออกมาจากจุด $p := \gamma(0)$ บนพื้นผิว เชื่อมโยงสมบูรณ์ (complete connected surface) M ถ้ามีทุกจำนวน t_2 ซึ่ง $t_2 > t_1$ และ ทุกๆ จีโอเดสิกที่ยืดออก $\gamma|_{[0,t_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดสิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไป แล้วเรียก $\gamma(t_1)$ ว่าคัทพอยท์ของ p ตาม γ

คัทโลกัสของ p แทนด้วย C_p เป็นเซตของทุกๆ คัทพอยท์ตามจีโอเดสิกที่สั้นที่สุดที่ออกมาจาก p

บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (Klingenberg Lemma) ถ้าจุด p และจุด q เชื่อมด้วยสองจีโอเดสิกที่สั้นที่สุด α และ β แล้ว q เป็นคัทพอยท์ของ p ตาม α และ q เป็นคัทพอยท์ของ p ตาม β

พิสูจน์ ให้ α และ β เป็นจีโอเดสิกที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุด $p = \alpha(t_0)$ และ $q = \alpha(t_1)$

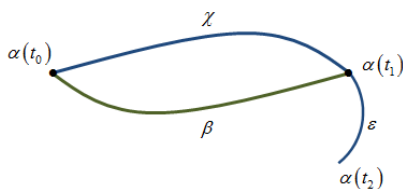


รูปที่ 2.15 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (i)

ต้องการแสดงว่า q เป็นคัทพอยท์ของ p ตาม α

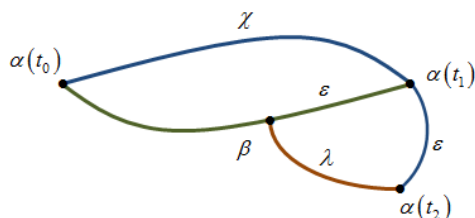
จะพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง โดยสมมติ q ไม่เป็นคัทพอยท์ของ p

ทำการยืดเส้นจากจุด $q = \alpha(t_1)$ ไปยังจุด $\alpha(t_2)$ เป็นระยะทาง ε



รูปที่ 2.16 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (ii)

ลากเส้น λ จาก $\alpha(t_2)$ ไปยังจุดบน β โดยให้อยู่ในย่าน ε รอบจุด $\alpha(t_1)$



รูปที่ 2.17 รูปประกอบการพิสูจน์บทตั้งคณิณเบิร์ก (iii)

จากอสมการสามเหลี่ยมจะได้ว่า

$$2\varepsilon > l(\lambda)$$

แต่เนื่องจาก

$$l(\alpha) = l(\beta)$$

ดังนั้น

$$l(\alpha) + 2\varepsilon > l(\lambda) + l(\beta)$$

$$l(\alpha) + \varepsilon > l(\beta) - \varepsilon + l(\lambda)$$

แสดงว่า เมื่อยึดเส้นจาก $\alpha(t_1)$ ไปถึง $\alpha(t_2)$ แล้ว เส้นที่เชื่อม $\alpha(t_0)$ และ $\alpha(t_2)$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไป แล้ว $\alpha(t_1)$ เป็นคัทพอยท์ของ $\alpha(t_0)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดว่า $\alpha(t_1)$ ไม่เป็นคัทพอยท์ของ $\alpha(t_0)$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\alpha(t_1)$ เป็นคัทพอยท์ของ $\alpha(t_0)$ ตาม β

นั่นคือถ้ามีสองจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดเชื่อมจุดคู่เดียวกันแล้วจุดสองจุดนั้นจะเป็นคัทพอยท์ซึ่งกันและกัน \square

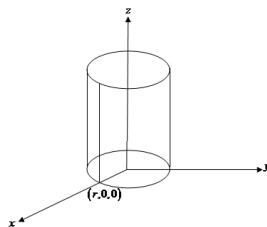
บทที่ 3

วิธีการดำเนินงานวิจัย

เพื่อที่จะศึกษาศัพท์โลกัส จึงจำเป็นต้องอธิบายสมการจืออเดซิกของบางพื้นผิวของการหมุนรอบ โดยใช้ประโยชน์จากรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวนั้นๆ รวมทั้งค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจืออเดซิกของเส้นบนพื้นผิว

3.1 สมการจืออเดซิก

3.1.1 สมการจืออเดซิกของทรงกระบอก



รูปที่ 3.1 ทรงกระบอก

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงกระบอกนั้นเป็นไปตามสมการ

$$x(u, v) = r \cos v$$

$$y(u, v) = r \sin v$$

$$z(u, v) = u$$

โดยการจัดให้อยู่ในรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน

$$ds^2 = (f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2) dt_1^2 + f(t_1)^2 dt_2^2$$

เมื่อกำหนด $f(u) = r$ และ $z(u) = u$

จะได้ว่า $f'(u) = 0$ และ $z'(u) = 1$

นั่นคือ

$$ds^2 = (1) du^2 + (r)^2 dv^2$$

เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงกระบอก

จะได้ว่าฟังก์ชันความยาวของทรงกระบอกคือ

$$s = \int \sqrt{u'^2 + r^2 v'^2} dt$$

ต่อมานิยามฟังก์ชัน $F(x)$ ด้วย

$$F(x) = \sqrt{u'^2 + r^2 v'^2}$$

เพื่อที่จะหาค่าขีดสุดของฟังก์ชัน จากสมการออยเลอร์

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

เมื่อกำหนด $y = v$ และ $y = v'$ จะได้ว่า

$$F_v = 0 \text{ และ } F_{v'} = \frac{r^2 v'}{F}$$

จากสมการออยเลอร์จะได้

$$\frac{d}{dx} \frac{r^2 v'}{F} = 0$$

$$\frac{r^2 v'}{F} = \alpha$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่ใดๆ

ต่อมาเราจะพิจารณาสมการ

$$\frac{r^2 v'}{F} = \alpha$$

$$r^4 v'^2 = \alpha^2 F^2 = \alpha^2 (u'^2 + r^2 v'^2)$$

$$r^4 v'^2 = \alpha^2 u'^2 + \alpha^2 r^2 v'^2$$

$$r^4 v'^2 - \alpha^2 r^2 v'^2 = \alpha^2 u'^2$$

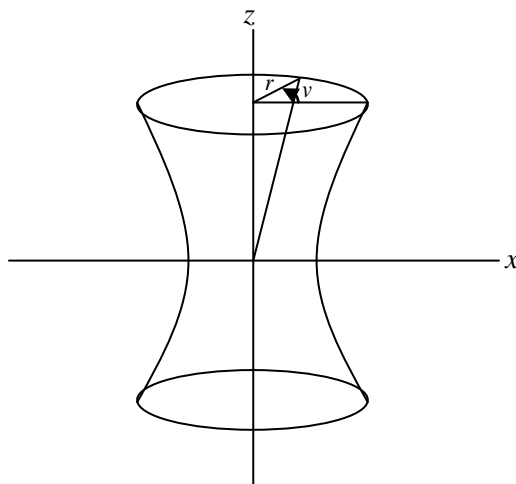
$$(r^4 - \alpha^2 r^2) v'^2 = \alpha^2 u'^2$$

$$v'^2 = \frac{\alpha^2 u'^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)}$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$\begin{aligned} v &= \int \sqrt{\frac{\alpha^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)}} du \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)}} u \end{aligned}$$

3.12 สมการพารามิเตอร์ของทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว



รูปที่ 3.2 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงไฮเพอร์โบล่านั้นเป็นไปตามสมการ

$$x(u, v) = a\sqrt{1+u^2} \cos v = r \cos v$$

$$y(u, v) = a\sqrt{1+u^2} \sin v = r \sin v$$

$$z(u, v) = bu$$

โดยการจัดให้อยู่ในรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน

$$ds^2 = (f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2) dt_1^2 + f(t_1)^2 dt_2^2$$

เมื่อกำหนด $f(u) = a\sqrt{1+u^2}$ และ $z(u) = bu$

จะได้ว่า $f'(u) = \frac{au}{\sqrt{1+u^2}}$ และ $z'(u) = b$

นั่นคือ

$$ds^2 = \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) du^2 + \left(a\sqrt{1+u^2} \right)^2 dv^2$$

เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว

จะได้ว่าฟังก์ชันความยาวของทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวคือ

$$s = \int \sqrt{\left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2 + \left(a\sqrt{1+u^2} \right)^2 v'^2} dt$$

ต่อมานิยามฟังก์ชัน $F(x)$ ด้วย

$$F(x) = \sqrt{\left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2 + \left(a\sqrt{1+u^2} \right)^2 v'^2}$$

เพื่อที่จะหาค่าขีดสุดของฟังก์ชัน จากสมการออยเลอร์

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

เมื่อกำหนด $y = v$ และ $y = v'$ จะได้ว่า

$$F_v = 0 \text{ และ } F_{v'} = \frac{2a^2(1+u^2)v'}{F}$$

จากสมการออยเลอร์จะได้

$$\frac{d}{dx} \frac{2a^2(1+u^2)v'}{F} = 0$$

$$\frac{a^2(1+u^2)v'}{F} = \alpha$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่ใดๆ

ต่อมาเราจะพิจารณาสมการ

$$\frac{a^2(1+u^2)v'}{F} = \alpha$$

$$(a^2(1+u^2)v')^2 = \alpha^2 F^2 = \alpha^2 \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2 + (a\sqrt{1+u^2})^2 v'^2$$

$$(a^2(1+u^2)v')^2 = \alpha^2 \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2 + \alpha^2 (a\sqrt{1+u^2})^2 v'^2$$

$$a^4(1+u^2)^2 v'^2 - \alpha^2 (a\sqrt{1+u^2})^2 v'^2 = \alpha^2 \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2$$

$$\left(a^4(1+u^2)^2 - \alpha^2 (a\sqrt{1+u^2})^2 \right) v'^2 = \alpha^2 \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2$$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{1}{\left(a^4(1+u^2)^2 - \alpha^2 (a\sqrt{1+u^2})^2 \right)} \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 + b^2 \right) u'^2$$

จาก $r = a\sqrt{1+u^2}$ จะได้ว่า $r' = \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} u'$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{1}{(r^4 - \alpha^2 r^2)} \left(\left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2 u'^2 + b^2 u'^2 \right)$$

$$v'^2 = \alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} (r'^2 + b^2 u'^2)$$

$$v'^2 = \alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} \left(r'^2 + b^2 \left(\frac{r^2}{a^2(r^2 - a^2)} \right) r'^2 \right)$$

$$v'^2 = \alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} \left(1 + b^2 \left(\frac{r^2}{a^2(r^2 - a^2)} \right) \right) r'^2$$

$$v' = \sqrt{\alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} \left(1 + b^2 \left(\frac{r^2}{a^2 (r^2 - a^2)} \right) \right)} r'$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

