โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว

COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING NUMERICAL SOLUTION OF SHORTEST PATH PROBLEM BETWEEN TWO POINTS ON SOME SURFACES

นายกำพลศักดิ์ บุญโกย
นายธนดล บัลลังก์โพธิ์
นายวิทวัส เหล่ามะลอ

โครงงานพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2553

COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING NUMERICAL SOLUTION OF SHORTEST PATH PROBLEM BETWEEN TWO POINTS ON SOME SURFACES

MR. KUMPONSAK BOONGOY
MR. THANADON BANLANGPHO
MR. WITTHAWAT LAOMALAW

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2010

หัวข้อโครงงานพิเศษ	โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว
	Computer Program for Solving Numerical Solution of Shortest Path Problem Between Two Points on Some Surfaces
ชื่อนักศึกษา	กำพลศักดิ์ บุญโกย 50050005
	ธนคล บัลลังก์โพธิ์ 50050033
	วิทวัส เหล่ามะลอ 50050076
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2553
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์
	อ.พรชัย ชัยสนิท

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้โครงงานพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2553

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์	ขนธนั
ดร.เดชา สมนะ	
รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์	
อ.พรชัย ชัยสนิท	

หัวข้อโครงงานพิเศษ	โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว
ชื่อนักศึกษา	กำพลศักดิ์ บุญโกย รหัสนักศึกษา 50050005
	ธนดล บัลลังก์โพธิ์ รหัสนักศึกษา 50050033
	วิทวัส เหล่ามะลอ รหัสนักศึกษา 50050076
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2553
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์
	อ.พรชัย ชัยสนิท

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาวิธีหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางพื้นผิว ได้แก่ ระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย และทรงห่วงยาง ซึ่งได้ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด(Finite Difference Method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของระยะทางที่สั้นที่สุด และนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และนำระเบียบวิธีเชิงคณิตศาสตร์นำมาเขียนโปรแกรมและเปรียบเทียบกับค่าจริงและหาค่าผิดพลาดที่ยอมรับได้ โปรแกรมเบื้องต้นที่พัฒนาขึ้นสามารถถูกใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางพื้นผิว

คำสำคัญ : วิธีผลต่างจำกัด, ระยะทางที่สั้นที่สุด, พื้นผิวกำลังสอง

Title	Computer Program for Solving Numerical Solution of Shortest Path Problem between Two Points on Some Surfaces
Students	Mr.Kumponsak Boongoy Mr.Thanadon Banlangpho Mr.Witthawat Laomalaw
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2010
Advisor	Assoc.Prof. Pakkinee Chitsakul
Co-Advisor	Dr.Jaipong Kasemsuwan Pornchai Chaisanit

ABSTRACT

The purpose of this research is to find the shortest distance on some surfaces. They were analyzed with mathematical method to find the shortest distance on some surface. We use mathematical methods for programming to compare finite difference method with the actual values, and find the error value that's acceptable. The preliminary program, which was developed, can be as a tool for finding the shortest distance on some surfaces.

Keywords: Finite Difference, Shortest Path, Quadric Surface

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำหัวข้อปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว ทางคณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล อย่างสูง ที่ได้กรุณาสละเวลาเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษและได้ให้ความช่วยเหลือในการให้คำแนะนำและตรวจแก้ไขในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้สำเร็จลงได้ด้วยดี และเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้วิจัยมีความพยายามในการทำปัญหาพิเศษให้ประสบผลสำเร็จ และขอกราบขอบพระคุณ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ และ อ.พรชัย ชัยสนิท เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความรู้และแก้ไขรวมทั้งข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ซึ่งทำให้ปัญหาพิเศษฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

คณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ ประธานกรรมการสอบและ ดร.เดชา สมนะ กรรมการสอบ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะรวมทั้งความรู้ที่เป็นประโยชน์เพื่อนำไปแก้ไขในปัญหาพิเศษให้ถูกต้องสมบูรณ์ และกรุณาสละเวลามาเป็นกรรมการสอบในปัญหาพิเศษฉบับนี้

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ คุณพี่ ณัฐพล บุญนำ นักศึกษาปริญญาโทที่ได้ให้ความช่วยเหลือและให้คำปรึกษาเกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้

ท้ายที่สุดทางคณะผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ พี่น้อง และเพื่อนๆที่รักทุกคนที่คอยให้กำลังใจสนับสนุนด้านการศึกษาแก่ผู้วิจัยด้วยความรักยิ่งตลอดมา

กำพลศักดิ์ บุญโกย
ธนดล บัลลังก์โพธิ์
วิทวัส เหล่ามะลอ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VI
สารบัญตาราง	IX
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษ	2
1.4 ขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 พื้นผิวกำลังสอง (Quadric Surface)	3
2.2 ผิวที่เกิดจากการหมุน (Surface of Revolution)	7
2.3 ปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมด้วยจุดสองจุดระหว่าง P_0 และ P_1 บนพื้นผิว	15
2.4 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	16
2.4.1 กฎของลิบนิสซ์ (Leibniz's Rule)	16
2.4.2 สมการออยเลอร์ (Euler's Equation)	16
2.4.3 ระเบียบวิธีผลต่างของออยเลอร์ (Euler's Method of Finite Difference)	19
บทที่ 3 ระเบียบวิธีวิจัยและผลการดำเนินงาน	21
3.1 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนระนาบ	21
3.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม	21

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

3.3 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกระบอก 25

3.4 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกรวย 32

3.5 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงห่วงยาง 37

บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล 41

4.1วิธีใช้โปรแกรมหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยวิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 41

4.1.1 ทรงกลม 42

4.1.2 ทรงกระบอก 44

4.1.3 ทรงกรวย 1 ชิ้น 47

4.1.4 ทรงกรวย 2 ชิ้น 48

4.1.5 ทรงห่วงยาง 50

4.1.6 ระนาบ 52

4.2 โปรแกรมหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด 54

4.2.1 ทรงกลม 55

4.2.2 ทรงกระบอก 57

4.2.3 ทรงกรวย 58

4.2.4 ทรงห่วงยาง 60

บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินงาน การอภิปรายและข้อเสนอแนะ 62

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน 62

5.2 อุปสรรค 64

5.3 ข้อเสนอแนะ 64

เอกสารอ้างอิง 65

สารบัญรูป

รูปที่ | หน้า

2.1 ทรงกลมที่ผิวกำลังสอง (Sphere) 3

2.2 ทรงรีที่ผิวกำลังสอง (Ellipsoid) 4

2.3 ทรงกรวยที่ผิวกำลังสอง (Cone) 4

2.4 ทรงกระบอกที่ผิวกำลังสอง (Cylinder) 5

2.5 ไฮเพอร์โบลอยด์ 1 ชิ้นที่ผิวกำลังสอง (Hyperboloid of One Sheet) 5

2.6 ไฮเพอร์โบลอยด์ 2 ชิ้นที่ผิวกำลังสอง (Hyperboloid of Two Sheets) 6

2.7 พาราโบลอยด์เชิงทรงรีที่ผิวกำลังสอง (Elliptic Parabolic) 6

2.8 อานม้าที่ผิวกำลังสอง (Hyperbolic Parabolic) 7

2.9 ทรงกลมที่ผิวเกิดจากการหมุนครึ่งวงกลมรอบแกน z 7

2.10 ทรงกระบอกที่ผิวเกิดจากการหมุนเส้นตรงที่ขนานแกน z 8

2.11 ทรงกรวยที่ผิวเกิดจากการหมุนเส้นตรงที่เอียงทำมุมกับแกน z 8

2.12 ทรงห่วงยางที่ผิวเกิดจากการหมุนวงกลมรอบแกน z 9

2.13 ระนาบ (Plane) 10

2.14 ทรงกลม (Sphere) 11

2.15 ทรงกระบอก (Cylinder) 12

2.16 ทรงกรวย (Cone) 13

2.17 ทรงห่วงยาง (Torus) 14

2.18 การแบ่งเส้นโค้งเป็น n จุด 19

3.1 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกลม 22

3.2 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y ไม่เท่ากัน แต่ z เท่ากัน 26

3.3 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y เท่ากัน แต่ z ไม่เท่ากัน 27

3.4 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y, z ไม่เท่ากัน 31

3.5 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกรวยที่มีค่า z เท่ากัน แต่ x, y, ϕ ไม่เท่ากัน 32

3.6 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกรวยที่มีค่า ϕ เท่า แต่ x, y, z ไม่เท่ากัน 36

3.7 แสดงการหมุนกรวยในทิศทวนเข็มนาฬิกา 36

4.1 หน้าต่างโปรแกรมเริ่มต้น (1) 41

4.2 หน้าต่างการคำนวณ โดยวิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 42

4.3 หน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกลมด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 43

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ หน้า

4.4 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกลม ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 43
4.5 ผลการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดของรูปทรงกลม ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 44
4.6 หน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกระบอกด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 45
4.7 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอก ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 45
4.8 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกระบอก ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 46
4.9 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวย 1 ชิ้นด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 47
4.10 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 1 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 47
4.11 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย 1 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 48
4.12 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวย 2 ชิ้นด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 48
4.13 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 2 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 49
4.14 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย 2 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 49
4.15 หน้าต่างการรับค่าของทรงห่วงยางด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 50
4.16 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยาง ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 51
4.17 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงห่วงยาง ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 51
4.18 หน้าต่างการรับค่าของระนาบด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 52
4.19 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวระนาบ ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 53
4.20 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของระนาบ ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ 53
4.21หน้าต่างโปรแกรมเริ่มต้น (2) 54

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.22 หน้าต่างการคำนวณโดยวิธีผลต่างจำกัด 54

4.23 หน้าต่างการรับค่าของทรงกลม ของวิธีผลต่างจำกัด 55

4.24 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกลม ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 56

4.25 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกลม ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 56

4.26 หน้าต่างการรับค่าของทรงกระบอกของวิธีผลต่างจำกัด 57

4.27 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอก ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 57

4.28 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกระบอก ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 58

4.29 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวยของวิธีผลต่างจำกัด 58

4.30 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 59

4.31 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 59

4.32 หน้าต่างการรับค่าของทรงห่วงยางของวิธีผลต่างจำกัด 60

4.33 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยาง ด้วยวิธีผลต่างจำกัด 60

4.34 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงห่วงยางด้วยวิธีผลต่างจำกัด 61

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับวิธีผลต่างจำกัด 63

บทที่ 1
บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ ซึ่งทำการศึกษาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย 1 ชิ้น ทรงกรวย 2 ชิ้นและทรงห่วงยาง และเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุด รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ และประโยชน์ต่อกลุ่มวิจัยที่เกี่ยวข้องของปัญหาพิเศษเล่มนี้เพื่อเป็นแนวทางในการทำปัญหาพิเศษสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

ปัญหาพิเศษนี้จะศึกษาวิธีการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในการหาค่าเหมาะสมที่สุด โดยจะกล่าวถึงการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวเรียบ (Smooth Surface Problems) ของระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย 1 ชิ้น ทรงกรวย 2 ชิ้น และทรงห่วงยาง ซึ่งการหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าวข้างต้นนี้สามารถพัฒนามาจากระเบียบวิธีออยเลอร์ จากงานวิจัยเรื่องระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวกำลังสอง [1] ซึ่งได้หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของปัญหาจีออเดซิกบนทรงกลม ทรงกระบอก และทรงกรวย แต่เนื่องจากการหาผลเฉลยของระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกรวยและทรงห่วงยางจะติดอยู่ในรูปปริพันธ์ ดังนั้นจึงต้องมีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยในปัญหาพิเศษนี้จะใช้ระเบียบวิธีออยเลอร์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในการพัฒนาโปรแกรม

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีต่างๆ รวมถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุด
2. เพื่อศึกษา และพัฒนาโดยใช้วิธีผลต่างจำกัดเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยโดยประมาณของการหาระยะทางที่สั้นที่สุด
3. สร้างโปรแกรมเพื่อคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิวซึ่งมีระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย 1 ชิ้น ทรงกรวย 2 ชิ้นและทรงห่วงยาง

4. เพื่อเปรียบเทียบค่าจริงกับผลลัพธ์ที่คำนวณจากโปรแกรมแล้วนำมาวิเคราะห์ผลที่ได้ และพัฒนาปรับปรุงขั้นตอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

1.3 ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1. หาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวเรียบเท่านั้น
2. ทำการศึกษารูปทรงบนบางพื้นผิวเฉพาะระนาบ, ทรงกลม, ทรงกระบอก ,ทรงกรวย 1 ชิ้น ทรงกรวย 2 ชิ้นและทรงห่วงยาง
3. ทรงกรวย 1 ชิ้นจะไม่คิดที่กรณี x, y, z, ϕ ไม่เท่ากัน
4. ทรงกรวย 2 ชิ้นจะคิดที่กรณีผ่านจุด (0,0,0)
5. ทรงห่วงยางจะคิดที่กรณีเดียวคือที่พิกัด z เท่ากัน

1.4 ขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ

1. ศึกษาและรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษ
2. นำข้อมูลที่ได้ศึกษามาวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ
3. เขียนโปรแกรมที่ช่วยในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดและสรุปผล

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว
2. ได้ศึกษาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิวซึ่งมี ระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย 1 ชิ้น ทรงกรวย 2 ชิ้นและทรงห่วงยาง
3. ได้ศึกษาทฤษฎี และความรู้ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษนี้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงเนื้อหาที่เกี่ยวกับการทำปัญหาพิเศษนี้ ซึ่งจะเป็นทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ต่างๆ นอกจากนี้ยังเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษเรื่องนี้ด้วย

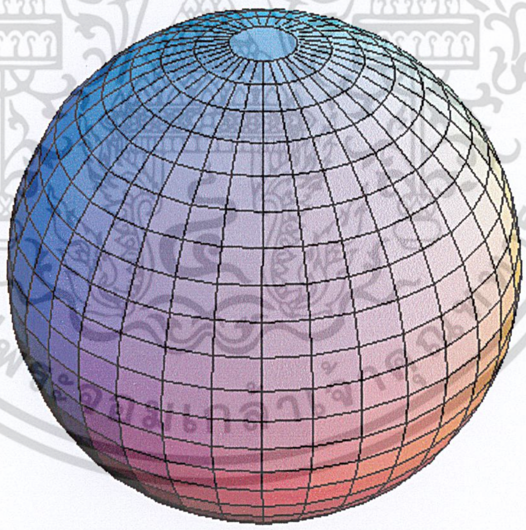
2.1 ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

ผิวที่เกิดจากเซตของจุดซึ่งเป็นไปตามสมการทั่วไป

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

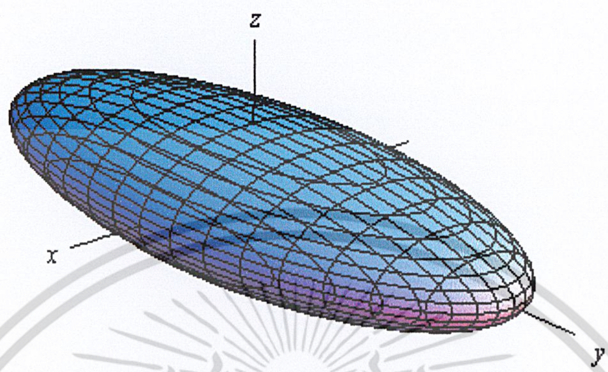
เมื่อ $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ และ K เป็นค่าคงตัว โดย A, B และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกว่าผิวกำลังสอง เช่น $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ เป็นสมการของทรงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย ซึ่งในหัวข้อนี้จะมีรูปทรงดังต่อไปนี้

รูปแบบสมการทั่วไปของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$



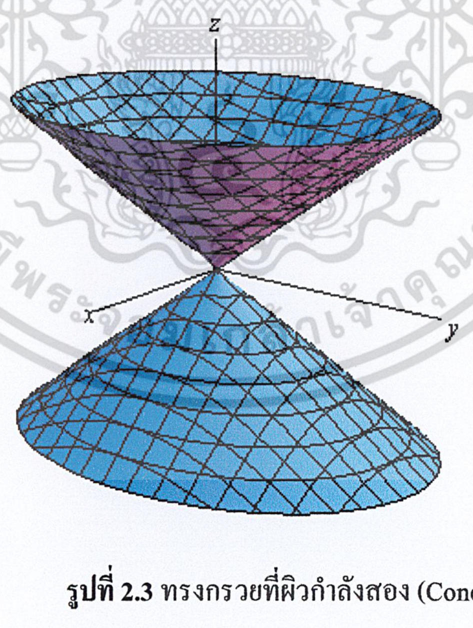
รูปที่ 2.1 ทรงกลมที่ผิวกำลังสอง (Sphere)

รูปแบบสมการทั่วไปของทรงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



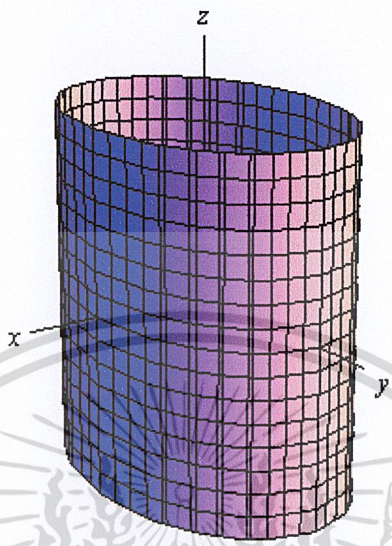
รูปที่ 2.2 ทรงรีที่ผิวกำลังสอง (Ellipsoid)

รูปแบบสมการทั่วไปของทรงกรวย $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$



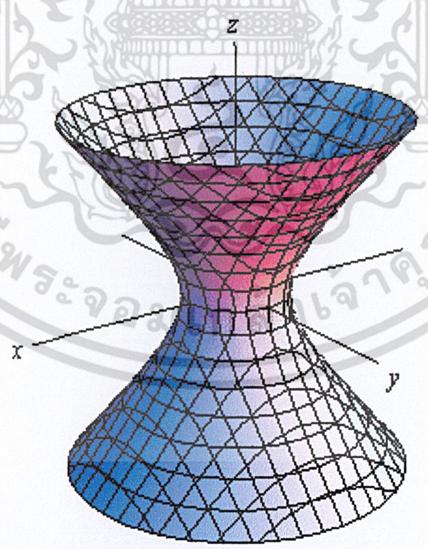
รูปที่ 2.3 ทรงกรวยที่ผิวกำลังสอง (Cone)

รูปแบบสมการทั่วไปของทรงกระบอก $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



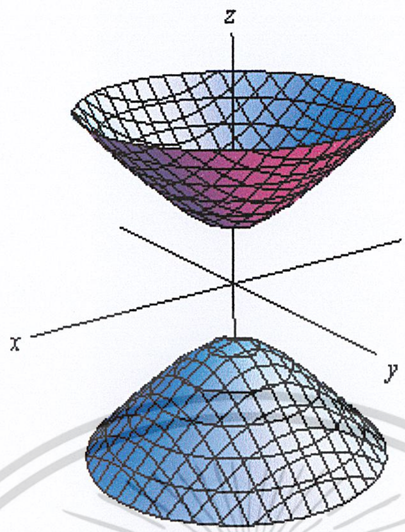
รูปที่ 2.4 ทรงกระบอกที่ผิวกำลังสอง (Cylinder)

รูปแบบสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลอยด์ 1 ชิ้น $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



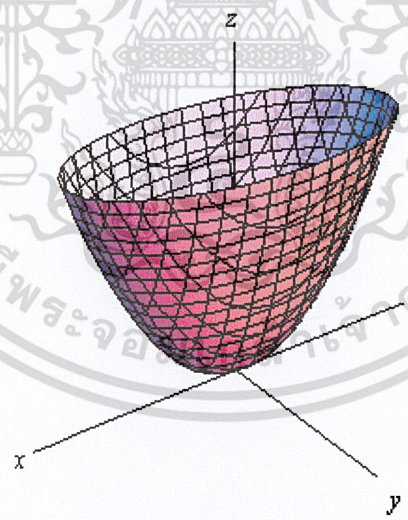
รูปที่ 2.5 ไฮเพอร์โบลอยด์ 1 ชิ้นที่ผิวกำลังสอง (Hyperboloid of One Sheet)

