

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาความแม่นยำของการวิเคราะห์ โครงสร้าง

ประเภทแผ่นและเปลือกหอยด้วย โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

**A STUDY OF ACCURACY OF PLATES AND SHELLS STRUCTURAL ANALYSIS
BY FINITE ELEMENT PROGRAM**



T117587



โดย
นายนิทัศน์ แผ้ววืด
นายเอกชัย ปรีดา
นายบวร ชูดีแพทย์วิภา

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน.....
วัน,เดือน,ปี.....

117587

- 9 ค.ศ. 2554



ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2553

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**A STUDY OF ACCURACY OF PLATES AND SHELLS
STRUCTURAL ANALYSIS BY FINITE ELEMENT PROGRAM**



**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
BACHELOR OF CIVIL ENGINEERING
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKABANG**

2010

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ใบรับรองโครงสร้างงานพิเศษ

หัวข้อ โครงงานพิเศษ	การศึกษาความแม่นยำของการวิเคราะห์ โครงสร้าง ประเภทแผ่นและเปลือก หอยด้วย โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์		
นักศึกษา	นาย นิตน์ เผ่าวัต	รหัสประจำตัว	50010821
	นาย เอกชัย ปรีดา	รหัสประจำตัว	50011968
	นาย บวร ชุตติแพทย์วิภา	รหัสประจำตัว	50011985
หลักสูตร	วิศวกรรมบัณฑิต	สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.อาทิตย์ เพชรศศิธร		

คณะกรรมการสอบ โครงงานพิเศษ		ลายมือชื่อ
ผศ.สุวัฒน์	ถิรเศรษฐ์	
อาจารย์ทรงกลด	แซ่อิง	
ดร.อาทิตย์	เพชรศศิธร	

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธารับรองแล้ว



(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นันทวัฒน์ จรัสโรจน์ธนเดช)

ประธานสาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

วันที่ 17 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2554

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ การศึกษาความแม่นยำของการวิเคราะห์ โครงสร้าง ประเภทแผ่นและเปลือก
หอยด้วย โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

A STUDY OF ACCURACY OF PLATES AND SHELLS STRUCTURAL
ANALYSIS BY FINITE ELEMENT PROGRAM

นักศึกษา นาย นิทัศน์ แผ้วว็ด รหัสประจำตัว 50010821
นาย เอกชัย ปรีดา รหัสประจำตัว 50011968
นาย บวร ชุตติเพทย์วิภา รหัสประจำตัว 50011985

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.อาทิตย์ เพชรศศิธร

หลักสูตร วิศวกรรมบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา

ปีการศึกษา 2553

บทคัดย่อ

ในการวิเคราะห์ โครงสร้าง ผู้ที่ใช้โปรแกรมวิเคราะห์นั้นจะต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับตัวโปรแกรมเป็นอย่างมาก เพราะตัวโปรแกรมนั้นมีข้อจำกัดบางอย่างที่ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์โครงสร้างบางประเภทได้ อีกทั้งค่าคำตอบที่ได้จากโปรแกรมต้องมีค่าใกล้เคียงค่าผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งจะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องในการวิเคราะห์ โครงสร้างประเภทนั้นๆ

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการตรวจสอบความแม่นยำของโปรแกรมที่ใช้หลักการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการนำโครงสร้างประเภทแผ่นและเปลือกหอยมาวิเคราะห์ เพราะโครงสร้างประเภทนี้การวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีนั้นมีความยุ่งยากและใช้เวลานาน ถ้าใช้โปรแกรมจะสามารถช่วยให้มีความสะดวกและประหยัดเวลามากยิ่งขึ้น เมื่อพิจารณาผลการทดลองจะพบว่าตัวโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้มีความแม่นยำในระดับที่ยอมรับได้ แต่ก็มีโครงสร้างบางประเภทที่ค่าคำตอบจากโปรแกรมนั้นมีค่าไม่ใกล้เคียงกับค่าผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งอาจเป็นข้อจำกัดบางอย่างของตัวโปรแกรม ถึงอย่างไรก็ตามแม้ว่าตัวโปรแกรมจะมีความน่าเชื่อถือเพียงใดก็ตาม ผู้ใช้โปรแกรมต้องมีความรู้และความเข้าใจในโครงสร้างประเภทนั้นๆด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title : A STUDY OF ACCURACY OF PLATES AND SHELLS STRUCTURAL ANALYSIS BY FINITE ELEMENT PROGRAM

Name : MR. NITAT PEAWWAT
MR. AKECHAI PREEDA
MR. BOWORN CHUTIPATVIPA

Field : CIVIL ENGINEERING

Department : CIVIL ENGINEERING

Faculty : ENGINEERING

Advisor : DR ARTHIT PETCHSASITHON



ABSTRACT

In structural analysis, the analysis that uses the program must have a better understanding about the program greatly because the program has some limits that cannot some types of structural analysis. Moreover, the answers derived from the program must be close to the exact solution that will check the accuracy of structural analysis of that type.

In this research, it is check the accuracy of a program that uses the principle finite elements by taking the plate type structures and shell for analysis because this type of structure if that theory is be complicated and waste of times. To use this program it will enables convenient and time saving more. When the experimental results showed that this experimental program is accuracy at an acceptable level, but it has some structure from that program was not close to the exact solution that may be some limitation of program.

However, the program has any credibility. The program requires knowledge and understanding of that structure.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงต่อ อาจารย์อาทิตย์ เพชรศศิธร ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาโทที่ได้รับอนุญาตให้คำปรึกษา เพื่อให้ปริญญาโทสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี และคุณทศพร ะสืบ ที่ช่วยให้คำแนะนำในการใช้โปรแกรม วิเคราะห์โครงสร้าง ผู้เขียนมีความสำนึกในพระคุณของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และ โรงเรียนต่างๆที่ผู้เขียนได้ร่ำเรียนมาพร้อมทั้ง คณาจารย์ทุกท่านที่เคออบรมสอนสั่งความรู้อย่างมากมายต่อผู้เรียนและขอสำนึกในพระคุณของ บิดา มารดา และพี่ทุกคนรวมถึงเพื่อนๆทุกคนที่ให้การสนับสนุนทางด้านคำแนะนำและกำลังใจแก่ผู้เขียนจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

นาย นิตส์น์ แฝ่ววัด

นาย เอกชัย ปรีดา

นาย บวร ชุตติแพทย์วิภา

ผู้ประพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

บทที่	เรื่อง	หน้า
	ปกใน (ภาษาไทย)	ก
	ปกใน (ภาษาอังกฤษ)	ข
	หน้าอนุมัติ	ค
	บทคัดย่อภาษาไทย	ง
	บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
	กิตติกรรมประกาศ	ฉ
	สารบัญ	ช
	สารบัญตาราง	ญ
	สารบัญรูป	ฎ
1	บทนำ	
	1.1 ความสัมพันธ์และที่มาของปัญหา	1
	1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
	1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย	1
	1.4 วิธีการศึกษา	2
2	วรรณกรรมปริทัศน์	
	2.1 นิยาม	3
	2.2 การทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
	2.3 หลักการและทฤษฎีที่ใช้	4
	2.3.1 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	5
	2.3.2 การแบ่งโครงสร้างเป็นเอลิเมนต์ ข้อย และการเลือกชนิดของเอลิเมนต์	6
	2.3.3 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น	7
	2.3.4 การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	7
	2.3.5 ข้อระวังของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	9
	2.4 วิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง	16
3	วิธีการดำเนินการ	
	3.1 ศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่นและโครงสร้างเปลือกหอย	17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2	ศึกษาการใช้โปรแกรมต่างๆที่ใช้หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์	18
3.3	ทำการเลือกใช้โปรแกรมที่เหมาะสม	18
3.4	วิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่นและ โครงสร้างประเภทเปลือกหอย	18
3.5	ขั้นตอนการใช้โปรแกรม	19
3.5.1	การเลือกหน่วยในโปรแกรม	19
3.5.2	วิเคราะห์รูปแบบ	19
3.5.3	การป้อนค่า	22
3.5.4	การเลือกชนิดของวัสดุ	23
3.5.5	กำหนดค่า Material	24
3.5.6	การกำหนดชนิดของหน้าตัด	25
3.5.7	กำหนดลักษณะวัสดุที่ทำการวิเคราะห์และกำหนดความหนา	27
3.5.8	กำหนด โมเดล	27
3.5.9	ใส่ค่าคุณลักษณะของวัสดุ	27
3.5.10	การเลือกชนิด Load	28
3.5.11	การใส่ Support ใน โครงสร้าง	29
3.5.12	การใส่ค่าแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง	30
3.5.13	ทำการ Merge โครงสร้างเป็นส่วนๆ	30
3.5.14	โปรแกรมวิเคราะห์	32
4	ผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	
4.1	In-Plane and Out-of-Plane shear loading ที่กระทำที่ปลายคาน	33
4.1.1	Out-of-Plane shear loading	34
4.1.2	In-Plane shear loading	36
4.2	Curved cantilever beam	41
4.3	Twist loading in beam	46
4.4	Clamped square plate	49
4.5	Steel rectangular Plate	52
4.6	Hemispherical shell with 18° aperture	55
4.6.1	วิเคราะห์ Hemispherical shell เต็มรูป	56
4.6.2	วิเคราะห์ Hemispherical shell แบบ symmetry	57
4.7	Pinched cylinder with rigid diaphragms	59
4.8	Cantilever quarter cylinder	63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5	สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	66
5.1	สรุปผลจากการวิเคราะห์ด้วย โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	66
5.1.1	In-Plane and Out-of-Plane shear loading	66
5.1.2	Curved cantilever beam	67
5.1.3	Twist loading in beam	67
5.1.4	Clamped square plate และ Steel rectangular plate	67
5.1.5	Hemispherical shell with 18° aperture	67
5.1.6	Pinched cylinder with rigid diaphragms	68
5.1.7	Cantilever quarter cylinder	68
5.2	วิจารณ์ผลการวิเคราะห์	
5.2.1	โครงสร้างที่มีผลของแรงบิด	69
5.2.2	โครงสร้างบางประเภทเมื่อมีการแบ่งชิ้นส่วนมากขึ้น	69
5.3.3	โครงสร้างประเภท Plate ที่เป็นวงกลม	69
5.3.4	โครงสร้างประเภท โคมหรือทรงกระบอก	69
5.3	ข้อเสนอแนะ	69
5.3.1	ความรู้ความเข้าใจ	69
5.3.2	อ้างอิงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	69
5.3.3	โมเดล โครงสร้างเพิ่มเติมอีก	69
	หนังสืออ้างอิง	70
	บรรณานุกรม	71
	ภาคผนวก ก งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	ผก1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	ชื่อตาราง	หน้า
2-1	แสดงการเปรียบเทียบระยะเวลาการทำงานและปริมาณการใช้หน่วยความจำจากการใช้ ชนิดของเอลิเมนต์ทั้ง 3 รูปแบบ	15
2-2	แสดงผลการเปรียบเทียบค่าการขยับตัวของการใช้ชนิดของเอลิเมนต์ทั้ง 3 รูปแบบและผลเฉลยแม่นยำตรง	16
4-1	แสดงค่า Exact Solution	33
4-2	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Out-of-Plane shear loading (2×1) ถึง (256×1)	34
4-3	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ In-Plane shear loading (2×1) ถึง (256×1)	37
4-4	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อ แบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ In-Plane shear loading (2×2) ถึง (256×2)	38
4-5	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ In-Plane shear loading (2×4) ถึง (256×4)	39
4-6	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ In-Plane shear loading (2×6) ถึง (256×6)	40
4-7	แสดงค่า Exact Solution ของ Curved cantilever beam	41
4-8	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างแบบ Out of plane shear loading	43
4-9	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างแบบ In plane shear loading	43
4-10	ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคานเมื่อ Mesh โครงสร้างออกเป็นส่วนๆเมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างแบบTwist loading โดยที่แบ่งชิ้นส่วนในแนวนอน=1	47

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา ญะต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4-11	ผลของค่าการ โกงตัวที่ปลายคานเมื่อ Mesh โครงสร้างออกเป็นส่วนๆเมื่อแรงกระทำต่อโครงสร้างแบบ Twist loading โดยที่แบ่งชิ้นส่วนในแนวนอน=2	47
4-12	ผลของค่าการ โกงตัวที่กึ่งกลางแผ่นเมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Clamped square plate	50
4-13	ผลของค่าการ โกงตัวที่กึ่งกลางแผ่นเมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Steel rectangular plate	53
4-14	ผลของค่าการ โกงตัวของ โครงสร้าง โคมเมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Hemispherical shell แบบเต็ม	56
4-15	ผลของค่าการ โกงตัวของ โครงสร้าง โคมเมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Hemispherical shell แบบ symmetry	57
4-16	ผลของค่าการ โกงตัวของ โครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Pinched cylinder with rigid diaphragms แบบที่1	60
4-17	ผลของค่าการ โกงตัวของ โครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Pinched cylinder with rigid diaphragms แบบที่2	61
4-18	ผลของค่าการ โกงตัวของ โครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ Cantilever quarter cylinder ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	64

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา ผู้ใช้ต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	ชื่อรูป	หน้า
2-1	การแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย	5
2-2	เอลิเมนต์ใน 1 มิติ ได้แก่ Rod Element, Bar Element, Beam Element และอื่นๆ	10
2-3	เอลิเมนต์ใน 2 มิติ ได้แก่ Plane Stress Element, Plane Strain Element, Shell Element และอื่นๆ	10
2-4	เอลิเมนต์ใน 3 มิติ ได้แก่ Solid Element	11
2-5	ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 1 มิติสำหรับการแก้ปัญหา	11
2-6	ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 2 มิติสำหรับการแก้ปัญหา	12
2-7	ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 3 มิติสำหรับการแก้ปัญหา	13
2-8	ลักษณะของปัญหาที่นำมาเปรียบเทียบการใช้ชนิดของเอลิเมนต์ต่างกัน	13
2-9	ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 1 มิติ	14
2-11	ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 2 มิติ	14
2-12	ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 3 มิติ	14
3.1	ขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่น และ โครงสร้างประเภทเปลือกหอย	17
3.2	แสดงการเลือกหน่วยตามที่เราต้องการ	19
3.3	Grid only	20
3.4	Blank	20
3.5	Shells	20
3.6	Beam	20
3.7	เลือกคำสั่ง Grid Only เพื่อจะ โมเดล โครงสร้างประเภท Plates	21
3.8	แสดงค่าที่ป้อนลงใน โปรแกรม โดยค่าที่ทำการป้อนเฉพาะที่วงกลมสีแดงเท่านั้น	21
3.9	ผลลัพธ์ที่ได้จากการป้อนค่าต่างๆ	22
3.10	โปรแกรมจะแสดงภาพตามที่เราป้อนค่า โดยแสดงระยะตามในรูป	23
3.11	Define Materials	23
3.12	เลือกคำสั่ง Add New Material	24

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา ฤๅจะต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.13	โปรแกรมจะแสดงค่าต่างที่ต้องทำการป้อนข้อมูลตามค่าที่เราต้องการ แล้วเลือก OK	25
3.14	แสดงการเลือกชนิดของหน้าตัดที่เราต้องการ โดยเลือก Add New Section	26
3.15	แสดงการกำหนดค่าวัสดุและความหนาที่ต้องการ	26
3.16	แสดงการระบุวัสดุที่เราต้องการ ในโมเดลที่ทำการสร้างขึ้น	27
3.17	เป็นการกำหนดชนิด Load ที่เราต้องการ	28
3.18	แสดงการใส่ support ที่มุมของ โครงสร้างที่ทำการวิเคราะห์	29
3.19	แสดงโครงสร้าง Plate ประเภท Simply Support	30
3.20	ในวงกลมสีแดง จะเป็นการป้อนค่าในการ Mesh โครงสร้างในที่นี้จะ Meshแค่ 2X2	31
3.21	แสดงโครงสร้างที่ทำการ Merge 2X2	31
3.22	แสดงค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางคาน	32
4.1	แสดงแรงกระทำแบบ In-Plane and Out-of-Plane shear loading	33
4.2	แสดงการวิเคราะห์ Out-of-Plane shear loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	34
4.3	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ Relative	35
4.4	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error	35
4.5	แสดงการวิเคราะห์ In-Plane shear loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	36
4.6	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับค่าError (2x1)-(256x1)	37
4.7	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับค่าError (2x2)-(256x2)	38
4.8	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับค่าError (2x4)-(256x4)	39
4.9	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับค่าError (2x6)-(256x6)	40
4.10	Curved cantilever beam	41
4.11	แสดงการวิเคราะห์ Curved cantilever beam ด้วย โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	42
4.12	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Out of plane shear loading	43
4.13	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ In plane shear loading	44
4.14	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Out of plane shear loading	45
4.15	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ In plane shear loading	45
4.16	Twist loading ที่กระทำปลายคาน	46
4.17	แสดงการวิเคราะห์ Twist loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.18	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการ แบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Twist loading	48
4.19	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Twist loading	48
4.20	Clamped square plate	49
4.21	แสดงการวิเคราะห์ Clamped square plate ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์	50
4.22	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางแผ่นพื้น	51
4.23	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางแผ่นพื้น	51
4.24	Steel rectangular plate	52
4.25	แสดงการวิเคราะห์ Steel rectangular plate ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์	53
4.26	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างแผ่นพื้นเป็นแบบกระจาย	54
4.27	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างแผ่นพื้นเป็นแบบกระจาย	54
4.28	Hemispherical shell with 18° aperture	54
4.29	แสดงการวิเคราะห์ Hemispherical shell ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์ แบบเต็ม	56
4.30	แสดงการวิเคราะห์ Hemispherical shell ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์ แบบ symmetry	57
4.31	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Hemispherical shell กระทำแบบจุด	58
4.32	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Hemispherical shell กระทำแบบจุด	58
4.33	Pinched cylinder with rigid diaphragms	59
4.34	แสดงการวิเคราะห์ Pinched cylinder with rigid diaphragms ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์	60
4.35	แสดงการวิเคราะห์ Pinched cylinder ด้วย โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์	61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.36	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้าง Pinched cylinder กระทำแบบจุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางทรงกระบอก	62
4.37	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้าง Pinched cylinder กระทำแบบจุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางทรงกระบอก	62
4.38	Cantilever quarter cylinder	63
4.39	แสดงการวิเคราะห์ Cantilever quarter cylinder ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์	64
4.40	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงค้ำกระทำต่อโครงสร้าง Cantilever quarter cylinder ที่ตำแหน่งขอบล่าง	65
4.41	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงค้ำกระทำต่อโครงสร้าง Cantilever quarter cylinder ที่ตำแหน่งขอบล่าง	65
5.1	แสดงค่าที่แนะนำในการแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างเพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับ Exact Solution	66
5.2	กราฟเปรียบเทียบค่า Exact solution ของแต่ละจุดกับจำนวนการแบ่งชิ้นส่วน	68

