ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็น

A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN THE HEAT INSULATED OF COMBINED WATER REFRIGERATOR

นางสาวจุฑาลักษณ์ พันธุ์สถิตย์วงศ์
นางสาววรรณพร ลัดหลวง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2553

A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN THE HEAT INSULATED OF COMBINED WATER REFRIGERATOR

MISS JUTARAK PANSATITVONG
MISS WANNAPORN LADLUANG

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULEFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2010

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็น A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN THE HEAT INSULATED OF COMBINED WATER REFRIGERATOR
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจุฑาลักษณ์ พันธุ์สถิตย์วงศ์ 50050014 นางสาววรรณพร ลัดหลวง 50050071
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้โครงงานพิเศษเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2553

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ ประธานกรรมการ	
ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการ	
ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจุฑาลักษณ์ พันธุ์สถิตย์วงศ์ 50050014
	นางสาววรรณพร ลัดหลวง 50050071
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2553
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

บทคัดย่อ

ลักษณะการถ่ายเทความร้อนภายในฉนวนกันความร้อนของตู้น้ำร้อนน้ำเย็นมีความจำเป็นต่อการออกแบบ เนื่องจากการเลือกใช้วัสดุที่นำมาเป็นฉนวนของตู้น้ำร้อนน้ำเย็นให้เหมาะสมนั้นจะทำให้ตู้น้ำร้อนน้ำเย็นนั้นประหยัดพลังงานมากยิ่งขึ้น ซึ่งการตรวจวัดการถ่ายเทความร้อนดังกล่าวสามารถทำได้โดยการตรวจวัดจริงและการคำนวณจากแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ โดยบทความนี้เป็นการศึกษาของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การถ่ายเทความร้อนในฉนวนของตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็น โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสมการความร้อนในหนึ่งมิติโดยวิธีชัดแจ้ง (Smith, 1978) และวิธีแครงก์-นิโคลสันโดยได้มีการเปรียบเทียบการนำความร้อนของฉนวน 3 แบบ คือ ฉนวนใยแก้ว ฉนวนกันความร้อนแบบโฟมโพลิยูเรเทน และโฟมโพลีเอทิลีน และหาผลเฉลยโดยใช้คอมพิวเตอร์ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณแสดงด้วยตารางและกราฟในสภาวะไม่เสถียรและเสถียร เพื่อแสดงให้เห็นว่าฉนวนแบบโฟมโพลิยูเรเทนมีประสิทธิภาพในการเป็นฉนวนกันความร้อนได้ดีที่สุด

Title	A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN THE HEAT INSULATED OF COMBINED WATER REFRIGERATOR
Student	MISS JUTARAK PANSATITVONG 50050014
	MISS WANNAPORN LADLUANG 50050071
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2010
Advisor	Dr.Nopparat Pochai

ABSTRACT

The characteristic of heat transfer inside heat insulation of combined water refrigerator is important for design. The suitable heat insulate materials can save energy. In general, the measurement of heat transfer in insulate are real measurement and numerical simulation. In this research, the mathematical model of the heat transfer in heat insulate of hot and cool water container is simulated using the explicit method and Crank-Nicolson Implicit methods (Smith, 1978). Fiberglass insulation, poly urethane foam insulation and poly ethylene foam are used to compare heat transfer. The numerical results are calculated by computer. By numerical results found that foam poly urethane insulation is better than another.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็น ให้สามารถเสร็จได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ และ ดร.บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์และกำลังใจจนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จด้วยดี

นางสาวจุฑาลักษณ์ พันธุ์สถิตย์วงศ์

นางสาววรรณพร ลัดหลวง

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญรูป

สารบัญรูป(ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาของปัญหา

เครื่องใช้ไฟฟ้าเป็นสิ่งอำนวยความสะดวกของมนุษย์ในยุคปัจจุบันมากที่สุด อาทิเช่น ตู้เย็น ซึ่งเป็นเครื่องใช้ไฟฟ้าที่ทำความเย็น สามารถช่วยถนอมอาหารให้สดใหม่อยู่เสมอ ทำให้มนุษย์ซื้ออาหารมาเก็บไว้ในตู้เย็นได้คราวละทีมากๆ แต่ในขณะเดียวกันตู้เย็นเป็นเครื่องใช้ไฟฟ้าที่ใช้พลังงานมากตลอดการใช้งานรองจากเครื่องปรับอากาศ เนื่องจากตู้เย็นต้องเสียบปลั๊กตลอดเวลา เพื่อรักษาความเย็นในตู้เย็น

ตู้เย็น เป็นเครื่องใช้ไฟฟ้าที่ทำความเย็นโดยประกอบด้วยสองส่วนหลักๆ คือ ส่วนฉนวนป้องกันความร้อน สำหรับป้องกันไม่ให้ความร้อนไหลเข้ามา และส่วนทำความเย็น นั่นคือปั๊มที่นำความร้อนออกไปสู่ภายนอกซึ่งมีอุณหภูมิต่ำกว่า

นอกจากตู้เย็นแล้ว ยังมีเครื่องทำความเย็นอีกประเภทหนึ่งที่นิยมใช้กันมากคือ เครื่องทำน้ำเย็นซึ่งมีลักษณะเป็นตู้สำหรับกดน้ำ เครื่องใช้ไฟฟ้าประเภทนี้จะใช้พลังงานน้อยกว่าตู้เย็นมาก ดังนั้นจึงนิยมใช้กันในสำนักงาน ห้างสรรพสินค้า หรือตามโรงเรียน และในปัจจุบันตู้ทำน้ำเย็นได้มีการพัฒนาให้มีช่องสำหรับทำน้ำร้อนด้วย

ภาพที่1.1 ตู้ทำน้ำร้อน-น้ำเย็น

ในตู้ทำน้ำร้อน-น้ำเย็น มีส่วนประกอบที่สำคัญอยู่นั่นคือ ฉนวนที่กั้นอยู่ระหว่างช่องสำหรับทำน้ำร้อนและน้ำเย็น ฉนวนคือวัสดุที่มีความสามารถในการสกัดกั้นความร้อนไม่ให้ส่งผ่านจากด้านใดด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งได้ง่าย ซึ่งการส่งผ่านความร้อนจากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งของวัสดุใดๆ เรียกว่า การถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) ลักษณะการถ่ายเทความร้อนนั้นมี 3 วิธี โดยอาจเกิดขึ้นจากวิธีใดวิธีหนึ่งหรือหลายๆ วิธีพร้อมกันได้แก่ การนำความร้อน การพาความร้อน และการแผ่รังสีความร้อน ฉนวนจะกันความร้อนได้ดีหรือไม่ขึ้นอยู่กับวัสดุที่มาใช้ ซึ่งมีหลายประเภทที่แตกต่างกัน คณะผู้จัดเห็นจึงมีความสนใจที่จะทำการศึกษาการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของเครื่องทำน้ำร้อน-น้ำเย็นขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำงาน

1. เพื่อศึกษาแบบจำลองของฉนวนกันความร้อน
2. เพื่อศึกษาความแตกต่างของฉนวนแต่ละประเภท
3. เพื่อศึกษาการถ่ายเทความร้อนในฉนวนกันความร้อน โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1. ศึกษาการถ่ายเทความร้อนใน 1 มิติ
2. ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) โดยใช้วิธีชัดแจ้ง (Explicit method) และวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Implicit method)

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาสมการการถ่ายเทความร้อน
2. ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
3. หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนในฉนวนของวัสดุต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับวัสดุที่แตกต่างกันไป

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบประสิทธิภาพของฉนวนกันความร้อนแต่ละชนิด
2. ทราบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่มีความเหมาะสมในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนเฉพาะในแบบ 1 มิติ

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฉนวนกันความร้อน (Thermal Insulation)

ฉนวนกันความร้อน (Thermal Insulation) [5] เป็นวัสดุที่ใช้เพื่อการประหยัดพลังงานความร้อนที่มีความสำคัญ ในปัจจุบันเกือบทุกอาคารใช้ฉนวนกันความร้อนในการควบคุมอุณหภูมิในอาคารให้อยู่ในช่วงที่ต้องการ ฉนวนกันความร้อนมีคุณสมบัติในการสกัดกั้นการส่งผ่านความร้อน จากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งซึ่งในแง่ของการใช้งานแล้ว จะใช้ได้ทั้งการรักษาความร้อนและความเย็น ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับประเภทของฉนวน และลักษณะการใช้งานของฉนวนนั้นๆ เช่น ฉนวนกันความร้อนในอุตสาหกรรมแช่แข็ง ตลอดจนการขนส่งอาหารต้องใช้ฉนวนในการรักษาความเย็นของห้องบรรจุอาหารส่วนฉนวนกันความร้อนบนเครื่องบินโดยสารต้องใช้ฉนวนในการรักษาอุณหภูมิภายในห้องผู้โดยสาร เป็นต้น

สำหรับงานฉนวนในอาคารสิ่งก่อสร้างอาจจะทำหน้าที่หลายอย่าง เช่น การป้องกันความร้อน การป้องกันเสียง ป้องกัน ไฟ ฯลฯ อาคารในประเทศที่มีความหนาวเย็นต้องใช้เครื่องทำความร้อน (Heater) และฉนวนเพื่อรักษาอุณหภูมิภายในอาคารให้อบอุ่น แต่สำหรับในเมืองไทยซึ่งมีภูมิอากาศแบบร้อนชื้น ดังนั้นเพื่อให้ภายในอาคารมีสภาพเหมาะสมต่อการอยู่อาศัย จึงต้องลดความร้อนที่จะเข้ามาภายในอาคาร การใช้ฉนวนกันความร้อนสำหรับประเทศไทยจึงมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อป้องกันการถ่ายเทความร้อนจากภายนอกเข้ามายังภายในอาคารเป็นสำคัญ

2.1.1 ความหมายของฉนวน

ฉนวน โดยทั่วไปหมายถึง [5] วัสดุที่มีความสามารถในการสกัดกั้นความร้อนไม่ให้ส่งผ่านจากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งได้ง่าย การส่งผ่านความร้อนจากด้านหนึ่ง ไปยังอีกด้านหนึ่งของวัสดุใดๆ หรือการถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) ระหว่างวัตถุนั้นสามารถเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่ออุณหภูมิของวัตถุทั้งสองต่างกัน ซึ่งลักษณะการถ่ายเทความร้อนนั้นมี 3 วิธี โดยอาจเกิดขึ้นจากวิธีหนึ่งวิธีใดหรือหลายๆ วิธีพร้อมกัน ได้แก่ การนำความร้อน (Conduction) การพาความร้อน (Convection) การแผ่รังสีความร้อน (Radiation) ฉนวนป้องกันความร้อนโดยทั่วไปแล้วเป็นวัสดุที่ประกอบด้วยช่องโพรงเล็กๆ และช่องอากาศภายในวัสดุที่มีลักษณะเป็นแบบปิดทึบ (Totally Enclosed) เรียกว่า ฉนวนมวลสาร (MassInsulation) นั่นเอง ช่องเล็กๆเหล่านี้อาจเกิดขึ้นจากเกล็ด(Flakes) เส้นใย (Fiber)

ปมแข็ง (Nodules of Solids) หรือเซลล์ของวัสดุนั้นเอง ยกเว้นฉนวนสะท้อนรังสีความร้อน (Refective Insulation)

กลไกที่เกิดขึ้นภายในฉนวนมวลสาร เกิดขึ้นได้โดยช่องเล็กๆ ที่อยู่ในวัสดุ และลักษณะเป็นโพรงอากาศนี้เองที่ทำหน้าที่ต้านทานการไหล (Flow) ของอากาศ หรือก๊าซ ทำให้มีความร้อนเพียงเล็กน้อยเท่านั้นที่จะสามรถถ่ายเทผ่านจากด้านหนึ่งของวัสดุไปยังอีกด้านหนึ่งโดยกระบวนการพาความร้อนได้

เมื่อพิจารณากระบวนการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นภายในฉนวนที่ค่าความหนาแน่นค่าหนึ่งของวัสดุที่นำมาผลิตเป็นฉนวนกันความร้อนใดๆ นั้น สภาพการนำความร้อนปรากฏ (Apparent thermal conductivity) ที่เกิดขึ้นจะลดลงได้ เนื่องจากการพาความร้อนโดยอากาศภายในฉนวนกันความร้อนลดลงนั้น เพราะการลดขนาดของช่องอากาศระหว่างเซลล์ของเส้นใยที่ทำให้อากาศภายในฉนวนกันความร้อนหยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่จนมีสภาพเป็นฉนวนกันความร้อนอย่างดี ถึงแม้ว่าภายในเซลล์บางส่วนจะเกิดการแผ่รังสีความร้อนระหว่างเส้นใยแต่ละเส้นภายในฉนวนนั้นก็ตาม เมื่อความหนาแน่นของวัสดุเพิ่มมากขึ้น (เส้นใยแต่ละเส้นชิดกัน) การแผ่รังสีตามทิศทางการเคลื่อนที่ของความร้อนจะลดลง เนื่องจากผลของอุณหภูมิที่เส้นใยติดกันมีค่าใกล้เคียงกัน

เมื่อความหนาแน่นของวัสดุหรือฉนวนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ การแผ่รังสีความร้อนระหว่างเส้นใยและพื้นผิวจะลดลงทำให้สภาพการนำความร้อนปรากฏลดลงด้วย จนกระทั่งเมื่อเส้นใยหรือเซลล์เชื่อมต่อจนเป็นเนื้อเดียวกัน จะเกิดการนำความร้อนที่ลดลงมีค่าน้อยกว่าการนำความร้อนที่เพิ่มขึ้น (จากผลของการเพิ่มความหนาแน่นของวัสดุที่ทำให้เส้นใยชิดกันมากขึ้น) สภาพการนำความร้อนปรากฏจะเริ่มเพิ่มมากขึ้น ดังนั้น จะเห็นได้ว่า ในการใช้ฉนวนมวลสารนั้น จะมีค่าความหนาแน่นของวัสดุที่ใช้ผลิตฉนวนกันความร้อนแต่ละประเภทที่เหมาะสมค่าหนึ่งเท่านั้น (ก่อนการนำความร้อนที่เพิ่มขึ้นจะเริ่มมีค่ามากกว่าการแผ่รังสีความร้อนที่ลดลง) ดังนั้นฉนวนกันความร้อนที่ดี จึงควรเป็นฉนวนกันความร้อนที่มีค่าสภาพการนำความร้อนปรากฏรวมต่ำสุด

ฉนวนป้องกันความร้อนประเภทสะท้อนความร้อนประกอบด้วยช่องว่างสำหรับการสะท้อนความร้อนกลับอยู่ระหว่างแผ่นสะท้อนรังสีความร้อน โดยมีกระบวนการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้นภายในวัสดุ วัสดุที่ใช้ทำฉนวนประเภทนี้ส่วนมากทำจากอลูมิเนียม (Aluminium) หรือเหล็กปลอดสนิม (Stainless Steel) และฉนวนสะท้อนความร้อน เซรามิค โคทติง (Ceramic Coating) ที่มีส่วนประกอบของอนุภาคเซรามิค อคลิโพลีเมอร์และอิลาสโตเมอริค มีคุณสมบัติในการสะท้อนรังสีความร้อน การดูดซับความร้อนต่ำมีความยืดหยุ่นสามารถต้านทานการสึกกร่อนของรังสียูวีได้เป็นอย่างดี การออกแบบและใช้งานวัสดุประเภทสะท้อนรังสีความร้อนมักนำไปประยุกต์ใช้ร่วมกับการก่อสร้างมากกว่าการแยก