รูปแบบสมการทั่วไปของไฮเพอร์โบลอยด์ 2 ชิ้น $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



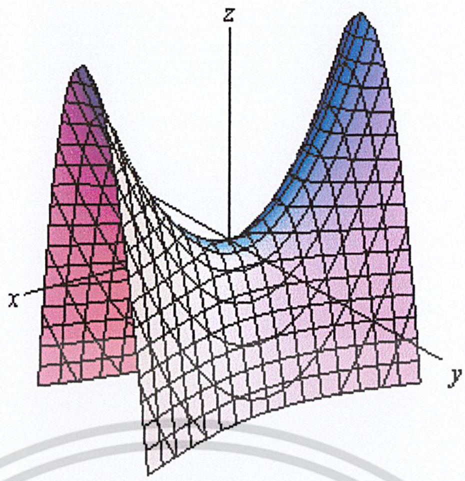
รูปที่ 2.6 ไฮเพอร์โบลอยด์ 2 ชิ้นที่ผิวกำลังสอง (Hyperboloid of Two Sheets)

รูปแบบสมการทั่วไปของพาราโบลอยด์เชิงทรงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$



รูปที่ 2.7 พาราโบลอยด์เชิงทรงรีที่ผิวกำลังสอง (Elliptic Paraboloid)

รูปแบบสมการทั่วไปรูปอานม้า $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$



รูปที่ 2.8 อานม้าที่ผิวกำลังสอง (Hyperbolic Paraboloid)

2.2 ผิวที่เกิดจากการหมุน (Surface of Revolution)

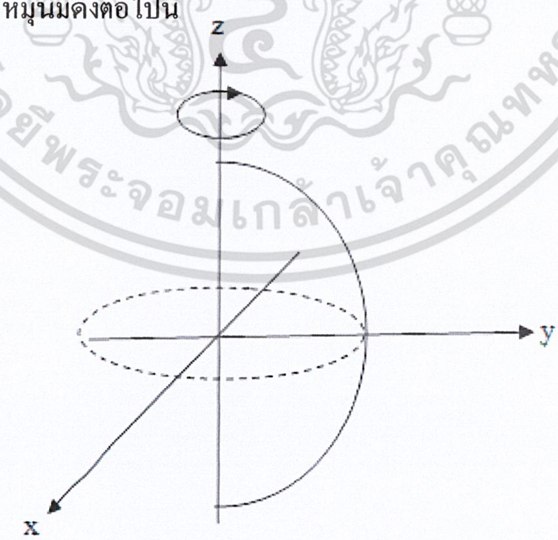
ผิวที่เกิดจากการหมุนกราฟรอบแกน z สามารถแทนด้วยสมการ

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = f(u)$$

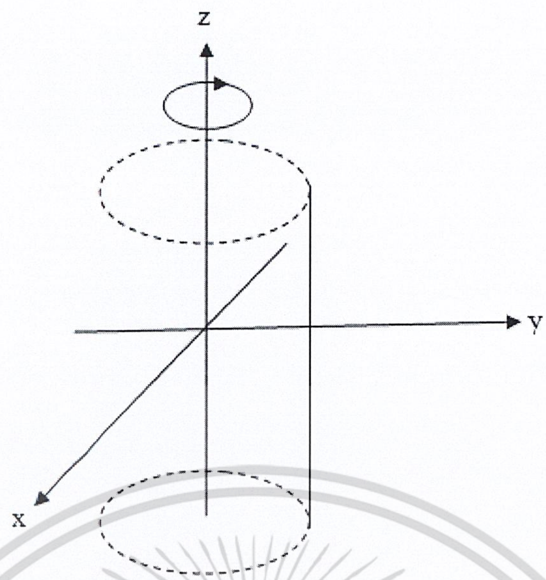
สำหรับการหมุนรอบแกน x และแกน y สามารถแทนได้ดังนี้

$$x = f(u) \ , y = u\cos v \ , z = u\sin v$$
$$y = f(u) \ , x = u\cos v \ , z = u\sin v$$

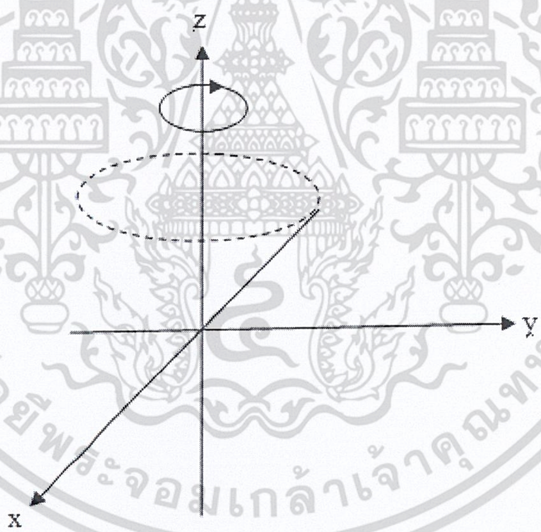
ผิวที่เกิดจากการหมุนสามารถหมุนได้ทุกแกน แต่ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหมุนที่แกน z
ตัวอย่างผิวที่เกิดจากการหมุนมีดังต่อไปนี้



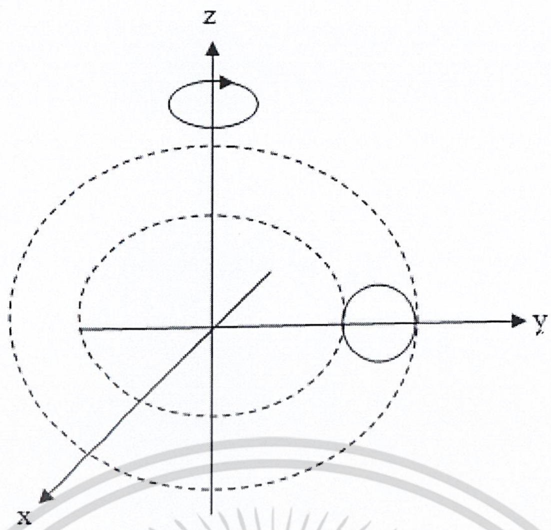
รูปที่2.9 ทรงกลมที่ผิวเกิดจากการหมุนครึ่งวงกลมรอบแกน z



รูปที่ 2.10 ทรงกระบอกที่ผิวเกิดจากการหมุนเส้นตรงที่ขนานแกน z



รูปที่ 2.11 ทรงกรวยที่ผิวเกิดจากการหมุนเส้นตรงที่เอียงทำมุมกับแกน z



รูปที่ 2.12 ทรงห่วงยางที่ผิวเกิดจากการหมุนวงกลมรอบแกน z

จากผิวกำลังสองและผิวที่เกิดจากการหมุนที่ได้ยกตัวอย่างมาข้างต้นในปัญหาพิเศษนี้ผู้วิจัยได้สนใจที่จะศึกษาพื้นผิว 5 พื้นผิว ดังนี้

1. ระนาบ
2. ทรงกลม
3. ทรงกระบอก
4. ทรงกรวย
5. ทรงห่วงยาง

ระนาบ

รูปแบบสมการ $ax + by + cz = d$

จะได้

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

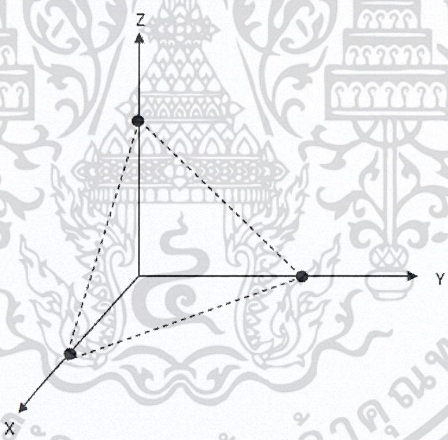
$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

โดยที่ $A = \frac{d}{a}, B = \frac{d}{b}, C = \frac{d}{c}$

จุดที่ระนาบตัดแกน $x = (A,0,0)$

จุดที่ระนาบตัดแกน $y = (0,B,0)$

จุดที่ระนาบตัดแกน $z = (0,0,C)$



รูปที่ 2.13 ระนาบ (Plane)

ทรงกลม

รูปแบบสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ เมื่อ ρ คือรัศมีคงที่

สมการอิงพาราามิเตอร์คือ

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$ และ $-\pi \le \theta \le \pi$

ให้ P เป็น จุดใดๆ บนทรงกลม

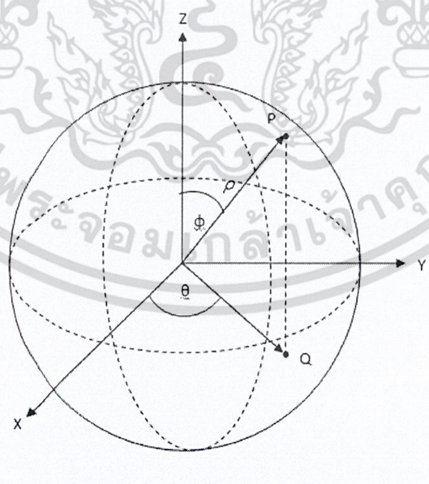
Q เป็น โปรเจกชั่นของจุด P ลงบนระนาบ xy

ϕ เป็น มุมที่เส้นแนวรัศมีทรงกลมซึ่งยาว ρ ทำกับแกน Z

θ เป็น มุมที่โปรเจกชั่นของจุด P ลงบนระนาบ xy ทำกับแกน x

เมื่อนำสมการอิงพาราามิเตอร์ แทนค่าในสมการพิกัดฉากจะได้

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2 \cos\phi \\ &= \rho^2 \sin^2\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \rho^2 \cos^2\phi \\ &= \rho^2 \sin^2\phi + \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.14ทรงกลม (Sphere)

ทรงกระบอก

รูปแบบสมการ $x^2 + y^2 = \rho^2$ เมื่อ ρ คือรัศมีวงกลม

สมการอิงพารามิเตอร์คือ

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$z = z$$

โดยที่ $-\pi \le \theta \le \pi$

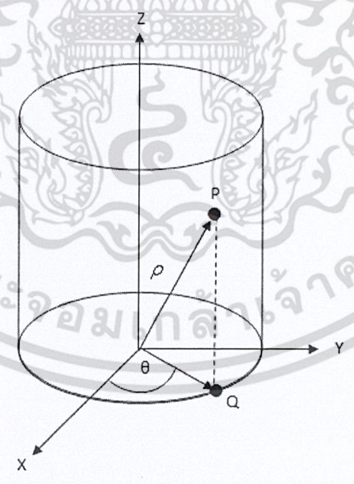
ให้ P เป็นจุดใดๆ บนกระบอก

Q เป็นโปรเจกชั่นของจุด P ลงบนระนาบ xy

θ เป็นมุมที่โปรเจกชั่นของจุด P ลงบนระนาบ xy ทำกับแกน x

เมื่อนำสมการอิงพารามิเตอร์ แทนค่าในสมการพิกัดฉากจะได้

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \\ &= \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$



รูปที่ 2.15ทรงกระบอก (Cylinder)

ทรงกรวย

รูปแบบสมการ $\sqrt{x^2+y^2}=z$

สมการอิงพารามิเตอร์

$$x=\theta\cos\phi$$

$$y=\theta\sin\phi$$

$$z=\theta$$

โดยที่ P เป็นจุดใดๆ บนทรงกรวย

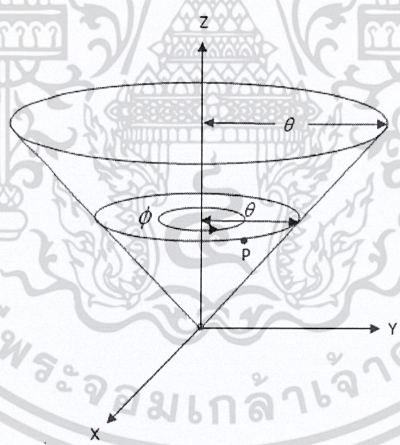
θ เป็นรัศมีของภาคตัดขวาง ณ ความสูง z ใดๆ ซึ่ง $z=\theta$ และ $0\le\phi\le 2\pi$

เมื่อนำสมการอิงพารามิเตอร์ แทนค่าในสมการพิกัดฉากจะได้

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\theta^2\cos^2\phi+\theta^2\sin^2\phi}$$

$$=\sqrt{\theta^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)}$$

$$z=\theta$$



รูปที่ 2.16 ทรงกรวย (Cone)

ทรงห่วงยาง

รูปแบบสมการ $(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=r^2$

สมการอิงพาราามิเตอร์คือ $x=(R+r\cos\phi)\cos\theta$

$$y=(R+r\cos\phi)\sin\theta$$

$$z=r\sin\phi$$

โดยที่ R เป็นรัศมีจากจุดกำเนิดไปที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่หมุน

r เป็นรัศมีของวงกลมที่หมุนรอบแกน Z โดยวงกลมที่หมุนตั้งฉากกับระนาบ xy

และ $-\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$, $-\pi\le\theta\le\pi$

เมื่อนำสมการอิงพาราามิเตอร์ แทนค่าในสมการพิกัดฉากจะได้

$$(R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=(R-\sqrt{(R+r\cos\phi)^2\cos^2\theta+(R+r\cos\phi)^2\sin^2\theta})^2+r^2\sin^2\phi$$

$$=(R-\sqrt{(R+r\cos\phi)^2\{\cos^2\theta+\sin^2\theta\}})^2+r^2\sin^2\phi$$

$$=(R-R+r\cos\phi)^2+r^2\sin^2\phi$$

$$=r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=r^2$$

รูปที่ 2.17 ทรงห่วงยาง (Torus)

2.3 ปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมด้วยจุดสองจุดระหว่าง P_0 และ P_1 อยู่บนผิว S

พื้นผิว S สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปคือ $x = f(u,v),\ \ y = g(u,v)$ และ $z = h(u,v)$ ที่จุด $P_0 \equiv (u_0, v_0)$ และ $P_1 \equiv (u_1, v_1)$ บนพื้นผิว S มี c ซึ่งผ่าน P_0 และ P_1 นั่นคือ c อยู่บน R_{uv} โดยที่ $u = u(t)$ และ $v = v(t)$ เมื่อ $t_0 \le t \le t_1$

ดังนั้นจึงสามารถเขียน c ให้อยู่ในรูปแบบสมการอิงตัวแปรเสริมของ $x = f(u(t), v(t)),$ $y = g(u(t), v(t))$ และ $z = h(u(t), v(t))$ เมื่อ $t_0 \le t \le t_1$ จะได้

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt$$

ซึ่ง $x = f(u,v),\ \ y = g(u,v)$ และ $z = h(u,v)$ โดยที่ $u = u(t)$ และ $v = v(t)$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial h}{\partial u}\frac{du}{dt}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right]\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\
&\quad + 2\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\right]\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \\
&= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt$$

เมื่อ

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

ปัญหาในขณะนี้คือ ต้องการหา u และ v ที่ให้ค่าปริพันธ์ต่ำสุด ซึ่ง ณ ขณะนี้ ถือว่าเป็นวิธีการหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุด เพราะเมื่อเรากำหนดพิกัดจุดระหว่าง P_0 และ P_1 บนผิว S ซึ่งพื้นผิวนี้จะกำหนดตัวแปรตามค่าพารามิเตอร์ x, y, z ทำให้หาเส้นโค้งได้ อย่างไรก็ตาม จากปัญหาดังกล่าว จะได้เพียงค่าความยาวที่ติดอยู่ในรูปปริพันธ์ จึงจำเป็นที่จะต้องนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เข้ามาประยุกต์ใช้ และพิสูจน์ค่าความยาวเส้นโค้งออกมา

2.4 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.4.1 กฎของลิบนิสซ์ (Leibniz's Rule)

ถ้ามีปริพันธ์ในรูปแบบ $\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy$ เมื่อ $x\in(x_0,x_1)$ แล้วอนุพันธ์ของปริพันธ์เป็นนิพจน์

$$\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy=\int_{y_0}^{y_1}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$$

โดยมีเงื่อนไขว่า f และ $\frac{\partial f}{\partial x}$ ต่อเนื่องบนขอบเขตในรูปแบบของ $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$

2.4.2 สมการออยเลอร์ (Euler's Equation)

ให้ $f(x,y,y')$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง โดย $y=y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a)=A\ ,\ y(b)=B \tag{2.1}$$

ซึ่งทำให้ฟังก์ชันนอล

$$J[y(x)]=\int_a^b f(x,y,y')dx \tag{2.2}$$

มีค่าที่เหมาะสม

ในที่นี้ให้ $J[y(x)]$ คือค่าที่เหมาะสมในปัญหาพิเศษนี้คือความยาวระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิว

หรืออาจกล่าวได้ว่า ปัญหาในเรื่องของแคลคูลัสของการแปรผัน คือ การหาฟังก์ชันนอลซึ่งให้ค่าเหมาะสมในรูปแบบที่ (2.2) บนเซตของเส้นโค้งเรียบทั้งหมดที่เชื่อมระหว่างจุดที่กำหนดให้ $P_1 = (a, A)$ และ $P_2 = (b, B)$ ซึ่งเป็นไปตาม (2.1)

จากกฎของลิบนิซส์

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,y,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,t)dt$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,t)dt$$

แทน x ด้วย y' และแทน t ด้วย x จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y,y')dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,y')dt$$

กำหนดให้

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

ดังนั้น

$$\Delta J = \int_a^b f(x, y+\Delta y, y'+\Delta y')dx - \int_a^b f(x,y,y')dx$$
$$= \int_a^b \left[f(x, y+\Delta y, y'+\Delta y')dx - f(x,y,y') \right] dx$$

จะได้

$$\delta J\left[y(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y'$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y'$$

$$\delta J\left[y(x)\right] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\partial y dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\partial y' dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right]dx$$

ทำการปริพันธ์ทีละส่วน(By part) ในพจน์ที่ 2 โดย

ให้ $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ และ $dv = \delta y' dx$

$du = \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})dx$ และ $v = \delta y'$

จะได้

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\delta y dx$$

สมมติ ถ้า $y(a) = A, y(b) = B$ เป็นเงื่อนไขขอบเขต

จะได้ว่า $\delta y\big|_a = 0, \delta y\big|_b = 0$ ซึ่งส่งผลให้ $\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\big|_a^b = 0$

ดังนั้น

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\right)\delta y dx$$

ถ้า $\delta J[y(x)] = 0$ แล้ว $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด และ $\delta J = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\right) = 0 \qquad (2.3)$$

จากนั้น สำหรับฟังก์ชันนอลในสมการที่ (2.2) ที่นิยามบนเซตของฟังก์ชัน $y = y(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (2.1) มีค่าสุดขีดบนฟังก์ชันที่กำหนด $y(x)$ แล้ว เชิงฟังก์ชันต้องเป็นไปตามสมการของออยเลอร์ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

เส้นโค้งปริพันธ์ของสมการออยเลอร์ เรียกว่า เส้นโค้งลากรองจ์

สมการออยเลอร์ สามารถขยายในรูปแบบอื่นได้ดังนี้

จาก $f(x, y, y')$ สามารถหา $f_y(x, y, y')$ และ $f_{y'}(x, y, y')$ ได้ และ

$$\frac{\partial f_{y'}}{dx} = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\cdot\frac{dy'}{dx} \qquad ; f = f(x, y, y')$$

$$= f_{xy'} + f_{yy'}y' + f_{y'y'}y''$$

นำค่าในสมการที่ (2.6) แทนค่าในสมการที่ (2.5) จะได้

$$f_y - \left(f_{y'x} + f_{y'y}y' + f_{y'y'}y''\right) = 0$$

หรือ

$$y'' f_{y'y'} + y' f_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0 \qquad (2.4)$$

