สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

คุณสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟ

SOME PROPERTIES OF GEODESICS ON SOME SURFACES OF REVOLUTION

T123721

วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

WONGVISARUT KHUANGSATUNG

วพ
ว128ค
2555
เลขหมู่
เลขทะเบียน 123721
วัน. เดือน. ปี 27 พ.ย. 2555
b.12448515
i.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2555

KMITL-2012-SC-M-001-046

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

SOME PROPERTIES OF GEODESICS ON SOME SURFACES OF REVOLUTION

WONGVISARUT KHUANGSATUNG

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2012

KMITL--2012-SC-M-001-046

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COPYRIGHT 2012

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	คุณสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟ
นักศึกษา	นายวงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง
รหัสประจำตัว	53650701
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2555
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนพื้นผิวบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟ (Surface of revolution) ที่อยู่ในรูปภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (v-Clariaut parameterization) พบว่า ทุกๆ เมอริเดียน (Meridian) บนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเป็นจีออเดซิก และจะมีบางพาราเลล (Parallel) บนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ เมื่อ $f(v)$ เป็นรัศมีของพาราเลล และ v_0 เป็นค่าคงที่ หลังจากนั้นผู้วิจัยแบ่งประเภทของรูปทรงต่างๆที่เป็นพื้นผิวของการหมุนเพื่อจะพิจารณาลักษณะของจีออเดซิกบนรูปทรงนั้น โดยพิจารณาลักษณะจีออเดซิกจากความสัมพันธ์ของแกลโรล (Clairaut's relation) สำหรับบางกรณี พร้อมทั้งหาสมการจีออเดซิกบนบางพื้นผิวในรูปแบบระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นและแบบปริพันธ์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากหมุนกราฟ

คำสำคัญ : จีออเดซิก พื้นผิวที่เกิดจากหมุนกราฟ ความสัมพันธ์ของแกลโรล ภาวะอิงพารามิเตอร์-แกลโรล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Some Properties of Geodesics on Some Surfaces of Revolution
Student	Wongvisarut Khuangsatung
Student ID	53650701
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2012
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Pakkinee Chitsakul

ABTRACT

In this research, we study some properties of geodesic on some surfaces of revolution with the v-Clairaut parameterization . Such that, all meridians of surface of revolution are geodesic and a parallel is geodesic if and on if $f'(v_0) = 0$ where $f(v)$ is radius of parallel and v_0 is constant. After that, we will classify surface of revolution in order to consider characteristics of geodesic which is determined by Clairaut's relation. Furthermore, we find geodesic equation in both the system of non-linear differential equations and the integrals equation. Moreover, we use MATLAB to plot geodesic on surface of revolution.

Keyword : Geodesic, Surface of revolution, Clairaut's relation , Clairaut parameterization

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เรื่อง *คุณสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟ* สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ผู้จัดทำขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล ที่คอยชี้แนะ เป็นกำลังใจ ตลอดจนให้ความรู้และช่วยตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพจน์จนทำให้วิทยานิพจน์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ผลงานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจาก โครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) (Science Achievement Scholarship of Thailand)

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบ อาจารย์บัณฑิตประจำ และผู้ทรงคุณวุฒิภายนอกอันประกอบไปด้วย ดร.อาทิตย์ แข็งธัญการ ดร.เดชา สมนะและ ดร.บัญญัติ สร้อยแสง ที่ให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพจน์รวมทั้งช่วยตรวจสอบเล่มวิทยานิพจน์นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประศาสน์ ทั้งทางด้านวิชาความรู้ ตลอดจนคุณธรรม จริยธรรมที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้สัมฤทธิ์ผลเป็นที่เรียบร้อย

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดาและมารดา ผู้ให้การสนับสนุน เป็นแรงบันดาลใจและเป็นกำลังใจเสมอมาจนทำให้ผู้วิจัยสามารถทำงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี รวมถึงขอขอบพระคุณนายณัฐพล บุญนำและนายวิศรุต คลายแจ้งที่ช่วยเป็นกำลังใจทั้งเป็นที่ปรึกษาคอยแนะนำและช่วยตรวจสอบเล่มวิทยานิพจน์นี้ ขอขอบพระคุณคุณชุติกาญจน์ ตันยะสิทธิ์ และคุณอุดร บุญธรรม ที่คอยช่วยเหลือ ส่งเสริม และอำนวยความสะดวก ทั้งในด้านเอกสารต่างๆ อีกทั้งในส่วนของการใช้คอมพิวเตอร์ และเครื่องพิมพ์เอกสารในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และขอขอบคุณนายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย นายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นางสาวสิริพัชร แสงสว่าง นายนิติภูมิ อัศวธิติสกุล และนายเชาวนิติ เทียมแพ และนางสาวชฎาพร โตสถานที่คอยให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ รวมถึงคอยให้กำลังใจเสมอมาจนกระทั่งสำเร็จลุล่วงทุกประการ

นายวงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VI
สารบัญตาราง	X
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	3
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
2.1 **ทฤษฎีเบื้องต้น**	6
2.1.1 ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ	6
2.1.2 ฟังก์ชันต่อเนื่อง	6
2.1.3 ฟังก์ชันส่วนประกอบ	8
2.1.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	8
2.1.5 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์	12
2.1.6 พื้นผิวปรกติ	13
2.1.7 ระนาบสัมผัส	17
2.1.8 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง	17
2.1.9 พื้นผิวของการหมุน	23
2.1.10 สัญลักษณ์คิสทอฟเฟิล	24
2.1.11 จีออเดซิก	31
2.1.12 ภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรล	40
2.2 **งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	44
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	51
3.1 **สมบัติบางประการของจีออเดซิก**	51

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2 **บางจีออเดซิกบนบางพื้นผิวของการหมุน**	51
3.2.1 พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	55
3.2.2 ทรงพาราโบลา	59
3.2.3 ทรงไฮเพอร์โบลา	63
3.2.4 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	68
3.2.5 แคทีนอยด์	71
3.2.6 พื้นผิวแบบดิงดอง	75
3.2.7 พื้นผิวแบบคิส	79
3.2.8 ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	85
บทที่ 4 **ผลการวิจัยและอภิปรายผล**	90
4.1 **การวิเคราะห์ลักษณะของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล**	90
4.1.1 พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	90
4.1.2 ทรงพาราโบลา	94
4.1.3 ทรงไฮเพอร์โบลา	97
4.1.4 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	101
4.1.5 แคทีนอยด์	104
4.1.6 พื้นผิวแบบดิงดอง	108
4.1.7 พื้นผิวแบบคิส	113
4.1.8 ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	120
4.2 **บางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนโดยพิจารณาจากลักษณะของพื้นผิว**	124
บทที่ 5 **สรุปผลการวิจัยและเสนอแนะ**	126
เอกสารอ้างอิง	135
ภาคผนวก	136
ประวัติผู้วิจัย	155

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 บอลเปิด $B_r(p)$ ใน $\mathbb{R}^2$	6
รูปที่ 2.2 เซตเปิด	7
รูปที่ 2.3 การส่งต่อเนื่อง	7
รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันสมานสัณฐานที่การส่งแบบต่อเนื่อง	8
รูปที่ 2.5 อนุพันธ์ของการส่งที่หาอนุพันธ์ได้	10
รูปที่ 2.6 การส่งที่เป็นอนุพันธ์สัณฐาน	12
รูปที่ 2.7 เวกเตอร์ความเร็ว	12
รูปที่ 2.8 การส่ง $\mathbf{x}:U \to V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทั่วถึง $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$	14
รูปที่ 2.9 เส้นโค้งพารามิเตอร์กับเวกเตอร์สัมผัส	14
รูปที่ 2.10 การเปลี่ยนของพารามิเตอร์ [8]	15
รูปที่ 2.11 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนพื้นผิวปรกติ	16
รูปที่ 2.12 การส่งที่หาอนุพันธ์ได้ระหว่างพื้นผิวปรกติ	16
รูปที่ 2.13 ระนาบสัมผัส [8]	17
รูปที่ 2.14 ความยาวในพื้นผิวปรกติ S	20
รูปที่ 2.15 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (first fundamental from)	22
รูปที่ 2.16 พื้นผิวของการหมุน S ใน $\mathbb{R}^3$ [8]	23
รูปที่ 2.17 จีออเดซิกในทรงกลม	33
รูปที่ 2.18 จีออเดซิกในทรงกระบอกกลม	33
รูปที่ 2.19 เส้นตั้งฉากกับพื้นผิว	37
รูปที่ 2.20 เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับพาราเลลของพื้นผิวของการหมุนที่เป็นจีออเดซิก	43
รูปที่ 2.21 จีออเดซิกบนพื้นผิวในงานวิจัยของเจคอบ	44
รูปที่ 2.22 จีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงห่วงยางในงานวิจัยของ มาร์ค ไอรอน	45
รูปที่ 2.23 กราฟของส่วนของวงกลมใหญ่ในทรงกลม	46
รูปที่ 2.24 กราฟของส่วนของเส้นเกลียวบนทรงกระบอก	47
รูปที่ 2.25 กราฟของส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยบนทรงกรวย	48
รูปที่ 2.26 กราฟของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วงยางบนทรงห่วงยาง	49
รูปที่ 2.27 จีออเดซิกบนพื้นผิวทรงกลมและการเปรียบเทียบของแต่ละวิธี	50
รูปที่ 3.1 ส่วนประกอบของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย	55
รูปที่ 3.2 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงพาราโบลา	60

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.3 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงไฮเพอร์โบลา 63

รูปที่ 3.4 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น 68

รูปที่ 3.5 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของแคทีนอยด์ 71

รูปที่ 3.6 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของพื้นผิวแบบดิงดอง 75

รูปที่ 3.7 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของพื้นผิวแบบคิส 80

รูปที่ 3.8 ประเภทของทรงห่วงยาง 85

รูปที่ 3.9 พิกัดบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น 85

รูปที่ 3.10 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงห่วงยางแบบฮอร์น 86

รูปที่ 4.1 ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ 91

รูปที่ 4.2 จีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0,v_0)=(\pi,0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)=(1,0.1)$ 93

รูปที่ 4.3 ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงพาราโบลาเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ 94

รูปที่ 4.4 บางจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0,v_0)=\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)=(1,0.1)$ 96

รูปที่ 4.5 ทุกๆเมอริเดียนบนบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ 97

รูปที่ 4.6 บางพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$

โดยที่ $v_0=0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c=a$ 98

รูปที่ 4.7 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0,v_0)=(1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)=(0.1,0.1)$ 100

รูปที่ 4.8 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

$(u_0,v_0)=(1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)=(0.1,-0.1)$ 100

รูปที่ 4.9 ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ 102

รูปที่ 4.10 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0,v_0)=\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)=(0.1,0.1)$ 103

รูปที่ 4.11 ทุกๆ เมอริเดียนบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ 104

รูปที่ 4.12 บางพาราเลลบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$

โดยที่ $v_0=0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c=a$ 105

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 4.13 บางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.1, 0)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ 107

รูปที่ 4.14 ทุกๆเมอริเดียนบนพื้นผิวแบบดิงดงเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c = 0$ 108

รูปที่ 4.15 บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบดิงดงเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$
โดยที่ $v_0 = \frac{2}{3}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = \frac{2\sqrt{3}}{9}a$ 110

รูปที่ 4.16 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดงที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.665, 0.665)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, -1)$ 111

รูปที่ 4.17 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ 112

รูปที่ 4.18 ทุกๆเมอริเดียนบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c = 0$ 113

รูปที่ 4.19 บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$
โดยที่ $v_0 = \frac{4}{5}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = 0.4a$ 116

รูปที่ 4.20 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.5, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.5, -1)$ 118

รูปที่ 4.21 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.8, 0.8)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ 118

รูปที่ 4.21 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.8, 0.8)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ 119

รูปที่ 4.22 ทุกๆเมอริเดียนบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิก
โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c = 0$ 120

รูปที่ 4.23 บางพาราเลลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$
โดยที่ $v_0 = 0, 2\pi$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = 2a$ 121

รูปที่ 4.24 บางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (\pi / 2, \pi / 2)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ 123

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 5.1 การเลื่อนเส้นโค้งจีออเดซิก A ถึงเส้นโค้ง B บนพื้นผิวที่ไม่ปรับเรียบ 132

รูปที่ 5.2 สามเหลี่ยมจีออเดซิก (Geodesic Triangle) 133

รูปที่ 5.3 จีออเดซิกแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Geodesics) 134

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 1.1 ตารางแผนการดำเนินการตามขั้นตอนวิจัย	5
ตารางที่ 4.1 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะเปิด	124
ตารางที่ 4.2 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะปิด	125
ตารางที่ 4.3 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะทั้งปิดและเปิด	125
ตารางที่ 5.1 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุนที่ศึกษา	126
ตารางที่ 5.2 ระบบสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรล ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ν ของพื้นผิวที่ศึกษา	127
ตารางที่ 5.3 สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรล ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ν ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ของพื้นผิวที่ศึกษา	128
ตารางที่ 5.4 สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรล ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ν ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ของพื้นผิวที่ศึกษา	129
ตารางที่ 5.5 การแบ่งประเภทของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล	130

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย ขั้นตอนของการวิจัย และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจจะนำไปทำการวิจัยต่อไป

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับจีออเดซิก (Geodesic) ในพื้นผิวโดยที่จีออเดซิก [2][5] คือเส้นโค้งเชิงเดียวในพื้นผิวที่เชื่อมจุด 2 จุดที่ไม่ใช่จุดเดียวกันในพื้นผิวซึ่งตรงกับสมบัติของเส้นตรงในระนาบ โดยสมบัติสามประการของเส้นตรงในระนาบจากการศึกษาเรขาคณิตแบบยุคลิด คือ

1) มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เชื่อมจุดสองจุดโดยที่จุดทั้งสองไม่ใช่จุดเดียวกันในระนาบ
2) เส้นตรงใดๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่แตกต่างกันในระนาบจะเป็นวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดนั้น
3) การเคลื่อนที่ตามเส้นตรงในระนาบไม่มีการบิด เลี้ยว เบน เอียง ไปทางซ้ายหรือทางขวา

จากสมบัติของเส้นตรงในระนาบทั้งสามประการนี้ ทำให้เกิดคำถามว่า "ถ้ามีพื้นผิวที่ไม่ใช่ระนาบ แล้วมีเส้นในพื้นผิวที่มีสมบัติเหมือนกับเส้นตรงในระนาบหรือไม่"

เพื่อที่จะตอบคำถามข้างต้นนี้ จะยกตัวอย่าง "โลก" โดยการสมมติว่าโลกมีลักษณะเป็นทรงกลม โดยทรงกลมมีวงกลมใหญ่ (Great circle) ซึ่งเกิดจากการตัดทรงกลมด้วยระนาบที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม วงกลมใหญ่อาจเป็นเส้นศูนย์สูตร (Equator) หรือ เส้นรุ้ง (Latitude) ที่ศูนย์องศา นอกจากนี้วงกลมใหญ่อาจเป็นวงกลมที่ผ่านทั้งขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ ดังนั้นเส้นแวง (Longitude) หรือ เมอริเดียน (Meridian) ซึ่งเชื่อมขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้จึงเป็นส่วนของวงกลมใหญ่

ในทรงกลมแต่ละรูปทรงจะมีวงกลมใหญ่ได้มากมาย โดยวงกลมใหญ่ทุกวงในทรงกลมเดียวกันจะมีรัศมีเท่ากัน ซึ่งรัศมีดังกล่าวจะมีค่ามากที่สุด จึงเป็นที่มาของชื่อวงกลมใหญ่ และเส้นรุ้งอื่นๆที่ไม่ใช่เส้นรุ้งที่ศูนย์องศา จะเรียกว่าวงกลมเล็ก (Small circle) โดยวงกลมเล็กทุกวงจะขนานกัน ดังนั้นเรียกวงกลมเล็กนี้ว่า พาราเลล (Parallel)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าขับรถไปตามถนนที่อยู่ในแนวเส้นศูนย์สูตรซึ่งเป็นส่วนของวงกลมใหญ่ คนขับรถที่อยู่ภายในรถยนต์จะมีความรู้สึกว่ารถยนต์เคลื่อนที่ไปเป็นเส้นตรงเสมอ ไม่มีการบิด เลี้ยว เบน เอียง ไปทางซ้ายหรือทางขวา แต่สำหรับคนที่อยู่ภายในยานอวกาศที่โคจรอยู่รอบโลก มองมายังรถยนต์ที่กำลังเคลื่อนที่อยู่นั้น ผู้สังเกตที่อยู่ภายนอกโลกพบว่ารถยนต์ไม่ได้เคลื่อนที่ไปเป็นเส้นตรง แต่เคลื่อนที่ไปเป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นส่วนของวงกลมใหญ่

สิ่งที่คนขับรถยนต์เห็นเป็นการพบเห็นเมื่อคนขับอยู่ภายในรถยนต์หรือใกล้ๆกับจุดสังเกต ซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะที่ (Local property) ส่วนสิ่งที่คนที่อยู่ภายในยานอวกาศเห็นเป็นการพบเห็นที่ระยะไกลจากรถยนต์มากๆหรือไกลจากจุดสังเกต ซึ่งเป็นสมบัติวงกว้าง (Global property)

จากข้อสังเกตข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า สมบัติข้อ (3) ของเส้นตรงจะเป็นจริงเมื่อพิจารณาที่ใกล้ๆจุดที่กำหนด แต่สมบัติข้อ (1) ไม่เป็นจริงบนพื้นผิวโลก ถ้าจุดสองจุดที่ไม่ใช่จุดเดียวกันนี้คือขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้แล้ว พบว่ามีเมอริเดียนมากกว่าหนึ่งเส้นที่เชื่อมระหว่างขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ โดยทุกเส้นมีความยาวเท่ากัน

สำหรับสมบัติข้อ (2) ไม่เป็นจริงบนพื้นผิวโลก ถ้าจุดสองจุดที่ไม่ใช่จุดเดียวกันนี้อยู่ใกล้ๆกันบนพื้นผิวโลก และจุดทั้งสองเชื่อมด้วยวงกลมใหญ่ พบว่าขณะนี้วงกลมใหญ่ถูกแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่สั้นกว่า (Minor arc) และ ส่วนที่ยาวกว่า (Major arc) ถ้าขับรถยนต์ไปตามส่วนที่ยาวกว่าบนวงกลมใหญ่ พบว่ารถยนต์ไม่มีการบิด เลี้ยว เบน เอียง ไปทางซ้ายหรือทางขวา และจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่ารถยนต์ไม่ได้เคลื่อนที่ไปตามวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในพื้นผิว แต่ถ้าจุดสองจุดที่ไม่ใช่จุดเดียวกันนี้เป็นขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้ ซึ่งเป็นจุดเล็งยัน (Antipodal) แล้วจะมีวิถีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างขั้วโลกเหนือและขั้วโลกใต้หรือขั้วโลกใต้และขั้วโลกเหนือ

จากข้อสังเกตข้างต้นนี้พบว่า การเคลื่อนที่ตามวงกลมใหญ่ในทรงกลมไม่มีการบิด เลี้ยว เบน เอียง ไปทางซ้ายหรือทางขวา ซึ่งตรงกับสมบัติข้อ 3) ของเส้นตรงในระนาบ ดังนั้นถ้ากำหนดว่า จีออเดซิกเป็นเส้นโค้งในพื้นผิวที่แสดงสมบัติบางประการเหมือนกับสมบัติของเส้นตรงในระนาบแล้ว จะใช้สมบัติไม่มีการบิด เลี้ยว เบน เอียง ไปทางซ้ายหรือทางขวา เมื่อมีการเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งในพื้นผิว เพื่อพิจารณาสมบัติของจีออเดซิกในพื้นผิว

สมการจีออเดซิกเป็นสมการที่อยู่ในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งยากที่จะหาผลเฉลย โดยทั่วไปจะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขหาสมการจีออเดซิกในพื้นผิว ซึ่ง [5] ใช้วิธีผลต่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จำกัด (Finite difference method) เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการจีออเดซิก โดยใช้ระเบียบวิธีวนซ้ำ (Iterative method)และระเบียบวิธีนิวตัน (Newton's method) ทำให้ผู้วิจัยสนใจว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะหาผลเฉลยโดยวิธีอื่น ซึ่ง เจคอบ เลวิส (Jacob Lewis) [6] ศึกษาสมการจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน(surface of revolution) ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (v-Clairaut parameterization)โดยจัดรูปสมการจีออเดซิกของทรงกลมให้อยู่ในรูปปริพันธ์และหาผลเฉลยของสมการดังกล่าว นอกจากนี้ มาร์ค ไอรอน (Mark L. Irons) [9] ได้ศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงห่วงยางที่เป็นพื้นผิวของการหมุนในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยจัดรูปสมการจีออเดซิกของทรงห่วงยางให้อยู่ในรูปปริพันธ์ และแบ่งประเภทของจีออเดซิกที่อยู่บนทรงห่วงยางโดยพิจารณาจาก ความสัมพันธ์ของแกลโรล (Clariaut's relation)

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยจัดรูปสมการจีออเดซิกให้อยู่ในรูปปริพันธ์

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ผู้วิจัยต้องการศึกษาสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน ที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยแยกประเภทของรูปทรงต่างๆ ที่เป็นพื้นผิวของการหมุนเพื่อพิจารณาลักษณะของจีออเดซิกบนรูปทรงนั้นๆ และใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล พร้อมทั้งหาสมการจีออเดซิกของแต่ละรูปทรงที่อยู่ในรูประบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นและที่อยู่ในรูปปริพันธ์ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิว และผู้วิจัยต้องการพิสูจน์ว่า " ทุกๆ เมอริเดียน (Meridian) บนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิกเสมอ และมีบางพาราเลล (Parallel) บนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ " เมื่อ $f(v)$ เป็นรัศมีของพาราเลล และ v_0 เป็นค่าคงที่ใดๆ

1.3 ข้อจำกัดและขอบเขตการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวที่มีลักษณะเป็นพื้นผิวปกติ (Regular Surface) ที่อยู่ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งเป็นพื้นผิวเรียบ (Smooth) ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ และศึกษาเฉพาะพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน (Surface of Revolution) รอบแกน z เท่านั้น โดยทุกพื้นผิวที่ศึกษาสามารถจัดอยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์

$$\mathbf{x}(u,v)=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

เมื่อ u,v เป็นพารามิเตอร์ของพื้นผิวใดๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวใดๆ นั้น หาความยาวได้ในรูปแบบ

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

โดยที่ E F และ G เป็นฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาความยาวของส่วนโค้งใน**รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (First fundamental form)** ในพื้นผิว นอกจากนี้ จะใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิว

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1. สามารถหาเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนที่สนใจได้

1.4.2. เข้าใจถึงสมบัติทางเรขาคณิตของรูปทรงที่เกี่ยวกับจีออเดซิก

1.4.3. สามารถหาเงื่อนไขการมีจริงของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวของการหมุน

1.4.4. เข้าใจถึงความสัมพันธ์ของแกลโรลและภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรล

1.4.5. สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (MATLAB)ในการแสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน

1.4.6. สามารถเผยแพร่งานวิจัยเกี่ยวกับจีออเดซิกได้ในงานประชุมวิชาการในระดับชาติและนานาชาติ

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเนื้อหาตำราเรียน เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาจีออเดซิก

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหาสมการจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนสำหรับแต่ละรูปทรง

ขั้นตอนที่ 4 แยกประเภทของรูปทรงต่างๆ ที่เป็นพื้นผิวของการหมุน

ขั้นตอนที่ 5 ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป(MATLAB)ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิว

ขั้นตอนที่ 6 สรุปผลงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 7 เผยแพร่งานวิจัยสู่งานประชุมเชิงวิชาการ

ขั้นตอนที่ 8 เขียนวิทยานิพนธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากขั้นตอนดำเนินงานวิจัย สามารถสรุปเป็นตารางการดำเนินการตามขั้นตอนการวิจัยได้ดังนี้

ตารางที่ 1.1 ตารางแผนการดำเนินการตามขั้นตอนวิจัย

แผนการดำเนินงาน	เดือน											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ขั้นตอนที่ 1												
ขั้นตอนที่ 2												
ขั้นตอนที่ 3												
ขั้นตอนที่ 4												
ขั้นตอนที่ 5												
ขั้นตอนที่ 6												
ขั้นตอนที่ 7												
ขั้นตอนที่ 8												

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปใช้ในการหาจีออเดซิกในพื้นผิวของการหมุน โดยหัวข้อ 2.1 ประกอบไปด้วย นิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง ซึ่งมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในหาจีออเดซิกในพื้นผิวของการหมุน และในหัวข้อถัดไปจะเป็นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานในการดำเนินการวิจัยต่อไป

2.1 ทฤษฎีเบื้องต้น

2.1.1 ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ (n - dimensional Euclidean space)

นิยาม 2.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วปริภูมิของจำนวนจริงที่มี n มิติ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^n$ หมายถึงเซตของจุดต่างๆ ที่อยู่ในรูปของ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง และจะเรียกว่า $\mathbb{R}^n$ เป็น**ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ**

นิยาม 2.2 ถ้า $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว**ผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean inner product)** จะนิยามโดย

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

และนอร์ม (Norm) ของเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ใน $\mathbb{R}^n$ คือ

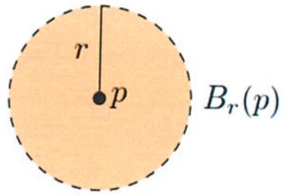
$$|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

2.1.2 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous function)

นิยาม 2.3 **บอลเปิด (Open ball)** $B_r(p)$ ใน $\mathbb{R}^n$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ และมีรัศมี r จะนิยามโดย

$$B_r(p) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x - p| < r \right\}$$

ตัวอย่าง 2.1 สำหรับบอลเปิด $B_r(p)$ ใน $\mathbb{R}^2$ แสดงดังรูปที่ 2.1

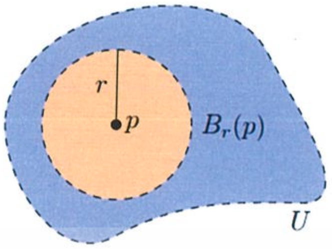


รูปที่ 2.1 บอลเปิด $B_r(p)$ ใน $\mathbb{R}^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.4 ให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็น**เซตเปิด (Open)** สำหรับแต่ละ $p \in U$ จะมี $r > 0$ ที่ทำให้ $B_r(p) \subset U$

เซตเปิดแสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 เซตเปิด

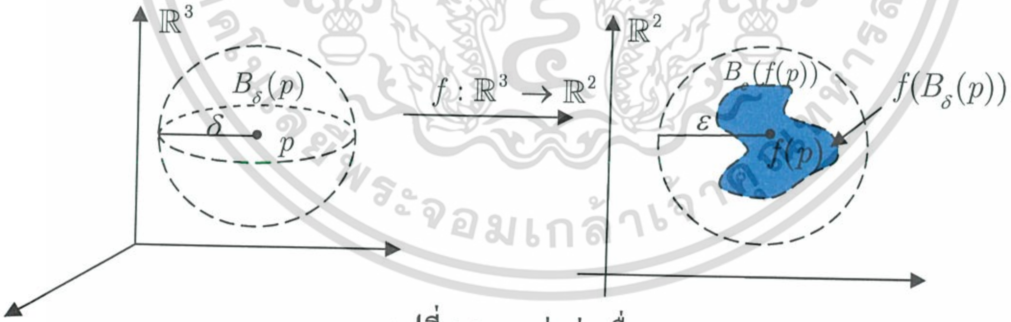
ข้อสังเกต เซตเปิดที่บรรจุ $p \in \mathbb{R}^n$ จะเรียกว่า **ย่านใกล้เคียง (Neighborhood)** ของ p

นิยาม 2.5 ให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง (Mapping) $f : U \to \mathbb{R}^m$ เป็นการส่ง**ต่อเนื่อง (Continuous)** ที่ $p \in U$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$f\left(B_\delta(p)\right) \subset B_\varepsilon\left(f(p)\right) \tag{2.1}$$

หรือจะกล่าวได้ว่า การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกๆ จุดใน U

ตัวอย่าง 2.2 การส่งของทรงกลมในปริภูมิ $\mathbb{R}^3$ ไปยังวงกลมในปริภูมิ $\mathbb{R}^2$ เมื่อพิจารณาตามนิยาม 2.5 ในกรณีนี้ $n = 3,\ m = 2$ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.3



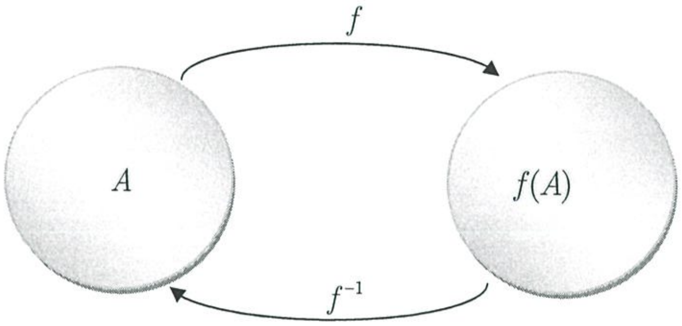
รูปที่ 2.3 การส่งต่อเนื่อง

ประพจน์ 2.1[8] ให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ ต่อเนื่องที่ $p \in U$ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุกเซตเปิด V ใน $\mathbb{R}^m$

นิยาม 2.6 [8] ให้ $A \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่งแบบต่อเนื่อง $f : A \to \mathbb{R}^n$ เป็น**ฟังก์ชันสมานสัณฐาน (Homeomorphism)** ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one) ทั่วถึง (Onto) และฟังก์ชันผกผัน $f^{-1} : f(A) \to A$ ต่อเนื่อง ในที่นี้จะกล่าวได้ว่า A และ $f(A)$ เป็น**เซตสมานสัณฐาน**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันสมานสัณฐานที่การส่งแบบต่อเนื่อง

2.1.3 ฟังก์ชันส่วนประกอบ (Component functions) [8]

กำหนดให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ ซึ่งจะพิจารณาฟังก์ชัน m ฟังก์ชันของ n ตัวแปร ถ้า $p = (x_1,...,x_n) \in U$ และ $g(p) = (y_1,...,y_n)$ นั่นคือ

$$y_1 = g_1(x_1,...,x_n), y_2 = g_2(x_1,...,x_n),..., y_{m-1} = g_{m-1}(x_1,...,x_n), y_m = g_m(x_1,...,x_n)$$

แล้วฟังก์ชัน $g_i : U \to \mathbb{R}$ เป็น**ฟังก์ชันส่วนประกอบ** ของ f โดยที่ $i = 1,...,m$

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการส่งซึ่งกำหนดให้แต่ละ $p \in \mathbb{R}^3$ เป็นจุดที่สมมาตรกับ p เมื่อเทียบกับจุดกำเนิด $O \in \mathbb{R}^3$ คือ $f(p) = -p$ หรือ

$$f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$$

และ ฟังก์ชันประกอบของ f คือ $g_1(x,y,z) = -x,\ g_2(x,y,z) = -y,\ g_3(x,y,z) = -z$ #

2.1.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Differential of function) [8]

ถ้า $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ แล้วอนุพันธ์ $f'(x_0)$ ของ f ที่ $x_0 \in U$ จะนิยามโดย

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ทุกๆ จุดของย่านใกล้เคียง V ของ $x_0 \in U$ แล้วอนุพันธ์ของ $f' : V \to \mathbb{R}$ ที่ x_0 จะเรียกว่า อนุพันธ์อันดับที่สอง แทนด้วย $f''(x_0)$ ของ f ที่ x_0 เป็นต้น

ดังนั้น f **หาอนุพันธ์ได้**หรือ**ปรับเรียบ (Differentiable** or **smooth)** ที่ x_0 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องของทุกๆ ลำดับ ที่ x_0 นอกจากนี้ f หาอนุพันธ์ได้หรือปรับเรียบใน U ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ ณ ทุกจุดใน U

ให้ $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ จะมีอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่ $(x_0, y_0) \in U$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ เป็นอนุพันธ์ ที่ x_0 ของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรที่หนึ่ง ในทำนองเดียวกันกับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่ $(x_0, y_0) \in U$ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ เป็นอนุพันธ์ ณ y_0 ของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรที่สอง เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อย ที่ทุกๆ จุดของย่านใกล้เคียง V ของ (x_0, y_0) สำหรับอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองที่ (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ที่ (x_0, y_0) ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องของทุกๆ ลำดับที่ (x_0, y_0) และ f หาอนุพันธ์ได้ ณ ทุกจุดใน U ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ ที่ ทุกจุดของ U ซึ่งบางครั้งอนุพันธ์ย่อยจะเขียนแทนด้วย

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

ซึ่งอนุพันธ์ย่อยของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

สำหรับกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร กำหนดให้ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของตัวแปร n ตัวแปรเมื่อเทียบกับ t คือ $F = f(x_1, \dots, x_n)$ เมื่อ $x_i = x_i(t)$ โดยที่ $i = 1, \dots, n$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $F = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ ขึ้นอยู่กับ t และ

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

นิยาม 2.7 [8] ให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ **หาอนุพันธ์ได้หรือปรับเรียบ (differentiable** or **smooth)** ถ้าทุกๆ ฟังก์ชันส่วนประกอบของ f มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องของทุกๆอันดับ

นิยาม 2.8 [8] ให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด ถ้าการส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ หาอนุพันธ์ได้ซึ่งมีฟังก์ชันประกอบ $f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right)$ ของฟังก์ชันประกอบ $f_1, \dots, f_m$ แล้ว**เมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix)** ของ f ที่จุด p เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะนิยามโดย

$$df_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ นิยามโดย

$$f(x,y)=\left(x^2-y^2,2xy\right), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ f คือ $\frac{\partial f_1}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial f_2}{\partial y}=2x$

เมทริกซ์จาโคเบียน df_p ที่ $p=(x,y)$ คือ

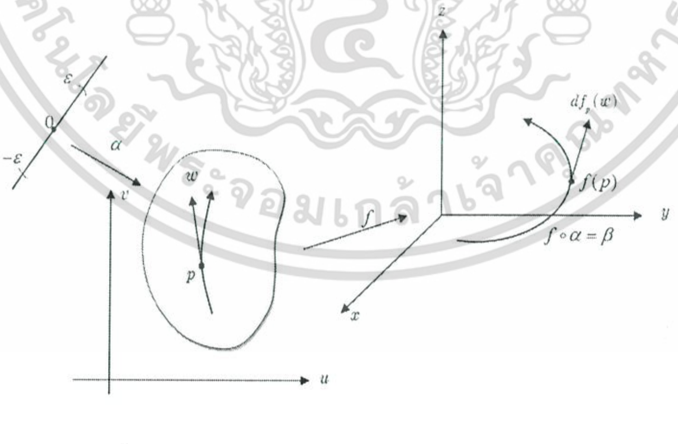
$$df_p=\begin{bmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}$$ #

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกำหนดให้ $U\subset\mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f:U\to\mathbb{R}^m$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ ณ แต่ละจุด $p\in U$ ซึ่งสมนัยกับการส่งแบบเชิงเส้น $df_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ จะเรียกว่า f **หาอนุพันธ์ได้ที่**จุด p นั้นเป็นไปตามนิยามดังนี้

นิยาม 2.9[8] ให้ $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์และ $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทำให้ $\alpha(0)=p$ และ $\alpha'(0)=\mathbf{w}$ แล้วเส้นโค้ง $\beta=f\circ\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ ยังคงเป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น

$$df_p(\mathbf{w})=\beta'(0)$$

(ดังรูปที่ 2.5)



รูปที่ 2.5 อนุพันธ์ของการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ [8]

กำหนดให้ $U\subset\mathbb{R}^2$ เป็นเซตเปิด และ $V\subset\mathbb{R}^3$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f:U\to\mathbb{R}^3$ และ $g:V\to\mathbb{R}^2$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ เมื่อ U และ V เป็นเซตเปิดที่ทำให้ $f(U)\subset V$

นั่นคือ $$U\subset \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2}\xrightarrow{\ f\ } V\subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}\xrightarrow{\ g\ }\underset{(\xi,\eta)}{\mathbb{R}^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$
$$g(x,y,z) = \left(\xi(x,y,z), \eta(x,y,z)\right)$$

แล้ว

$$g \circ f(u,v) = \left(\xi\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right), \eta\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\right)$$

อนุพันธ์ของ $g \circ f$ คือ

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \text{ และ } \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \text{ และ } \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ทฤษฎีบท 2.1 [8] **(กฎลูกโซ่สำหรับการส่ง (The chain rule for maps))**
กำหนดให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด และ $V \subset \mathbb{R}^m$ เป็นเซตเปิด กำหนดให้การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^m$ และ $g : V \to \mathbb{R}^k$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ เมื่อ U และ V เป็นเซตเปิดที่ทำให้ $f(U) \subset V$ แล้ว $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ และ

$$d\left(g \circ f\right)_p = dg_{f(p)} \circ df_p, \quad p \in U$$

ข้อสังเกต การส่งแบบเชิงเส้น f เป็น สมสัณฐาน (Isomorphism) ถ้าเมทริกซ์ของ f หาอินเวอร์สได้

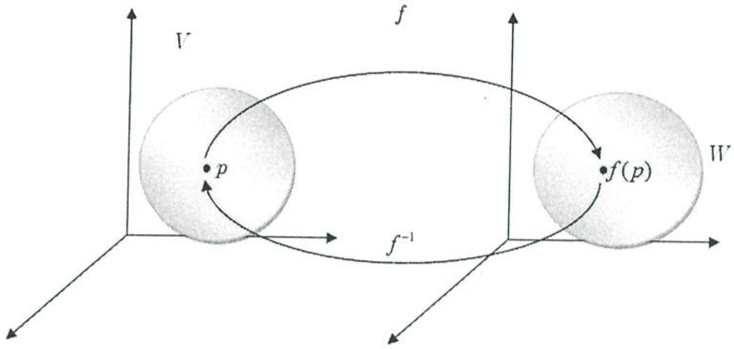
ทฤษฎีบท 2.2 [8] **(ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function theorem))**

กำหนดให้ $U \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f : U \to \mathbb{R}^n$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้และ $p \in U$ ถ้าอนุพันธ์ $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ เป็นสมสัณฐาน แล้วจะมีย่านใกล้เคียง V ที่จุด p ใน U และ ย่านใกล้เคียง W ของ $f(p)$ ใน $\mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $f : V \to W$ มีอินเวอร์สที่หาอนุพันธ์ได้ $f^{-1} : W \to V$

นิยาม 2.10 [8] กำหนดให้ $V \subset \mathbb{R}^m$ เป็นเซตเปิด และ $W \subset \mathbb{R}^k$ เป็นเซตเปิด การส่ง $f : V \to W$ เป็นการส่งที่หาอนุพันธ์ได้ เมื่อ V และ W เป็นเซตเปิด จะเรียกว่า **อนุพันธ์สัณฐาน (Diffeomorphism)** ของ V กับ W ถ้า f มีอินเวอร์สที่หาอนุพันธ์ได้

ข้อสังเกต อนุพันธ์สัณฐาน เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐานซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ทั้งการส่ง f และอินเวอร์สของการส่ง f^{-1} แสดงดังรูปที่ 2.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 การส่งที่เป็นอนุพันธ์สัณฐาน

จากทฤษฎีบทของฟังก์ชันผกผันพบว่า ถ้าจุด $p \in U$ และอนุพันธ์ df_p เป็นสมสัณฐานแล้ว f เป็นอนุพันธ์สัณฐานในย่านใกล้เคียงของจุด p

2.1.5 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ (Parameterized curves)

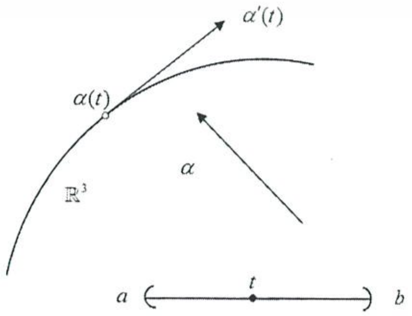
นิยาม 2.11 [8] **เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์** เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง $I=(a,b)$ ในเส้นจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ที่ถูกส่งไปยัง $\mathbb{R}^3$

คำว่า *หาอนุพันธ์* ได้ในนิยามข้างต้นนี้ หมายถึง เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ α เป็นไปตามการส่งของแต่ละ $t \in I$ ไปยัง $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t)) \in \mathbb{R}^3$ นั่นคือ $x(t),y(t),z(t)$ หาอนุพันธ์ได้สำหรับตัวแปร t เรียกว่า**พารามิเตอร์ (parameter)** ของเส้นโค้ง

นิยาม 2.12 [8] ให้ $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^3$ เมื่อ $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ สำหรับแต่ละ $t \in I$ แล้ว**เวกเตอร์สัมผัสหรือเวกเตอร์ความเร็ว (Tangent vector or Velocity vector)** ของ α ณ เวลา t จะนิยามโดย

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)=\alpha'(t)=(\frac{dx}{dt}(t),\frac{dy}{dt}(t),\frac{dz}{dt}(t))$$

และกำหนดให้**อัตราเร็ว ณ เวลา t (Speed at time t)** คือ $\left|\frac{d}{dt}\alpha(t)\right|=|\alpha'(t)|$ แสดงดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 เวกเตอร์ความเร็ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.13[4] **เส้นโค้งปกติ (Regular curve)** ใน $\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha'(t)\neq 0$ สำหรับทุกๆ $t\in(a,b)$

นิยาม 2.14[4] ให้ $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้ง ถ้า $h:J\to(a,b)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด J แล้ว ฟังก์ชันประกอบ

$$\beta=\alpha(h):J\to\mathbb{R}^3$$

เป็นเส้นโค้งที่ จะเรียกว่า **ภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำ (Reparametrization)** ของ α

บทตั้ง 2.1[4] ถ้า β เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำของ α โดย h แล้ว

$$\beta'(s)=(h'(s))\alpha'(h(s))$$

พิสูจน์ ถ้า $\alpha=(x,y,z)$ แล้ว $\beta(s)=\alpha(h(s))=(x(h(s)),y(h(s)),z(h(s)))$

จากกฎลูกโซ่สำหรับส่วนประกอบของฟังก์ชันค่าจริง f และ g นั่นคือ $(g(f))'=g'(f)\cdot f'$ ดังนั้นในกรณีจะได้

$$\begin{aligned}\beta'(s)&=\left(\alpha(h(s))\right)'\\&=(x'(h(s))\cdot h'(s),y'(h(s))\cdot h'(s),z'(h(s))\cdot h'(s))\\&=h'(s)\alpha'(h(s))\end{aligned}$$

□

นิยาม 2.15 ฟังก์ชันของความยาวส่วนโค้ง **(Arc length)** บนเส้นโค้งปรกติ α ที่เริ่มจากจุด t_0 คือฟังก์ชัน $s(t)$ ซึ่ง

$$s(t):=\int_{t_0}^{t}\left|\alpha'(t)\right|dt$$

เมื่อ $\left|\alpha'(t)\right|=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}$

2.1.6 พื้นผิวปรกติ (Regular surface) [8]

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับพื้นผิวปรกติใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งเป็นพื้นผิวที่เกิดจากการนำส่วนของระนาบที่มีลักษณะเป็นแผ่นมาจัดเรียงในลักษณะที่ไม่มีจุดขอบและการตัดภายในตัวเอง

นิยาม 2.16 [8] สับเซต $S\subset\mathbb{R}^3$ เป็น**พื้นผิวปรกติ** ถ้าสำหรับแต่ละ $p\in S$ จะมีย่านใกล้เคียง V ใน $\mathbb{R}^3$ และการส่ง $\mathbf{x}:U\to V\cap S$ ของเซตเปิด $U\subset\mathbb{R}^2$ ทั่วถึง $V\cap S\subset\mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ (แสดงดังรูปที่ 2.8)

i) $\mathbf{x}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ หมายความว่า ถ้าเขียนอยู่ในรูป

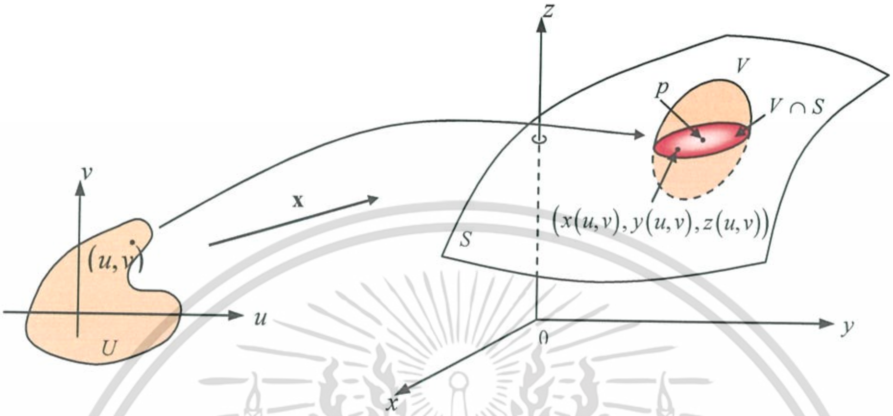
$$\mathbf{x}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\quad,(u,v)\in U$$

แล้วฟังก์ชัน $x(u,v),y(u,v)$ และ $z(u,v)$ มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องทุกอันดับใน U

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ii) **x** เป็น**สมานสัณฐาน** เนื่องจาก **x** ต่อเนื่องจากเงื่อนไขที่ i) หมายความว่า **x** มีการส่งแบบผกผัน $\mathbf{x}^{-1}: V \cap S \to U$ ซึ่งต่อเนื่องเช่นกัน นั่นคือ $\mathbf{x}^{-1}$ อยู่ในขอบเขตของการส่งแบบต่อเนื่อง $f: W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ นิยามบนเซตเปิด W มีอยู่ใน $V \cap S$