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันเทคโนโลยีเข้ามามีส่วนสำคัญในการก่อสร้าง ในแง่ของการออกแบบและวิเคราะห์โครงสร้างนั้นๆ เพื่อความสะดวกรวดเร็ว วิศวกรผู้ออกแบบจึงนิยมใช้โปรแกรม สำเร็จรูปในการออกแบบและวิเคราะห์ โครงสร้าง เนื่องจากความสามารถของตัวโปรแกรมที่นำมาใช้ มีความถูกต้องแม่นยำ อยู่ให้ระดับที่ยอมรับได้ และให้ความสะดวกรวดเร็วในการทำงาน อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ที่ได้นั้นอาจมีความผิดพลาดได้เนื่องจากตัวผู้ใช้โปรแกรมเองหรือข้อจำกัดบางอย่างของโปรแกรม

โครงสร้างพิเศษนี้ เป็นการศึกษาความแม่นยำในการวิเคราะห์ โครงสร้างของโปรแกรม สำเร็จรูป ซึ่งจะเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้กับการคิด Analytical Method โดยตัวโปรแกรม ที่นำมาศึกษา นี้จะเป็นโปรแกรมที่วิเคราะห์ โดยใช้หลักการ Finite Element Theory

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

เพื่อศึกษาความแม่นยำของ โปรแกรมสำเร็จรูป ในการวิเคราะห์ โครงสร้างว่ามีความแม่นยำ เมื่อเปรียบเทียบกับ Exact Solution และใช้ในการเลือกรูปแบบจำลองในการวิเคราะห์ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ น่าเชื่อถือมีความถูกต้องมากที่สุด

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

- 1.3.1. ศึกษาการใช้งานของโปรแกรม วิเคราะห์โครงสร้าง
- 1.3.2. ศึกษาหลักการและทฤษฎี ในการวิเคราะห์ โครงสร้าง
- 1.3.3. ทำการวิเคราะห์โครงสร้าง โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป และเปรียบเทียบกับทฤษฎี
- 1.3.4. สรุปผลการทดลองของการวิเคราะห์ โครงสร้างทั้ง2วิธี และหาค่าความคลาดเคลื่อน

1.3.5. ข้อเสนอแนะให้การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ว่าควรเลือกรูปแบบจำลองในการวิเคราะห์แบบใด เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ ที่น่าเชื่อถือ

1.4 วิธีการศึกษา

- 1.4.1. ศึกษาทฤษฎีของ โครงสร้างประเภทแผ่น (Plate) และ โครงสร้างประเภทเปลือกหอย (Shell)
- 1.4.2. ศึกษาวิธีการ Mesh โครงสร้างของตัวโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์
- 1.4.3. หาค่า Exact Solution ของโครงสร้าง Plate และ Shell
- 1.4.4. ทำการเลือกแบบจำลองในการวิเคราะห์และหาผลลัพธ์จากโปรแกรม
- 1.4.5. เปรียบเทียบผลลัพธ์จากโปรแกรมกับ Exact Solution
- 1.4.6. สรุปผลการดำเนินงาน



บทที่ 2

วรรณกรรมปริทัศน์

2.1 นิยาม

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method, finite element analysis) หรือที่เรียกย่อๆว่า FEM คือ เทคนิควิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับการหาคำตอบ โดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยพร้อมๆกับสมการปริพันธ์ ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีนี้มีพื้นฐานมาจากการกำจัดสมการเชิงอนุพันธ์อย่างสมบูรณ์ (สำหรับปัญหาที่อยู่ในสภาวะคงที่) หรือการปรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ให้กลายเป็นระบบโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญซึ่งเป็นปริพันธ์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้เทคนิคมาตรฐานทางคณิตศาสตร์เช่น Euler method Runge-Kuttamethods

โครงสร้างแบบแผ่นตรง (Plate) คือ วัสดุที่มีลักษณะเป็นแผ่นตรงและมีขนาดความหนา น้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของด้านอื่นๆ ตัวอย่างของโครงสร้างที่มีลักษณะแบบนี้ได้แก่ พื้นโต๊ะ แผ่น กระจก เป็นต้น

โครงสร้างแบบเปลือก (Shell) คือ โครงสร้างเป็นแผ่นบางๆ (Laminar Structure) โดยครอบคลุมระหว่างโครงสร้างที่เป็น “Proper” Shells กับ “Improper” Shells ซึ่งทั้ง 2 ชนิด มีความแตกต่างกันทั้งในด้านรูปทรงเรขาคณิต และพฤติกรรมในการรับแรง โครงสร้างเปลือกบาง เป็นโครงสร้างหนึ่งซึ่ง ความหนา (Thickness) มีความสำคัญน้อยกว่า ขนาดความกว้างและยาว

2.2 การทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้อง งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

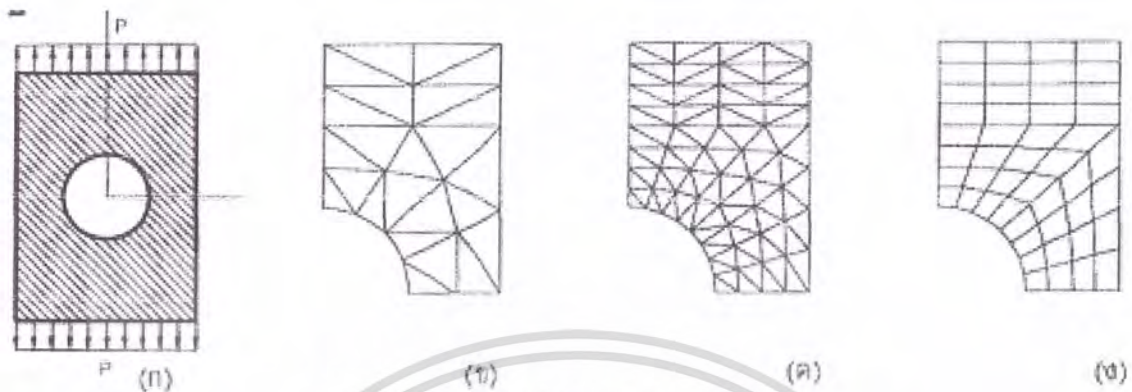
A locking-free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells (A.Petchsasithon, P.D. Gosling) ซึ่งเป็นการศึกษาการเขียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ โครงสร้างประเภทเปลือกหอย (Shell) โดยการนำผลการวิจัยนี้มาใช้ประกอบในปริปัญานิพนธ์เล่มนี้

2.3 หลักการและทฤษฎีที่ใช้

ใช้ทฤษฎีและหลักการ Plates and Shells ของ Stephen P. Timoshenko ในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแบนและโครงสร้างประเภทเปลือกหอยโดยจะนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งตัวโปรแกรมสำเร็จรูปนี้จะใช้หลักการของ Finite Element Theory

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขตัวหนึ่งที่ใช้แก้ไขสมการเชิงอนุพันธ์ และเป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศรอย่างกว้างขวาง ซึ่งขวาง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง เช่น วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง และความเค้นของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล โครงสร้างเครื่องบิน ตัวอาคาร สะพานและโครงสร้างอื่นๆที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะอยู่ในสภาพยืดหยุ่น (Elastic) หรือในสภาพยืดตัว (plastic) นอกจากจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาทางด้านสถิติศาสตร์ตามที่กล่าวมาแล้ว ยังสามารถจะใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านพลศาสตร์ เช่น การสั่นสะเทือนของชิ้นส่วนเครื่องกล การสั่นสะเทือนของ โครงสร้าง รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน การไหลของของไหล การถ่ายเทมวลเป็นต้น

การวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลต่างๆ ไปที่ไม่ซับซ้อน เราจะสามารถหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ต้องการทราบ เช่น การกระจัดที่ตำแหน่งใดๆของชิ้นส่วนได้โดยอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้รับจะเรียกว่าผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) แต่มีชิ้นส่วนเครื่องจักรกล และโครงสร้างจำนวนมากที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนที่ประกอบด้วยส่วนเว้า ส่วนโค้งต่างๆ ทำให้พื้นที่ชิ้นส่วนของหน้าตัดของชิ้นไม่สม่ำเสมอและบางบริเวณอาจจะมีการเปลี่ยนแปลงของไหลอย่างฉับพลัน หรือใช้วัสดุต่างชนิดกันเหล่านี้เป็นต้น จึงมีผลทำให้ไม่สามารถจะหาผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการอนุพันธ์สามัญหรือสมการอนุพันธ์ย่อยได้ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องหาวิธีอื่น เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สามารถจะประมาณค่าผลเฉลยโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต แทนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ การแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว ชิ้นส่วนหรือส่วนประกอบของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆอย่างต่อเนื่อง ตามรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของชิ้นส่วน เช่น รูปที่ 2.1 เราเรียกชิ้นส่วนย่อยเหล่านี้ว่า ไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลเฉลยที่ได้รับจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ(node)ของแต่ละเอลิเมนต์ การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจะไม่วิเคราะห์ปัญหาที่เดียวทั้งระบบเช่นวิธีต่างๆไป แต่เราจะวิเคราะห์หาค่าที่ละเอลิเมนต์แล้วนำมารวมเข้าด้วยกันเป็นผลเฉลยของระบบโครงสร้าง เราจะหาการกระจัดและความเค้นของแต่ละจุดต่อเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็นโครงสร้างระบบ



รูปที่ 2.1 การแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

(ก) แผ่นโลหะมีรูตรงกลางและมีโหลด P กระทำ (ข) เอลิเมนต์ 3 เหลี่ยมหายาบ

(ค) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมละเอียด (ง) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมโค้ง

2.3.1 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง สามารถหาได้จาก วิธีพื้นฐาน 2 วิธีคือ วิธีแรง หรือ วิธียืดหยุ่น (Force or flexibility method) และวิธีการกระจัด หรือวิธีสทิตฟเนส (displacement or stiffness method) วิธีแรกสามารถจะหาแรงภายใน และแรงปฏิกิริยาโค่นอาศัยสมการสมดุลของแรงและสมการเงื่อนไขการกระจัด

ส่วนวิธีที่สองจะสามารถหาการกระจัดที่สมมุติ โดยไม่มีเงื่อนไขของความต่อเนื่อง ของเอลิเมนต์ที่แต่ละจุดต่อหรือที่ขอบบริเวณที่สัมผัสกัน ไม่ว่าจะก่อนและหลัง โหลดการกระทำยังคงมีความต่อเนื่อง เหมือนเดิม ดังนั้นสมการสมดุลเขียนอยู่ในเทอมของการกระจัด ของแต่ละจุดต่อ และค่าของการกระจัดสามารถหาได้โดยการอาศัย ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการกระจัด

การวิเคราะห์โครงสร้าง ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น นิยมใช้วิธีการกระจัดหรือวิธีสทิตฟเนสหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มากกว่า ทั้งนี้เพราะความสามารถจะหาสมการสมดุลและหาผลเฉลยได้เร็วกว่า รวมทั้ง โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา ดังกล่าวก็นิยมใช้วิธีการกระจัดด้วย

หลักการทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็คือ จะแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนย่อย ซึ่งเรียกว่า ไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัด (displacement function) ที่นำมาแทนเอลิเมนต์จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง แต่ละเอลิเมนต์จะโยงกันด้วยจุดต่อ (node) หรือเส้นขอบหรือผิวรอบเอลิเมนต์สัมผัส และโดยอาศัยคุณสมบัติทางกลของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างหรือชิ้นงานเราสามารถจะหาการกระจัด ความเค้น-ความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุดต่อต่างๆ ของแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็น โครงสร้าง หรือชิ้นงาน

ขั้นตอนต่างๆ ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ โครงสร้างหรือชิ้นส่วน เช่น สปริง ท่อนโลหะ เพลลา โครงข้อหมุน โครงข้อหมุน โครงข้อแข็ง แผ่นโลหะ ถึงความดัน ภายใต้สภาวะต่างๆ ของโหลด มีขั้นตอนทั่ว ๆ ไปคล้ายกันดังนี้

2.3.2 การแบ่งโครงสร้าง เป็นเอลิเมนต์ย่อย และการเลือกชนิดของเอลิเมนต์

การแบ่งโครงสร้างออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย จะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของ โครงสร้างเดิม คือ แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element model) จะต้องเหมือนหรือสอดคล้องกับโครงสร้างเดิมคือ บริเวณที่เป็นส่วนเว้า ส่วนโค้งหรือมีรู หรือตรงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างฉับพลันก็จำเป็นต้องแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเพียงพอที่จะให้ผลการวิเคราะห์ได้ถูกต้องแม่นยำ ส่วนบริเวณที่ไม่มี การเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากนักก็อาจจะแทนด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น แต่ถ้าแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยจำนวนเอลิเมนต์มากเกินไปก็จะเป็นการทำให้ค่าจ่ายในการคำนวณสูง และอาจทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ถ้าเครื่องคอมพิวเตอร์มีความละเอียดในการคำนวณ ไม่เพียงพอ ส่วนการเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์นั้น จะต้องคำนึงถึงรูปร่างลักษณะของ โครงสร้าง และการกระทำของโหลด รวมทั้งความละเอียดของผลเฉลยที่ผู้วิเคราะห์ต้องการก็อาจจะ เลือกใช้ เอลิเมนต์ชนิดมิติเดียว สองมิติ สามมิติ หรือเอลิเมนต์ชนิดแกนสมมาตร

2.3.3 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น

การศึกษาการวิเคราะห์หรือการออกแบบ โครงสร้าง และชิ้นส่วนต่างๆ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตามขั้นตอน2.3 นั้น เราจะต้องมีความรู้พื้นฐานทางด้านต่างๆ หลายด้านจึงจะเข้าใจในหลักการและวิธีการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อย่างดี อาทิ เช่น จะต้องมีความรู้ของด้านเมทริกซ์ รู้เทคนิคต่างๆ ที่ใช้ในการแก้สมการ พีชคณิตพร้อมๆกันหลายสมการ รู้เทคนิคของเมทริกซ์ผกผัน เป็นต้น และจะต้องรู้วิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าโดยประมาณ จะต้องมีความรู้ทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง ทฤษฎีการยืดหยุ่น และหลักการทางาน พลังงานศักย์ต่ำสุด และวิธีเวทเรชคิว เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องมีพื้นฐานความรู้ และมีประสบการณ์การใช้คอมพิวเตอร์ด้วย

2.3.4 การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ไม่ใช่มีแค่เพียงโครงสร้างเท่านั้น ประโยชน์ของการนำเอาคอมพิวเตอร์มาใช้ ในการ ออกแบบ สร้างผลิตภัณฑ์ รายละเอียดการใช้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ มาจำลองการทดสอบกันต่อไป โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ว่านี้ก็คือ โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ไฟไนต์เอลิเมนต์ คืออะไร? ไฟไนต์เอลิเมนต์ คือวิธีการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถูกนำมาประยุกต์ เขียนเป็น โปรแกรมสำเร็จรูป เพื่อใช้คำนวณ แก้ปัญหา ทางวิศวกรรม เช่น คำนวณหาความแข็งแรง ของวัสดุหรือชิ้นส่วนเครื่องกล ศึกษาพฤติกรรมการไหลของ ของไหล การถ่ายเทความร้อน ในชิ้นส่วนเครื่องกล รูปแบบการกระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า, คลื่นเสียง ฯลฯ ทำไมจึงจำเป็นต้องใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์? คำตอบ มีมากมาย ประการแรกก็คือ ในการออกแบบ ชิ้นส่วนเครื่องกล เราจำเป็นต้องรู้ขีดความสามารถในการรับภาระ ของชิ้นส่วนนั้น ถ้าหากรูปทรงของ ชิ้นส่วนไม่ซับซ้อน เราก็สามารถคำนวณหา คำตอบที่แน่แท้ได้ (analytical solution) แต่ถ้ารูปทรงของ ชิ้นส่วนซับซ้อน เราจำเป็นต้องใช้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อช่วยในการคำนวณหาค่าความเค้น (stress) ความเครียด (strain) หรือการเสียรูปทรง (deformation) ของชิ้นส่วนนั้นได้ หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวอย่างง่าย ๆ ก็คือ เราทำการเติมรูปทรงของผลิตภัณฑ์ ด้วยชิ้นส่วนเล็กๆ ที่มีรูปทรงเรขาคณิต เช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม ลูกบาศก์ เป็นต้น เนื่องจากเราสามารถคำนวณหา คำตอบที่แน่แท้ ของชิ้นส่วนที่มี รูปทรงเรขาคณิตได้ ดังนั้นเมื่อ เราเติมชิ้นส่วนเล็กๆ เหล่านี้ลงไป ในชิ้นส่วนใหญ่ เราก็สามารถศึกษา พฤติกรรมโดยรวมของระบบได้ ประวัติของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์? แนวคิดเบื้องต้นของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มมาจากการหาวิธีการ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง ของเครื่องบิน Hrenikoff ได้เสนอการใช้ วิธี frame work เพื่อแก้ปัญหาทาง elasticity เป็นรายแรก ต่อมาในปี ค.ศ. 1943 Courant ก็ได้ตีพิมพ์บทความ วิชาการ เกี่ยวกับการนำวิธีการ polynomial interpolation บนขอบเขตสามเหลี่ยม เพื่อใช้เป็นแนวทางในการ ประมาณผลคำตอบ และนอกจากนี้ Courant ก็ยังแนะนำการใช้วิธีการของ Rayleigh-Ritz มาใช้ในการหาผล คำตอบ ของปัญหาทางวิศวกรรมอีกด้วย ซึ่งน่าจะเป็นที่มาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั่นเองจนกระทั่งในปี ค.ศ. 1953 วิศวกรจึงได้นำเอาเครื่องคอมพิวเตอร์ มาแก้สมการของ stiffness matrix เป็นครั้งแรก หลังจากนั้น อีกเจ็ดปี Clough จึงได้ตั้งชื่อวิธีการนี้ว่า วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ในปี ค.ศ. 1960 ไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัจจุบัน

ในปัจจุบันแทบจะพูดได้ว่าผลิตภัณฑ์ที่เราใช้กันอยู่ทุกวันนี้ ได้ผ่านการออกแบบด้วย วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์แทบทั้งนั้น ดังเช่นที่ผมได้ยกตัวอย่างเอาไว้ตอนต้นเกี่ยวกับ การออกแบบรถยนต์ ที่ เรียกได้ว่าไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้มีส่วนร่วมแทบทุกชิ้นส่วนเลยทีเดียว ผลิตภัณฑ์พลาสติกก็เช่นกัน ได้มีการ นำเอาไฟไนต์เอลิเมนต์ มาศึกษาการไหลของน้ำพลาสติก เพื่อใช้ออกแบบ แม่พิมพ์ฉีดพลาสติกที่สามารถ ผลิตชิ้นงานที่มีขนาด, รูปทรงที่มีความเที่ยงตรงสูง และมีผิวเรียบสวยงาม