สมการที่ (2.4) คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดังนั้นคำตอบทั่วไปต้องขึ้นกับค่าคงที่สองตัวใดๆ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตใน (2.1) นั่นเอง

2.4.3 ระเบียบวิธีผลต่างของออยเลอร์ (Euler's Method of Finite Difference)

จากปัญหาพื้นฐานในปัญหาการแปรผัน คือการหาค่าสุดขีด (ค่าเหมาะสม) ของฟังก์ชันนอล

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx, \qquad y(x_1) = a, \qquad y(x_2) = b$$

ในระเบียบวิธีออยเลอร์ ค่าของฟังก์ชันนอล หาได้บนเส้นกราฟที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด

ถ้าแบ่งเส้นโค้งเป็น n จุด แล้วลากเส้นตรงเชื่อมแต่ละจุด (ดังรูป) จะได้จุดแบ่งคือโดย $x_1 + \Delta x, x_1 + 2\Delta x, \ldots, x_1 + (n-1)\Delta x,$ เมื่อ $\Delta x = (x_2 - x_1)/n$

รูปที่ 2.18 การแบ่งเส้นโค้งเป็น n จุด

โดยจะแทนฟังก์ชันนอล $I[y(x)]$ เป็นฟังก์ชัน $\phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ซึ่งพิกัด $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ เป็นค่าจุดยอดของเส้นโค้งของรูปหลายเหลี่ยม (polygonal curve)

จากเส้นโค้งของรูปหลายเหลี่ยมซึ่งฟังก์ชันนอล $I[y(x)]$ เปลี่ยนเป็น $\phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ϕ จะมีค่าสุดขีดถ้า

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial y_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} = 0$$

ถ้าให้ลิมิต $n \to \infty$ เราจะได้ผลลัพธ์จากการแก้ปัญหาการแปรผันในรูปของ f โดยอธิบายจาก Euler's equation สำหรับฟังก์ชันนอล

สมการออยเลอร์คือ $$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

จากเส้นโค้งของรูปหลายเหลี่ยมเราจะได้ว่า

$$I[y(x)] \approx \phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

จากลำดับที่ i และ $i-1$ ในผลรวม y_i มาจาก

$\partial\phi/\partial y_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$ จะได้

$$f_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{fy'\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - fy'\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0$$

ให้ลิมิต $\Delta x \to 0$ เป็น $n \to \infty$ (Euler's equation)

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

บทที่ 3

ระเบียบวิธีวิจัยและผลการดำเนินงาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีผลต่างจำกัดบนระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวยและทรงห่วงยาง

3.1 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนระนาบ

__ตัวอย่างที่ 1__ จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนระนาบโดยที่ จุดเริ่มต้นคือ (2,2,1) จุดสิ้นสุดคือ (1,2,2) สมการระนาบ คือ $2x+3y+2z=12$

__วิธีทำ__ จุดเริ่มต้น (2,2,1) ตรวจสอบว่าอยู่บนพื้นผิวหรือไม่

แทนในสมการระนาบ $2x+3y+2z=12$

$$2(2)+3(2)+2(1)=12$$

$$4+6+2=12 \quad \text{เป็นจริง}$$

จุดสิ้นสุด (1,2,2) ตรวจสอบว่าอยู่บนพื้นผิวหรือไม่

แทนในสมการระนาบ $2x+3y+2z=12$

$$2(1)+3(2)+2(2)=12$$

$$2+6+4=12 \quad \text{เป็นจริง}$$

จาก $L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$$=\sqrt{(2-1)^2+(2-2)^2+(1-2)^2}$$

$$=\sqrt{2}$$

$$=1.414$$

#

3.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม

__ตัวอย่างที่ 2__ จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวทรงกลมโดยมีรัศมี 2 หน่วย จุดเริ่มต้น (0,0,2) จุดสิ้นสุด $(1,1,\sqrt{2})$ โดยวิธีหาค่าจริง

__วิธีทำ__

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta$$

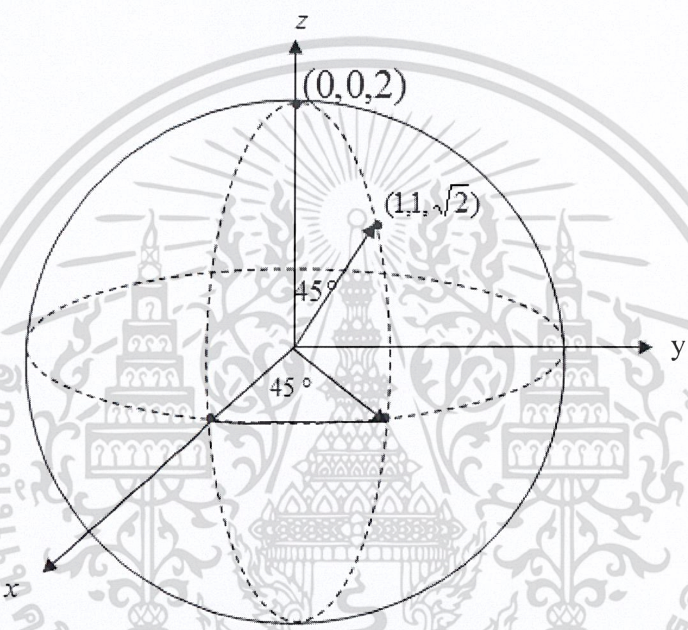
$$y=\rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z=\rho\cos\phi$$

แทนค่า จุดเริ่มต้น	z ;	$2 = 2\cos\phi$	เพราะฉะนั้น	$\phi = 0$
	y ;	$0 = 2\sin 0 \sin\theta$	เพราะฉะนั้น	$\theta = 0$
	x ;	$2 = \sin 0 \cos\theta$	เพราะฉะนั้น	$\theta = 0$
แทนค่า จุดสิ้นสุด	z ;	$\sqrt{2} = 2\cos\phi$	เพราะฉะนั้น	$\phi = \frac{\pi}{4}$
	y ;	$1 = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta$	เพราะฉะนั้น	$\theta = \frac{\pi}{4}$

จุดเริ่มต้น $(0,0,2)$ จะได้ค่า $\phi = 0$ และ $\theta = 0$

จุดสิ้นสุด $(1,1,\sqrt{2})$ จะได้ค่า $\phi = \frac{\pi}{4}$ และ $\theta = \frac{\pi}{4}$



รูปที่ 3.1 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกลม

หาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้น $(0,0,2)$ จุดสิ้นสุด $(1,1,\sqrt{2})$

ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม มีค่าเท่ากับ $2\pi\rho$

เพราะฉะนั้น $2\pi\rho$ มีค่าประมาณ 12.5714

เทียบบรรยัติไตรยางค์

2π เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 2 หน่วยมีค่าเท่ากับ 12.5714

$\frac{\pi}{4}$ จะมีความยาวของเส้นเท่ากับ $\dfrac{12.5714\times\frac{\pi}{4}}{2\pi} = 1.5714$

สรุป ระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวทรงกลมโดยมีรัศมี 2 หน่วยที่จุดเริ่มต้น (0,0,2) และจุดสิ้นสุด $(1,1,\sqrt{2})$ มีค่าจริงเท่ากับ 1.5714 #

__ตัวอย่างที่__ 3 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวทรงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วย ให้จุดเริ่มต้นคือ (0,0,2) และจุดสิ้นสุดคือ $(1,1,\sqrt{2})$ โดยวิธีผลต่างจำกัด

__วิธีทำ__ จากความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงทรงกลมจะได้

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

โดย (0,0,2) ในพิกัดฉากสมนัยกับ $(0,0)$ ในพิกัดเชิงทรงกลม

$(1,1,\sqrt{2})$ ในพิกัดฉากสมนัยกับ $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ ในพิกัดเชิงทรงกลม

จาก $$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(\theta')^2 + F(\theta')(\phi') + G(\phi')^2}\, dt$$

เมื่อ $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2$$

จะได้ $$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -\rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial\phi} = \rho\cos\phi\cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial\phi} = \rho\cos\phi\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi$$

ดังนั้น $$E = (-\rho\sin\phi\sin\theta)^2 + (\rho\sin\phi\cos\theta)^2 + 0$$

$$= \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta$$

$$= \rho^2\sin^2\phi$$

$$F = (-\rho\sin\phi\sin\theta)(\rho\cos\phi\cos\theta) + (\rho\sin\phi\cos\theta)(\rho\cos\phi\sin\theta) + 0$$

$$= (-\rho^2\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta) + (\rho^2\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta)$$

$$= 0$$

$$G=(\rho\cos\phi\cos\theta)^2+(\rho\cos\phi\sin\theta)^2+(-\rho\sin\phi)^2$$
$$=(\rho^2\cos^2\phi\cos^2\theta)+(\rho^2\cos^2\phi\sin^2\theta)+(\rho^2\sin^2\phi)$$
$$=\rho^2\cos^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\sin^2\phi$$
$$=\rho^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)$$
$$=\rho^2$$

นำ E,F,G แทนใน L

จาก $L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\rho^2\sin^2\phi(\theta')^2+0+\rho^2(\phi')^2}\,dt$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\rho^2\sin^2\phi(\theta'dt)^2+\rho^2(\phi'dt)^2}$$

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\rho^2\sin^2\phi(d\theta)^2+\rho^2(d\phi)^2}$$

จาก $\theta=\theta(\phi)$ จะได้

$$L=\rho\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\sin^2\phi(\frac{d\theta}{d\phi})^2+1(d\phi)^2}$$

$$J[\theta(\phi)]=\rho\int_{\phi_a}^{\phi_b}\sqrt{\sin^2\phi(\theta')^2+1}d\phi$$

ให้ $P=1+\sin^2\phi(\theta')^2$

โดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อแบ่ง ϕ ออกเป็น 3 ช่วงเท่าๆ กันจะได้

จาก $\theta'_k=\theta'(\phi_k)=\dfrac{\theta_{k+1}-\theta_k}{\Delta\phi}$

$$\Delta\phi=\frac{\frac{\pi}{4}-0}{3}=\frac{\pi}{12}\approx\ 0.2617$$

จะได้ $\theta_0=\theta(0)=0,\theta_1=\theta\left(\frac{\pi}{12}\right),\theta_2=\theta\left(\frac{\pi}{6}\right),\theta_3=\theta\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.785$

$$\theta'(0)=\frac{\theta_1-0}{0.2617}\ ;\quad \theta'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\theta_2-\theta_1}{0.2617}\ ;\quad \theta'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\theta_3-\theta_2}{0.2617}=\frac{0.785-\theta_2}{0.2617}$$

$$P(\theta_1,\theta_2)=1+\sin^2(0)(\theta'(0))^2+1+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\theta'\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2+1+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\theta'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$$
$$=3+(0.0669)\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{0.2617}\right)^2+(0.25)\left(\frac{0.785-\theta_2}{0.2617}\right)^2$$

$$P(\theta_1,\theta_2) = 3 + (0.0669)\left(\frac{\theta_2^2 - 2\theta_2\theta_1 + \theta_1^2}{0.0684}\right) + (0.25)\left(\frac{0.6162 - 1.57\theta_2 + \theta_2^2}{0.0684}\right)$$

$$= 3 + (0.9780)(\theta_2{}^2 - 2\theta_2\theta_1 + \theta_1{}^2) + (3.6549)(0.6162 - 1.57\theta_2 + \theta_2{}^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = -2(0.9781)\theta_2 + 2(0.9781)\theta_1 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = 2(0.9781)\theta_2 - 2(0.9781)\theta_1 - (1.57)(3.6549) + 2(3.6549)\theta_2 = 0 \qquad (3.2)$$

แทน (3.1) ใน (3.2) จะได้

$$2(0.9781)\theta_2 - 2(0.9781)\theta_2 - (1.57)(3.6549) = -2(3.6549)\theta_2$$

จะได้ $\theta_2 = 0.7850$ ซึ่งเท่ากับ θ_1

โดยการแทนปริพันธ์ด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b \theta(\phi) \cong [\theta(a) + \theta(\phi_1) + \theta(\phi_2) + \ldots + \theta(\phi_{n-1})]\Delta\phi$$

$P = P(\theta_1,\theta_2) \times \Delta\phi$

$P = 3(0.2617)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.7851

เพราะฉะนั้น $\sqrt{P} = \sqrt{0.7851} = 0.8861$

$L = \rho \times \sqrt{P}$

จะได้ 2×0.8861

$L = 1.7721$

<u>**สรุป**</u> ค่าจริง มีค่า 1.5714

ผลต่างจำกัด มีค่า 1.7721 #

3.3 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกระบอก

วิธีหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกระบอก จะแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

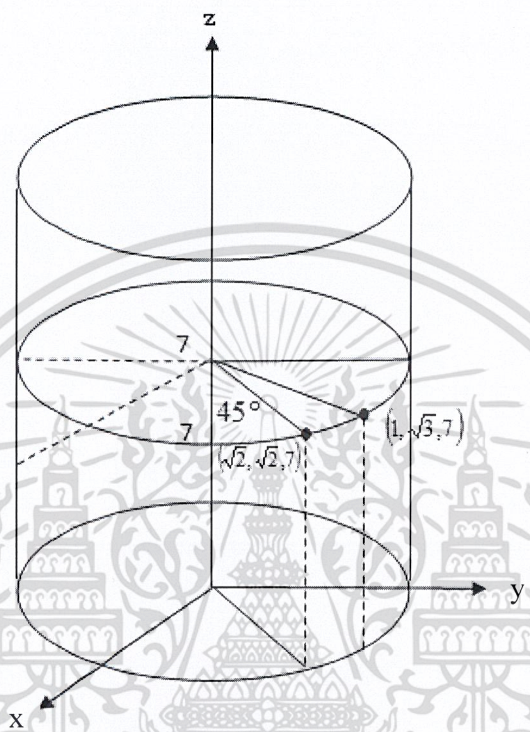
1. ค่า x, y ไม่เท่ากัน แต่ z เท่ากัน
2. ค่า z ไม่เท่ากัน แต่ x, y เท่ากัน
3. ค่า x, y, z ไม่เท่ากัน

สมการทรงกระบอก $x^2 + y^2 = \rho^2$

<u>**กรณีที่ 1**</u> ค่า x, y ไม่เท่ากัน แต่ z เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดเริ่มต้นคือ $\left(1,\sqrt{3},7\right)$ กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},7\right)$ โดยมีรัศมี $\rho = 2$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะเห็นว่า z มีค่าเท่ากัน จึงพิจารณาเป็นรูปวงกลม



รูปที่ 3.2 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y ไม่เท่ากัน แต่ z เท่ากัน

จากความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงทรงกระบอกจะได้

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$z = z$$

จุดเริ่มต้น $\left(1,\sqrt{3},7\right)$

พิจารณาที่ $y = \rho\sin\theta$

$$\sqrt{3} = 2\sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

จุดสิ้นสุด $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},7\right)$

พิจารณาที่ $y = \rho\sin\theta$

$$\sqrt{2} = 2\sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

โดย $\left(1,\sqrt{3},7\right)$ ในพิกัดฉากสมนัยกับ $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ ในพิกัดเชิงทรงกระบอก

$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},7\right)$ ในพิกัดฉากสมนัยกับ $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ ในพิกัดเชิงทรงกระบอก

หาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้นคือ $\left(1,\sqrt{3},7\right)$ กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},7\right)$

ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม มีค่าเท่ากับ $2\pi\rho$

เพราะฉะนั้น $2\pi\rho$ มีค่าประมาณ 12.5714

เทียบบรรยัติไตรยางค์

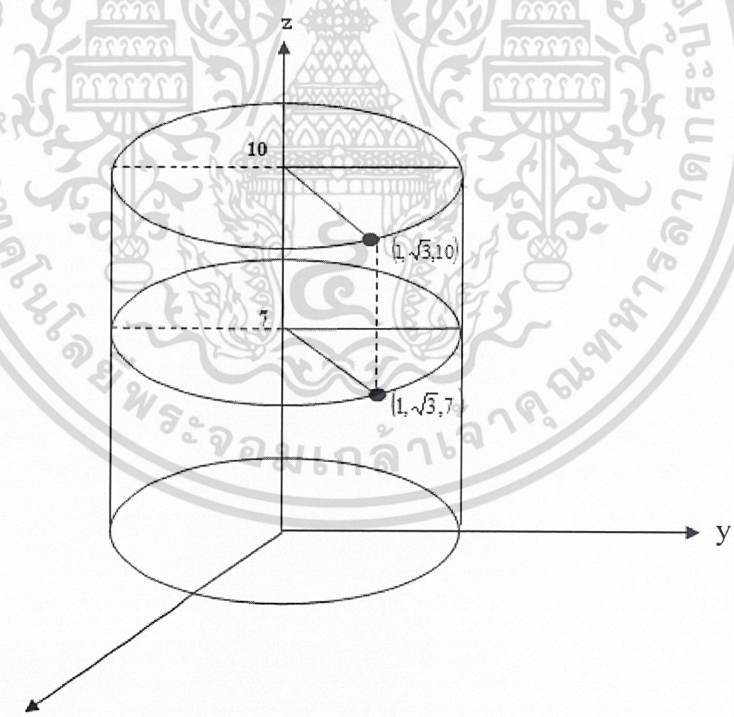
2π เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 2 หน่วยมีค่าเท่ากับ 12.5714

$\dfrac{\pi}{12}$ จะมีความยาวของเส้นเท่ากับ $\dfrac{12.5714\times\dfrac{\pi}{12}}{2\pi}=0.5238$ #

<u>กรณีที่ 2</u> ค่า z ไม่เท่ากันแต่ x, y เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดเริ่มต้นคือ $\left(1,\sqrt{3},7\right)$ กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(1,\sqrt{3},10\right)$ โดยมีรัศมี $\rho=2$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะเห็นว่า x, y มีค่าเท่ากัน จึงพิจารณาเป็นเส้นตรง



รูปที่ 3.3แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y เท่ากัน แต่ z ไม่เท่ากัน

เพราะฉะนั้นระยะทางจากจุดเริ่มต้น $\left(1,\sqrt{3},7\right)$ ถึงจุดสิ้นสุด $\left(1,\sqrt{3},10\right)$ คือ $10-7=3$ #

<u>กรณีที่3</u> ค่า x, y, z ไม่เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดเริ่มต้น $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6\right)$ กับจุดสิ้นสุด $(0,2,3)$ โดยมีรัศมี $\rho = 2$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะเห็นว่า x, y, z มีค่าไม่เท่ากัน จึงพิจารณาเป็นฮีลิกต์

จุดเริ่มต้น $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6\right)$

พิจารณาที่ $y = \rho \sin\theta$

$$\sqrt{2} = 2\sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

จุดสิ้นสุด $(0,2,3)$

พิจารณาที่ $y = \rho \sin\theta$

$$2 = 2\sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

สมการฮีลิกต์ $L = \sqrt{\rho^2 + b^2}\left[\theta_2 - \theta_1\right] \quad b = z_2 - z_1$

แทนค่า $L = \sqrt{2^2 + (3)^2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

$$L = \sqrt{13}[0.7857]$$

$$L = 2.8329$$

#

<u>จากโจทย์ข้อเดียวกัน ใช้วิธีผลต่างจำกัด</u>

$$x = \rho\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\theta$$

$$z = (z_2 - z_1)\theta$$

จาก $$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(\theta')^2 + F(\theta')(\phi') + G(\phi')^2}\, dt$$

เมื่อ $$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2$$

จะได้ $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin\theta$ $\qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_2 - z_1 \qquad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