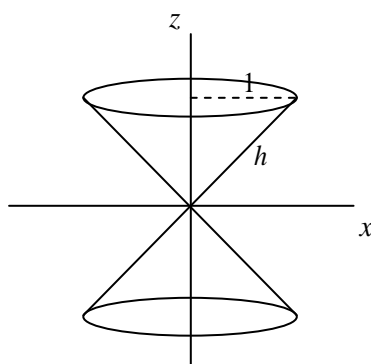
$$u = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$$

$$v = \int \sqrt{\alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} \left(1 + b^2 \left(\frac{r^2}{a^2 (r^2 - a^2)} \right) \right)} dr$$

โดยการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม Mathematica จะได้

$$v = r \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}} \sqrt{\frac{\alpha \left(\frac{b^2 r^2}{\alpha^2 (r^2 - a^2)} + 1 \right)}{r^4 - \alpha r^2}} \times \\ \left(-(\alpha^2 + b^2) \sqrt{\frac{\alpha - r^2}{\alpha - \alpha^2}} (r^2 - \alpha^2) F \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{\alpha - r^2}{\alpha - \alpha^2}} \right) \right) - \dots + c$$

3.13 สมการจีโอเดซิกของกรวยกลมตรง



รูปที่ 3.3 กรวยกลมตรง

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของกรวยกลมตรงนั้นเป็นไปตามสมการ

$$x(u, v) = \frac{h-u}{h} \cos v = r \cos v$$

$$y(u, v) = \frac{h-u}{h} \sin v = r \sin v$$

$$z(u, v) = u$$

โดยการจัดให้อยู่ในรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน

$$ds^2 = (f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2) dt_1^2 + f(t_1)^2 dt_2^2$$

เมื่อกำหนด $f(u) = \frac{h-u}{h}$ และ $z(u) = u$

จะได้ว่า $f'(u) = \frac{-1}{h}$ และ $z'(u) = 1$

นั่นคือ

$$ds^2 = \left(\left(\frac{1}{h} \right)^2 + 1 \right) du^2 + \left(\frac{h-u}{h} \right)^2 dv^2$$

เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของกรวยกลมตรง

จะได้ว่าฟังก์ชันความยาวของกรวยกลมตรงแบบขึ้นเดียวคือ

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{1}{h^2} + 1 \right) u'^2 + \frac{(h-u)^2}{h^2} v'^2} dt$$

ต่อมานิยามฟังก์ชัน $F(x)$ ด้วย

$$F(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{h^2} + 1 \right) u'^2 + \frac{(h-u)^2}{h^2} v'^2}$$

เพื่อที่จะหาค่าขีดสุดของฟังก์ชัน จากสมการออยเลอร์

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

เมื่อกำหนด $y = v$ และ $y = v'$ จะได้ว่า

$$F_v = 0 \text{ และ } F_{v'} = \frac{(h-u)^2 v'}{h^2 F}$$

จากสมการออยเลอร์จะได้

$$\frac{d}{dx} \frac{(h-u)^2 v'}{h^2 F} = 0$$

$$\frac{(h-u)^2 v'}{h^2 F} = \alpha$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่ใดๆ

ต่อมาเราจะพิจารณาสมการ

$$\frac{(h-u)^4 v'^2}{h^4 F^2} = \alpha^2$$

$$\frac{\frac{(h-u)^4}{h^4} v'^2}{\left(\frac{1}{h^2} + 1\right) u'^2 + \frac{(h-u)^2}{h^2} v'^2} = \alpha^2$$

$$\frac{(h-u)^4}{h^4} v'^2 = \alpha^2 \left(\left(\frac{1}{h^2} + 1\right) u'^2 + \frac{(h-u)^2}{h^2} v'^2 \right)$$

$$\frac{(h-u)^4}{h^4} v'^2 - \alpha^2 \frac{(h-u)^2}{h^2} v'^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{h^2} + 1\right) u'^2$$

$$\left(\frac{(h-u)^4}{h^4} - \alpha^2 \frac{(h-u)^2}{h^2} \right) v'^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{h^2} + 1\right) u'^2$$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\left(\frac{1}{h^2} + 1\right)u'^2}{\left(\frac{(h-u)^4}{h^4} - \alpha^2 \frac{(h-u)^2}{h^2}\right)}$$

จาก $r = \frac{h-u}{h}$ จะได้ว่า $r' = \frac{-1}{h}u'$ เมื่อนำไปแทนในสมการ $v'^2 = \alpha^2 \frac{\left(\frac{1}{h^2} + 1\right)u'^2}{\left(\frac{(h-u)^4}{h^4} - \alpha^2 \frac{(h-u)^2}{h^2}\right)}$ จะได้

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\left(\frac{u'^2}{h^2} + u'^2\right)}{\left(r^4 - \alpha^2 r^2\right)}$$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\left(r'^2 + r'^2 h^2\right)}{\left(r^4 - \alpha^2 r^2\right)}$$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\left(1+h^2\right)}{\left(r^4 - \alpha^2 r^2\right)} r'^2$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

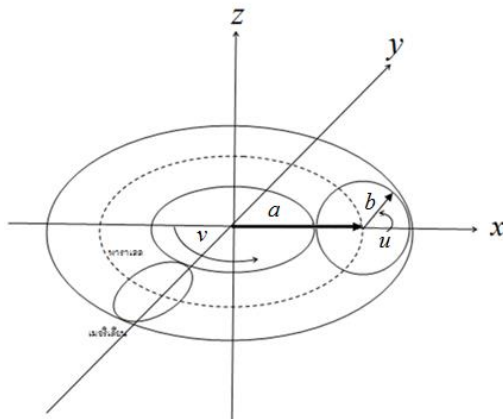
$$u = h(1-r)$$

$$v = \alpha \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(1+h^2)}{(r^2 - \alpha^2)}} dr$$

โดยการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม Mathematica จะได้

$$v = -\frac{i\sqrt{r^2 - \alpha^2} \sqrt{\frac{-h^2 - 1}{\alpha^2 - r^2}} \left(\log(2) - \log\left(\frac{\sqrt{r^2 - \alpha^2} - i\alpha}{r}\right) \right)}{\alpha} + c$$

3.1.4 สมการพารามิเตอร์ของทรงห่วงยาง



รูปที่ 3.4 ทรงห่วงยาง

รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงห่วงยางนั้นเป็นไปตามสมการ

$$x(u, v) = (a + b \cos u) \cos v$$

$$y(u, v) = (a + b \cos u) \sin v$$

$$z(u, v) = b \sin u$$

โดยการจัดให้อยู่ในรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน

$$ds^2 = (f'(t_1)^2 + z'(t_1)^2) dt_1^2 + f(t_1)^2 dt_2^2$$

เมื่อกำหนด $f(u) = (a + b \cos u)$ และ $z(u) = b \sin u$

จะได้ว่า $f'(u) = -b \sin u$ และ $z'(u) = b \cos u$

นั่นคือ

$$ds^2 = ((b \sin u)^2 + (b \cos u)^2) du + (a + b \cos u)^2 dv$$

เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพาราโบลอยแบบขึ้นเดียว

จะได้ว่าฟังก์ชันความยาวของพาราโบลอยแบบขึ้นเดียวคือ

$$s = \int \sqrt{b^2 u'^2 + (a + b \cos u)^2 v'^2} dt$$

ต่อมานิยามฟังก์ชัน $F(x)$ ด้วย

$$F(x) = \sqrt{b^2 u'^2 + (a + b \cos u)^2 v'^2}$$

เพื่อที่จะหาค่าขีดสุดของฟังก์ชัน จากสมการออยเลอร์

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

เมื่อกำหนด $y = v$ และ $y = v'$ จะได้ว่า

$$F_v = 0 \text{ และ } F_{v'} = \frac{(a + b \cos u)^2 v'}{F}$$

จากสมการออยเลอร์จะได้

$$\frac{d}{dx} \frac{(a + b \cos u)^2 v'}{F} = 0$$

$$\frac{(a + b \cos u)^2 v'}{F} = \alpha$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$\text{ต่อมาเราจะพิจารณาสมการ } \frac{(a + b \cos u)^2 v'}{F} = \alpha$$

$$(a + b \cos u)^4 v'^2 = \alpha^2 F^2 = \alpha^2 (b^2 u'^2 + (a + b \cos u)^2 v'^2)$$

$$(a + b \cos u)^4 v'^2 = \alpha^2 b^2 u'^2 + \alpha^2 (a + b \cos u)^2 v'^2$$

$$(a + b \cos u)^4 v'^2 - \alpha^2 (a + b \cos u)^2 v'^2 = \alpha^2 b^2 u'^2$$

$$\left((a+b\cos u)^4 - \alpha^2(a+b\cos u)^2\right)v'^2 = \alpha^2 b^2 u'^2$$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\alpha^2 b^2 u'^2}{\left((a+b\cos u)^4 - \alpha^2(a+b\cos u)^2\right)}$$

กำหนด $r = a + b\cos u$ หรือ $u = \cos^{-1} \frac{r-a}{b}$ จะได้ว่า $u' = \frac{-1}{b\sqrt{1-\left(\frac{r-a}{b}\right)^2}} r'$

$$v'^2 = \alpha^2 \frac{\alpha^2 b^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)} \frac{r'^2}{\left(1 - \left(\frac{r-a}{b}\right)^2\right)}$$

$$v'^2 = \frac{\alpha^2 b^2 r'^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)(b^2 - (r-a)^2)}$$

$$v'^2 = \frac{\alpha^2 b^2 r'^2}{r^2 (r^2 - \alpha^2)(b^2 - (r-a)^2)}$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$v = \int \sqrt{\frac{\alpha^2 b^2 r'^2}{r^2 (r^2 - \alpha^2)(b^2 - (r-a)^2)}} dr, u = \cos^{-1} \frac{r-a}{b}$$

และโดยการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม Mathematica จะได้

$$v = -\frac{1}{a^2 b} 2r(2a+b)(a-r)^2 \sqrt{\frac{a(a+r-r)}{(2a+b)(a-r)}} \sqrt{\frac{b(a+r)}{(2a+b)(a-r)}} \sqrt{\frac{a(-a+b+r)}{(2a+b)(a-r)}} \times$$

$$\sqrt{-\frac{a^2 b^2}{r^2 (r^2 - a^2)(a^2 - 2ar - b^2 + r^2)}} \left(F \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{b(a+r)}{(2a+b)(a-r)}} \right) \right) + c$$