และในปัจจุบันนี้การแข่งขันทางการค้าที่สูงมาก เวลาทุกเสี้ยววินาทีหมายถึงผลประโยชน์อันมีค่าของบริษัท ถ้าหากช้าเพียงนิดเดียว ก็อาจจะเสียโอกาสทางการค้าได้ ในงานทางวิศวกรรมก็เช่นกัน เวลาที่ใช้ในการออกแบบ และสร้างผลิตภัณฑ์ หมายถึงโอกาสทางการค้า และผลประโยชน์ของบริษัท อย่างไรก็ตาม เพื่อดึงดูดใจผู้ซื้อ งานออกแบบ และสร้างผลิตภัณฑ์ทางวิศวกรรมนั้น ต้องคำนึงถึงรูปแบบของผลิตภัณฑ์ และฟังก์ชันการทำงาน ที่มีลูกเล่นหลากหลาย รวมไปถึงความปลอดภัยในการใช้งาน ที่ได้ตามมาตรฐานอุตสาหกรรม ด้วยเหตุนี้ก็จะอาจจะก่อให้เกิดความล่าช้า ในการออกแบบ และทดสอบผลิตภัณฑ์ต้นแบบขึ้นมาอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ และถ้าหากว่า ผลิตภัณฑ์ต้นแบบนั้น ไม่ผ่านมาตรฐานการทดสอบ ก็อาจจำเป็นต้องย้อนกลับมาแก้ไข ออกแบบ และทำการสร้าง ผลิตภัณฑ์ต้นแบบกันใหม่อีก ดังนั้นขั้นตอนในการออกแบบจึงเป็นจุดสำคัญที่จะสร้างความมั่นใจได้ว่าผลิตภัณฑ์นั้นจะ สามารถผ่านมาตรฐานการทดสอบต่างๆ ได้ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดก็คือ การออกแบบรถยนต์ ที่นอกจากจะต้องมีรูปทรง สะดุดตา และดึงดูดใจผู้ซื้อแล้ว ในขณะเดียวกันนั้นรถยนต์ ก็ยังจำเป็นต้อง มีความปลอดภัยในการใช้งานที่สูง และเชื่อถือได้ การประยุกต์เอาคอมพิวเตอร์ เข้ามาช่วยในการออกแบบ และจำลองการทดสอบ (simulation) ได้ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ทั้งนี้เพื่อลดเวลา และค่าใช้จ่ายในการออกแบบ และ พัฒนาผลิตภัณฑ์ และก็เพื่อสร้างความมั่นใจว่า ผลิตภัณฑ์ที่ออกแบบมานั้น สามารถผ่านการทดสอบได้ตามมาตรฐานอุตสาหกรรม การจำลองปัญหาบนคอมพิวเตอร์ เป็นการประหยัดเงิน ทุนในการวิจัย และพัฒนาได้เป็นอย่างมาก อีกทั้งผลคำตอบที่ได้ก็เป็นที่ยอมรับและสอดคล้องเป็นอย่างดีกับการทดลองจริง เมื่อต้นทุน การวิจัย และระยะเวลาในการออกแบบลดลง ต้นทุนของสินค้าก็ลดตามลง ราคาสินค้าก็จะถูกลง ทั้งนี้ผู้บริโภคก็มีกำลังซื้อผลิตภัณฑ์นั้นได้

ข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

- 1.สามารถสร้างแบบจำลองของโครงสร้าง หรือชิ้นงานที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดีและสะดวก
- 2.สามารถจำลองการกระทำของโหลดในสภาพต่างๆ เช่น โหลดที่กระจายไม่สม่ำเสมอ ได้ใกล้เคียงสภาพจริง
- 3.ใช้วิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนระบบเครื่องจักรกลที่ประกอบด้วยวัสดุต่างกัน ได้โดยไม่มี ความยุ่งยาก
- 4.สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหา ไม่ว่าจะเงื่อนไขขอบ เงื่อนไขบังคับ และจุดรับรอง จะอยู่ในลักษณะใด
- 5.สามารถจะเลือกขนาดของเอลิเมนต์ ที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งให้มีใหญ่หรือเล็กได้ตามความจำเป็น
- 6.ในการออกแบบชิ้นส่วนหรือระบบสามารถจะเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ได้สะดวก และยังประหยัดเวลาค่าใช้จ่ายด้วย

7. ในระบบการออกแบบจะผลิตชิ้นส่วนเครื่องจักรกลสมัยใหม่ (CAD และ CAM) มักนิยมใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ วิเคราะห์ก่อน ก่อนที่จะผลิตชิ้นส่วนจริง ซึ่งทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายและมีความแม่นยำสูง

8. ในกรณีของวัสดุประเภทยืดหยุ่นตัวไม่เป็นเชิงเส้น หรือในช่วงพลาสติก ก็ยังสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิเคราะห์สิ่งที่ต้องการ ได้สะดวก เช่นการล้าตัวและ creep ของชิ้นส่วนเครื่องจักร

2.3.5 ข้อระวังของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลเฉลยของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกต้องมากเพียงใดจะขึ้นอยู่กับ 3 ประการหลัก คือ ประการแรกคือ การกำหนดรูปร่างของเอลิเมนต์ให้ใกล้เคียงกับรูปร่างลักษณะจริงของชิ้นงานมากน้อยเพียงใด ประการที่สองการประมาณพฤติกรรมของเอลิเมนต์ ได้ถูกต้องสภาพที่แท้จริง หรือ ไม่และประการสุดท้ายคือ ความละเอียดในการคำนวณตัวเลขที่มีค่าน้อยๆ ของเครื่องคอมพิวเตอร์

การกำหนดหรือแบ่ง เอลิเมนต์ย่อยๆ ให้สอดคล้องกับรูปร่างและลักษณะของชิ้นงานได้มากเท่าไร ก็จะทำให้ผลเฉลยถูกต้องมากขึ้นเท่านั้น เช่นถ้าต้องการวิเคราะห์ความเค้นในแผ่นโลหะ สี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางและแรงกระทำตามภาพ 2.1ก โดยอาศัยหลักการสมมาตร แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นโลหะควรจะใช้พื้นที่เพียง 1/4 ของพื้นที่ทั้งหมด ส่วนเอลิเมนต์ย่อยๆ บริเวณรูควรจะมีขนาดเล็กมากๆ เพื่อสามารถจะแทนส่วนโค้งของรูป ให้ได้มากที่สุด เช่นรูป และอาจจะเลือกใช้เอลิเมนต์ ที่สามารถแทน ส่วนเว้า ส่วนโค้งของรูปให้ได้มากที่สุด และอาจจะเลือกใช้เอลิเมนต์ที่สามารถแทนส่วนเว้าส่วนโค้ง ของรูหรือเอลิเมนต์ที่สามารถแทนการกระจัดในเชิงเส้นโค้งได้ เช่นเลือกใช้ เอลิเมนต์ สี่เหลี่ยมด้านโค้ง

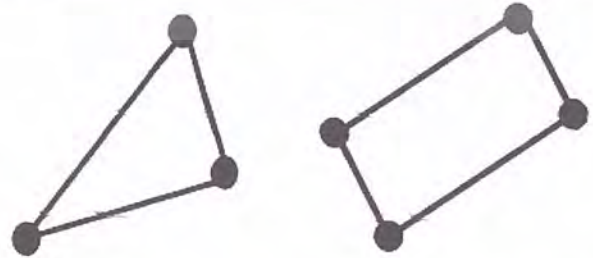
ส่วนการได้มาของ ไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่จะใช้ในการวิเคราะห์ อาจจะไม่ต้องสอดคล้องกับการยึดตัว อย่างต่อเนื่องจากวัตถุเช่นถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีการยึดตัวเชิงเส้นเอลิเมนต์ชนิดนี้จะให้ค่าแม่นยำ ถ้าปัญหาเป็นแบบท่อโลหะ ที่รับแรงดึงแรงอัด แต่ถ้าท่อโลหะเดียวกัน รับแรงกระจายเนื่องจากมวล การกระจัดที่เกิดขึ้นภายในท่อนโลหะจะเป็นแบบสมการกำลัง 2 และถ้ายังคงใช้เอลิเมนต์แบบเส้นตรง ก็จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้น ในผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา และการเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยได้

ส่วนความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ และวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขนั้น จะขึ้นอยู่กับขีดความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ การใช้ความแม่นยำระดับ 2 และขนาดของ bandwidth ที่เล็กที่สุดและจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนดังกล่าวได้และถ้าเลือกใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีมาตรฐานระดับสูง ความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข ในการคำนวณมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับความคลาดเคลื่อนในการเลือกชนิด และขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาตรฐานทั่วไป เช่น ANSYS ข้อมูลที่จะต้องให้กับ

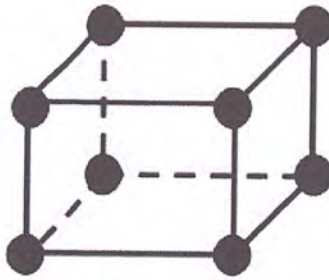
คอมพิวเตอร์ก็คือ ตำแหน่งและพิกัดของจุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์ ชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ คุณสมบัติทางกลของวัสดุของแต่ละเอลิเมนต์ ลักษณะของโหลดที่กระทำ ลักษณะของเงื่อนไขขอบหรือเงื่อนไขบังคับ และต้องระบุชนิดของการวิเคราะห์ด้วย เช่น ความเค้นระนาบหรือความเครียดระนาบ เป็นต้น เครื่องคอมพิวเตอร์เครื่องคอมพิวเตอร์จะใช้ข้อมูลเหล่านั้นคำนวณสิ่งต่างๆที่ต้องการ

จากประสบการณ์การแก้ปัญหาทางงานทางวิศวกรรมในด้านกลศาสตร์ของแข็งด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของผู้เขียน พบว่าปัญหาอย่างหนึ่งที่สำคัญและพบบ่อยครั้ง ได้แก่การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ที่ไม่เหมาะสมกับปัญหาทั้งนี้เนื่องจากการเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์จะมีผลกระทบต่อเวลาที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองรูปร่าง (CAD Model) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element model) เวลาในการคำนวณ (Solving time) เวลาในการแสดงผล (Post processing time) ปริมาณการใช้เนื้อที่ของหน่วยความจำสำรอง (Disk usage for solving) และหน่วยความจำหลัก (Memory usage for solving) ของเครื่องคอมพิวเตอร์ทั้งหมดที่กล่าวมานี้จะส่งผลกระทบต่อตรงต่อระยะเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของงานแต่ละชิ้นซึ่งในบทความนี้ผู้เขียนจะนำเสนอตัวอย่างเพื่อให้ผู้อ่านได้มีความเข้าใจถึงความสำคัญของการเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์มากขึ้นแต่ก่อนจะนำเสนอตัวอย่างนั้นผู้เขียนขออธิบายถึงเอลิเมนต์ชนิดต่างๆ ก่อนโดยทั่วไปชนิดของเอลิเมนต์สามารถแบ่งออกเป็น 3 รูปแบบได้แก่ เอลิเมนต์ใน 1 มิติ, เอลิเมนต์ใน 2 มิติ และ เอลิเมนต์ใน 3 มิติ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

รูปที่ 2.2 เอลิเมนต์ใน 1 มิติ ได้แก่ Rod Element, Bar Element, Beam Element และอื่นๆ

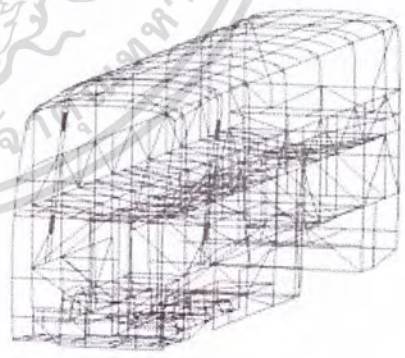


รูปที่ 2.4 เอลิเมนต์ใน 2 มิติ ได้แก่ Plane Stress Element, Plane Strain Element, Shell Element และอื่นๆ



รูปที่ 2.5 เอลิเมนต์ใน 3 มิติ ได้แก่ Solid Element

เอลิเมนต์ใน 1 มิติเป็นเอลิเมนต์ที่มีรูปแบบง่ายที่สุด ใน 1 เอลิเมนต์โดยมากมักประกอบด้วย 2 จุดต่อ (Node) เอลิเมนต์ชนิดนี้เหมาะสำหรับแก้ปัญหาทางด้านโครงสร้างหรืองานอื่นๆที่วางตัวตามแนวยาวและมีลักษณะเป็นท่อนคุณสมบัติเพิ่มเติมที่ต้องกำหนดให้กับเอลิเมนต์ได้แก่พื้นที่หน้าตัดของชิ้นงาน สำหรับข้อดีของเอลิเมนต์ชนิดนี้คือ การใช้เนื้อที่ของหน่วยความจำเพียงเล็กน้อยใช้เวลาในการเตรียมข้อมูลและการคำนวณไม่มากนัก ส่วนข้อจำกัดได้แก่ความไม่สมจริงบริเวณจุดต่อของโครงสร้างและไม่สามารถแสดงการกระจายตัวของความเค้นบริเวณจุดต่อได้



รูปที่ 2.6 ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 1 มิติสำหรับการแก้ปัญหา

เอลิเมนต์ใน 2 มิติโดยทั่วไปจะมีสองลักษณะคือ แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ และแบบสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วย 4 จุดต่อเอลิเมนต์ชนิดนี้เหมาะสำหรับแก้ปัญหาที่สามารถจำลองรูปร่างเป็นพื้นผิวสำหรับคุณสมบัติที่ต้องกำหนดเพิ่มเติมคือความหนาของชิ้นงานในส่วนของข้อดีของเอลิเมนต์แบบนี้คือสามารถแก้ไขปัญหามีรูปร่างซับซ้อนได้มากกว่าเอลิเมนต์ใน 1 มิติเวลาที่ใช้คำนวณแม้จะมากขึ้นเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์ใน 1 มิติแต่เมื่อเทียบเวลากำหนดกับเอลิเมนต์ใน 3 มิติแล้วยังถือว่าน้อยมากอีกทั้งผลลัพธ์จากการคำนวณที่ได้ยังมีความถูกต้องสูงอีกด้วย



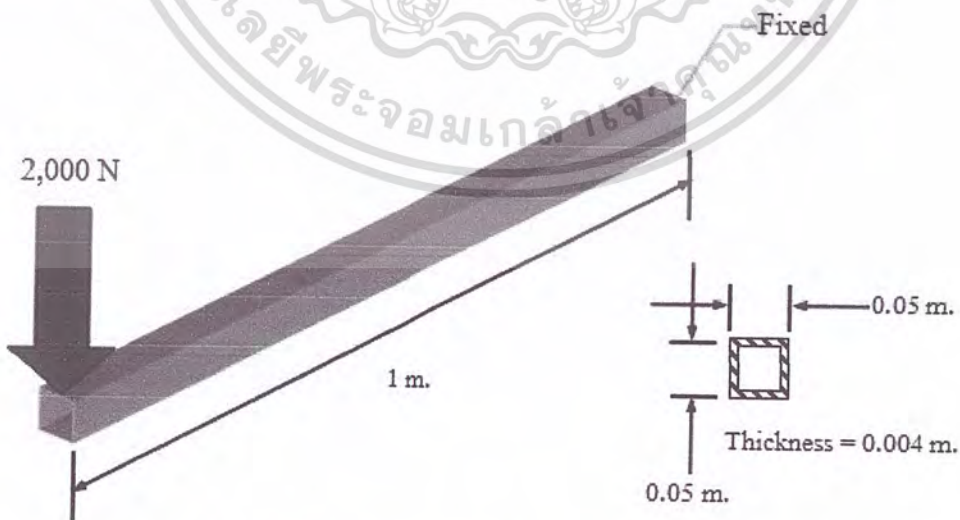
รูปที่ 2.7 ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 2 มิติสำหรับการแก้ปัญหา

เอลิเมนต์ใน 3 มิติรูปร่างของเอลิเมนต์นี้โดยทั่วไปจะมีรูปทรงลูกบาศก์ที่ประกอบด้วย 8 จุดต่อ และรูปทรงปิระมิดที่ประกอบด้วย 4 จุดต่อ ขึ้นอยู่กับรูปร่างของชิ้นงานสำหรับเอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถใช้แก้ปัญหาศาสตร์ของแข็งได้หลากหลายรูปแบบแต่ปัญหาหลักของการใช้เอลิเมนต์ชนิดนี้คือการใช้หน่วยความจำรวมทั้งใช้เวลาในการคำนวณนานซึ่งมักจะเป็นปัญหาสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล

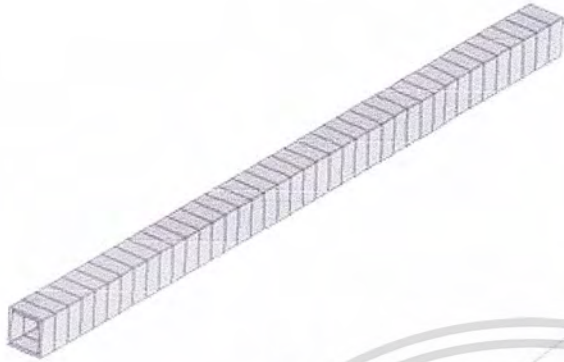


รูปที่ 2.8 ตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ใน 3 มิติสำหรับการแก้ปัญหา

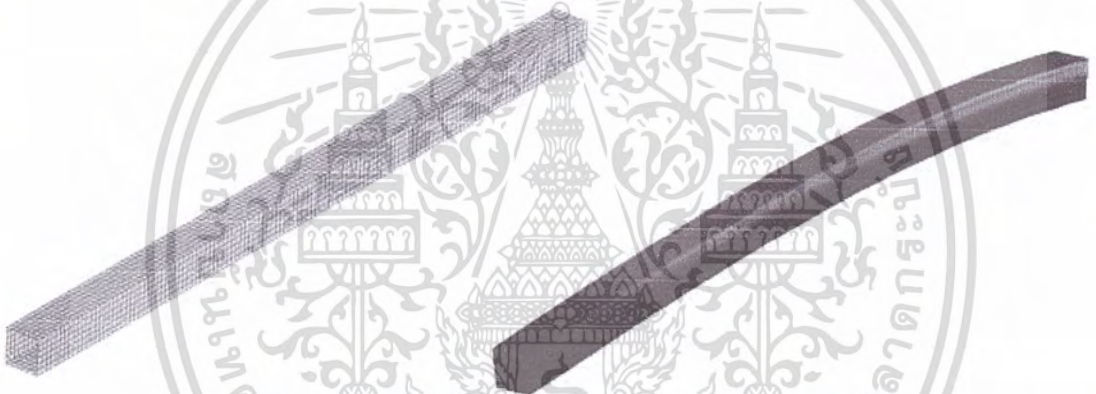
เพื่อแสดงถึงความแตกต่างของการเลือกใช้นิคมของเอลิเมนต์ให้มีความชัดเจนมากขึ้นจึงขอ ยกตัวอย่างปัญหาเหล็กท่อนที่รองรับน้ำหนัก $2,000\text{ N}$ บริเวณปลายด้านหนึ่ง ส่วนปลายอีกข้างจับยึดแน่น (Fixed) ดังรูปที่ 7 ทำการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาและนำนิคมของเอลิเมนต์ที่กล่าวไว้ข้างต้นทั้ง 3 แบบมาใช้ในการคำนวณ โดยระหว่างการวิเคราะห์ปัญหาผู้เขียนได้จับเวลา กระบวนการทำงานทั้งหมดรวมทั้งบันทึกข้อมูลการใช้เนื้อที่หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ด้วย จากนั้นจึงนำข้อมูลที่ได้นำมาเปรียบเทียบ โดยสรุป ดังแสดงในตารางที่ 2-1



รูปที่ 2.9 ลักษณะของปัญหาที่นำมาเปรียบเทียบการใช้ชนิดของเอลิเมนต์ต่างกัน



รูปที่ 2.10 ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 1 เมตร



รูปที่ 2.11 ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 2 เมตร



รูปที่ 2.12 ผลการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 3 เมตร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบระยะเวลาการทำงานและปริมาณการใช้หน่วยความจำจากการใช้ ชนิดของเอลิเมนต์ทั้ง 3 รูปแบบ

	เอลิเมนต์ใน 1 มิติ	เอลิเมนต์ใน 2 มิติ	เอลิเมนต์ใน 3 มิติ
Number of nodes	41	3025	38420
Number of elements	40	3001	28101
DOF (Degree of freedom)	240	17862	110787
Disk usage for solving	1.2 MB	101 MB	932 MB
Memory usage for solving	16 MB	32 MB	72 MB
Modelling time	5 min	10 min	20 min
Solving time	2 sec	60 sec	600 sec
Postprocessing time	3 min	1 min	0.5 min
Total time	8 min	12 min	25.5 min

สำหรับปัญหานี้สามารถหาค่าการขยับตัวจากผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) ด้วยสมการ

$$\text{Max. deformation} = \frac{-PL^3}{3EI}$$

โดยที่ $P = 2000 \text{ N}$

$L = 1 \text{ m.}$

$E = 200 \text{ Gpa}$

$I = 2.61525 \cdot 10^{-7} \text{ m.}^4$

ตารางที่ 2.2 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าการยุบตัวของการใช้ชนิดของเอลิเมนต์ทั้ง 3 รูปแบบและผลเฉลยแม่นยำ

	เอลิเมนต์ใน 1 มิติ	เอลิเมนต์ใน 2 มิติ	เอลิเมนต์ใน 3 มิติ	ผลเฉลยแม่นยำ
Max. deformation	0.0128 m.	0.0128 m.	0.0128m.	0.012745 m.