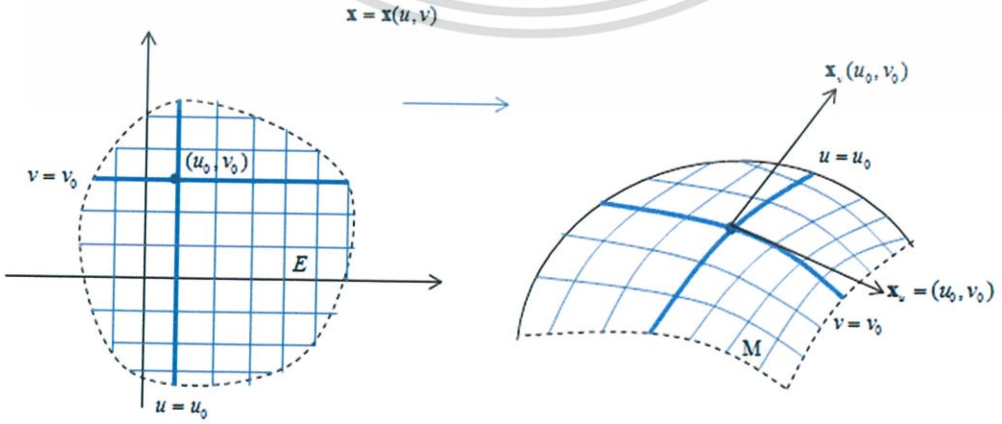
iii) (เงื่อนไขของความสม่ำเสมอ) สำหรับแต่ละ $q \in U$ เชิงอนุพันธ์ $d\mathbf{x}_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



รูปที่ 2.8 การส่ง $\mathbf{x}: U \to V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทั่วถึง $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ [8]

โดยที่ การส่ง **x** จะเรียกว่า **ภาวะอิงพารามิเตอร์หรือส่วนของพื้นผิว (Parametrization or coordinate patch)**

ถ้าให้ $v = v_0$ เป็นค่าคงที่และให้ u แปรผัน แล้ว $\mathbf{x}(u, v_0)$ ขึ้นอยู่กับหนึ่งพารามิเตอร์และเป็นเส้นโค้ง จะเรียกเส้นโค้ง $\mathbf{x}(u, v_0)$ ว่า **เส้นโค้งพารามิเตอร์** u (u**-parameter curve)** ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $u = u_0$ เป็นค่าคงที่และให้ v แปรผัน แล้ว $\mathbf{x}(u_0, v)$ ขึ้นอยู่กับหนึ่งพารามิเตอร์และเป็นเส้นโค้ง จะเรียกเส้นโค้ง $\mathbf{x}(u_0, v)$ ว่า **เส้นโค้งพารามิเตอร์** v (v**-parameter curve)** ทำให้ได้ว่า ถ้า $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \neq 0$ ที่ (u_0, v_0) แล้วเวกเตอร์ $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ สัมผัสกับเส้นโค้งพารามิเตอร์ u ที่ (u_0, v_0) และถ้า $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$ ที่ (u_0, v_0) แล้วเวกเตอร์ $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ สัมผัสกับเส้นโค้งพารามิเตอร์ v ที่ (u_0, v_0) ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 เส้นโค้งพารามิเตอร์กับเวกเตอร์สัมผัส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อไปนี้จะแสดงว่า จุด p ใดๆในพื้นผิวสามารถแสดงเป็นภาวะอิงพารามิเตอร์สองภาวะอิงพารามิเตอร์ นั่นคือ p อาจแทนด้วยคู่อันดับ (u,v) หรือ (ξ,η) ที่ถูกส่งผ่านจากคู่อันดับหนึ่งไปยังอีกคู่อันดับโดยการแปลงที่หาอนุพันธ์ได้

ทฤษฎีบท 2.3 [8] **(การเปลี่ยนของพารามิเตอร์ (change of parameter))** [8]

ให้ p เป็นจุดที่อยู่ในพื้นผิวปรกติ S และให้ $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S, \mathbf{y}: V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์สองภาวะอิงพารามิเตอร์ของ S ที่ทำให้ $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ แล้ว**การเปลี่ยนของพารามิเตอร์ (Change of Parameter)** $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ เป็นอนุพันธ์สัณฐาน (ดังรูปที่ 2.10) นั่นคือ h หาอนุพันธ์ได้และมีอินเวอร์สที่หาอนุพันธ์ได้

กล่าวคือ ถ้า $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ ที่กำหนดโดย

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U$$
$$\mathbf{y}(\xi,\eta) = (x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), z(\xi,\eta)), \quad (\xi,\eta) \in V$$

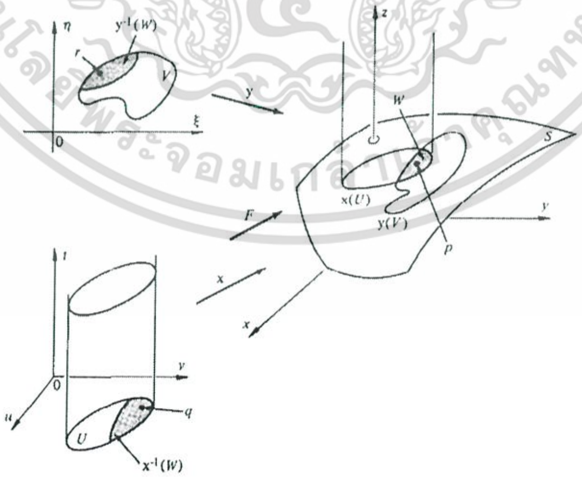
แล้วการเปลี่ยนของคู่อันดับ h กำหนดโดย

$$u = u(\xi,\eta), \quad v = v(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W)$$

ซึ่งมีสมบัติคือ ฟังก์ชัน u และ v มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องของทุกอันดับและการส่ง h สามารถหาอินเวอร์สได้ นั่นคือ

$$\xi = \xi(u,v), \quad \eta = \eta(u,v), \quad (u,v) \in \mathbf{x}^{-1}(W)$$

เมื่อฟังก์ชัน ξ และ η มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องทุกอันดับ

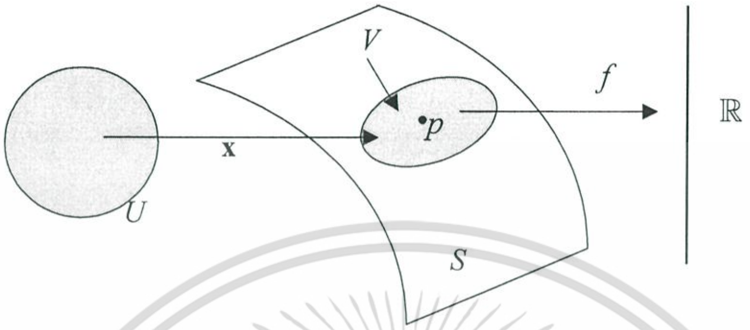


รูปที่ 2.10 การเปลี่ยนของพารามิเตอร์ [8]

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงนิยามของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนพื้นผิวปรกติดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.17 [8] ให้ $f:V\subset S\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามในสับเซตเปิด V ของพื้นผิวปรกติ S แล้ว f จะกล่าวได้ว่า หาอนุพันธ์ได้ ที่จุด $p\in V$ สำหรับบางภาวะอิงพารามิเตอร์ $\mathbf{x}:U\subset\mathbb{R}^2\to S$ เมื่อ $p\in\mathbf{x}(U)\subset V$ ซึ่งฟังก์ชันประกอบ $f\circ x:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $\mathbf{x}^{-1}(p)$ นอกจากนี้ f หาอนุพันธ์ได้ใน V ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ทุกๆ จุดของ S (ดังรูปที่ 2.11)



รูปที่ 2.11 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนพื้นผิวปรกติ

จากนิยามของอนุพันธ์ได้นำไปสู่การส่งระหว่างพื้นผิวปรกติ

นิยาม 2.18[8] การส่งแบบต่อเนื่อง $\varphi:V_1\subset S_1\to S_2$ ของเซตเปิด V_1 ของพื้นผิวปรกติ S_1 ไปยังพื้นผิวปรกติ S_2 จะกล่าวได้ว่า หาอนุพันธ์ได้ที่ $p\in V_1$ ถ้ากำหนดให้ภาวะอิงพารามิเตอร์

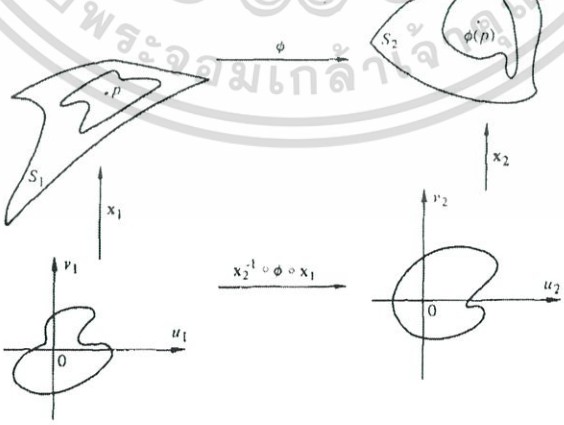
$$\mathbf{x}_1:U_1\subset\mathbb{R}^2\to S_1 \text{ และ } \mathbf{x}_2:U_2\subset\mathbb{R}^2\to S_2$$

เมื่อ $p\in\mathbf{x}_1(U)$ และ $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1))\subset\mathbf{x}_2(U_2)$

แล้วการส่ง

$$\mathbf{x}_2^{-1}\circ\varphi\circ\mathbf{x}_1:U_1\to U_2$$

หาอนุพันธ์ได้ที่ $q=\mathbf{x}_1^{-1}(p)$ (ดังรูปที่ 2.12)



รูปที่ 2.12 การส่งที่หาอนุพันธ์ได้ระหว่างพื้นผิวปรกติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

2.1.7 ระนาบสัมผัส (Tangent plane)

นิยาม 2.19 [8] ให้ S พื้นผิวปรกติและสำหรับทุกๆ จุด $p \in S$ แล้วเวกเตอร์สัมผัสกับ S ที่ $p \in S$ เป็นเวกเตอร์ความเร็ว $\alpha'(0)$ ของบางเส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ เมื่อ $\alpha(0) = p$

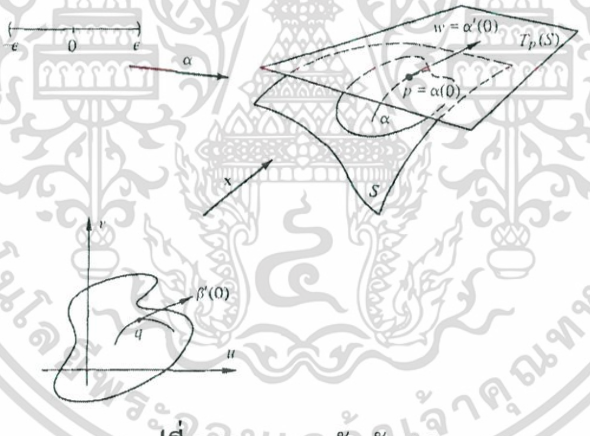
นิยาม 2.20 [8] เซตของทุกๆ เวกเตอร์สัมผัสกับ S ที่ p จะเรียกว่า **ระนาบสัมผัส** กับ S ที่ p และจะเขียนแทนด้วย $T_p(S)$

ประพจน์ 2.2 [8] ให้ $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวปรกติ S และให้ $q \in U$ เป็นปริภูมิย่อยของเวกเตอร์ในสองมิติ

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3 \qquad (2.2)$$

เกิดขึ้นพร้อมกับเซตของเวกเตอร์สัมผัสที่ $\mathbf{x}(q)$

สำหรับระนาบสัมผัส $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ ซึ่งผ่าน $\mathbf{x}(q) = p$ ไม่ขึ้นกับภาวะอิงพารามิเตอร์ $\mathbf{x}$ โดยจะเรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบสัมผัส** กับ S ที่ p แสดงได้ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.13 ระนาบสัมผัส [8]

2.1.8 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (First Fundamental Form)[3]

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนจำนวนจริง

นิยาม 2.21 [3] รูปแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear form) บน V เป็นการส่งจาก $B: V \times V \to \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นเชิงเส้นในแต่ละส่วนประกอบ นั่นคือ

1. $B(aX + bY, Z) = aB(X,Z) + bB(Y,Z)$
2. $B(X, cY + dZ) = cB(X,Y) + dB(X,Z)$

สำหรับแต่ละ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ และ $X,Y,Z \in V$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
123721

นิยาม 2.22 [3] รูปแบบเชิงเส้นคู่ B เป็น**สมมาตร (Symmetric)** ถ้า $B(X,Y)=B(Y,X)$ สำหรับทุก $X,Y \in V$

นิยาม 2.23 [3] รูปแบบเชิงเส้นคู่ B เป็น**บวกที่แน่นอน (Positive definite)** ถ้า $B(X,X) \geq 0$ สำหรับทุก $X \in V$ มีภาวะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $X=0$

นิยาม 2.24 [3] **ผลคูณภายใน** บน V เป็นรูปแบบเชิงเส้นคู่ $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นสมมาตรและบวกที่แน่นอน

ตัวอย่าง 2.4 $\langle\ ,\ \rangle : T_P(\mathbb{R}^3) \times T_P(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$

$\langle X,Y \rangle : X \cdot Y$ (เป็นผลคูณจุดแบบยุคลิค) #

นิยาม 2.25 [3] ให้ S เป็นพื้นผิวปรกติ แล้ว**เมตริก (Metric)** บนพื้นผิว M เมื่อแต่ละจุด $p \in M$ ของผลคูณภายใน $\langle\ ,\ \rangle : T_P(S) \times T_p(S) \to \mathbb{R}$

นิยาม 2.26 [3] ให้ S เป็นพื้นผิวปรกติ แล้ว**รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง** ของ M เมื่อแต่ละจุด $p \in S$ ของผลคูณภายใน $\langle\ ,\ \rangle : T_P(S) \times T_p(S) \to \mathbb{R}$ นั่นคือ

$$\langle X,Y \rangle = X \cdot Y$$

รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งอยู่ในรูปของผลคูณจุดแบบยุคลิกที่จำกัดอยู่บนปริภูมิสัมผัส

2.1.8.1 เมตริกในส่วนของพื้นผิว (Metric in coordinate patch)[3]

กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^3$ เป็นพื้นผิวปรกติ $U \subset \mathbb{R}^2$ เป็นเซตเปิด และให้ $\mathbf{x} : U \to S$ เป็นส่วนของพื้นผิวที่มีผกผันที่ต่อเนื่องใน S ให้จุด $p \in \mathbf{x}(U)$ เป็นจุดใดๆ ใน $\mathbf{x}(U)$ นั่นคือ $p = \mathbf{x}(u_1,u_2)$ และ ให้ $X,Y \in T_p(S)$ แล้ว

$$\begin{aligned} X &= X^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} + X^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = X^1 \mathbf{x}_1 + X^2 \mathbf{x}_2 \\ &= \sum_i X^i \mathbf{x}_i \quad ; \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(u_1,u_2) \quad , i=1,2 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} Y &= Y^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} + Y^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = Y^1 \mathbf{x}_1 + Y^2 \mathbf{x}_2 \\ &= \sum_j Y^j \mathbf{x}_j \quad ; \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(u_1,u_2) \quad , j=1,2 \end{aligned}$$

แล้ว

$$\langle X,Y \rangle = \left\langle \sum_i X^i \mathbf{x}_i, \sum_j Y^j \mathbf{x}_j \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \quad i,j=1,2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.27 สำหรับส่วนประกอบของเมตริกเป็นฟังก์ชัน $g_{ij}: U \to \mathbb{R},\ 1 \le i, j \le 2$ จะนิยามโดย

$$g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = g_{ij}(u_1, u_2)$$

ดังนั้น

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$$

สำหรับเมตริกใน $\mathbf{x}(U)$ ที่นิยามโดย g_{ij} เป็นส่วนประกอบของเมตริกนั้นจะอยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ขนาด 2×2 นั่นคือ

$$\left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \left[g_{ji} \right]$$

ข้อสังเกต $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle = g_{ji}$

ดังนั้น เมทริกซ์ของส่วนประกอบเมตริกเป็นสมมาตรและจะมีเพียงสามส่วนที่แตกต่างกัน คือ

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle, \quad g_{12} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = g_{21}, \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \tag{2.3}$$

กำหนดให้

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle = E, \quad g_{12} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = g_{21} = F, \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle = G \tag{2.4}$$

และ $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ แล้วสามารถเขียนได้อีกรูปแบบคือ

$$g_{uu} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad g_{uv} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = g_{vu}, \quad g_{vv} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \tag{2.5}$$

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณาภาวะอิงพารามิเตอร์ของทรงกลมที่ในรูปแบบ

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r\cos\theta), \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$$

จงคำนวณส่วนประกอบของเมตริกทั้งสามพิกัด

วิธีทำ

$$\mathbf{x}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

$$\mathbf{x}_\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = r^2 \left[\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta \right] \\ &= r^2 \left[\cos^2\theta \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi \right) + \sin^2\theta \right] \\ &= r^2 \left[\cos^2\theta + \sin^2\theta \right] = r^2 \end{aligned}$$

$$g_{\theta\phi} = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\phi \rangle = r^2 \left[-\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi \right] = 0$$

$$g_{\phi\phi} = \langle \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\phi \rangle = r^2 \left[\sin^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi \right] = r^2 \sin^2\theta$$

ดังนั้น

$$\left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin\theta \end{bmatrix}$$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

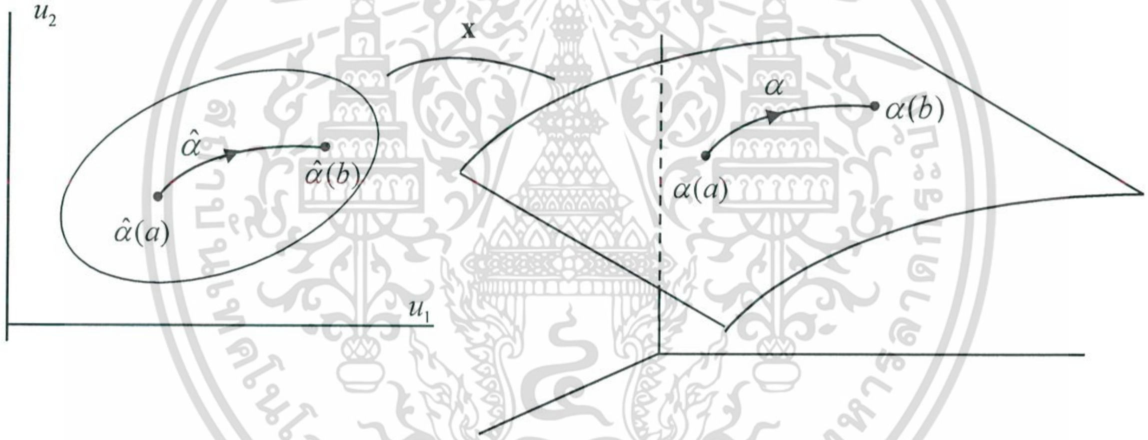
2.1.8.2 ความยาวในพื้นผิวปรกติ S

กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^3$ เป็นพื้นผิวปรกติ และให้ $\alpha:(a,b)\to S$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ในพื้นผิวปรกติ S ซึ่งเส้นโค้งอยู่ใน $\mathbb{R}^3$ นั่นคือ $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ จะสามารถคำนวณความยาวของเส้นโค้งดังนี้

$$\text{ความยาวของเส้นโค้ง } \alpha = \int_a^b \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

จากรูปแบบการหาความยาวเส้นโค้งดังกล่าวนี้ไม่มีพจน์ที่แสดงให้เห็นว่าเส้นโค้งอยู่ในพื้นผิว ดังนั้นต้องมีการเปลี่ยนรูปแบบของเส้นโค้งดังนี้

กำหนดให้ $\mathbf{x}:U\to S$ เป็นส่วนของพื้นผิวที่มีผกผันที่ต่อเนื่องใน S สมมุติให้ $\alpha \subset \mathbf{x}(U)$



รูปที่ 2.14 ความยาวในพื้นผิวปรกติ S

กระจาย α ในพจน์ของพิกัด $\hat{\alpha}=\mathbf{x}^{-1}\circ\alpha:[a,b]\to U\subset\mathbb{R}^2,\quad \hat{\alpha}(t)=(u_1(t),u_2(t))$

แล้ว $\alpha=\mathbf{x}\circ\hat{\alpha}$ นั่นคือ $\alpha(t)=\mathbf{x}(\hat{\alpha}(t))$

ดังนั้น $\alpha(t)=\mathbf{x}(u_1(t),u_2(t))$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}=\mathbf{x}_1\frac{du_1}{dt}+\mathbf{x}_2\frac{du_2}{dt}$$

หรือ

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum_i \frac{du_i}{dt}\mathbf{x}_i \qquad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $\frac{du_i}{dt}, i = 1,2$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์สัมผัสที่ขึ้นอยู่กับฐาน (basis) ของ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ คำนวณโดยใช้ผลคูณจุดของสมการ (2.6) จะได้

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = \left\langle \sum_i \frac{du_i}{dt}\mathbf{x}_i, \sum_j \frac{du_j}{dt}\mathbf{x}_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$$

จะได้

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} \tag{2.7}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับอัตราเร็วในพิกัดในพื้นผิวจะได้

$$\left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}} \tag{2.8}$$

สำหรับความยาวของเส้นโค้งพื้นผิวจะได้

$$\text{ความยาวของเส้นโค้ง } \alpha = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2}\,dt \tag{2.9}$$

2.1.8.3 ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง (Arc Length Function)

ให้ s แทนความยาวของส่วนโค้งตาม α ในพื้นผิวปรกติ S ใดๆ สามารถจัดรูปใหม่ในเทอมของ t ได้ดังนี้

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}\,dt \tag{2.10}$$

หาอนุพันธ์เทียบ t ทั้งสมการ (2.10) จะได้

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}} \tag{2.11}$$

จัดรูปสมการ (2.11) จะได้

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}}\,dt$$

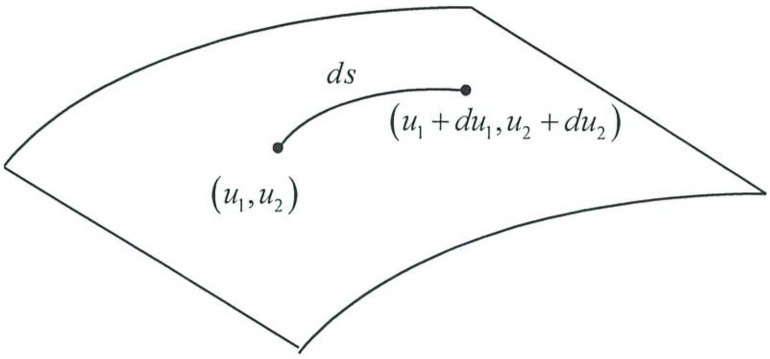
$$ds^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}\right)dt^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\left(\frac{du_i}{dt}dt\right)\left(\frac{du_j}{dt}dt\right)$$

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du_i\,du_j \tag{2.12}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แสดงดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง

ซึ่งสามารถเขียนในอีกรูปแบบคือ

$$ds^2 = g_{11}(du_1)^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}(du_2)^2 \quad (2.13)$$

กำหนดให้

$$u_1 = u, u_2 = v \quad (2.14)$$

และจากสมการ(2.4)
ดังนั้น

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2 \quad (2.15)$$

ซึ่งเรียกสมการที่ (2.15) ว่า **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (first fundamental from)**
และเรียก $g_{11} = E,\ g_{12} = F,\ g_{22} = G$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (coefficients of first fundamental from)**

บทตั้ง 2.2 [1] จากสมการ 2.15 ทำให้ได้ว่า ฟังก์ชันสามฟังก์ชัน E, F และ G มีสมบัติดังต่อไปนี้

$$EG - F^2 > 0,\ E > 0,\ G > 0$$

บน $U \subset \mathbb{R}^2$

ตัวอย่าง 2.6 จากตัวอย่าง 2.5 จะได้ว่า

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin\theta \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $g_{\theta\theta} = r^2,\ g_{\theta\phi} = 0, g_{\theta\theta} = r^2 \sin^2\theta$
ดังนั้น

$$ds^2 = g_{\theta\theta}(d\theta)^2 + 2g_{\theta\phi}d\theta d\phi + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 = r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$$ #

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

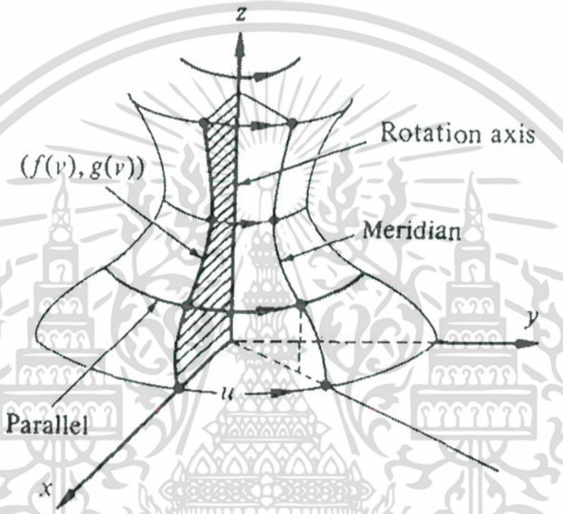
2.1.9 พื้นผิวของการหมุน (surface of revolution) [8]

ให้ $c:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับใน $S\subset\mathbb{R}^3$ โดยที่ S เป็นพื้นผิวของการหมุนเส้นโค้ง c รอบแกน z แล้ว S เรียกว่า **พื้นผิวของการหมุน**

กำหนดให้ $x:=f(v)$ และ $z:=g(v)$ เมื่อ $a<v<b$, $f(v)>0$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์สำหรับกราฟ c จะได้ภาวะอิงพารามิเตอร์

$$\mathbf{x}(u,v):=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)) \tag{2.16}$$

จากเซตเปิด $U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2;0<u<2\pi,a<v<b\}$ ไปยังพื้นผิวของการหมุน S ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 พื้นผิวของการหมุน S ใน $\mathbb{R}^3$ [8]

เส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่มีการส่ง $c:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่ทำให้ได้พื้นผิวของการหมุนแล้วเส้นกราฟ c เรียกว่า **เส้นโค้งก่อกำเนิด (Generating curve)** ของ S โดยที่แกน z เป็นแกนของการหมุน

เส้นโค้งบนพื้นผิวที่มีลักษณะเป็นวงกลมที่เกิดจากการหมุนจุดเพียงหนึ่งจุดเท่านั้นของเส้นโค้งก่อกำเนิดรอบแกนการหมุน นั่นคือ เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ v คงที่ เรียกว่า **เส้นโค้งพาราเลล (Parallel curve)** บนพื้นผิว S มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v_0)=\left(f(v_0)\cos u, f(v_0)\sin u, g(v_0)\right) \tag{2.17}$$

นอกจากนั้นเส้นโค้งที่มีลักษณะเหมือนเส้นโค้งก่อกำเนิด และหมุนออกจากเส้นโค้งก่อกำเนิดนั่นคือ เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ u คงที่ เรียกว่า **เส้นโค้งเมอริเดียน (Meridian curve)** บนพื้นผิว S มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u_0,v)=\left(f(v)\cos u_0, f(v)\sin u_0, g(v)\right) \tag{2.18}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.4) และสมการ (2.16) จะได้ว่า

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v))$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= f^2(v)\sin^2 u + f^2(v)\cos^2 u \\ &= f^2(v) \\ g_{12} &= g_{21} = F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= -f(v)f'(v)\sin u\cos u + f(v)f'(v)\sin u\cos u \\ &= 0 \\ g_{22} &= G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= \left(f'(v)\right)^2\cos^2 u\left(f'(v)\right)^2\sin^2 u + \left(g'(v)\right)^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$g_{11} = E = f^2(v),\ \ g_{12} = g_{21} = F = 0,\ \ g_{22} = G = f'(v)^2 + g'(v)^2 \tag{2.19}$$

และจากสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุน** คือ

$$ds^2 = f^2(v)(du)^2 + \left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)(dv)^2 \tag{2.20}$$

2.1.10 สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล (Christoffel symbols)

นิยาม 2.28 กำหนดให้ $\left(g^{ij}\right) = \left(g_{ij}\right)^{-1}$ นั่นคือ g^{ij} แทนส่วนประกอบ (i, j) ของอินเวอร์สของเมทริกซ์ $\left(g_{ij}\right)^{-1}$

จากสูตรการผกผันของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถกระจาย g^{ij} ในพจน์ของ g_{ij} ได้ดังนี้

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

$$g^{12} = \frac{-g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{-g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = g^{21}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากความรู้ในพีชคณิตเชิงเส้น $\left(g^{ij}\right)\left(g_{ij}\right)=I$

โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ซึ่งเท่ากับเมทริกซ์ $\left[\delta_i^j\right]$ เมื่อ δ_i^j เป็น Kronecker delta ที่นิยามโดย

$$\delta_i^j=\begin{cases}0 & ;i=j\\ 1 & ;i\neq j\end{cases}$$

จะได้

$$\left(g_{ij}\right)\left(g^{ij}\right)=\left(\delta_i^j\right)$$

กำหนดให้ $u_1:=u,\ u_2:=v,\ \mathbf{x}_i:=\mathbf{x}_{u_i},\ \mathbf{x}_{ij}:=\mathbf{x}_{u_iu_j}\ ,(i,j=1,2)$ และ $\mathbf{e}(u,v)=\dfrac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\left\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\right\|}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย เมื่อเครื่องหมาย “×” แทนด้วย ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Crass Product) จาก $\{\mathbf{x}_1(u_1,u_2),\mathbf{x}_2(u_1,u_2),\mathbf{e}(u_1,u_2)\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{x}_{ij}(u_1,u_2)$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ฐานหลักทั้งสามได้ ดังนั้นมีฟังก์ชัน $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}\ (i,j,k=1,2)$ ซึ่งทำให้

$$\mathbf{x}_{ij}(u_1,u_2)=\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(u_1,u_2)\mathbf{x}_k(u_1,u_2)+h_{ij}(u_1,u_2)\cdot\mathbf{e}(u_1,u_2) \tag{2.21}$$

เป็นจริง โดยที่

$$h_{11}=L(u,v)=\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v),\ \ h_{12}=h_{21}=M(u,v)=\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}_{uv}(u,v),\ \ h_{22}=N(u,v)=\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}_{vv}(u,v)$$

เรียกสมการ (2.21) ว่า **สมการเกาส์ (Gauss equation)** และฟังก์ชัน Γ_{ij}^k เรียกว่า **สัญลักษณ์คลิสทอฟเฟิล (Christoffel symbols)**

ทฤษฎีบท 2.4 [10] สำหรับแต่ละ $i,j,k\ \ (=1,2)$ ที่ทำให้

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{kl}\left(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}\right) \tag{2.22}$$

เมื่อ $g_{ij,l}:=\dfrac{\partial}{\partial u_k}g_{ij}$ และ Γ_{ij}^k อยู่ในรูปแบบ g_{ij} และอนุพันธ์ของ g_{ij}

<u>**พิสูจน์**</u>

$$g_{il}=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_l$$

หาอนุพันธ์เทียบ j จะได้

$$g_{il,j}=\mathbf{x}_{ij}\cdot\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_{lj}$$

โดยสมการของเกาส์ (2.21) จะได้

$$\begin{aligned}g_{il,j}&=\left(\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\mathbf{x}_k+h_{ij}\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_i\cdot\left(\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{lj}^k\mathbf{x}\varphi_k+h_{lj}\mathbf{e}\right)\\&=\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\mathbf{x}_k\cdot\mathbf{x}_l+h_{ij}\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}_l+\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{lj}^k\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_i\cdot h_{lj}\mathbf{e}\\&=\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\mathbf{x}_k\cdot\mathbf{x}_l+\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{lj}^k\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$g_{il,j}=\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}g_{kl}+\Gamma_{lj}^{k}g_{ik}\right) \tag{2.22a}$$

เนื่องจากสมการ (2.22a) เป็นจริงสำหรับทุกๆ i, j, k และก็ยังคงเป็นจริงถ้าจะสลับจาก i เป็น j และจาก j เป็น i ในสมการ (2.23)

$$g_{jl,i}=\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ji}^{k}g_{kl}+\Gamma_{li}^{k}g_{jk}\right) \tag{2.23}$$

ในทำนองเดียวกันกับ ถ้าจะสลับจาก l เป็น i และจาก i เป็น l ในสมการ (2.24)

$$g_{ji,l}=\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{jl}^{k}g_{ki}+\Gamma_{il}^{k}g_{jk}\right) \tag{2.24}$$

จากสมาการ(2.22a) (2.23) และ (2.24) จะได้

$$\begin{aligned} g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ji,l} &= \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}g_{kl}+\Gamma_{lj}^{k}g_{ik}\right)+\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ji}^{k}g_{kl}+\Gamma_{li}^{k}g_{jk}\right)-\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{jl}^{k}g_{ki}+\Gamma_{il}^{k}g_{jk}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}+\Gamma_{ji}^{k}\right)g_{kl}+\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{lj}^{k}-\Gamma_{jl}^{k}\right)g_{ki}+\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{li}^{k}-\Gamma_{il}^{k}\right)g_{jk} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$ เพราะ $\mathbf{x}_{ij}=\mathbf{x}_{ji}$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ji,l}=2\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right)g_{kl} \tag{2.24a}$$

คูณด้วย g^{lm} ตลอดสมการ(2.24a) และผลรวมแปรไปตามตัวแปร l นั่นคือ

$$2\sum_{k=1}^{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right)\delta_{k}^{m}=\sum_{l=1}^{2}g^{lm}\left(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ji,l}\right)$$

เป็นจริงเมื่อ

$$\delta_{k}^{m}=\begin{cases}1 & (if\ k=m)\\ 0 & (if\ k\neq m)\end{cases}$$

ดังนั้น

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{kl}\left(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}\right)$$ □

จากทฤษฎีบท 2.4 สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{1} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{1l}\left(g_{1l,1}+g_{1l,1}-g_{11,l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+g^{12}\left(g_{12,1}+g_{12,1}-g_{11,2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{G}{EG-F^{2}}\left(E_{u}\right)+\left(\frac{-F}{EG-F^{2}}\right)\left(2F_{u}-E_{v}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{GE_{u}}{EG-F^{2}}-\frac{2FF_{u}}{EG-F^{2}}+\frac{FE_{v}}{EG-F^{2}}\right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[GE_u - 2FF_u - FE_v\right]$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{2l}\left(g_{1l,1} + g_{1l,1} - g_{11,l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{21}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + g^{22}\left(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-F}{EG - F^2}\left(E_u\right) + \frac{E}{EG - F^2}\left(2F_u - E_v\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[-FE_u + 2F_u E - E_v E\right]$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{1l}\left(g_{1l,2} + g_{2l,1} - g_{12,l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right) + g^{12}\left(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{G}{EG - F^2}\left(E_v + F_u - F_u\right) + \frac{(-F)}{EG - F^2}\left(F_v + G_u - F_v\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[GE_v - FG_u\right]$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{2l}\left(g_{1l,2} + g_{2l,1} - g_{12,l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{21}\left(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right) + g^{22}\left(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-F}{EG - F^2}\left(E_v + F_u - F_u\right) + \frac{E}{EG - F^2}\left(G_u\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[-FE_v + EG_u\right]$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{1l}\left(g_{2l,2} + g_{2l,2} - g_{22,l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right) + g^{12}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{G}{EG - F^2}\left(2F_v - G_u\right) + \frac{(-F)}{EG - F^2}\left(G_v\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[2GF_v - GG_u - FG_v\right]$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{2l}\left(g_{2l,2} + g_{2l,2} - g_{22,l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{21}\left(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right) + g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-F}{EG - F^2}\left(2F_v - GL_u\right) + \frac{E}{EG - F^2}\left(G_v\right)\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[-2FF_v + FG_u + EG_v\right]$$

ดังนั้น

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u G - 2FF_u - FE_v}{2\left(EG - F^2\right)}, \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v G - FG_u}{2\left(EG - F^2\right)},$$
$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2F_v G - G_u G - FG_v}{2\left(EG - F^2\right)}, \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2\left(EG - F^2\right)}, \quad (2.25)$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u E - FE_v}{2\left(EG - F^2\right)}, \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2F_v F + G_u F}{2\left(EG - F^2\right)}$$

หรือจะพิจาณาจาก สมการเกาส์ [8] ที่อยู่ในรูปแบบ

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + h_{11}(u_1, u_2) \cdot \mathbf{e}(u_1, u_2)$$
$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + h_{12}(u_1, u_2) \cdot \mathbf{e}(u_1, u_2) \quad (2.26)$$
$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + h_{22}(u_1, u_2) \cdot \mathbf{e}(u_1, u_2)$$

ใช้ผลคูณภายในจากสมการ (2.26) กับ $\mathbf{x}_u$ และ $\mathbf{x}_v$ จะได้

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{11}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \Gamma_{11}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) + h_{11}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_u)$$
$$= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$
$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{11}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + \Gamma_{11}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) + h_{11}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_v)$$
$$= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$
$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{12}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \Gamma_{12}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) + h_{12}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_u)$$
$$= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F$$
$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{12}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + \Gamma_{12}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) + h_{12}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_v)$$
$$= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G$$
$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = \Gamma_{22}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \Gamma_{22}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) + h_{22}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_u)$$
$$= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F$$
$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \Gamma_{22}^1 (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + \Gamma_{22}^2 (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) + h_{22}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_v)$$
$$= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G$$

เนื่องจาก

- $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u = \frac{1}{2} E_u$

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}) - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}$$
$$= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uu}$$
$$2\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u$$
$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u = \frac{1}{2} E_u$$

- $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v = \frac{1}{2} E_v$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u &= \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv}-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv}\\ &=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_v-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv}\\ 2\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u &= (\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_v\\ \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}E_v\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v=\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u\right)_u=\frac{1}{2}G_u$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv}-\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv}\\ &=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_u-\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv}\\ 2\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v &= (\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_u\\ \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)=\frac{1}{2}G_u\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vu}-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vu}\\ &=(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vu})-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv})\\ &=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_u-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)_v\\ &=F_u-\frac{1}{2}E_v\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v=\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v\right)_v=\frac{1}{2}G_v$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv} &= (\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}+\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v)-\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v\\ &=(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)_v-\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v\\ 2\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv} &= (\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)_v\\ \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)_v=\frac{1}{2}G_v\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u &= \Gamma_{11}^1E+\Gamma_{11}^2F=\frac{1}{2}E_u\\ \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v &= \Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G=F_u-\frac{1}{2}E_v\end{aligned}\qquad(2.27)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u &= \Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F=\frac{1}{2}E_v\\ \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v &= \Gamma_{12}^1F+\Gamma_{12}^2G=\frac{1}{2}G_u\end{aligned}\qquad(2.28)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u &= \Gamma_{22}^1E+\Gamma_{22}^2F=F_v-\frac{1}{2}G_v\\ \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v &= \Gamma_{22}^1F+\Gamma_{22}^2G=\frac{1}{2}G_v\end{aligned}\qquad(2.29)$$

จากสมการ (2.27) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ นั่นคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{1} \\ \Gamma_{11}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

จากกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) จะได้

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2}E_u G - FF_u - \frac{1}{2}FE_v}{EG - F^2} \tag{2.31}$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{EF_u - \frac{1}{2}EE_v - \frac{1}{2}FE_u}{EG - F^2} \tag{2.32}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการ (2.30) จะได้

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{\frac{1}{2}E_v G - \frac{1}{2}FG_u}{EG - F^2} \tag{2.33}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{\frac{1}{2}G_u E - \frac{1}{2}FE_v}{EG - F^2} \tag{2.34}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{F_v G - \frac{1}{2}G_u G - \frac{1}{2}FG_v}{EG - F^2} \tag{2.35}$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{\frac{1}{2}EG_v - F_v F + \frac{1}{2}G_u F}{EG - F^2} \tag{2.36}$$

เนื่องจากคู่อันดับ (u,v) เป็นคู่อันดับเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) จากสมการ (2.19) นั่นคือ $F(u,v)=0$ จะได้

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^{1} = \frac{E_u}{2E}, \Gamma_{12}^{1} = \frac{E_v}{2E}, \\ &\Gamma_{22}^{1} = \frac{-G_u}{2E}, \Gamma_{11}^{2} = \frac{-E_v}{2G}, \\ &\Gamma_{12}^{2} = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^{2} = \frac{G_v}{2G} \end{aligned} \tag{2.37}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.11 จีออเดซิก (Geodesics) [2]

นิยาม 2.29 ให้ $S \subset \mathbb{R}^2$ เป็นพื้นผิวที่หาอนุพันธ์ได้ และให้ $\alpha:(a,b) \to S$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว เส้นโค้ง α เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{d\alpha'}{dt} = 0 \text{ สำหรับทุก } t \in (a,b)$$

หรือ
$$\alpha''(t) = 0 \text{ สำหรับทุก } t \in (a,b)$$

2.1.11.1 จีออเดซิกในระนาบ

จากนิยาม 2.29 จะได้ว่า จีออเดซิกในระนาบคือเส้น $\alpha:(a,b) \to \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $\alpha''(t) = 0$ สำหรับทุก $t \in (a,b)$

ให้ $ax + by = c$ เป็นสมการที่ให้กราฟเป็นเส้นตรงในระนาบ xy เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่ แล้วสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ โดยให้

$x = mt + p$ เมื่อ m และ p เป็นค่าคงที่ แล้ว $a(mt+p) + by = c$

จะได้ $y = nt + q$ เมื่อ $n = \dfrac{-am}{b}$ และ $q = \dfrac{c - ap}{b}$

ดังนั้น α ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ t ของเส้นตรงในระนาบ คือ $\alpha(t) = (mt + p, nt + q)$ เมื่อ m, n, p และ q เป็นค่าคงที่

โดยการหาอนุพันธ์ของ α ได้ $\alpha'(t) = (m, n)$ และเมื่อหาอนุพันธ์ซ้ำได้ $\alpha''(t) = 0$ นั่นคือเส้นตรงเป็นจีออเดซิกในระนาบ

2.1.11.2 จีออเดซิกในพื้นผิว

ถ้าให้ α เป็นเส้นโค้งในพื้นผิว S ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $\alpha''(t) = 0$ แล้วไม่สามารถหาสมการเส้นโค้ง α ได้ เนื่องจาก ถ้า $\alpha''(t) = 0$ แล้ว $\alpha'(t) = (m, n)$ เมื่อ m และ n เป็นค่าคงที่ และจะได้ $\alpha'(t) = (mt + p, nt + p)$ เมื่อ m, n, p และ q เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงไม่ใช่เส้นโค้ง

แต่เนื่องจาก $\alpha''(t) = 0$ แล้ว $\alpha(t)$ เป็นเวกเตอร์ค่าคงที่ และ $|\alpha(t)|$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะใช้สมบัติการเป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่ในการพิจารณาว่าเส้นโค้งเป็นจีออเดซิกในพื้นผิวที่กำหนดหรือไม่

บทตั้ง 2.3 [2] จีออเดซิกเป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่

พิสูจน์ จากนิยาม 2.29 เส้นโค้ง $\alpha(t)$ ในพื้นผิวที่หาอนุพันธ์ได้ S เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ $\alpha''(t) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นในการพิสูจน์ช่วงแรกจะต้องแสดงว่า

ถ้า $\alpha''(t) = 0$ แล้ว $\alpha(t)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่

และในทางกลับกันจะต้องแสดงว่า

ถ้า $\alpha(t)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่ แล้ว $\alpha''(t) = 0$

การพิสูจน์ช่วงแรก

ถ้า $\alpha''(t) = 0$ แล้ว $\alpha'(t) = (m,n)$ เมื่อ m และ n เป็นค่าคงที่

และจะได้ $|\alpha(t)| = \sqrt{m^2+n^2}$ นั่นคือ $\alpha(t)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่

การพิสูจน์ช่วงหลัง

ถ้า $\alpha(t)$ เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่ แล้ว $|\alpha'(t)| = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์

เนื่องจาก $\alpha'(t)\bullet\alpha'(t) = |\alpha'(t)|^2$ ดังนั้น $\alpha'(t)\bullet\alpha'(t) = c^2$

โดยการหาอนุพันธ์ซ้ำจะได้

$$\alpha'(t)\cdot\alpha''(t) + \alpha''(t)\cdot\alpha'(t) = 0$$

นั่นคือ $\alpha'(t)\bullet\alpha''(t) = 0$

มีกรณีที่เป็นไปได้สองกรณีคือ $\alpha'(t) = 0$ หรือ $\alpha''(t) = 0$

พิจารณากรณี $\alpha'(t) = 0$ จะได้ $|\alpha'(t)| = 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

แสดงว่า $\alpha'(t) \neq 0$ ดังนั้นสมการเป็นจริงเมื่อ $\alpha'(t) = 0$

จากการพิสูจน์ทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า เส้นโค้งในพื้นผิวเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อเส้นโค้งเป็นเส้นโค้งอัตราเร็วคงที่ #

จากบทตั้ง 2.1 สามารถสรุปได้ว่า

ถ้า $\alpha'(t):(a,b) \rightarrow S$ เป็นเส้นโค้งในพื้นผิว S และ $\alpha'(t)$ เป็นจีออเดซิกใน S แล้ว $\alpha''(t)\cdot\alpha'(t) = 0$

เนื่องจากผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใดๆเป็นศูนย์แล้วเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น $\alpha''(t)$ และ $\alpha'(t)$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และเนื่องจาก $\alpha'(t)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวสัมผัสกับพื้นผิว ดังนั้นถ้า $\alpha(t):(a,b) \rightarrow S$ เป็นเส้นโค้งในพื้นผิว S แล้ว $\alpha'(t)$ เป็นจีออเดซิกใน S ถ้า $\alpha''(t)$ ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสกับพื้นผิว S ณ แต่ละค่าของ t ซึ่ง $t \in (a,b)$