ใช้เป็นชิ้นเดียวโดยเฉพาะและด้วยสาเหตุดังกล่าวทำให้คุณสมบัติของฉนวนประเภทสะท้อนความร้อนถูกแยกออกจากฉนวนประเภทอื่นๆ หรือฉนวนมวลสารที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

2.1.2 ประเภทของฉนวนกันความร้อน

ฉนวนกันความร้อนแบบฉนวนใยแก้ว (Glass Wool) [7]

ฉนวนกันความร้อนแบบฉนวนใยแก้วสำหรับบุใต้หลังคา เหนือฝ้าเพดาน ให้ใช้แบบใยแก้วเนื้อละเอียดที่ยึดเกาะกันด้วยกาวพิเศษ ความหนาไม่น้อยกว่า 2 นิ้ว หรือ 50 มม. และมีบุผิวด้วยแผ่นอะลูมิเนียมฟอยล์ (aluminium foil) ทั้ง 2 ด้าน โดยใช้ใยแก้วที่มีค่าความหนาแน่นไม่น้อยกว่า 24 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร, มีค่าการต้านความร้อนไม่น้อยกว่า 7 Hr-ft2-F/BTU, มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนไม่เกิน 0.0353 W/mK, สามารถทนความร้อนได้ไม่น้อยกว่า 250 °C , ทนต่อกรดและด่าง และการกัดกร่อนของสารต่างๆ ได้ดี, การดูดลดความชื้นต่ำไม่เกิน 0.3 % (ที่ 40 °C และความชื้นสัมพัทธ์ 90 %) และไม่ติดไฟ ให้ใช้ผลิตภัณฑ์ที่ได้มาตรฐาน มอก. 487-2526 หรือมาตรฐานอื่นที่เทียบเท่า และมีการรับประกันอายุการใช้งานไม่น้อยกว่า 5 ปี

แผ่นสะท้อนความร้อนแบบอะลูมิเนียมฟอยล์ (Aluminuum Foil) [7]

แผ่นสะท้อนความร้อนแบบแผ่นอะลูมิเนียมฟอยล์ (aluminium foil) ติดใต้หลังคาบ้าน โรงงาน ให้ใช้แบบที่มีผิวเรียบ ใช้สะท้อนความร้อนได้ทั้ง 2 ด้าน ทนความชื้น ทนความร้อน ไม่ติดไฟ เหนียว ไม่ฉีกขาดง่าย ค่าการสะท้อนแสงไม่ต่ำกว่า 94 % และมีการรับประกันอายุการใช้งานไม่น้อยกว่า 5 ปี

สีเซรามิคลดความร้อน (Ceramic Coating) [7]

สีเซรามิคลดความร้อนที่ใช้พ่นหรือทาไว้นอกอาคาร (เช่นที่ หลังคา) ให้ใช้ชนิดที่ทำจากสารผงเซรามิคผสมในสีอาครีลิค ชนิดที่ทนอุณหภูมิได้ไม่น้อยกว่า 180 °C ทนความชื้น กันน้ำ ไม่ขึ้นรา ทนต่อสารเคมี กรดและด่าง ไม่ติดไฟ ค่าการดูดกลืนพลังงานแสงอาทิตย์ไม่เกิน 10 % ค่าการสะท้อนพลังงานแสงอาทิตย์ไม่น้อยกว่า 90 % ค่าการคายพลังงานความร้อนไม่น้อยกว่า 90 % โดยให้ทามีความหนารวมเฉลี่ยไม่น้อยกว่า 0.3 มม. และมีการรับประกันอายุการใช้งานไม่น้อยกว่า 5 ปี

ฉนวนกันความร้อนแบบโฟมโพลิยูเรเทน (Polyurethane Foam) [7]

ฉนวนกันความร้อนแบบ โฟม โพลิยูเรเทน ที่ใช้ฉีดพ่นหลังคาหรือภายนอกอาคาร ให้ใช้ชนิดไม่ติดไฟ ไม่หยดเมื่อถูกไฟเผา สามารถทนอุณหภูมิได้ไม่น้อยกว่า 90 °C ค่าความหนาแน่นไม่เกิน 50 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตรค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนไม่เกิน 0.023 W/mK, ความหนาแน่นไม่น้อยกว่า 1 นิ้ว ทนทานต่อกรดและด่าง และมีการรับประกันอายุการใช้งานไม่น้อยกว่า 5 ปี

ฉนวนกันความร้อนแบบโฟมโพลีเอทีลีน (Polyethylene Foam) [7]

ฉนวนกันความร้อนแบบโฟมโพลีเอทีลีน สำหรับติดตั้งบนแผ่นฝ้าเพดาน หรือติดใต้หลังคาแผ่นโลหะ ให้ใช้แบบผิวฉนวนเป็นเซลปิด (closed cell polyethylene foam : P.E.) ปราศจากสารซีเอฟซี (CFC) ทนอุณหภูมิได้ไม่น้อยกว่า 85 °C ค่าความหนาแน่นไม่เกิน 50 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ไม่เกิน 0.030 W/mK, อัตราการดูดความชื้นไม่เกิน 2 % มีความยืดหยุ่นตัวได้ดีไม่ฉีกขาดง่าย ทนต่อสารเคมี กรดและด่าง โดยเมื่อใช้เป็นฉนวนความร้อนใต้หลังคาให้ใช้ชนิดความหนาไม่น้อยกว่า 10 มม. และมีการรับประกันอายุการใช้งานไม่น้อยกว่า 5 ปี

2.1.3 คุณสมบัติของฉนวนกันความร้อนที่ดี [7]

ฉนวนความร้อนจะต้องเลือกใช้ให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์กับงาน และตามชนิดของฉนวนซึ่งคุณสมบัติที่ดีนั้นพิจารณาได้ดังนี้

1. ควรมีน้ำหนักเบาและมีความหนาแน่นน้อย
2. มีค่าสภาพการนำความร้อนต่ำกล่าวคือ ยอมให้ความร้อนผ่านตัวฉนวนได้น้อยมาก
3. ในบางชนิดจะต้องมีความคงทนต่อแรงดึงและแรงอัดได้ดี
4. มีอัตราการดูดซับความชื้นที่ต่ำมากหรือไม่มีเลยจะดีมาก
5. สามารถต้านการกัดกร่อนได้ดีโดยเฉพาะทางเคมี
6. มีความคงตัวสูง เปลี่ยนรูปได้ยาก
7. ต้องทนต่อการติดไฟได้ดี
8. ใช้กับระดับอุณหภูมิที่กว้าง
9. ติดตั้งเพื่อใช้งานได้สะดวก
10. มีราคาถูก สามารถหาซื้อได้ง่าย

2.2 ความร้อน (Thermal) [6]

ความร้อนเป็นพลังงานรูปหนึ่งที่เปลี่ยนมาจากพลังงานรูปอื่น เช่น พลังงานไฟฟ้า พลังงานกล (พลังงานศักย์และ พลังงานจลน์) พลังงานเคมี พลังงานนิวเคลียร์ หรืองาน เป็นต้น

พลังงานความร้อนมีหน่วยเป็นจูล (Joule, J) ในระบบเอสไอ (SI) แต่บางครั้งอาจบอกเป็นหน่วยอื่นได้ เช่น แคลอรี (cal) และบีทียู (BTU)

พลังงานความร้อน 1 แคลอรี คือ พลังงานความร้อนที่ทำให้น้ำมวล 1 กรัม มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 องศาเซลเซียส (ºC) ในช่วง 14.5 ºC ถึง 15.5 ºC

พลังงานความร้อน 1 บีทียู คือ พลังงานความร้อนที่ทำให้น้ำมวล 1 ปอนด์ มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 องศาฟาเรนไฮต์ (ºF) ในช่วง 58.1 ºF ถึง 59.1 ºF

ปริมาณความร้อนของวัตถุ (HEAT, Q) เป็นพลังงานความร้อนที่วัตถุรับเข้ามาหรือคายออกไป

ความจุความร้อน (Heat capacity, C) คือความร้อนที่ทำให้สารทั้งหมดที่กำลังพิจารณามีอุณหภูมิเปลี่ยนไปหนึ่งหน่วย โดยสถานะไม่เปลี่ยน

ถ้าให้ปริมาณความร้อน ΔQ แก่วัตถุ ทำให้อุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนไป ΔT ดังนั้นถ้าอุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนไป 1 หน่วย จะใช้ความร้อน C คือ

$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ มีหน่วยเป็น จูล/ เคลวิล (J/K)

ความจุความร้อนจำเพาะ (Specific Heat Capacity, C) คือความร้อนที่ทำให้สาร (วัตถุ) มวลหนึ่งหน่วยมีอุณหภูมิเปลี่ยนไปหนึ่งองศาเคลวิน คือ

$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$ ความจุความร้อนจำเพาะของสาร$(J/kg - K)$

นั่นคือ เมื่อสารมวล m มีอุณหภูมิเพิ่มจาก T_1 เป็น T_2 และความจุความร้อนจำเพาะมีค่าคงตัว ความร้อนที่สารได้รับ คือ

$Q = C\Delta T$ หรือ $Q = mc\Delta T$

ความร้อนแฝง (Latent Heat) คือ ปริมาณความร้อนที่ทำให้วัตถุเปลี่ยนสถานะโดยอุณหภูมิคงที่

ความร้อนแฝงจำเพาะ (Specific Latent Heat, L) คือความร้อนที่ทำให้สาร(วัตถุ) มวลหนึ่งหน่วยเปลี่ยนสถานะไปจนหมด เช่น น้ำ ที่ความดัน 1 บรรยากาศ ความร้อนที่ทำให้น้ำแข็ง 1 กิโลกรัม อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส หลอมเหลวกลายเป็นน้ำหมดที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส จะใช้ความร้อน 333 กิโลจูล

ดังนั้น ความร้อนแฝงจำเพาะของการหลอมเหลวของน้ำ คือ L_f

$$L_f = 333\ kJ/kg$$

และที่ความดัน 1 บรรยากาศ ความร้อนที่ทำให้น้ำ 1 กิโลกรัม อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียสกลายเป็นไอน้ำหมดที่อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส จะใช้ความร้อน 2256 กิโลจูล

ดังนั้น ความร้อนแฝงจำเพาะของในการกลายเป็นไอของน้ำ คือ L_v

$$L_v = 2256\ kJ/kg$$

นั่นคือ ถ้าให้ Q คือความร้อนที่ทำให้สาร (วัตถุ) มวล m เปลี่ยนสถานะหมดคือ

$$Q = mL$$

2.2.1 การถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) [6]

ความร้อนจะถ่ายเทหรือส่งผ่านจากวัตถุที่มีระดับความร้อนสูง(อุณหภูมิสูง) ไปสู่วัตถุที่มีระดับความร้อนต่ำ (อุณหภูมิต่ำ) การถ่ายเทความร้อนมี 3 แบบ คือ

2.2.1.1 การนำความร้อน (Conduction) เป็นการถ่ายเทพลังงานความร้อนผ่านตัวกลาง ซึ่งโดยมากจะเป็นพวกโลหะต่างๆ เช่น เราเอามือไปจับช้อนโลหะที่ปลายข้างหนึ่งแช่อยู่ในน้ำร้อน มือเราจะรู้สึกร้อน เพราะความร้อนถูกส่งผ่านจากน้ำร้อนมายังมือเราโดยมีช้อนโลหะเป็นตัวนำความร้อน

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อน(K)

วัสดุ	**สัมประสิทธิ์การนำความร้อน(k)(W/m^2K)**
อากาศ (ที่ความดันบรรยากาศ)	0.026
อะลูมิเนียม	237
คอนกรีต	1.82
ทองแดง	401
เพชร	2300
น้ำแข็ง	2.2
กระดาษ	0.05
ไม้	0.1-0.35
เงิน	429

2.2.1.2 การพาความร้อน (Convection) เป็นการถ่ายเทความร้อนโดยการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของตัวกลางเป็นตัวพาความร้อนไปจากบริเวณที่มีระดับความร้อนสูง (อุณหภูมิสูง) ไปสู่บริเวณที่มีระดับความร้อนต่ำ (อุณหภูมิต่ำ) เช่นเวลาต้มน้ำความร้อนจากเตาทำให้น้ำที่ก้นภาชนะร้อนมันจะขยายตัวทำให้มีความหนาแน่นน้อยกว่าน้ำด้านบน จึงลอยตัวสูงขึ้นส่วนน้ำด้านบนอุณหภูมิต่ำกว่าความหนาแน่นมากก็จะจมลงมาแทนที่ การหมุนวนของน้ำทำให้เกิดการพาความร้อน การเคลื่อนที่ของความร้อนโดยการพาความร้อนนั้นจะเกิดขึ้นได้ 2 รูปแบบด้วยกันคือ [4]

1.เกิดขึ้นโดยปริมาณความร้อนที่อยู่ในของไหลทำให้ความหนาแน่นของส่วนต่างๆของของไหลต่างกัน ทำให้ของไหลเกิดการหมุนเวียนพาความร้อนไปถ่ายเทให้กับส่วนที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า วิธีนี้เรียกว่าการพาความร้อนแบบอิสระ หรือ การพาความร้อนในวิธีธรรมชาติ (Free or Natural convection)

2. เกิดขึ้นโดยทางกลไก เช่นมีการใช้ปั๊มน้ำหรือใช้พัดลมบังคับให้เกิดการถ่ายเทความร้อนออกไป วิธีนี้จะเรียกว่า การพาความร้อนในแบบกลไก หรือแบบบังคับ (Forced convection)

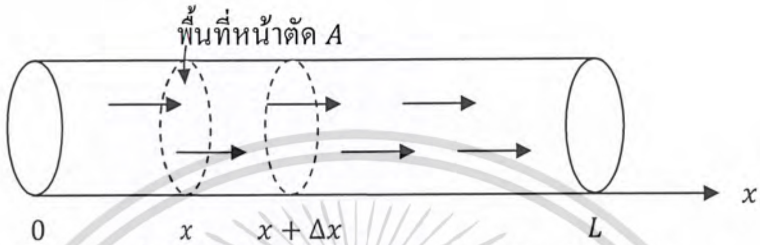
ตารางที่ 2.2 ค่าสัมประสิทธิ์ของการพาความร้อน

ลักษณะของการไหล	**สัมประสิทธิ์การพาความร้อน(k)(W/m^2K)**
การพาความร้อนแบบอิสระ	
ก๊าซ	2-25
ของเหลว	50-1,000
การพาความร้อนแบบบังคับ	
ก๊าซ	25-250
ของเหลว	50-20,000
การเดือดของน้ำและการกลั่นตัวของน้ำ	2,500-100,000

2.2.1.3 การแผ่รังสีความร้อน (Radiation) เป็นการส่งพลังงานความร้อนที่อยู่ในรูปคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (รังสีอินฟราเรด) ดังนั้นจึงไม่ต้องอาศัยตัวกลางในการเคลื่อนที่ เช่นการแผ่รังสีความร้อนจากดวงอาทิตย์มายังโลก โดยทั่วไปวัตถุที่แผ่รังสีได้ดีก็จะรับ (ดูดกลืน) รังสีได้ดีด้วย วัตถุชนิดนั้นเราเรียกว่าวัตถุดำ (Black Body) วัตถุดำไม่มีในธรรมชาติมีแต่ในอุดมคติ ดังนั้นวัตถุที่มีลักษณะใกล้เคียงวัตถุดำคือ วัตถุที่มีสีดำ ในทางกลับกันวัตถุขาวจะไม่ดูดกลืนรังสีและ ไม่แผ่รังสีที่ตกกระทบ มีแต่ในอุดมคติเท่านั้น