ผลการเปรียบเทียบการใช้ชนิดของเอลิเมนต์ทั้ง 3 รูปแบบ ในตารางที่ 2 พบว่าการยุบตัวที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากันและใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำแต่จากข้อมูลในตารางที่ 1 พบว่าเวลาโดยรวมที่ใช้ในการทำงานระหว่างกระบวนการวิเคราะห์ปัญหากรณีที่ใช้เอลิเมนต์ใน 3 มิติ จะใช้เวลานานที่สุด

ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริง คนส่วนใหญ่เมื่อได้ CAD Model มักพยายามที่จะวิเคราะห์ปัญหาด้วยการใช้เอลิเมนต์ใน 3 มิติ จากตารางที่ 1 ผู้อ่านคงเห็นแล้วว่า การลงไปวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์ใน 3 มิตินั้นจะใช้เวลาในการวิเคราะห์ค่อนข้างนานและใช้เนื้อที่หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์จำนวนมากหรือบางครั้งอาจเกิดปัญหาในขั้นตอนการตี Mesh กับ 3-D CAD Model ที่สร้างขึ้นมาจากเนื้อหาที่กล่าวมาแล้วข้างต้นของบทความนี้ผู้เขียนต้องการนำเสนอทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยการพยายามวิเคราะห์ปัญหาให้ง่ายขึ้น (Simplify) ด้วยการใช้อิเลเมนต์ใน 1 มิติและ 2 มิติเพื่อลดเวลาที่ใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาในขั้นตอนการออกแบบผลิตภัณฑ์ซึ่งช่วยให้ผู้ประกอบการสามารถนำผลิตภัณฑ์ออกสู่ตลาดทันตามแผนการตลาดในระยะเวลาอันรวดเร็วดังนั้นในการแก้ปัญหาแต่ละครั้งวิศวกรควรวิเคราะห์ปัญหาให้ง่ายขึ้นและเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับงานเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องในเวลาอันรวดเร็วซึ่งทำให้ประหยัดเวลาในการพัฒนาและออกแบบผลิตภัณฑ์

2.4 วิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง

เนื่องจากการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่นและเปลือกหอยต้องใช้หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีความซับซ้อนและต้องใช้ความรู้ที่สูงกว่าระดับปริญญาตรีในการวิเคราะห์ ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าExact Solution ในครั้งนี้ จะทำการอ้างอิงผลการวิเคราะห์โครงสร้างจากงานวิจัยที่ได้ทำผ่านมาแล้วเพื่อการเปรียบเทียบค่า Exact Solution กับค่าคำตอบที่ได้จากโปรแกรมทำได้สะดวก

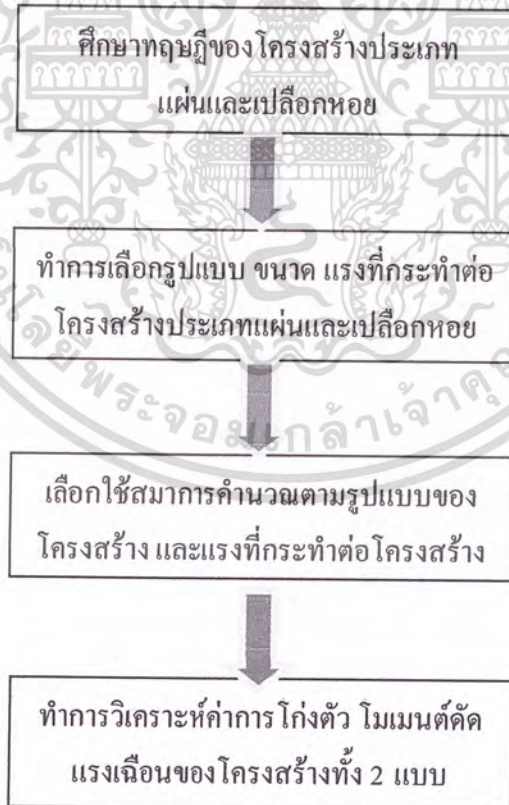
บทที่ 3

วิธีการดำเนินการ

วิธีการศึกษาความแม่นยำของตัวโปรแกรมวิเคราะห์โครงสร้างด้วยหลักการของ Finite Element สามารถแบ่งออกเป็นขั้นตอนต่างๆได้ ดังต่อไปนี้

3.1 ศึกษาทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่น (Plates) และโครงสร้างเปลือกหอย (Shells)

ทำการศึกษาทฤษฎีในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่น (Plate) และโครงสร้างเปลือกหอย (Shell) โดยอาศัยทฤษฎีของ Timoshenko และ งานวิจัยจากที่อื่น โดยสามารถสรุปขั้นตอนการวิเคราะห์ตามรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่น และโครงสร้างประเภทเปลือกหอย

3.2 ศึกษาการใช้โปรแกรมต่างๆที่ใช้หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์

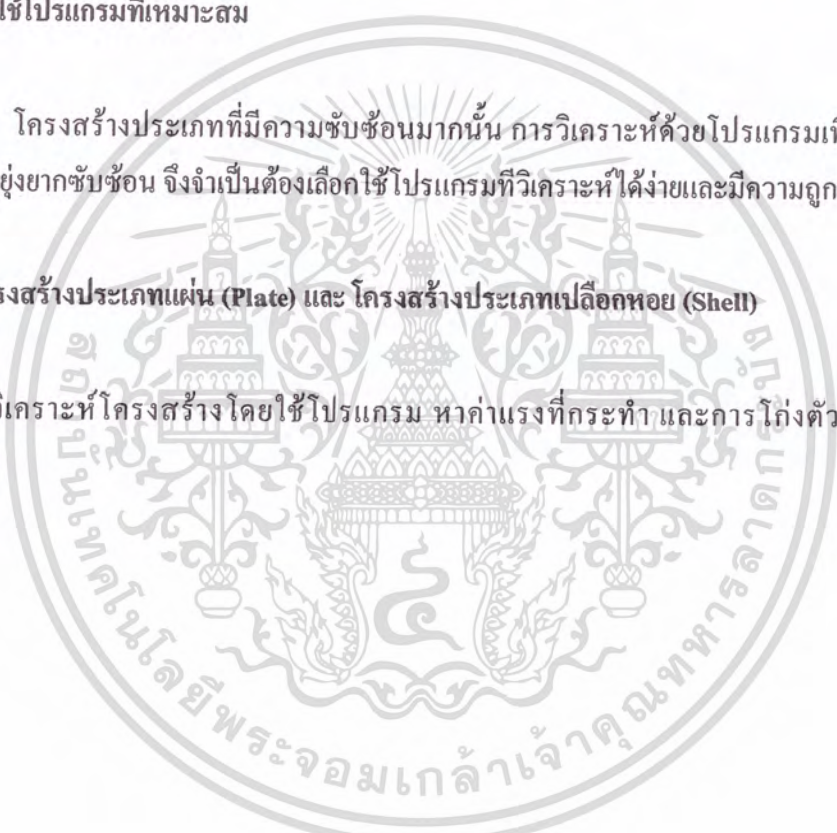
ทำการศึกษาโปรแกรมที่ใช้วิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้หลักการของไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเลือกรูปแบบโครงสร้างที่จะทำการวิเคราะห์ว่าตัวโปรแกรมสามารถแสดงผลออกมาอย่างไร สามารถวิเคราะห์โครงสร้างประเภทที่ค่อนข้างซับซ้อนได้หรือไม่

3.3 ทำการเลือกใช้โปรแกรมที่เหมาะสม

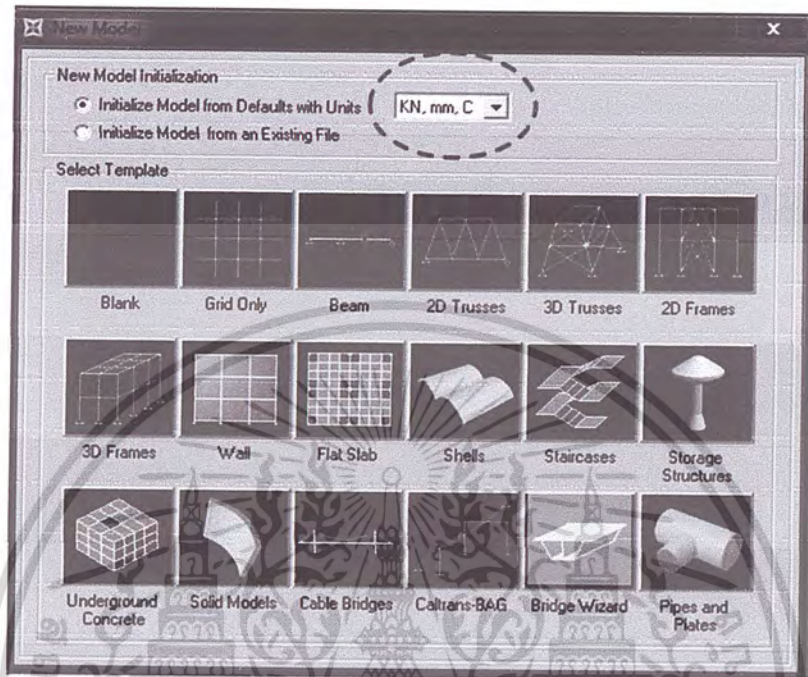
โครงสร้างประเภทที่มีความซับซ้อนมากนั้น การวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมเพียงโปรแกรมเดียวอาจมีความยุ่งยากซับซ้อน จึงจำเป็นต้องเลือกใช้โปรแกรมที่วิเคราะห์ได้ง่ายและมีความถูกต้องมากที่สุด

3.4 วิเคราะห์โครงสร้างประเภทแผ่น (Plate) และ โครงสร้างประเภทเปลือกหอย (Shell)

วิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้โปรแกรม หาค่าแรงที่กระทำ และการโก่งตัว ที่กระทำต่อโครงสร้างนั้นๆ



3.5 ขั้นตอนการใช้โปรแกรม



รูปที่ 3.2 แสดงการเลือกหน่วยตามที่เราต้องการ

3.5.1 ในการใช้โปรแกรมแต่ละครั้งนั้นผู้ที่ใช้โปรแกรมต้องทำการเลือกหน่วยให้ถูกต้องก่อน เพื่อป้องกันการสับสนในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบต่างๆ

3.5.2 ในโปรแกรม SAP2000 นั้นเราสามารถวิเคราะห์โมเดลได้หลายรูปแบบ แต่ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้เพียง 4 รูปแบบเท่านั้น คือ

- Blank
- Grid Only
- Beam
- Shells



รูปที่ 3.3 Grid only ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภท Plate ที่มีลักษณะทางกายภาพเหมือนกันทั้งแผ่น เช่น พื้น เรียบ กาน เป็นต้น



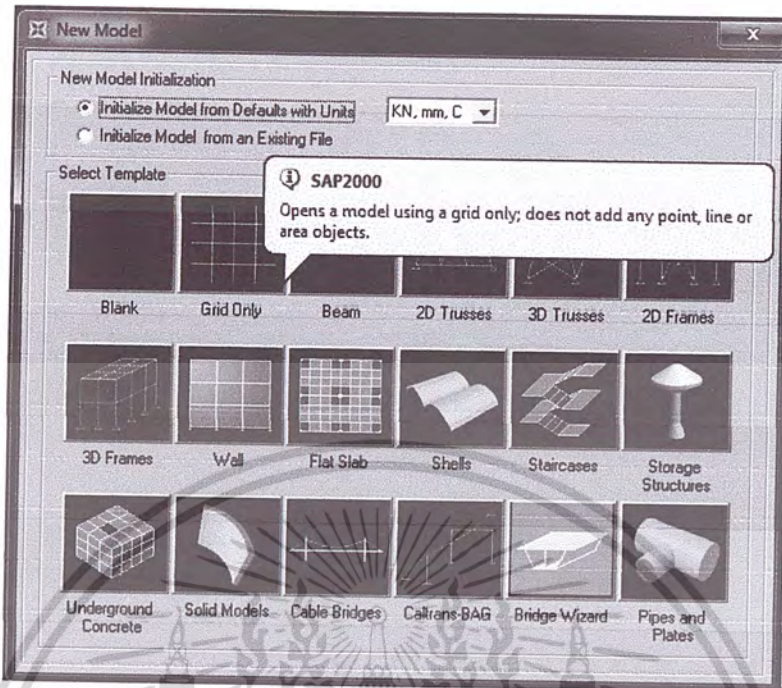
รูปที่ 3.4 Blank ในส่วนของโครงสร้างที่มีความสลับซับซ้อน ในการขึ้นโมเดล จะใช้ตัวเลือกนี้ เนื่องจากรูปแบบอื่นๆ ไม่สามารถขึ้นโมเดลได้ แต่การใช้ Blank ในการขึ้นโมเดลนั้นค่อนข้างยากพอสมควร



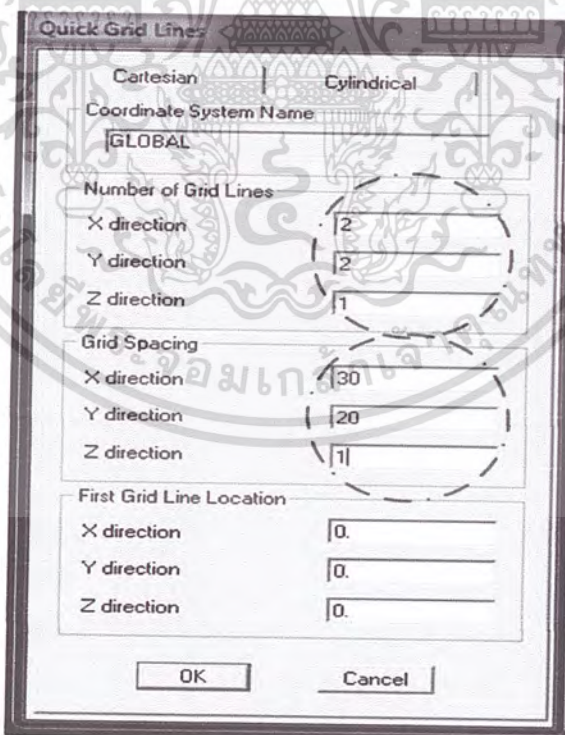
รูปที่ 3.5 Shells ในส่วนของโครงสร้างที่เป็นแบบ Shells จะเลือกรูปแบบนี้ในการวิเคราะห์ โดยสามารถเลือกประเภทของ Shells ได้หลายรูปแบบเช่น โดม เป็นต้น



รูปที่ 3.6 Beam ในการวิเคราะห์คานนั้นเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวโปรแกรม เพื่อให้มั่นใจว่าในการป้อนข้อมูลต่างๆ มีความถูกต้อง



รูปที่ 3.7 เลือกคำสั่ง Grid Only เพื่อจะ โมเดล โครงสร้างประเภท Plates

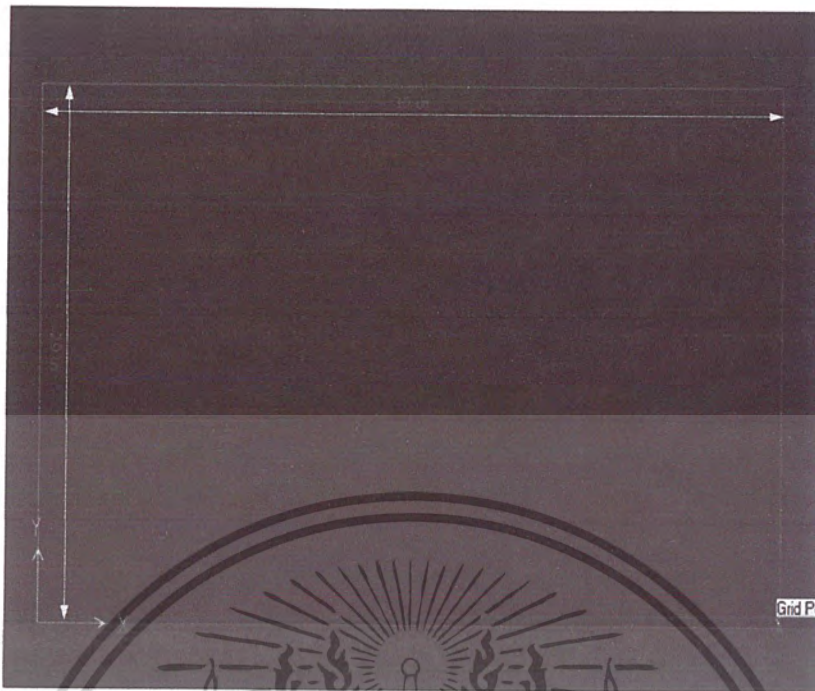


รูปที่ 3.8 แสดงค่าที่ป้อนลงในโปรแกรม โดยค่าที่ทำการป้อนเฉพาะที่วงกลมสีแดงเท่านั้น