3.2 ค่าความโค้งจีโอเดซิก และค่าความโค้งปกติ

ในหัวข้อนี้จะทำการหาค่าความโค้งจีโอเดซิกและค่าความโค้งปกติของเส้นโค้งบนบางพื้นผิวของการหมุนรอบโดยการพิจารณาจากรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวนั้นๆ

3.2.1 ทรงกระบอกกลม

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นตรง (เมอริเดียน) $\alpha = (1, 0, t)$ บนรูปทรง ทรงกระบอก $\sigma = (\cos u, \sin u, v)$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นตรงจะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = (0, 0, 1)$$

$$\alpha'' = (0, 0, 0)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$

จะได้ว่า

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (\cos u, \sin u, 0)$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$(1, 0, t) = (\cos u, \sin u, v)$$

นั่นคือ $u = 0, v = t$ จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (1, 0, 0)$$

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, 0)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (0, 0, 0)$ จะได้ว่า

$$k_n = (0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดซิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของวงกลม (พาราเลล)

$$\alpha = (\cos t, \sin t, 1) \text{ บนรูปทรง ทรงกระบอก } \sigma = (\cos u, \sin u, v)$$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งปกติของวงกลม จะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\alpha'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$

จะได้ว่า

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (\cos u, \sin u, 0)$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$(\cos t, \sin t, 1) = (\cos u, \sin u, v)$$

นั่นคือ $u = t, v = 1$

จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (\cos t, \sin t, 0)$$

และ

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ จะได้ว่า

$$k_n = (-\cos t, -\sin t, 0) \cdot (\cos t, \sin t, 0) = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดซิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$ จะได้ว่า

$$k_g = (-\cos t, -\sin t, 0) \cdot (0, 0, 1) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

ต่อมาจะพิจารณาฮีลิคซ์ (Helix) $\alpha = (\cos t, \sin t, t)$ บนทรงกระบอกกลม $\sigma = (\cos u, \sin u, v)$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \alpha' &= (-\sin t, \cos t, 1) \\ \alpha'' &= (-\cos t, -\sin t, 0) \end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$(\cos t, \sin t, t) = (\cos u, \sin u, v)$$

นั่นคือ $u = t = v$ จะได้

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (\cos t, \sin t, 0)$$

และเนื่องจาก

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right) = (\sin t, -\cos t, 1)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ จะได้ว่า

$$k_n = (-\cos t, -\sin t, 0) \cdot (\sin t, -\cos t, 1) = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดสิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$ จะได้ว่า

$$k_g = (-\cos t, -\sin t, 0) \cdot (\sin t, -\cos t, 1) = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

3.2.2 ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว

ต่อไปนี้จะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดสิกของพาราเลล

$$\alpha = (\sqrt{1+a^2} \cos t, \sqrt{1+a^2} \sin t, a) \text{ บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว}$$

$$\sigma = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, u)$$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติค่าความโค้งจีโอเดสิกของพาราเลลจะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = (-\sqrt{1+a^2} \sin t, \sqrt{1+a^2} \cos t, 0)$$

$$\alpha'' = (-\sqrt{1+a^2} \cos t, -\sqrt{1+a^2} \sin t, 0)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = \left(\frac{2u \cos v}{2\sqrt{1+u^2}}, \frac{2u \sin v}{2\sqrt{1+u^2}}, 1 \right)$$

$$\sigma_v = (-\sqrt{1+u^2} \sin v, \sqrt{1+u^2} \cos v, 0)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sigma_u \times \sigma_v &= \left(\begin{vmatrix} \frac{u \sin v}{\sqrt{1+u^2}} & 1 \\ \sqrt{1+u^2} \cos v & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{u \cos v}{\sqrt{1+u^2}} & 1 \\ -\sqrt{1+u^2} \sin v & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{u \cos v}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{u \sin v}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\sqrt{1+u^2} \sin v & \sqrt{1+u^2} \cos v \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(-\sqrt{1+u^2} \cos v, -\sqrt{1+u^2} \sin v, u \right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$\left(\sqrt{1+a^2} \cos t, \sqrt{1+a^2} \sin t, a \right) = \left(\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, u \right)$$

นั่นคือ $u = a, v = t$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}n(t) &= \frac{\sigma_{u(t)} \times \sigma_{v(t)}}{\|\sigma_{u(t)} \times \sigma_{v(t)}\|} = \frac{\left(-\sqrt{1+a^2} \cos t, -\sqrt{1+a^2} \sin t, a \right)}{\sqrt{\left((1+a^2) \cos^2 t + (1+a^2) \sin^2 t + a^2 \right)}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \cos t, -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{1+2a^2}} \right)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}n(t) \times \alpha'(t) &= \left(\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \sin t & \frac{a}{\sqrt{1+2a^2}} \\ \sqrt{1+a^2} \cos t & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \cos t & \frac{a}{\sqrt{1+2a^2}} \\ -\sqrt{1+a^2} \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \cos t & -\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \sin t \\ -\sqrt{1+a^2} \sin t & \sqrt{1+a^2} \cos t \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(-\frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \cos t, -\frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \sin t, -\frac{(1+a^2)}{\sqrt{1+2a^2}} \right)\end{aligned}$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก

$$\alpha'' = \left(-\sqrt{1+a^2} \cos t, -\sqrt{1+a^2} \sin t, 0 \right) \text{ จะได้ว่า}$$

$$\begin{aligned}
k_n &= \left(-\sqrt{1+a^2} \cos t, -\sqrt{1+a^2} \sin t, 0\right) \cdot \left(-\frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \cos t, -\frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+2a^2}} \sin t, -\frac{(1+a^2)}{\sqrt{1+2a^2}}\right) \\
&= \frac{1+a^2}{\sqrt{1+2a^2}} a \cos^2 t + \frac{1+a^2}{\sqrt{1+2a^2}} a \sin^2 t = \frac{a(1+a)^2}{\sqrt{1+2a^2}}
\end{aligned}$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดซิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = \frac{1+a^2}{\sqrt{1+2a^2}} a \cos^2 t + \frac{1+a^2}{\sqrt{1+2a^2}} a \sin^2 t = \frac{a(1+a^2)}{\sqrt{1+2a^2}}$$

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของเมอริเดียน $\alpha = (\sqrt{1+t^2}, 0, t)$

บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว $\sigma = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, u)$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติค่าความโค้งจีโอเดซิกของเมอริเดียนจะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 0, 1\right) \\
\alpha'' &= \left(\frac{\sqrt{1+t^2} - t \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}, 0, 0\right) = \left(\frac{1+t^2 - t^2}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}, 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}, 0, 0\right)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = \left(\frac{2u \cos v}{2\sqrt{1+u^2}}, \frac{2u \sin v}{2\sqrt{1+u^2}}, 1\right)$$

$$\sigma_v = \left(-\sqrt{1+u^2} \sin v, \sqrt{1+u^2} \cos v, 0\right)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sigma_u \times \sigma_v &= \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{u \sin v}{\sqrt{1+u^2}} & 1 \\ \sqrt{1+u^2} \cos v & 0 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{u \cos v}{\sqrt{1+u^2}} & 1 \\ -\sqrt{1+u^2} \sin v & 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{u \cos v}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{u \sin v}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\sqrt{1+u^2} \sin v & \sqrt{1+u^2} \cos v \end{array} \right| \right) \\ &= \left(-\sqrt{1+u^2} \cos v, -\sqrt{1+u^2} \sin v, u \right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$\left(\sqrt{1+t^2}, 0, t \right) = \left(\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, u \right)$$

นั่นคือ $u = t, v = 0$

จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_{u(t)} \times \sigma_{v(t)}}{\|\sigma_{u(t)} \times \sigma_{v(t)}\|} = \frac{\left(\sqrt{1+t^2}, 0, t \right)}{\sqrt{(1+t^2+t^2)}} = \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}}, 0, t \right)$$

และ

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\left| \begin{array}{cc} 0 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}} & t \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}} & 0 \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 0 \end{array} \right| \right) = \left(0, \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}}, 0 \right)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}, 0, 0 \right)$

จะได้ว่า

$$k_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}}, 0, t \right) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2} \sqrt{1+t^2} (1+t^2)}$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดซิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}, 0, 0 \right) \cdot \left(0, \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+2t^2}}, 0 \right) = 0$$

3.2.3 กรวยกลมตรง

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดสิกของเมอริเดียน

$$\alpha = \left(\frac{h-t}{h}, 0, t \right) \text{ บนรูปทรงกรวยกลม } \sigma = \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u, \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u, v \right)$$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติค่าความโค้งจีโอเดสิกของเมอริเดียนจะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = \left(\frac{-1}{h}, 0, 1 \right)$$

$$\alpha'' = (0, 0, 0)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = \left(-\left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u, \left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u, 0 \right)$$

$$\sigma_v = \left(\frac{-1}{h} \cos u, \frac{-1}{h} \sin u, 1 \right)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u \begin{vmatrix} \left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u \begin{vmatrix} -\left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u \begin{vmatrix} \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u & \left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u, \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u, 0 \right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{h-t}{h}, 0, t\right) = \left(\left(\frac{h-v}{h}\right)\cos u, \left(\frac{h-v}{h}\right)\sin u, v\right)$$

นั่นคือ $u=0, v=t$ จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{\left(\frac{h-v}{h}, 0, 0\right)}{\sqrt{\left(\frac{h-v}{h}\right)^2 + 0 + 0}} = (1, 0, 0)$$

และ

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \left(0, \frac{1}{h}, 0\right)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (0, 0, 0)$ จะได้ว่า

$$k_n = (0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดซิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = (0, 0, 0) \cdot \left(0, \frac{1}{h}, 0\right) = 0$$

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของพาราเลล

$$\alpha = \left(\frac{h-a}{h}\cos t, \frac{h-a}{h}\sin t, a\right) \text{ บนรูปทรงกรวยกลม } \sigma = \left(\left(\frac{h-v}{h}\right)\cos u, \left(\frac{h-v}{h}\right)\sin u, v\right)$$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติค่าความโค้งจีโอเดซิกของพาราเลลจะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = \left(-\frac{h-a}{h}\sin t, \frac{h-a}{h}\cos t, 0\right)$$

$$\alpha'' = \left(-\frac{h-a}{h}\cos t, -\frac{h-a}{h}\sin t, 0\right)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = \left(-\left(\frac{h-v}{h}\right)\sin u, \left(\frac{h-v}{h}\right)\cos u, 0 \right)$$

$$\sigma_v = \left(\frac{-1}{h}\cos u, \frac{-1}{h}\sin u, 1 \right)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} \sin u & 1 \end{vmatrix}, - \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} \cos u & 1 \end{vmatrix}, - \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u \begin{vmatrix} \left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u & \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u \\ \frac{-1}{h} \cos u & \frac{-1}{h} \sin u \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u, \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u, \frac{h-v}{h^2} \right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{h-a}{h} \cos t, \frac{h-a}{h} \sin t, a \right) = \left(\left(\frac{h-v}{h} \right) \cos u, \left(\frac{h-v}{h} \right) \sin u, v \right)$$