2.3 สมการความร้อน (Heat Equation) [1], [2]

การไหลของความร้อนในแท่งโลหะผอมๆยาวๆ หรือในเส้นลวด โดยแท่งโลหะยาว L มีพื้นที่หน้าตัด A วางในแนวแกน x ให้ปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น $0 \leq x \leq L$ ดังรูป



ภาพที่ 2.1 แสดงการไหลของความร้อนในแท่งโลหะ

มีข้อกำหนดดังนี้

- การไหลของความร้อนในแท่งโลหะจะไหลไปในทิศทางเดียวกำหนดให้เป็นทิศตามแนวแกน x
- ด้านข้างของแท่งโลหะถูกพันด้วยฉนวนเพื่อความร้อนจะไม่สูญหายไปตามพื้นผิวด้านข้างนี้ได้
- ไม่มีความร้อนเกิดขึ้นเองภายในแท่งโลหะ
- แท่งโลหะเป็นสารเนื้อเดียวโดยความหนาแน่น กล่าวคือ มวลต่อหน่วยปริมาตร ρ มีค่าคงที่
- ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) γ และค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) K ของเนื้อสารของโลหะมีค่าคงที่

อุณหภูมิเปลี่ยนไปตามตำแหน่งและเวลา ดังนั้น อุณหภูมิเป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่ง x และเวลา t หรือ $u = u(x, t)$ โดยอุณหภูมิเป็นไปตามกฎการนำความร้อน ดังนี้

1. ปริมาณความร้อน Q ในแต่ละหน่วยมวล m คือ $Q = \gamma m u$
   เมื่อ u เป็นอุณหภูมิของแต่ละหน่วยมวล m
   γ เป็นความร้อนจำเพาะ
2. การไหลของความร้อนใน 1 มิตินั้น จะพิจารณาเป็นสภาวะการไหลสม่ำเสมอของอุณหภูมิ u ซึ่งขึ้นอยู่กับแกน x เพียงอย่างเดียว ดังนั้น $u = u(x)$

ให้ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของพื้นผิว S ของแท่งโลหะ (ในกรณีพื้นผิว S อยู่ในแนวแกน x พื้นที่หน้าตัด A ตั้งฉากกับแกน)

ให้ u_x เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง x ใดๆ อัตราความร้อน Q_t ที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A ของพื้นที่ผิว S เป็นสัดส่วนกับ A และ u_x โดย

$$Q_t \propto Au_x \tag{2.1}$$

จะได้ว่า $$Q_t = -KAu_x \qquad \text{เมื่อ } K > 0 \tag{2.2}$$

เมื่อ K เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะจะได้ว่า $-K$ หมายถึงอุณหภูมิลดลง

พิจารณาการตัดแท่งโลหะตามขวางออกเป็นแผ่นบางๆระหว่าง x และ $x + \Delta x$ แล้ว $u(x,t)$ เป็นค่าประมาณอุณหภูมิ ณ แต่ละจุดในช่วงนี้โดยมวลของแผ่นโลหะกลมบางนี้คือ

$$m = \rho(A\Delta x) \tag{2.3}$$

ดังนั้นปริมาณความร้อนคือ

$$Q = \gamma\rho A\Delta xu \tag{2.4}$$

จะได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความร้อน ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_{\mathrm{t}} = \gamma\rho A\Delta xu_t \tag{2.5}$$

พิจารณาความร้อนไหลไปตามแกนบวก x จะได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของความร้อนคือ

$$-KAu_x(x,t) - \left(-KAu_x(x+\Delta x,t)\right) = KA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] \tag{2.6}$$

จากสมการ (5) และ (6) จะได้ว่า

$$KA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] = \gamma\rho A\Delta xu_t \tag{2.7}$$

$$\frac{K}{\gamma\rho}\left[\frac{u_x(\mathrm{x}+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\right] = u_t \tag{2.8}$$

พิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ Δx เข้าสู่ 0 กล่าวคือ โดยนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$\frac{K}{\gamma\rho}u_{xx} = u_t \tag{2.9}$$

ให้ $k = \frac{K}{\gamma\rho}$ เป็น ค่าการกระจายความร้อน ดังนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

กำหนดให้ ณ เวลา $t = 0$ อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งจะได้ว่า

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{เมื่อ } 0 < x < L$$

เป็น **เงื่อนไขเริ่มต้น** (initial condition)

กำหนดให้ที่ปลายทั้งสองข้างของแท่งโลหะอุณหภูมิเป็น T_0 เท่ากันจะได้

$$u(0,t) = T_0, \quad \text{และ} \quad u(L,t) = T_0 \qquad \text{เมื่อ } t > 0$$

หรือถ้ากำหนดว่าที่ปลายข้างหนึ่งอุณหภูมิเป็น T_0 ปลายอีกข้างอุณหภูมิเป็น T_1 ซึ่ง $T_0 \neq T_1$ จะได้ว่า

$$u(0,t) = T_0, \qquad u(L,t) = T_1 \qquad \text{เมื่อ } t > 0$$

เรียกเงื่อนไขประเภทนี้ว่า **เงื่อนไขขอบ** (boundary conditions)

ดังนั้นสมการความร้อน คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{เมื่อ } 0 < x < L \text{ และ } t > 0$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $u(x,0) = f(x)$ เมื่อ $0 < x < L$

มีเงื่อนไขขอบคือ $u(0,t) = A$ และ $u(L,t) = B$ เมื่อ $t > 0$

นอกจากเงื่อนไขดังกล่าวนี้ ในบางครั้งเงื่อนไขอาจอยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ โดย ถ้าปลายสุดของแท่งโลหะเป็นฉนวน ไม่มีความร้อนไหลออกจากแท่งโลหะ หรือไหลเข้าแท่งโลหะแล้ว

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} \propto u(L,t) - u_0$$

กล่าวคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = K(u(L,t) - u_0)$$

เมื่อ K เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะที่ปลายแต่ละข้างของแท่งโลหะ อาจกำหนดเงื่อนไขต่างกันในเวลาเดียวกันได้เช่น

$$u(0,t) = u_0 \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = T_0 \quad \text{เมื่อ } t > 0$$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 สมการรูปแบบไร้มิติ (Dimensionless form)

ในการคำนวณระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทางคณิตศาสตร์จะมีวิธี ที่เพียงพอสำหรับแก้ปัญหาต่างๆ ซึ่งสามารถแสดงได้ในตัวแปรของสมการไร้มิติ เช่น การสั่นของลูกตุ้มที่มีความหน่วง และการปล่อยกระแสไฟฟ้าที่ผ่านตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำที่ต่างกันในปัญหาทางฟิสิกส์ ซึ่งจะเหมือนกับทางคณิตศาสตร์ เมื่อแสดงในรูปของตัวแปรในสมการไร้มิติ โดยบางปัญหาไม่จำเป็นต้องใช้มิติที่ต่างกัน มีเพียงชนิดของตัวแปรของปัญหาที่อยู่ในรูปเดียวกัน ก็สามารถหาผลเฉลยเดียวกันได้ เช่น คำนวณคาบของการสั่นของสปริงที่มีความยาว (l) มวล (m) และความหน่วง (s) ที่แตกต่างกัน วิธีแก้ปัญหาที่สอดคล้องกับสมการแบบไร้มิติ จะแก้ปัญหาโดยใช้ความกว้างของสปริงเพราะตัวแปร ξ จะแทนการรวมกันของความยาว (l) มวล (m) และความหน่วง (s)

3.1.1 กระบวนการกำจัดมิติของสมการความร้อนในหนึ่งมิติ (Non-dimensionalizing of one-dimensional heat equation)

สามารถแสดงด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยชนิดพาราโบลิก ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial T} = K\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad \text{เมื่อ} \quad K \quad \text{เป็นค่าคงตัว} \tag{3.1}$$

เมื่อ X คือ ระยะทาง (เมตร)

U คือ อุณหภูมิ (องศาเซลเซียส) ที่ระยะทาง X

T คือ ระยะเวลา (วินาที)

กำหนดให้ L คือ ความหนาของฉนวนที่พิจารณา (เมตร)

U_0 คือ อุณหภูมิที่สูงที่สุดหรือต่ำที่สุด (องศาเซลเซียส) ณ เวลาที่ 0 วินาที

กำหนดให้

$$x = \frac{X}{L} \quad \text{และ} \quad u = \frac{U}{U_0} \tag{3.2}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dX} \tag{3.3}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d}{dX}x \tag{3.4}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{d}{dX}\left(\frac{X}{L}\right) \tag{3.5}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{1}{L}\right)\frac{dX}{dX} \tag{3.6}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{1}{L}\right) \tag{3.7}$$

และ $$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right) \tag{3.8}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\ \frac{1}{L}\right)\frac{dx}{dX} \tag{3.9}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\ \frac{1}{L^2}\right) \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{L^2}\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.11}$$

แทนสมการ (3.11) ลงใน (3.1) จะได้ $$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial (uU_0)}{\partial T} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2 (uU_0)}{\partial x^2} \tag{3.13}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{K}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.14}$$

นั่นคือ $$\frac{\partial u}{\partial T}\ \frac{L^2}{K} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.15}$$

จะได้ว่า $$\frac{\partial u}{\partial (\frac{TK}{L^2})} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.16}$$

ให้ $t = \frac{KT}{L^2}$ จะได้สมการความร้อนรูปแบบไร้มิติ คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.17}$$

3.1.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการความร้อนในหนึ่งมิติโดยวิธีชัดแจ้ง (A numerical solution of one-dimensional heat equation using explicit method)

พิจารณาสมการ (3.17) สมการแสดงให้อยู่ในรูปสมการวิธีชัดแจ้ง [3] ได้ดังนี้

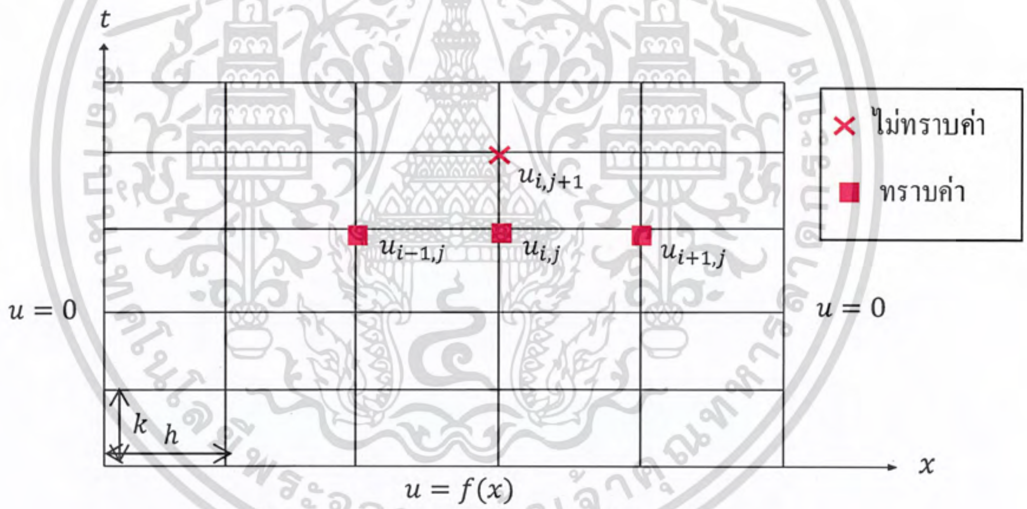
จะได้ $$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} \tag{3.18}$$

โดยที่ $$x = ih \quad \text{เมื่อ} \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{3.19}$$

$$t = jk \quad \text{เมื่อ} \quad j = 0,1,2,\ldots \tag{3.20}$$

ดังนั้น $$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \tag{3.21}$$

เมื่อ $r = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \dfrac{k}{h^2}$ โดยที่ $0 < r \leq \frac{1}{2}$ [3]



ภาพที่ 3.1 แสดงการคำนวณตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า

จากสมการ (3.21) ประมาณค่าจุดที่ไม่ทราบค่า u คือ $u_{i,j+1}$ ที่จุด $(i, j+1)$ โดยจุดที่ทราบค่า u ณ เวลา j (จากภาพ 3.1) แล้วจะสามารถคำนวณ u ที่ไม่ทราบค่าได้ด้วยแถวแรก $t = k$ ในเทอมของจุดที่ทราบค่า เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขค่าเริ่มต้น แทนด้วย $t = 0$ นั่นคือ จุดที่ไม่ทราบค่า ของแถวที่ 2 สามารถคำนวณได้จากจุดที่ทราบค่า

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาสมการความร้อน (3.21) ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น

(1) $u = 2x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ และ

(2) $u = 2(1-x)$ เมื่อ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

และเงื่อนไขขอบ คือ

(3) $u = 0$ เมื่อ $x = 0$

(4) $u = 0$ เมื่อ $x = 1$ ในเวลา t ใดๆ

ปัญหามีลักษณะสมมาตร ที่จุด $x = \frac{1}{2}$ ดังนั้นเราสามารถแก้ปัญหาเพียงแค่ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

กรณีที่ 1

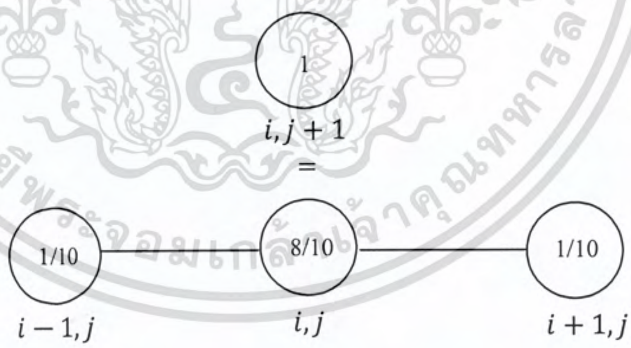
เลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{1}{1000}$ จะได้ $r = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$

จากสมการ (3.21) จะได้

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{10}(u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + u_{i+1,j}) \tag{3.22}$$

ในการคำนวณ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของฟังก์ชันทั้ง 4 แสดงความเหมาะสมได้ด้วยโมเลกุล ในภาพที่ 3.1 ตัวเลขในอะตอมคือ การเพิ่มจำนวนของค่าฟังก์ชันที่สอดคล้องกับการเมชจุด

จากการแสดงผลเฉลยในตาราง 3.1 สามารถตรวจสอบการคำนวณบางค่าได้ เพราะว่าคาของ u ที่ $x = \frac{4}{10}$ และ $\frac{6}{10}$ นั้นเท่ากัน เพราะปัญหานี้มีลักษณะสมมาตร



ภาพที่ 3.2 แสดงการคำนวณตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าของสมการ (3.22)

เช่น

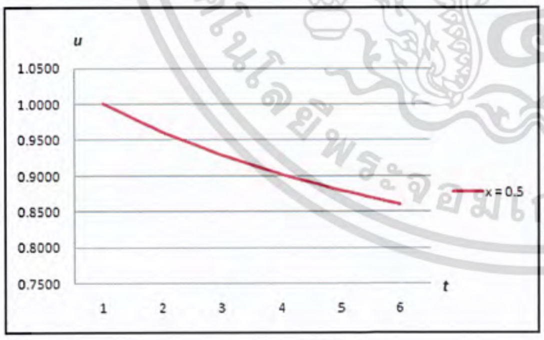
$$u_{5,1} = \frac{1}{10}[0.8 + (8x) + 0.8] = 0.9600$$
$$u_{4,2} = \frac{1}{10}[0.6 + (8x)0.8 + 0.96] = 0.7960$$