3.5.3 เมื่อทำการเลือกรูปแบบ โมเดลแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการป้อนค่าต่างๆ ในตัวอย่างนี้จะทำก โมเดลโครงสร้างประเภท Plates โดยค่าที่ป้อนจะประกอบด้วย จำนวนกริดไลน์ (Number Of Gridlines) แกน X,Y และ Z ระยะห่างระหว่างกริด (Grid Spacing) ใน แกน X,Y และ Z โดยค่าที่ป้อนต่างๆจะแสดง ให้เห็นใน รูปที่ 3.8

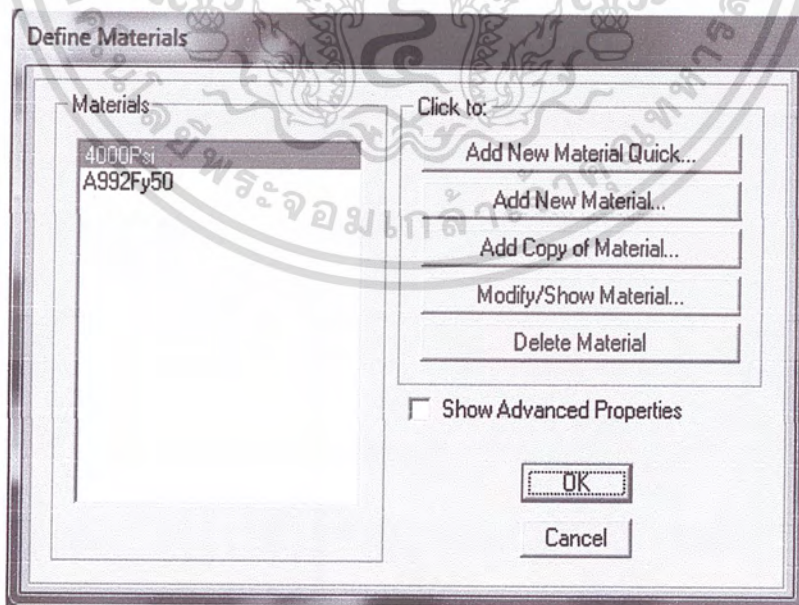


รูปที่ 3.9 ผลลัพธ์ที่ได้จากการป้อนค่าต่างๆ

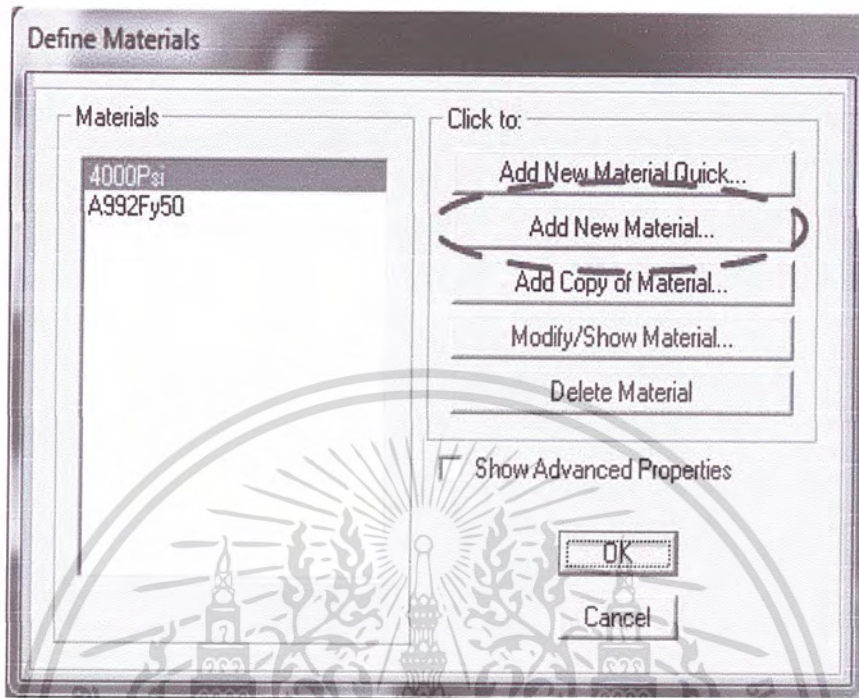


รูปที่ 3.10 โปรแกรมจะแสดงภาพตามที่เรป้อนค่า โดยแสดงระยะตามในรูป

3.5.4 เมื่อเรป้อนค่าตามที่ต้องการแล้ว จากนั้นจะเป็นการเลือกชนิดของวัสดุที่เราต้องการ โดยการป้อนค่าวัสดุนั้น ให้เลือกที่คำสั่ง Define → Define Materials ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 Define Materials

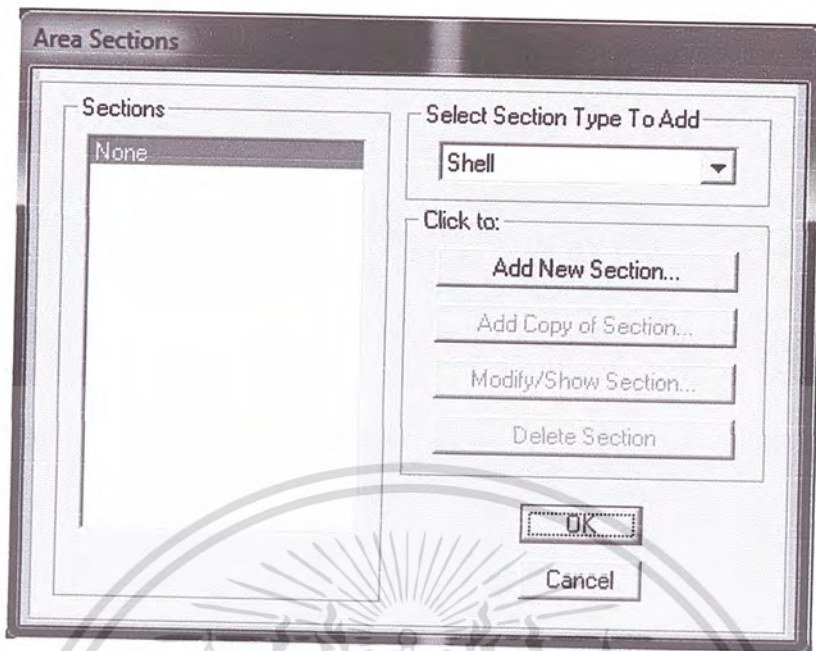


รูปที่ 3.12 เลือกคำสั่ง Add New Material

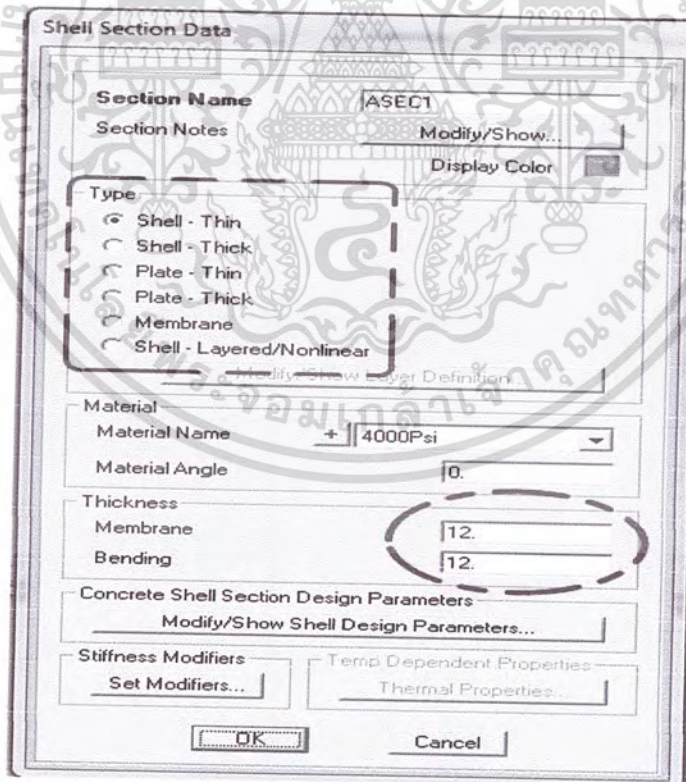
3.5.5 ในขั้นตอนต่อไปจะเป็นตัวกำหนดค่า Materials ที่เราต้องการ โดยเลือกที่คำสั่ง Add New Material ดังรูปที่ 3.12 จากนั้นจะแสดงหน้าต่างให้ใส่ค่า Materials Property

รูปที่ 3.13 โปรแกรมจะแสดงค่าต่างที่ต้องทำการป้อนข้อมูลตามค่าที่เราต้องการ แล้วเลือก OK

3.5.6 ในขั้นตอนต่อไปจะเป็นการกำหนดชนิดของหน้าตัดที่เราต้องการวิเคราะห์ โดยเลือกที่คำสั่ง Area Section ใน Define Materials ดังรูปที่ 3.14 โดยเลือก Add New Section



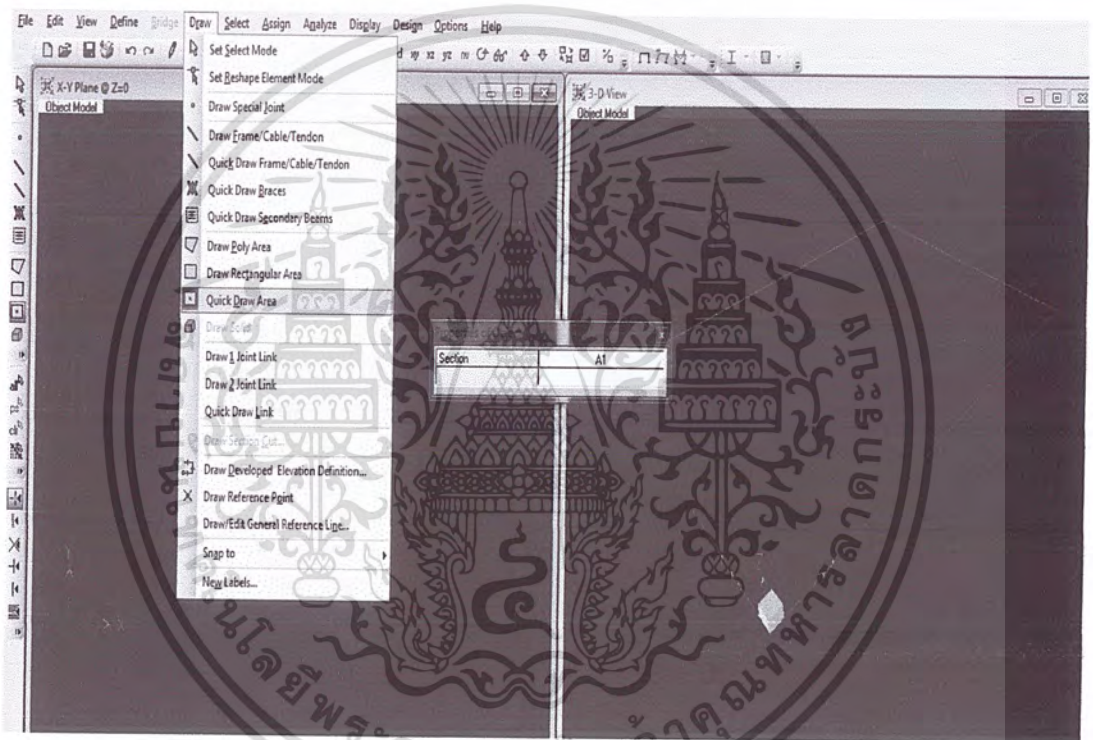
รูปที่ 3.14 แสดงการเลือกชนิดของหน้าตัดที่เราต้องการ โดยเลือก Add New Section



รูปที่ 3.15 แสดงการกำหนดค่าวัสดุและความหนาที่ต้องการ

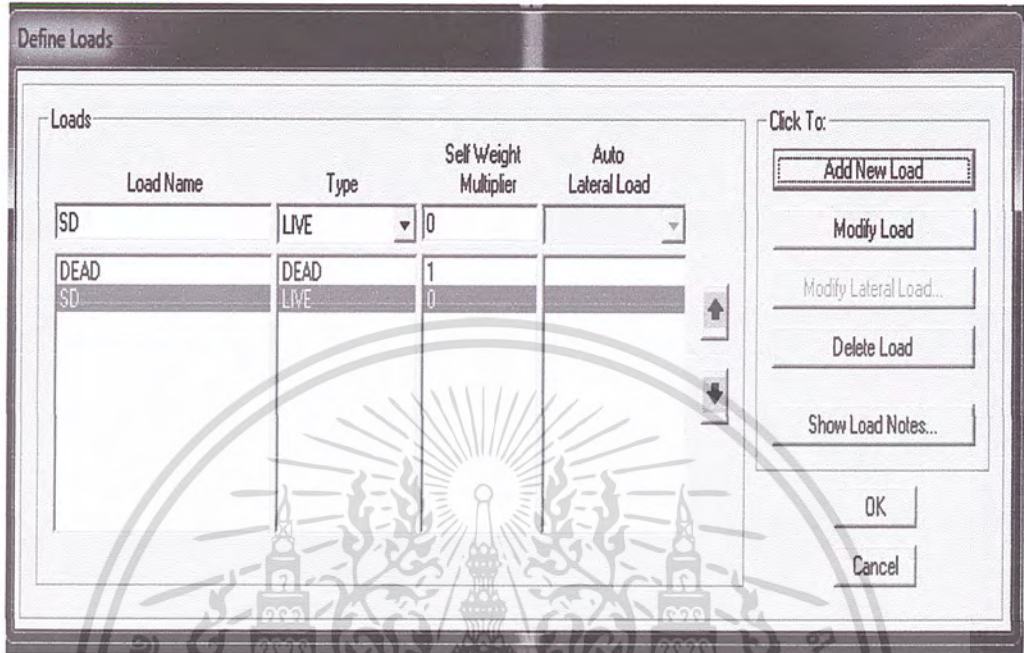
3.5.7 ในกรอบสีแดง รูปที่ 3.15 เป็นการที่เราต้องเป็นผู้กำหนดว่าจะให้วัสดุที่ทำการวิเคราะห์มีลักษณะแบบใด และต้องกำหนดความหนาให้กับวัสดุ(กรอบวงกลมสีแดง) โดยใส่ค่าในช่อง Membrane และ Bending

3.5.8 ในขั้นตอนต่อไปจะเป็นการกำหนดว่าโมเดลที่เราสร้างขึ้นมานั้นมีคุณลักษณะ ตามที่เราป้อนค่าไว้ในขั้นตอนที่ 7 โดยทำการเลือกที่คำสั่ง Draw → Quick Draw Area จากนั้นนำเมาส์ไปคลิกที่โมเดลที่ทำการสร้างขึ้นมา ก็จะได้โครงสร้างที่เราต้องการ ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 แสดงการระบุวัสดุที่เราต้องการ ในโมเดลที่ทำการสร้างขึ้น

3.5.9 เมื่อทำการใส่ค่าคุณลักษณะของวัสดุ ในโมเดลที่ทำการสร้างขึ้นมาแล้วนั้น ในขั้นตอนต่อไปจะเป็นการกำหนดชนิดของแรงที่กระทำต่อโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์ โดยเลือกที่คำสั่ง Define → Load Caes จากนั้นโปรแกรมจะแสดง Define Load ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 เป็นการกำหนดชนิด Load ที่เราต้องการ

3.5.10 ในการเลือกชนิด Load นั้นขึ้นอยู่กับว่าผู้ใช้โปรแกรมต้องการวิเคราะห์ด้วยแรงชนิดใด โดยตัวอย่างนี้จะวิเคราะห์เฉพาะแรงจากน้ำหนักจร (Live Load) ซึ่งโปรแกรมจะไม่คิदनน้ำหนักของตัวมันเอง (Dead Load) โดยตั้งชื่อ Load Name เป็น SD แล้วเลือกชนิด Load เป็น Live จากนั้นเลือก Add New Load แล้วกด OK



รูปที่ 3.18 แสดงการใส่ support ที่มุมของโครงสร้างที่ทำการวิเคราะห์

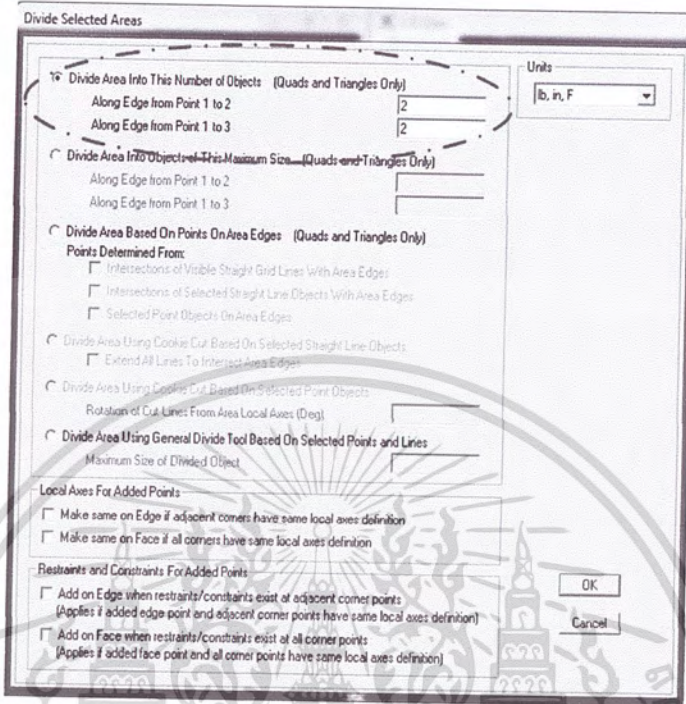
3.5.11 ในขั้นตอนต่อไปจะเป็นการใส่ Support ใน โครงสร้างที่ทำการวิเคราะห์โดยเลือกที่คำสั่ง Assign Joint ดังรูปที่ 3.18 โดยในตัวอย่างนี้จะทำการวิเคราะห์โครงสร้างประเภท Simply Support โดยจุดรองรับที่มุมของโครงสร้างจะเป็นแบบยึดหมุนดังแสดงในรูปที่ 3.19



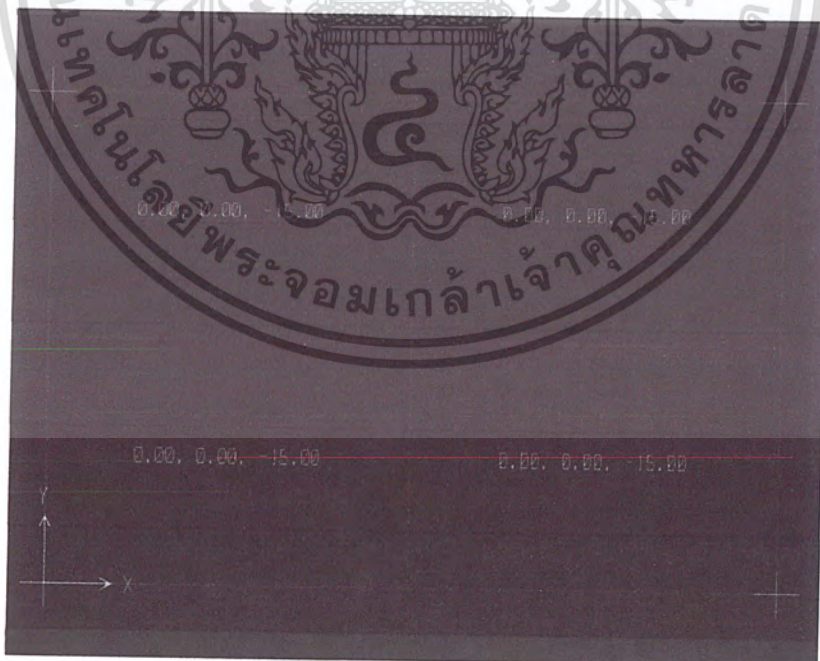
รูปที่ 3.19 แสดงโครงสร้าง Plate ประเภท Simply Support