นั่นคือ $u = t, v = a$ จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{\left(\left(\frac{h-a}{h} \right) \cos t, \left(\frac{h-a}{h} \right) \sin t, \frac{h-a}{h^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{h-a}{h} \right)^2 + \left(\frac{h-a}{h^2} \right)^2}} = \frac{\left(\cos t, \sin t, \frac{1}{h} \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{h^2}}}$$

และ

$$\begin{aligned}
n(t) \times \alpha'(t) &= \left(\begin{vmatrix} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} & \frac{1}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \\ \frac{h-a}{h} \cos t & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} & \frac{1}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \\ -\frac{h-a}{h} \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} & \frac{\sin t}{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \\ \frac{h-a}{h} \sin t & \frac{h-a}{h} \cos t \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{h-a}{h} \cos t}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{\frac{h-a}{h} \sin t}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{\frac{h-a}{h}}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \right) = \left(\frac{(h-a) \cos t}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{(h-a) \sin t}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{(h-a)}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \right)
\end{aligned}$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = \left(-\frac{h-a}{h} \cos t, -\frac{h-a}{h} \sin t, 0 \right)$

จะได้ว่า

$$k_n = \left(-\frac{h-a}{h} \cos t, -\frac{h-a}{h} \sin t, 0 \right) \cdot \frac{\left(\cos t, \sin t, \frac{1}{h} \right)}{\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} = \frac{(h-a)}{h\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดสิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = \left(-\frac{h-a}{h} \cos t, -\frac{h-a}{h} \sin t, 0 \right) \cdot \left(\frac{(h-a) \cos t}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{(h-a) \sin t}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}, \frac{(h-a)}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}} \right) = \frac{(h-a)}{h^2 \sqrt{1+\frac{1}{h^2}}}$$

3.2.4 ทรงห่วยยาง

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดสิกของเมอริเดียน

$$\alpha = (2 \cos t, 2 \sin t, 0) \quad \text{บนทรงห่วยยาง} \quad \sigma = ((1 + \cos u) \cos v, (1 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดสิกของเมอริเดียน จะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\alpha' = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$$

$$\alpha'' = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0)$$

เนื่องจาก

$$\sigma_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$$

$$\sigma_v = (-(1 + \cos u) \sin v, (1 + \cos u) \cos v, 0)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \left(\begin{vmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \\ (1 + \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & \cos u \\ -(1 + \cos u) \sin v & 0 \end{vmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & -\sin u \sin v \\ -(1 + \cos u) \sin v & (1 + \cos u) \cos v \end{vmatrix} \right) \\ &= (-(1 + \cos u) \cos v \sin u, (1 + \cos u) \sin v \cos u, -(1 + \cos u) \sin u) \end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$(2 \cos t, 2 \sin t, 0) = ((1 + \cos u) \cos v, (1 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

นั่นคือ $u = 0, v = t$ จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(0, \sin t, 0)}{\sqrt{0 + \sin^2 t + 0}} = (0, 1, 0)$$

จะได้ว่า

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cos t & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 \sin t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 2 \sin t)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0)$ จะได้ว่า

$$k_n = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0) \cdot \frac{(-\cos t, -\sin t, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos^2 t + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin^2 t + 0 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดสิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = (-2 \cos t, -2 \sin t, 0) \cdot (0, 0, 2 \sin t) = 0$$

ต่อไปจะเป็นการคำนวณหาค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของพาราเลล $\alpha = (0, 1 + \cos t, \sin t)$ บนทรงห้วงยาง $\sigma = ((1 + \cos u) \cos v, (1 + \cos u) \sin v, \sin u)$

ในการคำนวณค่าความโค้งปกติและค่าความโค้งจีโอเดซิกของพาราเลล จะเริ่มด้วยการหาค่า α' และ α''

$$\begin{aligned}\alpha' &= (0, -\sin t, \cos t) \\ \alpha'' &= (0, -\cos t, -\sin t)\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\sigma_u &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\ \sigma_v &= (-(1 + \cos u) \sin v, (1 + \cos u) \cos v, 0)\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sigma_u \times \sigma_v &= \left(\begin{vmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \\ (1 + \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & \cos u \\ -(1 + \cos u) \sin v & 0 \end{vmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & -\sin u \sin v \\ -(1 + \cos u) \sin v & (1 + \cos u) \cos v \end{vmatrix} \right) \\ &= (-(1 + \cos u) \cos v \sin u, (1 + \cos u) \sin v \cos u, -(1 + \cos u) \sin u)\end{aligned}$$

เนื่องจาก α เป็นเส้นกราฟที่อยู่บน σ โดยความสัมพันธ์ $\alpha = \sigma$ จะได้ว่า

$$(0, 1 + \cos t, \sin t) = ((1 + \cos u) \cos v, (1 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

นั่นคือ $u = \frac{\pi}{2}, v = t$ จะได้ว่า

$$n(t) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(0, (1 + \cos t) \cos t, -(1 + \cos t) \sin t)}{\sqrt{(1 + \cos t)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)}} = (0, \cos t, -\sin t)$$

จะได้ว่า

$$n(t) \times \alpha'(t) = \left(\begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -\cos t \\ 0 & -\sin t \end{vmatrix} \right) = (-1, 0, 0)$$

ในการหาค่าความโค้งปกติ k_n คำนวณได้จากสูตร $k_n = \alpha'' \cdot n$ เนื่องจาก $\alpha'' = (0, -\cos t, -\sin t)$ จะได้ว่า

$$k_n = (0, -\cos t, -\sin t) \cdot (0, \cos t, -\sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

ในขณะเดียวกันในการหาค่าความโค้งจีโอเดสิก k_g คำนวณได้จากสูตร $k_g = \alpha''(t) \cdot (n(t) \times \alpha'(t))$

จะได้ว่า

$$k_g = (0, -\cos t, -\sin t) \cdot (1, 0, 0) = 0$$

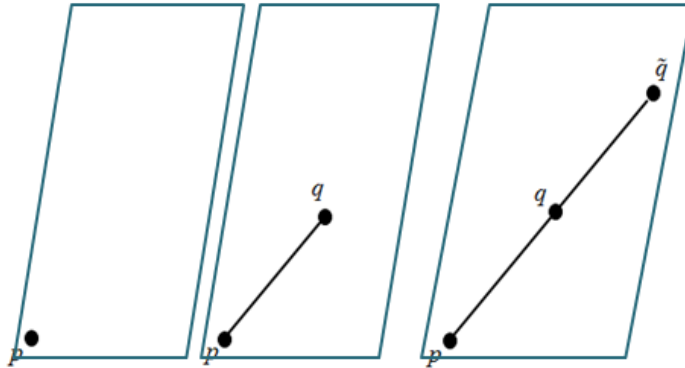
บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

จากการคำนวณในบทที่ 3 และ ทฤษฎีบทในบทที่ 2 เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทและบทแทรกต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ไม่มีค้ำพอยท์ของจุดใดๆ ในระนาบ

พิสูจน์ สมมติให้ $p := (0,0)$ เป็นจุดในระนาบ P สมมติมีค้ำพอยท์ q ของ p บนจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ซึ่งเชื่อมระหว่าง $p = \gamma(0)$ และ $q = \gamma(t_1)$ ในระนาบนั้นคือสำหรับทุกๆ จำนวน $t_2 > t_1$ สำหรับทุกๆ การยืดออกของจีโอเดซิก $\gamma|_{[0,t_2]}$ ได้ว่า การยืดออกของจีโอเดซิกไม่สั้นที่สุดอีกต่อไป



รูปที่ 4.1 จีโอเดซิกบนระนาบ

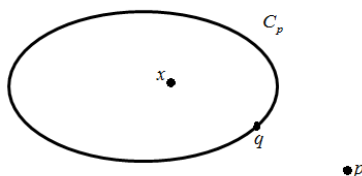
นี่คือข้อขัดแย้งกับประพจน์ 3 เนื่องจากจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด

ดังนั้นไม่มีค้ำพอยท์ของจุดใดๆ ในระนาบ

□

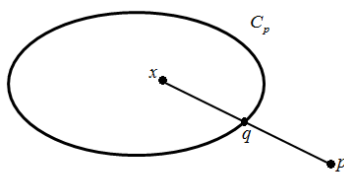
ทฤษฎีบท 4.2 ให้ M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงเชิงเดียวสมบูรณ์มี p เป็นจุดบน M คัทโลกัส C_p ของ $p \in M$ มีสมบัติเฉพาะที่ (locally) เป็นทรี (tree) นั่นคือ ไม่มีวงจร (cycle)

พิสูจน์ สมมติคัทโลกัส C_p ของ $p \in M$ เป็นวงจรใน M จากทฤษฎีบทของจอร์แดน (Jordan theorem) เนื่องจากมีวงจร ดังนั้นมีบริเวณที่อยู่ข้างในวงจรมี C_p เป็นขอบให้ x เป็นจุดที่อยู่ข้างใน C_p



รูปที่ 4.2 รูปประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2 (i)

เนื่องจาก M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงสมบูรณ์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทของฮอป-รีนอฟ มีจีโอเดซิก ที่สั้นที่สุด $\gamma|_{[p,x]}$ ที่เชื่อม p และ x ให้ γ ตัด C_p ที่ q พบว่า $\gamma|_{[p,x]}$ เป็นจีโอเดซิกที่ยี้ออกของ $\gamma|_{[p,q]}$



รูปที่ 4.3 รูปประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2 (ii)

เนื่องจาก $q \in C_p$ ดังนั้น q เป็นคัทพอยท์ แล้ว $\gamma|_{[p,x]}$ ซึ่งเป็นการยี้ออกของจีโอเดซิก $\gamma|_{[p,q]}$ ไม่สั้นที่สุดอีกต่อไปนี่คือข้อขัดแย้ง ที่กล่าวข้างต้นว่า $\gamma|_{[p,x]}$ เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด

ดังนั้นคัทโลกัส C_p ของ $p \in M$ เมื่อ M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงเชิงเดียวสมบูรณ์ ไม่เป็นวงจรเมื่อพิจารณาเฉพาะที่ □

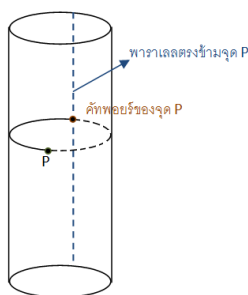
ทฤษฎีบท 4.3 คัทโลกัส ณ จุดใดๆ บนทรงกระบอกกลมคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น