เมื่อเพิ่มค่าของ t ครั้งละ Δt จะแสดงดังตาราง 3.1

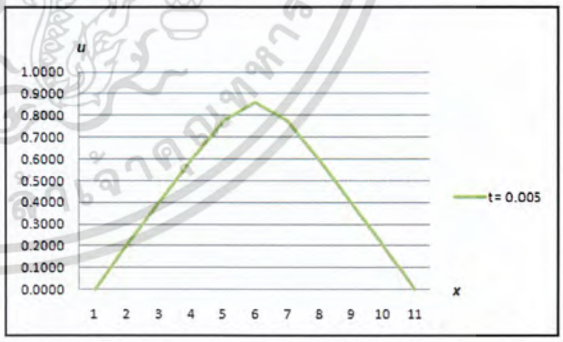
ตารางที่ 3.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของวิธีชัดแจ้งของสมการ (3.22) เมื่อเลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{1}{1000}$

t \ x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000	0.6000	0.4000	0.3000	0.0000
0.001	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.002	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.003	0.0000	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896	0.5996	0.4000	0.2000	0.0000
0.004	0.0000	0.2000	0.4000	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818	0.5986	0.4000	0.2000	0.0000
0.005	0.0000	0.2000	0.3998	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732	0.5971	0.3998	0.2000	0.0000

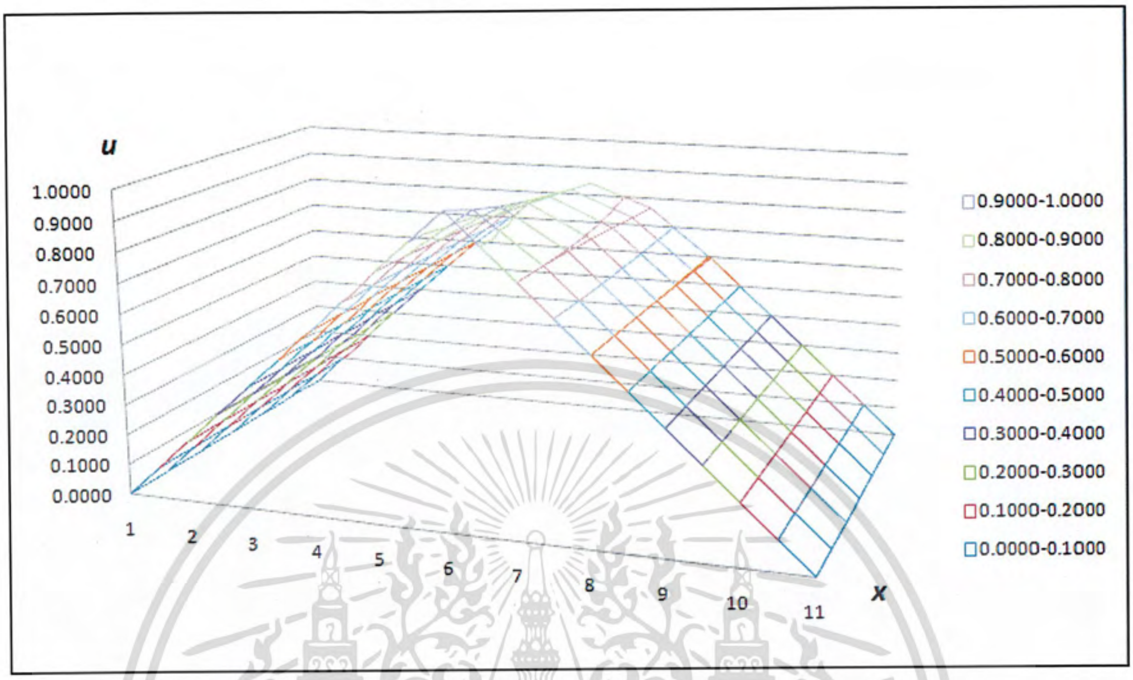
จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จะมีค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นถึง 0.5 และลดลงอย่างสมมาตรจนถึง 1.0



ภาพที่ 3.3 แสดงผลเฉลยที่จุด $x = 0.5$ ผลเฉลยที่ได้มีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป



ภาพที่ 3.4 ผลเฉลยที่จุด $t = 0.005$ ผลเฉลยที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นถึง $x = 0.5$ และลดลงอย่างสมมาตร



ภาพที่ 3.5 ผลเฉลยเมื่อ $0 \le x \le 1$ โดย $\Delta x = \frac{1}{10}$ และ $0 \le t \le 0.005$ โดย $\Delta t = \frac{1}{1000}$

จะเห็นว่าต้องใช้ Δt ที่มีขนาดเล็กมาก เนื่องจากการจำกัดของเงื่อนไขความเสถียร (Stability Condition)

กรณีที่ 2 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีเดิมโดย

เลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{5}{1000}$ จะได้ $r = \frac{k}{h^2} = 0.5$

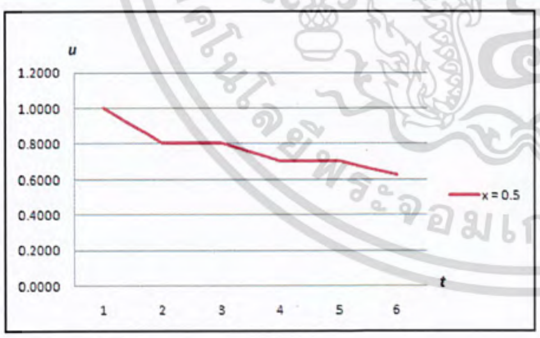
จากสมการ (3.21) จะได้

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \tag{3.23}$$

ตารางที่ 3.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของวิธีชัดแจ้งของสมการ (3.22) เมื่อเลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{5}{1000}$

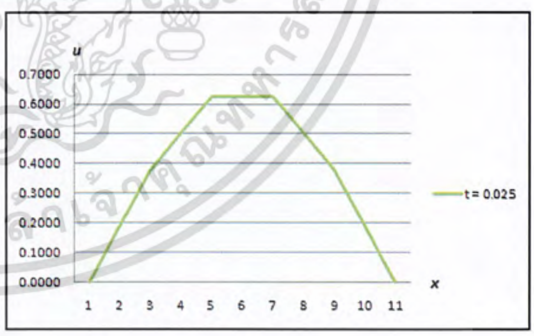
t \ x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.005	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.010	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.015	0.0000	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000	0.7000	0.5500	0.4000	0.2000	0.0000
0.020	0.0000	0.2000	0.3750	0.5500	0.6250	0.7000	0.6250	0.5500	0.3750	0.2000	0.0000
0.025	0.0000	0.1875	0.3750	0.5000	0.6250	0.6250	0.6250	0.5000	0.3750	0.1875	0.0000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จะมีค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นถึง 0.5 และลดลงอย่างสมมาตรจนถึง 1.0



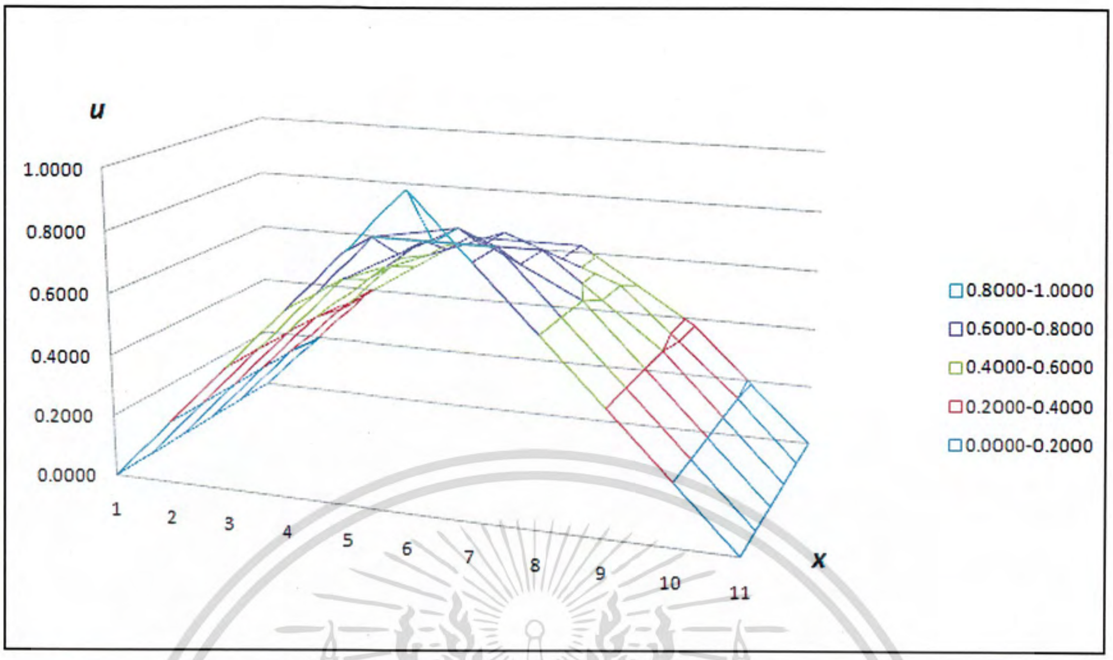
ภาพที่ 3.6 ผลเฉลยที่จุด $x = 0.5$

ผลเฉลยที่ได้มีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป



ภาพที่ 3.7 ผลเฉลยที่จุด $t = 0.025$

ผลเฉลยที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นถึง $x = 0.5$ และลดลงอย่างสมมาตร



ภาพที่ 3.8 ผลเฉลยเมื่อ $0 \leq x \leq 1$ โดย $\Delta x = \frac{1}{10}$ และ $0 \leq t \leq 0.025$ โดย $\Delta t = \frac{5}{1000}$ จะเห็นว่าต้องใช้ Δt ที่มีขนาดเล็กมาก เนื่องจากการจำกัดของเงื่อนไขความเสถียร (Stability Condition)

จากกรณีที่ 1 และ 2 เป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีชัดแจ้ง (Explicit method) โดยมีเงื่อนไขความเสถียรตามข้อกำหนด นั่นคือ $r \geq \frac{1}{2}$ ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าลู่เข้า ส่วนในกรณีที่ 3 จะศึกษากรณีที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขความเสถียร โดยจะใช้ $r = 1$ ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยมีค่าลู่ออก

กรณีที่ 3 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีเดิมโดย

เลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{1}{100}$ จะได้ $r = \frac{k}{h^2} = 1$

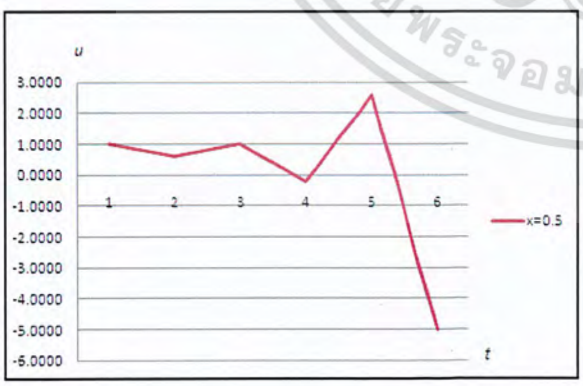
จากสมการ (3.21) จะได้

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j} \tag{3.23}$$

ตารางที่ 3.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของวิธีชัดแจ้งของสมการ (3.23) เมื่อเลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ

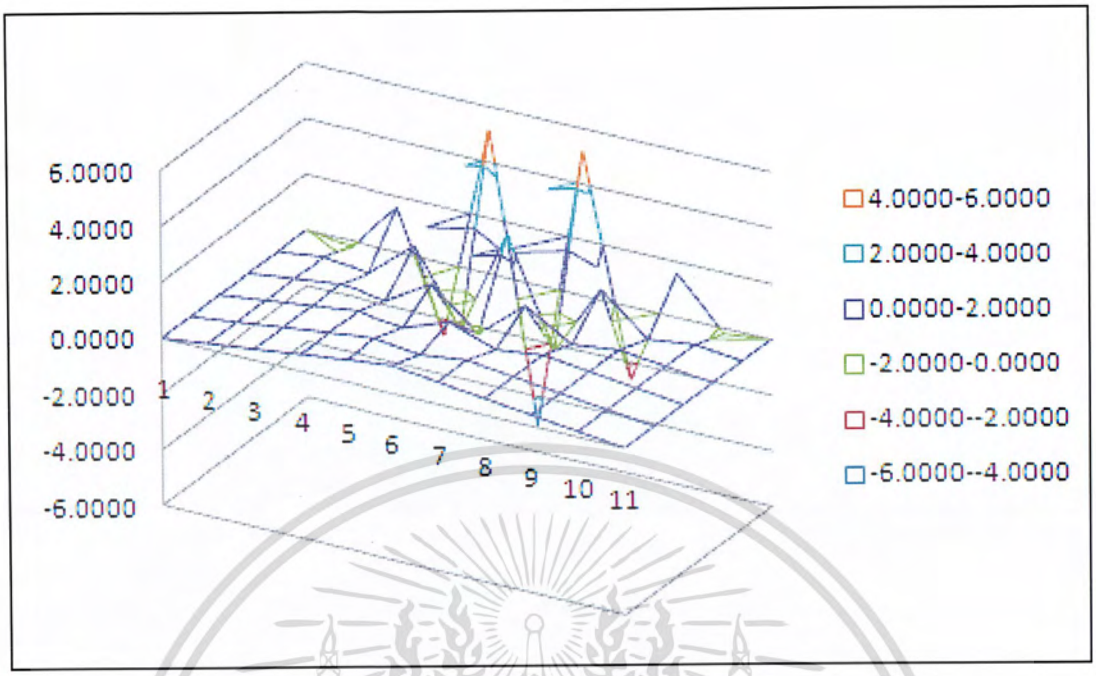
t \ x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.01	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.6000	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.02	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.4000	1.0000	0.4000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.03	0.0000	0.2000	0.4000	0.2000	1.2000	-0.2000	1.2000	0.2000	0.4000	0.2000	0.0000
0.04	0.0000	0.2000	0.0000	1.4000	-1.2000	2.6000	-1.2000	1.4000	0.0000	0.2000	0.0000
0.05	0.0000	-0.2000	1.6000	-2.6000	5.2000	-5.0000	5.2000	-2.6000	1.6000	-0.2000	0.0000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จะมีค่าผลเฉลยข้ามไปข้ามมาไม่มีลักษณะที่จะลู่เข้าไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง



ภาพที่ 3.9 ผลเฉลยที่จุด $x = 0.5$ ผลเฉลยทีได้มีลักษณะไม่คงที่

ภาพที่ 3.10 ผลเฉลยที่จุด $t = 0.025$ ผลเฉลยทีได้มีลักษณะไม่คงที่



ภาพที่ 3.11 ผลเฉลยเมื่อ $0 \le x \le 1$ โดย $\Delta x = \frac{1}{10}$ และ $0 \le t \le 0.05$ โดย $\Delta t = \frac{1}{100}$ จะเห็นว่าเราไม่สามารถเลือก Δt มากกว่า $\frac{1}{2}$ เพราะทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าลู่ออก

3.1.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการความร้อนในหนึ่งมิติโดยวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Implicit method)