ตัวอย่าง 2.7 จงแสดงว่าวงกลมใหญ่ในทรงกลมเป็นจีออเดซิก

วิธีทำ ให้ a เป็นรัศมีของทรงกลม แล้วสมการของทรงกลมใหญ่เมื่อพิจารณาในระนาบ xy คือ

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0) \tag{2.38}$$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$$

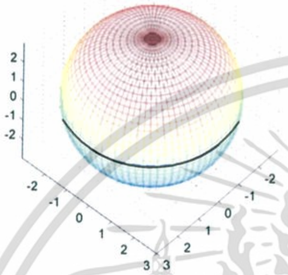
และ
$$\mathbf{x}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

เนื่องจาก
$$|\mathbf{x}'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a \neq 0$$

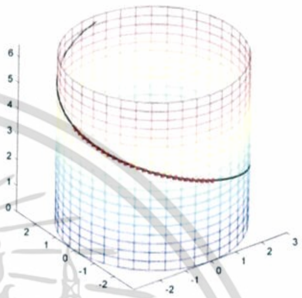
แล้ว $\mathbf{x}(t)$ เป็นจีออเดซิก นอกจากนี้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\mathbf{x}'(t)$ และ $\mathbf{x}''(t)$ คือ

$$\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}''(t) = a^2\cos t\sin t - a^2\sin t\cos t + 0 = 0$$

นั่นคือวงกลมใหญ่ในทรงกลมเป็นจีออเดซิกดังรูปที่ 2.17 #



รูปที่ 2.17
จีออเดซิกในทรงกลม



รูปที่ 2.18
จีออเดซิกในทรงกระบอกกลม

ตัวอย่าง 2.8 จงแสดงว่าเส้นเกลียวในทรงกระบอกกลมเป็นจีออเดซิก

วิธีทำ ให้ a เป็นรัศมีของทรงกระบอกกลม และแกน z เป็นแกนของทรงกระบอก แล้วสมการของเส้นเกลียวในทรงกระบอกกลมที่ระยะช่วงเกลียวมีค่า b คือ

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \tag{2.39}$$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

และ
$$\mathbf{x}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

เนื่องจาก
$$|\mathbf{x}'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

แล้ว $\mathbf{x}(t)$ เป็นจีออเดซิก นอกจากนี้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\mathbf{x}'(t)$ และ $\mathbf{x}''(t)$ คือ

$$\mathbf{x}'(t)\cdot\mathbf{x}''(t) = a^2\cos t\sin t - a^2\sin t\cos t + 0 = 0$$

นั่นคือว่าเส้นเกลียวในทรงกระบอกกลมเป็นจีออเดซิกดังรูปที่ 2.17 #

2.1.11.3 รูปแบบอิงพารามิเตอร์ของเส้นโค้งกับการเป็นจีออเดซิก [2]

เส้นโค้ง $\beta(t):(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^3$ ที่กำหนดโดย $\beta(t) = (t^3, t^3, 0)$ ให้ภาพเป็นเส้นตรงในระนาบ แต่พบว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\beta'(t) = (3t^2, 3t^2, 0)$$

และ $$\beta''(t) = (6t, 6t, 0)$$

แล้ว $\beta'(t)\cdot\beta''(t) = 18t^3 + 18t^3 + 0 = 36t^3$

นั่นคือ $\beta'(t)\cdot\beta''(t) \neq 0$ ยกเว้นเมื่อ $t = 0$ แล้ว $\beta'(0)\cdot\beta''(0) = 0$

จากบทตั้ง 2.3 พบว่าจีออเดซิกเป็นเส้นโค้งที่มีอัตราเร็วคงที่ ดังนั้นจึงต้องจัดเส้นโค้งให้อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์อัตราเร็วหนึ่งหน่วย (parametrized unit speed) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จากสมการของทรงกลมใหญ่ $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ และ

$$|\mathbf{x}'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a \neq 0$$

สามารถจัดเป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์อัตราเร็วหนึ่งหน่วยได้โดยเริ่มต้นด้วย การหาฟังก์ชันความยาวของเส้นกราฟ $s(t)$ โดย $s(t) = \int_0^t |\mathbf{x}'(\tau)|\,d\tau = \int_0^t a\,d\tau = at$

ดังนั้น $t = \frac{s}{a} = t(s)$ นั่นคือ $s = at$

จะได้ $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(t(s)) = (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}, 0)$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = (-\sin\frac{s}{a}, \cos\frac{s}{a}, 0)$$

และ $$|\tilde{\mathbf{x}}'(s)| = \sqrt{\sin^2\frac{s}{a} + \cos^2\frac{s}{a}} = 1$$

จากบทตั้ง 2.3 ได้ว่า $\tilde{\mathbf{x}}'(s)$ เป็นจีออเดซิก

บทตั้ง 2.4 [2] ให้ $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ซึ่ง α' ไม่เป็นศูนย์ใน $[a,b]$ แล้ว สามารถจัด α เป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์ความยาวเส้นโค้ง และถ้า $\tilde{\alpha}(s)$ อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ความยาวเส้นโค้งแล้ว $|\tilde{\alpha}(s)| = 1$

พิสูจน์ ให้ $L(\alpha)$ เป็นความยาวของเส้นโค้ง α ในช่วง $[a,b]$

$s(t)$ เป็นฟังก์ชันความยาวเส้นโค้ง α ในช่วง $[a,b]$ แล้ว

$s(t) = \int_0^t \alpha'(\tau)d\tau$ เมื่อ $s(a) = 0$ และ $s(b) = L(\alpha)$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dt}s(t) = \|\alpha'(\tau)\| > 0$$

ดังนั้น $s(t)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นทางเดียวแท้จริง จะได้ $s = s(t)$ มีฟังก์ชันผกผัน $t = t(s)$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับเมื่อ $s \in [0, L(\alpha)]$ และ $t \in [a,b]$

ให้ $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$ จะได้ $\tilde{\alpha}[0, L(\alpha)] = \alpha[a,b]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $$\tilde{\alpha}'(s)=\alpha'(t(s))=\frac{d}{dt}\alpha(t(s))\frac{dt}{ds}=\frac{\alpha'(t)}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$

นั่นคือ $\tilde{\alpha}'(s)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยกับเส้นกราฟ c และ $|\alpha'(t)|=1$ □

นิยาม 2.30 [10] ให้ $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ถ้า α อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ความยาวเส้นโค้ง แล้ว จะกล่าวว่า α เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์อัตราเร็วหนึ่งหน่วย

ทฤษฎีบท 2.5[10] $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ เป็นจีออเดซิกในพื้นผิวก็ต่อเมื่อ α เป็นเส้นโค้งอิงพารามิเตอร์อัตราเร็วหนึ่งหน่วย

พิสูจน์ จากบทตั้ง 2.3 และ บทตั้ง 2.4 การพิสูจน์เสร็จสมบูรณ์ □

นิยาม 2.31 [10] ให้ $\alpha:[a,b]\to S$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ในพื้นผิว S แล้วเส้นโค้ง α เรียกกว่า จีออเดซิกบน S ถ้า $\alpha''(s)$ ตั้งฉากกับปริภูมิสัมผัส $T_{\alpha(s)}(S)$ สำหรับแต่ละ $s\in(a,b)$

จากนิยาม 2.31 จะได้ว่า $\alpha'(s)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $\alpha(s)$ ดังนั้น $\alpha'(s)$ อยู่ในปริภูมิสัมผัส $T_{\alpha(s)}(S)$ และ $\alpha'(s)$ ตั้งฉากกับ $\alpha''(s)$ นั่นคือ

$$\alpha'(s)\cdot\alpha''(s)=0 \tag{2.40}$$

นิยาม 2.32 [10] ให้ $c:[a,b]\to S$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ บนพื้นผิว S วงศ์เส้นโค้ง (Family of curves) $\{\psi_\tau;\tau\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}$ นิยามบน $[a,b]$ ที่อยู่บน S จะเรียกว่า **การแปรผัน (Variation)** ของ c ถ้า $\psi_0=c,\ \psi_{\tau(s)}=c(s)$ ณ $s=a,b$ และการส่ง

$$\Psi:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$$

นิยามให้ $\Psi(t,\tau)=\psi_\tau(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ

บทตั้ง 2.5 [10] ให้ $\psi_\tau;\tau\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ เป็นการแปรผันของเส้นโค้ง c ที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ $\alpha:[a,b]\to S$ ซึ่งทำให้ $l:=|\alpha'(t)|$ เป็นค่าคงที่บวก แล้ว

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_0 L(\psi_\tau)=-\frac{1}{l}\int_a^b\psi_\tau(t,0)\cdot\alpha''(t)dt \tag{2.41}$$

เป็นจริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.6 [10] ให้ $\alpha:[a,b]\to S$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบน S เมื่อ $|\alpha'(t)|\equiv|\alpha'(a)|$ แล้ว α เป็นจีออเดซิกบน S ก็ต่อเมื่อ ทุกๆการแปรผัน $\{\psi_\tau\}_\tau$ ของ α

$$\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_0 L(\psi_\tau)=0 \tag{2.41}$$

บทแทรก 2.1 [10] กำหนดให้ $\alpha:[a,b]\to S$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบน S เมื่อ $|\alpha'(t)|\equiv|\alpha'(a)|>0$ ถ้า α เป็นเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่าง $\alpha(a)$ และ $\alpha(b)$ บน S แล้ว α เป็นจีออเดซิกบน S

ทฤษฎีบท 2.7[10] ให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$ เป็นเส้นโค้งที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนพื้นผิว S แล้ว α เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ α เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2) \tag{2.42}$$

พิสูจน์ จากสมการ

$$\alpha(s)=\mathbf{x}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ s จะได้

$$\alpha'(s)=\mathbf{x}_{u_1}u_1'+\mathbf{x}_{u_2}u_2'$$

หรือ

$$\alpha'(s)=\sum_{i=1}^{2}\mathbf{x}_i\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)$$

จากสมการ (2.21)จะได้

$$\alpha''(s)=\sum_{i=1}^{2}\mathbf{x}_i\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i''(s)+\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_k\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)$$
$$+\left(\sum_{i,j=1}^{2}\mathbf{x}_{ij}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)\right)\mathbf{e}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$$

ถ้า α เป็นจีออเดซิกแล้ว $\alpha''(s)$ ตั้งฉากกับ S ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะได้

$$\sum_{k=1}^{2}\left(u_k''(s)+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)\right)\mathbf{x}_k\left(u_1(s),u_2(s)\right)=0$$

เนื่องจาก $\{\mathbf{x}_1\left(u_1(s),u_2(s)\right),\mathbf{x}_2\left(u_1(s),u_2(s)\right)\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นจะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2)$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า $u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2)$ เป็นจริงแล้ว

$$\alpha''(s)=\left(\sum_{i,j=1}^{2}h_{ij}u_i'u_j'(s)\right)\mathbf{e}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$$

นั่นคือ α เป็นจีออเดซิกบน S □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.8 [10] จีออเดซิก $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ บนพื้นผิวของการหมุน S ใน $\mathbb{R}^3$ เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2=0 \qquad (2.43)$$

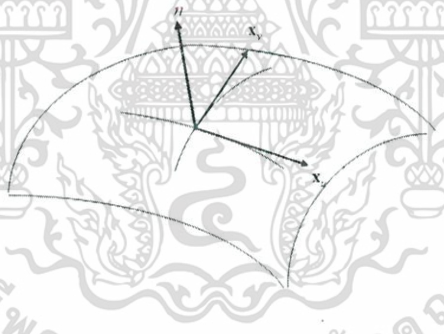
$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{G_v}{2G}v'^2=0 \qquad (2.44)$$

ในทางกลับกัน เส้นโค้ง $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ ใน S เป็นไปตามสมการ (2.43) และ (2.44) ซึ่งเป็นจีออเดซิกบนการหมุน S

นิยาม 2.33 [10] ให้ p เป็นจุดใดๆบนพื้นผิว S แล้วสำหรับแต่ละ $\mathbf{a}\in T_p(S)$ มีจีออเดซิกเพียงหนึ่งเดียว $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ ซึ่ง $\alpha(0)=p,\alpha'(0)=\mathbf{a}$

สามารถพิจารณาในการหาสมการจีออเดซิกอีกรูปแบบหนึ่ง ดังนี้

ให้ c เป็นเส้นโค้งจีออเดซิก (geodesic curve) บนพื้นผิว $\alpha=\mathbf{x}\left(u(s),v(s)\right)$ เพราะว่าเป็นพื้นผิวปกติที่มี n เป็นเส้นปกติ (เส้นตั้งฉากกับพื้นผิวซึ่งตั้งฉากกับทุกเส้นโค้ง c ที่อยู่บนพื้นผิวด้วย)



รูปที่ 2.19 เส้นตั้งฉากกับพื้นผิว

$$n\cdot\mathbf{x}_u=0 \text{ และ } n\cdot\mathbf{x}_v=0 \qquad (2.45)$$

เนื่องจาก $\alpha=\mathbf{x}\left(u(s),v(s)\right)$ หาอนุพันธ์เทียบกับความยาวของส่วนโค้ง จะได้ เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง c นั่นคือ

$$t=\frac{d\mathbf{x}}{ds}\left(u(s),v(s)\right)=\mathbf{x}_u\frac{du}{ds}+\mathbf{x}_v\frac{dv}{ds} \qquad (2.46)$$

อนุพันธ์ของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง c บนพื้นผิว S เทียบกับความยาวของส่วนโค้งคือ

$$\frac{dt}{ds}=\mathbf{x}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{du}{ds}\left[\mathbf{x}_{uu}\frac{du}{ds}+\mathbf{x}_{uv}\frac{dv}{ds}\right]+\mathbf{x}_v\frac{d^2v}{ds^2}+\frac{dv}{ds}\left[\mathbf{x}_{vu}\frac{du}{ds}+\mathbf{x}_{vv}\frac{dv}{ds}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \mathbf{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \mathbf{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{d^2v}{ds^2} + \mathbf{x}_{vu}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\frac{dt}{ds} = \mathbf{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{x}_u\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right) \quad (2.47)$$

จาก Frenet –Serret ที่นิยามโดย $\kappa n = \dfrac{dt}{ds}$ เมื่อ κ เป็นค่าความโค้ง

และจากสมการ(2.45) และ (2.47) จะได้

$$n \cdot \mathbf{x}_u = \frac{dt}{ds} \cdot \mathbf{x}_u = \kappa n \cdot \mathbf{x}_u = 0 \quad (2.48)$$

เพราะฉะนั้น

$$0 = \left[\mathbf{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{x}_u\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)\right] \cdot \mathbf{x}_u$$

$$= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)$$

ดังนั้น

$$(\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + E\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + F\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right) = 0 \quad (2.49)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$n \cdot \mathbf{x}_v = \frac{dt}{ds} \cdot \mathbf{x}_v = \kappa n \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$0 = \left[\mathbf{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{x}_u\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + \mathbf{x}_v\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)\right]$$

$$= (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)$$

ดังนั้น

$$(\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + G\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) = 0 \quad (2.50)$$

เมื่อ E, F, G เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบมูลฐานที่หนึ่งของพื้นผิว

กำจัด $\dfrac{d^2v}{ds^2}$ จากสมการ(2.49) โดยดำเนินการดังนี้

นำ G คูณกับสมการ (2.49) จะได้

$$G \cdot (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2G \cdot (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G \cdot (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + GE\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + GF\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right) = 0 \quad (2.51)$$

นำ F คูณกับสมการ (2.50) จะได้

$$F \cdot (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F \cdot (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + F \cdot (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) + FG\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) = 0 \quad (2.52)$$

นำสมการ (2.51) - (2.52) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(G\cdot(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)-F\cdot(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(G\cdot(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u)-F\cdot(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+$$
$$\left(G\cdot(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u)-F\cdot(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v)\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\left(GE-F^2\right)\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)=0 \tag{2.53}$$

นำสมการ (2.27) (2.28) และ (2.29) แทนในสมการ (2.53) จะได้

$$\left(G\frac{1}{2}E_u-FF_u+\frac{1}{2}FF_v\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(G\frac{1}{2}E_v-F\frac{1}{2}G_u\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\left(GF_v-\frac{1}{2}GG_u-\frac{1}{2}FG_v\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+$$
$$\left(GE-F^2\right)\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)=0$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\frac{GE_u-2FF_u+FF_v}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(\frac{GE_v-FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\left(\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0 \tag{2.54}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0 \tag{2.55}$$

โดยที่

$$\Gamma_{11}^1=\frac{GE_u-2FF_u+FF_v}{2\left(EG-F^2\right)}$$
$$\Gamma_{12}^1=\frac{GE_v-FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}$$
$$\Gamma_{22}^1=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2\left(EG-F^2\right)}$$

กำจัด $\frac{d^2u}{ds^2}$ จากสมการ(2.49) โดยดำเนินการดังนี้

นำ F คูณกับสมการ (2.49) จะได้

$$F(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+F(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+FE\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)+F^2\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)=0 \tag{2.56}$$

นำ E คูณกับสมการ (2.49) จะได้

$$E\cdot(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2E\cdot(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+E\cdot(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+FE\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)+EG\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)=0 \tag{2.57}$$

นำสมการ (2.56)-(2.57)จะได้

$$\left(E\cdot(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)-F\cdot(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(E\cdot(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)-F\cdot(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u)\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+$$
$$\left(E\cdot(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v)-F\cdot(\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u)\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\left(EG-F^2\right)\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)=0 \tag{2.58}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (2.27) (2.28) และ (2.29) แทนในสมการ (2.58) จะได้

$$\left(EF_u-\frac{1}{2}EE_v-\frac{1}{2}FE_u\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}EG_u-F\frac{1}{2}E_v\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\left(E\frac{1}{2}G_v-FF_v+\frac{1}{2}FG_u\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$+\left(EG-F^2\right)\left(\frac{d^2v}{ds^2}\right)=0$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\left(\frac{2EF_u-EE_v-E_uF}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\left(\frac{EG_u-FF_v}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\left(\frac{EG_v-2FF_v+G_uF}{2\left(EG-F^2\right)}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0 \qquad (2.59)$$

โดยที่ $\Gamma_{11}^2=\dfrac{2EF_u-EE_v-E_uF}{2\left(EG-F^2\right)}$ $\Gamma_{12}^2=\dfrac{EG_u-FF_v}{2\left(EG-F^2\right)}$ $\Gamma_{22}^2=\dfrac{EG_v-2FF_v+G_uF}{2\left(EG-F^2\right)}$

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $u_1(s)=u, u_2(s)=v$ และ $\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{kl}\left(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}\right)$ จากสมการ (2.55) และ(2.59) จะได้ $u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0, \quad (i=1,2)$

2.1.12 ภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรล (The Clairaut Parameterization or Clairaut Patch)

สำหรับส่วนของพื้นผิวเชิงตั้งฉากซึ่ง E และ G ขึ้นอยู่กับเพียง u หรือ E และ G ขึ้นอยู่กับเพียง v จะเรียกว่า**ภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรล**

นิยาม 2.34 สำหรับ $\mathbf{x}(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ u เมื่อ

$$E_v=G_v=F=0 \qquad (2.60)$$

และ $\mathbf{x}(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (Clairaut เมื่อ

$$E_u=G_u=F=0 \qquad (2.61)$$

เพราะฉะนั้น ภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวที่เกิดจากหมุน (2.16)
เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v เพราะฉะนั้น จากสมการ (2.37)
สัญลักษณ์คลิสทอฟเฟิล คือ

$$\Gamma_{11}^1=0\,,\Gamma_{11}^2=\frac{-E_v}{2G}\,,\Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E}\,,\Gamma_{12}^2=0\,,\Gamma_{22}^1=0\,,\Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G} \qquad (2.62)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.9 [4] สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v คือ

$$u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0 \tag{2.63}$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0 \tag{2.64}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก ภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวที่เกิดจากหมุน (2.16) เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (v-Clairaut Patch) ซึ่งเป็นไปตามสมการ (2.61) นั่นคือ $E_u = G_u = F = 0$ และจากทฤษฎีบท 2.8

จะได้ สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v คือ

$$u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0$$

และ
$$v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0$$ □

จากสมการ (2.19) นั่นคือ $g_{11} = E = f^2(v),\ g_{12} = g_{21} = F = 0,\ g_{22} = G = f'(v)^2 + g'(v)^2$
หาอนุพันธ์สมการ (2.19) เทียบ v จะได้

$$g_{11,2} = E_v = 2f(v)f'(v) \text{ และ } g_{22,2} = G_v = 2f'(v)f''(v) + 2g'(v)g''(v) \tag{2.65}$$

นำสมการ (2.65) แทนในสมการ (2.63)และสมการ (2.64)
จะได้

$$u'' + \frac{2f(v)f'(v)}{f^2(v)}u'v' = 0 \tag{2.66}$$

$$v'' - \frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}u'^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}v'^2 = 0 \tag{2.67}$$

ทฤษฎีบท 2.10 [10] ให้ $\alpha(s) := \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นจีออเดซิกเป็น s ถ้า $\xi(s)$แทนมุมระหว่าง $\alpha(s)$ และพาราเลลที่ผ่าน $\mathbf{x}(u(s), v(s))$ แล้ว

$$f(v)\cos\xi(s) = c \tag{2.68}$$

เป็นอิสระจากพารามิเตอร์ s

ข้อสังเกต $f(v)$ คือรัศมีของพาราเลลที่ผ่าน $\mathbf{x}(u(s), v(s))$ แล้วสมการ $f(v)\cos\xi(s) = c$ เรียกสมการนี้ว่า **ความสัมพันธ์แกลโรล (Clairaut's relation)** และเรียก c ว่า **ค่าคงที่ของแกลโรล (Clairaut's constant)**

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริงที่มีค่ากำหนดที่แน่นอน s พาราเลล c ที่ผ่าน $\alpha(s)$ กำหนดโดย

$$c(s) = \mathbf{x}(u, v(s)), u \in \mathbb{R}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $$c'(u)=\mathbf{x}_u\left(u,v(s)\right)=\mathbf{x}_1\left(u,v(s)\right)$$

และ $$\alpha'(s)=\sum_{i=1}^{2}\mathbf{x}_i\left(u(s),v(s)\right)u_i'(s)$$

เป็นจริง

จะได้ $$\cos\xi(s)=\frac{c'(u)\cdot\alpha'(s)}{|c'(u)||\alpha'(s)|}$$

($\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\alpha(s)$ และพาราเลล นั่นคือเป็นมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับ $\alpha(s)$ และเส้นสัมผัสกับพาราเลล)

$$\cos\xi(s)=\frac{\sum_{i=1}^{2}(\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_1)u_i'(s)}{\left\|\mathbf{x}_1\left(u,v(s)\right)\right\|\left\|\alpha'(s)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{E}\,|\alpha'(s)|}Eu_1'(s)$$

$$=\frac{\sqrt{E}}{a}u_1'(s)$$

$$=\frac{f(v)}{a}u_1'(s)$$

เมื่อ $a:=|\alpha'(s)|$ เป็นค่าคงที่บวก ดังนั้น จะได้

$$f(v)\cos\xi(s)=\frac{f^2(v)}{a}u'(s)$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{ds}f(v)\cos\xi(s)=\frac{f(v)f'(v)}{a}u'(s)v'(s)+\frac{f^2(v)}{a}u''(s)$$

$$=\frac{f^2(v)}{a}\left(\frac{f(v)f'(v)}{f^2(v)}u'(s)v'(s)+u''(s)\right)$$

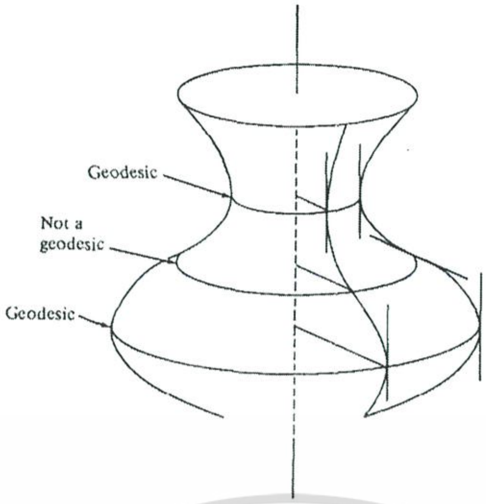
จากสมการจีออเดซิก $u''(s)+\dfrac{f(v)f'(v)}{f^2(v)}u'(s)v'(s)=0$

ดังนั้น $\dfrac{d}{ds}f(v)\cos\xi(s)=0$

นั่นคือ $f(v)\cos\xi(s)=c$ เมื่อ c เป็นค่าที่ □

ถ้าพิจารณาในทางเรขาคณิต เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับพาราเลลของพื้นผิวของการหมุนที่เป็นจีออเดซิก นั่นคือ เส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลขนานกับแกนการหมุน จะทำให้พาราเลลเป็นจีออเดซิก ดังรูปที่ 2.20

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.20 เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับพาราเลลของพื้นผิวของการหมุนที่เป็นจีออเดซิก **[8]**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 จีออเดซิกโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (Geodesics Using Mathematica)

เจคอบ [6] ศึกษาสมการจีออเดซิกในพื้นผิวของการหมุนในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอกและทรงห่วงยาง โดยจัดรูปสมการจีออเดซิกของทรงกลมให้อยู่ในรูปปริพันธ์พร้อมกับหาผลเฉลย นอกจากนี้ยังได้ศึกษาสมการจีออเดซิกในพื้นผิวของการหมุน คือ

$$u'' + \frac{E_u}{2E}u'^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{G_u}{2E}v'^2 = 0 \tag{2.43}$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0 \tag{2.44}$$

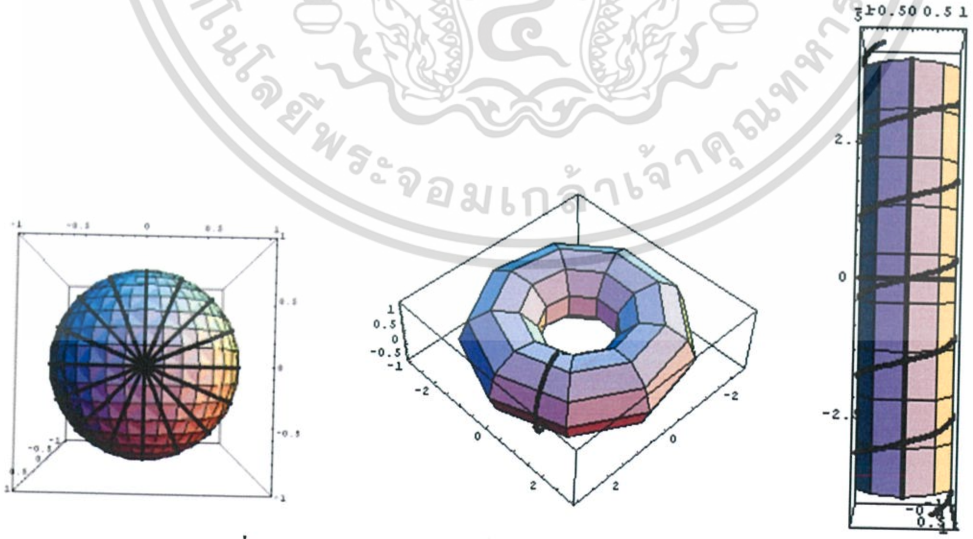
โดยการลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งดังนี้

$$u' = p \Rightarrow u'' = p' \text{ และ } v' = q \Rightarrow v'' = q'$$

จะได้ระบบสมการเชิงสองมิติ

$$\begin{aligned} u' &= p \\ v' &= q \\ p' &= -\frac{E_u}{2E}p^2 - \frac{E_v}{E}pq + \frac{G_u}{2E}q^2 \\ q' &= \frac{E_v}{2G}p^2 - \frac{G_u}{G}pq - \frac{G_v}{2G}q^2 \end{aligned}$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (Mathematica) ซึ่งแสดงได้ดังรูป 2.21

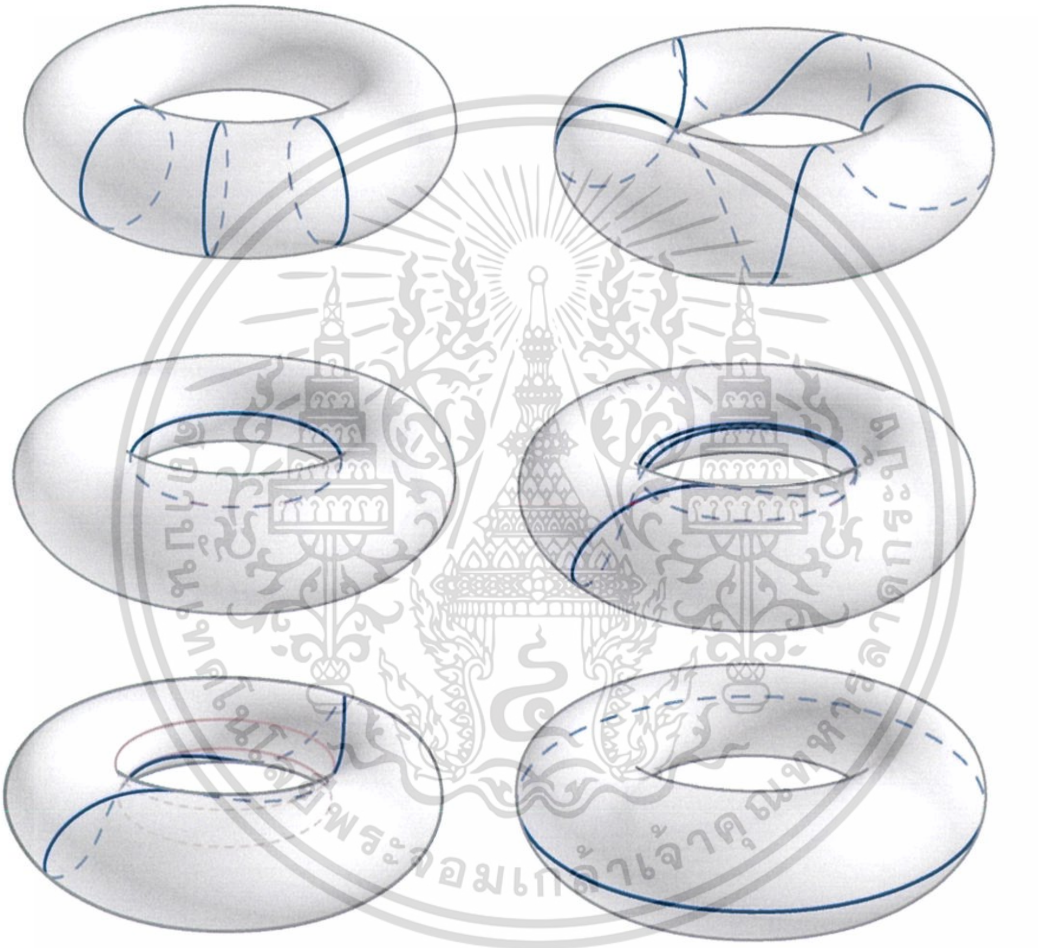


รูปที่ 2.21 จีออเดซิกบนพื้นผิวในงานวิจัยของเจคอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 ค่าความโค้งและจีออเดซิกของทรงห่วงยาง (The Curvature and Geodesics of the Torus)

มาร์ค ไอรอน [9] ได้ศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงห่วงยางที่เป็นพื้นผิวของการหมุนในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยจัดรูปสมการจีออเดซิกของทรงห่วงยางให้อยู่ในรูปปริพันธ์ และแบ่งประเภทของจีออเดซิกที่อยู่บนทรงห่วงยางโดยพิจารณาจาก ความสัมพันธ์ของแกลโรลดังรูป 2.22

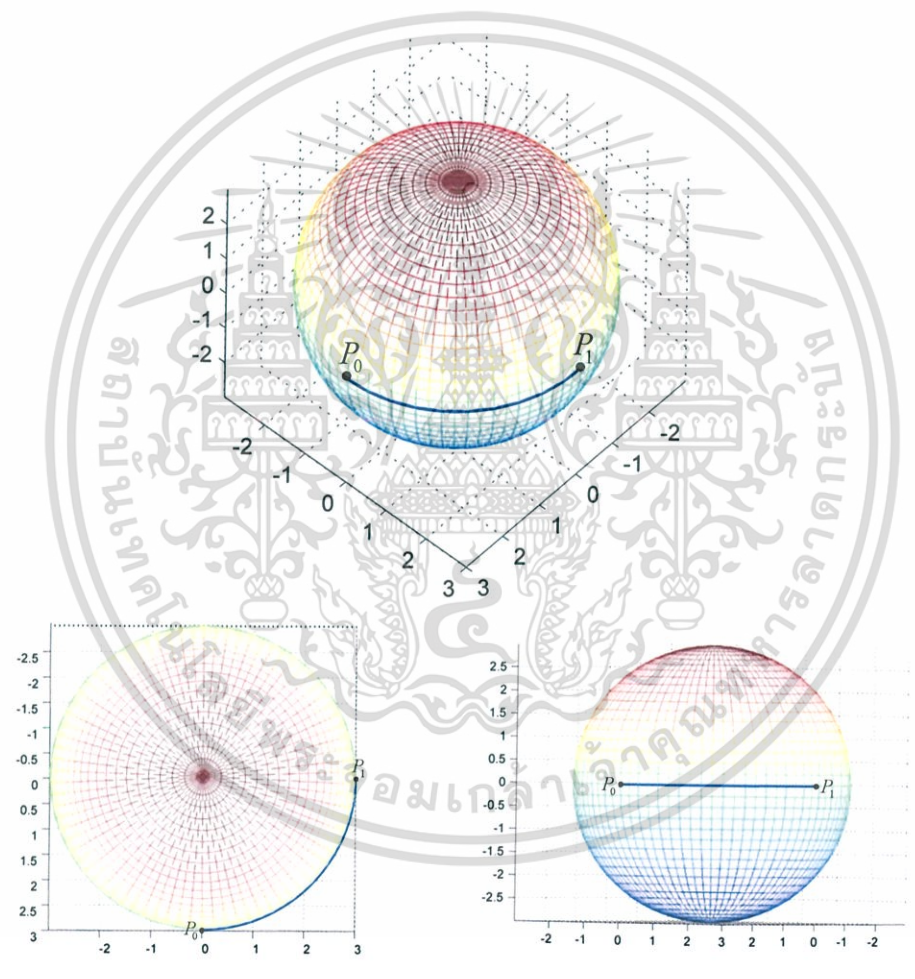


รูปที่ 2.22 จีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงห่วงยางในงานวิจัยของ มาร์ค ไอรอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3 เส้นโค้งจีออเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ

นายณัฐพล บุญนำ [8] ได้ศึกษาปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบ โดยวิเคราะห์จากสมการอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวนั้นๆ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดสามารถหาได้จากการประยุกต์ของสมการ ออยเลอร์ ผลการวิจัยพบว่า บนพื้นผิวของการหมุนรอบที่ได้จากการวิจัยนั้น มีจีออเดซิกจริง แต่ไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว ทำให้จำเป็นต้องระบุเงื่อนไขโดยแยกออกเป็นกรณีต่างๆ เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด ในกรณีของทรงกลม จีออเดซิกจะเป็นส่วนของวงกลมใหญ่ แสดงดังรูปที่ 2.23



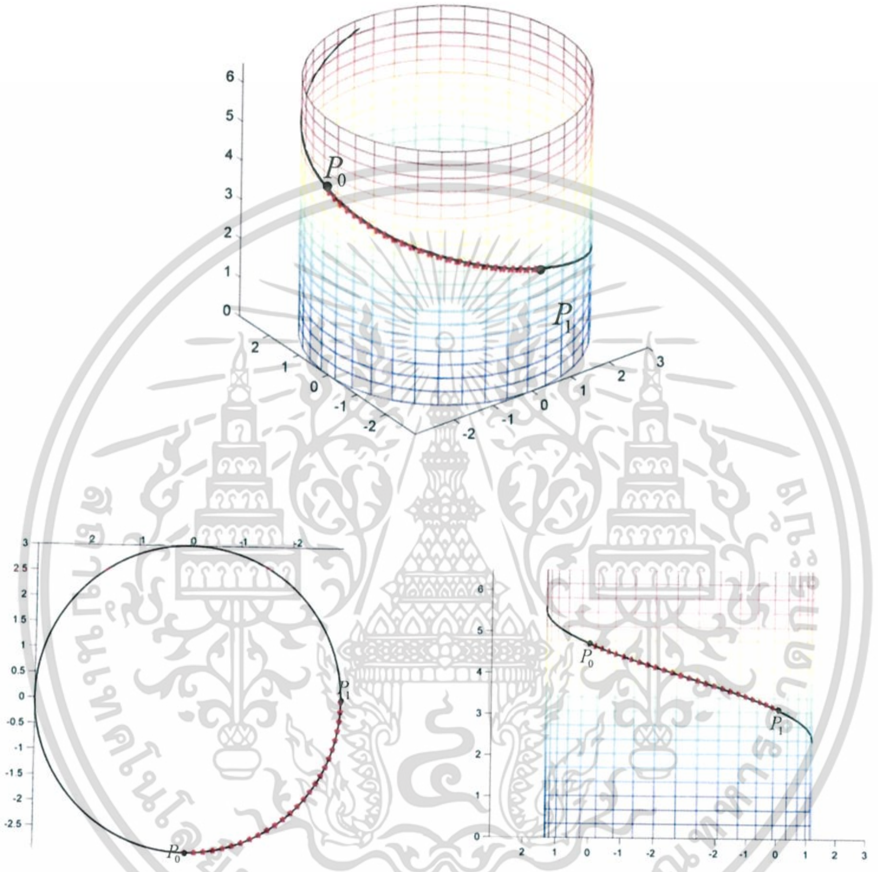
รูปที่ 2.23 กราฟของส่วนของวงกลมใหญ่ในทรงกลม

กรณีของทรงกระบอก กรณีของทรงกระบอกนั้น พิจารณาได้ 3 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ v คงที่แต่ u ไม่คงที่นั้น จะได้จีออเดซิกเป็นส่วนของเส้นโค้งพาราเรล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีออเดซิกบนเส้นโค้งเมอริเดียนคือส่วนของเส้นตรงบนทรงกระบอก
3. เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงกระบอก แล้วจีออเดซิกเป็นส่วนของเส้นเกลียว แสดงดังรูปที่ 2.24

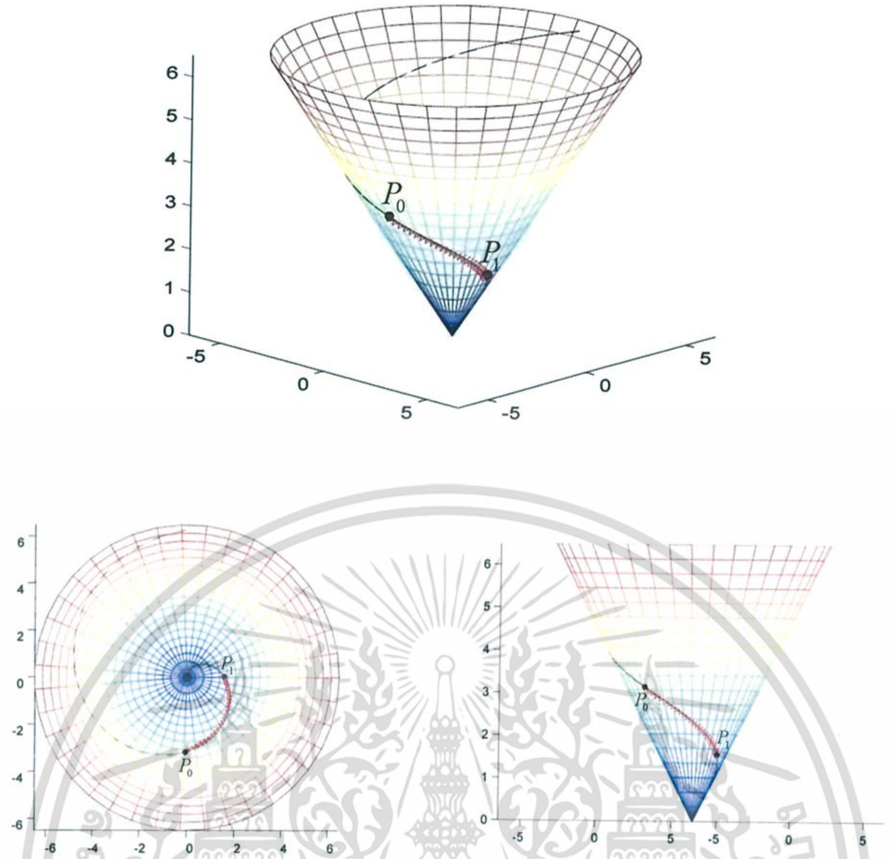


รูปที่ 2.24 กราฟของส่วนของเส้นเกลียวบนทรงกระบอก

กรณีของทรงกรวยนั้น พิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีออเดสิกบนเส้นโค้งเมอริเดียนคือส่วนของเส้นตรงบนทรงกรวย
2. เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงกรวย แล้วจีออเดสิกเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวย แสดงดังรูปที่ 2.25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



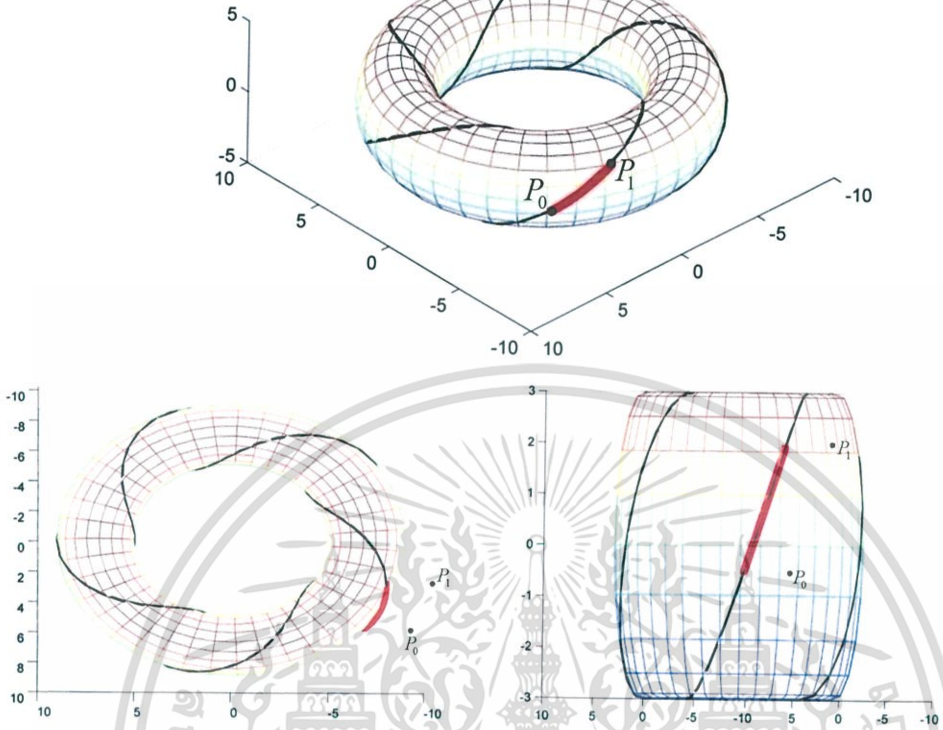
รูปที่ 2.25 กราฟของส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยบนทรงกรวย

และกรณีของทรงห่วงยางนั้น พิจารณาได้ 3 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ v คงที่แต่ u ไม่คงที่นั้น จะได้จีออเดสิกบนเส้นโค้งพาราเรลเป็นส่วนของเส้นโค้งพาราเรลที่มีลักษณะเป็นวงกลม
2. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีออเดสิกบนเส้นโค้งเมอริเดียนคือส่วนของวงกลมรัศมีวงในและรัศมีวงนอกของทรงห่วงยาง

เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงห่วงยาง แล้วจีออเดซิกเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วงยาง แสดงดังรูปที่ 2.26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.26 กราฟของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วงยางบนทรงห่วงยาง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.4 การศึกษาเชิงตัวเลขเพื่อคำนวณเส้นโค้งจีอเดซิก (numerical study for computation of geodesic curves)

คาร์แซป และคณะ [5]ได้ศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขของจีออเดซิกบนพื้นผิว โดยพิจารณาจากสมการจีออเดซิกซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น นั่นคือ สมการ (2.42)

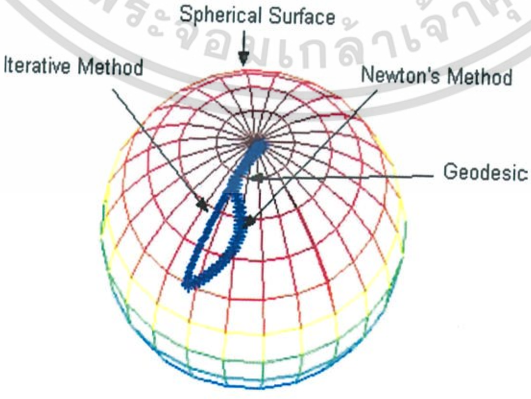
$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = -\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

โดยใช้วิธีผลต่างจำกัดเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1} &= h^2\Bigg[-\Gamma_{11}^2(U_i,V_i)\left(\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^2(U_i,V_i)\left(\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}\right)\times\left(\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{2h}\right) - \\ &\qquad \Gamma_{22}^2(U_i,V_i)\left(\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{2h}\right)^2\Bigg] \\ U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} &= h^2\Bigg[-\Gamma_{11}^1(U_i,V_i)\left(\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^1(U_i,V_i)\left(\frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h}\right)\times\left(\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{2h}\right) \\ &\qquad -\Gamma_{22}^1(U_i,V_i)\left(\frac{V_{i+1}-V_{i-1}}{2h}\right)^2\Bigg] \end{aligned} \quad (2.69)$$

ใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำ (Iterative method (IM)) และระเบียบวิธีนิวตัน (Newton's method) เพื่อแก้ปัญหาของสมการ (2.69) ซึ่งเป็นแบบไม่เชิงเส้น โดยการสมมติให้ผลเฉลยลู่เข้าเมื่อผลต่างระหว่างการทำซ้ำที่ต่อเนื่องกันสองครั้งมีค่าน้อยกว่า $\varepsilon = 1\times10^{-4}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้หาได้จากระเบียบวิธีทำซ้ำและระเบียบนิวตัน โดยการทดลองกับพื้นผิวทรงกลมพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำให้ผลที่ดีกว่าระเบียบวิธีนิวตัน แสดงได้ดังรูป 2.27



รูปที่ 2.27 จีออเดซิกบนพื้นผิวทรงกลมและการเปรียบเทียบของแต่ละวิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนซึ่งจะอธิบายถึงส่วนประกอบและสมการอิงพารามิเตอร์ของแต่ละพื้นผิวของการหมุนที่ศึกษา พร้อมกับหาสมการจีออเดซิกที่อยู่ในภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v นอกจากนี้ยังจัดสมการให้อยู่รูปแบบของปริพันธ์พร้อมกับหาผลเฉลย

3.1 สมบัติบางประการของจีออเดซิก (Some properties of geodesics)

เนื่องจาก ภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวที่เกิดจากหมุน (2.16) เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (v-Clairaut Patch) ซึ่งเป็นไปตามสมการ (2.61) นั่นคือ

$$E_u = G_u = F = 0$$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 2.9 สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v คือ

$$u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 + \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0$$

จากสมการ (2.64) และ(2.67) จะได้

$$u'' + \frac{2f(v)f'(v)}{f^2(v)}u'v' = 0$$

$$v'' - \frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}u'^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2}v'^2 = 0$$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของจีออเดซิกเพื่อนำไปวิเคราะห์หาจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน

บทตั้ง 3.1 ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก

พิสูจน์ กำหนดให้ $\mathbf{x}(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v

จะแสดงว่า ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก นั่นคือ $\mathbf{x}'' = 0$ (จากนิยาม 2.31)

สมมติให้ $\mathbf{x}'' \neq 0$ โดยวิธีข้อขัดแย้ง

เนื่องจากภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวของการหมุน จากสมการ (2.16)

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาอนุพันธ์เทียบ v ทั้ง $F=0$ และ $G=f'(v)^2+g'(v)^2=1$ จะได้

$$F_v=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)_v=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}+\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv}=0 \text{ และ } G_v=(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}+\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}=2\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}=0$$

เนื่องจาก $\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv}=\left(f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)\right)\cdot\left(-f'(v)\sin u, f'(v)\cos u, 0\right)=0$

ดังนั้น $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}=0$ และ $\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}=0$

นั่นคือ $\mathbf{x}_{vv}$ ตั้งฉากกับ $T_p(S)$ เพราะฉะนั้น $\mathbf{x}''=0$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิก □

บทตั้ง 3.2 มีบางพาราเลลที่เป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ เมื่อ $f(v)$ เป็นรัศมีของพาราเลล และ v_0 เป็นค่าคงที่

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $\mathbf{x}(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v

จะแสดงว่าถ้าพาราเลลเป็นจีออเดซิกแล้ว $f'(v_0)=0$

โดยข้อขัดแย้ง สมมติให้ $f'(v_0)\neq 0$

พาราเลลมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v_0)=\left(f(v_0)\cos u, f(v_0)\sin u, g(v_0)\right)$

จากสมการจีออเดซิกในภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v คือ

$$u''+\frac{E_v}{E}u'v'=0$$

$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_v}{2G}v'^2=0$$

เนื่องจาก $v'=v''=0$ จะได้

$$\frac{E_v}{2G}u'^2=0$$

พิจารณา $E_v(u,v_0)$

จาก $E(u,v_0)=\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}E_v(u,v_0)&=\left(\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\right)_v\\&=\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)+\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\\&=2\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $F(u,v_0)=\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0)$

$$F_u(u,v_0)=\left(\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0)\right)_u=\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{vu}(u,v_0)+\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)$$

จะได้ $\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)=\left(\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\right)_u-\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)$

ดังนั้น $E_v(u,v_0)=2\left(\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\right)_u-2\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 2F_u - 2\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)$$
$$= 0$$

นั่นคือ $E_v(u,v_0) = 0$ เนื่องจาก $E_v(u,v_0) = 2f'(v_0)$

เพราะฉะนั้น $f'(v_0) = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง โดยสมมติฐาน ดังนั้น ถ้าพาราเลลเป็นจีออเดซิกแล้ว $f'(v_0) = 0$

ในทางกลับกัน จะต้องแสดงว่าถ้า $f'(v_0) = 0$ แล้ว พาราเลลเป็นจีออเดซิก

จะแสดงว่า พาราเลลเป็นจีออเดซิก นั่นคือ $\mathbf{x}'' = 0$ (จากนิยาม 2.31)

โดยข้อขัดแย้ง สมมติให้ $\mathbf{x}'' \neq 0$

พิจารณาจาก $$E(u,v_0) = \mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)$$

จะได้ว่า $$E_v(u,v_0) = \left(\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\right)_v = 2\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)$$

เพราะฉะนั้น $$\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0) = \frac{E_v(u,v_0)}{2}$$

จาก $$F(u,v_0) = \mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0)$$

$$F_u(u,v_0) = \left(\mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0)\right)_u = \mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uv}(u,v_0) + \mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)$$

จะได้ $$\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0) = \left(\mathbf{x}_v(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_u(u,v_0)\right)_u - \mathbf{x}_u(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_{uv}(u,v_0)$$

นั่นคือ $$\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0) = F_u - \frac{E_v(u,v_0)}{2}$$

เนื่องจาก $$\frac{E_v(u,v_0)}{2} = f'(v_0) = 0$$

เพราะฉะนั้น $$\mathbf{x}_{uu}(u,v_0)\cdot\mathbf{x}_v(u,v_0) = 0$$

ดังนั้น $$(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v)(u,v_0) = 0$$

จะได้ $\mathbf{x}'' = 0$ หรือ $\mathbf{x}' = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจาก $\mathbf{x}'' \neq 0$

จะได้ว่า $f'(v_0) = 0$ แล้ว พาราเลลบนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิก

นั่นคือ สำหรับบางพาราเลลบนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ □

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ S เป็นพื้นผิวของการหมุนใน $\mathbb{R}^3$ แล้วทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก และจะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$

พิสูจน์ ตามบทตั้ง 3.1 และ 3.2 ดังนั้น การพิสูจน์เสร็จสมบูรณ์ □

สำหรับภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v และ กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นจีออเดซิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วย

$$1 = \alpha'\cdot\alpha' = (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v')\cdot(\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') = Eu'^2 + Gv'^2 = f^2(v)u'^2 + \left(f'(v)^2 + g'(v)^2\right)v'^2 \quad (3.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการจีออเดซิกภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยจะพิจารณาจาก

$$u''+\frac{E_v}{E}u'v'=0$$

จะได้
$$0=Eu''+E_v v'u'=Eu''+E'u'=\left(Eu'\right)'$$

ดังนั้น

$$\left(Eu'\right)=c$$

เพราะฉะนั้น
$$u'=\frac{c}{E}$$

เนื่องจากผลคูณเชิงสเกลาร์ของ α' และ $\mathbf{x}_u$ จะได้ว่า

$$\alpha'\cdot\mathbf{x}_u=|\alpha'||\mathbf{x}_u|\cos\xi(s)$$
$$\left(\mathbf{x}_u u'+\mathbf{x}_v v'\right)\cdot\mathbf{x}_u=\sqrt{E}\cos\xi(s)$$
$$u'E=\sqrt{E}\cos\xi(s)$$
$$c=f(v)\cos\xi(s)$$

เพราะฉะนั้น c ค่าคงที่ของแกลโรล ที่เป็นไปตามสมการทฤษฎีบท 2.10

จากสมการ(3.1) จะได้
$$1=E\left(\frac{c}{E}\right)^2+Gv'^2$$
$$Gv'^2=1-\frac{c^2}{E}$$
$$v'^2=\frac{E-c^2}{GE}$$
$$v'=\pm\sqrt{\frac{E-c^2}{GE}}$$

หาร u' ด้วย v' จะได้

$$\frac{du}{dv}=\frac{u'}{v'}=\frac{\frac{c}{E}}{\pm\sqrt{\frac{E-c^2}{GE}}}=\pm\frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E-c^2}} \tag{3.2}$$

พิจารณาพจน์ $E-c^2$ นั่นคือ $f^2(v)=E>c^2=f^2(v)\cos^2\xi(s)$ เนื่องจาก $0\le\cos^2\xi(s)\le 1$ และ $E-c^2\neq 0$ ดังนั้น $E-c^2>0$

สำหรับภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สามารถเขียนในรูปแบบปริพันธ์ คือ

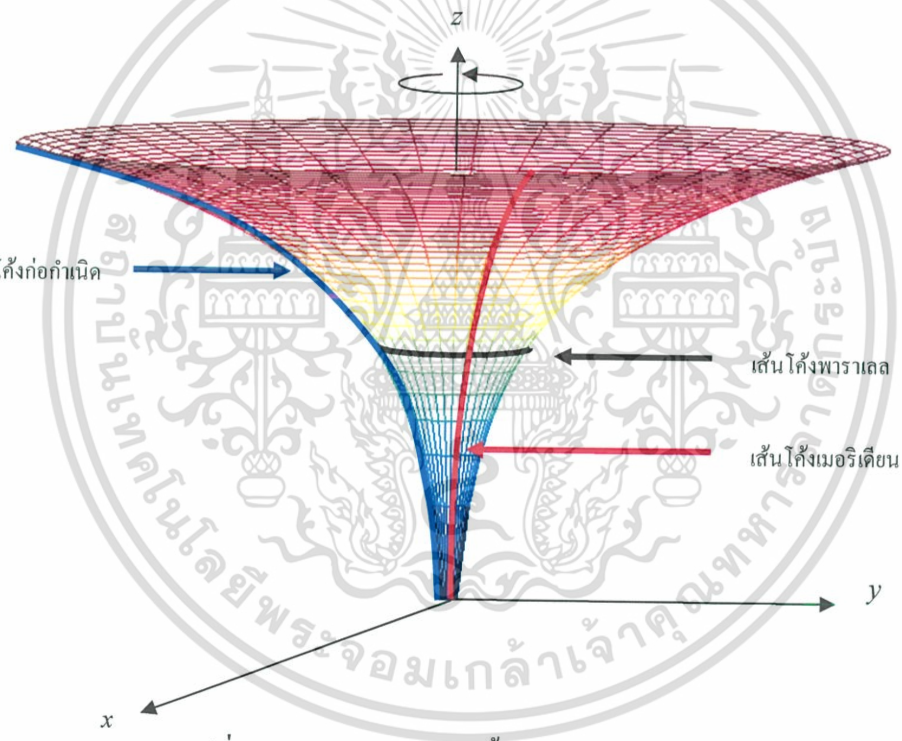
$$u=\pm\int\frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E-c^2}}dv \tag{3.3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 บางจีออเดซิกบนบางพื้นผิวของการหมุน (Some Geodesics on Some Surface of Revolutions)

พื้นผิวของการหมุนรอบที่เป็นไปตามหัวข้อ 2.1.9 มีภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวของการหมุนจัดอยู่ในรูปแบบ $\mathbf{x}(u,v)=\left(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\right)$ ซึ่งเป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v มีส่วนประกอบที่สำคัญ ได้แก่ เส้นโค้งพาราเลลและเส้นโค้งเมอริเดียน นอกจากนี้ $g(v)$ เป็นระยะห่างที่ขนานกันไปกับแกนของการหมุนรอบ และ $f(v)$ เป็นรัศมีของเส้นโค้งพาราเรล ซึ่งจะศึกษาบนพื้นผิวดังต่อไปนี้

3.2.1 พื้นผิวคล้ายทรงกรวย (Funnel Surface)



รูปที่ 3.1 ส่วนประกอบของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย

พื้นผิวคล้ายทรงกรวย [11] เป็นพื้นผิวปกติโดยมีสมการคาร์ทีเซียนคือ

$$z=\frac{1}{z}a\ln(x^2+y^2)$$

เมื่อ $x=v\cos u, y=v\sin u$ และ $z=a\ln v$

พื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นพื้นผิวของการหมุนของเส้นโค้ง $g(v)=\ln v$ รอบแกน z ซึ่งเป็นแกนของการหมุน โดยมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, a\ln v) \tag{3.4}$$

เมื่อ $f(v) = v, g(v) = \ln v$ โดยที่ $v > 0, u \in [0,2\pi)$ และ $a > 0$

3.2.1.1 จีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวย (Geodesic on Funnel Surface)

พื้นผิวคล้ายทรงกรวยมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, a\ln v)$

จากสมการ (2.4) คือ

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \mathrm{E}\,,$$
$$g_{12} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = g_{21} = F,$$
$$g_{22} = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = G$$

จากภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.4) หาอนุพันธ์เทียบกับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u = (-v\sin u, v\cos u, 0) \tag{3.5}$$

จากภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.4) หาอนุพันธ์เทียบกับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, \frac{a}{v}) \tag{3.6}$$

นำสมการ (3.5) และ (3.6) แทนในสมการ (2.4) จะได้

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = ((-v\sin u)^2 + (v\cos u)^2) = v^2 \tag{3.7}$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (\cos^2 u + \sin^2 u + \frac{a^2}{v^2}) = 1 + \frac{a^2}{v^2} \tag{3.8}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

นำสมการ E (3.7) และ G (3.8) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย**

$$ds^2 = v^2 du^2 + (1 + \frac{a^2}{v^2})dv^2 \tag{3.9}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ u และ v กับสมการ (3.6) และ (3.7) จะได้

$$E_u = 0 \text{ และ } E_v = 2v \tag{3.10}$$

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = \frac{-2a}{v^3} \tag{3.11}$$

นำสมการ (3.6) (3.7) (3.10) และ (3.11) แทนในสมการ (2.63) นั่นคือ

$$u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0$$

จะได้

$$u'' + \frac{2v}{v^2}u'v' = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (3.7) (3.8) (3.9) และ (3.10) แทนในสมการ (2.64) จะได้

$$v''+\frac{2v}{2(1+\frac{a^2}{v^2})}(u')^2+\frac{\frac{-2a}{v^3}}{2(1+\frac{a^2}{v^2})}(v')^2=0$$

$$v''+\frac{v}{\frac{v^2+a^2}{v^2}}(u')^2+\frac{\frac{-a}{v^3}}{\frac{v^2+a^2}{v^2}}(v')^2=0$$

$$v''+\frac{v^3}{v^2+a^2}(u')^2-\frac{a}{v(v^2+a^2)}(v')^2=0$$

เพราะฉะนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวคล้ายทรงกรวย คือ

$$u''+\frac{2v}{v^2}u'v'=0 \tag{3.12}$$

$$v''+\frac{v^3}{v^2+a^2}(u')^2-\frac{a}{v(v^2+a^2)}(v')^2=0 \tag{3.13}$$

นำ E,F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$u=\pm\int\frac{c\sqrt{1+\frac{a^2}{v^2}}}{\sqrt{v^2}\sqrt{v^2-c^2}}dv \tag{3.14}$$

$$=\pm\int\frac{c\sqrt{1+\frac{a^2}{v^2}}}{\sqrt{v^2}\sqrt{v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm\int\frac{c\sqrt{\frac{v^2+a^2}{v^2}}}{v\sqrt{v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm c\int\frac{\frac{1}{v}\sqrt{v^2+a^2}}{v\sqrt{v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm c\int\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{v^2\sqrt{v^2-c^2}}dv$$

ดังนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์** คือ

$$u=\pm c\int\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{v^2\sqrt{v^2-c^2}}dv \tag{3.15}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ (3.15) โดยวิธีการดังนี้

ให้ $v = c\cosh(x)$ และหาอนุพันธ์เทียบ v จะได้ $dv = c\sinh(x)dx$ แทนค่าในสมการ (3.15) จะได้

$$u = \pm c\int \frac{\sqrt{c^2\cosh^2(x) + a^2}\, c\sinh(x)}{c^2\cosh^2(x)\sqrt{c^2\cosh(x) - c^2}}dx$$

$$= \pm c\int \frac{\sqrt{c^2\cosh^2(x) + a^2}\, c\sinh(x)}{c^2\cosh^2(x)\sqrt{c^2\sinh(x)}}dx$$

$$u = \pm c\int \frac{\sqrt{c^2\cosh^2(x) + a^2}}{c^2\cosh^2(x)}dx \qquad (3.16)$$

จาก

$$\int \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{y^2}dy = -\frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{y^2} + \ln(y + \sqrt{y^2 + a^2}) + D \qquad (3.17)$$

สามารถเขียนสมการ (3.16) ใหม่ได้ โดยกำหนดให้ $y = c\cosh(x)$ และหาอนุพันธ์เทียบ x จะได้ $dy = c\sinh(x)dx$ นั่นคือ

$$u = \pm c\int \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{y^2}\frac{dy}{c\sinh(x)}$$

$$= \pm \frac{1}{\sinh(x)}\int \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{y^2}dy$$

$$u = \pm \frac{1}{\sinh(x)}\left[-\frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{y^2} + \ln(y + \sqrt{y^2 + a^2}) + D\right] \qquad (3.18)$$

เนื่องจาก $y = c\cosh(x)$ เพราะฉะนั้น

$$u = \pm\left[-\frac{\sqrt{c^2\cosh^2 x + a^2}}{c^2\sinh(x)\cosh^2(x)} + \frac{\ln(c\cosh(x) + \sqrt{c^2\cosh^2(x) + a^2})}{\sinh(x)} + \frac{D}{\sinh(x)}\right] \qquad (3.19)$$

และเนื่องจาก $v = c\cosh(x)$ ดังนั้น $x = \cosh^{-1}(\frac{v}{c})$

แทนค่า $v = c\cosh(x)$ และ $x = \cosh^{-1}(\frac{v}{c})$ ลงในสมการ (3.17) จะได้

$$u = \mp\frac{\sqrt{c^2\cosh^2(\cosh^{-1}(\frac{v}{c})) + a^2}}{c^2\sinh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))\cosh^2(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))} \pm \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))} \qquad (3.20)$$

$$\left[\ln(c\cosh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c})) + \sqrt{c^2\cosh^2(\cosh^{-1}(\frac{v}{c})) + a^2}) + D\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัดรูปจะได้

$$u=\mp\frac{\sqrt{c^2\cosh^2\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)+a^2}}{c^2\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)\cosh^2\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\pm$$

$$\frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\left[\ln\left(c\cosh^2\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)+\sqrt{c^2\cosh^2(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))+a^2}\right)+D\right]$$

$$=\mp\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{c^2\left(\frac{v}{c}\right)^2\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\pm\frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\left[\ln\left(v+\sqrt{c^2\frac{v^2}{c^2}+a^2}\right)+D\right]$$

$$=\mp\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{v^2\sinh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))}\pm\frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\left[\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+D\right]$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของจีออเดซิกที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวคล้ายทรงกรวยคือ

$$u=\mp\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{v^2\sinh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))}\pm\frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\left[\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+D\right] \tag{3.21}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการหาปริพันธ์ และ c คือ ค่าคงที่ของแกลโรล

3.2.2 ทรงพาราโบลา (Paraboloid)

ทรงพาราโบลา [11] เป็นพื้นผิวปกติโดยมีสมการคาร์ทีเซียนคือ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

กำหนดให้ $a=b$ และ $c=1$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z$$

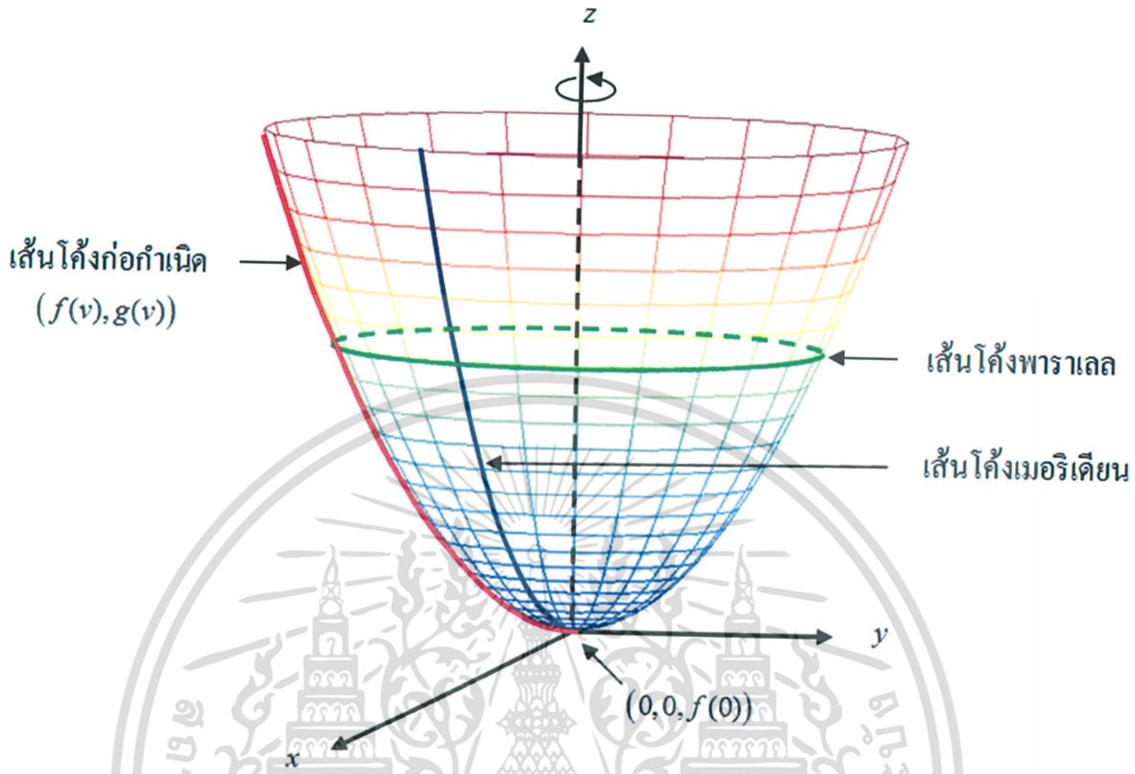
เมื่อ $x=av\cos u, y=av\sin u$ และ $z=v^2$

ทรงพาราโบลาเป็นพื้นผิวของการหมุนของพาราโบลาที่ตัดกับแกนการหมุนที่จุด $(0,0,f(0))$ ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน z กับพื้นผิวเรียกว่า **จุดยอด (vertex)** ของพื้นผิวและเป็นรูปทรงเปิดมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(av\cos u,av\sin u,v^2\right) \tag{3.22}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $f(v)=av, g(v)=v^2$ โดยที่ $v>0, u\in[0,2\pi)$ และ a เป็นรัศมีของทรงพาราโบลา



รูปที่ 3.2 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงพาราโบลา

3.2.2.1 จีออเดซิกบนทรงพาราโบลา (Geodesic on Paraboloid)

ทรงพาราโบลามีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v)=\left(av\cos u, av\sin u, v^2\right)$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E,F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.22) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.22) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-av\sin u, av\cos u, 0\right) \tag{3.23}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.22) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v=\left(a\cos u, a\sin u, 2v\right) \tag{3.24}$$

เนื่องจาก $g_{11}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=E,\ g_{12}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u=g_{21}=F$ และ $g_{22}=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=G$, จะได้

แทนค่าสมการ (3.5) และ (3.6) เพื่อหาค่า E,F และ G จะได้

$$\begin{aligned}E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u&=\left(-av\sin u, v\cos u, 0\right)\cdot\left(-av\sin u, v\cos u, 0\right)\\&=((-av\sin u)^2+(av\cos u)^2)\\&=a^2v^2\sin^2 u+a^2v^2\cos^2 u\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $$E = a^2v^2 \tag{3.25}$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \left(-av\sin u, av\cos u, 0\right)\cdot\left(a\cos u, a\sin u, 2v\right)$$
$$= -a^2v\sin u\cos u + a^2v\sin u\cos$$
$$= 0$$

ดังนั้น $$F = 0 \tag{3.26}$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \left(a\cos u, a\sin u, 2v\right)\cdot\left(a\cos u, a\sin u, 2v\right)$$
$$= (a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u + 4v^2)$$
$$= a^2 + 4v^2$$

ดังนั้น $$G = a^2 + 4v^2 \tag{3.27}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2 = E\left(du\right)^2 + 2Fdudv + G\left(dv\right)^2$$

นำสมการ E (3.25) และ G (3.27) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงพาราโบลา**

$$ds^2 = a^2v^2du^2 + (a^2+4v^2)dv^2 \tag{3.28}$$

หาอนุพันธ์ E, F และ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u = 0 \text{ และ } E_v = 2a^2v \tag{3.29}$$

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = 8v \tag{3.30}$$

นำสมการ (3.25) (3.27) (3.29) และ (3.30) แทนในสมการ (2.63) นั่นคือ

$$u'' + \frac{E_v}{E}u'v' = 0$$

จะได้

$$u'' + \frac{2a^2v}{a^2v^2}u'v' = u'' + \frac{2}{v}u'v' = 0$$

นำสมการ (3.25) (3.27) (3.29) และ (3.30) แทนในสมการ (2.63) นั่นคือ

$$v'' - \frac{E_v}{2G}\left(u'\right)^2 + \frac{G_v}{2G}\left(v'\right)^2 = 0$$

จะได้

$$v'' - \frac{2a^2v}{2\left(a^2+4v^2\right)}(u')^2 + \frac{8v}{2\left(a^2+4v^2\right)}(v')^2 = 0$$

$$v'' - \frac{a^2v}{\left(a^2+4v^2\right)}(u')^2 + \frac{4v}{\left(a^2+4v^2\right)}(v')^2 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์** v **สำหรับทรงพาราโบลา** คือ

$$u'' + \frac{2}{v}u'v' = 0 \tag{3.31}$$

$$v'' - \frac{a^2 v}{\left(a^2 + 4v^2\right)}(u')^2 + \frac{4v}{\left(a^2 + 4v^2\right)}(v')^2 = 0 \tag{3.32}$$

นำ E, F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2 + 4v^2}}{\sqrt{a^2 v^2}\sqrt{a^2 v^2 - c^2}} dv \tag{3.33}$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v **สำหรับทรงพาราโบลาที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์** คือ

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2 + 4v^2}}{av\sqrt{a^2 v^2 - c^2}} dv \tag{3.34}$$

จากสมการ (2.68) **ทฤษฎีบท 2.10** (ความสัมพันธ์แกลโรล) และเนื่องจาก $f(v) = av$ ดังนั้น

$$av\cos\xi(s) = c \tag{3.35}$$

นำสมการ (3.36) แทนใน สมการ (3.35) จะได้

$$u = \pm\int \frac{av\cos\xi(s)\sqrt{a^2 + 4v^2}}{av\sqrt{a^2 v^2 - a^2 v^2 \cos^2\xi(s)}} dv$$

$$= \pm\int \frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2 + 4v^2}}{\sqrt{a^2 v^2\left(1 - \cos^2\xi(s)\right)}} v$$

$$= \pm\int \frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2 + 4v^2}}{av\sqrt{\sin^2\xi(s)}} dv$$

$$= \pm\frac{\cos\xi(s)}{a\sin\xi(s)}\int \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{v} dv$$

$$= \pm\frac{\cot\xi(s)}{a}\int \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{v} dv$$

$$u = \pm\frac{\cot\xi(s)}{a}\int \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{v} dv \tag{3.36}$$

เนื่องจาก $$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right| + D$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่ของการปริพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (3.36) จะได้

$$
\begin{aligned}
u &= \pm \frac{2\cot\xi(s)}{a} \int \frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2v} dv \\
&= \pm \frac{2\cot\xi(s)}{a} \left[\sqrt{a^2+4v^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+4v^2}}{2v}\right| + D \right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงพาราโบลา คือ

$$
u = \pm \frac{2\cot\xi(s)}{a} \left[\sqrt{a^2+4v^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+4v^2}}{2v}\right| + D \right] \tag{3.37}
$$

3.2.3 ทรงไฮเพอร์โบลา (Hyperboloid of One Sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลา [11] หรือ ทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นเดียวเป็นพื้นผิวปกติโดยมีสมการคาร์ทีเซียน คือ

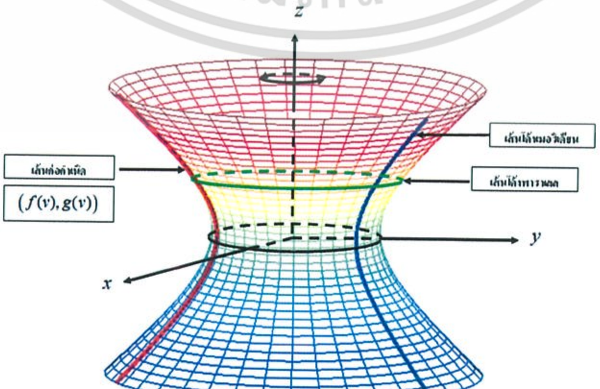
$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1
$$

เมื่อ $x = a\sqrt{1+v^2}\cos u, y = a\sqrt{1+v^2}\, v\sin u$ และ $z = bv$

ทรงไฮเพอร์โบลา เป็นพื้นผิวของการหมุน โดยการหมุนไฮเพอร์โบลารอบแกน z และทรงไฮเพอร์โบลาเป็นรูปทรงเปิดมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$
\mathbf{x}(u,v) = \left(a\sqrt{1+v^2}\cos u, a\sqrt{1+v^2}\sin u, bv \right) \tag{3.38}
$$

เมื่อ $f(v) = bv, g(v) = a\sqrt{1+v^2}$ โดยที่ $u \in [0, 2\pi)$ a เป็นรัศมีของทรงพาราโบลาและ b เป็นค่าคงที่ใดๆ



รูปที่ 3.3 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงไฮเพอร์โบลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3.1 จีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลา (Geodesic on Hyperboloid of One Sheet)

ทรงพาราโบลามีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sqrt{1+v^2}\cos u, a\sqrt{1+v^2}\sin u, bv\right)$$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E, F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.38) นั่นคือ

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.38) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-a\sqrt{1+v^2}\sin u, a\sqrt{1+v^2}\cos u, 0\right) \tag{3.39}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.38) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v=\left(\frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\cos u, \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\sin u, b\right) \tag{3.40}$$

เนื่องจาก $g_{11}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=E,\ g_{12}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u=g_{21}=F$ และ $g_{22}=\mathbf{x}_v\bullet\mathbf{x}_v=G$, จะได้

แทนสมการ (3.39) และ (3.40) เพื่อหาค่า E, F และ G จะได้

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u\\&=\left(-a\sqrt{1+v^2}\sin u, a\sqrt{1+v^2}\cos u, 0\right)\cdot\left(-a\sqrt{1+v^2}\sin u, a\sqrt{1+v^2}\cos u, 0\right)\\&=a^2\left(1+v^2\right)\sin^2 u+a^2\left(1+v^2\right)\cos^2 u\\&=a^2\left(1+v^2\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E=a^2\left(1+v^2\right) \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}F&=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v\\&=\left(-a\sqrt{1+v^2}\sin u, a\sqrt{1+v^2}\cos u, 0\right)\cdot\left(\frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\cos u, \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\sin u, b\right)\\&=-a^2v\sin u\cos u+a^2v\sin u\cos u\\&=0\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$F=0 \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}G&=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v\\&=\left(\frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\cos u, \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\sin u, b\right)\cdot\left(\frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\cos u, \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\sin u, b\right)\\&=\frac{a^2v^2}{1+v^2}\cos^2 u+\frac{a^2v^2}{1+v^2}\sin^2 u+b^2\\&=\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น
$$G=\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2 \tag{3.43}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2=E\left(du\right)^2+2Fdudv+G\left(dv\right)^2$$

นำสมการ E (3.41) F (3.42) และ G (3.43) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงไฮเพอร์โบลา**

$$ds^2=a^2\left(1+v^2\right)du^2+\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2dv^2 \tag{3.44}$$

หาอนุพันธ์ E และ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u=0 \text{ และ } E_v=2a^2v \tag{3.45}$$

$$G_u=0 \text{ และ } G_v=\frac{a^2\left(1+v^2\right)2v-a^2v^2\left(2v\right)}{\left(1+v^2\right)^2}=\frac{a^2 2v\left(1+v^2-v^2\right)}{\left(1+v^2\right)^2}=\frac{2a^2v}{\left(1+v^2\right)^2} \tag{3.46}$$

นำสมการ (3.41) (3.43) (3.45) และ (3.46) แทนในสมการ (2.63)

จะได้
$$u''+\frac{2a^2v}{a^2\left(1+v^2\right)}u'v'=0$$

นำสมการ (3.41) (3.43) (3.45) และ (3.46) แทนในสมการ (2.64)

จะได้

$$v''-\frac{2a^2v}{2\left(\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2\right)}\left(u'\right)^2+\frac{\frac{2a^2v}{\left(1+v^2\right)^2}}{2\left(\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2\right)}\left(v'\right)^2=0$$

$$v''-\frac{2a^2v}{2\left(\frac{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}{1+v^2}\right)}\left(u'\right)^2+\frac{\frac{2a^2v}{\left(1+v^2\right)^2}}{2\left(\frac{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}{1+v^2}\right)}\left(v'\right)^2=0$$

$$v''-\frac{2a^2v}{2\left(\frac{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}{1+v^2}\right)}\left(u'\right)^2+\frac{\frac{2a^2v}{\left(1+v^2\right)}}{2\left(a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)\right)}\left(v'\right)^2=0$$

$$v''+\frac{a^2v\left(1+v^2\right)}{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}u'^2+\frac{a^2v}{\left(1+v^2\right)\left(a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)\right)}v'^2=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v **สำหรับทรงไฮเพอร์โบลา** คือ

$$u'' + \frac{2a^2 v}{a^2\left(1+v^2\right)}u'v' = 0 \tag{3.47}$$

$$v'' + \frac{a^2 v\left(1+v^2\right)}{a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)}u'^2 + \frac{a^2 v}{\left(1+v^2\right)\left(a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)\right)}v'^2 = 0 \tag{3.48}$$

นำ E, F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$\begin{aligned} u &= \pm\int \frac{c\sqrt{\dfrac{a^2v^2}{1+v^2} + b^2}}{\sqrt{a^2\left(1+v^2\right)}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right) - c^2}}dv \\ &= \pm\int \frac{c\sqrt{\dfrac{a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)}{1+v^2}}}{a\sqrt{\left(1+v^2\right)}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right) - c^2}}dv \\ &= \pm\int \frac{c\dfrac{\sqrt{a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)}}{\sqrt{1+v^2}}}{a\sqrt{1+v^2}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right) - c^2}}dv \\ &= \pm\int \frac{c\sqrt{a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)}}{a\left(1+v^2\right)\sqrt{a^2\left(1+v^2\right) - c^2}}dv \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v **สำหรับทรงไฮเพอร์โบลาที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์** คือ

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2v^2 + b^2\left(1+v^2\right)}}{a\left(1+v^2\right)\sqrt{a^2\left(1+v^2\right) - c^2}}dv \tag{3.49}$$

จากสมการ (2.68)และเนื่องจาก $f(v) = a\sqrt{1+v^2}$ จะได้

$$a\sqrt{1+v^2}\cos\xi(s) = c \tag{3.50}$$

นำสมการ ((3.50) แทนใน (3.49) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u=\pm\int\frac{\sqrt{1+v^2}\cos\xi(s)\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\left(1+v^2\right)\sqrt{a^2\left(1+v^2\right)-a^2\left(1+v^2\right)\cos^2\xi(s)}}dv$$

$$=\pm\int\frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\sqrt{1+v^2}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right)-a^2\left(1+v^2\right)\cos^2\xi(s)}}dv$$

$$=\pm\int\frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\sqrt{1+v^2}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right)\left(1-\cos^2\xi(s)\right)}}dv$$

$$=\pm\int\frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\sqrt{1+v^2}\,a\sqrt{1+v^2}\sqrt{\sin^2\xi(s)}}dv$$

$$=\pm\frac{\cos\xi(s)}{a\sin\xi(s)}\int\frac{\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\left(1+v^2\right)}dv$$

$$u=\pm\frac{\tan\xi(s)}{a}\int\frac{\sqrt{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}}{\left(1+v^2\right)}dv \tag{3.51}$$

กำหนดให้ $a=b$ จากสมการ (3.51) จะได้

$$u=\pm\frac{\tan\xi(s)}{a}\int\frac{\sqrt{a^2v^2+a^2\left(1+v^2\right)}}{\left(1+v^2\right)}dv$$

$$=\pm\frac{\tan\xi(s)}{a}\int\frac{a\sqrt{v^2+\left(1+v^2\right)}}{\left(1+v^2\right)}dv$$

$$u=\pm\tan\xi(s)\int\frac{\sqrt{1+2v^2}}{1+v^2}dv \tag{3.52}$$

ใช้ Mathematica ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ช่วยในการปริพันธ์จะได้

$$u=\pm\frac{\tan\xi(s)}{4}\left[4\sqrt{2}\sin^{-1}(\sqrt{2}v)+\ln\left(32+96v^2-64v\sqrt{1+2v^2}\right)-\ln\left(32\left(1+3v^2+2v\sqrt{1+2v^2}\right)\right)\right]$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับไฮเพอร์โบลาคือ

$$u=\pm\frac{\tan\xi(s)}{4}\left[4\sqrt{2}\sin^{-1}(\sqrt{2}v)+\ln\left(32+96v^2-64v\sqrt{1+2v^2}\right)-\ln\left(32\left(1+3v^2+2v\sqrt{1+2v^2}\right)\right)+D\right] \tag{3.53}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการการปริพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.4 ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น (Hyperboloid of two sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น [11] เป็นพื้นผิวปกติโดยมีสมการคาร์ทีเซียนคือ

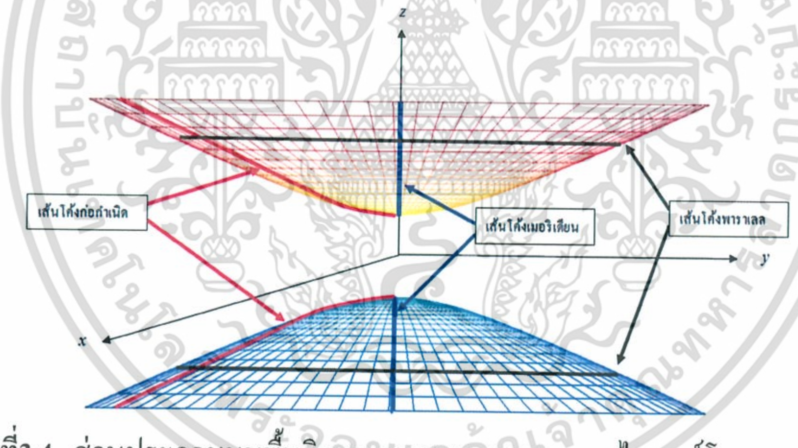
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

เมื่อ $x = a\sinh v\cos u, y = aa\sinh v\sin u$ และ $z = b\cosh v$

ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นเป็นพื้นผิวของการหมุนที่ตัดกับแกนการหมุนโดยมีลักษณะตัดแกน z สองจุดโดยจุดแรกจะตัดในแนวแกน z ทางด้านบวก อีกจุดจะตัดในแนวแกน z ทางด้านลบ โดยส่วนบนและส่วนล่างของรูปจะเป็นรูปทรงแบบเปิด โดยทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, b\cosh v\right) \tag{3.54}$$

เมื่อ $f(v)=a\sinh v, g(v)=b\cosh v$ โดยที่ $v\in(-\infty,\infty), u\in[0,2\pi)$ a เป็นระยะทางในแนวแกน x และแกน y b เป็นระยะทางในแนวแกน z



รูปที่3.4 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

3.2.4.1 จีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น (Geodesic on Hyperboloid of two sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, b\cosh v\right)$$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E,F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.54) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.54) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, 0\right) \tag{3.55}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.54) กับ v จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathbf{x}_v = \left(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, b\sinh v\right) \tag{3.56}$$

เนื่องจาก $g_{11} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = E,\ g_{12} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = g_{21} = F$ และ $g_{22} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$, จะได้
แทนค่าสมการ (3.55) และ (3.56) เพื่อหาค่า E, F และ G จะได้

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u == a^2 \sinh^2 v \sin^2 u + a^2 \sinh^2 v \cos^2 u = a^2 \sinh^2 v$$

ดังนั้น

$$E = a^2 \sinh^2 v \tag{3.57}$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = -a\sinh v \sin u a\cosh v\cos u + a\sinh v\cos u a\cosh v \sin u + (0) b\sinh v$$

ดังนั้น

$$F = 0 \tag{3.58}$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = a^2\cosh^2 v\cos^2 u + a^2\cosh^2 v\sin^2 u + b^2\sinh^2 v$$

ดังนั้น

$$G = a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v \tag{3.59}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

นำสมการ E (3.57) และ G (3.58) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น**

$$ds^2 = a^2\sinh^2 v du^2 + \left(a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v\right)dv^2 \tag{3.60}$$

หาอนุพันธ์ E เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u = 0 \text{ และ } E_v = 2a^2\sinh v\cosh v$$

ดังนั้น

$$E_v = 2a^2\sinh v\cosh v \tag{3.61}$$

หาอนุพันธ์ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = 2a^2\cosh v\sinh v + 2b^2\sinh v\cosh v$$

ดังนั้น

$$G_v = 2\left(a^2 + b^2\right)\cosh v\sinh v \tag{3.62}$$

นำสมการ (3.57) (3.58) (3.61) และ (3.62) แทนในสมการ (2.63) จะได้

$$u'' + \frac{2a^2\sinh v\cosh v}{a^2\sinh^2 v}u'v' = 0$$

$$u'' + \frac{2\cosh v}{\sinh v}u'v' = 0$$

นำสมการ (3.57) (3.58) (3.61) และ (3.62) แทนในสมการ (2.64) จะได้

$$v'' + \frac{2a^2\sinh v\cosh v}{2\left(a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v\right)}u'^2 + \frac{2\left(a^2+b^2\right)\cosh v\sinh v}{2\left(a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v\right)}v'^2 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์** v **สำหรับทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น** คือ

$$u'' + 2\coth v u'v' = 0 \tag{3.63}$$

$$v'' + \frac{a^2 \sinh v \cosh v}{\left(a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v\right)} u'^2 + \frac{\left(a^2 + b^2\right)\cosh v \sinh v}{\left(a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v\right)} v'^2 = 0 \tag{3.64}$$

นำ E, F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{\sqrt{a^2 \sinh^2 v}\sqrt{a^2 \sinh^2 v - c^2}} dv$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ คือ

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{a \sinh v\sqrt{a^2 \sinh^2 v - c^2}} dv \tag{3.65}$$

จากสมการ (2.68) และเนื่องจาก $f(v) = a\sinh v$ จะได้

$$a \sinh v \cos\xi(s) = c \tag{3.66}$$

นำสมการ ((3.66) แทนใน (3.65) จะได้

$$\begin{aligned}
u &= \pm\int \frac{a\sinh v \cos\xi(s)\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{a \sinh v\sqrt{a^2 \sinh^2 v - a^2 \sinh^2 v \cos^2 \xi(s)}} dv \\
&= \pm\int \frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{\sqrt{a^2 \sinh^2 v - a^2 \sinh^2 v \cos^2 \xi(s)}} dv \\
&= \pm\int \frac{\cos\xi(s)\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{a \sinh v\sqrt{1 - \cos^2 \xi(s)}} dv \\
&= \pm\frac{\cos\xi(s)}{a\sin\xi(s)}\int \frac{\sqrt{a^2 \cosh^2 v + b^2 \sinh^2 v}}{\sinh v} dv
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $a = b$ จะได้

$$u = \pm\frac{\cos\xi(s)}{a\sin\xi(s)}\int \frac{a\sqrt{\cosh^2 v + \sinh^2 v}}{\sinh v} dv$$

$$u = \pm\cot\xi(s)\int \frac{\sqrt{\cosh^2 v + \sinh^2 v}}{\sinh v} dv$$

ใช้ Mathematica ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ช่วยในการหาปริพันธ์จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = \pm \cot \xi(s) \left[-\tanh^{-1}\left(\frac{\cosh v}{\cosh 2v} \right) + \sqrt{2} \ln\left(\sqrt{2} \cosh v + \sqrt{\cosh 2v} \right) + D \right]$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับไฮเพอร์โบลาสองชิ้นคือ

$$u = \pm \cot \xi(s) \left[-\tanh^{-1}\left(\frac{\cosh v}{\cosh 2v} \right) + \sqrt{2} \ln\left(\sqrt{2} \cosh v + \sqrt{\cosh 2v} \right) + D \right] \tag{3.67}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการปริพันธ์

3.2.5 แคทีนอยด์ (Catenoid)

แคทีนอยด์[11] เป็นพื้นผิวของการหมุนของ แคทีนารี (Catenay) ซึ่งสมการคาร์ทีเซียนของแคทีนารีจะอยู่ในรูป

$$y = a\cosh(\frac{x}{a})$$

และในรูปของพิกัดเชิงกระบอกคือ

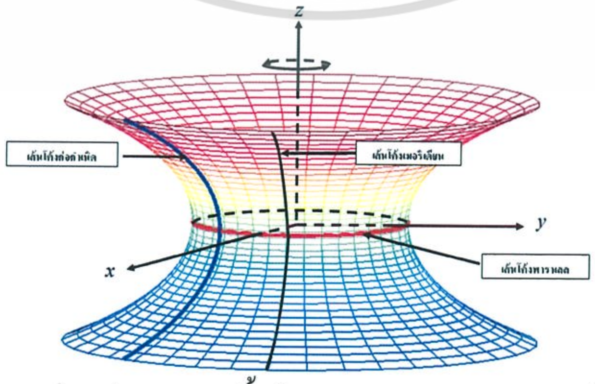
$$x = r\cos u, y = r\sin u, z = v$$

เมื่อ $r = a\cosh(\frac{v}{a})$

แคทีนอยด์เป็นพื้นผิวของการหมุนที่ไม่ตัดกับแกนการหมุน สำหรับแคทีนอยด์เป็นรูปทรงเปิด และมีค่าความโค้งเฉลี่ย (mean curvature) เป็นศูนย์ทุกๆ จุดบนพื้นผิว ซึ่งจะกล่าวได้ว่า แคทีนอยด์เป็น minimal surface โดยแคทีนอยด์มีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u, v \right) \tag{3.68}$$