ดังนั้น $E = (-\rho \sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$$= \rho^2 \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta + (z_2 - z_1)^2$$

$$= \rho^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$F = 0$$

$$G = 0$$

นำ E, F, G แทนใน L

จาก $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\rho^2 + (z_2 - z_1)^2 (\theta')^2}\, dt$

$$L = \int_{\phi a}^{\phi b} \sqrt{13(\theta')^2}\, d\phi$$

โดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อแบ่ง ϕ ออกเป็น 2 ช่วงเท่าๆ กันจะได้

$$\theta'_k = \theta'(\phi_k) = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta\phi}$$

$$\Delta\phi = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\pi}{12} = 0.2617$$

$S = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 6)$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4} = 0.7857$

$T = (0,2,3)$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2} = 1.5714$

โดยที่ $\theta_0 = \theta\left(\frac{\pi}{4}\right), \theta_1 = \theta\left(\frac{\pi}{3}\right), \theta_2 = \theta\left(\frac{15\pi}{36}\right), \theta_3 = \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\theta'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\theta_1 - 0.7857}{0.2617}; \theta'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{0.2617}; \theta'\left(\frac{15\pi}{36}\right) = \frac{1.5714 - \theta_2}{0.2617}$$

$$P(\theta_1,\theta_2) = 13(\theta')^2$$

$$= 13\times\left(\left(\frac{\theta_1 - 0.7857}{0.2617}\right)^2 + \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{0.2617}\right)^2 + \left(\frac{1.5714 - \theta_2}{0.2617}\right)^2\right)$$

$$= 13\times\left(\left(\frac{\theta_1^2 - 1.5714\theta_1 + 0.6173}{0.0684}\right) + \left(\frac{\theta^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^2}{0.0684}\right) + \left(\frac{2.4692 - 3.1428\theta_2 + \theta_2^2}{0.0684}\right)\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_1} = \frac{2\theta_1 - 1.5714}{0.0684} + \frac{2\theta_2 - 2\theta_1}{0.0684} = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_2} = \frac{2\theta_2 - 2\theta_1}{0.0684} + \frac{2\theta_2 - 3.1428}{0.0684} = 0 \qquad (3.4)$$

จาก (3.3) ; $4\theta_1 - 2\theta_2 - 1.5714 = 0$ (3.5)

จาก (3.4) ; $4\theta_2 - 2\theta_1 - 3.1428 = 0$ (3.6)

$(3.5)\times(3.6)$ $8\theta_1 - 4\theta_2 - 3.1428 = 0$

จะได้ $4\theta_2 = 8\theta_1 - 3.1428$ (3.7)

นำ (3.7) แทนใน (3.6) ; $(8\theta_1 - 3.1428) - 2\theta_1 - 3.1428 = 0$

$$6\theta_1 - 6.2856 = 0$$

$$\theta_1 = 1.0476$$

นำ θ_1 แทนใน (3.5) จะได้

$$4.1904 - 2\theta_2 - 1.5714 = 0$$

$$2.619 - 2\theta_2 = 0$$

$$\theta_2 = 1.3095$$

นำ θ_1, θ_2 แทนใน $P(\theta_1,\theta_2)$ จะได้

$$P(\theta_1,\theta_2) = 13\times\left(\left(\frac{1.0476 - 0.7857}{0.2617}\right)^2 + \left(\frac{1.0395 - 1.0476}{0.2617}\right)^2 + \left(\frac{1.5714 - 1.3095}{0.2617}\right)^2\right)$$

$$= 13\times((1.0007)^2 + (1.0007)^2 + (1.0007)^2)$$

$$P(\theta_1,\theta_2) = 39$$

โดยการแทนปริพันธ์ด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

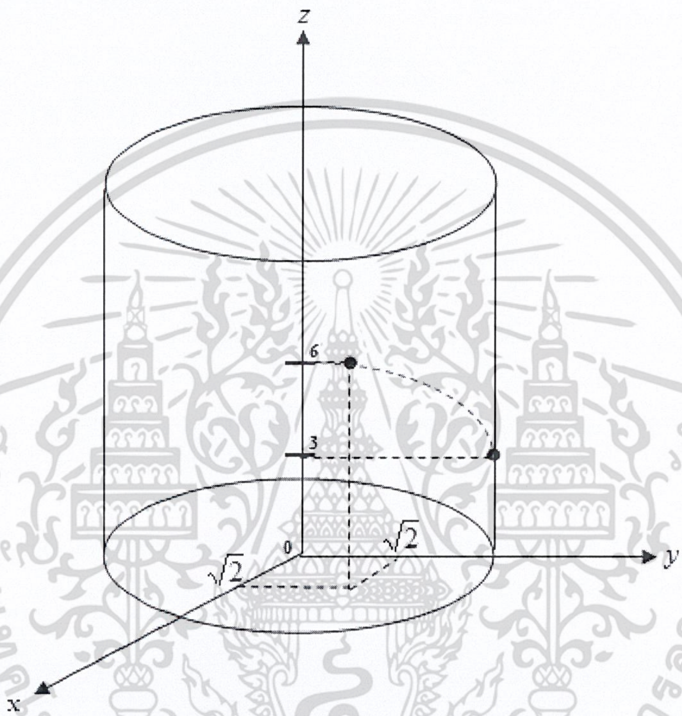
$$\int_a^b \theta(\phi) \cong [\theta(a) + \theta(\phi_1) + \theta(\phi_2) + \ldots + \theta(\phi_{n-1})]\Delta\phi$$

$$P = P(\theta_1, \theta_2) \times \Delta\phi$$

$$= 39 \times 0.2617$$

$$= 10.2063$$

$$L = \sqrt{P} = \sqrt{10.2063} = 3.1947$$



รูปที่ 3.4 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกระบอกที่ค่า x, y, z ไม่เท่ากัน

<u>**สรุป**</u> ค่าจริง มีค่า 2.8329

ผลต่างจำกัด มีค่า 3.1947 #

3.4 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกรวย

วิธีหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกรวย จะแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

1. ค่า z เท่ากัน แต่ x, y, ϕ ไม่เท่ากัน
2. ค่า ϕ เท่า แต่ x, y, z ไม่เท่ากัน
3. ค่า x, y, z, ϕ ไม่เท่ากัน

สมการทรงกรวย $\sqrt{x^2 + y^2} = z$

$$x = \theta \cos \phi$$

$$y = \theta \sin \phi$$

$$z = \theta$$

<u>กรณีที่1</u> ค่า z เท่ากัน แต่ x, y, ϕ ไม่เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้น คือ $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(2,2\sqrt{3},4\right)$ บนทรงกรวย 45°

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะเห็นว่าค่า z เท่ากัน แต่ x, y, ϕ ไม่เท่ากัน

จุดเริ่มต้น $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$

พิจารณาที่ $y = \theta \sin \phi$

$2 = 4\sin\phi$

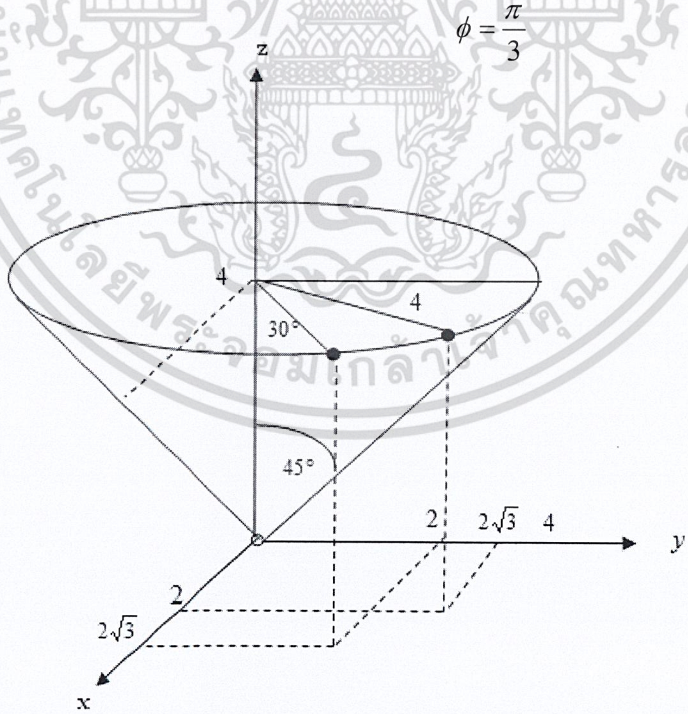
$\phi = \dfrac{\pi}{6}$

จุดสิ้นสุด $\left(2,2\sqrt{3},4\right)$

พิจารณาที่ $y = \theta \sin \phi$

$2\sqrt{3} = 4\sin\phi$

$\phi = \dfrac{\pi}{3}$



รูปที่ 3.5 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกรวยที่มีค่า z เท่ากัน แต่ x, y, ϕ ไม่เท่ากัน

หาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดเริ่มต้นคือ $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$และจุดสิ้นสุดคือ $\left(2,2\sqrt{3},4\right)$ บนทรงกรวย $45°$
ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม มีค่าเท่ากับ $2\pi\rho$
เพราะฉะนั้น $2\pi\rho$ มีค่าประมาณ 25.1429
เทียบ บรรยัติไตรยางค์

2π เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 4 หน่วยมีค่าเท่ากับ 25.1429

$\frac{\pi}{6}$ จะมีความยาวของเส้นเท่ากับ $\dfrac{25.1429\times\frac{\pi}{6}}{2\pi} = 2.0952$

เพราะฉะนั้นระยะทางสั้นที่สุดของ จุดเริ่มต้นคือ $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$และจุดสิ้นสุดคือ $\left(2,2\sqrt{3},4\right)$ บนกรวย $45°$ เท่ากับ 2.0952

#

ตัวอย่างที่ 8 จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้น คือ $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(2,2\sqrt{3},4\right)$ บนทรงกรวย $45°$ โดนวิธีผลต่างจำกัด

สมการคือ $\sqrt{x^2+y^2} = z$

สมการอิงพารามิเตอร์

$$x = \theta\cos\phi$$
$$y = \theta\sin\phi$$
$$z = \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \cos\phi \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = \sin\phi \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial\theta} = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial\phi} = -\theta\sin\phi \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial\phi} = \theta\cos\phi \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial\phi} = 0$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$
$$= \cos^2\phi + \sin^2\phi + 1$$
$$= 2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)$$
$$= (-\theta\cos\phi\sin\phi) + (\theta\sin\phi\cos\phi) + 0$$
$$= 0$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2$$
$$=\theta^2\sin^2\phi+\theta^2\cos^2\phi+0$$
$$=\theta^2$$

จาก $$L=\int_{\phi_a}^{\phi_b}\sqrt{2(\theta')^2+\theta^2}\,d\phi$$

ให้ $P=2(\theta')^2+\theta^2$

$$\theta'_k=\theta'(\phi_k)=\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{\Delta\phi}$$

$$\Delta\phi=\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{3}=\frac{\pi}{18}=0.1746$$

จะได้ $$\theta'_0=\theta'(\frac{\pi}{6}),\theta'_1=\theta'(\frac{2\pi}{9}),\theta'_2=\theta'(\frac{5\pi}{18}),\theta'_3=\theta'(\frac{\pi}{3})$$

$$\theta'(30°)=\frac{\theta_1-0.5238}{0.1746}$$
$$\theta'(40°)=\frac{\theta_2-\theta_1}{0.1746}$$
$$\theta'(50°)=\frac{\theta_3-\theta_2}{0.1746}$$
$$=\frac{1.0476-\theta_2}{0.1746}$$

$$P(\theta_1,\theta_2)=2\times\left(\left(\frac{\theta_1-0.5238}{0.1746}\right)^2+\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{0.1746}\right)^2+\left(\frac{1.0476-\theta_2}{0.1746}\right)^2\right)+\theta^2$$

$$P(\theta_1,\theta_2)=2\times\left(\left(\frac{\theta_1^2-1.0476\theta_1+0.2744}{0.0305}\right)+\left(\frac{\theta_2^2-2\theta_2\theta_1+\theta_1^2}{0.0305}\right)+\left(\frac{1.0975-2.0952\theta_2+\theta_2^2}{0.0305}\right)\right)$$
$$+\theta^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta_1}=2\times\left(\left(\frac{2\theta_1-1.0476}{0.0305}\right)+\left(\frac{-2\theta_2+2\theta_1}{0.0305}\right)+0\right)=0 \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta_2}=2\times\left(\left(\frac{2\theta_2-2\theta_1}{0.0305}\right)+\left(\frac{2\theta_2-2.0952}{0.0305}\right)\right)=0 \qquad (3.9)$$

จาก (3.8) ; $4\theta_1-2.0952-4\theta_2+4\theta_1=0$

จะได้ $$8\theta_1-4\theta_2=2.0952 \qquad (3.10)$$

$$4\theta_2-4\theta_1+4\theta_2-4.1904=0$$

จะได้ $$8\theta_2-4\theta_1=4.1904 \qquad (3.11)$$

นำ 2 คูณสมการที่ (3.10) จะได้

$$16\theta_1 - 8\theta_2 = 4.1904 \qquad (3.12)$$

นำสมการที่ (3.11) + (3.12) จะได้ $16\theta_1 - 4\theta_2 = 8.3808$

$$12\theta_1 = 8.3808$$

$$\theta_1 = 0.6984$$

นำ θ_1 แทนในสมการที่ (3.10)

$$8(0.6984) - 4\theta_2 = 2.0952$$

$$5.5872 - 4\theta_2 = 2.0952$$

$$-4\theta_2 = -3.4920$$

$$\theta_2 = 0.873$$

โดยการแทนปริพันธ์ด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b \theta(\phi) \cong [\theta(a) + \theta(\phi_1) + \theta(\phi_2) + \ldots + \theta(\phi_{n-1})]\Delta\phi$$

$$P = P(\theta_1, \theta_2) \times \Delta\phi$$

$$= [2 \times (1+1+1) + 16] \times 0.1746$$

$$= 3.8412$$

$$L = \sqrt{P} = 1.9599$$

__สรุป__ ค่าจริง มีค่า 2.0952

ผลต่างจำกัด มีค่า 1.9599 #

__กรณีที่ 2__ ค่า ϕ เท่าแต่ x, y, z ไม่เท่ากัน

__ตัวอย่างที่ 9__ จงหาระยะทางจากจุดเริ่มต้นคือ $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$ กับจุดสิ้นสุดคือ $\left(3\sqrt{3},3,6\right)$ บนทรงกรวย 45°

จุดเริ่มต้น $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$

พิจารณาที่ $y = \theta\sin\phi$

$$2 = 4\sin\phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

จุดสิ้นสุด $\left(3\sqrt{3},3,6\right)$

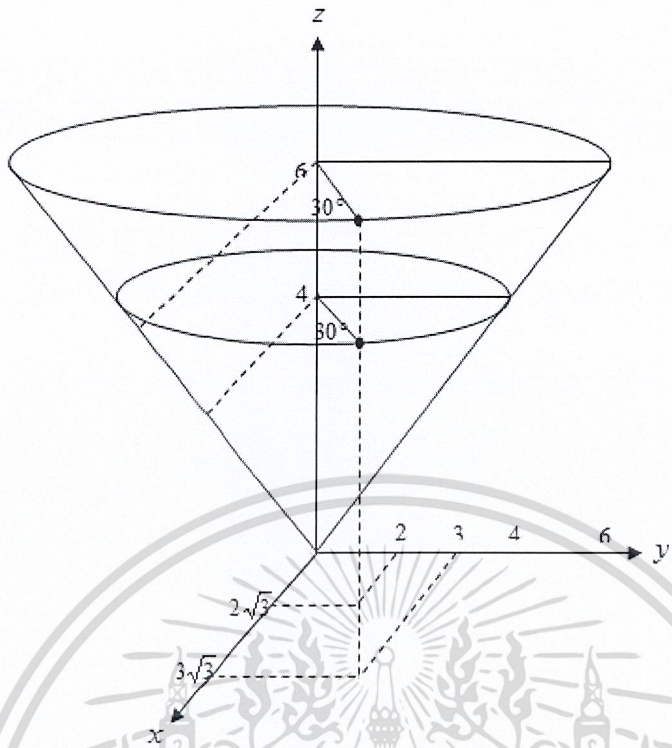
พิจารณาที่ $y = \theta\sin\phi$

$$3 = 6\sin\phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

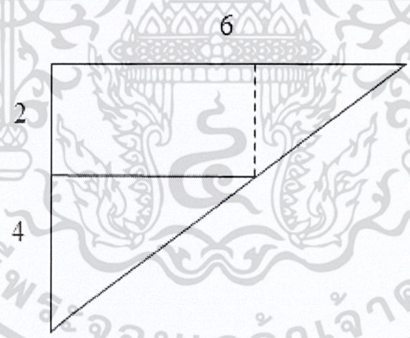
โดย $\left(2\sqrt{3},2,4\right)$ ในพิกัดฉากสมนัยกับ $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$

$\left(3\sqrt{3},3,6\right)$ ในพิกัดฉากสมนัยกับ $\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$



รูปที่ 3.6 แสดงพิกัดและระยะทางบนทรงกรวยที่มีค่า ϕ เท่าแต่ x, y, z ไม่เท่ากัน

หมุนกรวยทิศทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 3.7 แสดงการหมุนกรวยในทิศทวนเข็มนาฬิกา

จากทบ.พีทากอรัส

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$2^2 + 2^2 = z^2$$

$$z = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น ระยะทางที่สั้นที่สุดของจุด $(2\sqrt{3},2,4)$ กับจุด $(2\sqrt{5},4,6)$ มีค่าเท่ากับ 2.8284 #

3.5 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงห่วงยาง

ในกรณีศึกษา นี้จะพิจารณาที่ z มีค่าเท่ากัน

รูปแบบสมการ $\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$

$$x=(R+r\cos\phi)\cos\theta=R\cos\theta+r\cos\phi\cos\theta$$

$$y=(R+r\cos\phi)\sin\theta=R\sin\theta+r\cos\phi\sin\theta$$

$$z=r\sin\phi$$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวทรงห่วงยางที่มีรัศมีวงกลมใหญ่ 5 หน่วย รัศมีวงกลมเล็ก 3 หน่วยให้จุดเริ่มต้นคือ (0,8,0) และจุดสิ้นสุดคือ (8,0,0) โดยวิธี การหาค่าจริง

<u>วิธีทำ</u>

ความยาวเส้นรอบวงของวงกลมวงใหญ่ มีค่าเท่ากับ $2\pi\rho$

เพราะฉะนั้น $2\pi\rho$ มีค่าประมาณ 50.2857

เทียบ บรรยัติไตรยางค์

2π เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี 8 หน่วยมีค่าเท่ากับ 50.2857

$\frac{\pi}{2}$ จะมีความยาวของเส้นเท่ากับ $\dfrac{50.2857\times\frac{\pi}{2}}{2\pi}=12.5714$ #

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวทรงห่วงยางที่มีรัศมีวงกลมใหญ่ 5 หน่วย รัศมีวงกลมเล็ก 3 หน่วยให้จุดเริ่มต้นคือ (0,8,0) และจุดสิ้นสุดคือ (8,0,0) โดยวิธีผลต่างจำกัด

<u>วิธีทำ</u> รูปแบบสมการ $\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$

จุดเริ่มต้น $(0,8,0)$

พิจารณาที่ $z=r\sin\phi$ พิจารณาที่ $y=(R+r\cos\phi)\sin\theta$

$0=3\sin\phi$ $8=[5+3\cos(0)]\sin\theta$

$\phi=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$

จุดสิ้นสุด $(8,0,0)$

พิจารณาที่ $z=r\sin\phi$ พิจารณาที่ $y=(R+r\cos\phi)\sin\theta$

$0=3\sin\phi$ $0=[5+3\cos(0)]\sin\theta$

$\phi=0$ $\theta=0$

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-(R+r\cos\phi)\sin\theta=-R\sin\theta-r\cos\phi\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial\theta}=(R+r\cos\phi)\cos\theta=R\cos\theta+r\cos\phi\cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=-r\sin\phi\cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial\phi}=r\cos\phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial\phi}=-r\sin\phi\sin\theta$$