ถึงแม้ว่าวิธีชัดแจ้งจะเป็นการคำนวณแบบง่ายๆ แต่มีข้อจำกัดบางประการเช่นกัน นั่นคือ ขนาดของ $\Delta t = k$ จะต้องมีขนาดเล็กมากเพราะว่าระเบียบวิธีจะมีความเสถียรเมื่อ $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ [3] นั่นคือ $k \leq \frac{1}{2}h^2$ และ $h = \Delta x$ ต้องมีค่าที่มีความละเอียดมากๆเพื่อที่จะหาผลเฉลยได้แม่นยำโดย Crank และ Nicolson [4] ได้เสนอวิธีการซึ่งช่วยลดปริมาณการคำนวณ (สามารถเลือก Δt ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น) และสามารถใช้ได้ตรงตามความต้องการทุกค่าของ r โดย $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ด้วย สมการผลต่างจำกัน ซึ่งแสดงด้วย แถวที่ j และแถวที่ $j+1$ และประมาณค่าสมการ (3.17)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

โดย

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}\right\} \qquad (3.24)$$

จะได้ว่า

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2-2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \qquad (3.25)$$

โดยที่ $r = \frac{k}{h^2}$ สำหรับทุกๆค่า $r > 0$ และ $i = 1,2,3,\ldots,N$ และ $j = 1,2,3,\ldots$

จะเห็นว่า ด้านซ้ายของสมการ (3.25) จะมี 3 พจน์ที่ไม่ทราบค่าและด้านขวาจะมี 3 พจน์ที่ทราบค่า ซึ่งนำไปสร้างระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยต่อไป

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{โดยที่} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $u = 0,\ x = 0$ และ 1 เมื่อ $t = 0$

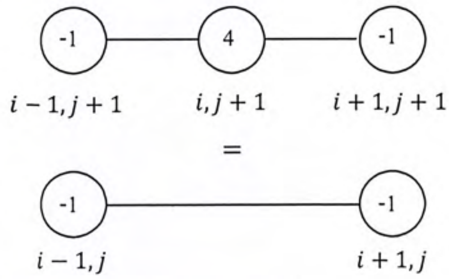
เงื่อนไขขอบ $u = 2x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ และ $t = 0$

$u = 2(1-x)$ เมื่อ $\frac{1}{2} < x \leq 1$ และ $t = 0$

เลือก $h = \frac{1}{10}$ และเลือก $k = \frac{1}{100}$ จะได้ $r = 1$ จากสมการ (3.25) จะได้

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \qquad (3.26)$$

โมเลกุลที่ตรงกับสมการ (3.26) แสดงใน รูปที่ 3.3 ใช้แสดง $u_{i,j+1}$ โดยที่ $u_i(i = 1,2,\ldots,9)$ เนื่องจากปัญหานี้สมมาตรจะได้ว่า $u_6 = u_4, u_7 = u_3, u_8 = u_2$ และ $u_9 = u_1$



ภาพที่ 3.12 แสดงการคำนวณตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าของสมการ (3.26)

จะได้

$$-0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.4 \tag{3.27}$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.2 + 0.6 \tag{3.28}$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.4 + 0.8 \tag{3.29}$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.6 + 1.0 \tag{3.30}$$

$$-2u_4 + 4u_5 = 0.8 + 0.8 \tag{3.31}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{Bmatrix}$$

จากนั้น หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น จะได้ว่า

$u_1 = 0.1989$, $u_2 = 0.3956$, $u_3 = 0.5834$, $u_4 = 0.7381$, $u_5 = 0.7691$ เมื่อ $t = 0.01$

แล้วสมการของ u ในแถวถัดมา สำหรับ $t = 0.02$ คือ

$$-0 + 4u_1 - u_2 = 0 + 0.3956 \tag{3.32}$$

$$-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.1989 + 0.5834 \tag{3.33}$$

$$-u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.3956 + 0.7381 \tag{3.34}$$

$$-u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.5834 + 0.7691 \tag{3.35}$$

$$-2u_4 + 4u_5 = 2 + 0.7381 \tag{3.36}$$

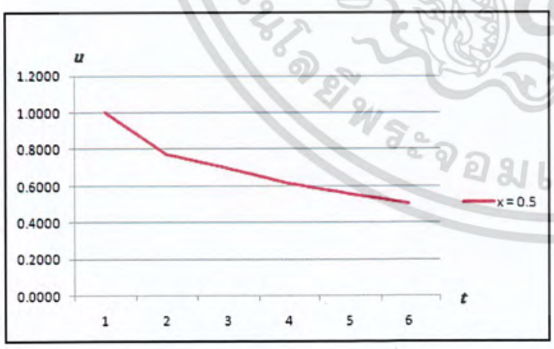
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3956 \\ 0.7823 \\ 1.1337 \\ 1.3525 \\ 2.7381 \end{bmatrix}$$

คำตอบของสมการนี้แสดงในตารางที่ 3.4

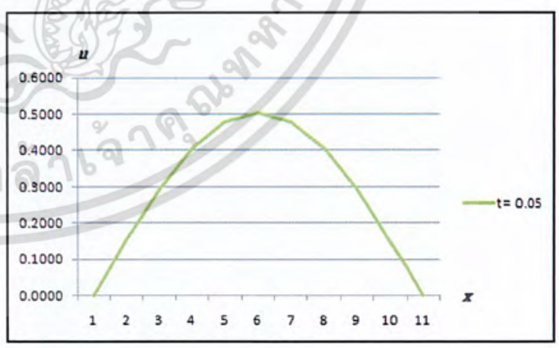
ตารางที่ 3.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธีแครงก์-นิโคลสัน ของสมการ (3.26) เมื่อเลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{1}{100}$

t \ x	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.0000	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000	0.6000	0.4000	0.2000	0.0000
0.0100	0.0000	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691	0.7381	0.5834	0.3956	0.1989	0.0000
0.0200	0.0000	0.1936	0.3789	0.5397	0.6461	0.6921	0.6461	0.5397	0.3789	0.1936	0.0000
0.0300	0.0000	0.1826	0.3515	0.4902	0.5843	0.6152	0.5843	0.4902	0.3515	0.1826	0.0000
0.0400	0.0000	0.1683	0.3218	0.4461	0.5268	0.5555	0.5268	0.4461	0.3218	0.1683	0.0000
0.0500	0.0000	0.1538	0.2932	0.4047	0.4771	0.5019	0.4771	0.4047	0.2932	0.1538	0.0000

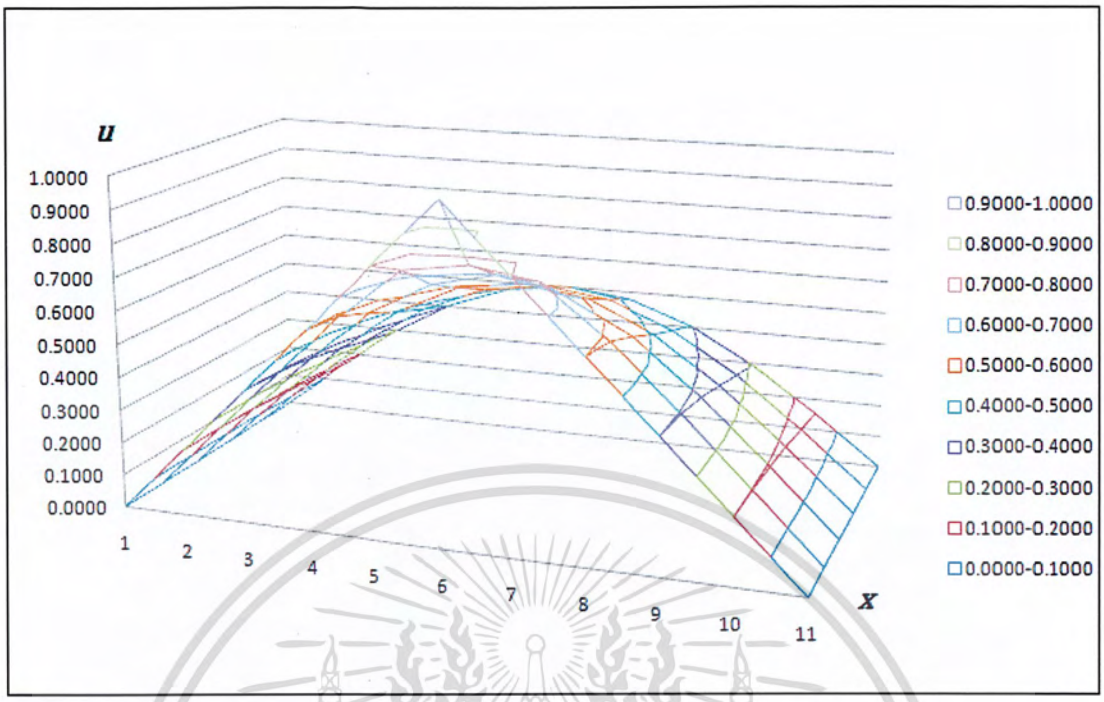
จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จะมีค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นถึง 0.5 และลดลงอย่างสมมาตรจนถึง 1.0



ภาพที่ 3.13 ผลเฉลยที่จุด $x = 0.5$
ผลเฉลยที่ได้มีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป



ภาพที่ 3.14 ผลเฉลยที่จุด $t = 0.01$
ผลเฉลยที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้นถึง $x = 0.5$ และลดลงอย่างสมมาตร



ภาพที่ 3.15 ผลเฉลยเมื่อ $0 \leq x \leq 1$ โดย $\Delta x = \frac{1}{10}$ และ $0 \leq t \leq 0.05$ โดย $\Delta t = \frac{1}{100}$ จะเห็นว่าสามารถเลือกใช้ Δt ที่มีขนาดใหญ่ตามความต้องการได้

ผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) แสดงด้วย

$$u = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{2}n\pi)(\sin n\pi x)\exp\,(-n^2\pi^2 t) \tag{3.37}$$

การเปรียบเทียบผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ที่ $x = 0.5$ กับ ผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic solution) แสดงด้วย ค่าผิดพลาด (Percentage error) ของผลต่างทั้ง 2 วิธี โดยตารางที่ 3.4 เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธีชัดแจ้ง (Explicit method) และตารางที่ 3.5 เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Implicit method)

ตารางที่ 3.5 เปรียบเทียบผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (วิธีชัดแจ้ง) และผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic solution)

t	Finite difference solution ($x = 0.5$)	Analytical solution($x = 0.5$)	Difference	Percentage error
0.005	0.8597	0.8404	0.0193	2.3
0.01	0.7867	0.7743	0.0124	1.6
0.02	0.6891	0.6809	0.0082	1.2
0.1	0.3056	0.3021	0.0035	1.2

ตารางที่ 3.6 เปรียบเทียบผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (วิธีแครงก์-นิโคลสัน) และผลเฉลยวิเคราะห์(Analytic solution)

t	Finite difference solution ($x = 0.5$)	Analytical solution($x = 0.5$)	Difference	Percentage error
0.01	0.7691	0.7743	-0.0052	-0.7
0.02	0.6921	0.6809	0.0112	1.6
0.1	0.3069	0.3021	0.0048	1.6

จากตารางที่ 3.4 และ 3.5 ค่าผิดพลาด (Percentage error) ของทั้ง 2 วิธี ณ ตำแหน่ง $t = 0.01, 0.02$ และ 0.10 นั้นมีค่าแตกต่างกัน คือเมื่อเวลาผ่านไป วิธีชัดแจ้งนั้นจะมีค่าผิดพลาดที่น้อยกว่าวิธีแครงก์-นิโคลสัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธีชัดแจ้งมีความแม่นยำมากกว่าวิธีแครงก์-นิโคลสัน

3.1.4 กระบวนการเพิ่มมิติ (Dimensionalize)

เมื่อมีการหาผลเฉลยของปัญหาสมการในรูปแบบไร้มิติแล้ว จะต้องมีการเปลี่ยนรูปของผลเฉลยให้กลับมาอยู่ในรูปของสมการหนึ่งมิติเช่นเดิม โดยจะใช้สมการจากกระบวนการกำจัดมิติ ดังนี้

จากสมการ 3.2 จะได้ $X = xL$ (3.38)

$U = uU_0$ (3.39)

และจาก $t = \frac{KT}{L^2}$ (3.40)

จะได้ $T = \frac{tL^2}{K}$ (3.41)

จากสมการ (3.38), (3.39) และ (3.41) สามารถนำไปหา X, U และ T เพื่อให้ได้ผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบของสมการในหนึ่งมิติได้ เมื่อ $K = 0.0353$ จะได้ดังตารางที่ 3.6

ตารางที่ 3.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธีแครงก์-นิโคลสันของสมการ (3.26) เมื่อเลือก $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ และ $\Delta t = k = \frac{1}{100}$ และผ่านกระบวนการเพิ่มมิติแล้ว

t \ x	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	0.000	20.000	40.000	60.000	80.000	100.000	80.000	60.000	40.000	20.000	0.000
0.0001	0.000	19.890	39.560	58.340	73.810	76.910	73.810	58.340	39.560	19.890	0.000
0.0003	0.000	19.360	37.890	53.970	64.610	69.210	64.610	53.970	37.890	19.360	0.000
0.0004	0.000	18.260	35.150	49.020	58.430	61.520	58.430	49.020	35.150	18.260	0.000
0.0006	0.000	16.830	32.180	44.610	52.680	55.550	52.680	44.610	32.180	16.830	0.000
0.0008	0.000	15.380	29.320	40.470	47.710	50.190	47.710	40.470	29.320	15.380	0.000

บทที่ 4

ผลการคำนวณ

จากการศึกษาเนื้อหาและขั้นตอนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการความร้อนในหนึ่งมิติโดยวิธีชัดแจ้งเละวิธีแครงก์-นิโคลสันได้มีการกำหนดค่าของตัวแปรต่างๆและแสดงผลเฉลยออกมาเป็นตารางและกราฟ ณ เวลาใดๆได้ ดังนี้

4.1 การกำหนดค่าของตัวแปรต่างๆ

สมมติฐานของปัญหา

4.1.1 ตู้ทำน้ำร้อนน้ำเย็นมีลักษณะเป็น 2 ก๊อก คือ ก๊อกด้านที่ทำน้ำร้อนและก๊อกด้านที่ทำน้ำเย็น ซึ่งมีตัวกลางเป็นฉนวนกันความร้อนกั้นอยู่

4.1.2 อุณหภูมิของน้ำร้อนและน้ำเย็นที่นำมาศึกษา จะเป็นอุณหภูมิจริงโดยประมาณของน้ำขณะร้อนจัดและเย็นจัดโดยประมาณได้ ดังนี้

ตารางที่ 4.1 อุณหภูมิของน้ำร้อนน้ำเย็น

กรณี	น้ำเย็น (องศา)	น้ำร้อน (องศา)
1	3	98
2	3	85
3	3	60

4.1.3 ฉนวนที่นำมาพิจารณาในปัญหานี้มี 3 แบบ ได้แก่

4.1.3.1 ฉนวนใยแก้ว มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (K) ไม่เกิน 0.0353 W/mk

4.1.3.2 ฉนวนโฟมโพลีเอทิลีน มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (K) ไม่เกิน 0.030 W/mk

4.1.3.3 ฉนวนโฟมโพลิยูเรเทน มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (K) ไม่เกิน 0.023 W/mk

4.1.4 ฉนวนมีความหนา 1 เซนติเมตรต้องการทราบอุณหภูมิทุกๆ 1 มิลลิเมตร

4.1.5 พิจารณาสมการความร้อนแบบไร้มิติ (3.17) คือ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