เมื่อ $f(v) = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right), g(v) = v$ โดยที่ $u \in [0, 2\pi)$



รูปที่ 3.5 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของแคทีนอยด์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.5.1 จีออเดซิกบนแคทีนอยด์ (Geodesic on Catenoid)

แคทีนอยด์มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v)=\left(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u, v\right)$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E,F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ **x** (3.68) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ **x** (3.68) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, 0\right) \tag{3.69}$$

หาอนุพันธ์เทียบ **x** (3.68) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v=\left(\sinh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, \sinh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u, 1\right) \tag{3.70}$$

เนื่องจาก $g_{11}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=E,\ g_{12}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u=g_{21}=F$ และ $g_{22}=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=G$, จะได้

แทนค่าสมการ (3.69) และ (3.70) เพื่อหาค่า E,F และ G จะได้

$$E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)\sin^2 u+a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)\cos^2 u$$

ดังนั้น
$$E=a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) \tag{3.71}$$

$$F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=-a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u\sinh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u+a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u\sinh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u+0(1)$$

ดังนั้น
$$F=0 \tag{3.72}$$

$$G=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=\sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)\cos^2 u+\sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)\sin^2 u+1$$

$$=\sinh^2\left(\frac{v}{a}\right)+1$$

ดังนั้น
$$G=\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) \tag{3.73}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2=E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2$$

นำสมการ E (3.72) และ G (3.73) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของแคทีนอยด์**

$$ds^2=a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)du^2+\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)dv^2 \tag{3.74}$$

หาอนุพันธ์ E เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u=0 \text{ และ } E_v=2\frac{a^2}{a}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$E_v = 2a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right) \tag{3.75}$$

หาอนุพันธ์ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = \frac{2}{a}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right)$$

ดังนั้น

$$G_v = \frac{2}{a}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right) \tag{3.76}$$

นำสมการ (3.71) (3.73) (3.75) และ (3.76) แทนในสมการ (2.63) จะได้

$$u'' + \frac{2a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right)}{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}u'v' = 0$$

นำสมการ (3.64) (3.66) (3.68) และ (3.69) แทนในสมการ (2.64) จะได้

$$v'' - \frac{2a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right)}{2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}u'^2 + \frac{\frac{2}{a}\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sinh\left(\frac{v}{a}\right)}{2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}v'^2 = 0$$

$$v'' - a\frac{\sinh\left(\frac{v}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}u'^2 + \frac{\sinh\left(\frac{v}{a}\right)}{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}v'^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับแคทีนอยด์** คือ

$$u'' + \frac{2}{a}\tanh\left(\frac{v}{a}\right)u'v' = 0 \tag{3.77}$$

$$v'' - a\tanh\left(\frac{v}{a}\right)u'^2 + \frac{1}{a}\tanh\left(\frac{v}{a}\right)v'^2 = 0 \tag{3.78}$$

แทนค่า E, F และ G ในสมการ (3.3) จะได้

$$u = \pm c\int \frac{\sqrt{\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}}{\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) - c^2}}\,dv$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = \pm c\int \frac{\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)-c^2}}\,dv$$

$$= \pm c\int \frac{1}{a\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)-c^2}}\,dv$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับแคทีนอยด์ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ คือ

$$u = \pm\frac{c}{a}\int \frac{1}{\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)-c^2}}\,dv \tag{3.79}$$

จากสมการ (2.68) และเนื่องจาก $f(v) = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)$ ดังนั้น

$$a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\xi(s) = c \tag{3.80}$$

นำสมการ ((3.80) แทนใน (3.79) จะได้

$$u = \pm\frac{1}{a}\int \frac{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\xi(s)}{\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)-a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)\cos^2\xi(s)}}\,dv$$

$$u = \pm\frac{1}{a}\int \frac{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\xi(s)}{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sqrt{1-\cos^2\xi(s)}}\,dv$$

$$u = \pm\frac{1}{a}\frac{\cos\xi(s)}{\sin\xi(s)}\int dv$$

$$u = \pm\frac{1}{a}\cot\xi(s)\int dv$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับแคทีนอยด์คือ

$$u = \pm\frac{1}{a}\cot\xi(s)\left[v + D\right] \tag{3.81}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการปริพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.6 พื้นผิวแบบดิงดง (Ding Dong Surface)

พื้นผิวแบบดิงดง [11] มีสมการคาร์ทีเซียนคือ

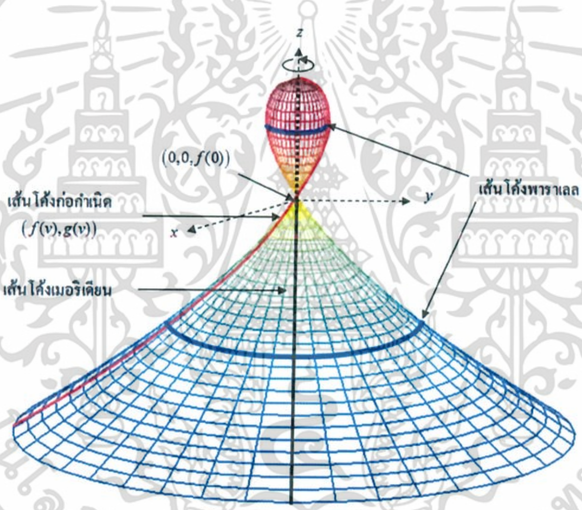
$$x^2 + y^2 = (1-z)z^2$$

เมื่อ $x = av\sqrt{1-v}\cos u, y = av\sqrt{1-v}\sin u$ และ $z = av$

พื้นผิวแบบดิงดงเป็นพื้นผิวของการหมุนที่ตัดกับแกนการหมุนที่จุด $(0,0,f(0))$ ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน z กับพื้นผิว สำหรับพื้นผิวแบบดิงดงซึ่งส่วนบนของรูปเป็นรูปทรงปิดและส่วนล่างเป็นรูปทรงเปิด โดยพื้นผิวแบบดิงดงมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(a\sqrt{1-v}\cdot v\cos u, a\sqrt{1-v}\cdot v\sin u, av\right) \tag{3.82}$$

เมื่อ $f(v) = av\sqrt{1-v}, g(v) = av$ โดยที่ $v \in (-\infty,1), u \in [0,2\pi)$ และ a เป็นรัศมีของพื้นผิวแบบดิงดง ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของพื้นผิวแบบดิงดง

3.2.6.1 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดง (Geodesic on Ding Dong Surface)

พื้นผิวแบบดิงดงมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v) = \left(a\sqrt{1-v}\cdot v\cos u, a\sqrt{1-v}\cdot v\sin u, av\right)$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E, F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.82) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.82) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u = \left(-a\sqrt{1-v}\cdot v\sin u, a\sqrt{1-v}\cdot v\cos u, 0\right) \tag{3.83}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.82) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v = \left(a\left(\sqrt{1-v} + \frac{-v}{2\sqrt{1-v}}\right)\cos u, a\left(\sqrt{1-v} + \frac{-v}{2\sqrt{1-v}}\right)\sin u, a\right) \tag{3.84}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $g_{11}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=E,\ \ g_{12}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u=g_{21}=F$ และ $g_{22}=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=G$, จะได้

แทนค่าสมการ (3.83) และ (3.84) เพื่อหาค่า E,F และ G จะได้

$$E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=a^2\left(1-v\right)\cos^2 u+a^2\left(1-v\right)v^2\sin^2 u=a^2\left(1-v\right)v^2$$

ดังนั้น
$$E=a^2\left(1-v\right)v^2 \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v&=-a\sqrt{1-v}\cdot v\sin u\cdot a\left(\sqrt{1-v}+\frac{-v}{2\sqrt{1-v}}\right)\cos u+\\&\quad a\left(\sqrt{1-v}+\frac{-v}{2\sqrt{1-v}}\right)\sin u\cdot a\sqrt{1-v}\cdot v\cos u+a(0)\\&=0\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$F=0 \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}G=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v&=a^2\left(\sqrt{1-v}-\frac{v}{2\sqrt{1-v}}\right)^2\cos^2 u+a^2\left(\sqrt{1-v}-\frac{v}{2\sqrt{1-v}}\right)\sin^2 u+a^2\\
&=a^2\left(\sqrt{1-v}-\frac{v}{2\sqrt{1-v}}\right)^2\left(\cos^2+\sin^2 u\right)+a^2\\
&=a^2\left(\sqrt{1-v}-\frac{v}{2\sqrt{1-v}}\right)^2+a^2\\
&=a^2\left(\left(\sqrt{1-v}-\frac{v}{2\sqrt{1-v}}\right)^2+1\right)\\
&=a^2\left(\left(1-v\right)-2\sqrt{1-v}\,\frac{v}{2\sqrt{1-v}}+\frac{v^2}{4\left(1-v\right)}+1\right)\\
&=a^2\left(\left(1-v\right)-v+\frac{v^2}{4\left(1-v\right)}+1\right)\\
&=a^2\left(1-v-v+\frac{v^2}{4\left(1-v\right)}+1\right)\\
&=a^2\left(2-2v+\frac{v^2}{4-4v}\right)\\
&=a^2\left(\frac{8-8v-8v+8v^2+v^2}{4-4v}\right)\\
&=a^2\left(\frac{8-16v+9v^2}{4-4v}\right)\\
&=a^2\left(\frac{9v^2-16v+8}{4-4v}\right)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $$G = a^2\left(\frac{9v^2 - 16v + 8}{4 - 4v}\right) \tag{3.87}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

นำสมการ E(3.85) F (3.86) และ G (3.87) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวแบบดิงดง**

$$ds^2 = a^2(1-v)v^2du^2 + a^2\left(\frac{9v^2 - 16v + 8}{4 - 4v}\right)dv^2 \tag{3.88}$$

หาอนุพันธ์ E เทียบกับ u และ v จะได้

$$\begin{aligned} E_u = 0 \text{ และ } E_v &= a^2\left((1-v)2v + v^2(-1)\right) \\ &= a^2\left(2v - 2v^2 - v^2\right) \\ &= a^2\left(2v - 3v^2\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E_v = a^2\left(2v - 3v^2\right) \tag{3.89}$$

หาอนุพันธ์ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$\begin{aligned} G_u = 0 \text{ และ } G_v &= a^2\left[\frac{(4-4v)(18v-16) - (9v^2 - 16v + 8)(-4)}{(4-4v)^2}\right] \\ &= a^2\left[\frac{(72v - 64 - 72v^2 + 64v) + (36v^2 - 64v + 32)}{(4-4v)^2}\right] \\ &= \frac{a^2(-36v^2 + 72v - 32)}{4^2(1-v)^2} \\ &= \frac{a^2(-9v^2 + 18v - 8)}{4(1-v)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = \frac{a^2(-9v^2 + 18v - 8)}{4(1-v)^2} \tag{3.90}$$

นำสมการ (3.85) (3.87) (3.89) และ (3.90) แทนในสมการ (2.63) จะได้

$$u'' + \frac{(2v - 3v^2)}{(1-v)v^2}u'v' = 0$$

นำสมการ (3.85) (3.87) (3.89) และ (3.90)) แทนในสมการ (2.64) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v''-\frac{\left(2v-3v^2\right)\left(2-2v\right)}{\left(9v^2-16v+8\right)}u'^2+\frac{\left(-9v^2+18v-8\right)}{2\left(1-v\right)\left(av^2-16v+8\right)}v'^2=0$$

เพราะฉะนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์** v **สำหรับพื้นผิวแบบดิงดง** คือ

$$u''+\frac{\left(2v-3v^2\right)}{\left(1-v\right)v^2}u'v'=0 \tag{3.91}$$

$$v''-\frac{\left(2v-3v^2\right)\left(2-2v\right)}{\left(9v^2-16v+8\right)}u'^2+\frac{\left(-9v^2+18v-8\right)}{2\left(1-v\right)\left(av^2-16v+8\right)}v'^2=0 \tag{3.92}$$

นำ E,F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$u=\pm c\int\frac{\sqrt{\dfrac{a^2\left(9v^2-16v+8\right)}{4-4v}}}{\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2}\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm c\int\frac{a\sqrt{\dfrac{\left(9v^2-16v+8\right)}{4-4v}}}{av\sqrt{1-v}\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm\frac{c}{2}\int\frac{\sqrt{\dfrac{\left(9v^2-16v+8\right)}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2-c^2}}dv$$

$$=\pm\frac{c}{2}\int\frac{\sqrt{-9v+7+\dfrac{15}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2-c^2}}dv$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวแบบดิงดงที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ คือ

$$u=\pm\frac{c}{2}\int\frac{\sqrt{-9v+7+\dfrac{15}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}\sqrt{a^2\left(1-v\right)v^2-c^2}}dv \tag{3.93}$$

จากสมการ (2.68) และเนื่องจาก $f(v)=av\sqrt{1-v}$ ดังนั้น

$$av\sqrt{1-v}\cos\xi(s)=c \tag{3.94}$$

นำสมการ ((3.94) แทนใน (3.93) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = \pm\frac{1}{2}\int \frac{av\sqrt{1-v}\cos\xi(s)\sqrt{-9v+7+\frac{15}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}\sqrt{a^2(1-v)v^2 - a^2(1-v)v^2\cos^2\xi(s)}}\,dv$$

$$u = \pm\frac{a\cos\xi(s)}{2}\int \frac{\sqrt{-9v+7+\frac{15}{1-v}}}{\sqrt{a^2(1-v)v^2\left(1-\cos^2\xi(s)\right)}}\,dv$$

$$u = \pm\frac{a\cos\xi(s)}{2}\int \frac{\sqrt{-9v+7+\frac{15}{1-v}}}{av\sqrt{1-v}\sqrt{\sin^2\xi(s)}}\,dv$$

$$u = \pm\frac{\cos\xi(s)}{2\sin\xi(s)}\int \frac{\sqrt{-9v+7+\frac{15}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}}\,dv$$

ใช้ Mathematica ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ช่วยในการปริพันธ์

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับแคทีนอยด์คือ

$$u = \pm\frac{\cot\xi(s)}{6\sqrt{22-16v+9v^2}}\left[\sqrt{1-v}\sqrt{\frac{-22+16v-9v^2}{-1-v}}\left(-8\sinh\left(\frac{-8+9v}{\sqrt{13v}}\right)+3\left(\sqrt{22-16v+9v^2}\right)+\sqrt{22}\ln\left|11\sqrt{22}v\right|-\sqrt{22}\ln\left|22-8v+\sqrt{22}\sqrt{22-16v+9v^2}\right|\right)+D\right] \quad (3.95)$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการปริพันธ์

3.2.7 พื้นผิวแบบคิส (Kiss Surface)

พื้นผิวแบบคิส [11] มีสมการคาร์ทีเซียนคือ

$$x^2 + y^2 = (1-z)z^4$$

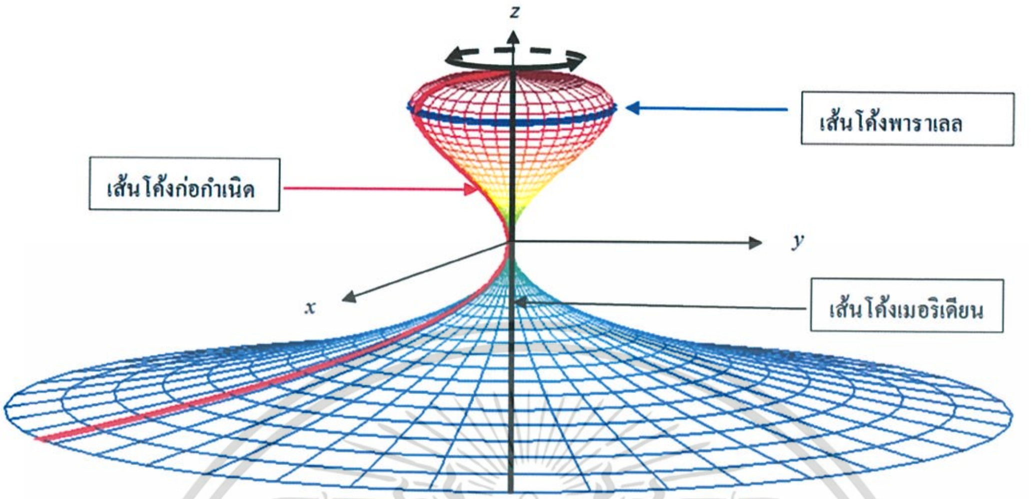
เมื่อ $x = av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u, y = av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u$ และ $z = av$

พื้นผิวแบบคิสเป็นพื้นผิวของการหมุนรอบแกนการหมุน ซึ่งพื้นผิวแบบคิสมีลักษณะเป็นทั้งรูปทรงแบบปิดและเปิด โดยที่ส่วนบนของรูปเป็นรูปทรงแบบปิดและส่วนล่างเป็นรูปทรงแบบเปิด นอกจากนี้ยังมีลักษณะคล้ายกับพื้นผิวแบบดิงดอง โดยพื้นผิวแบบคิสมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u, av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u, av\right) \quad (3.96)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $f(v)=av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}, g(v)=av$ โดยที่ $v\in(-\infty,1), u\in[0,2\pi)$ และ a เป็นค่าคงที่ใดๆ(รูปที่ 3. 7)



รูปที่ 3.7 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของพื้นผิวแบบคิส

3.2.7.1 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิส (Geodesic on Kiss Surface)

พื้นผิวแบบคิงคองมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\mathbf{x}(u,v)=\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u, av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u, av\right)$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E, F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.96) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.96) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-av\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u, av\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u, 0\right) \tag{3.97}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.96) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v=\left(a\left[\frac{v^2\left(\frac{-1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right]\cos u, a\left[\frac{v^2\left(\frac{-1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right]\sin u, a\right)$$

$$=\left(a\left[-\frac{v^2}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right]\cos u, a\left[-\frac{v^2}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right]\sin u, a\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \left(a\left[\frac{-v^2 + 8v\left(\frac{1-v}{2}\right)}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\cos u, a\left[\frac{-v^2 + 8v\left(\frac{1-v}{2}\right)}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\sin u, a \right)$$

$$= \left(a\left[\frac{-v^2 + 4v - 4v^2}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\cos u, a\left[\frac{-v^2 + 4v - 4v^2}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\sin u, a \right)$$

ดังนั้น
$$\mathbf{x}_v = \left(a\left[\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\cos u, a\left[\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\sin u, a \right) \tag{3.97}$$

เนื่องจาก $g_{11} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = E,\ g_{12} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = g_{21} = F$ และ $g_{22} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$, จะได้

นำสมการ (3.96) และ (3.97) แทนในสมการ (2.4) จะได้

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \left(a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)\sin^2 u + a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)\cos^2 u \right) = a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)$$

ดังนั้น
$$E = a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right) \tag{3.98}$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = -av\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u \cdot a\left[\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\cos u + av\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u \cdot a\left[\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right]\sin u + 0 \cdot a$$

ดังนั้น
$$F = 0 \tag{3.99}$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = a^2\left(\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right)^2\cos^2 u + a^2\left(\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right)\sin^2 u + a^2 = a^2\left(\frac{-5v^2 + 4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}} \right)^2 + a^2$$

$$= a^2\left(\frac{\left(-5v^2 + 4v\right)^2}{16\left(\frac{1-v}{2}\right)} \right)^2 + a^2$$

$$= \frac{a^2\left(25v^4 - 40v^3 + 16v^2\right) + \left(8\left(1-v\right)\right)a^2}{8\left(1-v\right)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น
$$G=\frac{a^2\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)} \tag{3.100}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2=E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2$$

นำสมการ E (3.98) F (3.99) และ G (3.100) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวแบบคิส**

$$ds^2=a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)du^2+\frac{a^2\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)}dv^2 \tag{3.101}$$

หาอนุพันธ์ E เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u=0 \text{ และ } E_v=\frac{-a^2v^4}{2}+2a^2v^3(1-v) \tag{3.102}$$

หาอนุพันธ์ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$G_u=0 \text{ และ }$$

$$G_v=\frac{\left[a^2\left(100v^3-120v^2+32v-8\right)8(1-v)-a^2\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)(-8)\right]}{64(1-v)^2}$$

$$=\frac{\left[a^2\left(-64+320v-121v^2+1760v^3-800v^4\right)-a^2\left(-64+64v-128v^2+320v^3-200v^4\right)\right]}{64(1-v)^2}$$

ดังนั้น
$$G_v=a^2(v-1)^2v(32-211v+180v^2) \tag{3.103}$$

นำสมการ (3.98) (3.100) (3.101) และ (3.103) แทนในสมการ (2.63) จะได้

$$u''+\frac{\left(\frac{-a^2v^4}{2}+2a^2v^3(1-v)\right)}{a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)}u'v'=u''+\left(\frac{-3}{1-v}+\frac{4}{(1-v)v}\right)u'v'=0$$

นำสมการ (3.98) (3.100) (3.101) และ (3.103) แทนในสมการ (2.64) จะได้

$$v''+\frac{\left(-a^2\frac{v^2}{2}+2a^2v^3(1-v)\right)}{2a^2\left(\frac{25v^4-40v^3+16v^2-8v+8}{8(1-v)}\right)}u'^2+\frac{a^2(v-1)^2v(32-211v+180v^2)}{2a^2\left(\frac{25v^4-40v^3+16v^2-8v+8}{8(1-v)}\right)}v'^2=0$$

เพราะฉะนั้น **สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวแบบคิส** คือ

$$u''+\left(\frac{-3}{1-v}+\frac{4}{(1-v)v}\right)u'v'=0 \tag{3.104}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v'' + \frac{\left(-\frac{v^2}{2} + 2v^3(1-v)\right)}{\left(2 - 4v + 6v^2 - 14v^3 + \frac{65v^4}{4} - \frac{25v^5}{4}\right)} u'^2 + \frac{(v-1)^2 v(32 - 211v + 180v^2)}{\left(2 - 4v + 6v^2 - 14v^3 + \frac{65v^4}{4} - \frac{25v^5}{4}\right)} v'^2 = 0$$

(3.105)

นำ E, F และ G แทนในสมการ (3.3) จะได้

$$u = \pm c \int \frac{\sqrt{\frac{a^2\left(25v^4 - 40v^3 + 16v^2 - 8v + 8\right)}{8(1-v)}}}{\sqrt{a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right)} \sqrt{a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right) - c^2}} dv$$

$$= \pm c \int \frac{\sqrt{\frac{\left(25v^4 - 40v^3 + 16v^2 - 8v + 8\right)}{8(1-v)}}}{v^2 \sqrt{\left(\frac{1-v}{2}\right)} \sqrt{a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right) - c^2}} dv$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวแบบคิสที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ คือ

$$u = \pm c \int \frac{\sqrt{\frac{\left(25v^4 - 40v^3 + 16v^2 - 8v + 8\right)}{8(1-v)}}}{v^2 \sqrt{\left(\frac{1-v}{2}\right)} \sqrt{a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right) - c^2}} dv \qquad (3.106)$$

จากสมการ (2.68) และเนื่องจาก $f(v) = av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}$ ดังนั้น

$$av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}} \cos\xi(s) = c \qquad (3.107)$$

นำสมการ (3.107) แทนใน (3.106) จะได้

$$u = \pm \int \frac{av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}} \cos\xi(s) \sqrt{\frac{\left(25v^4 - 40v^3 + 16v^2 - 8v + 8\right)}{8(1-v)}}}{v^2 \sqrt{\left(\frac{1-v}{2}\right)} \sqrt{a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right) - a^2 v^4 \left(\frac{1-v}{2}\right) \cos^2 \xi(s)}} dv$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u=\pm\int\frac{a\cos\xi(s)\sqrt{\dfrac{\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)}}}{\sqrt{a^2v^4\left(\dfrac{1-v}{2}\right)\left(1-\cos^2\xi(s)\right)}}dv$$

$$u=\pm\int\frac{a\cos\xi(s)\sqrt{\dfrac{\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)}}}{av^2\sqrt{\dfrac{1-v}{2}}\sqrt{\sin^2\xi(s)}}dv$$

$$u=\pm\frac{\cos\xi(s)}{\sin\xi(s)}\int\frac{\sqrt{\dfrac{\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)}}}{v^2\sqrt{\dfrac{1-v}{2}}}dv$$

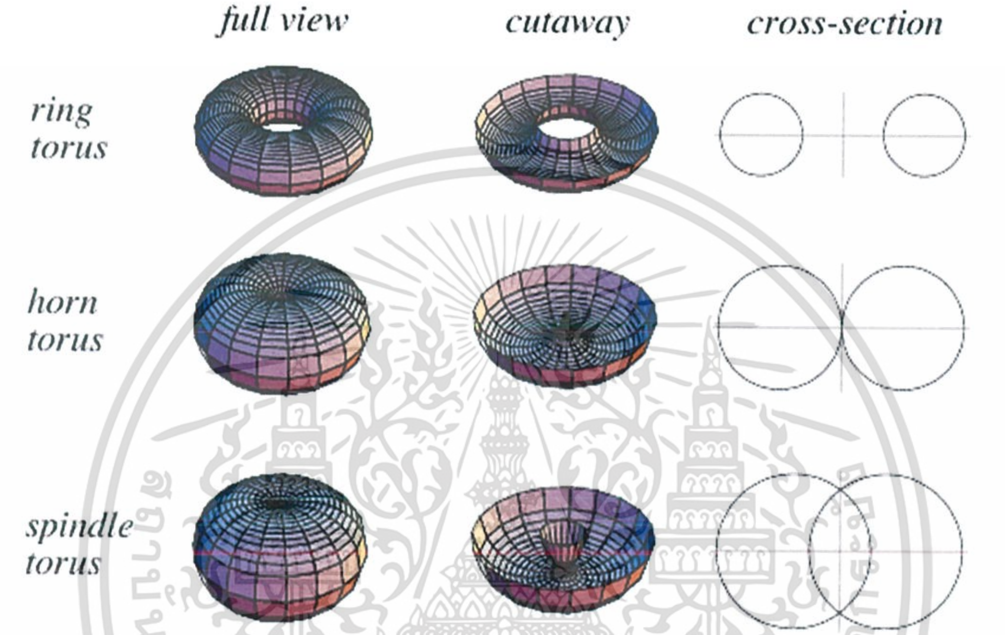
$$u=\pm\cot\xi(s)\int\frac{\sqrt{\dfrac{\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8(1-v)}}}{v^2\sqrt{\dfrac{1-v}{2}}}dv \tag{3.108}$$

เนื่องจากสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับพื้นผิวแบบคิส (3.108) อยู่ในรูป Elliptic Integral ที่ยุ่งยากจึงไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการด้วยปริพันธ์แคคูลัส

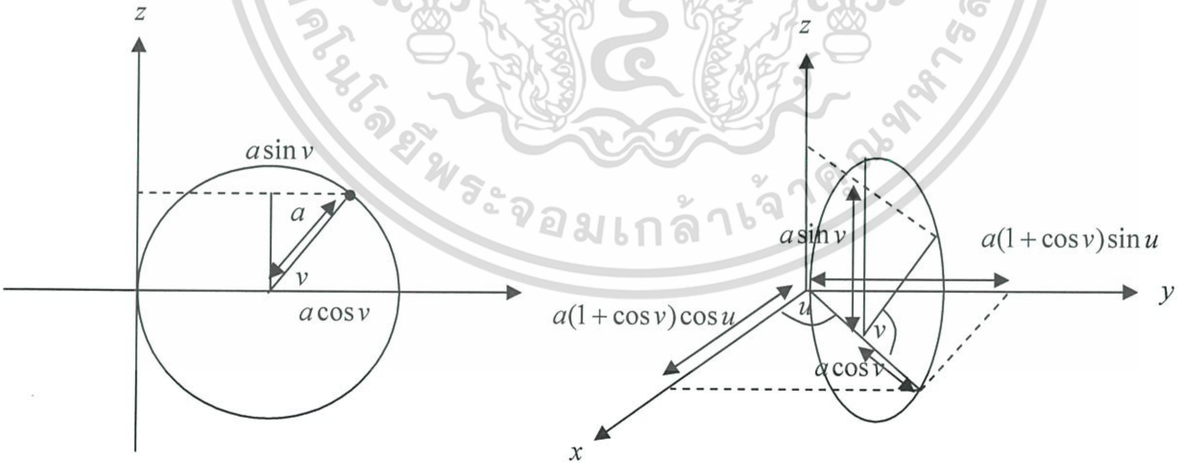
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.8 ทรงห่วงยางแบบฮอร์น (Horn torus)

ทรงห่วงยางแบบฮอร์น [11] เป็นพื้นผิวของการหมุนที่ตัดกับแกนการหมุน (แกน z) สำหรับทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นรูปทรงแบบปิด โดยแบ่งออกเป็น 3 ประเภทได้แก่ Ring torus Horn torus และSpindle torus ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ประเภทของทรงห่วงยาง



รูปที่ 3.9 พิกัดบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น

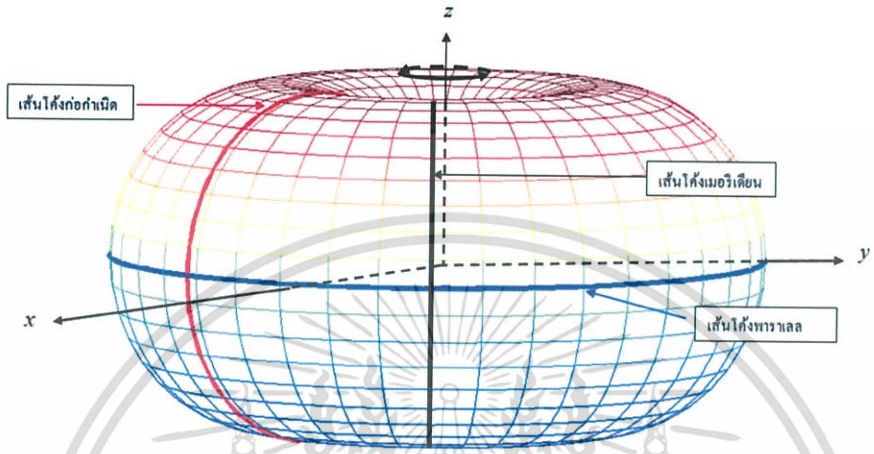
จากรูปที่ 3.9 จะได้ $x = a(1+\cos v)\cos u, y = a(1+\cos v)\sin u$ และ $z = a\sin v$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทรงห่วงยางแบบฮอร์นมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a(1+\cos v)\cos u, a(1+\cos v)\sin u, a\sin v\right) \tag{3.109}$$

เมื่อ $f(v)=a(1+\cos v), g(v)=a\sin v$ โดยที่ $v,u\in[0,2\pi)$ และ a เป็นค่าคงที่ใดๆ



รูปที่ 3.10 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงห่วงยางแบบฮอร์น

3.2.8.1 จีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น (Geodesic on Horn torus)

ทรงห่วงยางแบบฮอร์นมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a(1+\cos v)\cos u, a(1+\cos v)\sin u, a\sin v\right)$$

คำนวณสัมประสิทธิ์ E,F และ G ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ $\mathbf{x}$ (3.109) นั่นคือ หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.109) กับ u จะได้

$$\mathbf{x}_u=\left(-a(1+\cos v)\sin u, a(1+\cos v)\cos u, 0\right) \tag{3.110}$$

หาอนุพันธ์เทียบ $\mathbf{x}$ (3.109) กับ v จะได้

$$\mathbf{x}_v=\left(-a\sin v\cos u, -a\sin v\sin u, a\cos v\right) \tag{3.111}$$

เนื่องจาก $g_{11}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=E,\ g_{12}=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_u=g_{21}=F$ และ $g_{22}=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=G$, จะได้

นำสมการ (3.110) และ (3.111) แทนในสมการ (2.4) จะได้

$$E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=a^2(1+\cos v)^2\sin^2 u+a^2(1+\cos v)^2\cos^2 u$$
$$=a^2(1+\cos v)^2\left(\sin^2 u+\cos^2 u\right)$$

ดังนั้น

$$E=a^2(1+\cos v)^2 \tag{3.112}$$

$$F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=a^2(1+\cos v)^2\sin u\sin v\cos u-a^2(1+\cos v)\cos u\sin v\sin u+(0)a\cos v$$

ดังนั้น

$$F=0 \tag{3.113}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = a^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 \cos^2 v$$
$$= a^2 \sin^2 v \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + a^2 \cos^2 v$$
$$= a^2 \left(\sin^2 v + \cos^2 v\right)$$

ดังนั้น
$$G = a^2 \tag{3.114}$$

จากสมการ(2.15) นั่นคือ

$$ds^2 = E\left(du\right)^2 + 2Fdudv + G\left(dv\right)^2$$

นำสมการ E (3.112) และ G (3.114) แทนในสมการ (2.15) จะได้ **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของทรงห่วงยางแบบฮอร์น**

$$ds^2 = a^2(1+\cos v)^2 du^2 + a^2 dv^2 \tag{3.115}$$

หาอนุพันธ์ E เทียบกับ u และ v จะได้

$$E_u = 0 \text{ และ } E_v = -2a^2(1+\cos v)\sin v$$

ดังนั้น

$$E_v = -2a^2(1+\cos v)\sin v \tag{3.116}$$

หาอนุพันธ์ G เทียบกับ u และ v จะได้

$$G_u = 0 \text{ และ } G_v = 0$$

ดังนั้น

$$G_v = 0 \tag{3.117}$$

นำสมการ (3.112) (3.114) (3.116) และ (3.117) แทนในสมการ (2.63) จะได้

$$u'' + \frac{(-2)a^2(1+\cos v)\sin v}{a^2(1+\cos v)^2} u'v' = 0$$
$$u'' - \frac{2\sin v}{(1+\cos v)} u'v' = 0$$
$$u'' - \frac{\sin v}{\frac{1+\cos v}{2}} u'v' = 0$$
$$u'' - \frac{\sin v}{\cos^2 \frac{v}{2}} u'v' = 0$$
$$u'' - \frac{2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} u'v' = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u'' - \frac{2\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}} u'v' = 0$$

นำสมการ (3.112) (3.114) (3.116) และ (3.117) แทนในสมการ (2.64) จะได้

$$v'' - \frac{-2a^2(1+\cos v)\sin v}{2a^2} u'^2 + (0)v'^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงห่วงยางแบบฮอร์น คือ

$$u'' - 2\tan\frac{v}{2} u'v' = 0 \tag{3.118}$$

$$v'' + (1+\cos v)\sin v u'^2 = 0 \tag{3.119}$$

แทนค่า E, F และ G ในสมการ (3.3) จะได้

$$u = \pm\int \frac{c\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2(1+\cos v)^2}\sqrt{a^2(1+\cos v)^2 - c^2}} dv$$

$$= \pm\int \frac{ca}{a(1+\cos v)\sqrt{a^2(1+\cos v)^2 - c^2}} dv$$

ดังนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงห่วงยางแบบฮอร์นที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ คือ

$$u = \pm\int \frac{c}{(1+\cos v)\sqrt{a^2(1+\cos v)^2 - c^2}} dv \tag{3.120}$$

จากสมการ (2.68) และเนื่องจาก $f(v) = a(1+\cos v)$ ดังนั้น

$$a(1+\cos v)\cos\xi(s) = c \tag{3.121}$$

นำสมการ ((3.120) แทนใน (3.121) จะได้

$$u = \pm\int \frac{a(1+\cos v)\cos\xi(s)}{(1+\cos v)\sqrt{a^2(1+\cos v)^2 - a^2(1+\cos v)^2\cos^2\xi(s)}} dv$$

$$= \pm\int \frac{a\cos\xi(s)}{a(1+\cos v)\sqrt{1-\cos^2\xi(s)}} dv$$

$$= \pm\frac{\cos\xi(s)}{\sin\xi(s)} \int \frac{1}{(1+\cos v)} dv$$

$$= \pm\cot\xi(s) \int \frac{1}{(1+\cos v)} dv$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = \pm\cot\xi(s)\int \frac{1}{\frac{2(1+\cos v)}{2}}\,dv$$

$$= \pm\cot\xi(s)\int \frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}\,dv$$

$$= \pm\cot\xi(s)\int \frac{\sec^2\frac{v}{2}}{2}\,dv$$

$$= \pm\cot\xi(s)\int \frac{\sec^2\frac{v}{2}}{2}\,d\frac{\left(\frac{v}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แคลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงห่วงยางแบบฮอร์นคือ

$$u = \pm\cot\xi(s)\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)+D\right) \tag{3.122}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่จากการปริพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่4
ผลการวิจัย

จากบทที่ 3 ได้หารูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v และสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ของรูปทรงต่างๆ ซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนแล้ว ในบทนี้ในส่วนแรกจะใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรลนำมาวิเคราะห์ลักษณะจีออเดซิกที่อยู่บนพื้นผิวของการหมุนโดยจะแบ่งประเภทของจีออเดซิกตามค่าคงที่ของแกลโรล พร้อมทั้งใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนในแต่ละรูปทรง ส่วนที่สองจะแบ่งประเภทของรูปทรงต่างๆ ที่เป็นพื้นผิวของการหมุนออกเป็น 3 ประเภทได้แก่ พื้นผิวของการหมุนแบบเปิด พื้นผิวของการหมุนแบบปิดและพื้นผิวของการหมุนทั้งเปิดและปิดแล้วจะใช้ข้อสรุปจากหัวข้อแรกเพื่อวิเคราะห์จีออเดซิกที่อยู่บนพื้นผิวของการหมุนทั้งสามประเภท

4.1 การวิเคราะห์ลักษณะของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

จากค่าคงที่ของแกลโรล (c) จะให้จีออเดซิกที่แตกต่างกันบนพื้นผิวของการหมุน ดังนั้นเราจะแบ่งประเภทของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน โดยใช้ **ทฤษฎีบท 2.10** (ความสัมพันธ์ของแกลโรล) และ**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก และจะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรล โดย $\xi(s)$ แทนมุมระหว่าง $\alpha(s)$ และพาราเลลที่ผ่าน $\mathbf{x}(u(s),v(s))$ แล้ว

$$f(v)\cos\xi(s)=c \tag{2.68}$$

เมื่อ c คือค่าคงที่ของแกลโรล

ต่อไปนี้จะพิจารณาแต่พื้นผิวโดยใช้คุณสมบัติข้างต้น และจะกำหนดให้ v มีค่าน้อยๆ

4.1.1 การวิเคราะห์ลักษณะของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

เนื่องจากพื้นผิวคล้ายทรงกรวยมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=(av\cos u, av\sin u, \ln v)$$

เมื่อ $f(v)=av, g(v)=\ln v$ โดยที่ $v>0, u\in[0,2\pi)$ และ $a>0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย จะเป็นไปตาม

$$av\cos\xi(s) = c \tag{4.1}$$

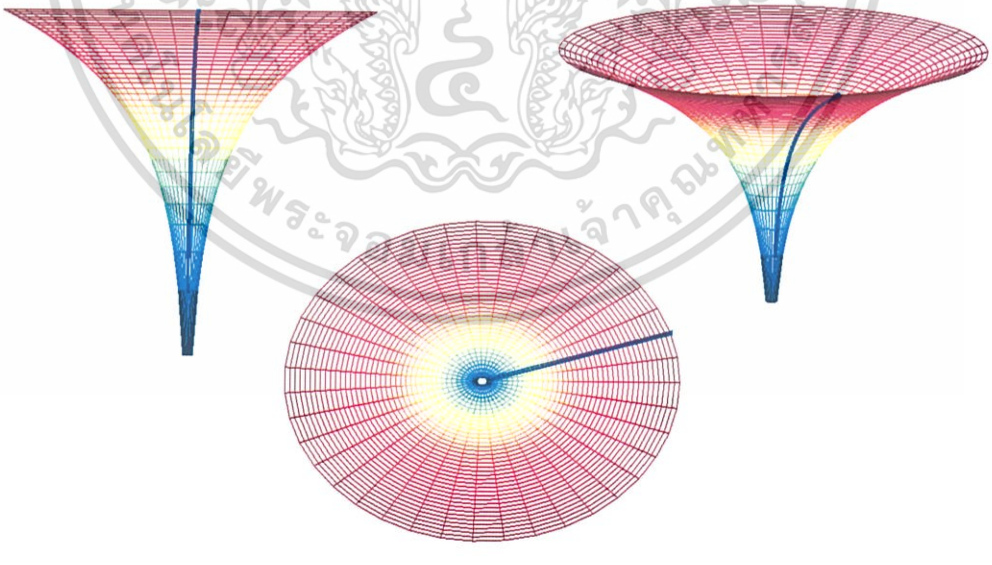
ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวย โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c = 0$

กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวย เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi = \frac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย (4.1) โดยแทนค่า $\xi = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$c = av\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{4.2}$$

เนื่องจาก**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก
ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c = 0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1. ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ไม่มีพาราเลลบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นพาราเลลบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวย เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวคล้ายทรงกรวย (4.1) โดยแทนค่า $\xi=0$ จะได้

$$c=av\cos(0)=av \tag{4.3}$$

เนื่องจาก **ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ และจาก $f(v)=av$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v)=a\neq 0 \tag{4.4}$$

จากสมการที่ (4.4) ไม่เป็นไปตามเงื่อนไข $f'(v_0)=0$

เพราะฉะนั้น ไม่มีพาราเลลบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเป็นจีออเดซิก

3. บางจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c|<|a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยมีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้นจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวย (4.1) นั่นคือ

$$c=av\cos\xi(s)$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$c^2=a^2v^2\cos^2\xi(s)$$

เนื่องจาก $0\le\cos^2\xi(s)\le 1$ จะได้

$$c^2=a^2v^2\cos^2\xi(s)\le a^2v^2$$

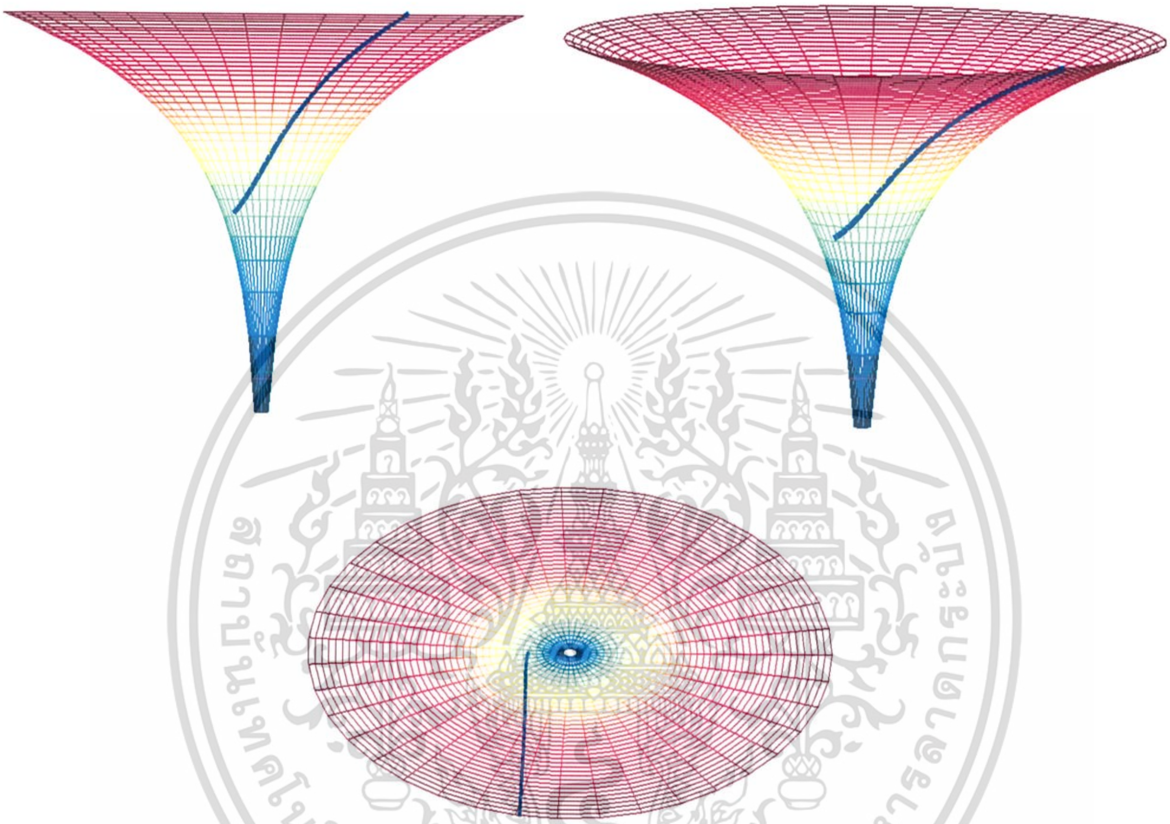
เนื่องจาก $v>0$ และกำหนดให้ v มีค่าน้อยๆ ดังนั้น

$$|c|<|a| \tag{4.5}$$

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0,v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds},\dfrac{dv}{ds}\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (\pi, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 จีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (\pi, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 การวิเคราะห์ลักษณะของบางจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

เนื่องจากทรงพาราโบลามีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(av\cos u, av\sin u, v^2\right)$$

เมื่อ $f(v)=av, g(v)=v^2$ โดยที่ $v>0, u\in[0,2\pi)$ และ $a>0$

ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของทรงพาราโบลาจะเป็นไปตาม

$$av\cos\xi(s)=c \tag{4.6}$$

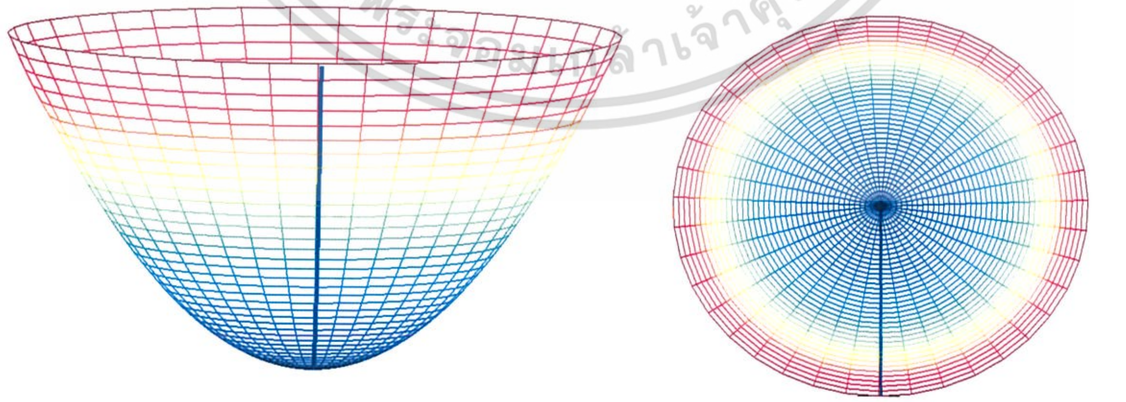
ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนทรงพาราโบลา โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงพาราโบลาเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนทรงพาราโบลา เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงพาราโบลา (4.6) โดยแทนค่า $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จะได้

$$c=av\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{4.7}$$

เนื่องจาก**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก
ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงพาราโบลาเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.3.