พิสูจน์ ให้ p เป็นจุดบนทรงกระบอกกลม M ซึ่ง $\theta(p) := 0$ ให้ $\tau_p := \{q \in M \mid \theta(q) = \pi\}$ เป็นเมอริเดียนตรงข้าม p

ต้องการพิสูจน์ว่า $C_p = \tau_p$

ให้ $q \in \tau_p$ และมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q เนื่องจากบนทรงกระบอกกลมมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบที่มี p และ τ_p อยู่บนระนาบ ดังนั้นจะมีจีโอเดซิก $\tilde{\gamma}$ ที่เป็นการสะท้อนของ γ เมื่อเทียบกับ τ_p เนื่องจาก $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ และ $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$ ดังนั้นโดยบทตั้งคาลิงเกนเบิร์ก q เป็นคัทพอยท์ของ p นั่นคือ $\tau_p \subset C_p$

ในทางตรงกันข้าม สมมติ q เป็นคัทพอยท์ของ p และ $q \notin \tau_p$ ให้ $0 < \theta(q) < \pi$ เนื่องจาก q เป็นคัทพอยท์ของ p ดังนั้นจะมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q ในที่นี้ $p := \gamma(0)$ และ $q := \gamma(t_1)$ สำหรับทุกจำนวน t_2 ซึ่ง $t_2 > t_1$ และสำหรับทุกๆ จีโอเดซิกที่ยี้ออก $\gamma|_{[0, t_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไปนี่คือข้อขัดแย้ง เนื่องจากทรงกระบอกกลมสัมพันธ์กับระนาบและจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดนั่นคือ $C_p \subset \tau_p$ □



รูปที่ 4.4 คัทโลกัสบนทรงกระบอกกลม

บทแทรก 4.4 ถ้า C_p เป็นคัทโลกัสบนทรงกระบอกกลมใดๆ จะได้ว่า C_p เป็นจีโอเดซิก

พิสูจน์ จาก ทฤษฎีบท 4.3 ทำให้ทราบว่าคัทโลกัสของทรงกระบอกกลมคือเมอริเดียน และในหัวข้อ 3.2.1 ทำให้ทราบว่าเมอริเดียนของทรงกระบอกกลมมีค่าความโค้งจีโอเดซิกเป็น 0 และจากทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งบอกค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นบนพื้นผิวเป็น 0 ก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นจีโอเดซิกซึ่งจะสามารถสรุปได้ว่าคัทโลกัสของทรงกระบอกกลมเป็นจีโอเดซิก \square

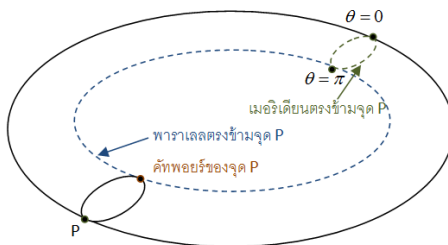
ทฤษฎีบท 4.5 คัทโลกัสของจุดใดๆ บนทรงห่วยางตรง คือ เมอริเดียนตรงข้ามจุดนั้นยูเนียนกับพาราเลลตรงข้ามจุดนั้น

พิสูจน์ ให้ p เป็นจุดบนทรงห่วยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $(\theta(p), \varphi(p)) := (0, 0)$ และ $p_i := p, i = 1, \dots, 4$ ให้ q เป็นจุดบนทรงห่วยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $\theta(q) = \varphi(q) = \pi$ เป็นเมอริเดียนและพาราเลลที่อยู่ตรงข้าม p ตามลำดับ

$$\text{ต้องการพิสูจน์ว่า } C_p = \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)$$

ให้ q เป็นจุดบนทรงห่วยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $\varphi(q) = \pi, 0 < \theta(q) < 2\pi$ เนื่องจาก \tilde{M} เป็นพื้นผิวสมบูรณ์ ดังนั้นมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p_1 และ q เนื่องจากบนทรงห่วยางตรงมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับพาราเลล $\varphi = \pi$ ดังนั้นมีจีโอเดซิก $\tilde{\gamma}$ ที่เชื่อม p_4 และ q นั่นคือ q เป็นคัทพอยท์ของ p ตาม γ ถ้าพิจารณาตามจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดที่เชื่อม p_2 และ q หรือ p_3 และ q ยังคงได้ผลเช่นเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ถ้าเลือก $\theta(q) = \pi, 0 < \varphi(q) < 2\pi$ นี่คือการพิสูจน์ $\{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)\} \subset C_p$

ในทางตรงกันข้าม สมมติ q เป็นคัทพอยท์ของ p และ $q \notin \{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta = \pi \cup \varphi = \pi\}$ ให้ $0 < \theta(q) < 2\pi$ และ $0 < \varphi(q) < 2\pi$ เนื่องจาก q เป็นคัทพอยท์ของ p ดังนั้นจะมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q ในที่นี้ $p = \gamma(0)$ และ $q = \gamma(\theta_1)$ สำหรับทุกจำนวน θ_2 ซึ่ง $\theta_2 > \theta_1$ และสำหรับทุกๆ จีโอเดซิกที่ยึดออก $\gamma|_{[0, \theta_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไปนี่คือข้อขัดแย้ง เนื่องจากทรงห่วยางตรงสมานสัณฐานกับระนาบและจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดนั่นคือ $C_p \subset \{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)\}$ \square



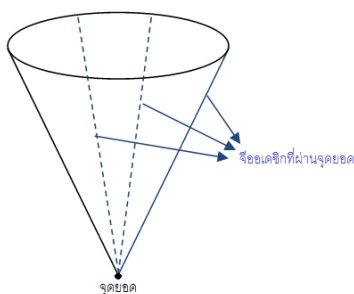
รูปที่ 4.5 คัทโลกัสบนทรงห่วงยาง

บทแทรก 4.6 ถ้า C_p เป็นคัทโลกัสบนทรงห่วงยางใดๆ จะได้ว่า C_p เป็นจีโอเดซิก

พิสูจน์ จาก ทฤษฎีบท 4.5 ทำให้ทราบว่าคัทโลกัสบนทรงห่วงยางคือเมอริเดียนและพาราเลล ซึ่งในหัวข้อ 3.2.4 ทำให้ทราบว่าเมอริเดียนและพาราเลล ของทรงห่วงยางมีค่าความโค้งจีโอเดซิกเป็น 0 และจากโดยทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งบอกค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นบนพื้นผิวเป็น 0 ก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นจีโอเดซิกซึ่งจะสามารถสรุปได้ว่าคัทโลกัสของทรงห่วงยางเป็นจีโอเดซิก \square

ทฤษฎีบท 4.7 ไม่มีคัทโลกัสของจุดยอดบนกรวยกลมตรง

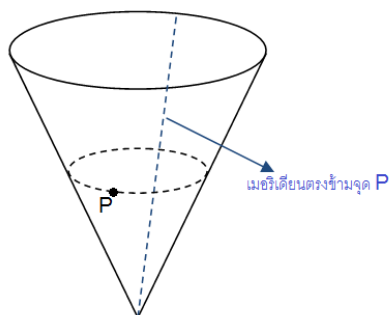
พิสูจน์ เนื่องจากจีโอเดซิกที่ออกมาจากจุดยอดของกรวยกลมตรงคือเมอริเดียน โดยเมอริเดียนบนกรวยกลมตรงคือเส้นตรง และจากประพจน์ 2 และ 3 เส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด ทุกๆ จีโอเดซิกที่ยืดออกตามเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดเสมอ ดังนั้น ไม่มีคัทโลกัสของจุดยอดบนกรวยกลมตรง \square



รูปที่ 4.6 ไม่มีคัทโลกัสของจุดยอดบนกรวยกลมตรง

ทฤษฎีบท 4.8 เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดใดๆ บนกรวยกลมตรง เป็นคัทโลกัส เมื่อจุดนั้นไม่ใช่จุดยอด

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.3 เนื่องจากกรวยกลมตรงมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบที่มี p และ τ_p อยู่บนระนาบและ กรวยกลมตรงสมานสัมพันธ์กับระนาบ \square



รูปที่ 4.7 คัทโลกัสบนกรวยกลมตรง

บทแทรก 4.9 ถ้า C_p เป็นคัทโลกัสบนทรงกรวยกลมตรงใดๆ จะได้ว่า C_p เป็นจีโอเดซิก

พิสูจน์ จาก ทฤษฎีบท 4.5 ทำให้ทราบว่าคัทโลกัสบนทรงกรวยกลมตรงคือเมอริเดียน ซึ่งในหัวข้อ 3.2.3 ทำให้ทราบว่าเมอริเดียนของทรงกรวยกลมตรงมีค่าความโค้งจีโอเดซิกเป็น 0 และจากทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งบอกค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นบนพื้นผิวเป็น 0 ก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นจีโอเดซิกซึ่งจะสามารถสรุปได้ว่าคัทโลกัสบนทรงกรวยกลมตรงเป็นจีโอเดซิก \square

บทแทรก 4.10 ไม่มีพาราเลลบนกรวยกลมตรงที่เป็นจีโอเดซิก

พิสูจน์ เนื่องจากในหัวข้อ 3.2.3 เราได้แสดงว่าพาราเลลใดๆ บนกรวยกลมตรงมีค่าความโค้งจีโอเดซิกไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งบอกค่าความโค้งจีโอเดซิกของเส้นบนพื้นผิวเป็น 0 ก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นจีโอเดซิก ทำให้ได้ว่า พาราเลลบนกรวยกลมตรงไม่เป็นจีโอเดซิก \square

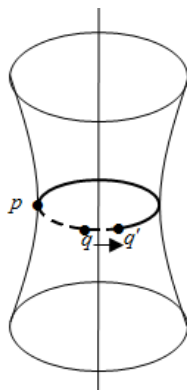
บทแทรก 4.11 กำหนดรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวคือ

$$\sigma = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, u)$$

พาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวที่เป็นจีโอเดสิก มีเพียงเส้นเดียว คือพาราเลลบนระนาบ $u = 0$

พิสูจน์ เนื่องจากในหัวข้อ 3.2.2 เราได้แสดงว่าพาราเลลใดๆ บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวมีค่าความโค้งจีโอเดสิกเป็นค่าคงที่ ซึ่งค่าคงที่นั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของพาราเลล θ แกน z ในกรณีที่ $z=0$ ค่าความโค้งจีโอเดสิกนั้นจะมีค่าเป็น 0 ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 ซึ่งค่าความโค้งจีโอเดสิกของเส้นบนพื้นผิวเป็น 0 ก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นจีโอเดสิก ทำให้ได้ว่า พาราเลลบนระนาบ $u = 0$ บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียวเป็นจีโอเดสิก \square