โดยจะมีการพิจารณา 3 กรณี คือ

กรณี 1 ให้น้ำเย็นอุณหภูมิ 3 องศาเซลเซียส น้ำร้อนอุณหภูมิ 98 องศาเซลเซียส

พิจารณา ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น

$u = 0.03 + 0.95x^2$ เมื่อ $0 \le x \le 1$

เงื่อนไขขอบ

$u = 0.03$ เมื่อ $x = 0$

$u = 0.98$ เมื่อ $x = 1$ ณ เวลา t ใดๆ

กรณี 2 ให้น้ำเย็นอุณหภูมิ 3 องศาเซลเซียส น้ำร้อนอุณหภูมิ 85 องศาเซลเซียส

พิจารณา ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น

$u = 0.03 + 0.82x^2$ เมื่อ $0 \le x \le 1$

เงื่อนไขขอบ

$u = 0.03$ เมื่อ $x = 0$

$u = 0.85$ เมื่อ $x = 1$ ณ เวลา t ใดๆ

กรณี 3 ให้น้ำเย็นอุณหภูมิ 3 องศาเซลเซียส น้ำร้อนอุณหภูมิ 60 องศาเซลเซียส

พิจารณา ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น

$u = 0.03 + 0.57x^2$ เมื่อ $0 \le x \le 1$

เงื่อนไขขอบ

$u = 0.03$ เมื่อ $x = 0$

$u = 0.60$ เมื่อ $x = 1$ ณ เวลา t ใดๆ

โดยทั้ง 3 กรณี ใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ในการหาผลเฉลย 2 วิธี ดังนี้

1) วิธีชัดแจ้ง (Explicit method : forward time central space (FTCS))

โดยเลือก $h = \Delta x = 1$ มิลลิเมตร หรือ $\Delta x = 0.1$ (ในรูป non-dimensional)

และต้องการทราบอุณหภูมิในฉนวนทุกๆ 1 มิลลิเมตรหรือ $\Delta t = 0.005$ (ในรูป non-dimensional)

ความหนาของฉนวน $L = 0.01$ เมตร

อุณหภูมิสูงสุด $U_0 = 100$ องศาเซลเซียส

2) วิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson implicit method)

โดยเลือก $h = \Delta x = 1$ มิลลิเมตร หรือ $\Delta x = 0.1$ (ในรูป non-dimensional)

และต้องการทราบอุณหภูมิในฉนวนทุกๆ 1 มิลลิเมตรหรือ $\Delta t = 0.05$ (ในรูป non-dimensional)

ความหนาของฉนวน $L = 0.01$ เมตร

4.2 ตารางของการคำนวณ และกราฟของผลการคำนวณ

4.2.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธีชัดแจ้ง (Explicit method)

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.00001	3.000	4.900	7.750	12.500	19.150	27.700	38.150	50.500	64.750	80.900	98.000
0.00003	3.000	5.375	8.700	13.450	20.100	28.650	39.100	51.450	65.700	81.375	98.000
0.00004	3.000	5.850	9.413	14.400	21.050	29.600	40.050	52.400	66.413	81.850	98.000
0.00006	3.000	6.206	10.125	15.231	22.000	30.550	41.000	53.231	67.125	82.206	98.000
0.00007	3.000	6.563	10.719	16.063	22.891	31.500	41.891	54.063	67.719	82.563	98.000
0.00008	3.000	6.859	11.313	16.805	23.781	32.391	42.781	54.805	68.313	82.859	98.000
0.00010	3.000	7.156	11.832	17.547	24.598	33.281	43.598	55.547	68.832	83.156	98.000

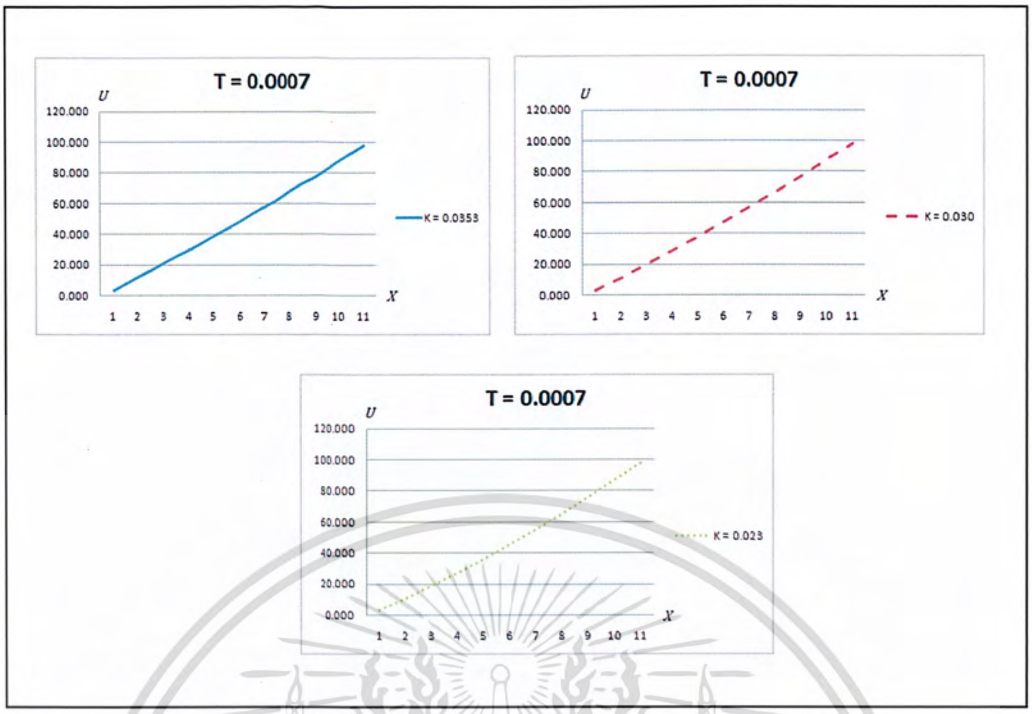
ตารางที่ 4.3 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.00002	3.000	4.900	7.750	12.500	19.150	27.700	38.150	50.500	64.750	80.900	98.000
0.00003	3.000	5.375	8.700	13.450	20.100	28.650	39.100	51.450	65.700	81.375	98.000
0.00005	3.000	5.850	9.413	14.400	21.050	29.600	40.050	52.400	66.413	81.850	98.000
0.00007	3.000	6.206	10.125	15.231	22.000	30.550	41.000	53.231	67.125	82.206	98.000
0.00008	3.000	6.563	10.719	16.063	22.891	31.500	41.891	54.063	67.719	82.563	98.000
0.00010	3.000	6.859	11.313	16.805	23.781	32.391	42.781	54.805	68.313	82.859	98.000

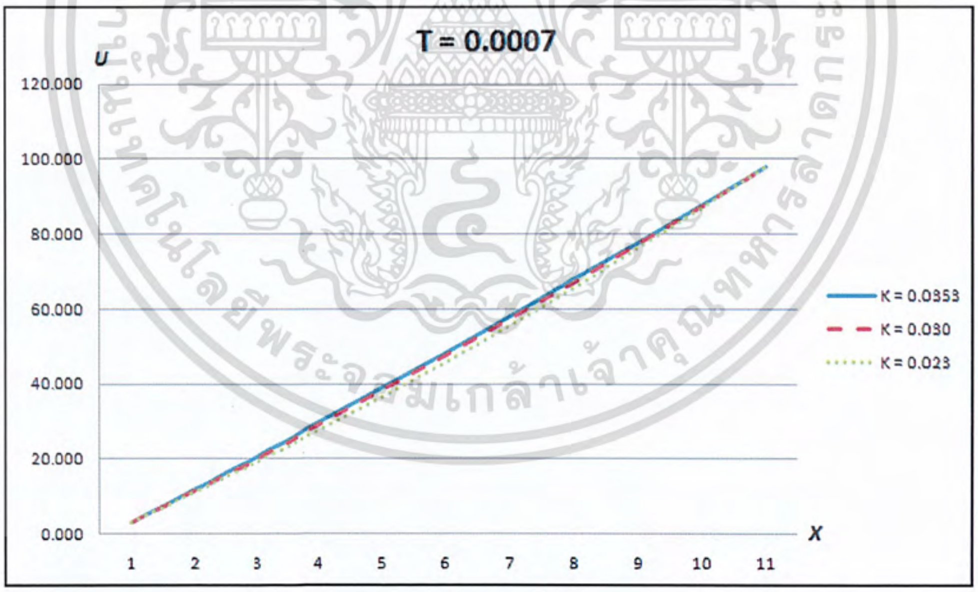
ตารางที่ 4.4 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.00002	3.000	4.900	7.750	12.500	19.150	27.700	38.150	50.500	64.750	80.900	98.000
0.00004	3.000	5.375	8.700	13.450	20.100	28.650	39.100	51.450	65.700	81.375	98.000
0.00006	3.000	5.850	9.413	14.400	21.050	29.600	40.050	52.400	66.413	81.850	98.000
0.00009	3.000	6.206	10.125	15.231	22.000	30.550	41.000	53.231	67.125	82.206	98.000
0.00011	3.000	6.563	10.719	16.063	22.891	31.500	41.891	54.063	67.719	82.563	98.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.1 แสดงผลเฉลยในกรณี 1 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 1 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกันจะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือเมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

ตารางที่ 4.5 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.00001	3.000	4.640	7.100	11.200	16.940	24.320	33.340	44.000	56.300	70.240	85.000
0.00003	3.000	5.050	7.920	12.020	17.760	25.140	34.160	44.820	57.120	70.650	85.000
0.00004	3.000	5.460	8.535	12.840	18.580	25.960	34.980	45.640	57.735	71.060	85.000
0.00006	3.000	5.768	9.150	13.558	19.400	26.780	35.800	46.358	58.350	71.368	85.000
0.00007	3.000	6.075	9.663	14.275	20.169	27.600	36.569	47.075	58.863	71.675	85.000
0.00008	3.000	6.331	10.175	14.916	20.938	28.369	37.338	47.716	59.375	71.931	85.000
0.00010	3.000	6.588	10.623	15.556	21.642	29.138	38.042	48.356	59.823	72.188	85.000

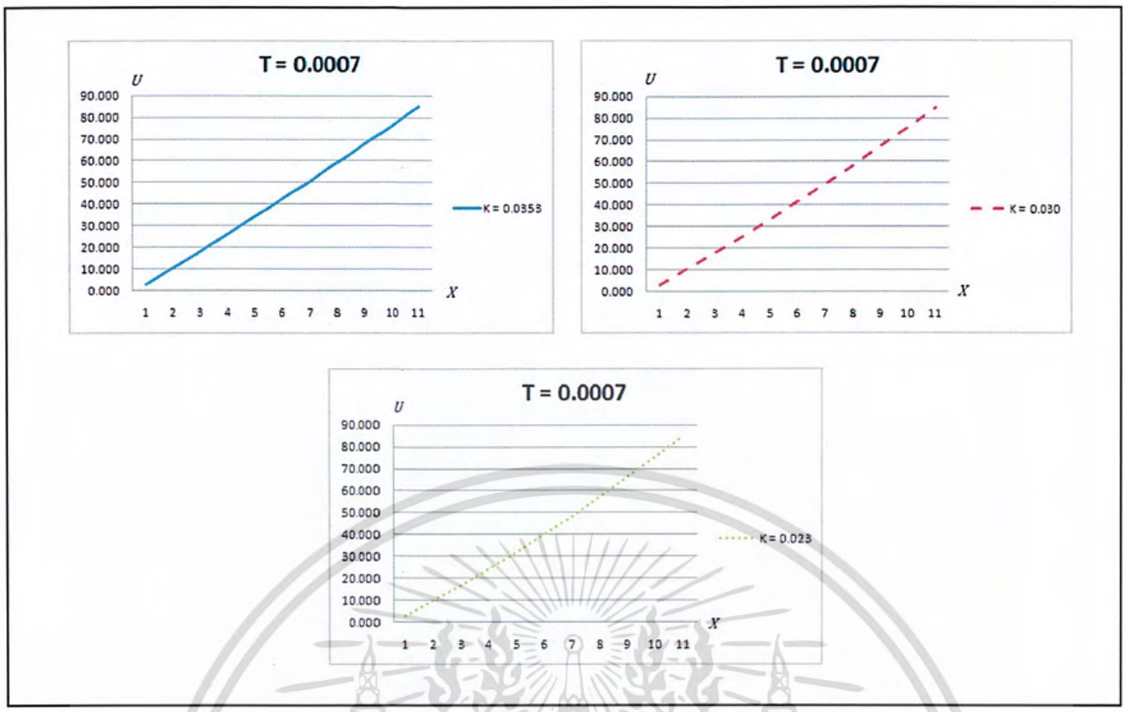
ตารางที่ 4.6 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.00002	3.000	4.640	7.100	11.200	16.940	24.320	33.340	44.000	56.300	70.240	85.000
0.00003	3.000	5.050	7.920	12.020	17.760	25.140	34.160	44.820	57.120	70.650	85.000
0.00005	3.000	5.460	8.535	12.840	18.580	25.960	34.980	45.640	57.735	71.060	85.000
0.00007	3.000	5.768	9.150	13.558	19.400	26.780	35.800	46.358	58.350	71.368	85.000
0.00008	3.000	6.075	9.663	14.275	20.169	27.600	36.569	47.075	58.863	71.675	85.000
0.00010	3.000	6.331	10.175	14.916	20.938	28.369	37.338	47.716	59.375	71.931	85.000

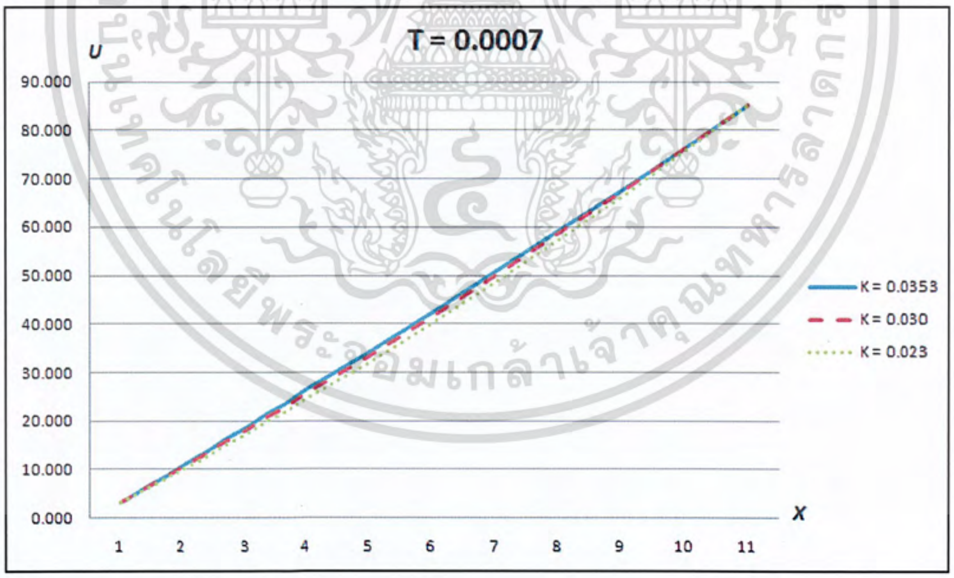
ตารางที่ 4.7 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.00002	3.000	4.640	7.100	11.200	16.940	24.320	33.340	44.000	56.300	70.240	85.000
0.00004	3.000	5.050	7.920	12.020	17.760	25.140	34.160	44.820	57.120	70.650	85.000
0.00006	3.000	5.460	8.535	12.840	18.580	25.960	34.980	45.640	57.735	71.060	85.000
0.00009	3.000	5.768	9.150	13.558	19.400	26.780	35.800	46.358	58.350	71.368	85.000
0.00011	3.000	6.075	9.663	14.275	20.169	27.600	36.569	47.075	58.863	71.675	85.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้นถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.3 แสดงผลเฉลยในกรณี 2 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 2 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกัน จะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือ เมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