3.5.12 จากนั้นจะเป็นการใส่ค่าแรงที่กระทำต่อ โครงสร้าง โดยเลือกที่ Assign → Area Load → Uniform เนื่องจากว่าแรงที่กระทำในตัวอย่างนี้เป็นแบบแรงกระจาย จึงเลือกคำสั่ง Uniform (Shell) จากนั้นโปรแกรมจะแสดงหน้าต่างขึ้นมาเพื่อให้ผู้ใช้ใส่ค่าแรงที่ทำการวิเคราะห์

3.5.13 ในขั้นตอนของการวิเคราะห์โครงสร้างที่ทำการโมเดลขึ้นมา นั้นจำเป็นต้องทำการ Merge โครงสร้างเป็นส่วนๆ เพื่อให้โปรแกรมสามารถวิเคราะห์ได้ โดยเลือกที่คำสั่ง Edit → Edit Areas → Divide Areas จากนั้นโปรแกรมจะแสดงค่าที่ต้องทำการป้อน ดังแสดงใน รูปที่ 3.20



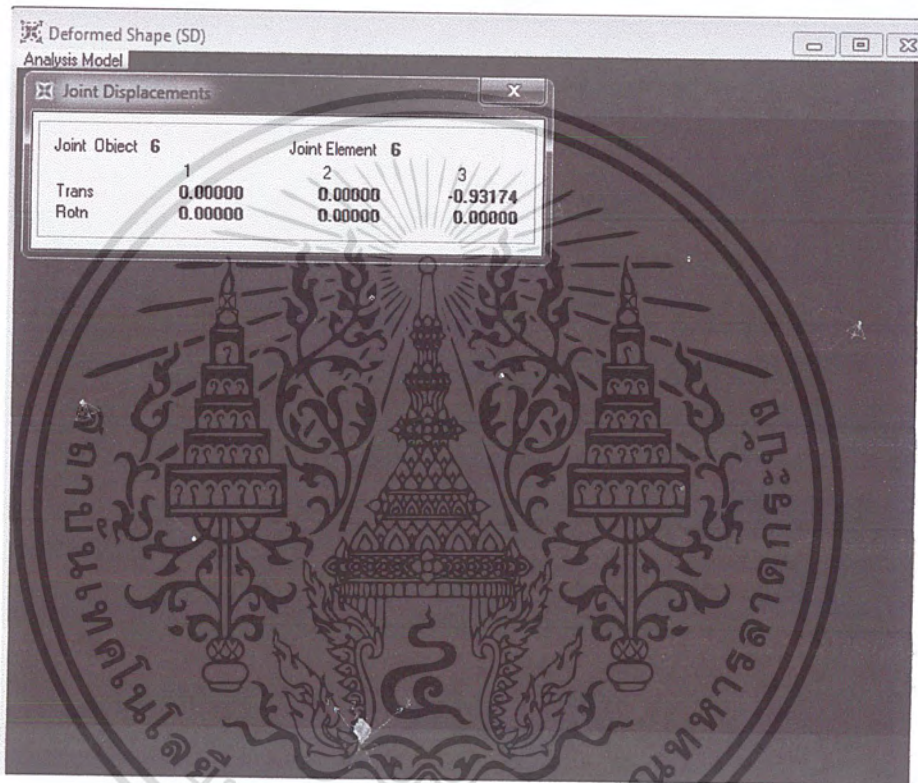
รูปที่ 3.20 ในวงกลมสีแดง จะเป็นการป้อนค่าในการ Mesh โครงสร้างในที่นี้จะ Mesh แค่ 2X2



รูปที่ 3.21 แสดงโครงสร้างที่ทำการ Merge 2X2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.14 จากนั้นก็สามารถให้โปรแกรมวิเคราะห์ได้ โดยเลือกที่คำสั่ง Analyze → Run Analysis OK จากนั้น โปรแกรมจะวิเคราะห์แรงต่างๆที่กระทำต่อโครงสร้าง โดยที่ผู้ใช้โปรแกรมสามารถเลือกดูค่าที่วิเคราะห์ได้ ดังรูปที่ 3.22



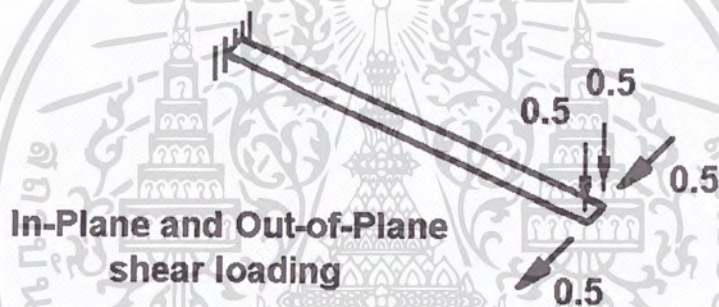
รูปที่ 3.22 แสดงค่าการ โกงตัวที่กึ่งกลางคาน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการทดสอบความแม่นยำของการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ นั้น ได้ผลการทดสอบดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 In-Plane and Out-of-Plane shear loading ที่กระทำที่ปลายคาน



รูปที่ 4.1 แสดงแรงกระทำแบบ In-Plane and Out-of-Plane shear loading

$$L = 6.0, b = 0.2, t = 0.1$$

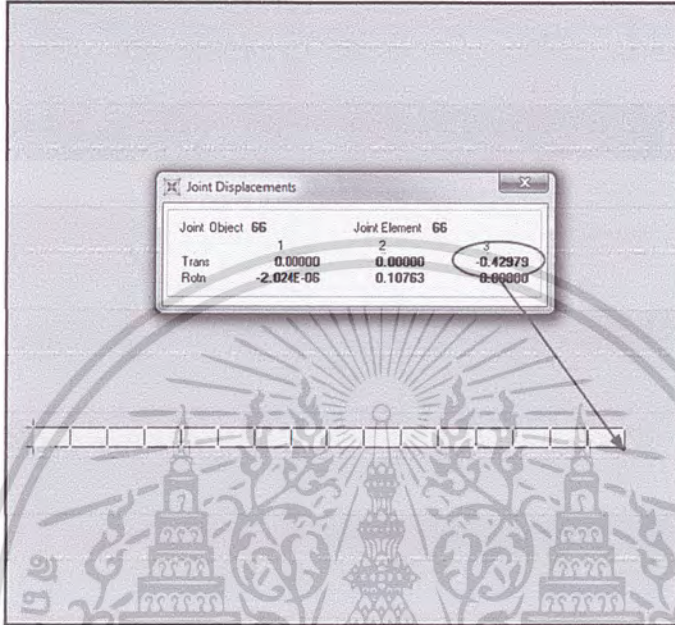
$$E = 1.0E7, \nu = 0.3$$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่า Exact Solution

Out of plane		In plane	
ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน	0.4321	ค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน	0.1081

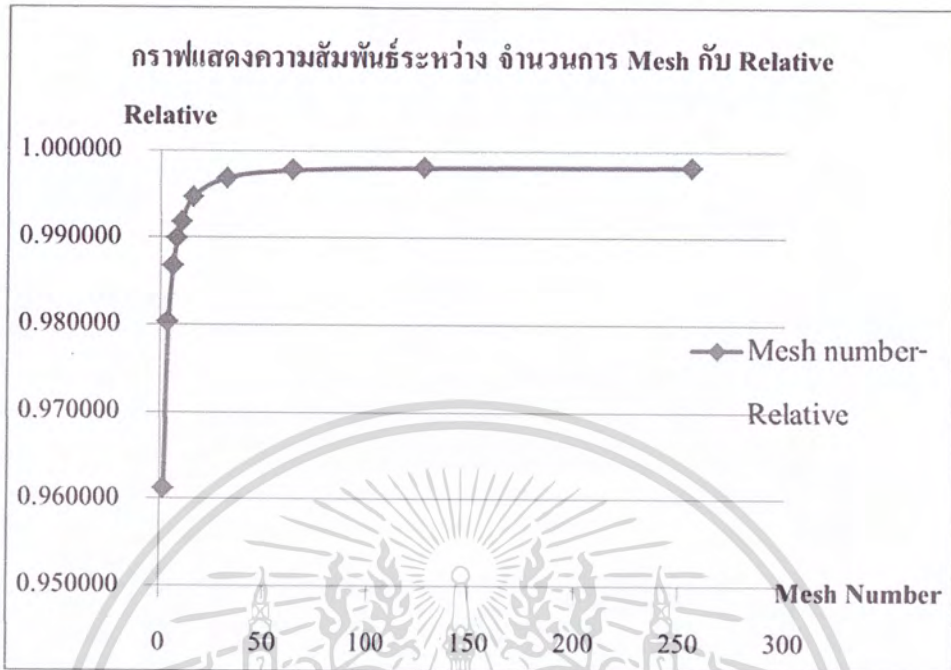
ผลการวิเคราะห์ In-Plane and Out-of-Plane shear loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

4.1.1 Out-of-Plane shear loading

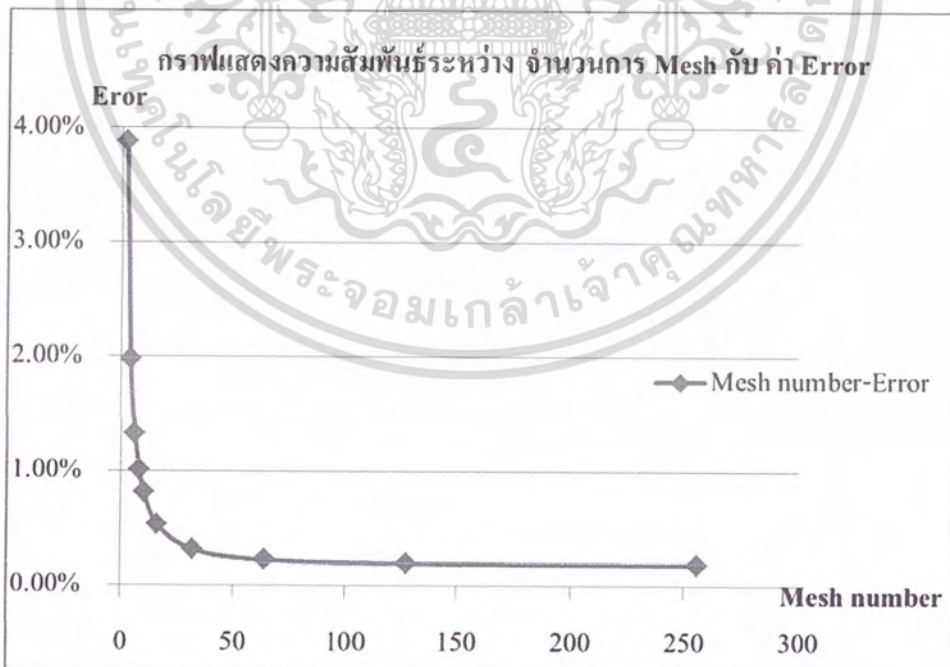


รูปที่ 4.2 แสดงการวิเคราะห์ Out-of-Plane shear loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ตารางที่ 4.2 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x1	0.41532	0.961166	3.88%
4x1	0.42356	0.980236	1.98%
6x1	0.42635	0.986693	1.33%
8x1	0.42774	0.989910	1.01%
10x1	0.42857	0.991831	0.82%
16x1	0.42979	0.994654	0.53%
32x1	0.43074	0.996853	0.31%
64x1	0.43113	0.997755	0.22%
128x1	0.43126	0.998056	0.19%
256x1	0.43130	0.998149	0.19%
Exact Solution	0.4321	-	-

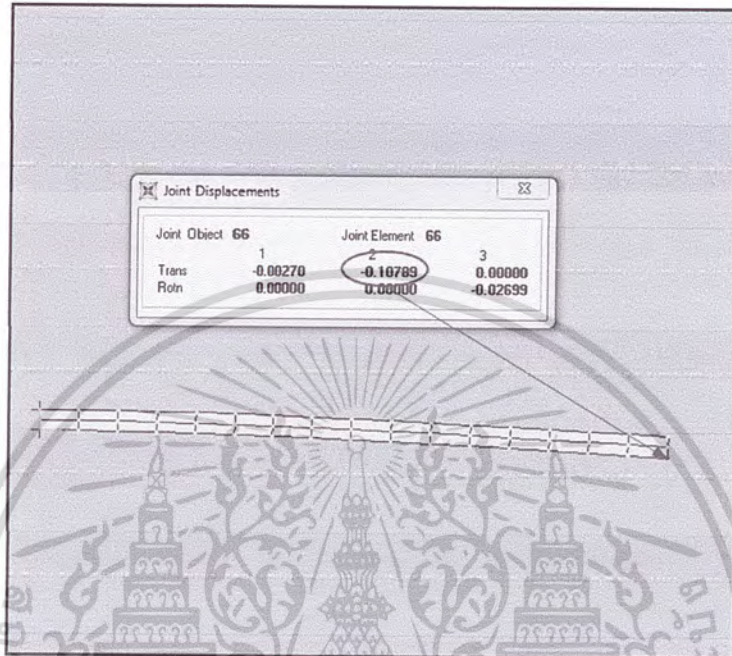


รูปที่ 4.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Relative



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error

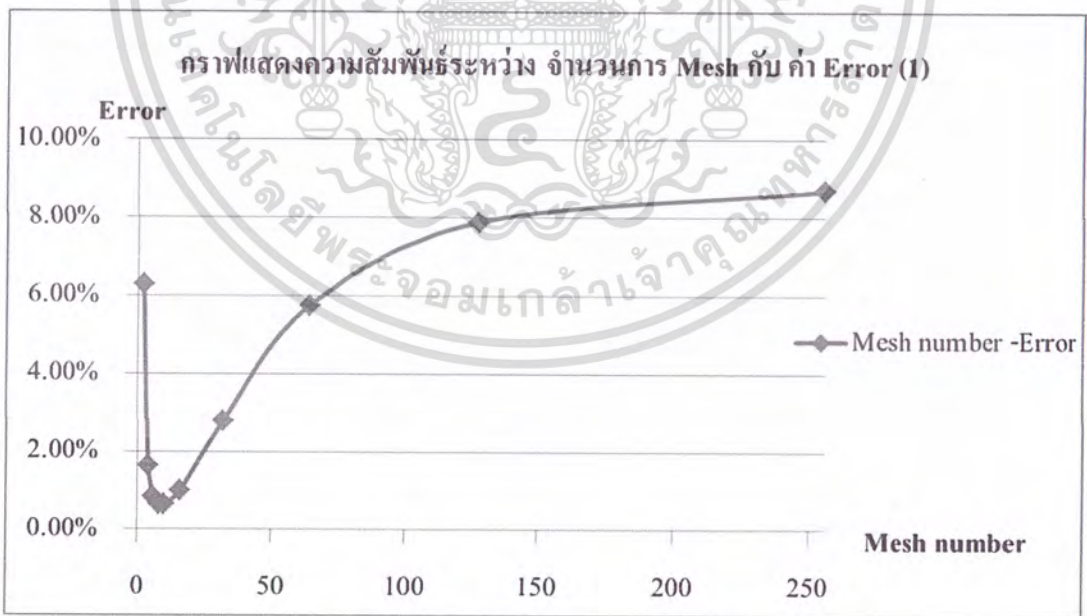
4.1.2 In-Plane shear loading



รูปที่ 4.5 แสดงการวิเคราะห์ In-Plane shear loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.3 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

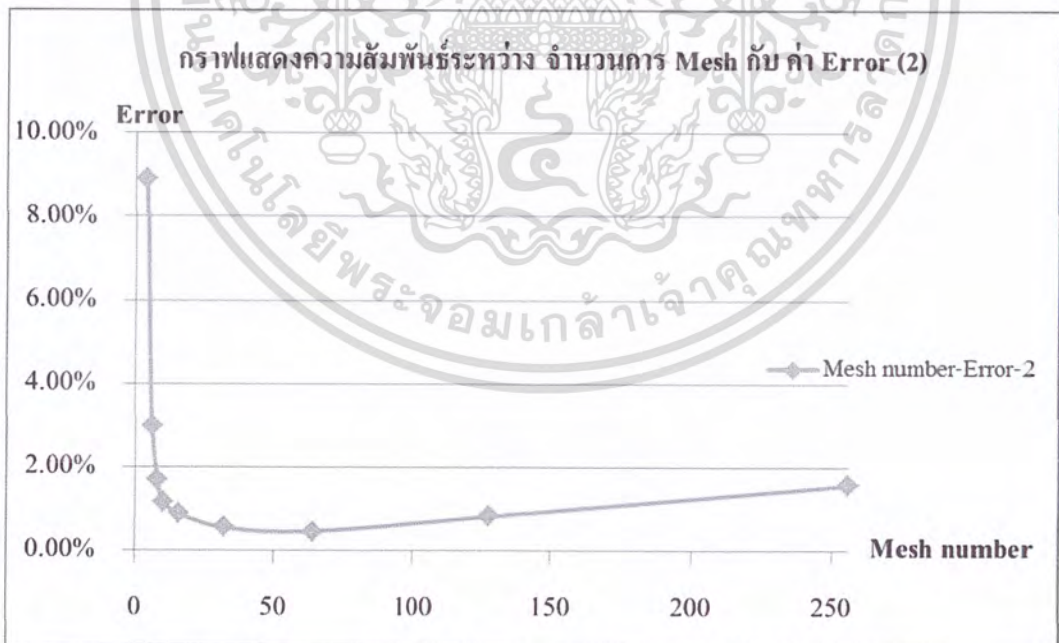
Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x1	0.10131	0.937188	6.28%
4x1	0.10632	0.983534	1.65%
6x1	0.10718	0.991489	0.85%
8x1	0.10739	0.993432	0.66%
10x1	0.10740	0.993525	0.65%
16x1	0.10701	0.989917	1.01%
32x1	0.10509	0.972155	2.78%
64x1	0.10188	0.942461	5.75%
128x1	0.09957	0.921092	7.89%
256x1	0.09869	0.912951	8.70%
Exact Solution	0.1081		-