รูปที่ 4.3 เมอริเดียนบนทรงพาราโบลาเป็นจีออเดซิกโดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ไม่มีพาราเลลบนทรงพาราโบลาเป็นจีออเดซิก

กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นพาราเลลบนทรงพาราโบลา เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi = 0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงพาราโบลา (4.6) โดยแทนค่า $\xi = 0$ จะได้

$$c = av\cos(0) = av \tag{4.8}$$

เนื่องจาก **ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ และจาก $f(v) = av$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v_0) = a \neq 0$$

นั่นคือ $f'(v_0) \neq 0$ ดังนั้น ไม่มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิกบนทรงพาราโบลา

3. บางจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c| < |a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนทรงพาราโบลามีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้น จีออเดซิกบนทรงพาราโบลาจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงพาราโบลา (4.6) นั่นคือ

$$c = \left(av\sqrt{1-v}\right)\cos\xi(s)$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ และ เนื่องจาก $0 \leq \cos^2\xi(s) \leq 1$ จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2v^2\cos^2\xi(s) \\ &\leq a^2v^2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $v > 0$ และกำหนดให้ v มีค่าน้อยๆ จะได้

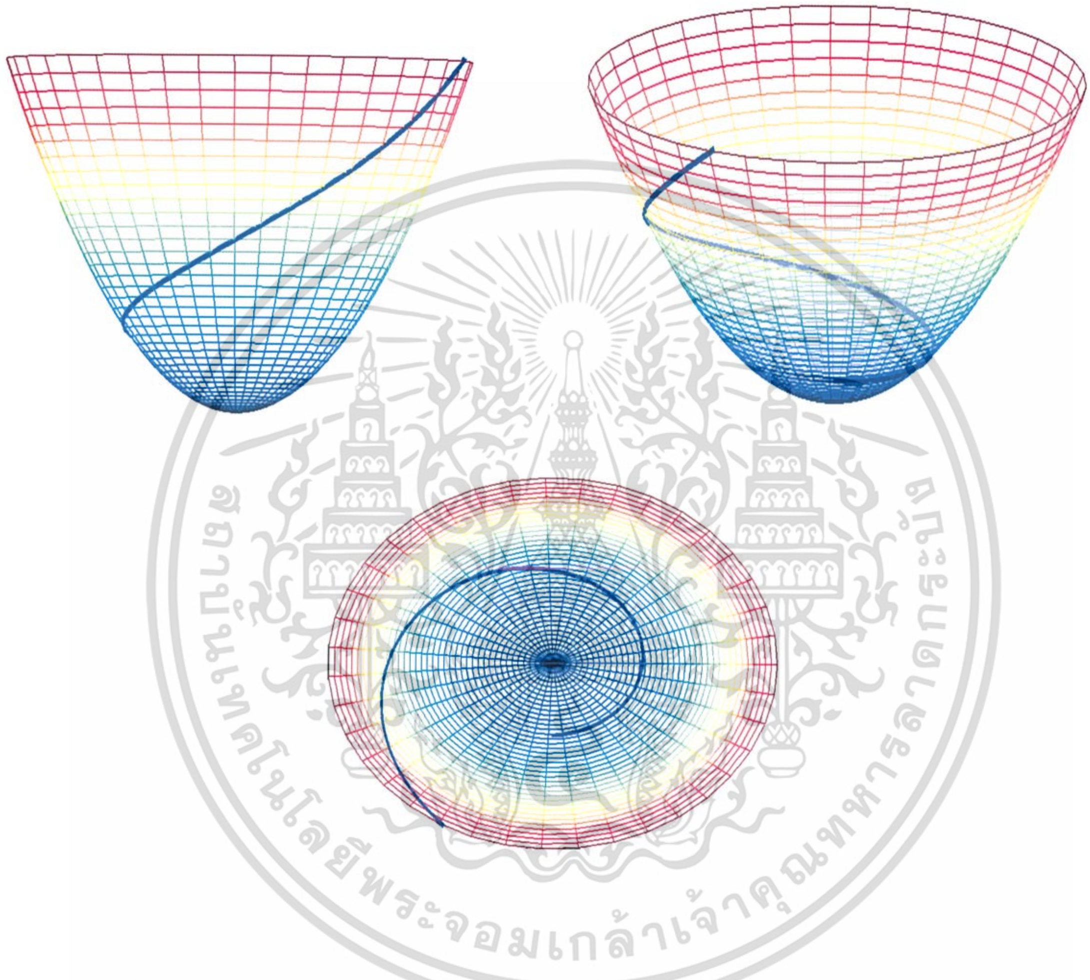
เพราะฉะนั้น
$$|c| < |a| \tag{4.9}$$

นั่นคือค่าคงที่แกลโรลจะมีค่าเป็นค่าคงที่ใดๆ

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c| < |a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวคล้ายทรงกรวยที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 บางจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.3. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

ทรงไฮเพอร์โบลาเป็นรูปทรงเปิดมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sqrt{1+v^2}\cos u, a\sqrt{1+v^2}\sin u, bv\right)$$

เมื่อ $f(v)=bv, g(v)=a\sqrt{1+v^2}$ โดยที่ $u\in[0,2\pi)$ $a>0$ และ $b>0$

ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลาจะเป็นไปตาม

$$a\sqrt{1+v^2}\cos\xi(s)=c \tag{4.10}$$

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนบนทรงไฮเพอร์โบลา โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

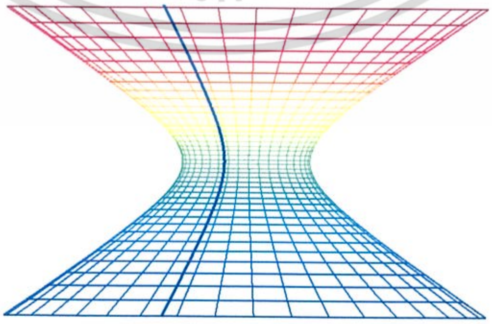
1. ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลา เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\frac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของบนทรงไฮเพอร์โบลา (4.10) โดยแทนค่า $\xi=\frac{\pi}{2}$ ในสมการ (4.10) จะได้

$$c=a\sqrt{1+v^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{4.11}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก

ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.5.



รูปที่ 4.5 ทุกๆ เมอริเดียนบนบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. บางพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิกเมื่อ $c = a$ โดยที่ $v_0 = 0$

กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นพาราเลลบนบนทรงไฮเพอร์โบลา เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi = 0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลา (4.10) โดยแทนค่า $\xi = 0$ จะได้

$$c = a(1+v^2)\cos(0) = a(1+v^2) \tag{4.12}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ และจาก $f(v) = a\sqrt{1+v^2}$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v) = \frac{2av}{\sqrt{1+v^2}} \tag{4.13}$$

จากเงื่อนไข $f'(v_0) = 0$ และสมการ (4.13) จะได้

$$f'(v_0) = \frac{2av_0}{\sqrt{1+v_0^2}} = 0$$

เมื่อ $v_0 = 0$

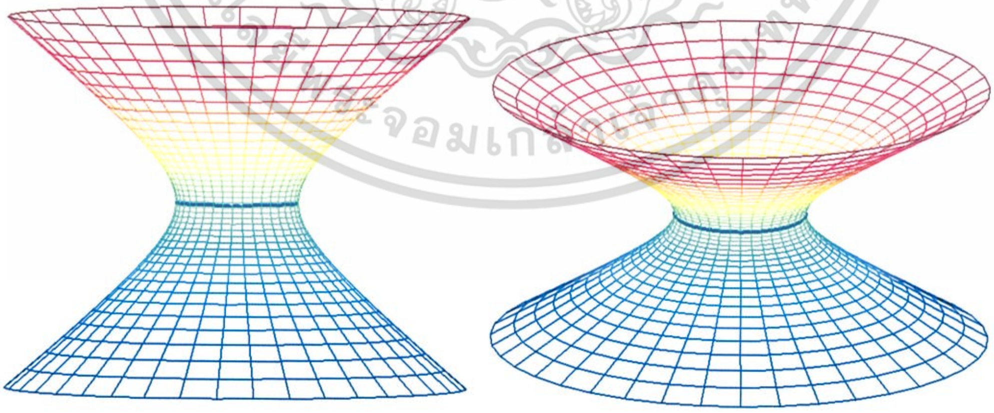
แทนค่า $v_0 = 0$ สมการ (4.12) จะได้

$$c = a(1+(0)^2) = a$$

ดังนั้น

$$c = a \tag{4.14}$$

เพราะฉะนั้น จะมีบางพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = a$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่



รูปที่ 4.6. บางพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = a$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c| < |a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลามีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้นจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลา (4.10) นั่นคือ

$$c = a\sqrt{1+v^2}\cos\xi(s)$$
$$c^2 = \left(a\sqrt{1+v^2}\right)^2\cos^2\xi(s)$$
$$c^2 \le \left(a\sqrt{1+v^2}\right)^2$$
$$c^2 \le a^2(1+v^2)$$

เนื่องจาก $v > 0$ และกำหนดให้ v มีค่าน้อยๆ จะได้

$$c^2 \le a^2$$

แต่ในกรณีไม่พิจารณา $c = a$ เพราะฉะนั้น

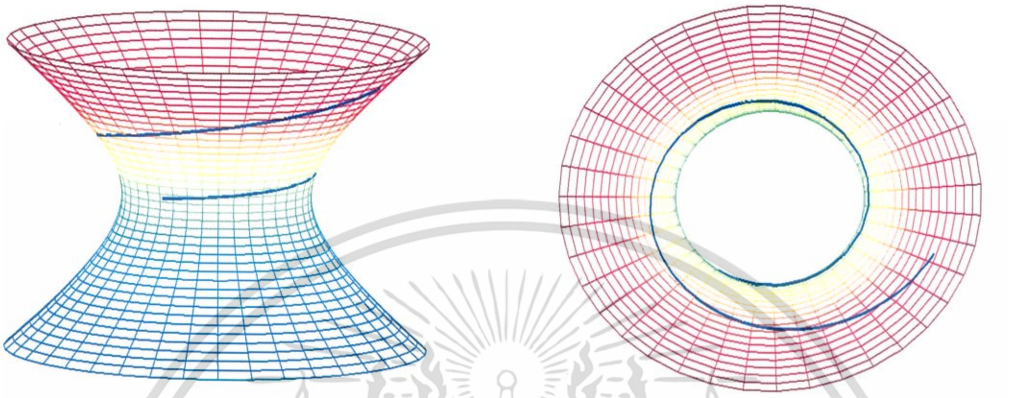
เพราะฉะนั้น $$|c| < |a| \qquad (4.15)$$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนโดยที่ค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = a$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c| < |a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right)$

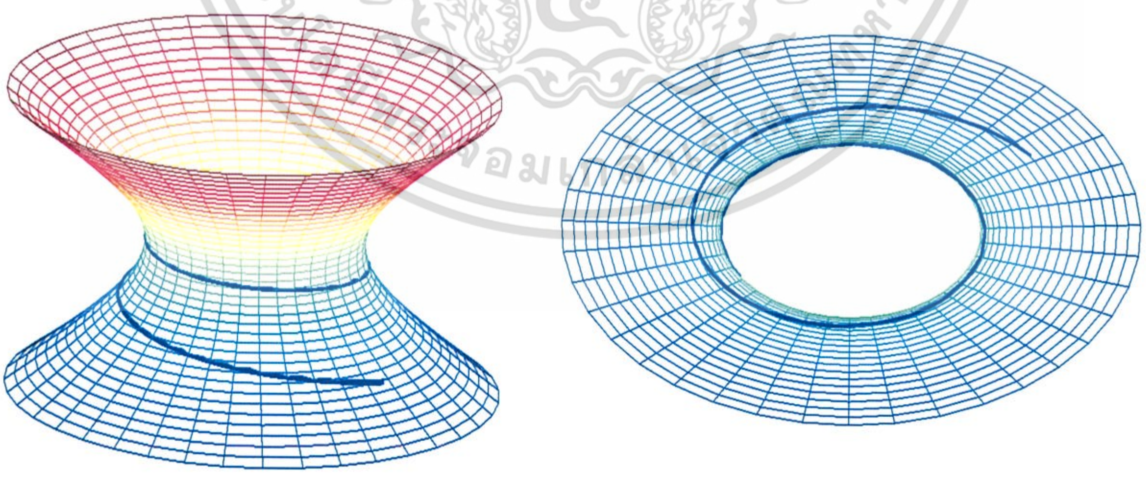
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนโดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, -0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนโดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1,1)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, -0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, b\cosh v\right)$$

เมื่อ $f(v)=a\sinh v, g(v)=b\cosh v$ โดยที่ $v\in(-\infty,\infty), u\in[0,\pi)$, $a>0$ และ $b>0$ จากสมการ (2.68) ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นจะเป็นไปตาม

$$a\sinh v\cos\xi(s)=c \qquad (4.16)$$

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

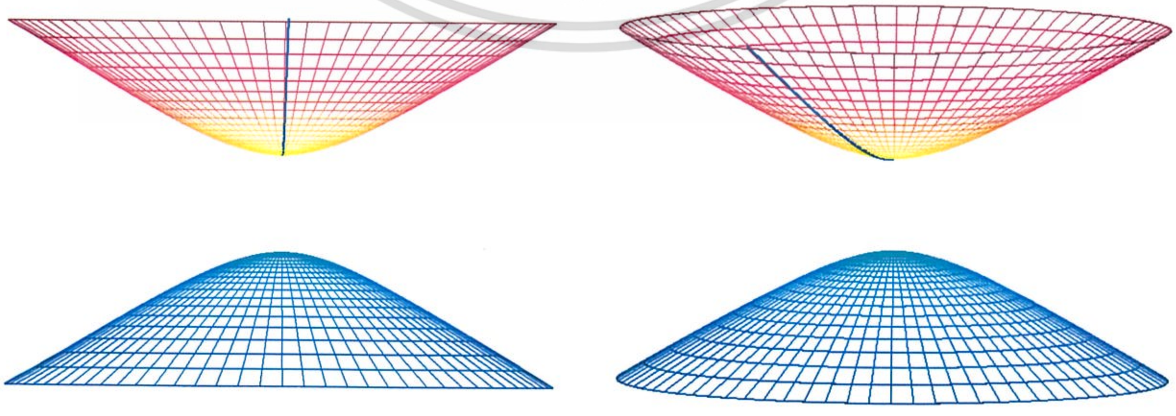
1. **ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นเป็นจีออเดซิก เมื่อ** $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\frac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น (4.16) โดยแทนค่า $\xi=\frac{\pi}{2}$ จะได้

$$c=a\sinh v\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (4.17)$$

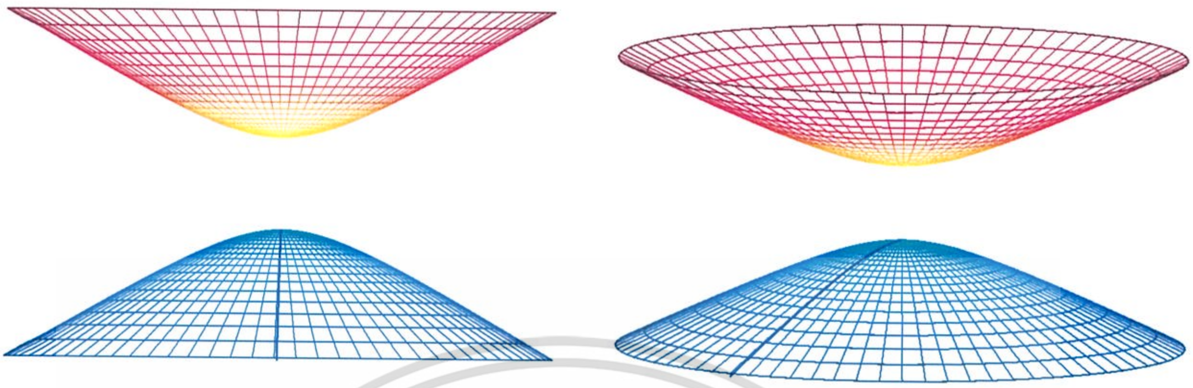
โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก

ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น เป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 ก) ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นบนเป็นจีออเดซิก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 ข) ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นล่างเป็นจีออเดซิก

รูปที่ 4.9 ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น เป็นจีออเดซิก
โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

2. ไม่มีพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นที่เป็นจีออเดซิก

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น (4.16) โดยแทนค่า $\xi=0$ จะได้

$$c=a\sinh v\cos(0)=a\sinh v \tag{4.18}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ และจาก $f(v)=a\sinh v$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v)=a\cosh v \tag{4.19}$$

เนื่องจาก $\cosh v\neq 0$
เพราะฉะนั้น $f'(v_0)\neq 0$
ดังนั้น ไม่มีพาราเลลบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นที่เป็นจีออเดซิก

3 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c|<|a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนทรงพาราโบลามีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้น จีออเดซิกบนทรงพาราโบลาจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น (4.16) นั่นคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c = a\sinh v \cos\xi(s)$$

ยกกำลังทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\sinh v)^2 \cos^2\xi(s) \\ &\le a^2 \sinh^2 v \\ &\le a^2 \end{aligned}$$

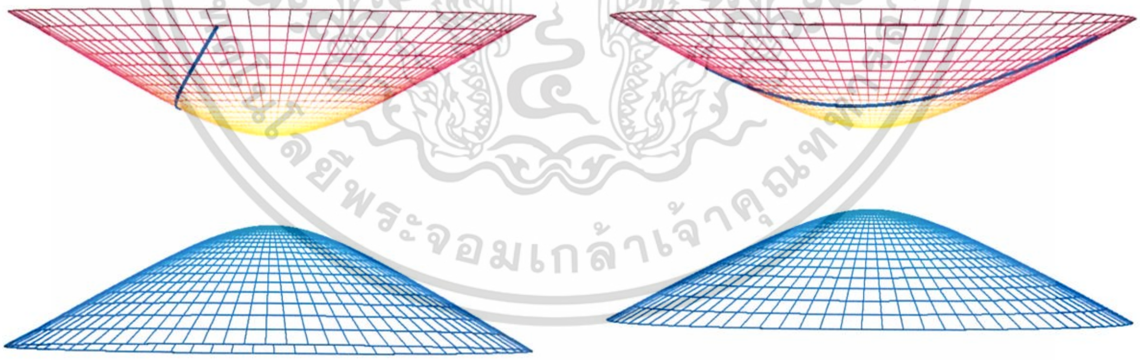
เนื่องจาก $v > 0$ และกำหนดให้ v มีค่าน้อยๆ จะได้

$$c^2 < a^2$$

เพราะฉะนั้น
$$|c| < |a| \tag{4.20}$$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c| < |a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)$

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 บางจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาชิ้นบนที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนโดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.5. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

แคทีนอยด์มีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\sin u, v\right)$$

เมื่อ $f(v)=a\cosh\left(\frac{v}{a}\right), g(v)=v$ โดยที่ $u\in[0,2\pi)$ และ $a>0$

จากสมการ (2.68) ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของแคทีนอยด์จะเป็นไปตาม

$$a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\xi(s)=c \tag{4.21}$$

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนแคทีนอยด์ โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

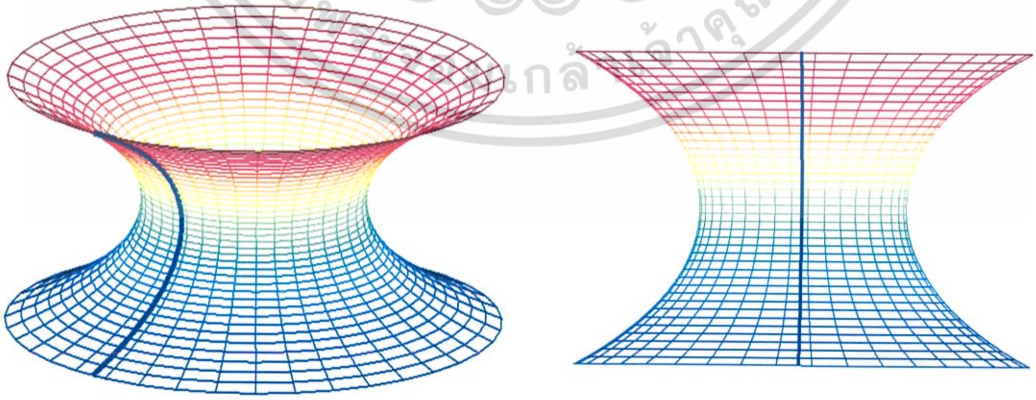
1. ทุกๆ เมอริเดียนบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนแคทีนอยด์ เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\frac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของแคทีนอยด์ (4.21) โดยแทนค่า $\xi=\frac{\pi}{2}$ ในสมการ (4.22) จะได้

$$c=a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{4.22}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก

ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11. ทุกๆ เมอริเดียนบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. บางพาราเลลบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิกเมื่อ $c = a$ โดยที่ $v_0 = 0$

กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นพาราเลลบนแคทีนอยด์ เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi = 0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของแคทีนอยด์ (4.21) โดยแทนค่า $\xi = 0$ จะได้

$$c = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos 0 = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right) \tag{4.23}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ และจาก $f(v) = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v) = \sinh\left(\frac{v}{a}\right) \tag{4.24}$$

จากเงื่อนไข $f'(v_0) = 0$ และสมการ (4) จะได้

$$\sinh\left(\frac{v_0}{a}\right) = 0$$

เมื่อ $v_0 = 0$

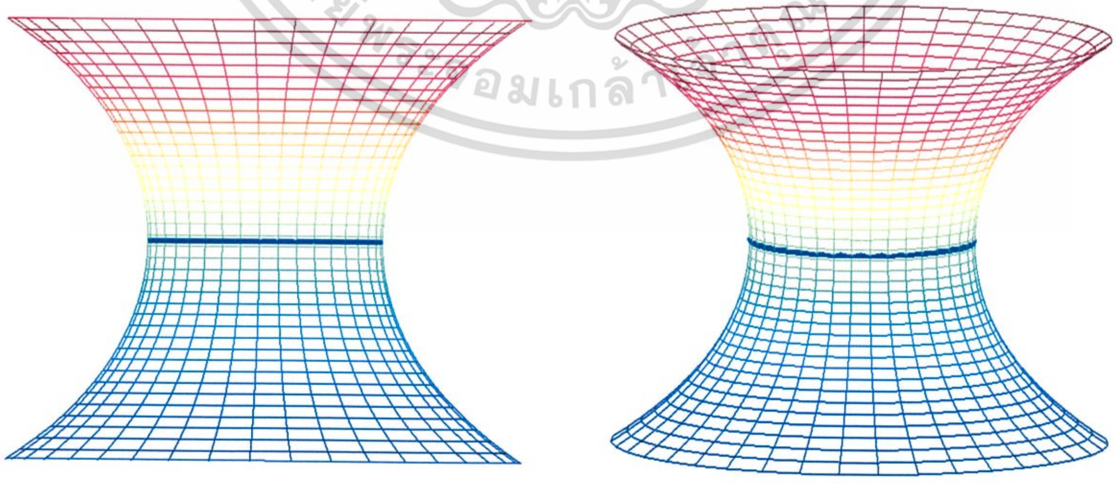
ดังนั้น แทนค่า $v_0 = 0$ สมการ (4.23) จะได้

$$c = a\cosh\left(\frac{0}{a}\right) = a$$

ดังนั้น

$$c = a \tag{4.25}$$

เพราะฉะนั้น จะมีบางพาราเลลบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = a$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12. บางพาราเลลบนแคทีนอยด์เป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = a$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. บางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c|<|a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนแคทีนอยด์มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้นจีออเดซิกบนแคทีนอยด์จะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของแคทีนอยด์ (4.21) นั่นคือ

$$a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos\xi(s)=c$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)\cos^2\xi(s) \\ &\le a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) \\ &\le a^2 \end{aligned}$$

แต่ในกรณีนี้ไม่พิจารณา $c=a$

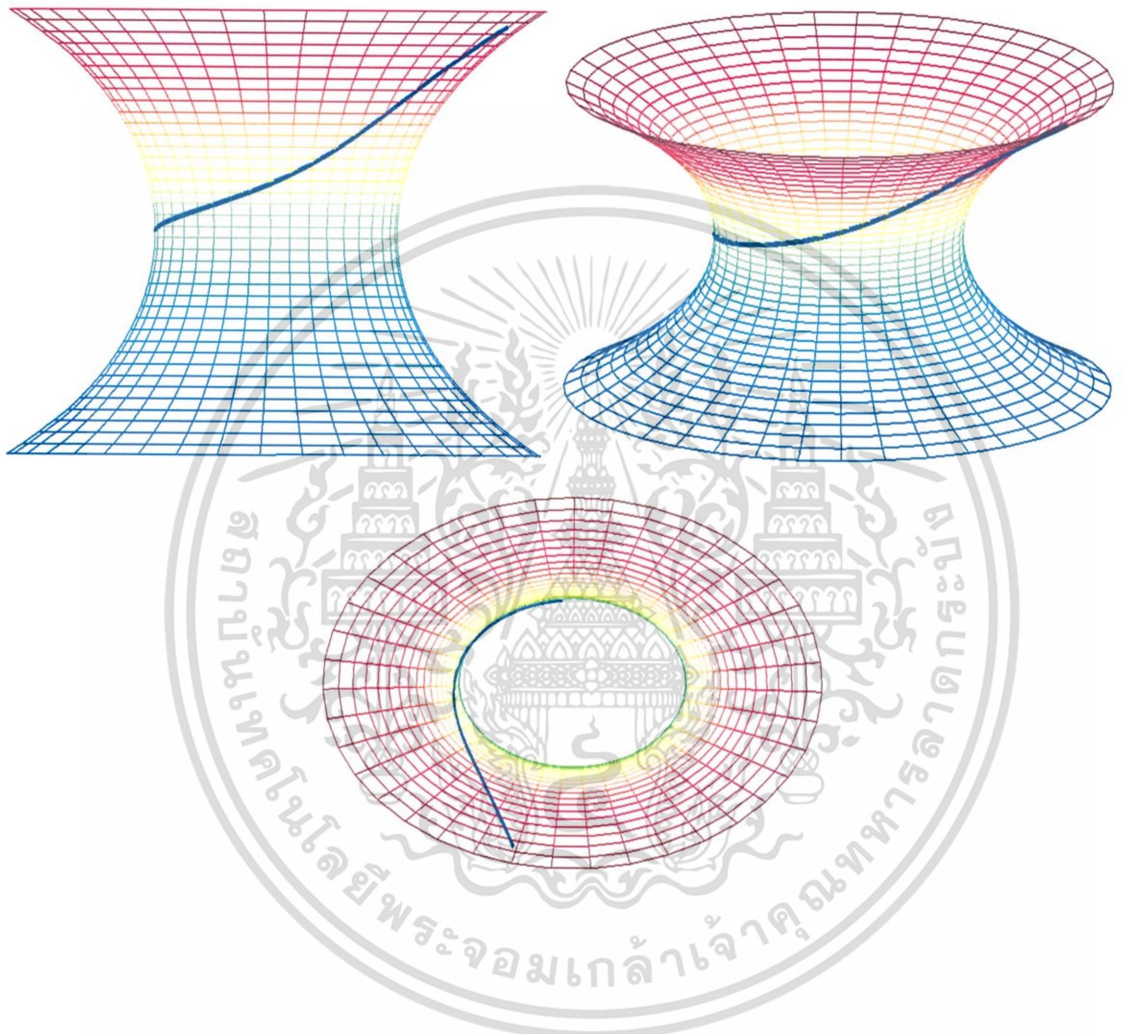
เพราะฉะนั้น
$$|c|<|a| \tag{4.26}$$

ดังนั้น สำหรับบางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $|c|<|a|$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c|<|a|$. ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนแคทีนอยด์โดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0,v_0) และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds},\frac{dv}{ds}\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.1, 0)$ และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ แสดงได้ดัง รูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 บางจีออเดซิกบนแคทีนอยด์ที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีกำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.1, 0)$ และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.6. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

พื้นผิวแบบดิงดองมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a\sqrt{1-v}\cdot v\cos u, a\sqrt{1-v}\cdot v\sin u, av\right)$$

เมื่อ $f(v)=av\sqrt{1-v}, g(v)=av$ โดยที่ $v\in(-\infty,1), u\in[0,2\pi)$ และ $a>0$
จากสมการ (2.68) ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบดิงดองจะเป็นไปตาม

$$\left(av\sqrt{1-v}\right)\cos\xi(s)=c \tag{4.27}$$

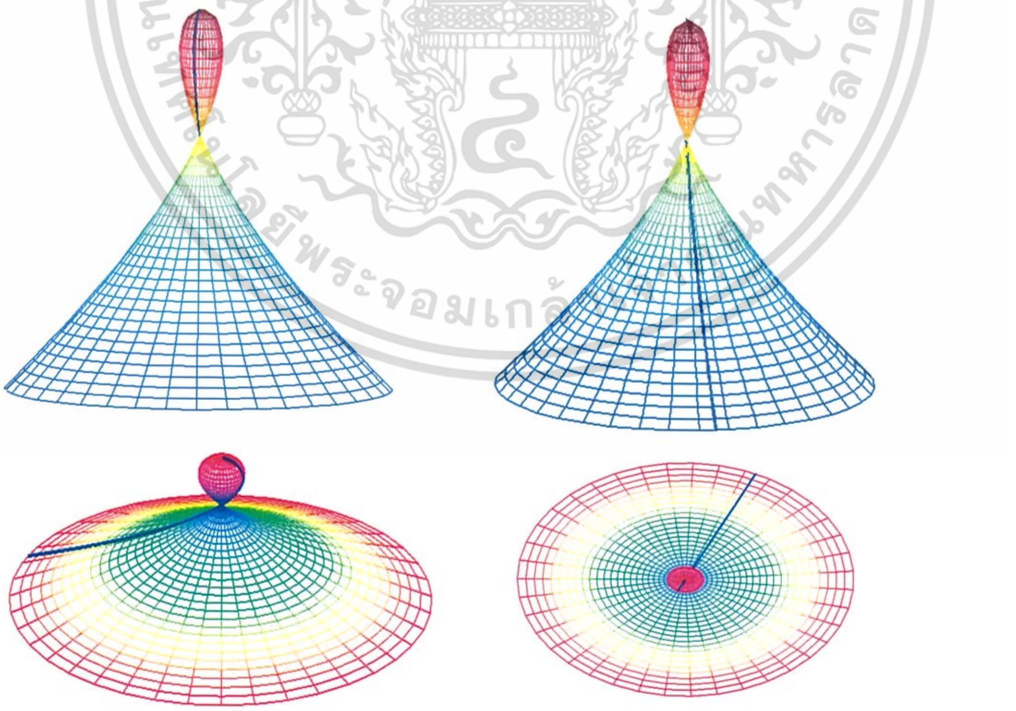
ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนพื้นผิวแบบดิงดอง โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. **ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวแบบดิงดองเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$**

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนพื้นผิวแบบดิงดอง เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวดิงดอง (4.27) โดยแทนค่า $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ ในสมการ (4.27) จะได้

$$c=\left(av\sqrt{1-v}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{4.28}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก แสดงได้ดังรูปที่ 4.14.



รูปที่ 4.14 ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวแบบดิงดองเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. **บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบดิงดองเป็นจีออเดซิกเมื่อ** $c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$ **โดยที่** $v_0=\frac{2}{3}$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นพาราเลลบนพื้นผิวแบบดิงดอง เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบดิงดอง (4.27) โดยแทนค่า $\xi=0$ จะได้

$$c=\left(av\sqrt{1-v}\right)\cos(0)=av\sqrt{1-v} \tag{4.29}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ และจาก $f(v)=av\sqrt{1-v}$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$\begin{aligned} f'(v) &= a\left(\frac{-v}{2\sqrt{1-v}}+\sqrt{1-v}\right) \\ &= a\left(\frac{-v+2(1-v)}{2\sqrt{1-v}}\right) \\ &= a\left(\frac{-v+2-2v}{2\sqrt{1-v}}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f'(v)=a\left(\frac{2-3v}{2\sqrt{1-v}}\right) \tag{4.30}$$

จากเงื่อนไข $f'(v_0)=0$ และสมการ (4.30) จะได้

$$2\sqrt{1-v_0}\neq 0$$

โดยที่ $v_0\in(-\infty,1)$ และ

$$a(2-3v_0)=0 \tag{4.31}$$

$$a=0\wedge 2-3v_0=0$$

พิจารณา $2-3v_0=0$ จะได้ $v_0=\frac{2}{3}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข $v\in(-\infty,1)$

แทนค่า $v=\frac{2}{3}$ ในสมการ (4.29) จะได้

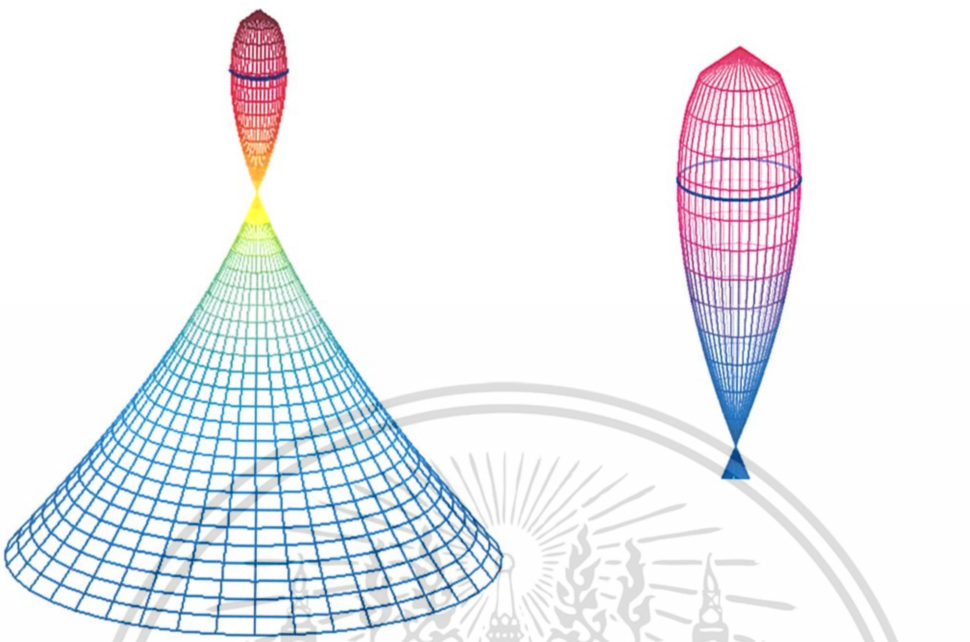
$$c=a\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{1-\frac{2}{3}}=a\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$$

ดังนั้น

$$c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a \tag{4.32}$$

เพราะฉะนั้น จะมีบางพาราเลลบนพื้นผิวแบบดิงดองเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ โดยที่ $v_0=\frac{2}{3}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15. บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบดิงดองเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = \dfrac{2}{3}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}a$

3. บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c| \le |a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองมีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้นจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองจะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบดิงดอง (4.27) นั่นคือ

$$c = \left(av\sqrt{1-v}\right)\cos\xi(s)$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(av\sqrt{1-v}\right)^2 \cos^2\xi(s) \\ &\le \left(av\sqrt{1-v}\right)^2 \\ &= a^2v^2(1-v) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $v \in (-\infty, 1)$ ดังนั้นในพจน์ v^2 และ $1-v$ มีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น

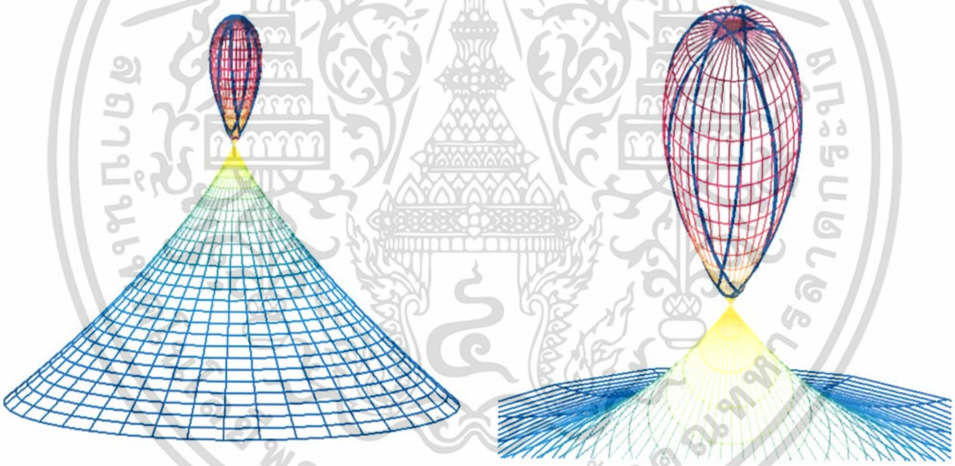
$$c^2 < a^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้น $$|c| < |a| \tag{4.33}$$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c| < |a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง$\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)$

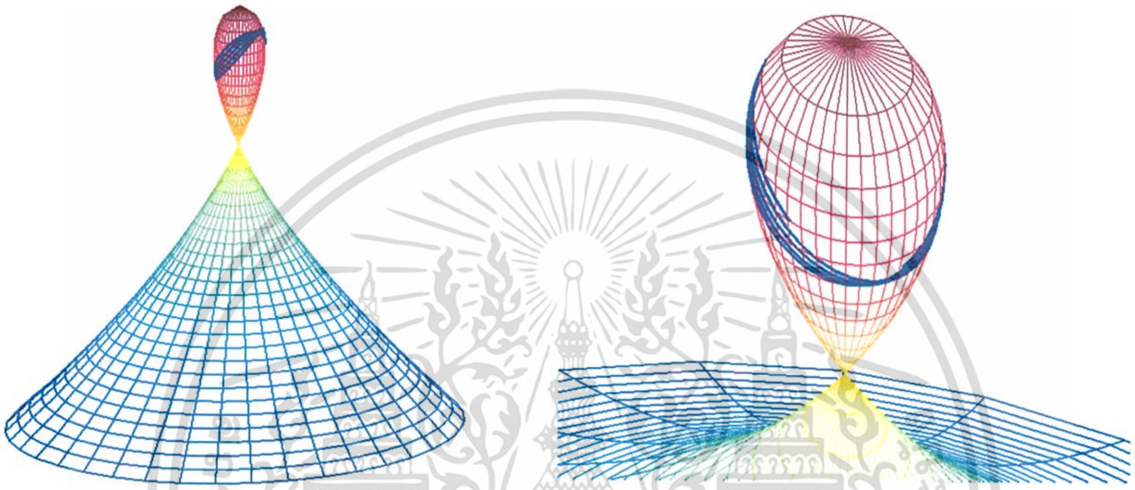
ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.665, 0.665)$ และมีทิศทาง$\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, -1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.665, 0.665)$ และมีทิศทาง$\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, -1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$ แสดงได้ดัง รูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบดิงดองที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.7. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

พื้นผิวแบบคิสมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\cos u, av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\sin u, av\right)$$

เมื่อ $f(v)=av^2\sqrt{\dfrac{1-v}{2}}, g(v)=av$ โดยที่ $v\in(-\infty,1), u\in[0,2\pi)$ และ a เป็นค่าคงที่ใดๆ

จากสมการ (2.68) ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบคิสจะเป็นไปตาม

$$\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\cos\xi(s)=c \tag{4.34}$$

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนพื้นผิวแบบคิส โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

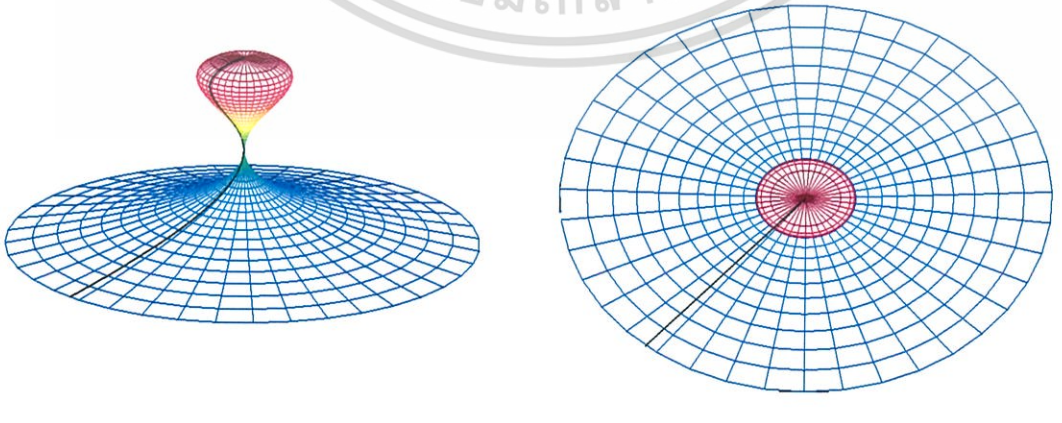
1. ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนพื้นผิวแบบคิส เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบคิส (4.34) โดยแทนค่า $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จะได้

$$c=\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{4.35}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก

ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 ทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิกเมื่อ $c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$ โดยที่ $v_0=\frac{4}{5}$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นพาราเลลบนพื้นผิวแบบคิส เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบคิส (4.34) โดยแทนค่า $\xi=0$ จะได้

$$c=\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\cos 0=av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}} \tag{4.36}$$

โดย **ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ และจาก $f(v)=av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$\begin{aligned}
f'(v)&=a\left(\frac{-\frac{v^2}{2}}{2\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\\
&=a\left(\frac{-v^2}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}+2v\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\\
&=a\left(\frac{-v^2+8v\left(\frac{1-v}{2}\right)}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}\right)\\
&=a\left(\frac{-v^2+4v(1-v)}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f'(v)=a\left(\frac{-5v^2+4v}{4\sqrt{\frac{1-v}{2}}}\right) \tag{4.37}$$

จากเงื่อนไข $f'(v_0)=0$ และสมการ (4.37) จะได้

$$4\sqrt{\frac{1-v_0}{2}}\neq 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $v_0 \in (-\infty,1)$ และ

$$a(-5{v_0}^2 + 4v_0) = 0 \tag{4.38}$$

$$a = 0 \wedge -5{v_0}^2 + 4v_0 = 0$$

พิจารณา $-5{v_0}^2 + 4v_0 = 0$ โดยการแยกตัวประกอบจะได้

$$v_0\left(-5v_0 + 4\right) = 0$$

ดังนั้น $v_0 = 0$ หรือ $v_0 = \frac{4}{5}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข $v \in (-\infty,1)$

แทนค่า $v_0 = \frac{4}{5}$ สมการ (4.36) จะได้

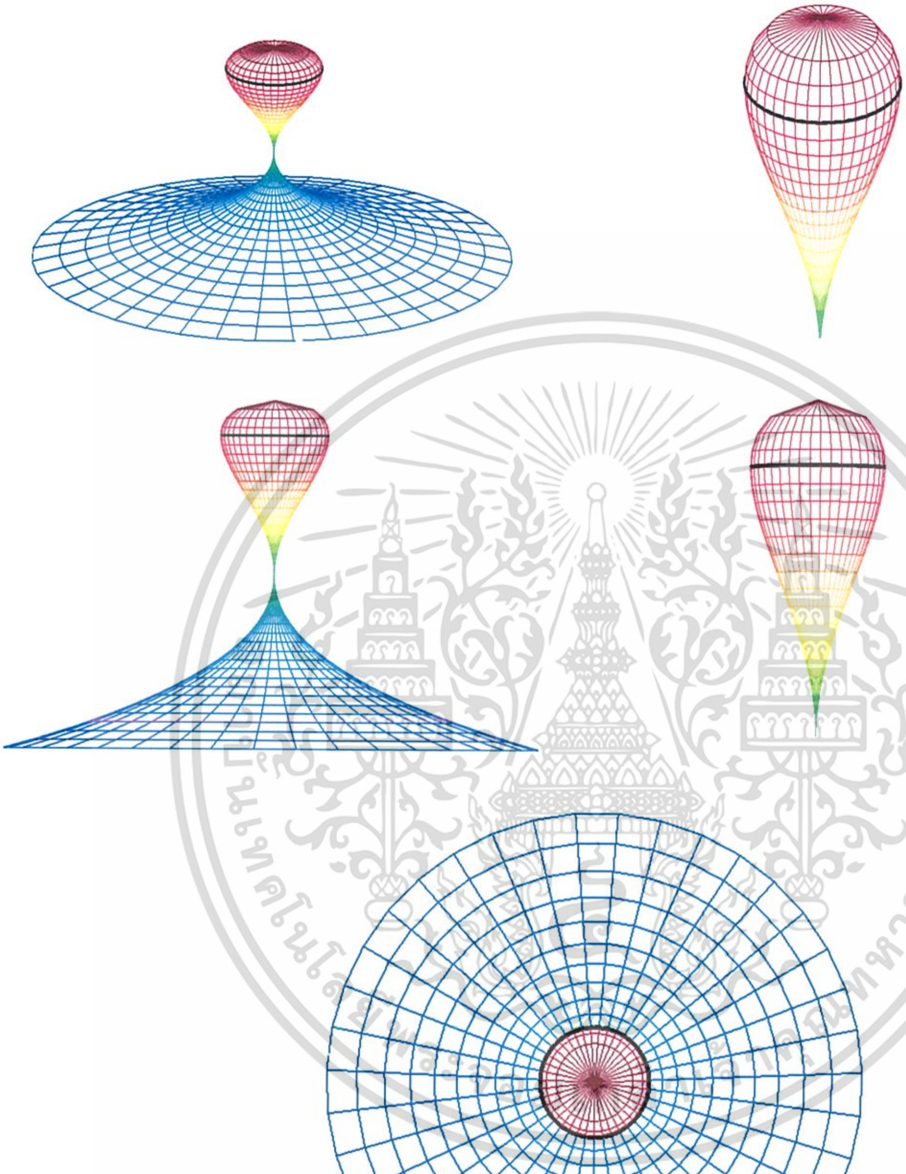
$$c = a\left(\frac{4}{5}\right)^2 \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)}{2}}$$