นำค่า $\frac{\partial x}{\partial\theta},\frac{\partial y}{\partial\theta},\frac{\partial z}{\partial\theta},\frac{\partial x}{\partial\phi},\frac{\partial y}{\partial\phi},\frac{\partial z}{\partial\phi}$ แทนลงใน E,F,G

$$\begin{aligned}E&=[(-R\sin\theta)+(-r\cos\phi\sin\theta)]^2=R^2\sin^2\theta+2Rr\cos\phi\sin^2\theta+r^2\cos^2\phi\sin^2\theta\\&\quad+R^2\cos^2\theta+Rr\cos\phi\cos^2\theta+r^2\cos^2\phi\cos^2\theta+0\\&=R^2+2Rr\cos\phi+r^2\cos^2\phi\\&=(R+r\cos\phi)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F&=Rr\sin\phi\sin\theta\cos\theta+r^2\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\theta-Rr\sin\phi\sin\theta\cos\theta\\&\quad-r^2\cos\phi\sin\theta\sin\phi\cos\theta\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G&=r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+r^2\sin^2\phi\sin^2\theta+r^2\cos^2\phi\\&=r^2\end{aligned}$$

นำค่า E,F,G แทนค่าลงใน L

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(R+r\cos\phi)^2(\theta')^2+r^2(\phi')^2}\,dt$$

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(R+r\cos\phi)^2(\theta' dt)^2+r^2(\phi' dt)^2}$$

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(R+r\cos\phi)^2(d\theta)^2+r^2(d\phi)^2}$$

จาก $\theta=\theta(\phi)$

จะได้

$$J[\theta(\phi)]=\int_{\phi_a}^{\phi_b}\sqrt{(R+r\cos\phi)^2(\theta')^2+r^2}\,d\phi$$

ให้ $P=(R+r\cos\phi)^2(\theta')^2+r^2$

$$\theta_k'=\theta'(\phi_k)=\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{\Delta\phi}$$

$$\Delta\phi=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{3}=\frac{\pi}{6}=0.5238$$

$$\theta_0=\theta(0)=0,\theta_1=\theta\left(\frac{\pi}{6}\right),\theta_2=\theta\left(\frac{\pi}{3}\right),\theta_3=\theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.5714$$

$$P(\theta_1,\theta_2)=64\times\left[\left(\frac{\theta_1-0}{0.5238}\right)^2+\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{0.5238}\right)^2+\left(\frac{1.5714-\theta_2}{0.5238}\right)^2\right]+9$$

$$=64\times\left[\frac{\theta_1{}^2}{0.2744}+\frac{\theta_2{}^2-2\theta_2\theta_1+\theta_1{}^2}{0.2744}+\frac{2.4693-3.1428\theta_2+\theta_2{}^2}{0.2744}\right]+9$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_1}=64\times\left[\frac{2\theta_1}{0.2744}+\frac{-2\theta_2+2\theta_1}{0.2744}\right]=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_1}=4\theta_1-2\theta_2=0$$

$$4\theta_1=2\theta_2 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_2}=64\times\left[\frac{2\theta_2-2\theta_1}{0.2744}+\frac{-3.1428+2\theta_2}{0.2744}\right]=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta_2}=4\theta_2-2\theta_1=3.1428 \tag{3.14}$$

$(3.13)\times 2$; $\quad 8\theta_1=4\theta_2$ (3.15)

นำ (3.15) แทน (3.14); $\quad 6\theta_1=3.1428$

$$\theta_1=0.5238=\frac{\pi}{6}$$

นำ θ_1 แทน(3.13) ; $\quad \theta_2=1.0476=\frac{\pi}{3}$

นำ θ_1,θ_2 แทนใน $P(\theta_1,\theta_2)$

$$P(\theta_1,\theta_2)=64\times[3]+9=201$$

โดยการแทนปริพันธ์ด้วยสูตรผลบวกสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$\int_a^b \theta(\phi) \cong [\theta(a) + \theta(\phi_1) + \theta(\phi_2) + \ldots + \theta(\phi_{n-1})]\Delta\phi$$

$$P = P(\theta_1, \theta_2) \times \Delta\phi$$

$$P = 201 \times 0.5238 = 105.2838$$

$$L = \sqrt{P} = \sqrt{105.28838} = 10.2608$$

__สรุป__ ผลต่างจำกัด มีค่า 10.2608

ค่าจริง มีค่า 12.5714 #

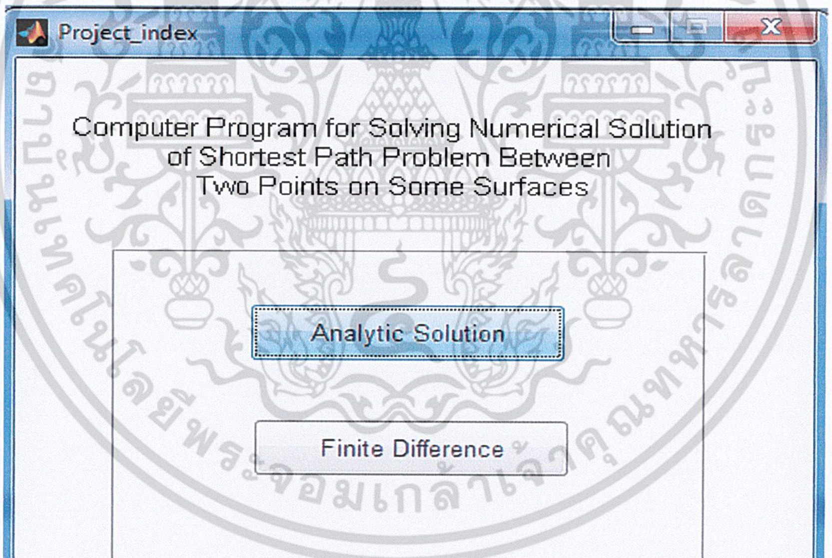
บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

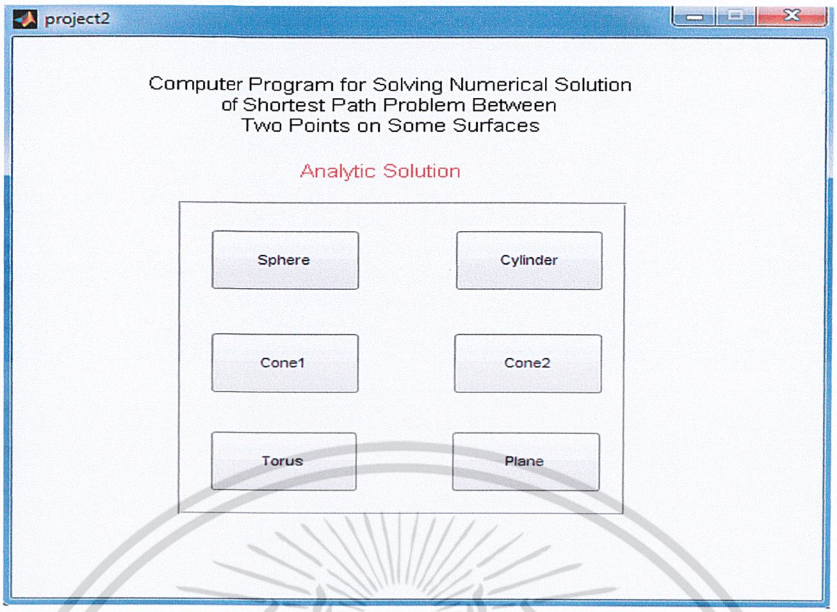
ในบทนี้จะกล่าวถึงผลของการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว ซึ่งได้พัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงวิธีการใช้โปรแกรมเพื่อหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว

4.1 วิธีใช้โปรแกรมหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยวิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว ได้แบ่งการคำนวณเป็น 2 วิธี คือ วิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) และวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference) ดังรูปที่ 4.1 เมื่อเลือกการคำนวณด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จะแสดงหน้าต่างโปรแกรมดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.1 หน้าต่างโปรแกรมเริ่มต้น (1)



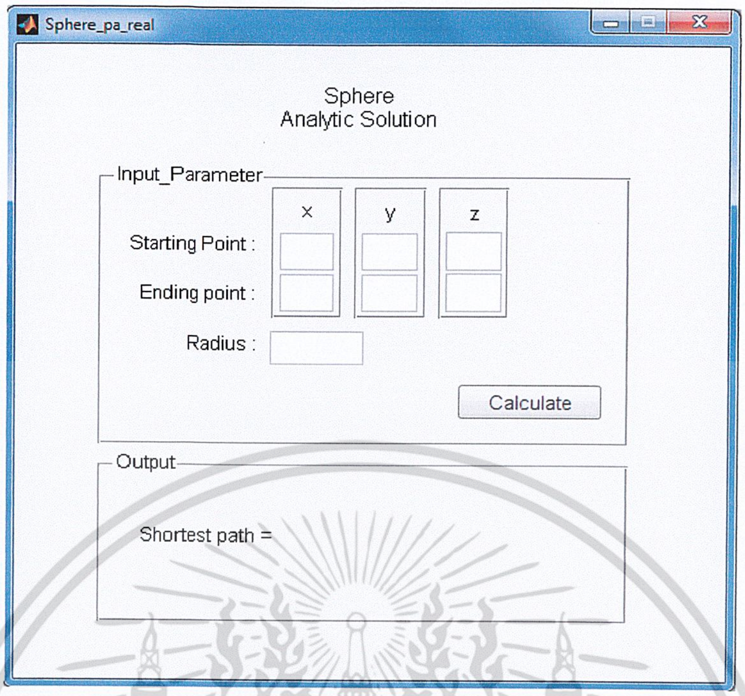
รูปที่ 4.2 หน้าต่างการคำนวณ โดยวิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.2 ผู้ใช้งานสามารถเลือกว่าจะใช้วิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์หาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวต่างๆ ดังนี้

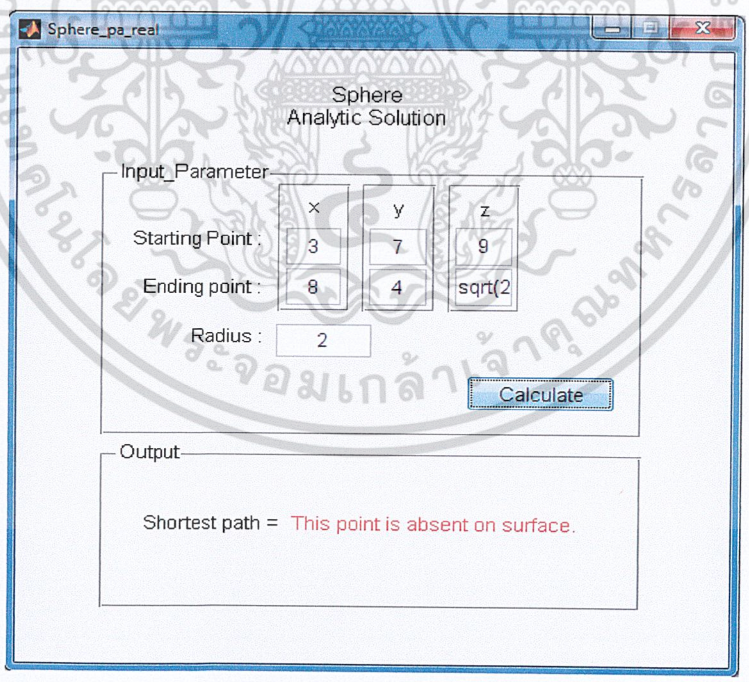
- ทรงกลม
- ทรงกระบอก
- ทรงกรวย 1 ชิ้น
- ทรงกรวย 2 ชิ้น
- ทรงห่วงยาง
- ระนาบ

4.1.1 ทรงกลม

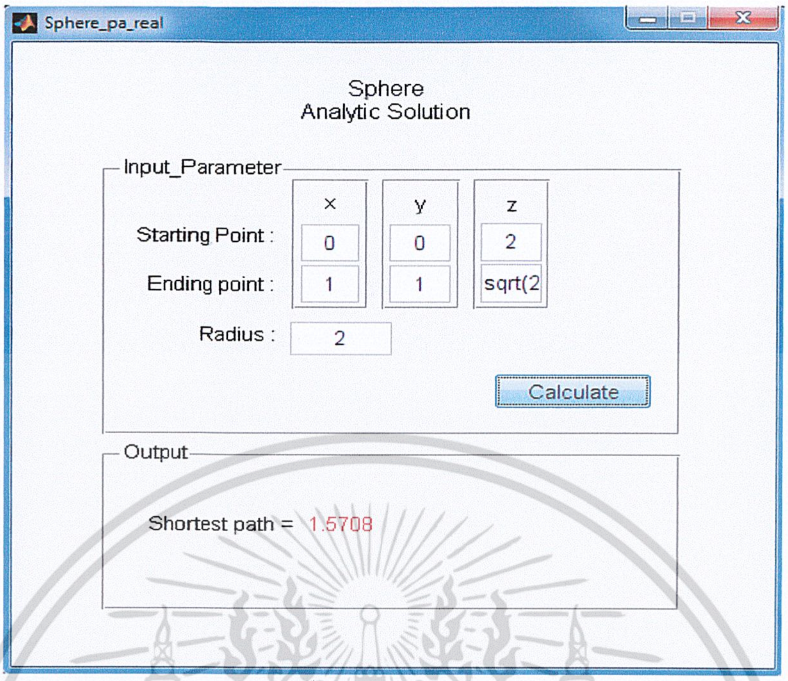
เมื่อเลือกปุ่มการคำนวณของรูปทรงกลมจะได้หน้าต่างโปรแกรมดังรูปที่ 4.3 ซึ่งประกอบด้วยค่าของจุดเริ่มต้น (Starting Point) จุดสิ้นสุด (Ending Point) และรัศมี (Radius) โดยค่าของจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดต้องเป็นจุดที่อยู่บนพื้นผิวของทรงกลม เมื่อผู้ใช้งานใส่ค่าเหล่านี้แล้วก็สามารถกดปุ่ม Calculate เพื่อทำการคำนวณ หากค่าของจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกลมโปรแกรมจะแสดงผลดังรูปที่ 4.4 แต่ถ้าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่บนพื้นผิวทรงกลมแล้วผลการคำนวณที่ได้ก็คือค่าระยะทางที่สั้นที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.3 หน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกลม ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



รูปที่ 4.4 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกลม ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

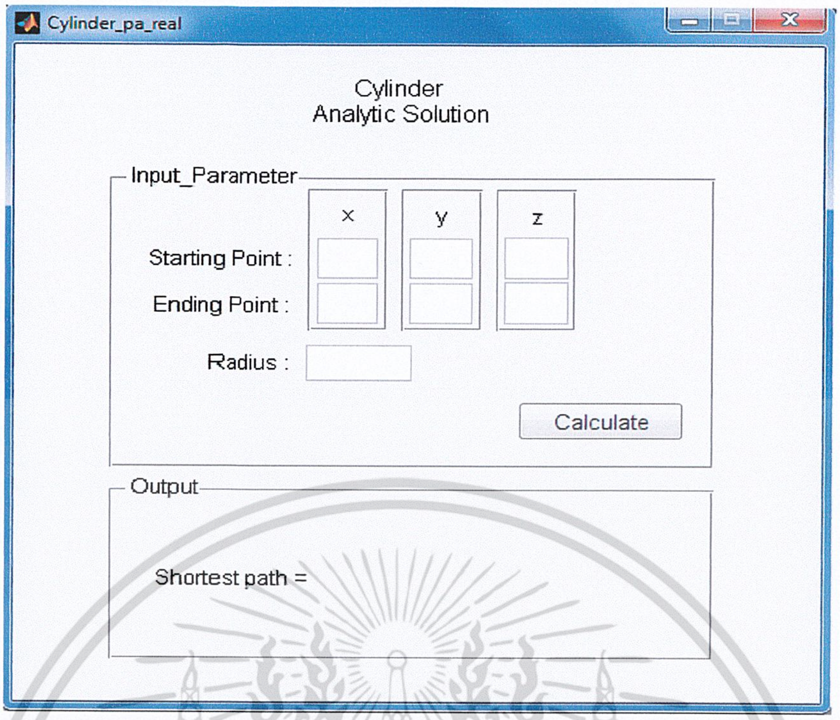


รูปที่ 4.5 ผลการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดของรูปทรงกลมด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

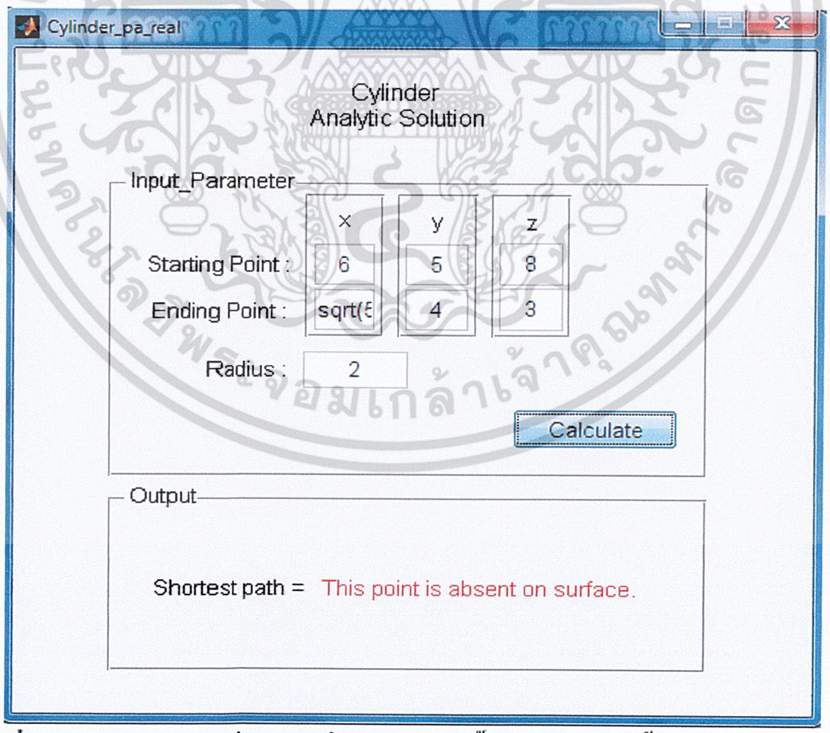
จากรูปที่ 4.5 เมื่อผู้ใช้งานใส่ค่าจุดเริ่มต้น คือ จุด (0,0,2) จุดสิ้นสุด คือ จุด $(1,1,\sqrt{2})$ และรัศมีของทรงกลมมีค่าเท่ากับ 2 ซึ่งได้ค่าระยะทางที่สั้นที่สุดเป็น 1.5708

4.1.2 ทรงกระบอก

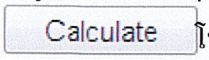
เมื่อเลือกปุ่มการคำนวณของรูปทรงกระบอกจะได้หน้าต่างโปรแกรมดังรูปที่ 4.6 ซึ่งประกอบด้วยค่าของจุดเริ่มต้น จุดสิ้นสุด และรัศมี ซึ่งค่าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ต้องอยู่บนพื้นผิวของทรงกระบอก



รูปที่ 4.6 หน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกระบอกด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