ตารางที่ 4.8 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.00001	3.000	4.140	5.850	8.700	12.690	17.820	24.090	31.500	40.050	49.740	60.000
0.00003	3.000	4.425	6.420	9.270	13.260	18.390	24.660	32.070	40.620	50.025	60.000
0.00004	3.000	4.710	6.848	9.840	13.830	18.960	25.230	32.640	41.048	50.310	60.000
0.00006	3.000	4.924	7.275	10.339	14.400	19.530	25.800	33.139	41.475	50.524	60.000
0.00007	3.000	5.138	7.631	10.838	14.934	20.100	26.334	33.638	41.831	50.738	60.000
0.00008	3.000	5.316	7.988	11.283	15.469	20.634	26.869	34.083	42.188	50.916	60.000
0.00010	3.000	5.494	8.299	11.728	15.959	21.169	27.359	34.528	42.499	51.094	60.000

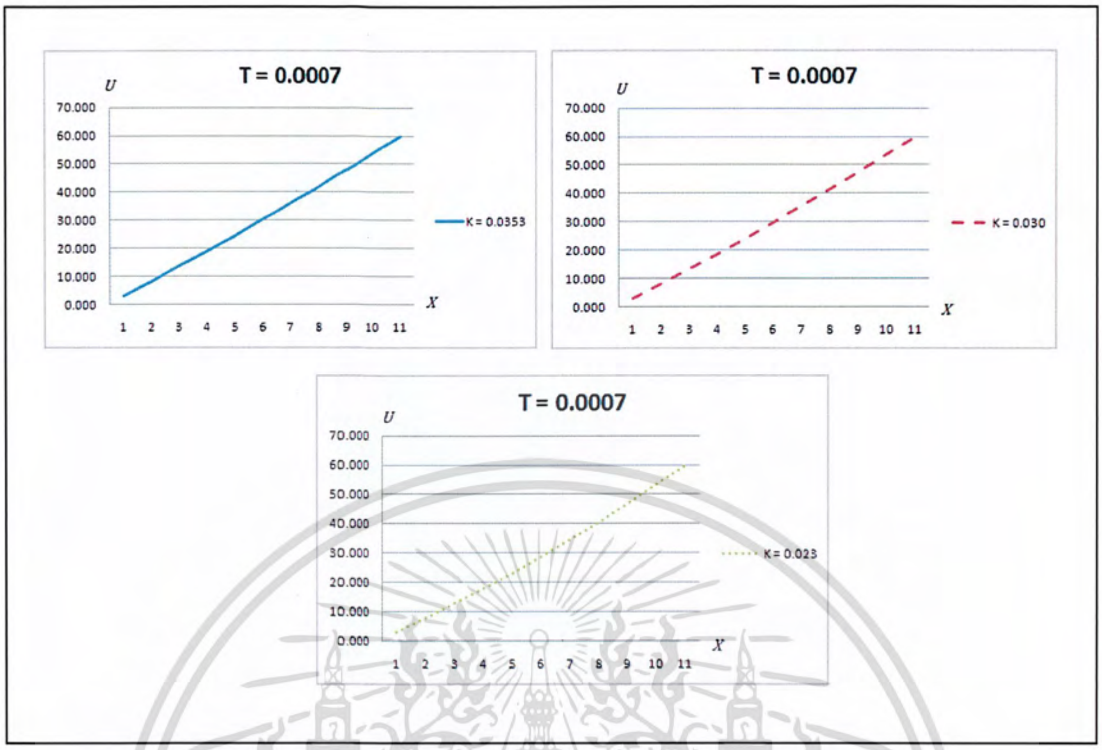
ตารางที่ 4.9 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.00002	3.000	4.140	5.850	8.700	12.690	17.820	24.090	31.500	40.050	49.740	60.000
0.00003	3.000	4.425	6.420	9.270	13.260	18.390	24.660	32.070	40.620	50.025	60.000
0.00005	3.000	4.710	6.848	9.840	13.830	18.960	25.230	32.640	41.048	50.310	60.000
0.00007	3.000	4.924	7.275	10.339	14.400	19.530	25.800	33.139	41.475	50.524	60.000
0.00008	3.000	5.138	7.631	10.838	14.934	20.100	26.334	33.638	41.831	50.738	60.000
0.00010	3.000	5.316	7.988	11.283	15.469	20.634	26.869	34.083	42.188	50.916	60.000

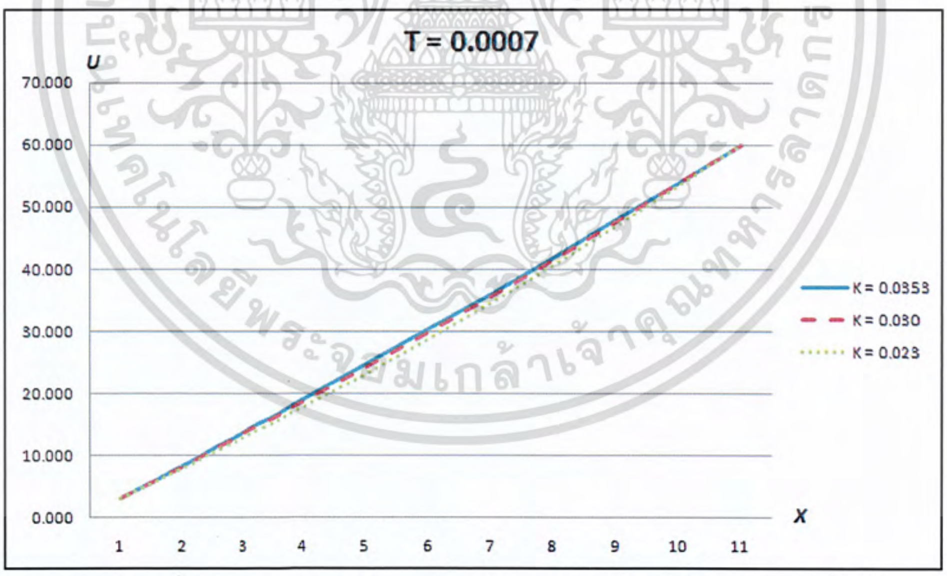
ตารางที่ 4.10 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.00000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.00002	3.000	4.140	5.850	8.700	12.690	17.820	24.090	31.500	40.050	49.740	60.000
0.00004	3.000	4.425	6.420	9.270	13.260	18.390	24.660	32.070	40.620	50.025	60.000
0.00006	3.000	4.710	6.848	9.840	13.830	18.960	25.230	32.640	41.048	50.310	60.000
0.00009	3.000	4.924	7.275	10.339	14.400	19.530	25.800	33.139	41.475	50.524	60.000
0.00011	3.000	5.138	7.631	10.838	14.934	20.100	26.334	33.638	41.831	50.738	60.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.5 แสดงผลเฉลยในกรณี 3 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 3 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกันจะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือเมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

4.2.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขวิธี แครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson implicit method)

ตารางที่ 4.11 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.0001	3.000	8.327	13.504	19.463	26.687	35.406	45.687	57.463	70.504	84.327	98.000
0.0003	3.000	9.506	16.633	24.230	32.469	41.526	51.469	62.230	73.633	85.506	98.000
0.0004	3.000	10.920	18.785	27.041	35.779	45.022	54.779	65.041	75.785	86.920	98.000
0.0006	3.000	11.405	20.060	28.833	37.841	47.168	56.841	66.833	77.060	87.405	98.000
0.0007	3.000	11.921	20.800	29.855	39.085	48.493	58.085	67.855	77.800	87.921	98.000

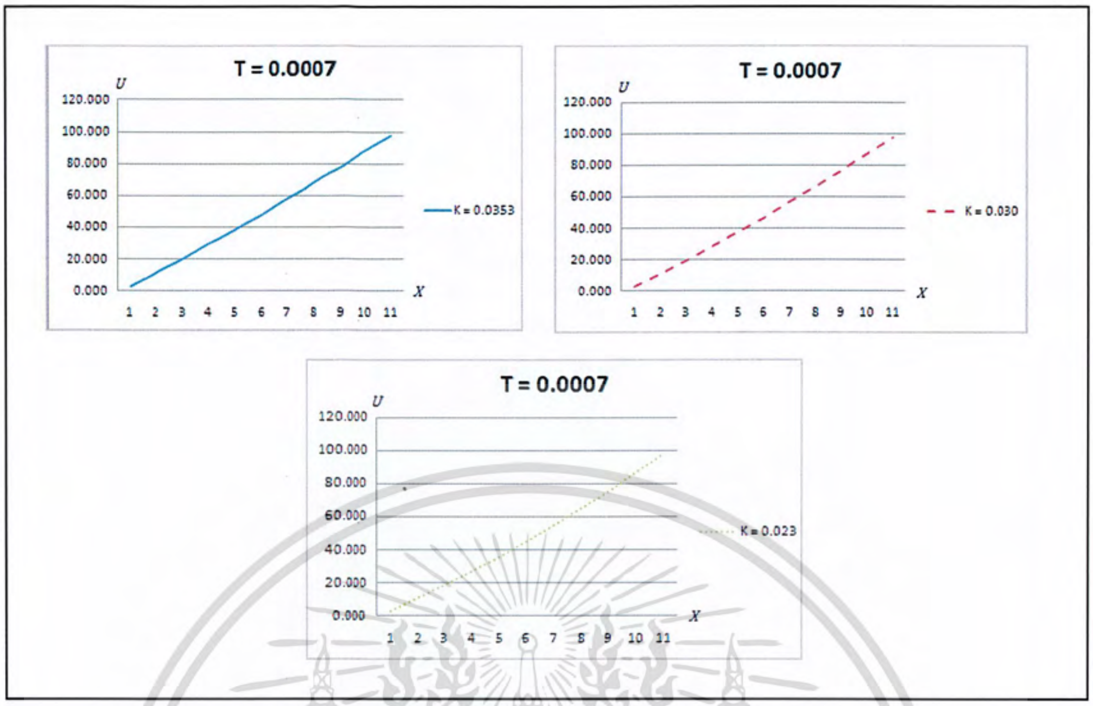
ตารางที่ 4.12 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.0002	3.000	8.327	13.504	19.463	26.687	35.406	45.687	57.463	70.504	84.327	98.000
0.0003	3.000	9.506	16.633	24.230	32.469	41.526	51.469	62.230	73.633	85.506	98.000
0.0005	3.000	10.920	18.785	27.041	35.779	45.022	54.779	65.041	75.785	86.920	98.000
0.0007	3.000	11.405	20.060	28.833	37.841	47.168	56.841	66.833	77.060	87.405	98.000

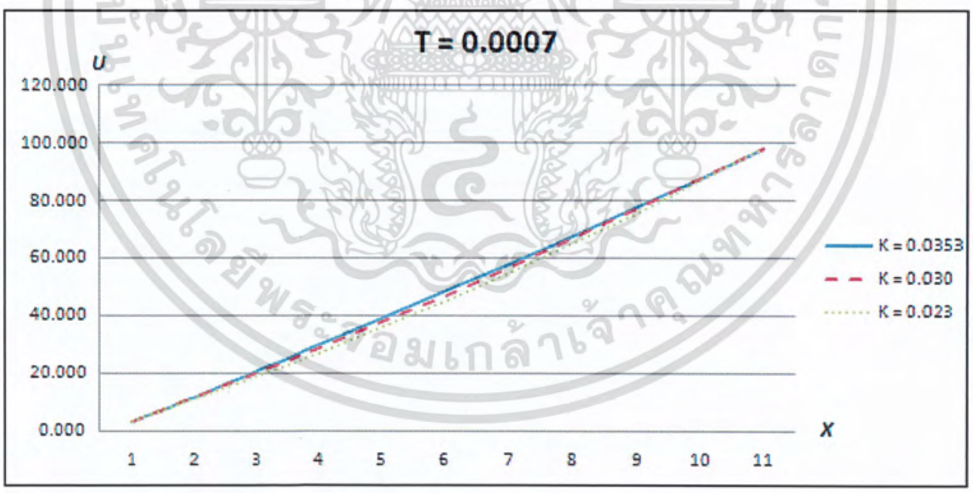
ตารางที่ 4.13 แสดงผลเฉลย กรณี 1 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.950	6.800	11.550	18.200	26.750	37.200	49.550	63.800	79.950	98.000
0.0002	3.000	8.327	13.504	19.463	26.687	35.406	45.687	57.463	70.504	84.327	98.000
0.0004	3.000	9.506	16.633	24.230	32.469	41.526	51.469	62.230	73.633	85.506	98.000
0.0006	3.000	10.920	18.785	27.041	35.779	45.022	54.779	65.041	75.785	86.920	98.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.7 แสดงผลเฉลยในกรณี 1 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 1 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกันจะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือเมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

ตารางที่ 4.14 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.0001	3.000	7.598	12.067	17.210	23.446	30.971	39.846	50.010	61.267	73.198	85.000
0.0003	3.000	8.616	14.768	21.325	28.437	36.254	44.837	54.125	63.968	74.216	85.000
0.0004	3.000	9.836	16.625	23.751	31.293	39.272	47.693	56.551	65.825	75.436	85.000
0.0006	3.000	10.255	17.725	25.298	33.073	41.124	49.473	58.098	66.925	75.855	85.000
0.0007	3.000	10.700	18.364	26.180	34.147	42.267	50.547	58.980	67.564	76.300	85.000

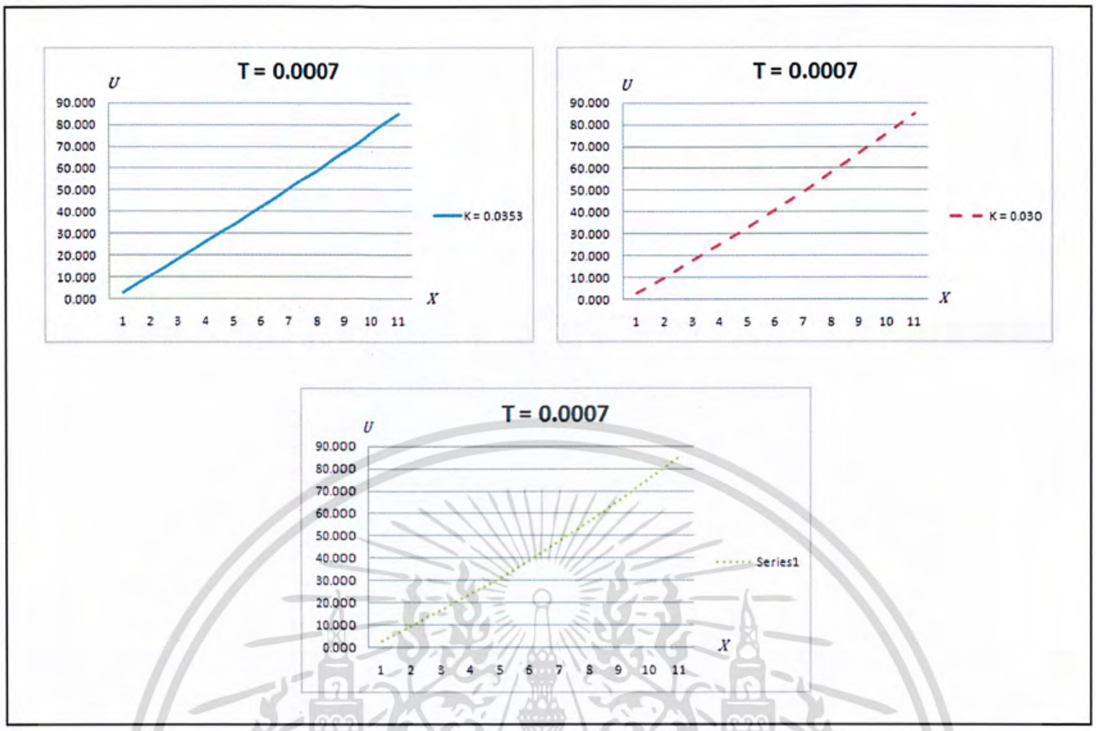
ตารางที่ 4.15 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.0002	3.000	7.598	12.067	17.210	23.446	30.971	39.846	50.010	61.267	73.198	85.000
0.0003	3.000	8.616	14.768	21.325	28.437	36.254	44.837	54.125	63.968	74.216	85.000
0.0005	3.000	9.836	16.625	23.751	31.293	39.272	47.693	56.551	65.825	75.436	85.000
0.0007	3.000	10.255	17.725	25.298	33.073	41.124	49.473	58.098	66.925	75.855	85.000