ดังนั้น

$$c = 0.4a \tag{4.39}$$

เพราะฉะนั้น จะมีบางพาราเลลบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = \frac{4}{5}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = 0.4a$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.19 บางพาราเลลบนพื้นผิวแบบคิสเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ โดยที่ $v_0=\dfrac{4}{5}$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c=0.4a$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c|<|a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนแบบคิสที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน จะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของพื้นผิวแบบคิส (4.34) นั่นคือ

$$\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)\cos\xi(s)=c$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$c^2=\left(av^2\sqrt{\frac{1-v}{2}}\right)^2\cos^2\xi(s)$$
$$\leq a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)$$

เนื่องจาก $v\in(-\infty,1)$ ดังนั้นในพจน์ v^4 และ $\dfrac{1-v}{2}$ มีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น

$$c^2\leq a^2$$

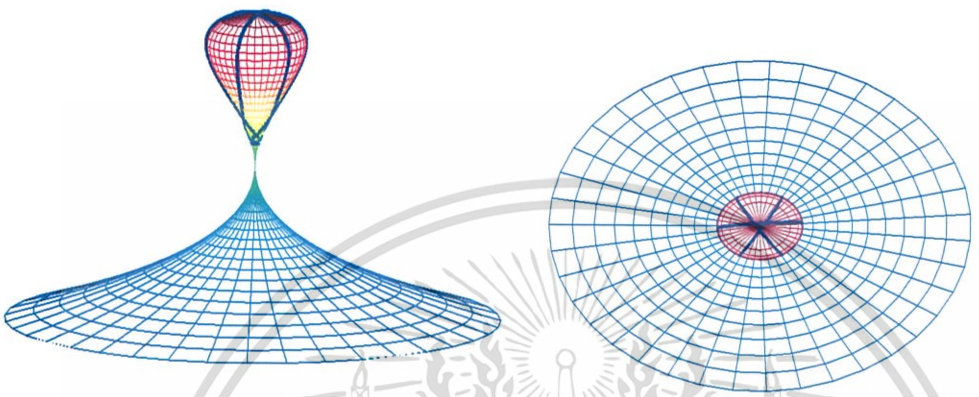
นั่นคือ
$$|c|<|a| \tag{4.40}$$

เพราะฉะนั้น บางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนจะเป็นตามความสัมพันธ์ของแกลโรล คือ $|c|<|a|$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามวามสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c|<|a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนแบบคิสโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0,v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds},\dfrac{dv}{ds}\right)$

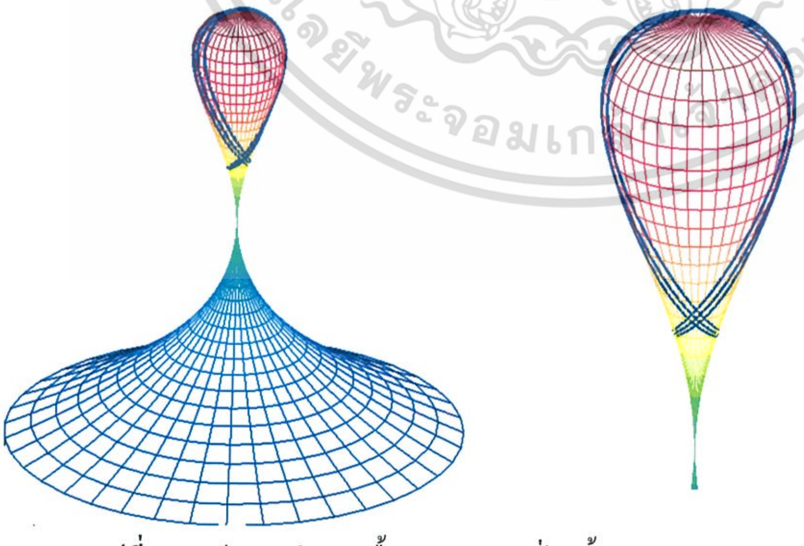
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.9 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.5, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.5, -1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.5, 0.5)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.5, -1)$

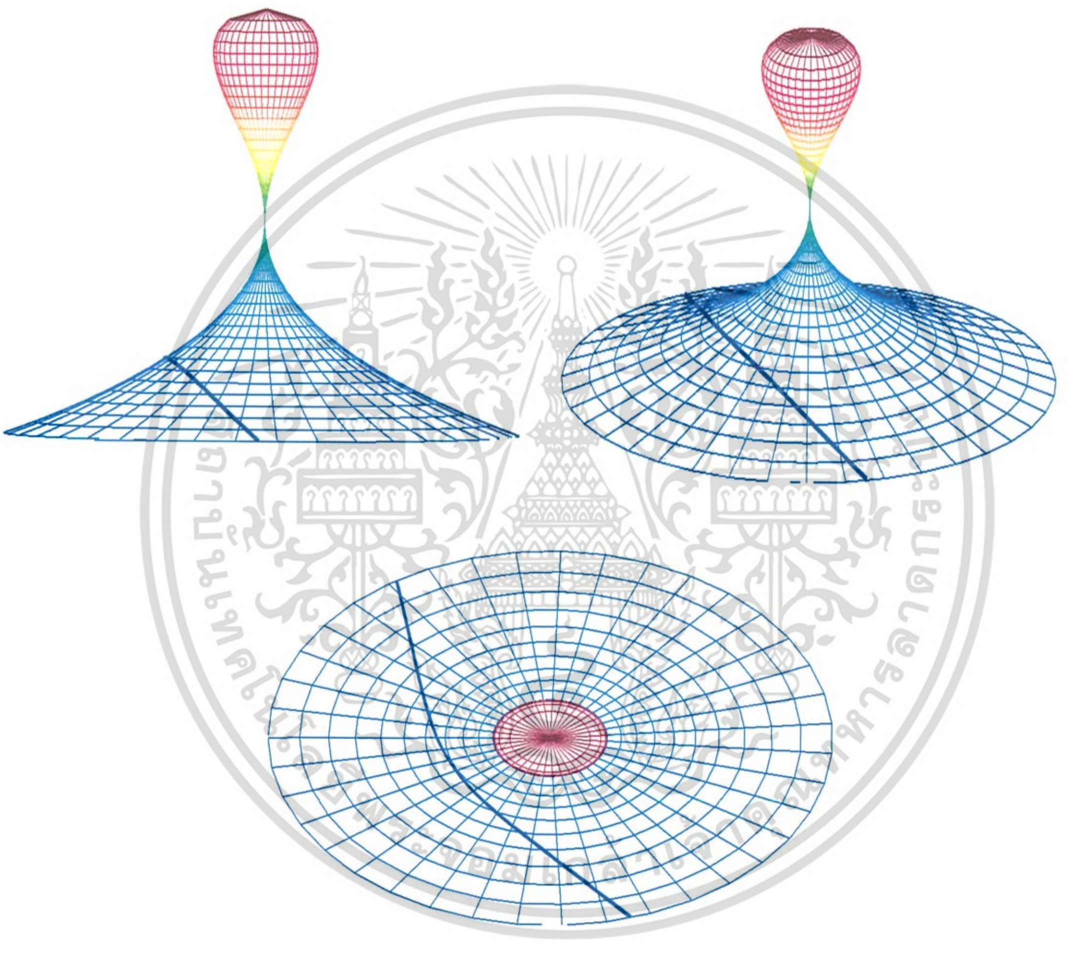
ตัวอย่างที่ 4.10 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.8, 0.8)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.21 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (0.8, 0.8)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.11 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1, 0.5)$ และมีทิศทาง$\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right) = (-0.1, -0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 จีออเดซิกบนพื้นผิวแบบคิสที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (1, 0.5)$ และมีทิศทาง$\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right) = (-0.1, -0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.8. การพิจารณาลักษณะของบางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

ทรงห่วงยางแบบฮอร์นมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

$$\mathbf{x}(u,v)=\left(a(1+\cos v)\cos u, a(1+\cos v)\sin u, a\sin v\right)$$

เมื่อ $f(v)=a(1+\cos v), g(v)=a\sin v$ โดยที่ $v,u\in[0,2\pi)$ และ $a>0$

จากสมการ (2.68) ดังนั้น ความสมพันธ์ของแกลโรลของทรงห่วงยางแบบฮอร์นจะเป็นไปตาม

$$a(1+\cos v)\cos\xi(s)=c \tag{4.41}$$

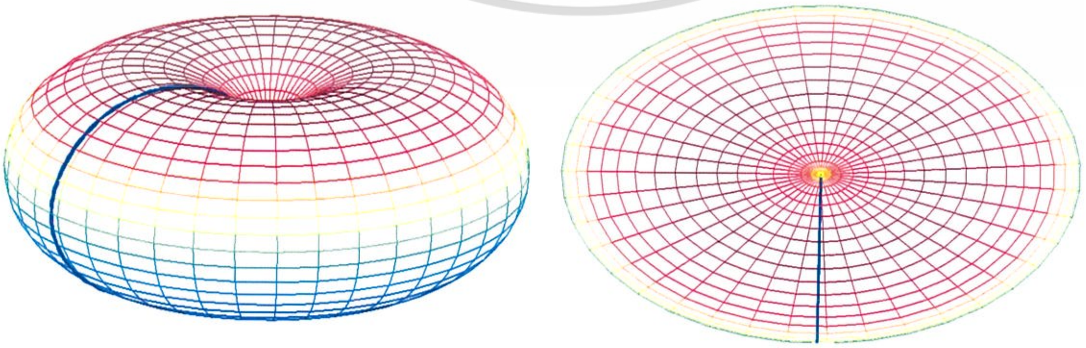
ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น โดยแบ่งเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิก เมื่อ $c=0$

กำหนดให้ $\alpha(s)=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ เป็นเมอริเดียนบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงห่วงยางแบบฮอร์น(4.41) โดยแทนค่า $\xi=\dfrac{\pi}{2}$ จะได้

$$c=a(1+\cos v)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{4.42}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก
ดังนั้น ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$ ได้ดังรูปที่ 4.23.



รูปที่ 4.23 ทุกๆ เมอริเดียนบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิก โดยค่าคงที่ของแกลโรล $c=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. บางพาราเลลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิกเมื่อ $c = 2a$ **โดยที่** $v_0 = 0, 2\pi$

กำหนดให้ $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ เป็นพาราเลลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น เนื่องจาก $\xi(s)$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{x}_u$ กับเส้นสัมผัสของเมอริเดียน (α') ดังนั้น $\xi = 0$ จากความสัมพันธ์ของแกลโรลของรงห่วงยางแบบฮอร์น (4.41) โดยแทนค่า $\xi = 0$ จะได้

$$c = a(1+\cos v)\cos(0) = a(1+\cos v) \tag{4.43}$$

โดย**ทฤษฎีบท 3.1** นั่นคือ จะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ และจาก $f(v) = a(1+\cos v)$ โดยหาอนุพันธ์ $f(v)$ เทียบกับ v จะได้

$$f'(v) = -a\sin v \tag{4.44}$$

จากเงื่อนไข $f'(v_0) = 0$ และสมการ (4) จะได้

$$f(v_0) = a\sin v_0 = 0$$

เมื่อ $v_0 = 0, \pi, 2\pi, ..., n\pi \quad \forall n \in \square$ แต่ $v \in [0, 2\pi]$

ดังนั้น

$$v_0 = 0, \pi, 2\pi \tag{4.45}$$

แทนค่า $v_0 = 0, \pi, 2\pi$ สมการ (4.44) จะได้

$$c = a(1+\cos(0)) = 2a,$$

$$c = a(1+\cos(\pi)) = 0,$$

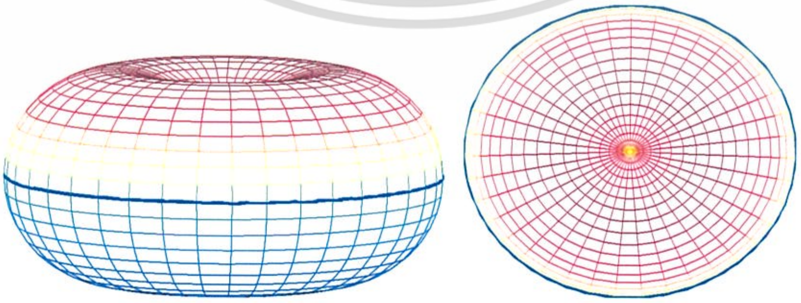
$$c = a(1+\cos(2\pi)) = 2a$$

แต่ในกรณีแรกได้พิจารณา $c = 0$ ดังนั้นสำหรับในกรณีนี้ จะได้

$$c = 2a \tag{4.46}$$

เมื่อ $v_0 = 0, 2\pi$

เพราะฉะนั้น จะมีบางพาราเลลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0, 2\pi$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = 2a$ ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.21. บางพาราเลลบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ โดยที่ $v_0 = 0, 2\pi$ และค่าคงที่ของแกลโรลจะเป็นไปตาม $c = 2a$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. บางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เมื่อ $|c| < 2|a|$

สำหรับกรณีอื่นๆ โดยจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน เพราะฉะนั้นจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น จะเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรลของทรงห่วงยางแบบฮอร์น (4.41) นั่นคือ

$$c = a(1+\cos v)\cos\xi(s)$$

ยกกำลังทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(a(1+\cos v)\right)^2 \cos^2\xi(s) \\ &\le \left(a(1+\cos v)\right)^2 \\ &= a^2\left(1+\cos v\right)^2 \\ &= 4a^2\frac{\left(1+\cos v\right)^2}{4} \\ &= 4a^2\left(\cos^2\frac{v}{2}\right)^2 \\ &\le 4a^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|c| \le 2|a|$$

แต่ในกรณีไม่พิจารณา $c = 2a$

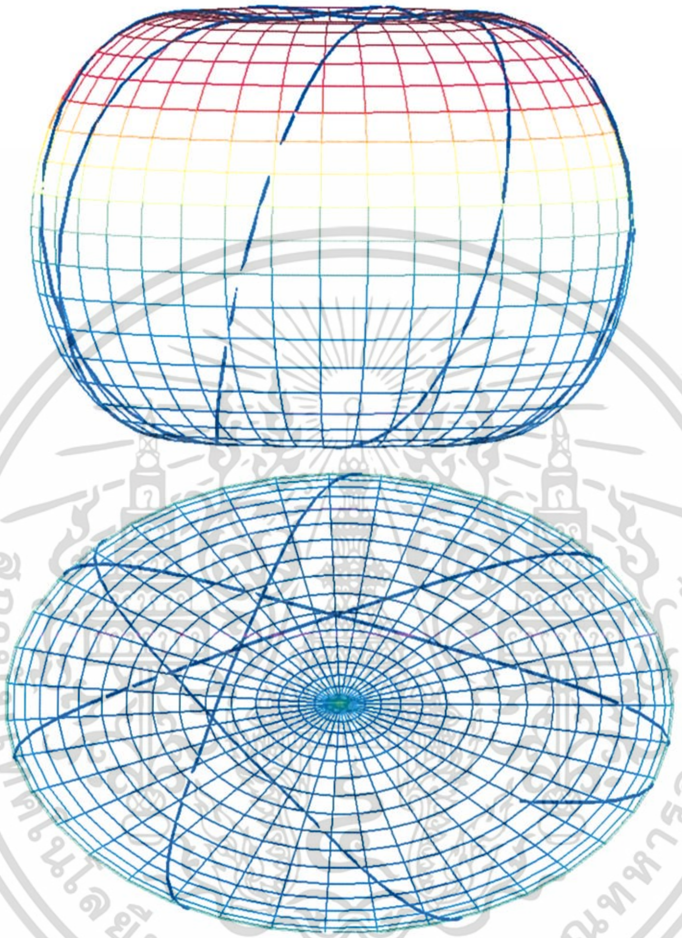
เพราะฉะนั้น

$$|c| < 2|a| \tag{4.47}$$

ดังนั้น จะมีบางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น ที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนเป็นไปตามความสัมพันธ์ของแกลโรล นั่นคือ $|c| < 2|a|$ ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของบางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ (MATLAB) ในการแสดงจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์น โดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4.10 กำหนดจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (\pi/2, \pi/2)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$ แสดงได้ดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 บางจีออเดซิกบนทรงห่วงยางแบบฮอร์นที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $(u_0, v_0) = (\pi/2, \pi/2)$ และมีทิศทาง $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right) = (0.1, 0.1)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนโดยพิจารณาจากลักษณะของพื้นผิว

สำหรับในหัวข้อนี้จะแบ่งประเภทของรูปทรงต่างๆ ที่เป็นพื้นผิวของการหมุนออกเป็น 3 ประเภทได้แก่ พื้นผิวของการหมุนแบบเปิด พื้นผิวของการหมุนแบบปิดและพื้นผิวของการหมุนทั้งเปิดและปิดแล้วจะใช้ข้อสรุปจากหัวข้อแรกเพื่อวิเคราะห์จีออเดซิกที่อยู่บนพื้นผิวของการหมุนทั้งสามประเภท

4.2.1 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะเปิด

พื้นผิวของการหมุน	เมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิก	พาราเลลที่เป็นจีออเดซิก	จีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
ทรงกระบอก [1]	มี	มี	มี
ทรงกรวย [1]	มี	ไม่มี	มี
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	มี	ไม่มี	มี
ทรงพาราโบลา	มี	ไม่มี	มี
ทรงไฮเพอร์โบลา	มี	มี	มี
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	มี	ไม่มี	มี
แคทีนอยด์	มี	มี	มี

ตารางที่ 4.1 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะเปิด

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าทุกๆ พื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะเปิดมีเมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิกและมีจีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน แต่พื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะเปิดที่มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลที่ไม่ขนานกับแกนการหมุนจะไม่มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก ได้แก่ ทรงกรวย [1] พื้นผิวคล้ายทรงกรวย ทรงพาราโบลา ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น โดยมี 3 รูปทรงที่มีจุดตัดกับแกนการหมุน นั่นคือ ทรงกรวย [1] ทรงพาราโบลา ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะปิด

พื้นผิวของการหมุน	เมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิก	พาราเลลที่เป็นจีออเดซิก	จีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
ทรงกลม [1]	มี	มี	มี
ทรงห่วงยาง [9]	มี	มี	มี
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	มี	มี	มี

ตารางที่ 4.2 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะปิด

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นได้ว่าทุกๆ พื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะปิดมีจีออเดซิกทั้งสามลักษณะ นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิก มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก นั่นคือ มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลที่ขนานกับแกนการหมุนและพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะปิดมีจีออเดซิกที่มีลักษณะ ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

4.2.3 บางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะทั้งปิดและเปิด

พื้นผิวของการหมุน	เมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิก	พาราเลลที่เป็นจีออเดซิก	จีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
พื้นผิวแบบดิงดง	มี	มี	มี
พื้นผิวแบบคิส	มี	มี	มี

ตารางที่ 4.3 การแบ่งประเภทของพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะทั้งปิดและเปิด

จากตารางที่ 4.3 จะเห็นได้ว่าทุกๆ พื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะทั้งปิดและเปิดมีจีออเดซิกทั้งสามลักษณะ นั่นคือทุกๆ เมอริเดียนที่เป็นจีออเดซิก มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก นั่นคือ มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลที่ขนานกับแกนการหมุนและพื้นผิวของการหมุนที่มีลักษณะทั้งปิดและเปิดมีจีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลวิจัย

รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งบนพื้นผิวของการหมุนที่ศึกษา สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 5.1

พื้นผิวของการหมุน	รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	$ds^2 = a^2v^2du^2 + (a^2 + \frac{1}{v^2})dv^2$
ทรงพาราโบลา	$ds^2 = a^2v^2du^2 + (a^2 + 4v^2)dv^2$
ทรงไฮเพอร์โบลา	$ds^2 = a^2\left(1+v^2\right)du^2 + \left(\frac{a^2v^2}{1+v^2} + b^2\right)dv^2$
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	$ds^2 = a^2\sinh^2 v du^2 + \left(a^2\cosh^2 v + b^2\sinh^2 v\right)dv^2$
แคทีนอยด์	$ds^2 = a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)du^2 + \cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)dv^2$
พื้นผิวแบบดิงดอง	$ds^2 = a^2\left(1-v\right)v^2du^2 + a^2\left(\frac{9v^2-16v+8}{4-4v}\right)dv^2$
พื้นผิวแบบคิส	$ds^2 = a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)du^2 + \frac{a^2\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)}{8\left(1-v\right)}dv^2$
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	$ds^2 = a^2(1+\cos v)^2du^2 + a^2dv^2$

ตารางที่ 5.1 รูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิวของการหมุนที่ศึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองซึ่งเป็นจีออเดซิกบนพื้นผิวที่ศึกษา สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 5.2

พื้นผิวของการหมุน	สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	$u''+\frac{2v}{v^2}u'v'=0$ $v''+\frac{a^2v^3}{a^2v^2+1}(u')^2-\frac{1}{v(a^2v^2+1)}(v')^2=0$
ทรงพาราโบลา	$u''+\frac{2}{v}u'v'=0$ $v''-\frac{a^2v}{\left(a^2+4v^2\right)}(u')^2+\frac{4v}{\left(a^2+4v^2\right)}(v')^2=0$
ทรงไฮเพอร์โบลา	$u''+\frac{2a^2v}{a^2\left(1+v^2\right)}u'v'=0$ $v''+\frac{a^2v\left(1+v^2\right)}{a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)}u'^2+\frac{a^2v}{\left(1+v^2\right)\left(a^2v^2+b^2\left(1+v^2\right)\right)}v'^2=0$
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	$u''+2\coth vu'v'=0$ $v''+\frac{a^2\sinh v\cosh v}{\left(a^2\cosh^2 v+b^2\sinh^2 v\right)}u'^2+\frac{\left(a^2+b^2\right)\cosh v\sinh v}{\left(a^2\cosh^2 v+b^2\sinh^2 v\right)}v'^2=0$
แคทีนอยด์	$u''+\frac{2}{a}\tanh\left(\frac{v}{a}\right)u'v'=0$ $v''-a\tanh\left(\frac{v}{a}\right)u'^2+\frac{1}{a}\tanh\left(\frac{v}{a}\right)v'^2=0$
พื้นผิวแบบดิงดอง	$u''+\frac{\left(2v-3v^2\right)}{\left(1-v\right)v^2}u'v'=0$ $v''-\frac{\left(2v-3v^2\right)\left(2-2v\right)}{\left(9v^2-16v+8\right)}u'^2+\frac{\left(-9v^2+18v-8\right)}{2\left(1-v\right)\left(av^2-16v+8\right)}v'^2=0$
พื้นผิวแบบคิส	$u''+\left(\frac{-3}{1-v}+\frac{4}{(1-v)v}\right)u'v'=0$ $v''+\frac{\left(-\frac{v^2}{2}+2v^3(1-v)\right)}{\left(2-4v+6v^2-14v^3+\frac{65v^4}{4}-\frac{25v^5}{4}\right)}u'^2+\frac{(v-1)^2v(32-211v+180v^2)}{\left(2-4v+6v^2-14v^3+\frac{65v^4}{4}-\frac{25v^5}{4}\right)}v'^2=0$
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	$u''-2\tan\frac{v}{2}u'v'=0$ $v''+(1+\cos v)\sin vu'^2=0$

ตารางที่ 5.2 สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ของพื้นผิวที่ศึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพาราามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์จะเป็นไปตามตารางที่ 5.3

พื้นผิวของการหมุน	**สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรล ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์**
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	$u=\pm\int\frac{c\sqrt{a^2v^2+1}}{av^2\sqrt{a^2v^2-c^2}}dv$
ทรงพาราโบลา	$u=\pm\int\frac{c\sqrt{a^2+4v^2}}{av\sqrt{a^2v^2-c^2}}dv$
ทรงไฮเพอร์โบลา	$u=\pm\int\frac{c\sqrt{\frac{a^2v^2}{1+v^2}+b^2}}{a\sqrt{1+v^2}\sqrt{a^2\left(1+v^2\right)-c^2}}dv$
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	$u=\pm\int\frac{c\sqrt{a^2\cosh^2 v+b^2\sinh^2 v}}{a\sinh v\sqrt{a^2\sinh^2 v-c^2}}dv$
แคทีนอยด์	$u=\pm\frac{c}{a}\int\frac{1}{\sqrt{a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)-c^2}}dv$
พื้นผิวแบบดิงดอง	$u=\pm\frac{c}{2}\int\frac{\sqrt{-9v+7+\frac{15}{1-v}}}{v\sqrt{1-v}\sqrt{a^2(1-v)v^2-c^2}}dv$
พื้นผิวแบบคิส	$u=\pm c\int\frac{\sqrt{\left(25v^4-40v^3+16v^2-8v+8\right)/8(1-v)}}{v^2\sqrt{\left(\frac{1-v}{2}\right)}\sqrt{a^2v^4\left(\frac{1-v}{2}\right)-c^2}}dv$
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	$u=\pm\int\frac{c}{(1+\cos v)\sqrt{a^2(1+\cos v)^2-c^2}}dv$

ตารางที่ 5.3 สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ของพื้นผิวที่ศึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์จะเป็นไปตามตารางที่ 5.4

พื้นผิวของการหมุน	**สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์**
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	$u = \mp \frac{\sqrt{v^2+a^2}}{v^2 \sinh(\cosh^{-1}(\frac{v}{c}))} \pm \frac{1}{\sinh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)\right)}\left[\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+D\right]$
ทรงพาราโบลา	$u = \pm \frac{2\cot\xi(s)}{a}\left[\sqrt{a^2+4v^2} - a\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2+4v^2}}{2v}\right\| + D\right]$
ทรงไฮเพอร์โบลา	$u = \pm \frac{\tan\xi(s)}{4}\left[4\sqrt{2}\sin^{-1}(\sqrt{2}v) + \ln\left(32+96v^2-64v\sqrt{1+2v^2}\right) - \ln\left(32\left(1+3v^2+2v\sqrt{1+2v^2}\right)\right)\right]$
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	$u = \pm\cot\xi(s)\left[-\tanh^{-1}\left(\frac{\cosh v}{\cosh 2v}\right) + \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}\cosh v + \sqrt{\cosh 2v}\right) + D\right]$
แคทีนอยด์	$u = \pm\frac{1}{a}\cot\xi(s)\left[v+D\right]$
พื้นผิวแบบดิงดอง	$u = \pm\frac{\cot\xi(s)}{6\sqrt{22-16v+9v^2}}\left[\sqrt{1-v}\sqrt{\frac{-22+16v-9v^2}{-1-v}}\left(-8\sinh\left(\frac{-8+9v}{\sqrt{13v}}\right) + 3\left(\sqrt{22-16v+9v^2}\right) + \sqrt{22}\ln\left\|11\sqrt{22}v\right\| - \sqrt{22}\ln\left\|22-8v+\sqrt{22}\sqrt{22-16v+9v^2}\right\|\right) + D\right]$
พื้นผิวแบบคิส	-
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	$u = \pm\cot\xi(s)\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)+D\right)$

ตารางที่ 5.4 สมการผลเฉลยของสมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์ของพื้นผิวที่ศึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในงานวิจัยนี้ได้มีสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนบางพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟที่อยู่ในรูปภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v นั่นคือ ทุกๆ เมอริเดียน บนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเป็นจีออเดซิก และจะมีบางพาราเลลบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ เมื่อ $f(v)$ เป็นรัศมีของพาราเลล และ v_0 เป็นค่าคงที่ ต่อไปนี้จะแบ่งประเภทของรูปทรงต่างๆที่เป็นพื้นผิวของการหมุนเพื่อจะพิจารณาลักษณะของจีออเดซิกบนรูปทรงนั้น โดยวิเคราะห์จากลักษณะจีออเดซิกจากความสัมพันธ์ของแกลโรลสำหรับบางกรณี ดังตารางที่ 5.5

พื้นผิวของการหมุน	เมอริเดียน	พาราเลล	จีออเดซิกที่มีลักษณะไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน
ทรงกลม [1]	$c=0$	$c=a$	$\|c\|<\|a\|$
ทรงกระบอก [1]	$c=0$	$c=a$	$\|c\|<\|a\|$
ทรงกรวย [1]	$c=0$	-	$\|c\|\le\|a\|$
ทรงห่วงยาง [9]	$c=0$	$c=R+a$ or $c=R-a$	$\|c\|<\|R+a\|$
พื้นผิวคล้ายทรงกรวย	$c=0$	-	$\|c\|<\|a\|$
ทรงพาราโบลา	$c=0$	-	$\|c\|<\|a\|$
ทรงไฮเพอร์โบลา	$c=0$	$c=a$	$\|c\|<\|a\|$
ทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้น	$c=0$	-	$\|c\|<\|a\|$
แคทีนอยด์	$c=0$	$c=a$	$\|c\|<\|a\|$
พื้นผิวแบบดิงดอง	$c=0$	$c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$	$\|c\|<\|a\|$
พื้นผิวแบบคิส	$c=0$	$c=\frac{2\sqrt{3}}{9}a$	$\|c\|<\|a\|$
ทรงห่วงยางแบบฮอร์น	$c=0$	$c=2a$	$\|c\|<2\|a\|$

ตารางที่ 5.5 การแบ่งประเภทของบางจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุนโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 5.4 จะได้ว่าสารารถสรุปได้ดังนี้

1. ทรงกรวย [1] พื้นผิวคล้ายทรงกรวย ทรงพาราโบลาและทรงไฮเพอร์โบลาสองชิ้นเป็นพื้นผิวแบบเปิดที่มีจุดตัดกับแกนหมุน ยกเว้นพื้นผิวคล้ายทรงกรวยเพียงรูปเดียวที่พื้นผิวไม่ตัดกับแกนการหมุน โดยรูปทรงที่กล่าวมาข้างต้นจะไม่สามารถหาค่าคงที่ของแกลโรลครบทั้งสามประเภท เนื่องจากไม่มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก นั่นคือ พื้นผิวของการหมุนที่มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลไม่ขนานกับแกนการหมุนทำให้ไม่มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก

2. ทรงกลม [1] ทรงกระบอก [1] ทรงห่วงยาง [9] ทรงไฮเพอร์โบลา แคทีนอยด์ พื้นผิวแบบดิงดอง พื้นผิวแบบคิสและทรงห่วงยางแบบฮอร์นเป็นพื้นผิวแบบปิด ยกเว้น ทรงกระบอกเพียงรูปเดียวมีค่าคงที่ของแกลโรลครบทั้งสามประเภท มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งก่อกำเนิด ณ จุดตัดกับพาราเลลซึ่งขนานกับแกนการหมุนทำให้มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก

5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางของการพัฒนางานวิจัย

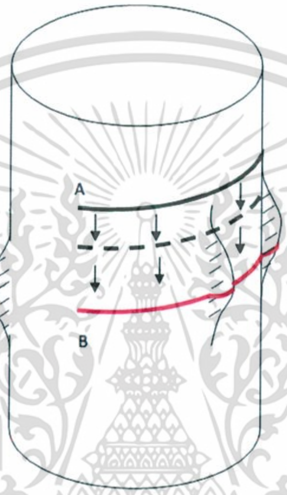
1.ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาบางสมบัติของจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาต่อไปยังการพิจารณาบนพื้นผิวใดๆ ในสามมิติ

2. สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ที่อยู่ในรูปแบบปริพันธ์นั่นยุ่งยากในการหาผลเฉลยเนื่องจากสมการจะอยู่ในรูปแบบ Elliptic Integral ดังนั้น ในการพัฒนางานวิจัยเรื่องนี้จะต้องศึกษา Elliptic Integral เพื่อเป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย

3.ในงานวิจัยนี้ได้แสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนซึ่งเขียนเป็นโปรแกรมใน MATLAB โดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และมีทิศทาง $\left(\dfrac{du}{ds}, \dfrac{dv}{ds}\right)$ สำหรับการพัฒนางานวิจัยชิ้นนี้จะโดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นที่ (u_0, v_0) และจุดสุดท้ายที่ (u_1, v_1) หรือกำหนดทิศทางโดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล แล้วเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อแสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

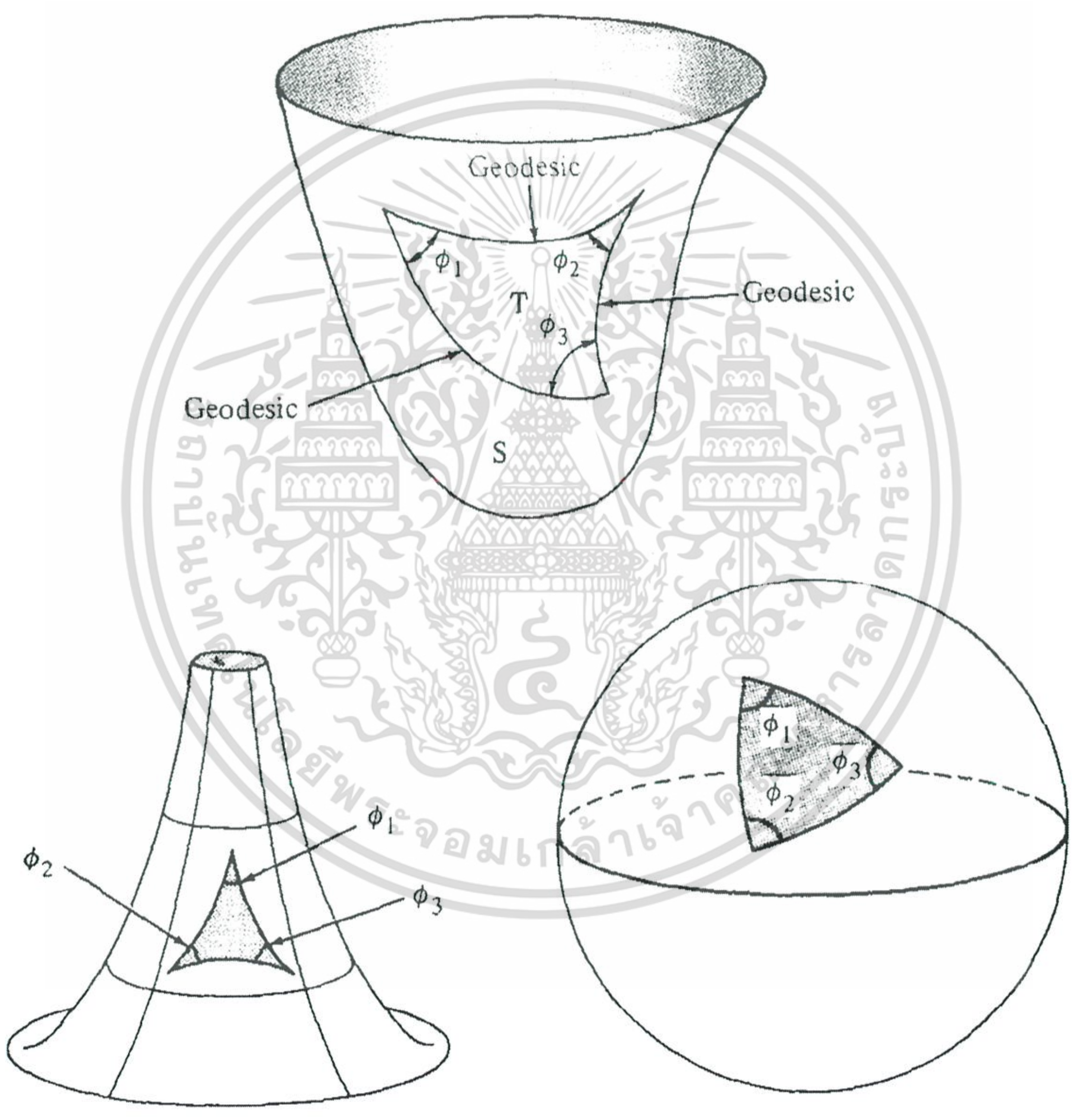
4. เนื่องจากในงานวิจัยเรื่องนี้ได้แสดงเส้นโค้งจีออเดซิกอยู่บนพื้นผิวที่ปรับเรียบ สำหรับในการพัฒนางานวิจัยอาจจะพิจารณาเส้นโค้งจีออเดซิกอยู่บนพื้นผิวใดๆ ที่ไม่ปรับเรียบ ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ A เป็นเส้นโค้งจีออเดซิก ถ้าเลื่อนเส้นโค้งจีออเดซิก A บนพื้นผิวที่ปรับเรียบ ลงมาเรื่อย ๆ จึงถึงเส้นโค้ง B บนพื้นผิวที่ไม่ปรับเรียบ ดังรูปที่ 5.1 แล้วเส้นโค้ง B มีสมบัติอย่างไร สมบัติของเส้นโค้งจีออเดซิก A แตกต่างกับเส้นโค้ง B หรือไม่ และเส้นโค้ง B เป็นจีออเดซิกด้วยหรือไม่ ซึ่งอาจจะพิจารณาเส้นโค้งจีออเดซิก A เป็นเมอริเดียน พาราเลล หรือในรูปแบบที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน



รูปที่ 5.1 การเลื่อนเส้นโค้งจีออเดซิก A ถึงเส้นโค้ง B บนพื้นผิวที่ไม่ปรับเรียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

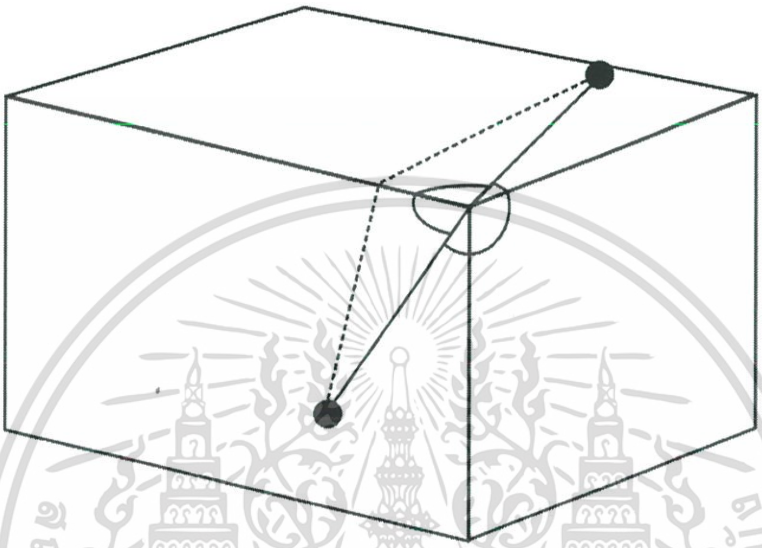
5. เนื่องจากในงานวิจัยชิ้นนี้ ได้ศึกษาจีออเดซิกเพียงเส้นเดียวบนพื้นผิวของการหมุน สำหรับในการพัฒนางานวิจัยจะพิจารณาเส้นโค้งจีออเดซิกสามเส้นที่เชื่อมจุดสามจุดซึ่งลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมบนพื้นผิวของการหมุนหรือพื้นผิวปรับเรียบ โดยเรียกจีออเดซิกที่ลักษณะคล้ายสามเหลี่ยมนี้ว่า **สามเหลี่ยมจีออเดซิก (Geodesic triangle)** ดังรูปที่ 5.2 จะศึกษาสมบัติของสามเหลี่ยมจีออเดซิกบนพื้นผิวพื้นผิวของการหมุนหรือพื้นผิวปรับเรียบ



รูปที่ 5.2 สามเหลี่ยมจีออเดซิก (Geodesic Triangle)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. จีออเดซิกบนพื้นผิวที่ไม่ปรับเรียบหรือพื้นผิวที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเรียกว่า **จีออเดซิกแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete geodesics)** ดังรูปที่ 5.3 สำหรับในการพัฒนางานวิจัยจะพิจารณาจีออเดซิกแบบไม่ต่อเนื่อง โดยใช้ความสัมพันธ์ของแกลโรล โดยการกำหนดมุมตามความสัมพันธ์ของแกลโรล



รูปที่ 5.3 จีออเดซิกแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Geodesics)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] ณัฐพล บุญนำ, "**เส้นโค้งจีออเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ**", วิทยานิพนธ์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2553.

[2] รศ.ภัคคินี ชิตสกุล, "**เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา Differential Geometry**", สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2553.

[3] Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon. **Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica.** 3rd Edition. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC. 2006.

[4] Barrett O'Neill. **Elementary Differential Geometry**. Revised 2nd Edition. San Diego: Academic. 2006.

[5] Emin Kasap, Mustafa Yapici, F. Talay Akyildiz. **A numerical study for computation of geodesic curves**. Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1206–1213.

[6] Jacob Lewis. **Geodesics Using Mathematica**. Columbia University. (n.d.).

[7] John Oprea. **Differential Geometry and Its Applications**. 2nd Edition. Washington, DC : The Mathematical Association of America. 2007.

[8] M. P. do Carmo. **Differential Geometry of Curves and Surfaces.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1976.

[9] Mark L. Irons. 2005. **The Curvature and Geodesics of the Torus.** http://www.rdrop.com/~half/math/torus/index.xhtml.

[10] Minoru Tanaka. 2000. **Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution**. Department of Mathematics, Tokai University.