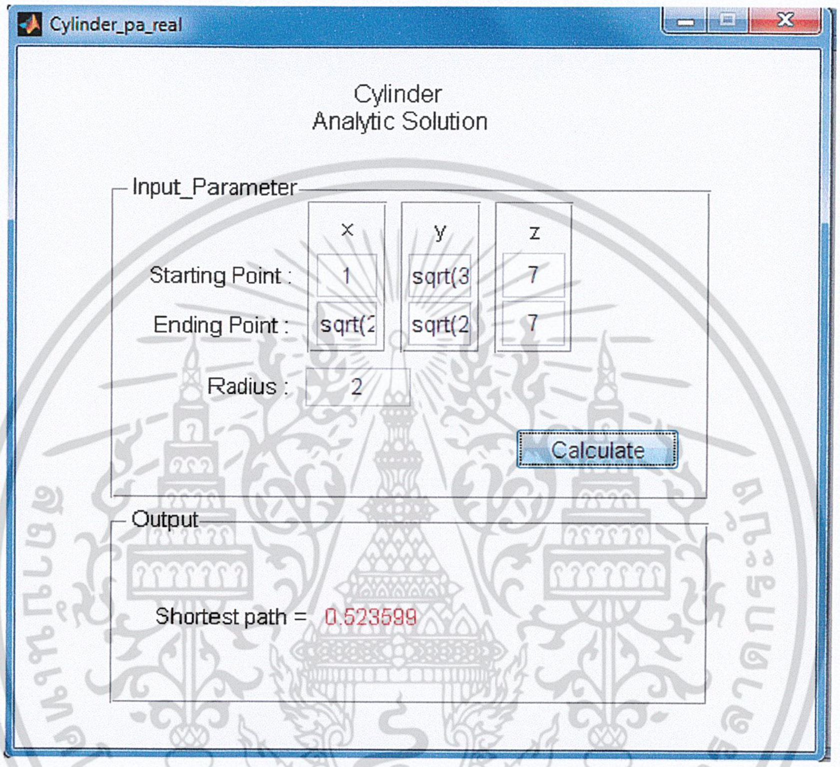


รูปที่ 4.7 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอกด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.7 เมื่อผู้ใช้งานใส่ค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดที่ไม่เป็นจุดที่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอก แล้วกดปุ่ม 

โปรแกรมจะไม่แสดงผลการคำนวณและจะขึ้นข้อความบอกว่าจุดสองจุดนี้ไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอก

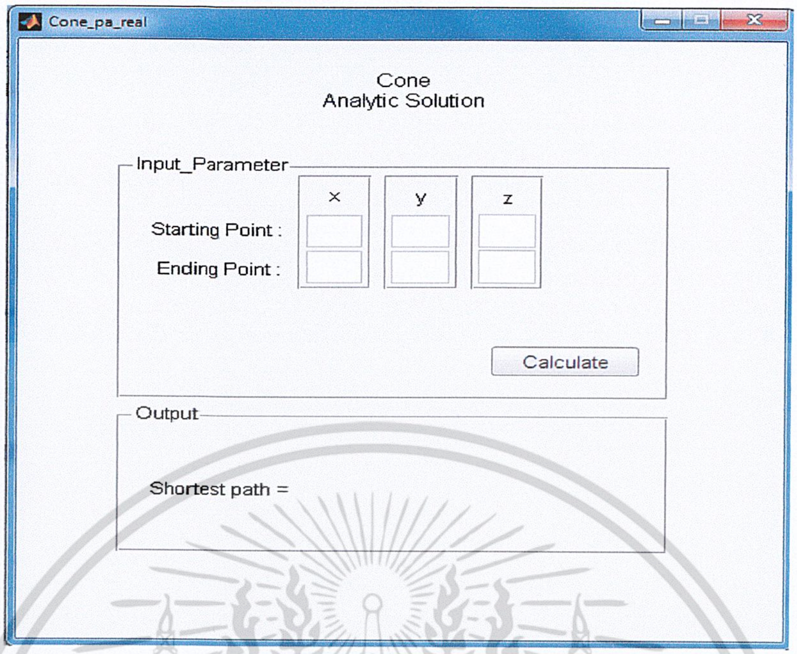
แต่ถ้าค่าจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดอยู่บนพื้นผิวทรงกระบอกแล้วผลการคำนวณจะแสดงดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกระบอกด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

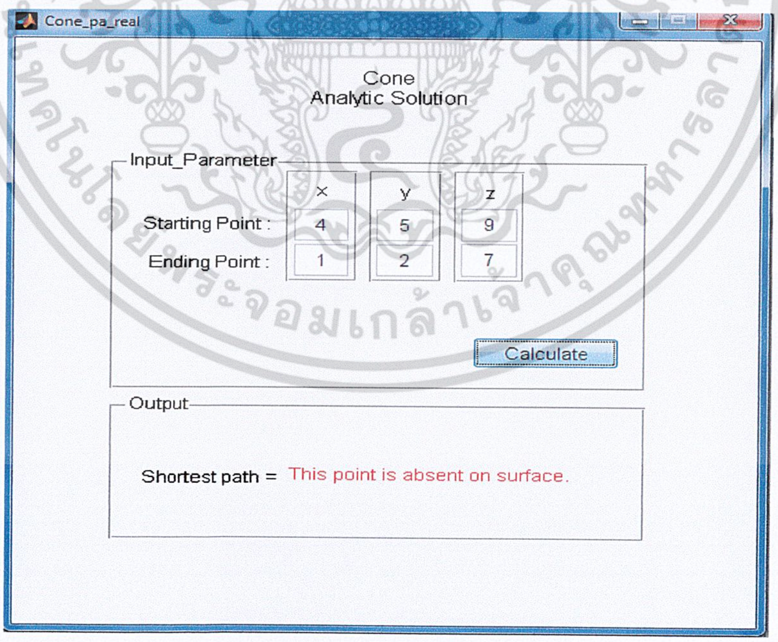
จากรูปที่ 4.8 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด $(1,\sqrt{3},7)$ จุดสิ้นสุดคือ จุด $(\sqrt{2},\sqrt{2},7)$ โดยทรงกระบอกมีรัศมีเป็น 2 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 0.523599

4.1.3 ทรงกรวย 1 ชิ้น

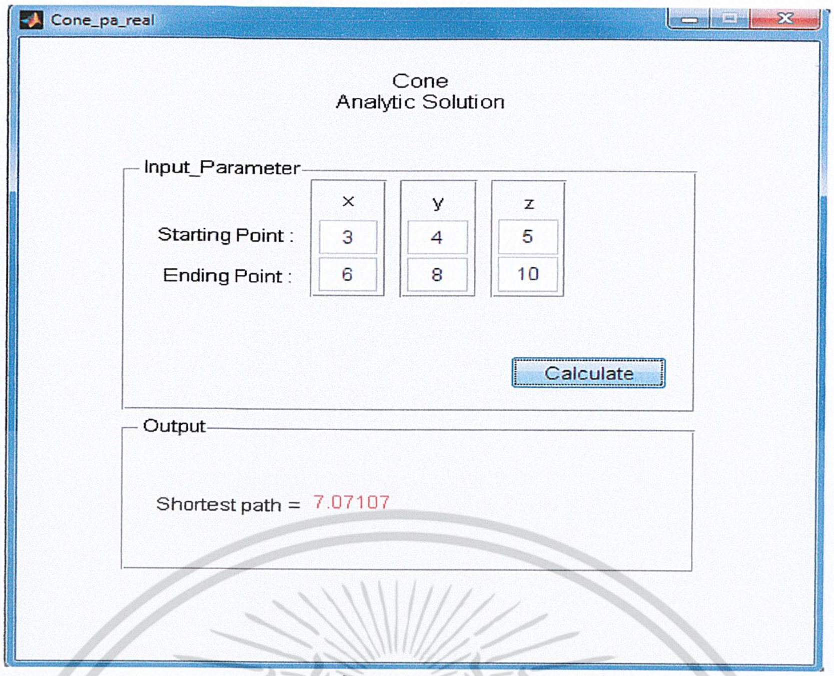


รูปที่ 4.9 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวย 1 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.9 เป็นหน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกรวย 1 ชิ้น โดยค่าที่ต้องใส่จะมีค่าจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด โดยจุดทั้งสองจุดนี้ต้องอยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 1 ชิ้น หากค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 1 ชิ้น เมื่อกดปุ่ม Calculate จะแสดงผลดังรูปที่ 4.10



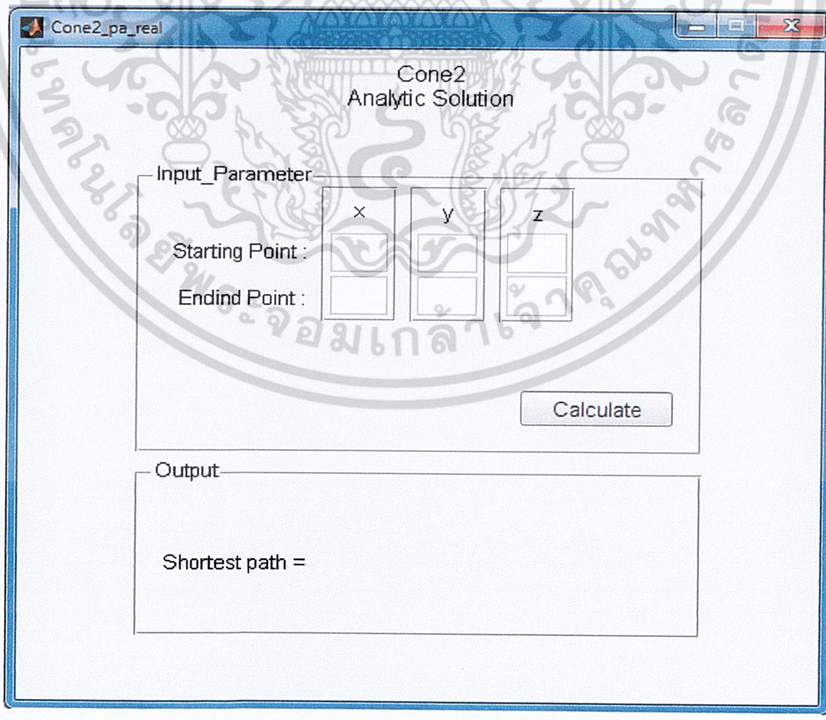
รูปที่ 4.10 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 1 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



รูปที่ 4. 11 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย 1 ชิ้นด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

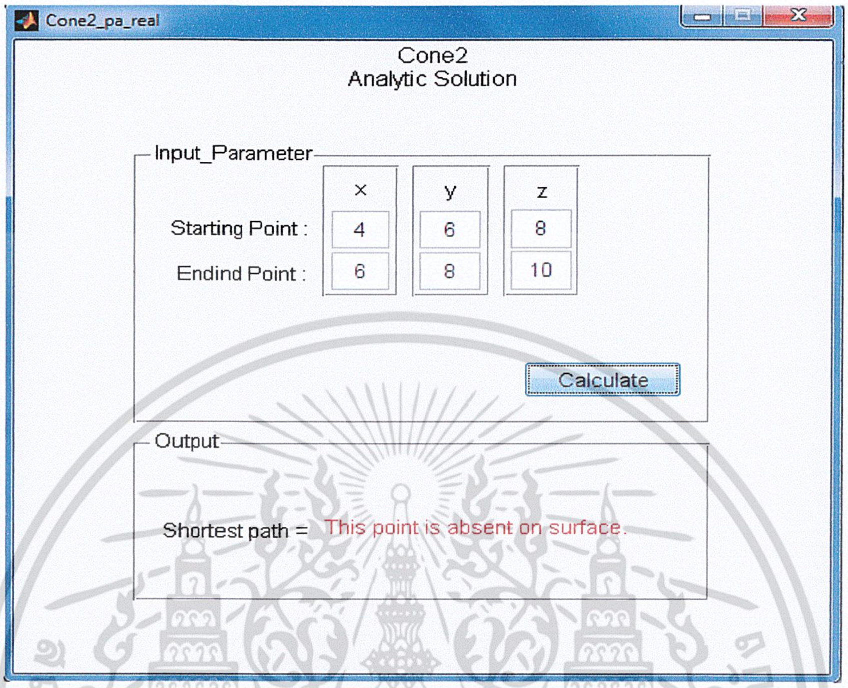
จากรูปที่ 4.11 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด (3, 4, 5) จุดสิ้นสุดคือ จุด (6, 8, 10) จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 0.523599

4.1.4 ทรงกรวย 2 ชิ้น

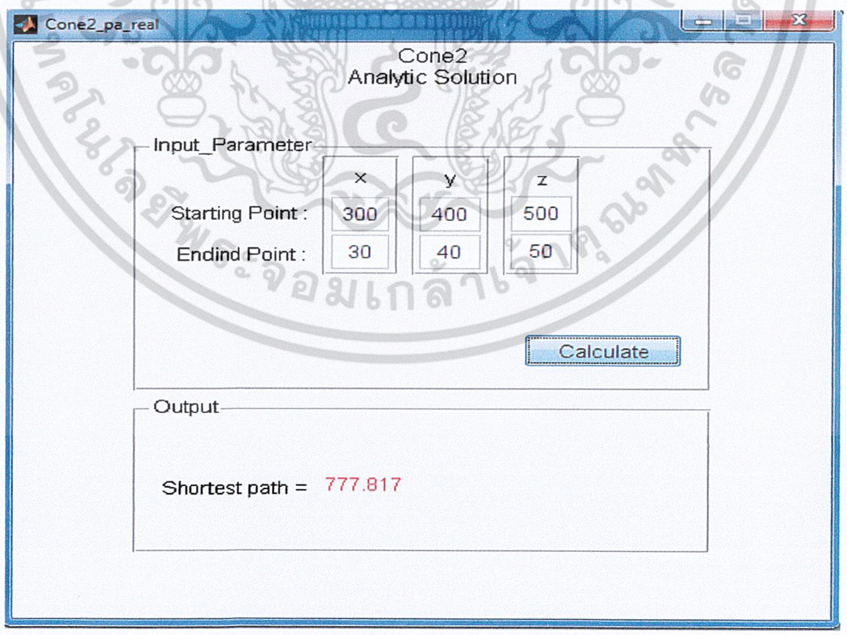


รูปที่ 4.12 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวย 2 ชิ้นด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.12 เป็นหน้าต่างการรับค่าของรูปทรงกรวย 2 ชิ้น โดยค่าที่ต้องใส่จะมีค่าจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุด โดยค่าทั้งสองค่านี้ต้องอยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 2 ชิ้นหากค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 2 ชิ้น เมื่อกดปุ่ม Calculate จะแสดงผลดังรูปที่ 4.13



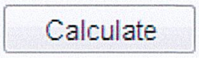
รูปที่ 4.13 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย 2 ชิ้น ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



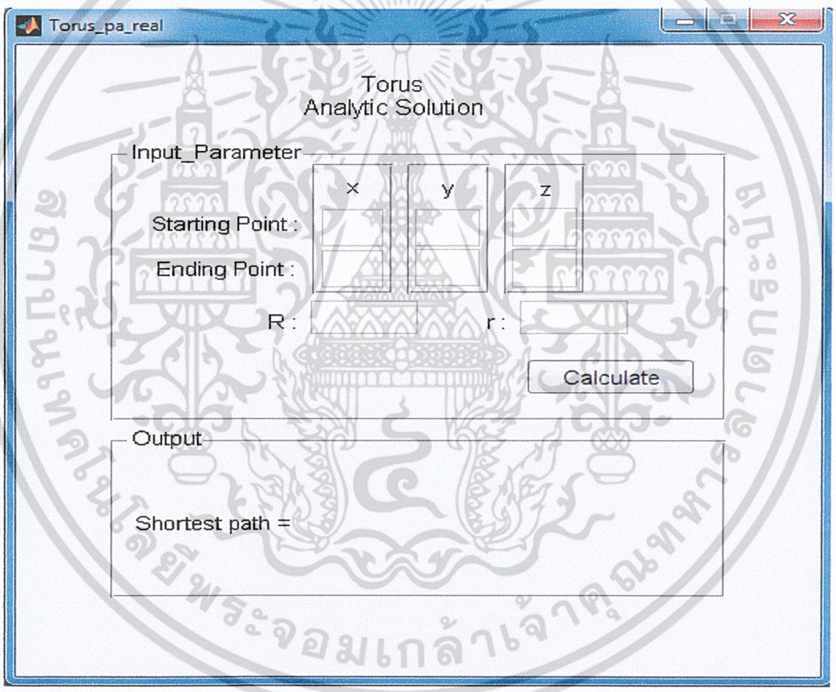
รูปที่ 4. 14 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย 2 ชิ้นด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.14 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด (300, 400, 500) จุดสิ้นสุดคือ จุด (60, 80, 100) จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 777.817

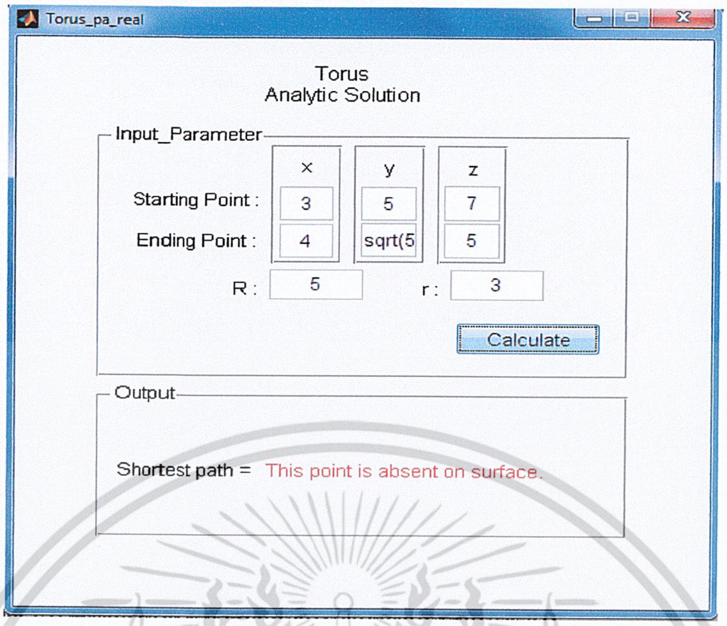
4.1.5 ทรงห่วงยาง

หน้าต่างโปรแกรมของการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงห่วงยางจะแสดงดังรูปที่ 4.14 ซึ่งประกอบด้วยค่าของจุดเริ่มต้น จุดสิ้นสุด รัศมีวงใหญ่ (R) และรัศมีวงเล็ก (r) โดยค่าของจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดต้องเป็นจุดที่อยู่บนพื้นผิวของทรงห่วงยาง เมื่อผู้ใช้งานใส่ค่าเหล่านี้แล้วก็สามารถกดปุ่ม 

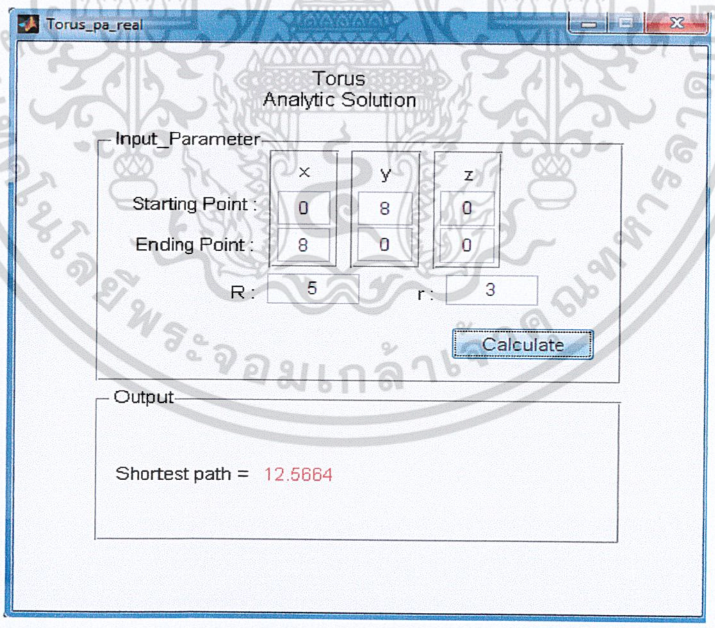
เพื่อทำการคำนวณ หากค่าของจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยางโปรแกรมจะแสดงผลดังรูปที่ 4.15 แต่ถ้าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยางแล้วผลการคำนวณที่ได้ก็คือค่าระยะทางที่สั้นที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.15 หน้าต่างการรับค่าของทรงห่วงยางด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