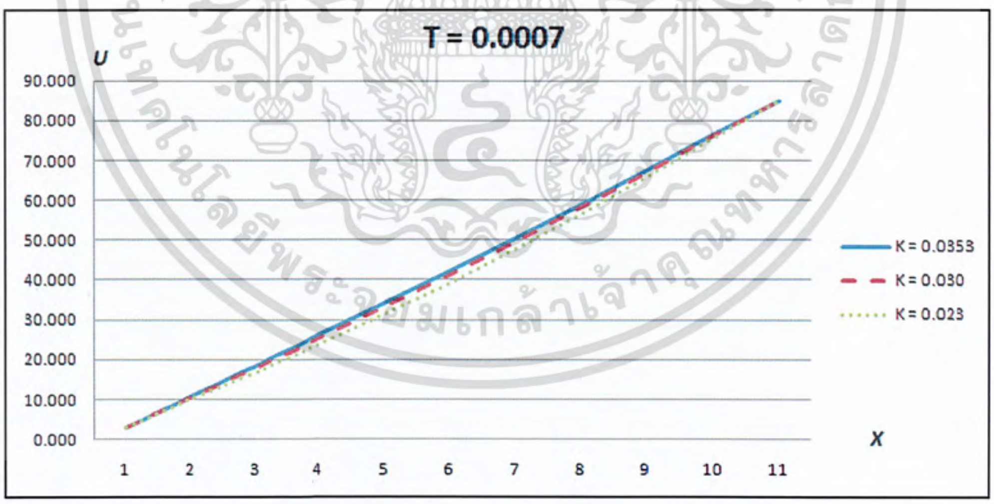
ตารางที่ 4.16 แสดงผลเฉลย กรณี 2 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.820	6.280	10.380	16.120	23.500	32.520	43.180	55.480	69.420	85.000
0.0002	3.000	7.598	12.067	17.210	23.446	30.971	39.846	50.010	61.267	73.198	85.000
0.0004	3.000	8.616	14.768	21.325	28.437	36.254	44.837	54.125	63.968	74.216	85.000
0.0006	3.000	9.836	16.625	23.751	31.293	39.272	47.693	56.551	65.825	75.436	85.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.9 แสดงผลเฉลยในกรณี 2 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.10 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 2 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกันจะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือเมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

ตารางที่ 4.17 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.0353

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.0001	3.000	6.196	9.302	12.878	17.212	22.443	28.612	35.678	43.502	51.796	60.000
0.0003	3.000	6.904	11.180	15.738	20.682	26.116	32.082	38.538	45.380	52.504	60.000
0.0004	3.000	7.752	12.471	17.424	22.667	28.213	34.067	40.224	46.671	53.352	60.000
0.0006	3.000	8.043	13.236	18.500	23.905	29.501	35.305	41.300	47.436	53.643	60.000
0.0007	3.000	8.353	13.680	19.113	24.651	30.296	36.051	41.913	47.880	53.953	60.000

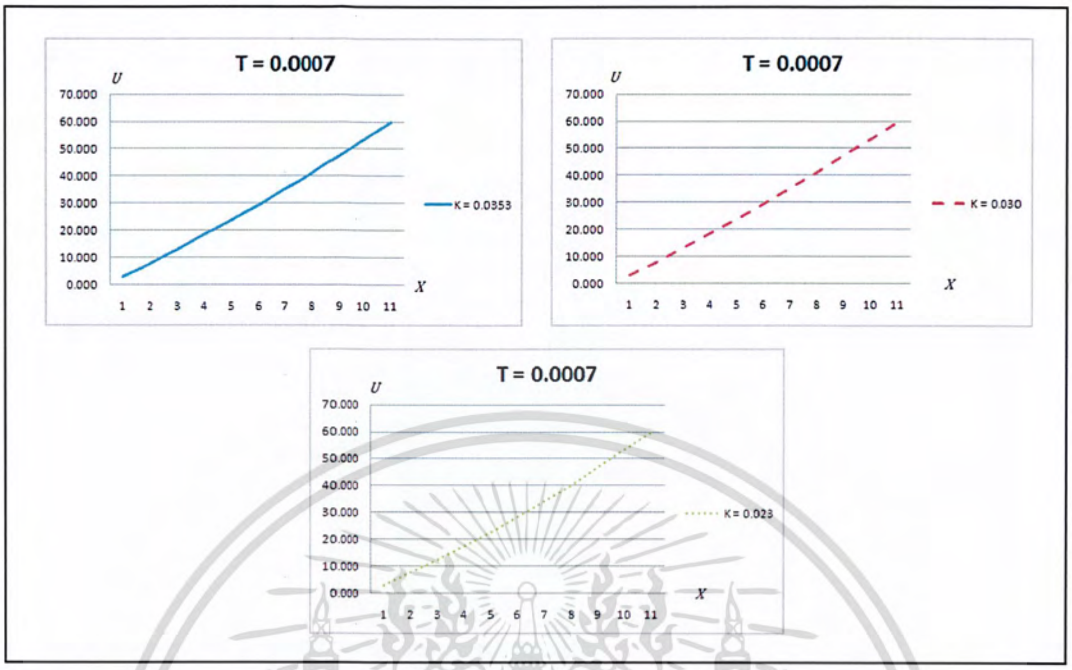
ตารางที่ 4.18 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.030

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.0002	3.000	6.196	9.302	12.878	17.212	22.443	28.612	35.678	43.502	51.796	60.000
0.0003	3.000	6.904	11.180	15.738	20.682	26.116	32.082	38.538	45.380	52.504	60.000
0.0005	3.000	7.752	12.471	17.424	22.667	28.213	34.067	40.224	46.671	53.352	60.000
0.0007	3.000	8.043	13.236	18.500	23.905	29.501	35.305	41.300	47.436	53.643	60.000

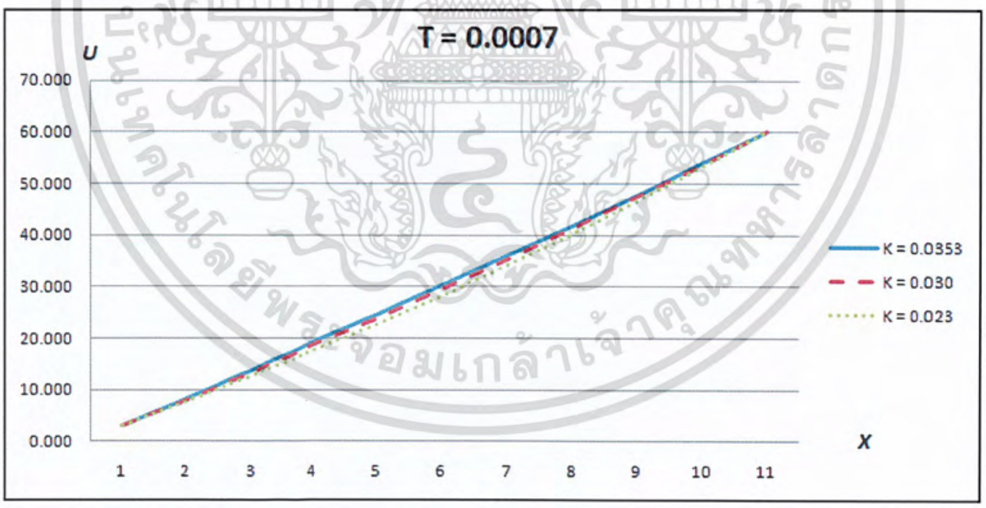
ตารางที่ 4.19 แสดงผลเฉลย กรณี 3 พิจารณา K = 0.023

T \ X	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.0000	3.000	3.570	5.280	8.130	12.120	17.250	23.520	30.930	39.480	49.170	60.000
0.0002	3.000	6.196	9.302	12.878	17.212	22.443	28.612	35.678	43.502	51.796	60.000
0.0004	3.000	6.904	11.180	15.738	20.682	26.116	32.082	38.538	45.380	52.504	60.000
0.0006	3.000	7.752	12.471	17.424	22.667	28.213	34.067	40.224	46.671	53.352	60.000

จะพบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ เมื่อใช้เงื่อนไขขอบตามที่กำหนดไว้นั้น จะได้ค่าผลเฉลยที่เพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าจะใช้ค่า K ที่ต่างกัน



ภาพที่ 4.11 แสดงผลเฉลยในกรณี 3 ด้วยกราฟเส้น



ภาพที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบเทียบผลเฉลยในกรณี 3 ด้วยกราฟเส้น

จากผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ นั่นคือความร้อนที่ถูกเพิ่มขึ้นในฉนวน แล้วนำผลเฉลยดังกล่าวมาแสดงผลด้วยกราฟเส้น กราฟที่ได้จึงมีลักษณะของอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น จากนั้นนำมาเปรียบเทียบกัน จะพบว่าค่าของผลเฉลยนั้นมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก โดยผลเฉลยจะมีค่าแปรผันตรงกับค่า K นั่นคือ เมื่อ K มีค่าน้อย ผลเฉลยที่ได้จะมีค่าที่น้อยเช่นกัน

บทที่ 5
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 อภิปรายและสรุปผลงานวิจัย

5.1.1 จากการหาผลเฉลยของอุณหภูมิในฉนวนกันความร้อน ผู้วิจัยได้นำสมการความร้อน $\frac{\partial U}{\partial T} = K\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ มาใช้ในการคำนวณ โดยการหาผลเฉลยนี้จะต้องทราบอุณหภูมิทั้งจุดต้นและจุดปลายของฉนวนแล้วจะทำให้สามารถคำนวณอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งใดๆภายในได้

5.1.2 สมการความร้อนในรูปแบบไร้มิตินำมาใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยได้ง่าย เนื่องจากวัสดุต่างๆหรืออุณหภูมิต่างก็มีหน่วยในการวัดที่แตกต่างกัน ซึ่งทำให้การคำนวณนั้นซับซ้อน ผู้วิจัยจึงนำสมการความร้อนมาปรับให้อยู่ในรูปไร้มิติก่อนแล้วจึงนำมาคำนวณ โดยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) โดยใช้วิธีชัดแจ้ง (Explicit method forward time central space) และวิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson implicit method) เมื่อได้ผลลัพธ์จากการคำนวณแล้ว จากนั้นจะใช้กระบวนการเพิ่มมิติทำให้ผลเฉลยกลับไปอยู่ในรูปมีมิติเช่นเดิม

5.1.3 ระเบียบวิธีการหาผลเฉลย โดยวิธีชัดแจ้ง (Explicit method) นั้นมีความง่ายในการคำนวณในแต่ละขั้น แต่จะได้ผลเฉลยทีละค่าและมีข้อจำกัดของการแบ่งจุดกริด เนื่องจากเป็นระเบียบวิธีที่มีความเสถียรอย่างมีเงื่อนไข (Conditionally stable) ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและการเก็บข้อมูลเป็นจำนวนมาก แต่วิธีที่เลือกใช้คือ วิธีแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson implicit method) จะใช้วิธีการคำนวณที่ซับซ้อนกว่า โดยแต่ละขั้นเวลา (time step) จะเกิดระบบสมการเชิงเส้นขึ้น แต่ไม่มีปัญหาเรื่องของการเลือกใช้ขนาดของกริด Δx และ Δt เช่น วิธีชัดแจ้ง ทำให้การคำนวณเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว

5.1.4 จากการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ทั้งสองวิธีนั้นพบว่า เมื่อนำฉนวนกันความร้อนทั้งสามแบบมาใช้ในการคำนวณ ค่าอุณหภูมิที่ได้นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน โดยฉนวนโฟมโพลิยูเรเทนมีการเพิ่มของอุณหภูมิช้าที่สุด ตามด้วยฉนวนโฟมโพลีเอทิลีน และฉนวนใยแก้ว ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า ฉนวนโฟมโพลิยูเรเทนเหมาะที่จะนำมาใช้ทำฉนวนกั้นระหว่างตู้ทำน้ำร้อนและตู้ทำน้ำเย็น เพราะมีการแพร่ของความร้อนไปหาน้ำเย็นช้าที่สุด (จากการหาผลเฉลยของฉนวนทั้งสามแบบ) และสังเกตได้อีกว่า ฉนวนโฟมโพลิยูเรเทนนั้นมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่ำที่สุด (จากฉนวนทั้งสามแบบ) ดังนั้นสรุปได้ว่า ฉนวนกันความร้อนที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่ำ เหมาะที่จะนำมาใช้ทำฉนวนกันความร้อนในตู้ทำน้ำร้อน-น้ำเย็น

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ปัญหาพิเศษนี้สามารถนำไปพัฒนาและศึกษาต่อภายใต้ขอบเขตการศึกษาอื่นๆ ได้ อาทิเช่น ศึกษาการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติ หรือ 3 มิติ หรือใช้วัสดุฉนวนประเภทอื่น

5.2.2 สามารถนำปัญหาพิเศษดังกล่าวไปหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีอื่น เช่น Finite Volume Method หรือ Finite Element Method หรือวิธีอื่นๆ ซึ่งอาจทำให้ไม่ต้องทำสมการให้อยู่ในรูปไร้มิติ

เอกสารอ้างอิง

[1] ภัคคินี ชิตสกุล, สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย, กรุงเทพมหานคร, สาขาวิชาคณิตศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2551.

[2] Zill, D.G and Cullen, M.R., Differential Equations with Boundary-Value Problems, Brook/Cole 10, Canada, 2009.

[3] Smith, G.D., Numerical Solution of Partial Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[4] Crank, J., and Nicolson, P, A Parctical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proc. Camb Phil. Soc., 43, 50-67, 1947.

[5] http://www.overclockzone.com/zolkorn/Year2006/06-06/Cooling_Methodology_Testing เข้าถึงเมื่อ วันที่ 3 กันยายน 2553.

[6] http://www.sa.ac.th/winyoo/thermo_gas/Thermal/thermal.htm เข้าถึงเมื่อ วันที่ 7 สิงหาคม 2553.

[7] http://www.rf-foam.com/index.php?lay=show&ac=article&Id=538629788 เข้าถึงเมื่อ วันที่ 3 กันยายน 2553.

[8] http://www.siamtile.com/typeantihot.html เข้าถึงเมื่อ วันที่ 7 สิงหาคม 2553.