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error

ตารางที่ 4.4 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x2	0.09848	0.911008	8.90%
4x2	0.10487	0.970120	2.99%
6x2	0.10628	0.983164	1.68%
8x2	0.10686	0.988529	1.15%
10x2	0.10715	0.991212	0.88%
16x2	0.10751	0.994542	0.55%
32x2	0.10761	0.995467	0.45%
64x2	0.10722	0.991859	0.81%
128x2	0.10641	0.984366	1.56%
256x2	0.10579	0.978631	2.14%
Exact Solution	0.1081	-	-



รูปที่ 4.7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error

ตารางที่ 4.5 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

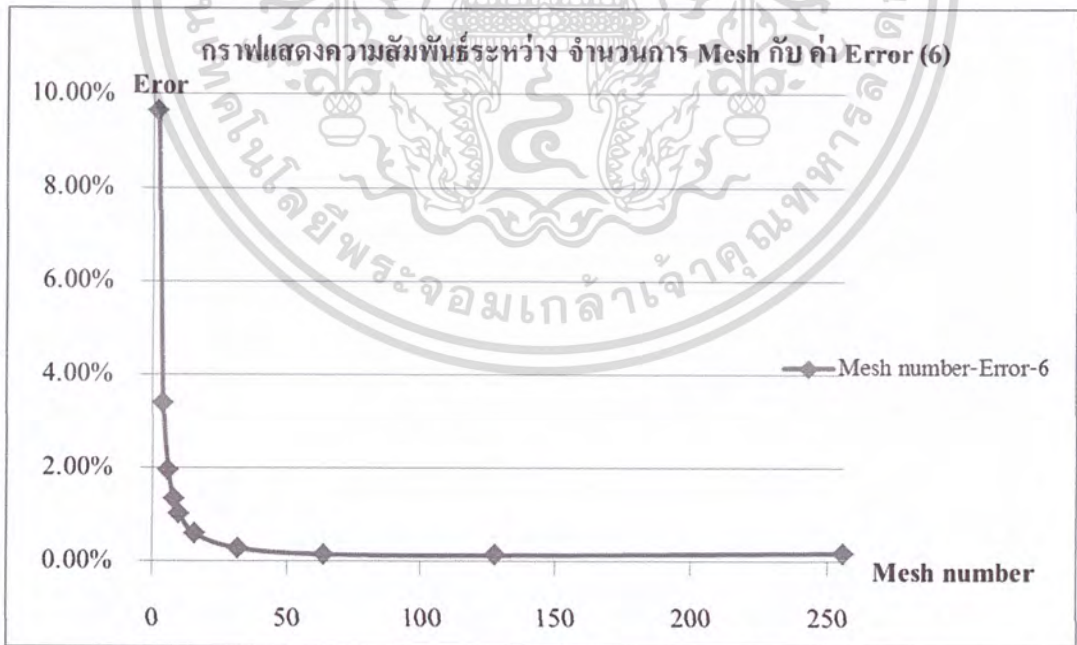
Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x4	0.09779	0.904625	9.54%
4x4	0.10450	0.966698	3.33%
6x4	0.10603	0.980851	1.91%
8x4	0.10667	0.986772	1.32%
10x4	0.10702	0.990009	1.00%
16x4	0.10747	0.994172	0.58%
32x4	0.10779	0.997132	0.29%
64x4	0.10789	0.998057	0.19%
128x4	0.10781	0.997317	0.27%
256x4	0.10761	0.995467	0.45%
Exact Solution	0.1081	-	-



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error

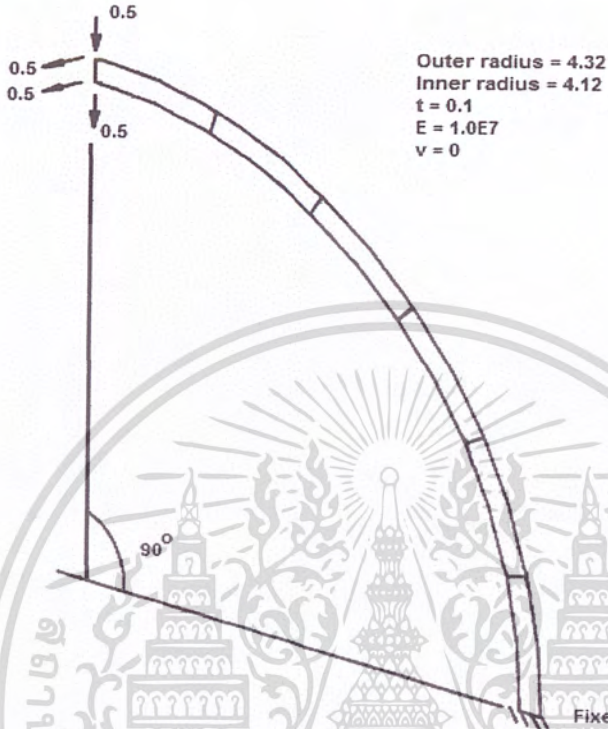
ตารางที่ 4.6 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x6	0.09767	0.903515	9.65%
4x6	0.10443	0.966050	3.40%
6x6	0.10599	0.980481	1.95%
8x6	0.10664	0.986494	1.35%
10x6	0.10699	0.989732	1.03%
16x6	0.10746	0.994080	0.59%
32x6	0.10779	0.997132	0.29%
64x6	0.10793	0.998427	0.16%
128x6	0.10795	0.998612	0.14%
256x6	0.1079	0.998150	0.19%
Exact Solution	0.1081	-	-



รูปที่ 4.9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนการแบ่งชิ้นส่วนกับ ค่า Error

4.2 Curved cantilever beam

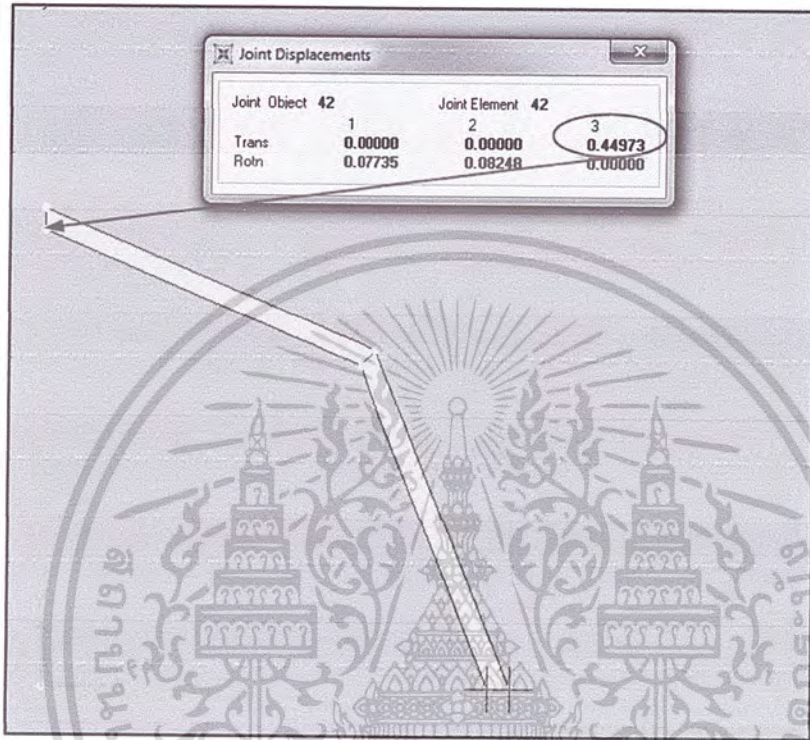


รูปที่ 4.10 Curved cantilever beam

ตารางที่ 4.7 แสดงค่า Exact Solution ของ Curved cantilever beam

Out of plane		In plane	
ค่าการ โกงตัวที่ปลายคาน	0.5022	ค่าการ โกงตัวที่ปลายคาน	0.08735

ผลการวิเคราะห์ Curved cantilever beam ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



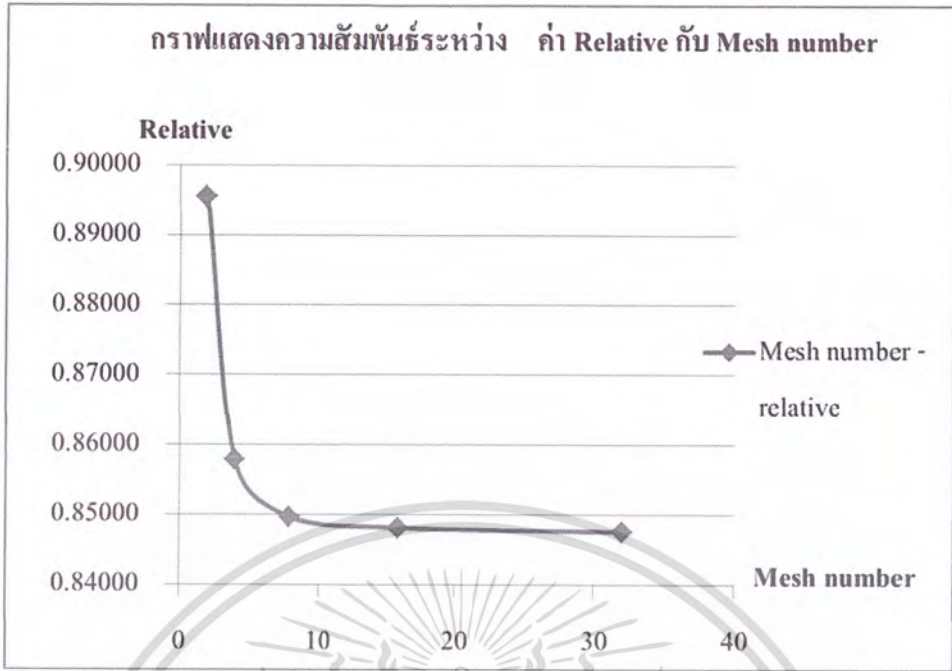
รูปที่ 4.11 แสดงการวิเคราะห์ Curved cantilever beam ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.8 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างแบบ Out of plane shear loading

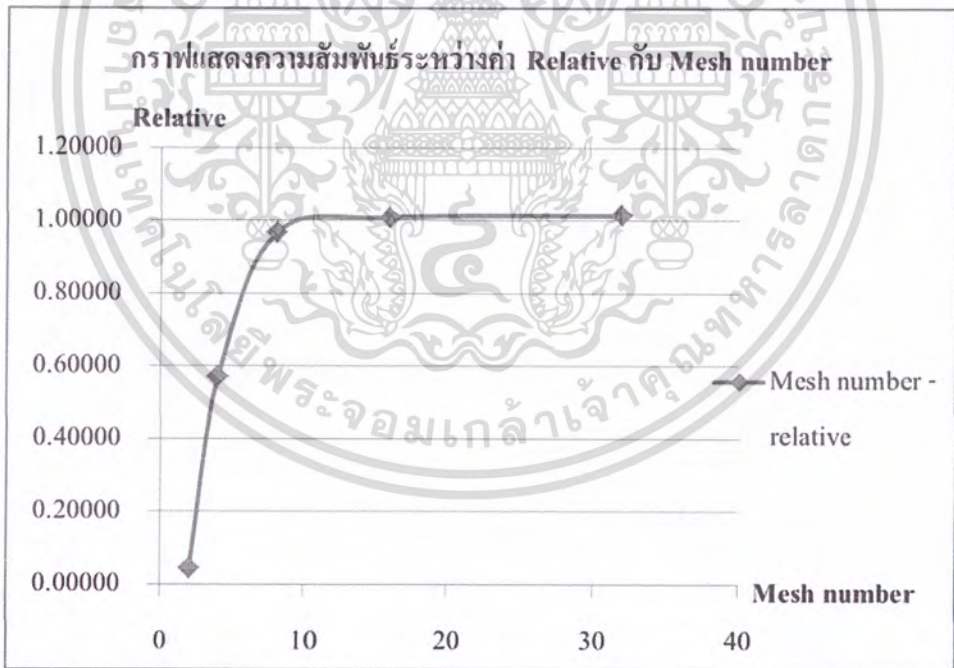
Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x1	0.44973	0.89552	10.45%
4x1	0.43084	0.85791	14.21%
8x1	0.42670	0.84966	15.03%
16x1	0.42592	0.84811	15.19%
32x1	0.42564	0.84755	15.24%
Exact Solution	0.5022	-	-

ตารางที่ 4.9 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างแบบ In plane shear loading

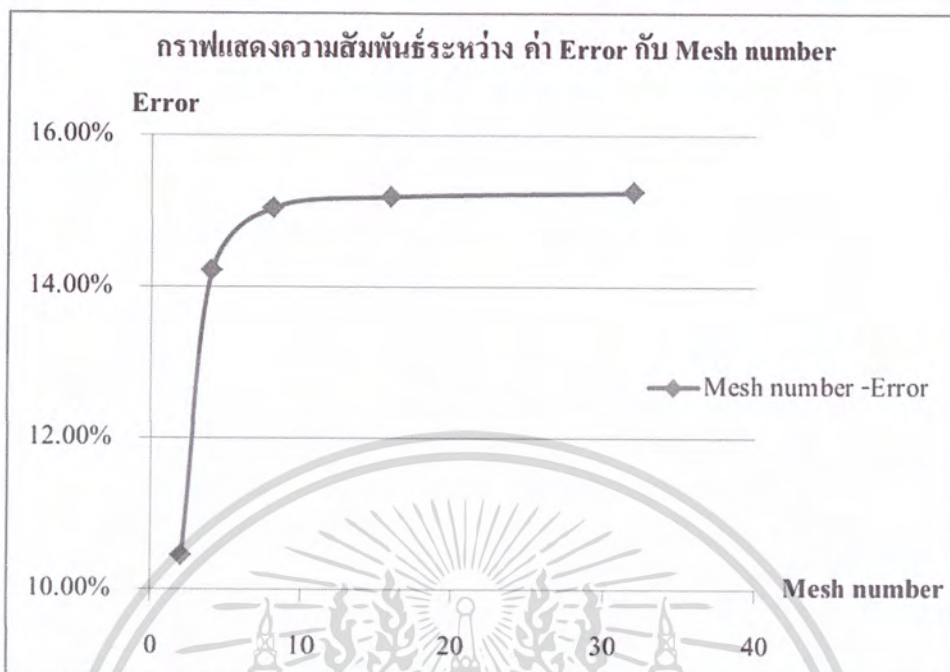
Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x1	0.00384	0.04396	95.60%
4x1	0.04977	0.56978	43.02%
8x1	0.08437	0.96588	3.41%
16x1	0.08810	1.00859	0.86%
32x1	0.08855	1.01374	1.37%
Exact Solution	0.08735	-	-



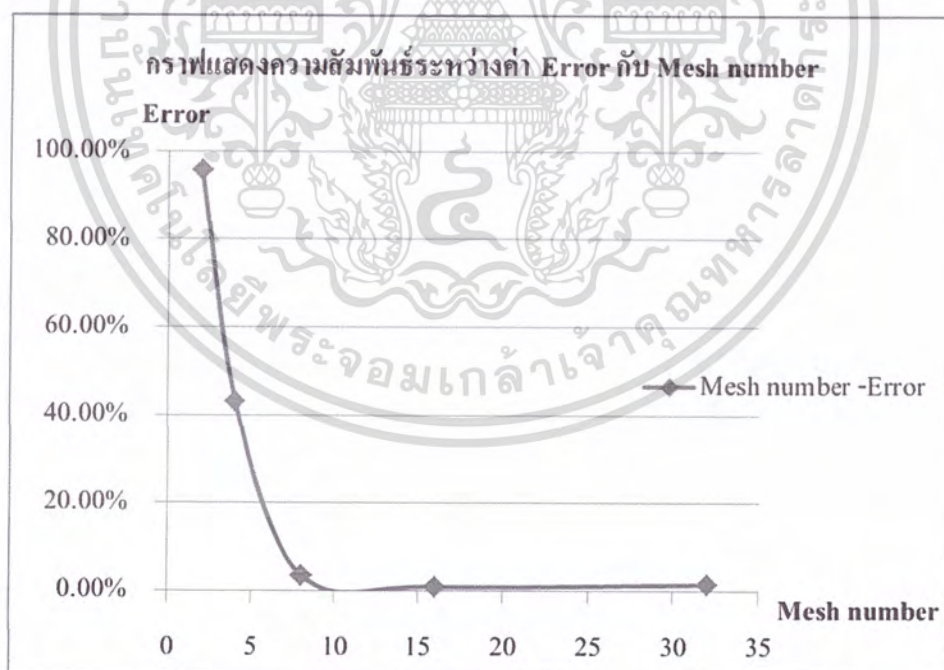
รูปที่ 4.12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบ Out of plane shear loading



รูปที่ 4.13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบ In plane shear loading

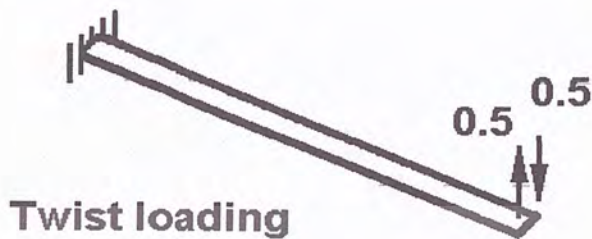


รูปที่ 4.14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบ Out of plane shear loading



รูปที่ 4.15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบ In plane shear loading