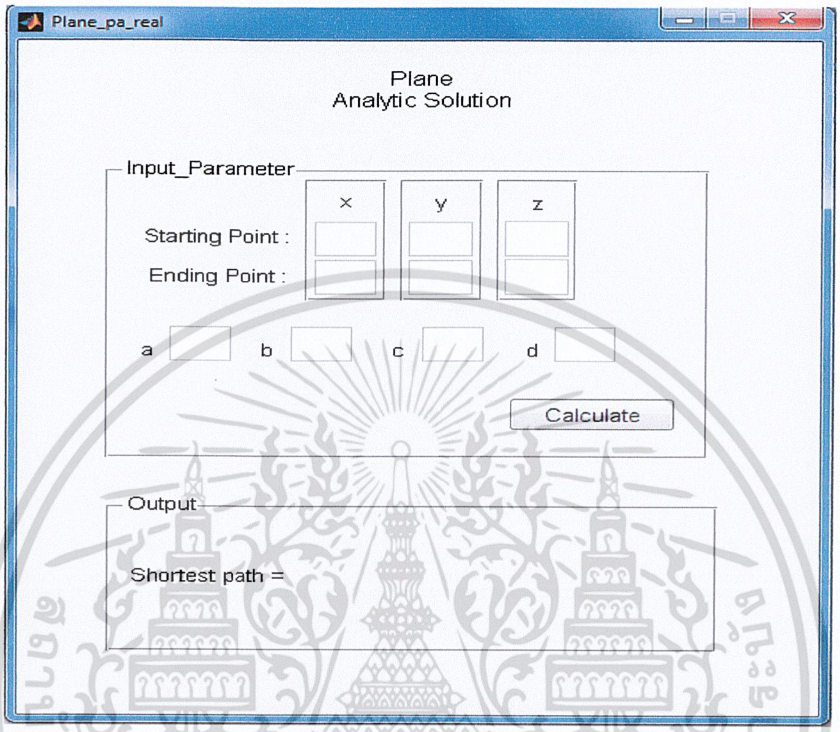
รูปที่ 4.16 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยาง ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์



รูปที่ 4.17 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงห่วงยางด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

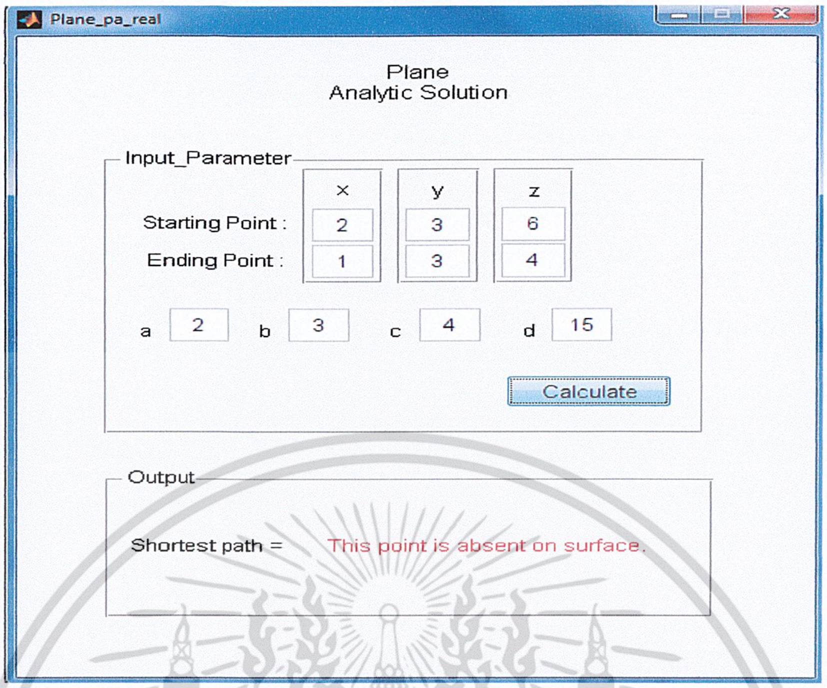
จากรูปที่ 4.17 เมื่อค่าจุดเริ่มต้นคือจุด (0,8,0) จุดสิ้นสุดคือ จุด (8,0,0) R = 5 และ r = 3 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 12.5664

4.1.6 ระนาบ

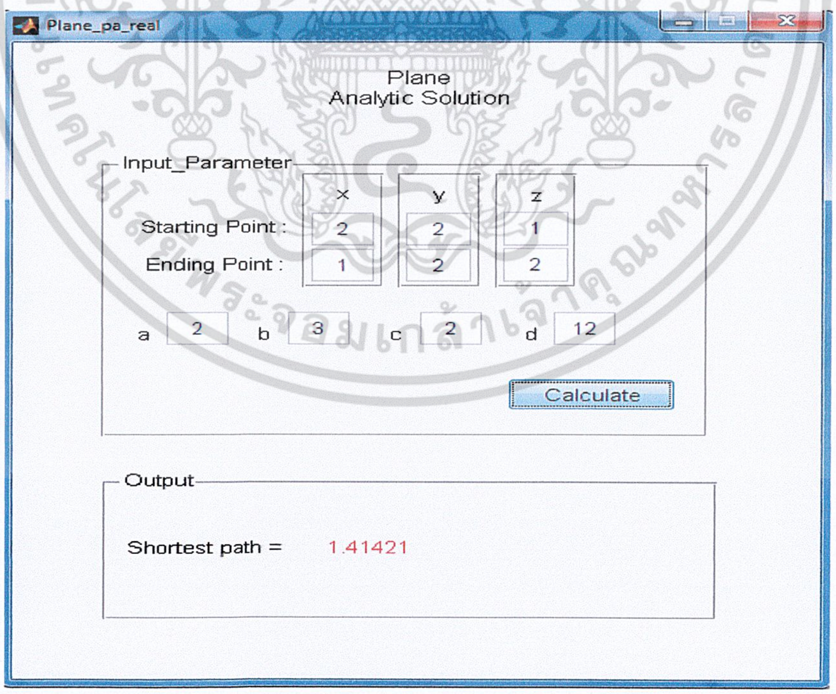


รูปที่ 4.18 หน้าต่างการรับค่าของระนาบด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

จากรูปที่ 4.18 เป็นหน้าต่างการรับค่าของระนาบ ซึ่งค่าที่ต้องใส่มีค่าจุดเริ่มต้น จุดสิ้นสุด และค่า a, b, c, และ d ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการระนาบ โดยจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดต้องอยู่บนพื้นผิวของระนาบ หากค่าจุดเริ่มต้น หรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวของระนาบ เมื่อคำนวณโดยการกดปุ่ม Calculate จะแสดงผลดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.19 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวระนาบ ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

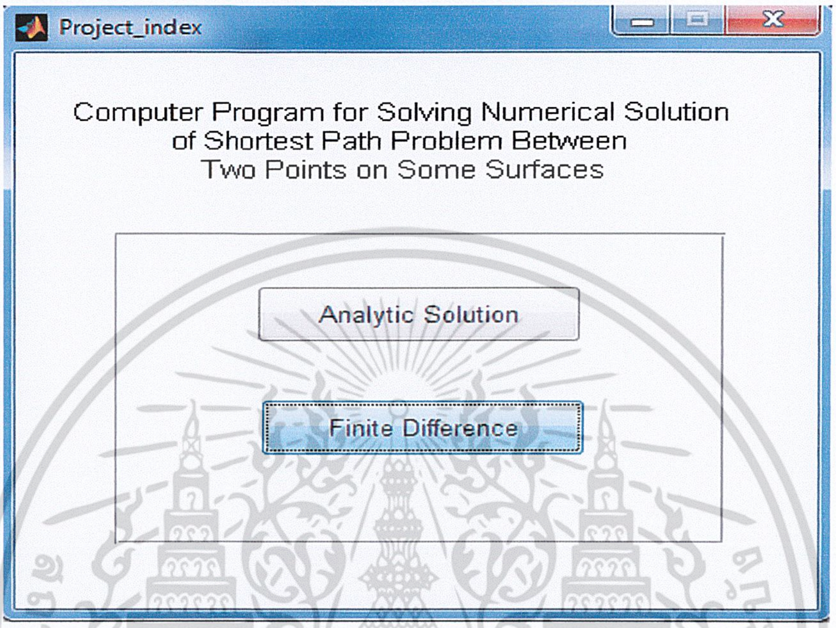


รูปที่ 4.20 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของระนาบ ด้วยวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

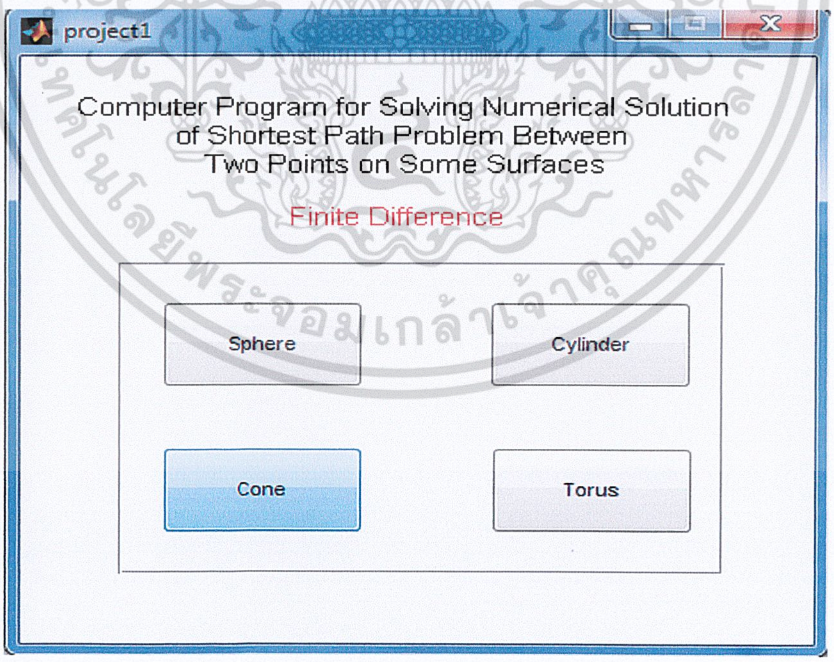
จากรูปจากรูปที่ 4.20 เมื่อค่าจุดเริ่มต้นคือจุด (2, 2, 1) จุดสิ้นสุดคือ จุด (1, 2, 2) a=2,b=3,c=2,d=12 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 1.41421

4.2 โปรแกรมหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด

หน้าต่างโปรแกรมการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยวิธีผลต่างจำกัดแสดงดังรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.21 หน้าต่างโปรแกรมเริ่มต้น (2)

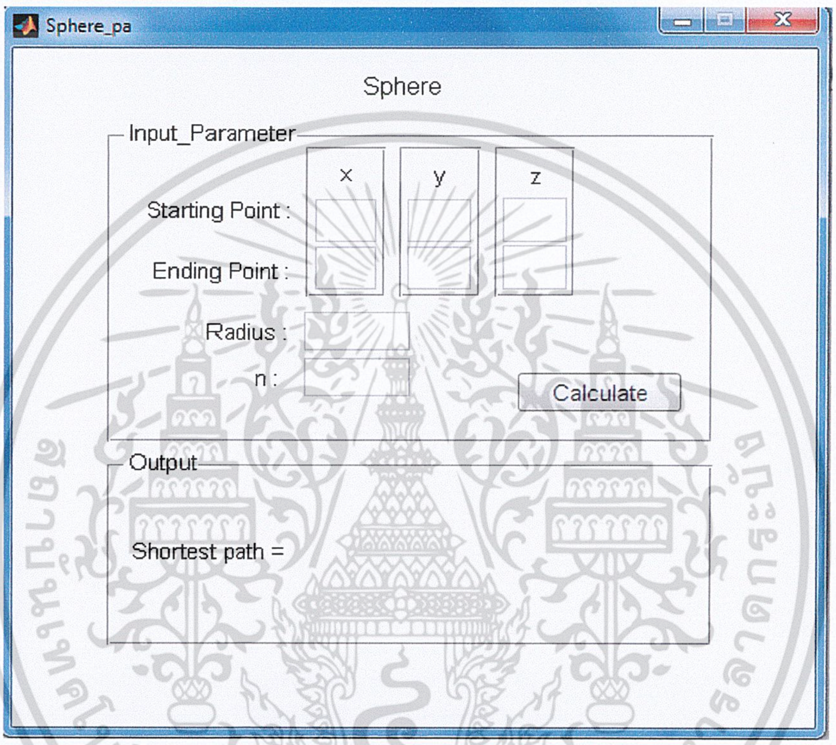


รูปที่ 4.22 หน้าต่างการคำนวณโดยวิธีผลต่างจำกัด

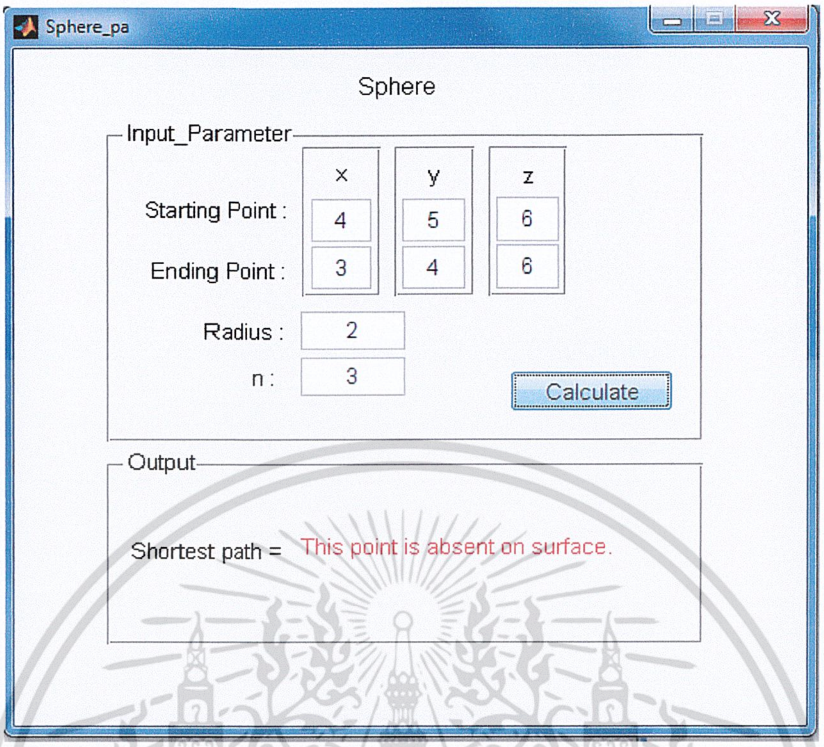
จากรูปที่ 4.22 ผู้ใช้งานสามารถเลือกว่าจะใช้วิธีผลต่างจำกัดหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวต่างๆ ดังนี้

- ทรงกลม
- ทรงกระบอก
- ทรงกรวย
- ทรงห่วงยาง

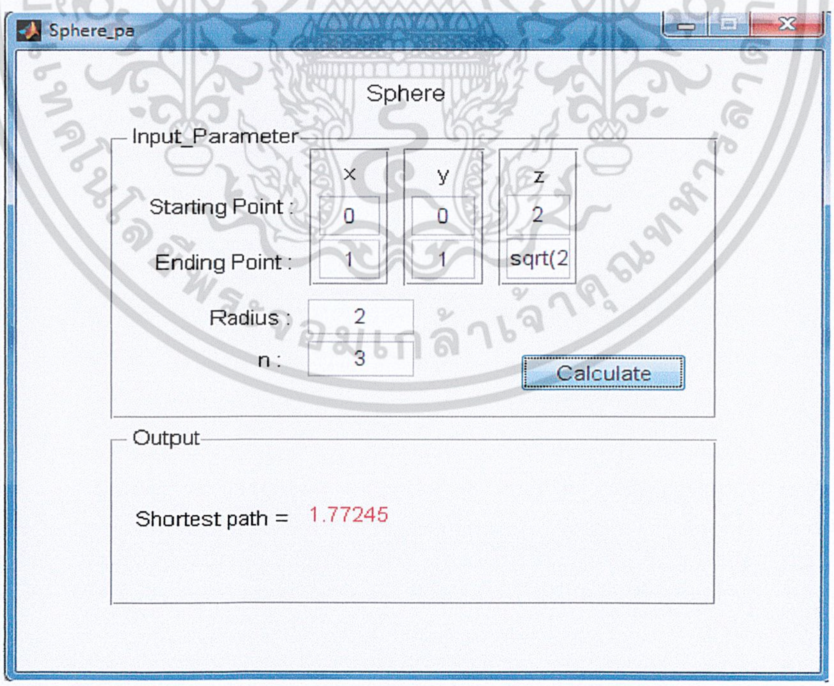
4.2.1 ทรงกลม



รูปที่ 4.23 หน้าต่างการรับค่าของทรงกลมของวิธีผลต่างจำกัด



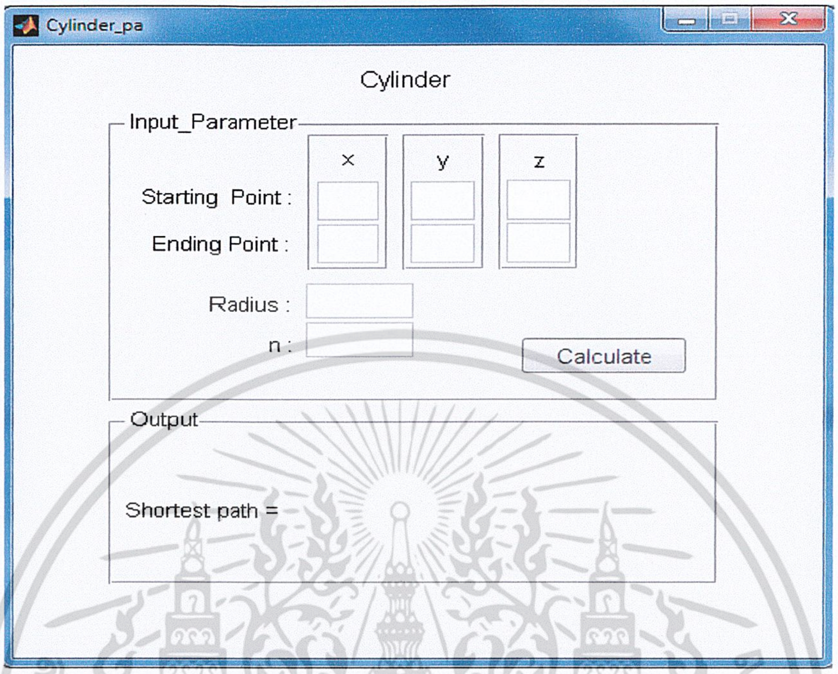
รูปที่ 4.24 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกลม ด้วยวิธีผลต่างจำกัด



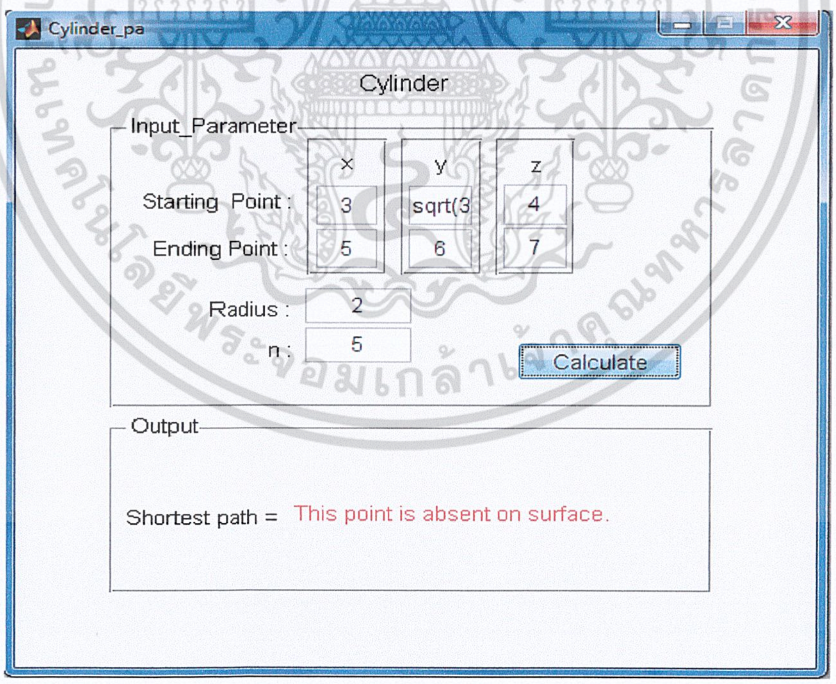
รูปที่ 4.25 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกลม ด้วยวิธีผลต่างจำกัด