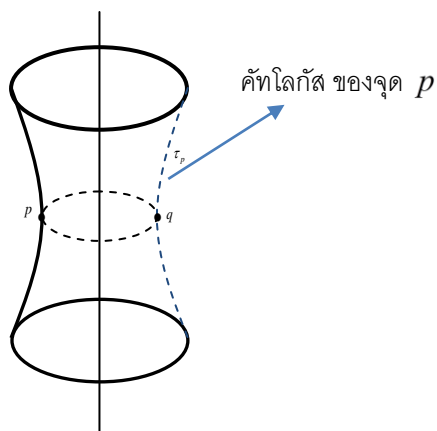
นอกจากนี้เมื่อพิจารณา ณ จุด p บนพาราเลล $u=0$ บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบชั้นเดียว จะพบว่า นอกจากจุดที่อยู่ตรงข้ามจุด p ไม่มีคัทพอยท์ของจุด p เนื่องจากทุกเส้นจีโอเดสิกที่ยึดออกยังคงเป็นจีโอเดสิกที่สั้นที่สุด ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 พาราเลล $u = 0$

ทฤษฎีบท 4.12 เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดใดๆบนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวเป็นคัทโลกัสของจุดๆนั้น

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.3 เนื่องจากทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบที่มี p และ τ_p อยู่บนระนาบและ ทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียวสมานสัณฐานกับระนาบ □



รูปที่ 4.8 คัทโลกัสบนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้แสดงการพิสูจน์ว่าไม่มีคัทพอยท์ของจุดใด ๆ บนระนาบ สำหรับจุดใด ๆ บนทรงกระบอกกลม คัทโลกัสคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น สำหรับจุดใด ๆ บนทรงห่วยางตรงคัทโลกัสคือ เมอริเดียนตรงข้ามจุดนั้นยูเนียนกับพาราเลลตรงข้ามจุดนั้น และ ไม่มีคัทโลกัสของจุดยอดบนกรวยกลมตรง สำหรับจุดใด ๆ บนกรวยกลมตรงเมื่อจุดนั้นไม่ใช่จุดยอดคัทโลกัสคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น และ สำหรับจุดใด ๆ บนทรงไฮเพอร์โบล่าแบบขึ้นเดียว คัทโลกัสคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น นอกจากนี้ยังทราบว่าคัทโลกัสบนพื้นผิวต่างๆ ที่ศึกษามานั้นเป็นจีโอเดซิก

และจะสามารถสรุปเป็นตารางได้ดังต่อไปนี้

พื้นผิว	สมการจีโอเดซิก	คัทโลกัส	ค่าความโค้งจีโอเดซิกของคัทโลกัส
ทรงกระบอก	$v = \frac{\alpha^2}{(r^4 - \alpha^2 r^2)} u$	เมอริเดียนตรงข้าม	0
กรวยกลมตรง	$v = \alpha \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(1+h^2)}{(r^2 - \alpha^2)}} dr, u = h(1-r)$	เมอริเดียนตรงข้ามที่ไม่รวมจุดยอด	0
ทรงไฮเพอร์โบล่า	$v = \int \sqrt{\alpha \frac{1}{(r^4 - \alpha r^2)} \left(1 + b^2 \left(\frac{r^2}{a^2 (r^2 - a^2)} \right) \right)} dr$	เมอริเดียนตรงข้าม	0
ทรงห่วยาง	$v = \alpha \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(1+h^2)}{(r^2 - \alpha^2)}} dr$	พาราเลลและเมอริเดียนตรงข้าม	0

รูปที่ 5.1 คัทโลกัสบนทรงกระบอก กรวยกลมตรง ทรงไฮเพอร์โบล่า และ ทรงห่วยาง

5.2 ข้อความคาดการณ์ (conjecture)

จากการศึกษาพบว่าเมื่อกำหนดจุดบนพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์กับระนาบแล้ว คัทโลกัส คือ เมอริเดียนตรงข้ามจุดนั้น ยูเนียนกับบางพาราเลลที่ค่าความโค้งจีโอเดสิกเป็นศูนย์ ดังนั้น ผู้วิจัยจึงขอเสนอข้อความคาดการณ์ดังนี้

ถ้า C_p เป็นคัทโลกัสของจุด p บนพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัมพันธ์กับระนาบแล้วจะได้ว่า C_p เป็นจีโอเดสิกบนพื้นผิวนั้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] A. Pressley. 2012. **Elementary Differential Geometry**. London : Springer-Verlag London.
- [2] B. O'Neill. 2006. **Elementary Differential Geometry, Revised 2nd Edition**. San Diego : Academic Press.
- [3] D. Elerath. 1980. "An Improved Toponogov Comparison Theorem for Non-negatively Curved manifolds." *J. Differential Geom.* 15 : 187-216.
- [4] H. Poincare. 1905. "Sur Les Lignes Geodesiques Des Surfaces Convexes." *Trans. Amer. Math. Soc.* 6(3) : 237-274.
- [5] H. von Mangoldt. 1881. "Geodätische Linien auf Positiv Gekrümmten Flächen." *J. Reine Angew. Math.* 91 : 23-53.
- [6] J. Hebda. 1994. "Metric Structure of Cut Loci in Surfaces and Ambrose's Problem." *J. Differential Geom.* 40(3) : 621-642.
- [7] J. H. C. Whitehead. 1935. "On the Covering of a Complete Space by the Geodesics Through a Point." *Ann. of Math.* 36(3) : 679-704.
- [8] J. Itoh, K. Kiyohara. 2004. "The Cut Loci and The Conjugate Loci on Ellipsoids." *Manuscripta Math.* 114(2) : 247-264.
- [9] K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka. 2003. **The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces**. New York : Cambridge University Press.
- [10] M. P. Do Carmo. 1976. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. New Jersey : Prentice-Hall.
- [11] M. P. Do Carmo. 1992. **Riemannian Geometry**. Birkhauser. Basel : Birkhäuser Basel.

- [12] P. Chitsakul. 2013. "Cut Locus in a Cylinder of Revolution." *World Academic of Science, Engineering and Technology*.
- [13] P. Chitsakul. 2013. "Some Properties of Cut Locus of a Flat Torus." *World Academic of Science, Engineering and Technology*. 7(12) : 1203-1208.
- [14] R. Sinclair, M. Tanaka. 2007. "The cut locus of a two-sphere of revolution and Toponogov's Comparison Theorem." *Tohoku Math. J.* 59(3) : 379-399.
- [15] S. B. Myers. 1935. "Connections Between Differential Geometry and Topology. I. Simply Connected Surfaces." *Duke Math. J.* 1(3) : 376-391

ภาคผนวก

สมบัติบางประการของคัทโลกัสบนบางพื้นผิวที่สมานสัณฐานกับระนาบ

Some Properties of Cut Locus on Some Surfaces of Revolution Homeomorphic to a Plane

พิพัฒน์พงษ์ จันทร์ศรี¹ ภัคคินี ชิตสกุล¹

Pipatpong Chansri¹ Pakkinee Chitsakul¹

บทคัดย่อ

คัทโลกัส C_p ของจุด p ใดๆ บนพื้นผิว M นิยามโดยเซตของทุกคัทพอยท์ q เมื่อพิจารณาบนเส้นโค้ง γ ที่เป็นจีโอเดสิกที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวที่มี p เป็นจุดเริ่มต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการนำเสนอสมบัติบางประการของคัทโลกัสบนทรงกระบอกกลม ทรงห่วงยางตรง และกรวยกลมตรง ซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานสัณฐานกับระนาบ

Abstract

The cut locus C_p of any point p on a surface M is defined as the set of all the cut points q along a minimal geodesic γ emanating from p on the surface. In this research, we would like to present some properties of cut locus on a circular cylinder, a flat torus and a right circular cone, which is a surface of revolution homeomorphic to a plane.

key words: cut locus, geodesic, a surface of revolution homeomorphic to a plane

e-mail address: bakhamnoi_rw@hotmail.com

¹สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

บทนำ

ปวงกาเร(Poincare) เป็นคนแรกที่นำเสนอทฤษฎีเกี่ยวกับคัทโลกัสบนแมนนิโฟลด์แบบรีมันด์(Riemannian manifold) หลังจากการนำเสนอของปวงกาเร ได้มีงานวิจัยของ ไมเออร์(Myer) ไวท์เฮด(Whitehead) และฮีบดา(Hebda) แต่เป็นเรื่องยากมากที่จะพิจารณาโครงสร้างของคัทโลกัสบนแมนนิโฟลด์ หลังจาก อีเลอราท(Elerath) ได้นำเสนอโครงสร้างของคัทโลกัสของพาราโบลอยด์(paraboloid) และไฮเพอร์โบลอยด์แบบสองแผ่น (hyperboloid of two sheet) แล้ว ซินแคลร์ร่วมกับทานากะ(R. Sinclair and M. Tanaka) และ อิโตะร่วมกับคิโยฮาระ(J. Itoh and K.Kiyohara) ได้นำเสนอคัทโลกัสบนทรงรีทั้งแบบแบนข้าง(prolate) และแบบแบนขั้ว(oblate) จากงานวิจัยบนพื้นผิวกำลังสอง(quadratic surfaces) ดังกล่าวนี้นักวิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาสมบัติบางประการของคัทโลกัสบนทรงกระบอกกลมทรงห้วงโดยตรง และกรวยกลมตรง ซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนรอบ(surface of revolution) ที่สมานสัมพันธ์ (Homeomorphic) กับระนาบ(plane)

พื้นผิวของการหมุนรอบ

พื้นผิวของการหมุนรอบ(surface of revolution) M เป็นพื้นผิวในปริภูมิแบบยูคลิด (Euclidian space) ที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งในระนาบ xz รอบแกน z ให้ $\tilde{\gamma}$ เป็นเส้นโค้งในระนาบ xz ที่แทนด้วย $x = \phi(t)$ และ $z = \psi(t)$ เมื่อ $t \in I$ เป็นพารามิเตอร์ที่แทนความยาวเส้นโค้ง ดังนั้น $\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 = 1$ เรียก $\tilde{\gamma}$ ว่า เส้นโค้งก่อกำเนิด (generating curve) พื้นผิวของการหมุนรอบในรูปแบบอิงพารามิเตอร์คือ

$$\chi(t, \theta) = (\phi(t) \cos \theta, \phi(t) \sin \theta, \psi(t)), (t, \theta) \in R^2$$

เมื่อ $t \in I$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$ เรียก θ ว่าเมอริเดียน(meridian) และ t คือพาราเลล(parallel)