[11] http://mathworld.wolfram.com

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. โปรแกรมในการแสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน

สำหรับโปรแกรมในการแสดงเส้นโค้งจีออเดซิกบนพื้นผิวของการหมุน จะเขียนบน MATLAB โดยเขียนเป็น M File แสดงได้ดังนี้

```
geodesic1
syms u v;
u=sym('u');
v=sym('v');

%สมการอิงพารามิเตอร์
a=1;
x=a*v.*sqrt(1-v).*cos(u);
y=a*v.*sqrt(1-v).*sin(u);
z=a*v;

%time interval
dt=[0,5*pi];
%เงื่อนไขเริ่มต้น INIT=[uinit;duinit;vinit;dvinit]
INIT=[0.5;-0.5;0.5;-1];
surface(x,y,z);
hold on

geodesic2(x,y,z);
C=ans;

[t,X]=ode45('geodesic3',dt,INIT,[],C)

u=X(:,1);
v=X(:,3);
x=subs(x);
y=subs(y);
z=subs(z);
plot3(x,y,z)
u=sym('u');
v=sym('v');

%สมการอิงพารามิเตอร์
a=1;
x=a*v.*sqrt(1-v).*cos(u);
y=a*v.*sqrt(1-v).*sin(u);
z=a*v;



%time interval
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
dt=[0,5*pi];
%เงื่อนไขเริ่มต้น INIT=[uinit;duinit;vinit;dvinit]
INIT=[0.5;-0.5;0.5;-1];

surface(x,y,z);
hold on

geodesic2(x,y,z);
C=ans;

[t,X]=ode45('geodesic3',dt,INIT,[],C)

u=X(:,1);
v=X(:,3);
x=subs(x);
y=subs(y);
z=subs(z);
plot3(x,y,z)
=====================================================================
```

geodesic2

```
function C=geodesic2(x,y,z)

U=[x;y;z];
XsubU=diff(U,'u');
XsubV=diff(U,'v');
E=simple(XsubU.'*XsubU);
G=simple(XsubV.'*XsubV);

EsubU=diff(E,'u');
EsubV=diff(E,'v');
GsubU=diff(G,'u');
GsubV=diff(G,'v');

C=[E;G;EsubU;EsubV;GsubU;GsubV];
=====================================================================
```

geodesic3

```
function xp=geodesic3(t,xx,flag,C);

xp=zeros(4,1);


u=xx(1);
v=xx(3);

H=(C(3)/(2*C(1)));
H=subs(H);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
I=subs(C(4)/C(1));
J=subs(C(5)/(2*C(1)));
K=subs(C(4)/(2*C(2)));
L=subs(C(5)/C(2));
M=subs(C(6)/(2*C(2)));

xp(1)=xx(2);
xp(2)=-I*xx(2)*xx(4);
xp(3)=xx(4);
xp(4)=K*xx(2)^2-M*xx(4)^2;
```

==

surface

```
function f=surface(x,y,z)
[u,v]=meshgrid(linspace(0,2*pi,40),linspace(-2,1,40));
x=subs(x);
y=subs(y);
z=subs(z);
mesh(x,y,z)
hold on
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ผลงานที่นำเสนอสู่การประชุมทางวิชาการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติบางประการของจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาโดยความสัมพันธ์ของแกลโรล

Some Properties of Geodesic on Paraboloid by Clariaut's Relation

วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง[1] และภัคคินี ชิตสกุล[1]

Wongvisarut Khuangsatung[1] and Pakkinee Chitsakul[1]

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนที่ตัดกับแกนของการหมุนและเป็นรูปทรงแบบเปิดในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของแกลโรล อีกทั้งได้หาสมการผลเฉลยของจีออเดซิกที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารา-มิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v

คำสำคัญ : จีออเดซิก พื้นผิวของการหมุน ความสัมพันธ์ของแกลโรล

ABSTRACT

In this paper, we study some properties of geodesic on paraboloid which is surface of revolution intersect with axis of rotation and is open surface in the Clariaut parameterization's form depend on parameter v by considering from Clariaut's relation. And then, we find solution of geodesic in the Clariaut parameterization's form depend on parameter v.

Key Words : Geodesic, Surface of revolution, Clariaut's relation

E-mail : wongvisarut@gmail.com

คำนำ

นิยามของจีออเดซิก (Geodesic) บนพื้นผิวใดๆ คือเส้นโค้งเชิงเดียวบนพื้นผิว ซึ่งสำหรับจุดใดๆ ที่แตกต่างกันสองจุดบนพื้นผิว แล้วเส้นจีออเดซิกที่เชื่อมจุดทั้งสองจะให้ระยะทางที่สั้นที่สุด เพราะฉะนั้น เส้นโค้งบนพื้นผิวเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ตั้งฉากกับเส้นโค้งขนานกับเวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิว นั่นคือ α เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ $\alpha' \square \alpha'' = 0$

Jacob Lewis [3] ได้นำเสนอการศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงกลมและทรงห่วงยางที่เป็นพื้นผิวของการหมุน (Surface of revolution) โดยเป็นพื้นผิวแบบปิด และทรงกระบอกเป็นพื้นผิวของการหมุนโดยเป็นพื้นผิวแบบเปิด สำหรับพื้นผิวของทรงกลม ทรงกระบอกและทรงห่วงยางจะอยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v (v-Clairaut parameterization หรือ v-clairaut patch) โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในการวิเคราะห์รูปภาพ ต่อมาจากนั้น Mark L. Irons [6] ได้ศึกษาจีออเดซิกบนพื้นผิวของทรงห่วงยางที่เป็นพื้นผิวของ

---

[1] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การหมุนซึ่งเป็นพื้นผิวแบบปิด โดยเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยของสมการจีออเดซิกกับผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v และแบ่งประเภทของจีออเดซิกที่อยู่บนทรงห่วงยางโดยพิจารณาจาก ความสัมพันธ์ของแกลโรล (Clariaut's relation)

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาสมบัติบางประการของจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาซึ่งเป็นพื้นผิวของการหมุนที่ตัดกับแกนของการหมุน ซึ่งเป็นพื้นผิวแบบเปิดที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของแกลโรล พร้อมทั้งหาสมการผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกล--โรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v นอกจากนี้ผู้วิจัยต้องการจะเผยแพร่การพิสูจน์ว่า ทุกๆ เมอริเดียน (Meridian) บนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิกเสมอ และจะมีพาราเลล (Parallel) บนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$

กำหนดให้ $\alpha(t)=\varphi\left(u(t),v(t)\right)$ เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิวใดๆ ถ้าให้ $v=v_0$ เป็นค่าคงที่และให้ u แปรผันแล้ว $\varphi(u,v_0)$ ขึ้นอยู่กับหนึ่งพารามิเตอร์และเป็นเส้นโค้ง จะเรียกเส้นโค้ง $\varphi(u,v_0)$ ว่า เส้นโค้งพารามิเตอร์ u (u-parameter curve) ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $u=u_0$ เป็นค่าคงที่และให้ v แปรผัน แล้ว $\varphi(u_0,v)$ ขึ้นอยู่กับหนึ่งพารามิเตอร์และเป็นเส้นโค้ง จะเรียกเส้นโค้ง $\varphi(u_0,v)$ ว่า เส้นโค้งพารามิเตอร์ v (v-parameter curve) อาทิเช่น พิจารณาบนโลกของเราซึ่งมีรูปทรงคล้ายกับทรงกลมจะได้ว่า เส้นโค้งพารามิเตอร์ u เป็นละติจูด (Latitude) ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลม และเส้นโค้งพารามิเตอร์ v เป็นลองจิจูด (Longitude) ซึ่งมีลักษณะเป็นครึ่งวงกลม ให้ M แทนพื้นผิวที่มีการส่ง $\varphi:D\to M$ แทนรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของ M ที่เป็น C^∞ สำหรับแต่ละจุด p บน M ให้ M_p แทนเซตของทุกเวกเตอร์สัมผัสที่ p

ความรู้พื้นฐาน

กำหนดให้ เส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ อยู่บนพื้นผิว M จะเรียกว่า เส้นโค้ง C^∞ บน M ซึ่งสมการคำนวณความยาวของเส้นโค้งบน M ได้โดยนิพจน์

(2.1) $$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

เรียกนิพจน์ (2.1) เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (First Fundamental Form) ของ M โดยที่

(2.2) $$E=E(u,v)=\varphi_u\cdot\varphi_u,\ \ F=F(u,v)=\varphi_u\cdot\varphi_v,\ \ G=G(u,v)=\varphi_v\cdot\varphi_v$$

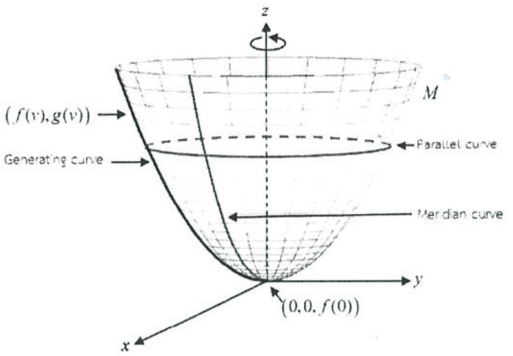
เรียกฟังก์ชันสามฟังก์ชันว่าสัมประสิทธิ์ของรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของ φ

สำหรับรูปแบบทั่วไปของสมการอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวของการหมุน M ใน $\mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $f(v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ นิยามโดย

(2.3) $$\varphi(u,v)=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

ซึ่ง $f(v)>0$ เป็นดังรูปภาพที่ 1 และให้จุด $(0,0,f(0))$ เป็นจุดตัดของแกน z กับ M เรียกว่า จุดยอด (Vertex) ของ M

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปภาพที่ 1 พื้นผิวของการหมุน M ใน$\mathbb{R}^3$

กำหนดให้เส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งที่ทำให้ได้พื้นผิวของการหมุนแล้ว เส้นกราฟ c เรียกว่า เส้นโค้งก่อกำเนิด (Generating curve) ของ M โดยที่แกน z เป็นแกนของการหมุน

เส้นโค้งบนพื้นผิวที่มีลักษณะเป็นวงกลมที่เกิดจากการหมุนของกราฟจุดเดียวเพียงหนึ่งจุดเท่านั้นของเส้นโค้งก่อกำเนิดรอบแกนการหมุน เรียกว่า พาราเลลของ M มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

(2.4) $$\varphi(u,v_0)=\left(f(v_0)\cos u, f(v_0)\sin u, g(v_0)\right)$$

นอกจากนั้นเส้นโค้งที่มีลักษณะเหมือนเส้นโค้งก่อกำเนิด และหมุนออกจากเส้นโค้งก่อกำเนิด เรียกว่า เมอริเดียนของ M มีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ

(2.5) $$\varphi(u_0,v)=\left(f(v)\cos u_0, f(v)\sin u_0, g(v)\right)$$

จากสมการ (2.2) จะได้ว่า

(2.6) $$E=f^2(v),\ F=0,\ G=f'(v)^2+g'(v)^2$$

2.1 **สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล** (Christoffel symbols)

กำหนดให้ $u_1:=u,\ u_2:=v,\ \varphi_i:=\varphi_{u_i},\ \varphi_{ij}:=\varphi_{u_iu_j}\ ,(i,j=1,2)$ และ $\mathbf{e}(u,v)=\dfrac{\varphi_u\times\varphi_v}{\|\varphi_u\times\varphi_v\|}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย และ $\{\varphi_1(u_1,u_2),\varphi_2(u_1,u_2),\mathbf{e}(u_1,u_2)\}$ เป็นฐานหลัก (Basis) ของ $\mathbb{R}^3$ ทำให้ $\varphi_{ij}(u_1,u_2)$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ฐานหลักทั้งสามได้ ดังนั้นมีฟังก์ชัน $\Gamma_{ij}^k, h_{ij}\ (i,j,k=1,2)$ ที่ทำให้

(2.7) $$\varphi_{ij}(u_1,u_2)=\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k(u_1,u_2)\varphi_k(u_1,u_2)+h_{ij}(u_1,u_2)\mathbf{e}(u_1,u_2)$$

เป็นจริง เรียกสมการ (2.7) ว่า สมการเกาส์ (Gauss equation) และฟังก์ชัน Γ_{ij}^k เรียกว่า สัญลักษณ์คริสทอฟเฟิล

โดยที่ $h_{11}=L(u,v)=\mathbf{e}\cdot\varphi_{uu}(u,v),\ h_{12}=h_{21}=M(u,v)=\mathbf{e}\cdot\varphi_{uv}(u,v),\ h_{22}=N(u,v)=\mathbf{e}\cdot\varphi_{vv}(u,v)$

เป็นสัมประสิทธิ์ของรูปแบบหลักมูลที่สอง (Second Fundamental Form)

กำหนดให้ $$g_{ij}=\varphi_i\cdot\varphi_j\quad(i,j=1,2)$$

นั่นคือ $$E=\varphi_u\cdot\varphi_u=\varphi_1\cdot\varphi_1=g_{11},\quad F=\varphi_u\cdot\varphi_v=\varphi_1\cdot\varphi_2=g_{12},\ G=\varphi_v\cdot\varphi_v=\varphi_2\cdot\varphi_2=g_{22}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.1.1 สำหรับแต่ละ $i,j,k \quad (=1,2)$ ที่ทำให้

(2.8) $$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{kl}\left(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}\right)$$

เมื่อ $g_{ij,l}:=\frac{\partial}{\partial u_k}g_{ij}$ และ $\left(g^{ij}\right)=\left(g_{ij}\right)^{-1}$ นั่นคือ g^{ij} แทนส่วนประกอบ (i,j) ของเมทริกซ์ผกผัน $\left(g_{ij}\right)^{-1}$ ซึ่ง Γ_{ij}^{k} อยู่ในรูปแบบ g_{ij} และอนุพันธ์ของ g_{ij}

เนื่องจาก $F=0$ ดังนั้นสมการ (2.8) จะได้ว่า

(2.9) $$\Gamma_{11}^{1}=\frac{E_u}{2E},\ \Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E},\ \Gamma_{22}^{1}=\frac{-G_u}{2E},\ \Gamma_{11}^{2}=\frac{-E_v}{2G},\ \Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},\ \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}$$

2.2 **สมการจีออเดซิก** (The Geodesic Equation)

นิยาม 2.2.1 ถ้า $c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ ที่อยู่ในรูปแบบอิงพารามิเตอร์ความยาวเส้นโค้ง แล้ว c จะกล่าวว่าเป็นเส้นโค้งอัตราเร็วหนึ่งหน่วย (Unit speed curve)

นิยาม 2.2.2 ให้ $\alpha:(a,b)\to M$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ บนพื้นผิว M แล้วเส้นโค้ง α เรียกว่า จีออเดซิกบน M ถ้า $\alpha''(s)$ ตั้งฉากกับปริภูมิสัมผัส $M_{\alpha(s)}$ สำหรับแต่ละ $s\in(a,b)$

บทตั้ง 2.2.2 ให้ $\alpha(s)=\varphi\left(u_1(s),u_2(s)\right)$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ บนพื้นผิว M แล้ว α เป็นจีออเดซิก ก็ต่อเมื่อ α เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(2.10) $$u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $$\alpha'(s)=\sum_{i=1}^{2}\varphi_i\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)$$

จากสมการเกาส์จะได้ $$\alpha''(s)=\sum_{i=1}^{2}\varphi_i\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i''(s)+\sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\varphi_k\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)$$
$$+\left(\sum_{i,j=1}^{2}\varphi_{ij}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)\right)\mathbf{e}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$$

ถ้า α เป็นจีออเดซิกแล้ว $\alpha''(s)$ ตั้งฉากกับ M ดังนั้นจากสมการข้างต้นจะได้

$$\sum_{k=1}^{2}\left(u_k''(s)+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_i'(s)u_j'(s)\right)\varphi_k\left(u_1(s),u_2(s)\right)=0$$

เนื่องจาก $\left\{\varphi_1\left(u_1(s),u_2(s)\right),\varphi_2\left(u_1(s),u_2(s)\right)\right\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น

$$u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2)$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า $u_i''(s)+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\left(u_1(s),u_2(s)\right)u_j'(s)u_k'(s)=0,\quad (i=1,2)$ เป็นจริงแล้ว

(2.11) $$\alpha''(s)=\left(\sum_{i,j=1}^{2}h_{ij}u_i'u_j'(s)\right)\mathbf{e}\left(u_1(s),u_2(s)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ α เป็นจีออเดซิกบน M □

ทฤษฎีบท 2.2.1 จีออเดซิก $\alpha(s)=\varphi(u(s),v(s))$ บนพื้นผิวของการหมุน M ใน □^{3} เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(2.12)
$$u''+\frac{E_u}{2E}u'^2+\frac{E_v}{E}u'v'-\frac{G_u}{2E}v'^2=0$$
$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_u}{G}u'v'+\frac{G_v}{2G}v'^2=0$$

ทฤษฎีบท 2.2.2 สำหรับแต่ละ $a\in M_p$ จะมี $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ มีเพียงหนึ่งเดียว ซึ่ง

(2.13)
$$\alpha(0)=p,\ \ \alpha'(0)=a$$

2.3 ภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรล

สำหรับส่วนของพื้นผิวเชิงตั้งฉากซึ่ง E และ G ขึ้นอยู่กับเพียง u หรือ v เพียงอย่างเดียว จะเรียก $\varphi(u,v)$ ว่าเป็นภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ u เมื่อ $E_v=G_v=F=0$ และเรียก $\varphi(u,v)$ ว่าเป็นภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v เมื่อ $E_u=G_u=F=0$ จากสมการ (2.3) และ (2.6) จะเห็นได้ว่า $E_u=G_u=0$ นั่นคือ $\varphi(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v ดังนั้นสมการ

จีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v คือ

(2.14)
$$u''+\frac{E_v}{E}u'v'=0$$
$$v''-\frac{E_v}{2G}u'^2+\frac{G_v}{2G}v'^2=0$$

จากสมการ (2.6) หาอนุพันธ์เทียบ v จะได้

(2.15)
$$E_v=2f(v)f'(v),\ \ G_v=2f'(v)f''(v)+2g'(v)g''(v)$$

แทนสมการ (2.15) ใน (2.14) ดังนั้น

(2.16)
$$u''+\frac{2f(v)f'(v)}{f^2(v)}u'v'=0$$
$$v''-\frac{f(v)f'(v)}{f'(v)^2+g'(v)^2}u'^2+\frac{f'(v)f''(v)+g'(v)g''(v)}{f'(v)^2+g'(v)^2}v'^2=0$$

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $\varphi:D\to M$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v และให้ $\alpha(s)=\varphi\big(u(s),v(s)\big)$ เป็นจีออเดซิกบน M ถ้า θ แทนมุมระหว่าง α' และ φ_u แล้ว

(2.17)
$$\sqrt{E}\cos\theta=c$$

เรียกสมการ (2.17) ว่าความสัมพันธ์ของแกลโรลและเรียกค่าคงที่ c ว่า ค่าคงที่ของแกลโรล (Clairaut's constant)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v และ กำหนดให้ $\alpha(s)=\varphi(u(s),v(s))$ เป็นจีออเดซิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วย นั่นคือ

$$1=\alpha'\cdot\alpha'=(\varphi_u u'+\varphi_v v')\cdot(\varphi_u u'+\varphi_v v')=Eu'^2+Gv'^2=f^2(v)u'^2+\left(f'(v)^2+g'(v)^2\right)v'^2$$

จากสมการจีออเดซิก ภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v จะพิจารณาจาก

$$u''+\frac{E_v}{E}u'v'=0$$

จะได้ $$0=Eu''+E_v v'u'=Eu''+E'u'=(Eu')'$$

ดังนั้น $$(Eu')=c$$

จากความสัมพันธ์แกลโรลจะได้ว่า $(\varphi_u u'+\varphi_v v')\cdot\varphi_u=u'E=\sqrt{E}\cos\theta=c$ นั่นคือ c เป็นค่าคงที่ของแกลโรล

เนื่องจาก α เป็นจีออเดซิกอัตราเร็วหนึ่งหน่วย นั่นคือ $1=Eu'^2+Gv'^2$ จะได้ $1=E\left(\frac{c}{E}\right)^2+Gv'^2$

(2.18) $$v'=\pm\sqrt{\frac{E-c^2}{GE}}$$

นำสมการที่ (2.17) หารด้วย (2.18) จะได้

(2.19) $$\frac{du}{dv}=\frac{u'}{v'}=\frac{\frac{c}{E}}{\pm\sqrt{\frac{E-c^2}{GE}}}=\pm\frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E-c^2}}$$

สำหรับภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สามารถเขียนได้ใหม่คือ

(2.20) $$u=\pm\int\frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E-c^2}}dv$$

ต่อไปนี้จะพิจารณาเมอริเดียนและพาราเลลที่เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ M เป็นพื้นผิวของการหมุนใน $\mathbb{R}^3$ แล้วทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก และจะมีบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varphi(u,v)$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของแกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v

จะแสดงว่า ทุกๆ เมอริเดียนเป็นจีออเดซิก โดยวิธีข้อขัดแย้ง (Contradiction) สมมติว่า ทุกๆ เมอริเดียนไม่เป็นจีออเดซิก นั่นคือ $\varphi''\neq 0$ เนื่องจากภาวะอิงพารามิเตอร์บนพื้นผิวของการหมุน นั่นคือ

$$\varphi(u,v)=\left(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\right)$$

หาอนุพันธ์เทียบ v ทั้ง $F=0$ และ $G=f'(v)^2+g'(v)^2=1$ จะได้

$$F_v=(\varphi_u\cdot\varphi_v)_v=\varphi_u\cdot\varphi_{vv}+\varphi_v\cdot\varphi_{uv}=0 \text{ และ } G_v=(\varphi_v\cdot\varphi_v)_v=\varphi_v\cdot\varphi_{vv}+\varphi_v\cdot\varphi_{vv}=2\varphi_v\cdot\varphi_{vv}=0$$

เนื่องจาก $$\varphi_v\cdot\varphi_{uv}=\left(f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)\right)\cdot\left(-f'(v)\sin u, f'(v)\cos u, 0\right)=0$$

ดังนั้น $$\varphi_u\cdot\varphi_{vv}=0 \text{ และ } \varphi_v\cdot\varphi_{vv}=0$$

นั่นคือ φ_{vv} ตั้งฉากกับ M_p เพราะฉะนั้น $\varphi''=0$ เกิดข้อขัดแย้ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นทุกๆ เมอริเดียนบนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิก

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$

ถ้าพาราเลลเป็นจีออเดซิกแล้ว $f'(v_0)=0$ โดยข้อขัดแย้ง สมมติให้ $f'(v_0)\neq 0$ พาราเลลมีภาวะอิงพารามิเตอร์คือ $\varphi(u,v_0)=\left(f(v_0)\cos u, f(v_0)\sin u, g(v_0)\right)$

จากสมการ (2.14) เนื่องจาก $v'=v''=0$ จะได้ $\dfrac{E_v}{2G}u'^2=0$

จาก $E_v(u,v_0)=2\varphi_{uv}(u,v_0)\cdot\varphi_u(u,v_0)$, $F(u,v_0)=\varphi_u(u,v_0)\cdot\varphi_v(u,v_0)$

จะได้ $\varphi_{uv}(u,v_0)\cdot\varphi_u(u,v_0)=\left(\varphi_v(u,v_0)\cdot\varphi_u(u,v_0)\right)_u-\varphi_v(u,v_0)\cdot\varphi_{uu}(u,v_0)$

นั่นคือ $E_v(u,v_0)=0$

แต่เนื่องจาก $E_v(u,v_0)=2f'(v_0)$

เพราะฉะนั้น $f'(v_0)=0$ เกิดข้อขัดแย้ง โดยสมมติฐาน ดังนั้น ถ้าพาราเลลเป็นจีออเดซิกแล้ว $f'(v_0)=0$

ในทางกลับกัน จะต้องแสดงว่าถ้า $f'(v_0)=0$ แล้ว พาราเลลเป็นจีออเดซิก โดยข้อขัดแย้ง สมมติให้พาราเลลไม่เป็นจีออเดซิก

เนื่องจาก $E_v(u,v_0)=2\varphi_{uv}(u,v_0)\cdot\varphi_u(u,v_0)$

และ $F(u,v_0)=\varphi_u(u,v_0)\cdot\varphi_v(u,v_0)$

นั่นคือ $\varphi_{uu}(u,v_0)\cdot\varphi_v(u,v_0)=F_u-\dfrac{E_v(u,v_0)}{2}$

และเนื่องจาก $\dfrac{E_v(u,v_0)}{2}=f'(v_0)=0$ เพราะฉะนั้น $\varphi_{uu}(u,v_0)\cdot\varphi_v(u,v_0)=0$

ดังนั้น $(\alpha''\cdot\varphi_v)(u,v_0)=0$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจาก พาราเลลไม่เป็นจีออเดซิก

จะได้ว่า $f'(v_0)=0$ แล้ว พาราเลลบนพื้นผิวของการหมุนเป็นจีออเดซิก

นั่นคือ บางพาราเลลบนเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0)=0$ □

จีออเดซิกบนทรงพาราโบลา

ทรงพาราโบลาเป็นพื้นผิวของการหมุนของพาราโบลาที่ตัดกับแกนการหมุนและเป็นรูปทรงเปิดมีภาวะอิงพารามิเตอร์ คือ

(3.1) $$\varphi(u,v)=\left(v\cos u, v\sin u, v^2\right)$$

จากสมการ (2.2) จะได้

(3.2) $$E=v^2\quad F=0\quad G=1+4v^2$$

เพราะฉะนั้น สมการจีออเดซิกบนภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงพาราโบลา คือ

(3.3) $$u''+\frac{2}{v}u'v'=0$$
$$v''-\frac{v}{\left(1+4v^2\right)}u'^2+\frac{4v}{\left(1+4v^2\right)}v'^2=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.20) จะได้

(3.4) $$u = \pm \int \frac{c\sqrt{1+4v^2}}{v\sqrt{v^2-c^2}}dv$$

จากความสัมพันธ์ของแกลโรลจะได้ $v\cos\theta = c$ ดังนั้น

(3.5) $$u = \pm \int \frac{\tan\theta\sqrt{1+4v^2}}{v}dv$$

ดังนั้น สมการผลเฉลยของจีออเดซิกที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v สำหรับทรงพาราโบลาคือ

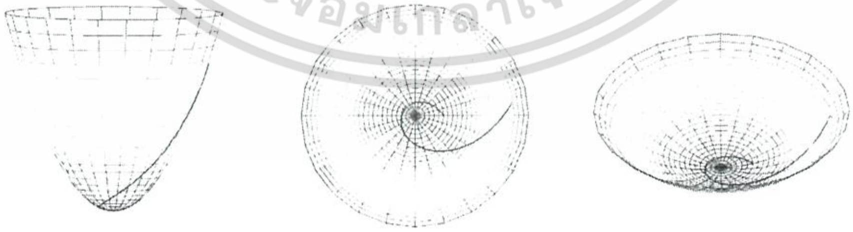
(3.6) $$u = \pm\left[\sqrt{1+4v^2}\tan\theta - \theta\tanh\left(\frac{1}{\sqrt{1+4v^2}}\right)\right]$$

ต่อไปจะพิจารณาความสัมพันธ์ของแกลโรลในกรณีต่างๆ ดังนี้

- ถ้าพิจารณาเมอริเดียนจากความสัมพันธ์ของแกลโรล $v\cos\theta = c$ เนื่องจาก θ แทนมุมระหว่าง α' และ φ_u เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $c = 0$ ดังนั้น $\frac{du}{dv} = 0$ ซึ่งแสดงในรูปภาพที่ 2

รูปภาพที่ 2 เมอริเดียนเป็นจีออเดซิกบนทรงพาราโบลา

- พิจารณาพาราเลล เนื่องจาก $f(v) = v$ จะได้ $f'(v_0) = 1$ นั่นคือ $f'(v_0) \neq 0$ จากทฤษฎีบทที่ 2.3.2 นั่นคือ สำหรับบางพาราเลลเป็นจีออเดซิกก็ต่อเมื่อ $f'(v_0) = 0$ เพราะฉะนั้น ไม่มีพาราเลลที่เป็นจีออเดซิก
- พิจารณา α ที่เป็นจีออเดซิกที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน นั่นคือค่าคงที่แกลโรลจะมีค่าเป็นค่าคงที่ ซึ่งแสดงใน รูปภาพที่ 3



รูปภาพที่ 3 จีออเดซิกบนทรงพาราโบลาที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียน

สรุปผลงานวิจัย

ทรงพาราโบลาเป็นพื้นผิวของการหมุนของพาราโบลาที่ตัดกับแกนการหมุนและเป็นรูปทรงเปิดที่อยู่ในรูปแบบภาวะอิงพารามิเตอร์แกลโรลที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ v มีสมการผลเฉลยของจีออเดซิกดังสมการที่ (3.6) จากความสัมพันธ์ของแกลโรล จะได้ว่าจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาสามารถหาได้เพียงเมอริเดียน และที่ไม่ตั้งฉากกับเมอริเดียนแต่พาราเรลไม่ถือว่าเป็นจีออเดซิก เนื่องจากไม่เป็นไปตามนิยามของจีออเดซิก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณโครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) ที่สนับสนุนงานวิจัยชิ้นนี้และขอขอบพระคุณท่านผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำและเสนอแนะจนงานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

Alfred Gray, Elsa Abbena, Simon Salamon. 2006. **Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica.** 3rd Edition. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC.

Barrett O'Neill. 2006. **Elementary Differential Geometry**. Revised 2nd Edition. San Diego Academic.

Jacob Lewis. (n.d.). **Geodesics Using Mathematica**. Columbia University.

John Oprea. 2007. **Differential Geometry and Its Applications.** 2nd Edition. Washington, DC : The Mathematical Association of America.

M. P. do Carmo. 1976. **Differential Geometry of Curves and Surfaces.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Mark L. Irons. 2005. **The Curvature and Geodesics of the Torus.** http://www.rdrop.com/~half/math/torus/index.xhtml.

Minoru Tanaka. 2000. **Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution**. Department of Mathematics, Tokai University.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Some Geodesics in Open Surfaces Classified by Clairaut's Relation

Wongvisarut Khuangsatung and Pakkinee Chitsakul

Abstract—In this paper, we studied some properties of geodesic on some open surfaces: Hyperboloid, Paraboloid and Funnel Surface. Geodesic equation in the v-Clairaut parameterization was calculated and reduced to definite integral. Some geodesics on some open surfaces as mention above were classified by Clairaut's relation.

Keywords—Geodesic, Surface of revolution, Clairaut's relation, Clairaut parameterization.

I. Introduction

GEODESICS are curves in surfaces that plays a role analogous to straight line in the plane. Geometrically, a geodesic in a surface is an embedded simple curve such that the portion of the curve between any two points is the shortest curve on the surface. It has been known that great circles are geodesics on a sphere. A geodesic can be obtained as the solution of the non-linear system of second-order ordinary differential equation with the given points and its tangent direction for the initial conditions. Reference [3] was shown numerical solution of a geodesic by iterative method. Generally, the geodesic equations are very complicated for solving explicitly. However, there are two cases where the solution can be reduced to definite integral. A solution of geodesic equation on some surfaces of revolution may be obtained from the v-Clairaut parameterization by reduced to compute integrals [5],[8]. Moreover, families of geodesics are classified by Clairaut's relation [8]. In this paper, we studied some properties of geodesic on some open surface: Hyperboloid, Paraboloid and Funnel Surface. Geodesic equation is calculated in the v-Clairaut parameterization form which can be reduced to definite integral and some geodesics on the open surfaces are classified by Clairaut's relation.

II. Basic Theory

We begin by recalling the basic theory about surface of revolution and its geodesic, most of which can be found in [1], [2], [6], [7], [8], [9] and [11]. Let D denote an open set in the plane $\mathbf{R}^2$. Typically, the open set D will be an open disk or an open rectangle. Let

$$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3, (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

denote a mapping of D into 3-space. If we fix $v = v_0$ and let u vary, then $\mathbf{x}(u, v_0)$ depends on one parameter, that is a curve. It is called a u-parameter curve. Similarly, if we fix $u = u_0$, the curve is a v-parameter curve. The tangent vectors for the u -parameter and v-parameter curves are given by differentiating the component functions of $\mathbf{x}$ with respect to u and v respectively. For each point on surface S, let $T_p(S)$ denotes the tangent plane at p . Let $\alpha : [a, b] \to S$ be a smooth curve on a surface S. The first fundamental form for S is

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{1}$$

where $E(u, v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, F(u, v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, G(u, v) = \mathbf{x}_v . \cdot \mathbf{x}_v$.

A. Surface of Revolution

Let $I \subseteq \mathbf{R}$ be an interval and let $\alpha(v) = (0, f(v), g(v)), v \in I$ be a regular parametrized plane curve with $f(v) > 0$. Then the surface of revolution obtained by rotating α about the z-axis is parametrized by

$$\mathbf{x} = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \tag{2}$$

where $v \in I, 0 \le u \le 2\pi$.

The u-parameter curves are generating curve α called meridians and The v -parameter curves are circles, called parallels (Fig.1).

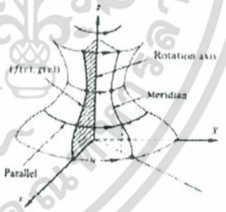


Fig. 1. Surface of revolution [7]

B. Geodesics

Definition 1: Let $\alpha : [a, b] \to S$ be a smooth curve on a surface S . The curve α is called a geodesic on S if $\alpha''(s)$ is orthogonal to the tangent space $T_{\alpha(s)}(S)$ for each $s \in (a, b)$.

That is, the acceleration α' of a geodesic is orthogonal to $T_{\alpha(s)}(S)$, or orthogonal to the velocity α' of α . Thus, geodesics have constant speed, since differentiation of $\|\alpha'\|^2 = \alpha' \cdot \alpha'$ gives $2\alpha' \cdot \alpha'' = 0$

Theorem 1: Let $\alpha(s) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s))$ be a smooth curve on a surface S . Then α is a geodesic if and only if α satisfies the following differential equations

$$u_i''(s) + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k (u_1(s), u_2(s)) u_j'(s) u_k'(s) = 0, (i = 1, 2). \tag{3}$$

W. Khuangsatung is with Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520 (e-mail: wongvisarut@gmail.com).

P. Chitsakul is with Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520 (e-mail: kcpakkin@kmitl.ac.th).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Let $u_1 = u$ and $u_2 = v$. That is, the geodesic equations (3) can be simplified to

$$u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0, \qquad (4)$$

$$v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0, \qquad (5)$$

where the coordinate system $(u, v) = (u(s), v(s))$ is orthogonal, i.e.,$F(u, v) = 0$. Then, the Christoffel symbols $\Gamma^i_{jk}(i, j, k = 1, 2)$ is given by

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E}, \Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E}, \Gamma^1_{22} = \frac{-G_u}{2E}, \qquad (6)$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{-E_v}{2G}, \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}, \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{G}. \qquad (7)$$

By replacing (6) into (4) and (7) into (5) , a geodesic can be calculated by the system of non-linear differential equations :

$$u'' + \frac{E_u}{2E}(u')^2 + 2\frac{E_v}{2E}u'v' - \frac{G_u}{2E}(v')^2 = 0, \qquad (8)$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G}(u')^2 + 2\frac{G_u}{2G}u'v' + \frac{G_v}{G}(v')^2 = 0, \qquad (9)$$

C. Clairaut Parametrization

The main classical tool used to get qualitative information about geodesics on surface of revolution is the Clairaut's relation. We say that an orthogonal patch $\mathbf{x}(u, v)$ is a v - Clairaut parametrization if $E_u = G_u = 0$ Thus, the geodesic equation with v-Clairaut parametrization is the system

$$u'' + \frac{E_v}{2E}u'v' = 0, \qquad (10)$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G}(u')^2 + \frac{G_v}{G}(v')^2 = 0, \qquad (11)$$

Theorem 2: (Clairaut's relation) *Let* $\mathbf{x} : D \to S$ *be* v*-Clairaut parametrization and let* $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ *be a geodesic on* S *. If* θ *is the angle from* $\mathbf{x}_u$ *to* α' *, then*

$$\sqrt{E}\cos\theta = c, \qquad (12)$$

where c is called Clairaut's constant.

In general, the geodesic equation is difficult to solve explicitly. However, there are important cases where their solutions can be reduced to definite integrals. Thus, Geodesics equation for v-Clairaut parametrization with single integral is

$$u(v) = \pm \int_{v_0}^{v} \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E - c^2}}dv. \qquad (13)$$

We now recall two important classes of geodesics on surface of revolution.

Theorem 3: For a surface of revolution having parametrization $\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$*, any meridian is a geodesic and a parallel is a geodesic if and only if* $f'(v_0) = 0$.

In other words, a necessary condition for a parallel of a surface of revolution to be a geodesic is that such a parallel is generated by the rotation of a point on the generating curve where the tangent is parallel to the axis of revolution. (Fig.2)

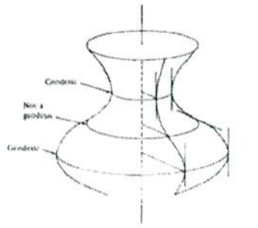


Fig. 2. Some properties of geodesic on surface of revolution [7]

III. THE MAIN RESULTS

A. Geodesic on Hyperboloid

The Hyperboloid [12] (also called a "Hyperboloid of one sheet") is a surface of revolution that can be obtained by rotating a hyperbola around an z-axis. Hyperboloid can be written in parameterization by

$$\mathbf{x}(u, v) = (a\sqrt{1 + v^2}\cos u, a\sqrt{1 + v^2}\sin u, bv), \qquad (14)$$

where $u \in [0, 2\pi), v > 0$ and $a > 0$. The coefficients E, F and G of the first fundamental form are given by

$$E = a^2(1 + v^2), F = 0, G = \frac{a^2v^2}{1 + v^2} + b^2, \qquad (15)$$

So that the first fundamental form of Hyperboloid is

$$ds^2 = a^2(1 + v^2)du^2 + (\frac{a^2v^2}{1 + v^2} + b^2)dv^2. \qquad (16)$$

Note that $E_u = G_u = 0$. Surfaces giving by parametrization with these properties are v-Clairaut parametrization. From (10) and (11), geodesic equation on Hyperboloid with v-Clairaut parametrization is satisfied by the following differential equations:

$$u'' + \frac{2v}{1 + v^2}u'v' = 0, \qquad (17)$$

$$v'' - \frac{a^2v(1 + v^2)}{a^2v^2 + b^2(1 + v^2)}u'^2 + \frac{a^2v}{(1 + v^2)(a^2v^2b^2(1 + v^2))}v'^2 = 0. \qquad (18)$$

From (13), we obtain a single integral which serves to characterize geodesies for a v-Clairaut parametrization. Thus, the geodesics equation on Hyperboloid for v-Clairaut parametrization with single integral may obtain from the following equation

$$u(v) = \pm \int_{v_0}^{v} \frac{c\sqrt{\frac{a^2v^2}{1+v^2} + b^2}}{\sqrt{a^2(1 + v^2)}\sqrt{a^2(1 + v^2) - c^2}}dv. \qquad (19)$$

Hence, we classify some geodesics on the Hyperboloid by using Clairaut's relation and Theorem 3, thus

$$a\sqrt{(1 + v^2)}\cos\theta = c. \qquad (20)$$

By assuming that v is very small number, therefore we will consider into 3 cases:

1. Meridians on the Hyperboloid are geodesic which satisfies $c = 0$.

Let $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ be a meridian on the Hyperboloid.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Since θ is the angle from $\mathbf{x}_u$ to α' , then $\theta = \pi/2$. By putting the meridian $\theta = \pi/2$ in Clairaut's relation, we have $a\sqrt{(1+v^2)}\cos(\pi/2) = c$. Since (Theorem 3.) any meridian is a geodesic, meridians on the Hyperboloid are geodesic (Fig3).

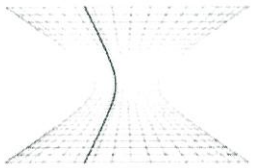


Fig. 3. Meridians on the Hyperboloid are geodesic.

2. Parallel on Hyperboloid at $v_0 = 0$ is geodesic which satisfies $c = a$.
Let $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ be a parallel on the Hyperboloid. Since θ is the angle from $\mathbf{x}_u$ to α' , then $\theta = 0$. We obtain the parallel $\theta = 0$ in Clairaut's relation, we have $c = a\sqrt{1+v^2}$ Moreover, (Theorem 3.) a parallel is a geodesic if and only if $f'(v_0) = 0$ Since $f(v) = a\sqrt{1+v^2}$ then $f'(v) = 2av/\sqrt{1+v^2}$. Thus $f'(v_0) = 0$ where $v_0 = 0$. Therefore, the parallel on Hyperboloid at is geodesic which satisfies $c = a$ (Fig4).

Fig. 4. Parallel on Hyperboloid at $v_0 = 0$ is geodesic which satisfies c=a.

3. Other geodesics satisfy $|c| < |a|$.
In this case, the geodesic is not perpendicular to any meridians which satisfy $a\sqrt{(1+v^2)}\cos\theta = c$. It is implies that $|c| < |a|$. We show geodesics curve on a Hyperboloid by using MATLAB [4], [10]. For example (Fig5), the starting point (u, v) and the direction $(du/ds, dv/ds)$ are given.

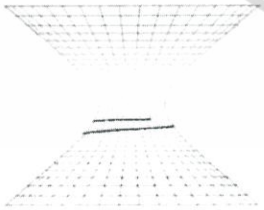


Fig. 5. Some geodesics on Hyperboloid.

With similarity to Hyperboloid, Paraboloid and Funnel surface are considered.

B. Geodesic on Paraboloid

The Paraboloid [12] is a surface of revolution which is an open surface where the generating curve intersects the axis of rotation. A Paraboloid can be parameterized by

$$\mathbf{x}(u, v) = (av\cos u, av\sin u, v^2), \qquad (21)$$

where $u \in [0, 2\pi), v > 0$ and $a > 0$. The coefficients E, F and G of the first fundamental form are given by

$$E = a^2v^2, F = 0, G = a^2 + 4v^2, \qquad (22)$$

So that the first fundamental form of Paraboloid is

$$ds^2 = a^2v^2du^2 + (a^2 + 4v^2)dv^2. \qquad (23)$$

Note that $E_u = G_u = 0$. Surfaces giving by parametrization with these properties are v-Clairaut parametrization. From (10) and (11), geodesic equation on Paraboloid with v-Clairaut parametrization is satisfied by the following differential equations:

$$u'' + \frac{2}{v}u'v' = 0, \qquad (24)$$

$$v'' - \frac{a^2v}{a^2+4v^2}u'^2 + \frac{4v}{a^2+4v^2}v'^2 = 0. \qquad (25)$$

Geodesics equation on Paraboloid for v-Clairaut parametrization with single integral may obtain from the following equation

$$u(v) = \pm\int_{v_0}^{v} \frac{c\sqrt{a^2+4v^2}}{av\sqrt{a^2v^2-c^2}}dv. \qquad (26)$$

Clairaut's relation of Paraboloid is

$$av\cos\theta = c. \qquad (27)$$

By assuming that v is very small number, therefore we will consider into 3 cases:

1. Meridians on the Paraboloid are geodesics which satisfies $c = 0$.

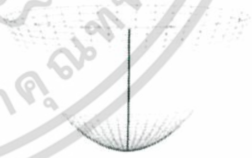


Fig. 6. Meridians on the Paraboloid are geodesics.

2. Parallel on Paraboloid at $v_0 = 0$ is not geodesic which satisfies $c = a$ since $f'(v_0) = a \neq 0$. 3. Other geodesics satisfy $|c| < |a|$.

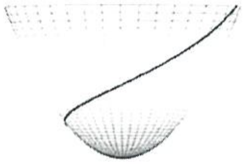


Fig. 7. Meridians on the Paraboloid are geodesics.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

C. Geodesic on Funnel Surface

The Funnel Surface [12] is a surface of revolution of the curve $\ln v$ which is an open surface where the generating curve do not intersect the axis of rotation. A Funnel Surface can be parameterized by

$$\mathbf{x}(u, v) = (av \cos u, av \sin u, \ln v), \tag{28}$$

where $u \in [0, 2\pi), v > 0$ and $a > 0$. The coefficients E, F and G of the first fundamental form are given by

$$E = a^2v^2, F = 0, G = a^2 + \frac{1}{v^2}, \tag{29}$$

So that the first fundamental form of Funnel Surface is

$$ds^2 = a^2v^2du^2 + (a^2 + \frac{1}{v^2})dv^2. \tag{30}$$

Note that $E_u = G_u = 0$. Surfaces giving by parametrization with these properties are v-Clairaut parametrization. From (10) and (11), geodesic equation on Funnel Surface with v-Clairaut parametrization is satisfied by the following differential equations:

$$u'' + \frac{2}{v}u'v' = 0, \tag{31}$$

$$v'' + \frac{a^2v^3}{a^2v^2+1}u'^2 - \frac{1}{v(a^2v^2+1)}v'^2 = 0. \tag{32}$$

Geodesics equation on Funnel Surface for v-Clairaut parametrization with single integral may obtain from the following equation

$$u(v) = \pm \int_{v_0}^{v} \frac{c\sqrt{a^2v^2+1}}{av^2\sqrt{a^2v^2-c^2}}dv. \tag{33}$$

Clairaut's relation of Funnel Surface is

$$av \cos\theta = c. \tag{34}$$

By assuming that v is very small number, therefore we will consider into 3 cases:

1. Meridians on the Funnel Surface are geodesics which satisfies $c = 0$.

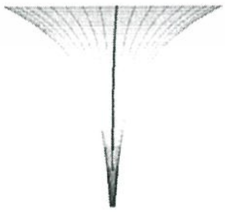


Fig. 8. Meridians on the Funnel Surface are geodesics.

2. Parallel on Funnel Surface at $v_0 = 0$ is not geodesic which satisfies $c = a$ since $f'(v_0) = a \neq 0$.
3. Other geodesics satisfy $|c| < |a|$ (Fig.9).

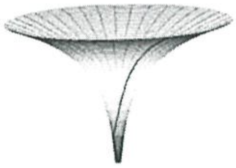


Fig. 9. Some geodesics on Funnel.

IV. Conclusion

We show how to compute the geodesics on some given surfaces for v-Clairaut parametrization in definite integral. We find that if there exists a point on the surface that cut the rotating exist (Paraboloid) or almost cut the rotating exist (Funnel Surface), then all parallels are not geodesic as shown in TABLE I.

TABLE I
THE CLASSIFICATION OF GEODESIC BY CLAIRAUT'S RELATION

Surface of Revolution	Meridian	Parallel	Other geodesics
Hyperboloid	$c = 0$	$c = a$	$\|c\| < \|a\|$
Paraboloid	$c = 0$	-	$\|c\| < \|a\|$
Funnel Surface	$c = 0$	-	$\|c\| < \|a\|$

Acknowledgment

We wish to express our sincere thanks to Science Achievement Scholarship of Thailand and King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.

References

[1] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surface with Mathematica*, 3rd ed. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2006.
[2] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Revised 2nd ed. San Diego : Academic, 2006.
[3] E. Kasap, M. Yapici, F. T.Akyildiz, Numerical Study for Computation of Geodesic Curves, *Elsevier J. Applied Mathematics and Computation*, vol. 171, pp. 1206-1213, 2005.
[4] J. Klang, Computing Geodesics on Two Dimensional Surfaces, May 2005.
[5] J. Lewis, Geodesics Using Mathematica, Columbia University, 2005.
[6] J. Oprea, *Differential Geometry and Its Applications*, 2nd ed. Washington, DC : The Mathematical Association of America, 2007.
[7] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
[8] M. L. Irons, The Curvature and Geodesics of the Torus ,2005.
[9] M. Tanaka, *Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution*, Lecture Notes, Tokai University, 2000.
[10] P. Chesler. Numerical Solutions For Geodesics on Two Dimensional Surfaces ,1999
[11] P. Chitsakul. *Differential Geometry*, Lecture Notes, KMITL, 2011.
[12] Wolfram mathworld Available: http://mathworld.wolfram.com.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

W. Khuangsatung received B.Sc. in Mathematics from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. He is currently a graduate student at Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand. His research interest is Differential Geometry.

P. Chitsakul received B.Sc. in Science from Ramkhamhang University and M.Sc in Applied Mathematics from Mahidol University. She is associate professor in Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand. Her research interests include Differential Geometry, Numerical Analysis and Mathematical Model.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – นามสกุล นายวงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

วัน เดือน ปีเกิด 3 มีนาคม 2531

ที่อยู่ปัจจุบัน 123 หมู่ที่ 9 บ้านร่มเย็น ตำบลปอแดง อำเภทชนบท จังหวัดขอนแก่น 40180

ประวัติการศึกษา จบปริญญาตรีจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ทุนการศึกษา โครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) ประจำปีการศึกษา 2553

ผลงานวิชาการ เรื่อง *สมบัติบางประการของจีออเดซิกบนทรงพาราโบลาโดยความสัมพันธ์ของแกลโรล (Some Properties of Geodesic on Paraboloid by Clairaut's Relation)* การประชุมวิชาการครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ระหว่างวันที่ 8-9 เดือนธันวาคม 2554

เรื่อง *สมบัติบางประการของจีออเดซิกบนทรงไฮเพอร์โบลาโดยความสัมพันธ์ของแกลโรล (Some Properties of Geodesic on Hyperboloid by Clairaut's Relation)* การประชุมวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเพื่อเยาวชนครั้งที่ 7 ระหว่างวันที่ 2-4 เดือนพฤษภาคม 2555

Some Geodesics in Open Surfaces Classified by Clairaut's Relation, ICAPM 2012 : International Conference on Applied Physics and Mathematics, Singapore, September 12-13, 2012.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้