จากรูปที่ 4.25 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด (0,0,2) จุดสิ้นสุดคือ จุด $(1,1,\sqrt{2})$ รัศมีเท่ากับ 2 จำนวนช่วงเท่ากับ 3 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 1.77245

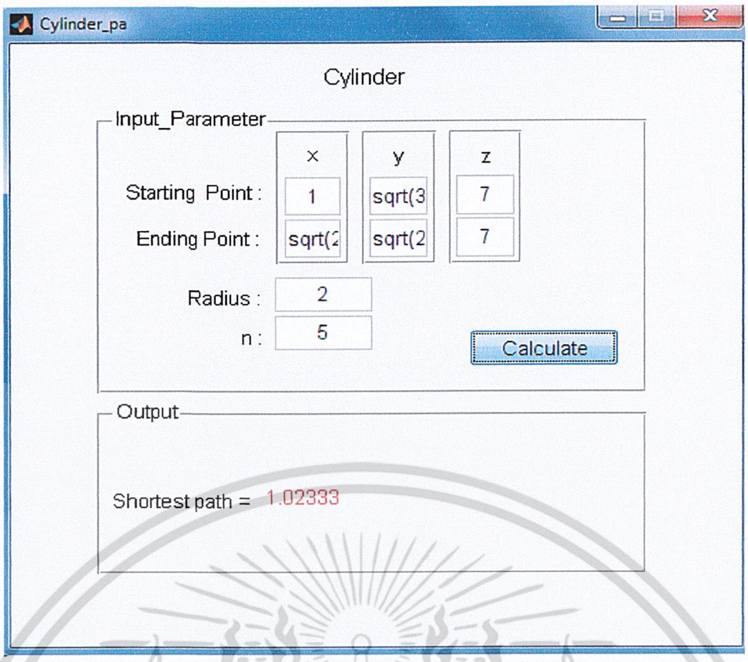
4.2.2 ทรงกระบอก



รูปที่ 4.26 หน้าต่างการรับค่าของทรงกระบอกของวิธีผลต่างจำกัด



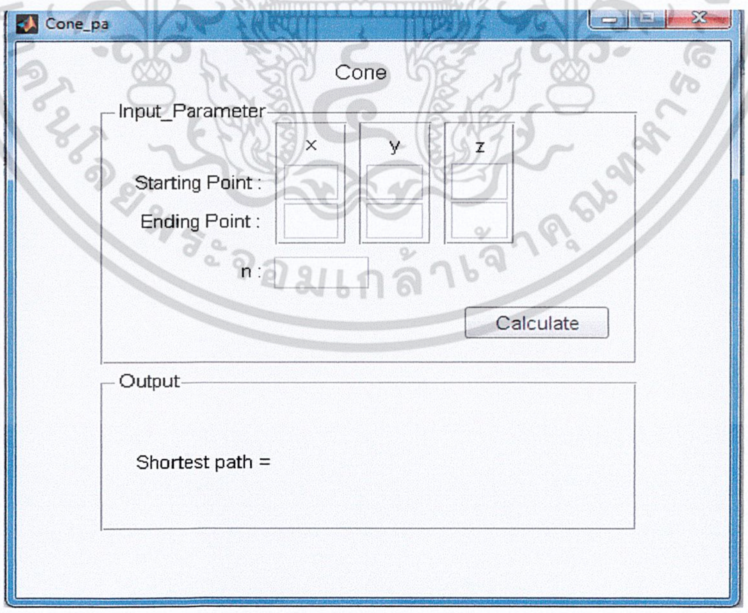
รูปที่ 4.27 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกระบอกด้วยวิธีผลต่างจำกัด



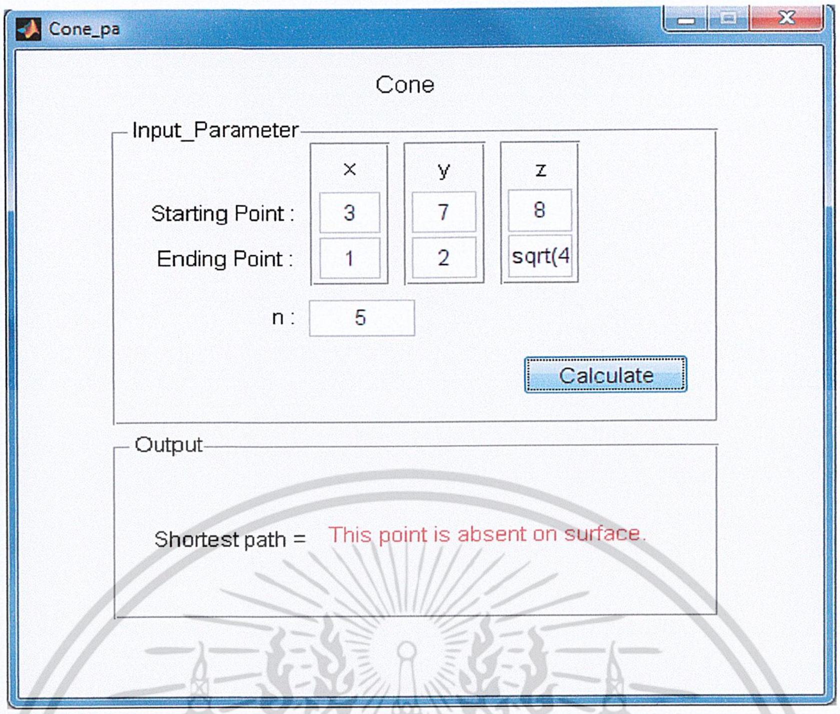
รูปที่ 4.28 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกระบอกด้วยวิธีผลต่างจำกัด

จากรูปที่ 4.28 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด $(1,\sqrt{3},7)$ จุดสิ้นสุดคือ จุด $(\sqrt{2},\sqrt{2},7)$ รัศมีเท่ากับ 2 จำนวนช่วงเท่ากับ 5 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 1.02333

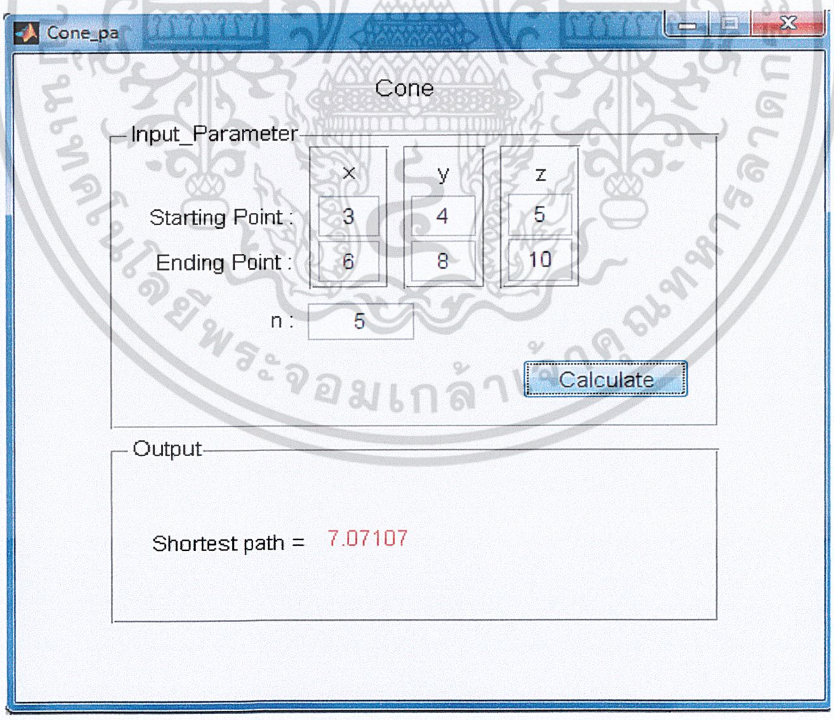
4.2.3 ทรงกรวย



รูปที่ 4.29 หน้าต่างการรับค่าของทรงกรวยของวิธีผลต่างจำกัด



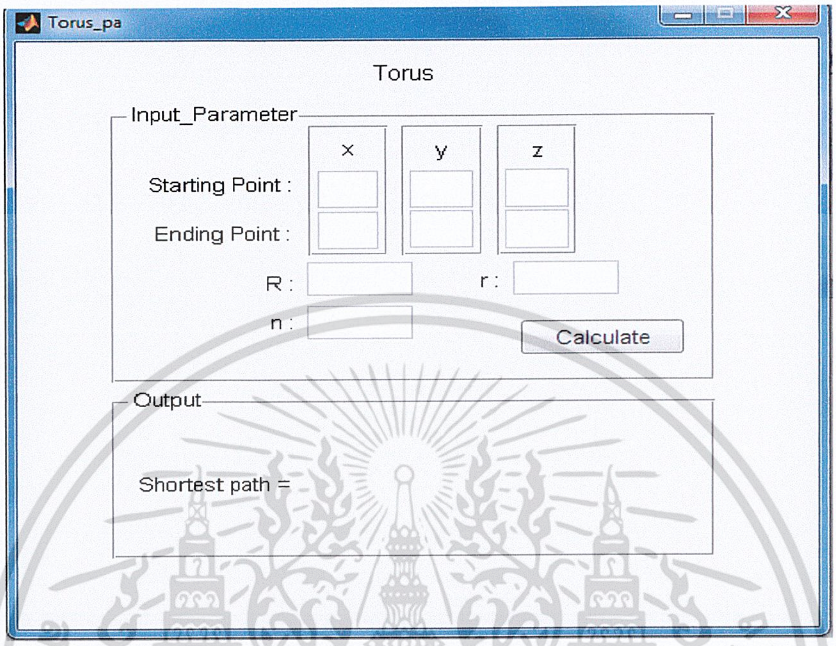
รูปที่ 4.30 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงกรวย ด้วยวิธีผลต่างจำกัด



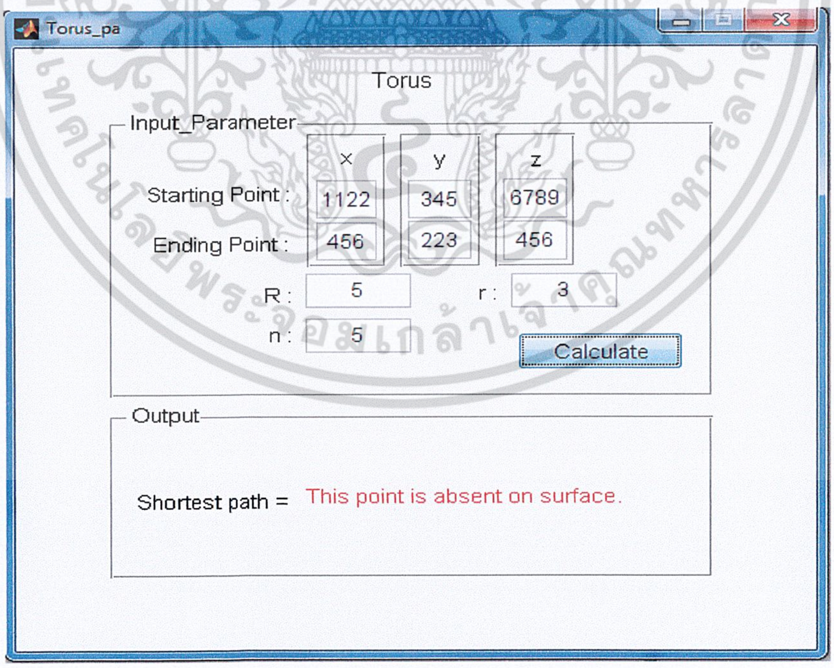
รูปที่ 4.31 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงกรวย ด้วยวิธีผลต่างจำกัด

จากรูปที่ 4.31 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด (3, 4, 5) จุดสิ้นสุดคือ จุด (6, 8, 10) จำนวนช่วงเท่ากับ 5 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 7.07107

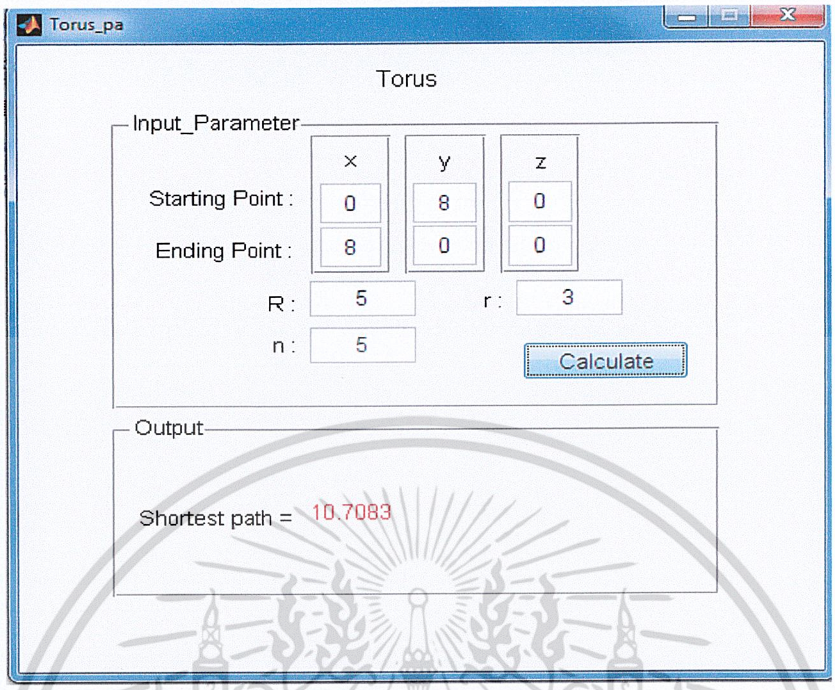
4.2.4 ทรงห่วงยาง



รูปที่ 4.32 หน้าต่างการรับค่าของทรงห่วงยางของวิธีผลต่างจำกัด



รูปที่ 4.33 ผลการคำนวณเมื่อค่าจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดไม่อยู่บนพื้นผิวทรงห่วงยาง ด้วยวิธีผลต่างจำกัด



รูปที่ 4.34 ผลการคำนวณหาระยะทางที่สั้นที่สุดของทรงห่วงยางด้วยวิธีผลต่างจำกัด

จากรูปที่ 4.34 เมื่อใส่ค่าจุดเริ่มต้นเป็นจุด (0,8,0) จุดสิ้นสุดคือ จุด (8,0,0) รัศมีวงใหญ่เท่ากับ 5 รัศมีวงเล็กเท่ากับ 3 จำนวนช่วงเท่ากับ 5 จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดนี้มีค่าเป็น 10.7083

บทที่ 5

สรุปผลการดำเนินงาน การอภิปรายและข้อเสนอแนะ

ผลของการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว ซึ่งได้พัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงวิธีการใช้โปรแกรมเพื่อหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว และอภิปรายผลการวิจัยด้วย

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว ได้แบ่งการคำนวณเป็น 2 วิธี คือ วิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ และวิธีผลต่างจำกัด

1.วิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ หาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวต่างๆ ดังนี้

- ทรงกลม
- ทรงกระบอก
- ทรงกรวย 1 ชิ้น
- ทรงกรวย 2 ชิ้น
- ทรงห่วงยาง
- ระนาบ

2.วิธีผลต่างจำกัด หาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวต่างๆ ดังนี้

- ทรงกลม
- ทรงกระบอก
- ทรงกรวย
- ทรงห่วงยาง

ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับผู้ที่ทำการศึกษาด้านจีออเดซิก

คณะผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้ MATLAB มาช่วยในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางพื้นผิวโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด ซึ่งผู้วิจัยมุ่งหวังให้สามารถวิเคราะห์ เปรียบเทียบข้อมูลได้ถูกต้อง รวดเร็ว สามารถแสดงความแตกต่างระหว่างผลลัพธ์ของค่าจริงกับค่าประมาณได้

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าวิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับวิธีผลต่างจำกัด

ระเบียบวิธี / รูปทรง	วิธีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์	วิธีผลต่างจำกัด	ค่าคลาดเคลื่อน
ทรงกลม จุดเริ่มต้น $(0,0,2)$ จุดสิ้นสุด $(1,1,\sqrt{2})$ รัศมี $\rho = 2$	1.5714	1.7721	12.7721%
ทรงกระบอก จุดเริ่มต้น $(\sqrt{2},\sqrt{2},6)$ จุดสิ้นสุด $(0,2,3)$ รัศมี $\rho = 2$	2.8329	3.1947	12.7714%
ทรงกรวย จุดเริ่มต้น $(2\sqrt{3},2,4)$ จุดสิ้นสุด $(2,2\sqrt{3},4)$	2.0952	1.9599	6.4576%
ทอรัส จุดเริ่มต้น $(8,0,0)$ จุดสิ้นสุด $(0,8,0)$ $R = 5$ $r = 3$	12.5714	10.0284	20.2285%

5.2 อุปสรรค

1.ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบโปรแกรมข้างต้น โดยใช้ระเบียบวิธีการผลต่างจำกัดเทียบกับผลลัพธ์ที่คิดจากค่าจริง จะได้ว่าวิธีผลต่างจำกัดยังมีข้อผิดพลาดอยู่มาก ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าวิธีผลต่างจำกัดนี้ยังไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุด

2.รูปทรงกรวยในกรณี x, y, z, ϕ ไม่เท่ากัน ไม่สามารถหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยวิธีผลต่างจำกัดและวิธีหาค่าจริง

3.ในรูปทรงห่วงยางกลุ่มผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเพียงกรณีเดียวคือกรณีที่ z เท่ากัน

5.3 ข้อเสนอแนะ

1.สามารถนำงานวิจัยนี้ไปศึกษาต่อและพัฒนาเป็นโปรแกรมเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดต่อไป โดยใช้ระเบียบวิธีการอื่นๆ

2.สามารถนำงานวิจัยนี้ไปทำการศึกษารูปทรงอื่นๆที่นอกเหนือจาก 5 รูปทรงที่ศึกษาอยู่ เช่น รูปทรงกรวย 2 ชิ้น ทรงรี ไฮเปอร์โบลอยด์ 1ชิ้น ไฮเปอร์โบลอยด์ 2 ชิ้น พาราโบลอยด์ที่เป็นทรงรี รูปทรงอานม้าได้

3.สามารถนำโปรแกรมนี้ไปพัฒนาต่อโดยเขียนด้วยภาษาหรือโปรแกรมสำเร็จรูปอื่นๆเช่น PHPได้

4.สามารถนำงานวิจัยนี้ไปศึกษาต่อ ในกรณีปริภูมิ n มิติ

เอกสารอ้างอิง

[1] ณัฐพล บุญนำ, เดชาวุฒิ เวฬุวนารักษ์, วาสนา ว่องไว. “*ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง*”, ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, ปีการศึกษา 2550.

[2] ภัคคินี ชิตสกุล. “*แคลคูลัสการแปรผัน*”, คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[3] George B. Thomas, JR. *“Calculus and Analytic geometry”*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1972.

[4] I.M.Gelfand and S.V.Fomin. *“Calculus of Variations”*, Dover Publications, Inc. 1963.

[5] John Opera. *“Differential geometry and its applications”*, Prentice-Hall, Inc. 1997.

[6] JÜrgen Jost and Xianqing Li-Jost. *“Calculus of Variations”*, Cambridge University Press. 1998.