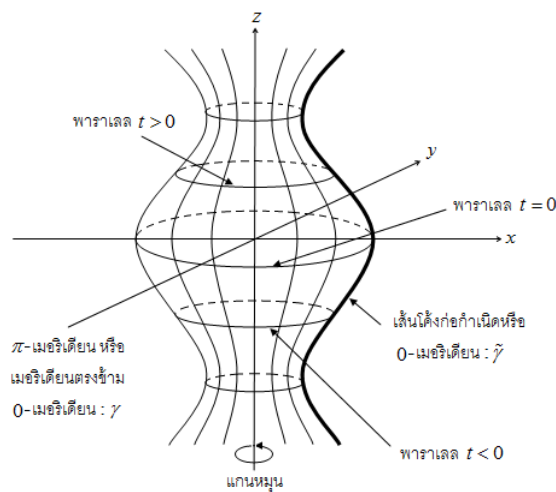


Figure 1 Surface of revolution

การประชุมวิชาการแห่งชาติ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ครั้งที่ 11

บนเมอริเดียนแต่ละเมอริเดียน θ มีค่าคงที่ ในขณะที่ t มีค่าไม่คงที่ บนพาราเลลแต่ละพาราเลล t มีค่าคงที่ ในขณะที่ θ มีค่าไม่คงที่ ในกรณีพื้นผิวของการหมุนรอบสมมาตรรอบระนาบ xy เรียกพาราเลลบนระนาบ xy ว่าอีควาเตอร์(equator) แทนด้วย $t=0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$ (Figure 1) โดยทั่วไปแล้วเรียกเส้นโค้งที่กำหนด γ ว่า 0 -เมอริเดียน และ เมอริเดียนตรงข้าม 0 -เมอริเดียน คือ π -เมอริเดียนแทนด้วย γ

ทรงกระบอกกลม (Circular cylinder) เกิดจากการหมุนเส้นตรงที่ขนานกับแกน z และผ่านจุด $(r, 0, 0)$ โดยหมุนรอบแกน z รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงกระบอกกลม คือ

$$\chi(t, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, t), t \in I, 0 \leq \theta < 2\pi$$

เรียก θ ว่าเมอริเดียน และ t คือ พาราเลล

ทรงห่วงยาง (torus) เป็นรูปทรงที่เกิดจากการหมุนวงกลมที่มีรัศมี r ศูนย์กลางอยู่ที่ $(R, 0, 0)$ ในระนาบ xz โดยหมุนรอบแกน z รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงห่วงยาง คือ

$$\chi(\varphi, \theta) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta), 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

เรียก r ว่ารัศมีรอง(minor radian) และเรียก R ว่า รัศมีหลัก บนทรงห่วงยาง θ คือเมอริเดียน และ φ คือพาราเลล

กรวยกลมตรง (right circular cone) เป็นพื้นผิวของการหมุนรอบ ที่เกิดจากการหมุนเส้น $z = x$ ในระนาบ xz รอบแกน z รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของทรงกรวยกลมตรงคือ

$$\chi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t), t \in I, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

เรียก θ ว่าเมอริเดียน และ t คือ พาราเลล เนื่องจากเส้น $z = x$ ผ่านจุดกำเนิด เมื่อหมุนเส้น $z = x$ รอบแกน z จุดกำเนิดจะเป็นจุดตั้งของกรวยกลมเรียกจุดตั้งนี้ว่าจุดยอด (apex หรือ vertex) เนื่องจากแกนของกรวยขนานกับแกนหมุนจึงเรียกว่ากรวยกลมตรง มิฉะนั้นเรียกว่ากรวยเฉียง(oblique cone)

เมื่อพิจารณาพาราเลลของทรงกระบอกกลม ทรงห่วงยาง และกรวยกลมตรง จะพบว่า รัศมีของพาราเลลของทรงกระบอกกลมมีค่าคงที่ ในขณะที่รัศมีของพาราเลลของทรงห่วงยางและกรวยกลมตรงมีค่าไม่คงที่ ถ้าให้ $m(t)$ เป็นรัศมีของพาราเลล แล้ว $m(t) \geq 0$ โดย $m(t) = 0$ เมื่อพิจารณา ณ จุดยอดและ จุดยอดนี้เป็นจุดบนพื้นผิวที่หาอนุพันธ์ไม่ได้

ทรงกระบอกกลม ทรงห่วงยาง และกรวยกลมตรง เป็นพื้นผิวของการหมุนรอบที่สมานฐานกับระนาบ ซึ่งสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนเมื่อพิจารณาจากรูป (Figure 2)

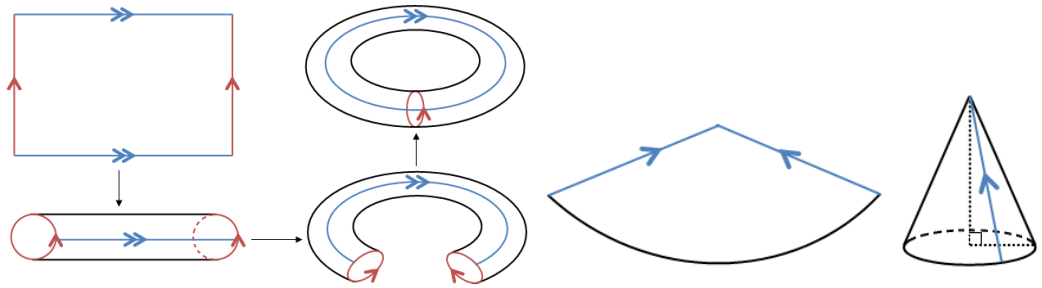


Figure 2 Right circular cylinder, torus and right circular cone homeomorphism to a plane

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

จีโอเดซิก

ให้ $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ C^∞ บนพื้นผิว M เส้นโค้ง γ เรียกว่า จีโอเดซิก บน M ถ้า $\gamma''(s)$ ตั้งฉากกับปริภูมิสัมผัส $T_{\gamma(s)}M$ สำหรับแต่ละ $s \in [a, b]$ ถ้า $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ เป็นจีโอเดซิก บน M แล้ว $\frac{d}{ds} |\gamma'(s)|^2 = 0$ หรือ $\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ นั่นคือ $\gamma(s)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่

สำหรับแต่ละจุด x ซึ่ง $x \in M$ ให้ $S_x: \mathbb{R} \rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งเรียบใน M ซึ่ง $S_x(s) = (t(x), s + \theta(x))$

สำหรับแต่ละ s ซึ่ง $s \in \mathbb{R}$ แล้ว เรียก S_x ว่าพาราเลลที่ผ่าน x

สำหรับแต่ละจุด p ซึ่ง $p \in M$ ให้ $\tilde{\tau}_p: \mathbb{R} \rightarrow M$ เป็นเส้นโค้งเรียบใน M ซึ่ง $\tilde{\tau}_p(s) = (t(p) + s, \theta(p))$

สำหรับแต่ละ s ซึ่ง $s \in \mathbb{R}$ แล้วเรียก $\tilde{\tau}_p$ ว่าเมอริเดียนที่ผ่านจุด p

เมอริเดียนตรงข้ามจุด p คือ $\tau_p(s) = (t(p) + s, \theta(p) + \pi)$

ประพจน์ 1 พาราเลลที่ผ่านจุด $p_0 = (t_0, \theta_0)$ บนพื้นผิว M เป็นจีโอเดซิกก็ต่อเมื่อ $m'(t_0) = 0$ (K. Shiohama et al., 2003; M.P. Docarmo, 1992)

ประพจน์ 2 ทุกเมอริเดียนในพื้นที่ผิว M เป็นจีโอเดซิกและค่าคงที่แกลโลร์ดต์ของเมอริเดียนเป็นศูนย์เสมอ (K. Shiohama *et al.*, 2003; M.P. Docarmo, 1992)

ประพจน์ 3 เส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด (A. Pressley, 2012; B. O'Neill, 2006; M.P. Docarmo, 1976)

บทแทรก 1 ให้ p เป็นจุดใดๆบนพื้นผิว M และ T เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยกับพื้นผิว M ที่ p แล้วมี γ เพียงหนึ่งเดียวที่เป็นจีโอเดซิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วย ซึ่งผ่าน p ด้วยความเร็ว $\gamma' = T$ (A. Pressley, 2012; K. Shiohama *et al.*, 2003; M.P. Docarmo, 1992)

บทแทรก 2 ระหว่างพื้นผิวสองพื้นผิวที่สมานสัมผัสกันและกัน จีโอเดซิกบนพื้นผิวหนึ่งเป็นจีโอเดซิกบนอีกพื้นผิวหนึ่ง (A. Pressley, 2012; K. Shiohama *et al.*, 2003; M.P. Docarmo, 1992)

คัทพอยท์และคัทโลกัส

ให้ $\gamma|_{[a,t_1]}$ เป็นจีโอเดซิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วยที่สั้นที่สุด ที่ออกมาจากจุด $p := \gamma(0)$ บนพื้นผิวเชื่อมโยงสมบูรณ์(complete connected surface) M ถ้ามีทุกจำนวน t_2 ซึ่ง $t_2 > t_1$ และ ทุกๆ จีโอเดซิกที่ยืดออก $\gamma|_{[0,t_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไป แล้วเรียก $\gamma(t_1)$ ว่าคัทพอยท์ของ p ตาม γ

คัทโลกัสของ p คือ เซตของทุกๆ คัทพอยท์ตามจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดที่ออกมาจาก p และแทนคัทโลกัสของจุด p ด้วย C_p

บทตั้งคลิงเกนเบิร์ก (Klingenberg Lemma) ถ้า $\gamma(t_1)$ เป็นคัทพอยท์ของ $p = \gamma(0)$ ตาม γ แล้วมีสองจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด α และ β ที่ออกมาจาก p ไปยัง $\gamma(t_1)$ ซึ่ง $l(\alpha) = l(\beta)$ (K. Shiohama *et al.*, 2003; M.P. Docarmo, 1992)

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 1 ไม่มีคัทพอยท์ของจุดใดๆ ในระนาบ

พิสูจน์ สมมติให้ $p := (0,0)$ เป็นจุดในระนาบ P สมมติมีคัทพอยท์ q ของ p บนจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ซึ่งเชื่อมระหว่าง $p = \gamma(0)$ และ $q = \gamma(t_1)$ ในระนาบนั้นคือสำหรับทุกๆ จำนวน $t_2 > t_1$ สำหรับทุกๆ การยืดออกของจีโอเดซิก $\gamma|_{[0,t_2]}$ ได้ว่า การยืดออกของจีโอเดซิกไม่สั้นที่สุดอีกต่อไป

นี่คือข้อขัดแย้งกับประพจน์ 3 เนื่องจากจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด

ดังนั้นไม่มีคัทพอยท์ของจุดใดๆ ในระนาบ \square

ทฤษฎีบท 2 ให้ M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงเชิงเดียวสมบูรณ์มี p เป็นจุดบน M คัทโลกส์ C_p ของ $p \in M$ มีสมบัติเฉพาะที่ (locally) เป็นทรี (tree) นั่นคือ ไม่มีวงจร (cycle)

พิสูจน์ สมมติคัทโลกส์ C_p ของ $p \in M$ เป็นวงจรใน M จากทฤษฎีบทของจอร์แดน (Jordan theorem) เนื่องจากมีวงจร ดังนั้นมีบริเวณที่อยู่ข้างในวงจรมี C_p เป็นขอบให้ x เป็นจุดที่อยู่ข้างใน C_p

เนื่องจาก M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงสมบูรณ์ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทของฮอปฟ์-ริโนว (Hopf-Rinow Theorem) มีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด $\gamma|_{[p,x]}$ ที่เชื่อม p และ x ให้ γ ตัด C_p ที่ q พบว่า $\gamma|_{[p,x]}$ เป็นจีโอเดซิกที่ยืดออกของ $\gamma|_{[p,q]}$

เนื่องจาก $q \in C_p$ ดังนั้น q เป็นคัทพอยท์ แล้ว $\gamma|_{[p,x]}$ ซึ่งเป็นการยืดออกของจีโอเดซิก $\gamma|_{[p,q]}$ ไม่สั้นที่สุดอีกต่อไป นี่คือข้อขัดแย้ง ที่กล่าวข้างต้นว่า $\gamma|_{[p,x]}$ เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด

ดังนั้นคัทโลกส์ C_p ของ $p \in M$ เมื่อ M เป็นพื้นผิวเชื่อมโยงเชิงเดียวสมบูรณ์ ไม่เป็นวงจรเมื่อพิจารณาเฉพาะที่ \square

ทฤษฎีบท 3 คัทโลกส์ ณ จุด ใดๆ บนทรงกระบอกกลมคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น

พิสูจน์ ให้ p เป็นจุดบนทรงกระบอกกลม M ซึ่ง $\theta(p) := 0$ ให้ $\tau_p := \{q \in M \mid \theta(q) = \pi\}$ เป็นเมอริเดียนตรงข้าม p

ต้องการพิสูจน์ว่า $C_p = \tau_p$

ให้ $q \in \tau_p$ และมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q เนื่องจากบนทรงกระบอกกลมมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบที่มี p และ τ_p อยู่บนระนาบ ดังนั้นจะมีจีโอเดซิก $\tilde{\gamma}$ ที่เป็นการสะท้อนของ γ เมื่อเทียบกับ τ_p เนื่องจาก $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ และ $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$ ดังนั้นโดยบทตั้งคลิงเกนเบิร์ก q เป็นคัทพอยท์ของ p นั่นคือ $\tau_p \subset C_p$

ในทางตรงกันข้าม สมมติ q เป็นคัทพอยท์ของ p และ $q \notin \tau_p$ ให้ $0 < \theta(q) < \pi$ เนื่องจาก q เป็นคัทพอยท์ของ p ดังนั้นจะมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q ในที่นี้ $p := \gamma(0)$ และ $q := \gamma(t_1)$ สำหรับทุกจำนวน t_2 ซึ่ง $t_2 > t_1$ และสำหรับทุกๆ จีโอเดซิกที่ยืดออก $\gamma|_{[0,t_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไปนี่คือข้อขัดแย้ง เนื่องจากทรงกระบอกสมานฐานกับระนาบโดยบทแทรก 2 และจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดนั่นคือ $C_p \subset \tau_p$ \square

ทฤษฎีบท 4 คัทโลกซ์ของจุดใดๆ บนทรงห่วงยางตรง คือ เมอริเดียนตรงข้ามจุดนั้นยูเนียนกับพาราเลลตรงข้ามจุดนั้น

พิสูจน์ ให้ p เป็นจุดบนทรงห่วงยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $(\theta(p), \varphi(p)) := (0, 0)$ และ $p_i := p, i = 1, \dots, 4$ ให้ q เป็นจุดบนทรงห่วงยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $\theta(q) = \varphi(q) = \pi$ เป็นเมอริเดียนและพาราเลลที่อยู่ตรงข้าม p ตามลำดับ

$$\text{ต้องการพิสูจน์ว่า } C_p = \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)$$

ให้ q เป็นจุดบนทรงห่วงยางตรง \tilde{M} ซึ่ง $\varphi(q) = \pi, 0 < \theta(q) < 2\pi$ เนื่องจาก \tilde{M} เป็นพื้นผิวสมบูร์ก ดังนั้นมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p_1 และ q เนื่องจากบนทรงห่วงยางตรงมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับพาราเลล $\varphi = \pi$ ดังนั้นมีจีโอเดซิก $\tilde{\gamma}$ ที่เชื่อม p_4 และ q นั่นคือ q เป็นคัทพอยท์ของ p ตาม γ ถ้าพิจารณาตามจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดที่เชื่อม p_2 และ q หรือ p_3 และ q ยังคงได้ผลเช่นเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ถ้าเลือก $\theta(q) = \pi, 0 < \varphi(q) < 2\pi$ นี่คือการพิสูจน์ $\{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)\} \subset C_p$

ในทางตรงกันข้าม สมมติ q เป็นคัทพอยท์ของ p และ $q \notin \{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta = \pi \cup \varphi = \pi\}$ ให้ $0 < \theta(q) < 2\pi$ และ $0 < \varphi(q) < 2\pi$ เนื่องจาก q เป็นคัทพอยท์ของ p ดังนั้นจะมีจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด γ ที่เชื่อม p และ q ในที่นี้ $p = \gamma(0)$ และ $q = \gamma(\theta_1)$ สำหรับทุกจำนวน θ_2 ซึ่ง $\theta_2 > \theta_1$ และสำหรับทุกๆ จีโอเดซิกที่ยืดออก $\gamma|_{[0, \theta_2]}$ ไม่เป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดอีกต่อไปนี่คือข้อขัดแย้ง เนื่องจากทรงห่วงยางตรงสมานสัมพันธ์กับระนาบโดยบทแทรก 2 และจีโอเดซิกในระนาบคือเส้นตรงและเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดนั่นคือ $C_p \subset \{(\theta, \varphi) \in \tilde{M} \mid \theta(\pi) \cup \varphi(\pi)\} \square$

ทฤษฎีบท 5 ไม่มีคัทโลกซ์ของจุดยอดบนกรวยกลมตรง

พิสูจน์ เนื่องจากจีโอเดซิกที่ออกมาจากจุดยอดของกรวยกลมตรงคือเมอริเดียน โดยเมอริเดียนบนกรวยกลมตรงคือเส้นตรง และจากประพจน์ 2 และ 3 เส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุด ทุกๆ จีโอเดซิกที่ยืดออกตามเส้นตรงเป็นจีโอเดซิกที่สั้นที่สุดเสมอ ดังนั้น ไม่มีคัทโลกซ์ของจุดยอดบนกรวยกลมตรง \square

ทฤษฎีบท 6 เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดใดๆ บนกรวยกลมตรง เป็นคัทโลกซ์ เมื่อจุดนั้นไม่ใช่จุดยอด

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3 เนื่องจากกรวยกลมตรงมีสมบัติสมมาตรเมื่อเทียบกับระนาบที่มี p และ τ_p อยู่บนระนาบและ กรวยกลมตรงสมานสัมพันธ์กับระนาบ \square

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้แสดงการพิสูจน์ว่าไม่มีคัพพอยท์ของจุดใด ๆ บนระนาบ สำหรับจุดใด ๆ บนทรงกระบอกกลมคัทโลกัสคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้นสำหรับจุดใด ๆ บนทรงห่วงยางตรงคัทโลกัสคือ เมอริเดียนตรงข้ามจุดนั้นยูเนียนกับพาราเลลตรงข้ามจุดนั้น และ ไม่มีคัทโลกัสของจุดยอดบนกรวยกลมตรงสำหรับจุดใด ๆ บนกรวยกลมตรงเมื่อจุดนั้นไม่ใช่จุดยอดคัทโลกัสคือ เมอริเดียนที่อยู่ตรงข้ามจุดนั้น

สำหรับขั้นตอนต่อไปในงานวิจัยนี้ คือการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณคัทโลกัส ซึ่งอาจนำไปประยุกต์ในการควบคุมการเคลื่อนที่ของชิปนาวูธการวางแผนการผ่าตัด เป็นต้น

เนื่องจากมีคัพพอยท์บนพื้นผิว ดังนั้นมีสองจีออเดซิกที่สั้นที่สุดและเนื่องจากมีสองวิถีที่แตกต่างกันแต่สั้นที่สุดทั้งคู่ จึงอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้ชิปนาวูธเคลื่อนที่ผิดทิศได้

ในทางการแพทย์การผ่าตัดแผลเล็กจะทำให้ผู้เข้ารับการผ่าตัดฟื้นตัวได้เร็ว และ การผ่าตัดตามจีออเดซิกจะทำให้แผลเล็ก เนื่องจากอวัยวะต่าง ๆ ในร่างกายของเรามีลักษณะคล้ายทรงกระบอกและกรวยตัดปลาย การศึกษาคัทโลกัสบนพื้นผิวเหล่านี้จึงเป็นอีกทางเลือกเพื่อเป็นข้อมูลให้แพทย์ในการวางแผนการผ่าตัด

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้การสนับสนุนอุปกรณ์และสถานที่ในการทำวิจัย ตลอดจนค่าใช้จ่ายในการนำเสนอผลงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

- A. Pressley, (2012), Elementary Differential Geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London.
- B. O'Neill, (2006), Elementary Differential Geometry, Revised 2nd Edition, Academic Press.
- K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka, (2003), The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces, Cambridge tracts in mathematics 159, Cambridge University Press, Cambridge, New York.
- M. P. Do Carmo, (1976), Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- M. P. Do Carmo, (1992), Riemannian Geometry. Birkhauser, Boston-Basel-Berlin.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายพิพัฒน์พงษ์ จันทร์ศรี
วัน เดือน เกิด	29 สิงหาคม 2533
ที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 64 หมู่ 4 อำเภอเมืองสรวง จังหวัดร้อยเอ็ด 45220
ประวัติการศึกษา	(2555) วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขา คณิตศาสตร์ประยุกต์ เกรดเฉลี่ย 2.73 (สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง)
ผลงานวิชาการ	สมบัติบางประการของค้ำโลกัสบนบางพื้นผิวที่สมานสัณฐานกับระนาบ การประชุมวิชาการนานาชาติ ครั้งที่ 11 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขต กำแพงแสน ระหว่างวันที่ 8-9 ธันวาคม 2557