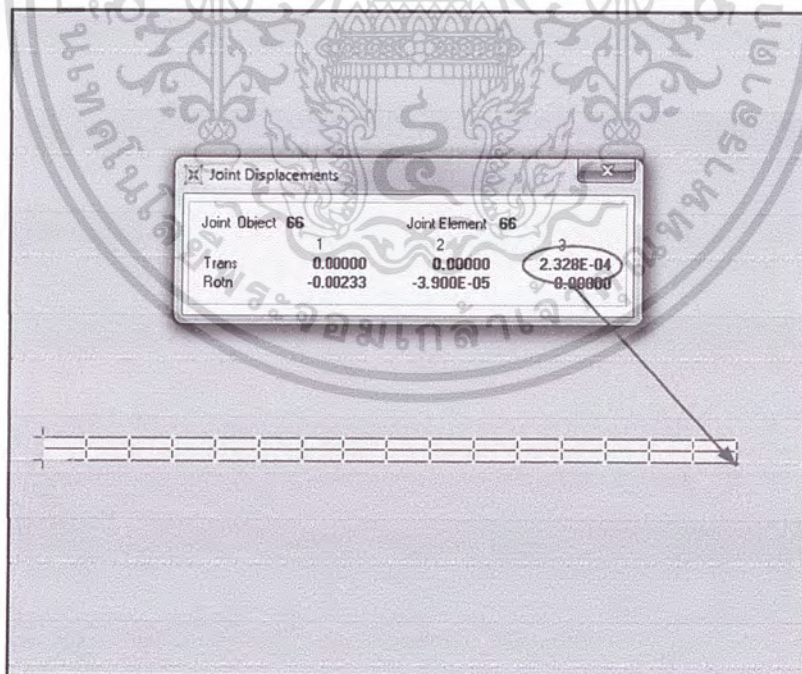
4.3 Twist loading in beam



รูปที่ 4.16 Twist loading ที่กระทำปลายคาน

$L = 6.0$ $t = 0.1$ $b = 0.2$ $E = 1.0E7$ $\nu = 0.3$

ผลการวิเคราะห์ Twist loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



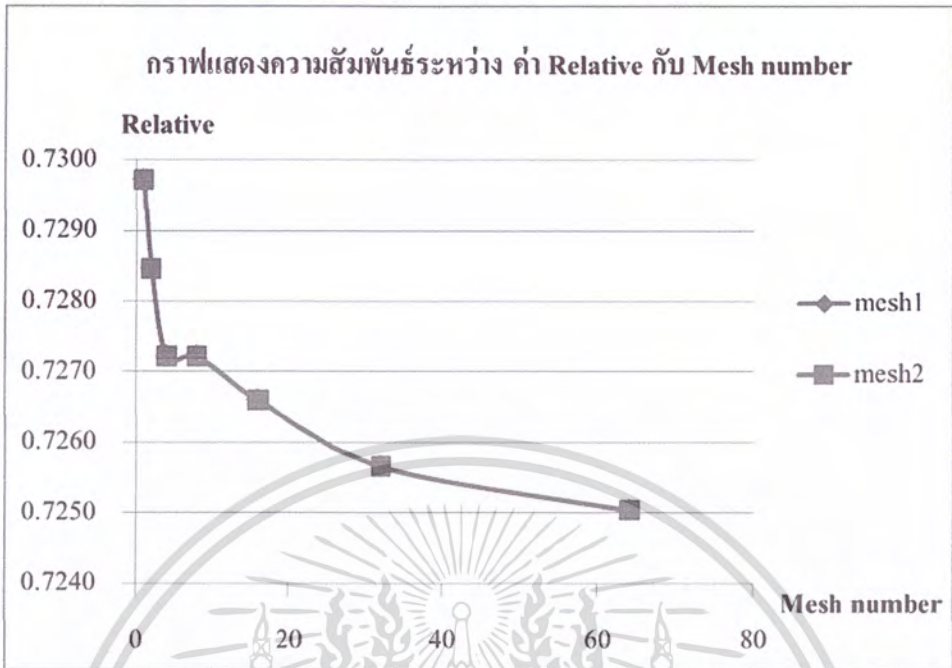
รูปที่ 4.17 แสดงการวิเคราะห์ Twist loading ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.10 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อ Mesh โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อโครงสร้างแบบ Twist loading โดยที่ แบ่งชิ้นส่วนในแนวนอน = 1

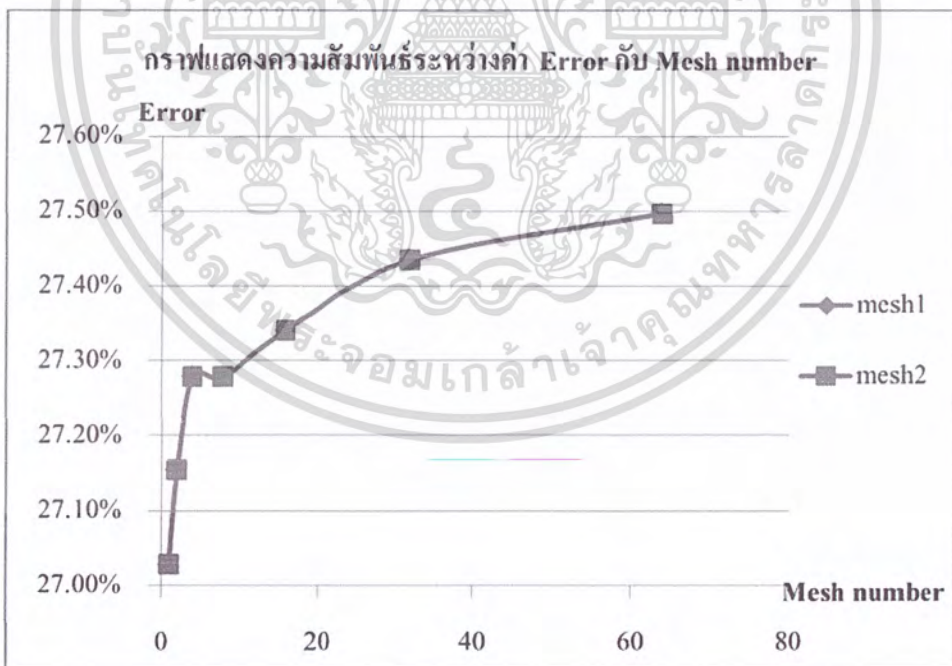
Mesh	Deflection	Relative	Error
1x1	2.3380E-04	0.7297	27.03%
2x1	2.3340E-04	0.7285	27.15%
4x1	2.3300E-04	0.7272	27.28%
8x1	2.3300E-04	0.7272	27.28%
16x1	2.3280E-04	0.7266	27.34%
32x1	2.3250E-04	0.7257	27.43%
64x1	2.3230E-04	0.7250	27.50%
Exact Solution	3.204E-04	-	-

ตารางที่ 4.11 ผลของค่าการโก่งตัวที่ปลายคาน เมื่อ Mesh โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เมื่อแรงกระทำต่อโครงสร้างแบบ Twist loading โดยที่แบ่งชิ้นส่วนในแนวนอน = 2

Mesh	Deflection	Relative	Error
2x1	2.3380E-04	0.7297	27.03%
2x2	2.3340E-04	0.7285	27.15%
4x2	2.3300E-04	0.7272	27.28%
8x2	2.3300E-04	0.7272	27.28%
16x2	2.3280E-04	0.7266	27.34%
32x2	2.3250E-04	0.7257	27.43%
64x2	2.3230E-04	0.7250	27.50%
Exact Solution	3.204E-04	-	-

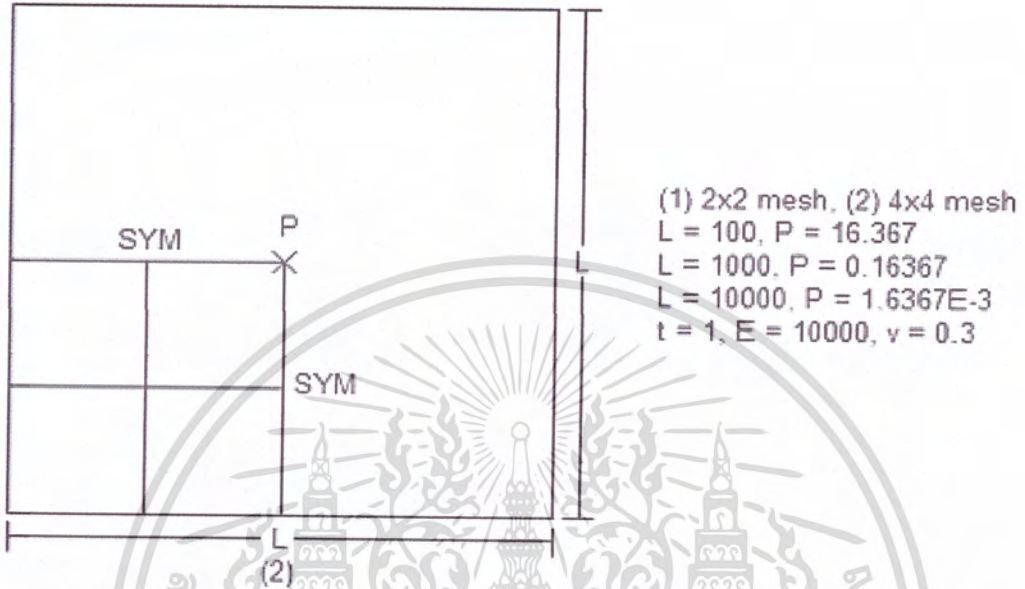


รูปที่ 4.18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการ แบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Twist loading



รูปที่ 4.19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Twist loading

4.4 Clamped square plate



รูปที่ 4.20 Clamped square plate

$L = 100, P = 16.367$

$L = 1000, P = 0.16367$

$L = 10000, P = 0.0016367$

$t = 1$

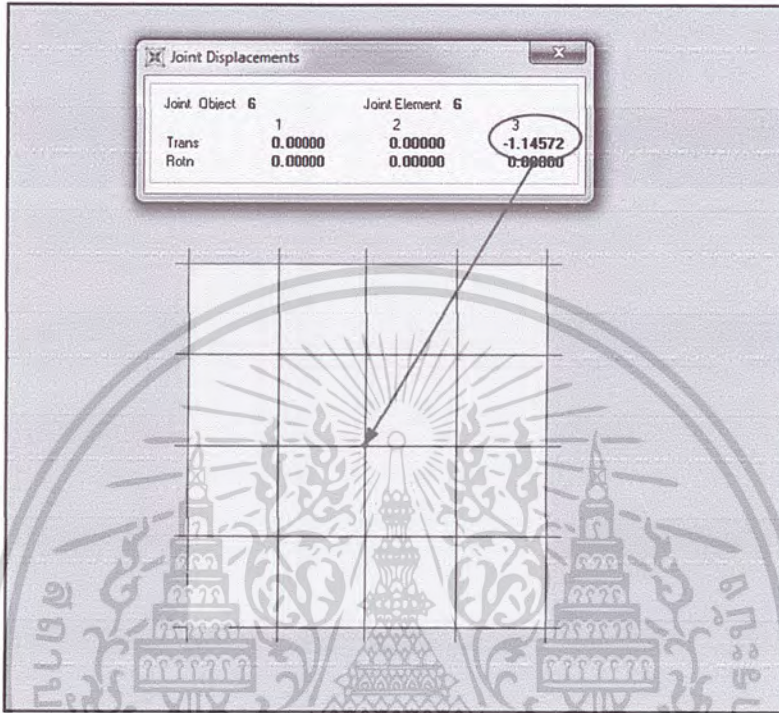
$E = 10000$

$\nu = 0.3$

Exact Solution ที่มีแรงกระทำแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางแผ่นพื้น

Deflection ที่กึ่งกลางแผ่นพื้น = 1

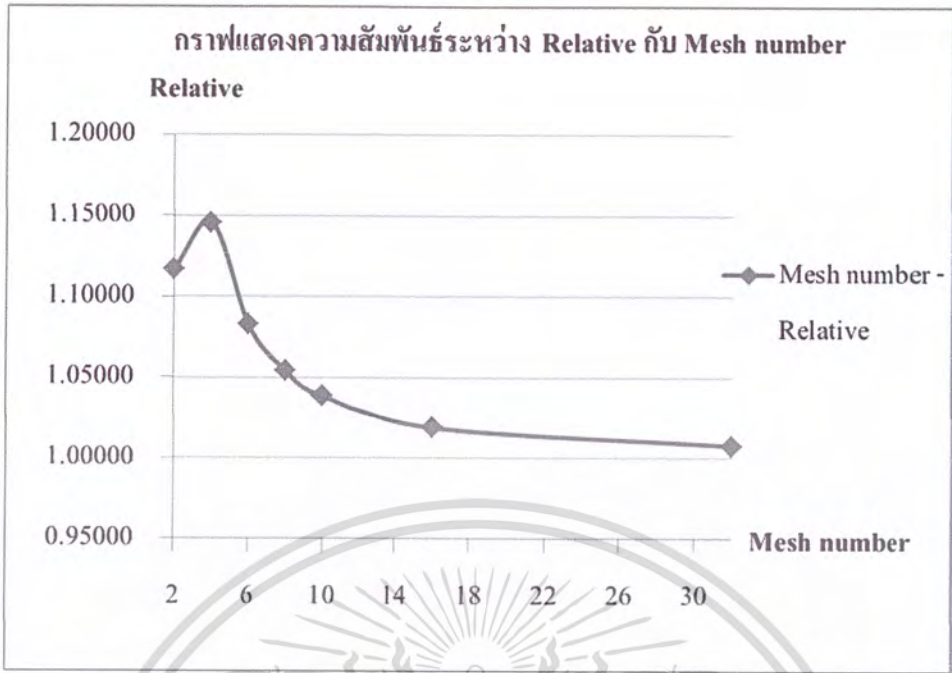
ผลการวิเคราะห์ Clamped square plate ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



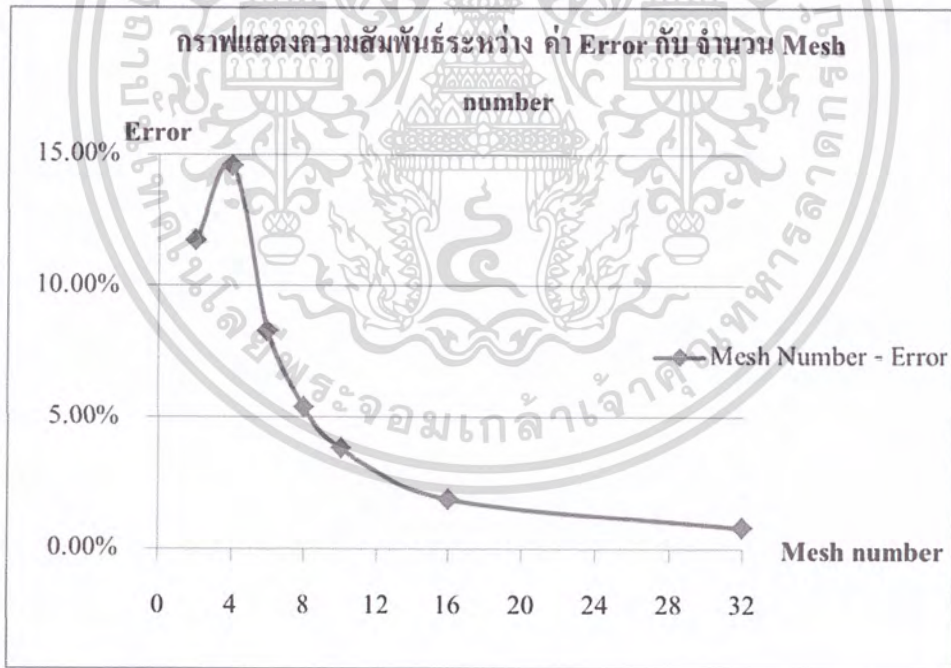
รูปที่ 4.21 แสดงการวิเคราะห์ Clamped square plate ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.12 ผลของค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางแผ่น เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh number	Deflection	Relative	Error
2x2	1.11705	1.11705	11.71%
4x4	1.14572	1.14572	14.57%
6x6	1.08281	1.08281	8.28%
8x8	1.05365	1.05365	5.37%
10x10	1.03810	1.0381	3.81%
16x16	1.01883	1.01883	1.88%
32x32	1.00772	1.00772	0.77%
Exact Solution	1	-	-

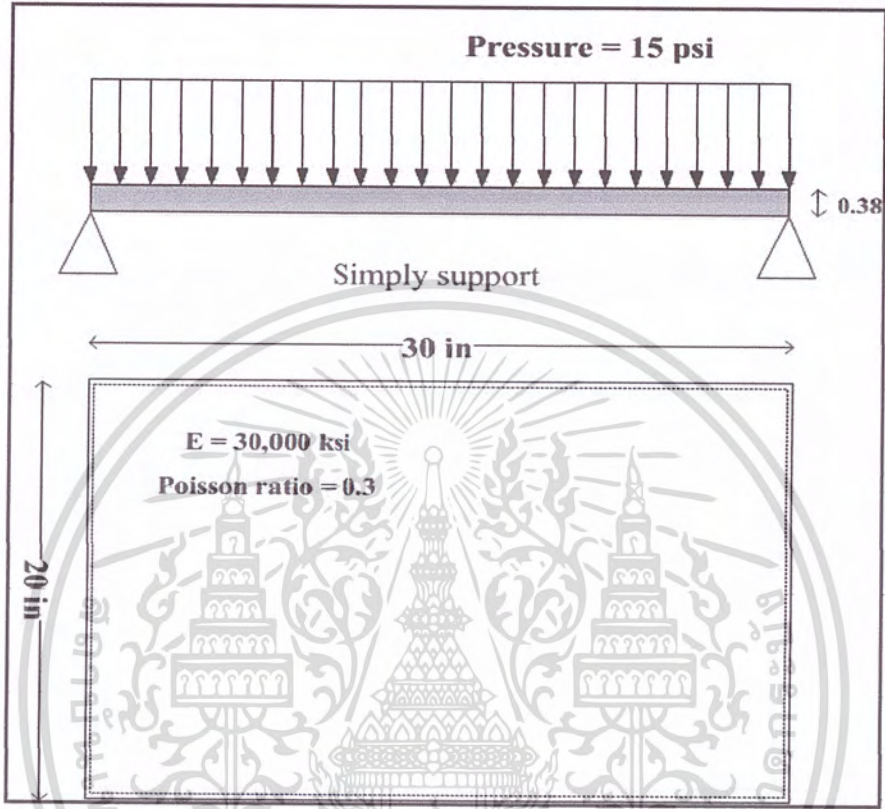


รูปที่ 4.22 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางแผ่นพื้น



รูปที่ 4.23 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างเป็นแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางแผ่นพื้น

4.5 Steel rectangular Plate

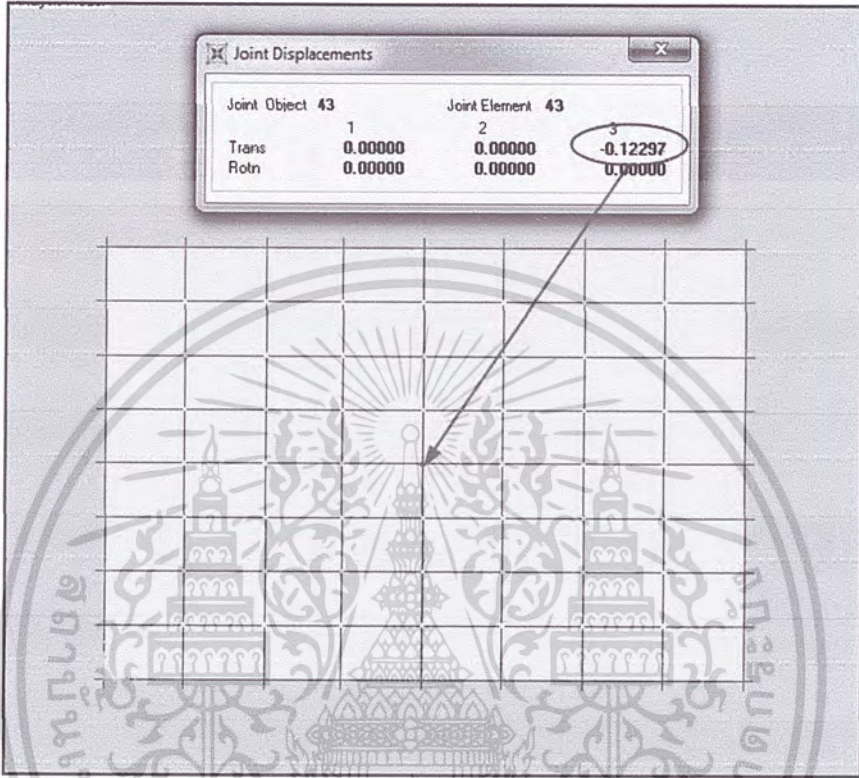


รูปที่ 4.24 Steel Rectangular Plate

Exact Solution ที่มีแรงกระแบบกระจายในแผ่นพื้น

Deflection ที่กึ่งกลางแผ่นพื้น = 0.12312 นิ้ว

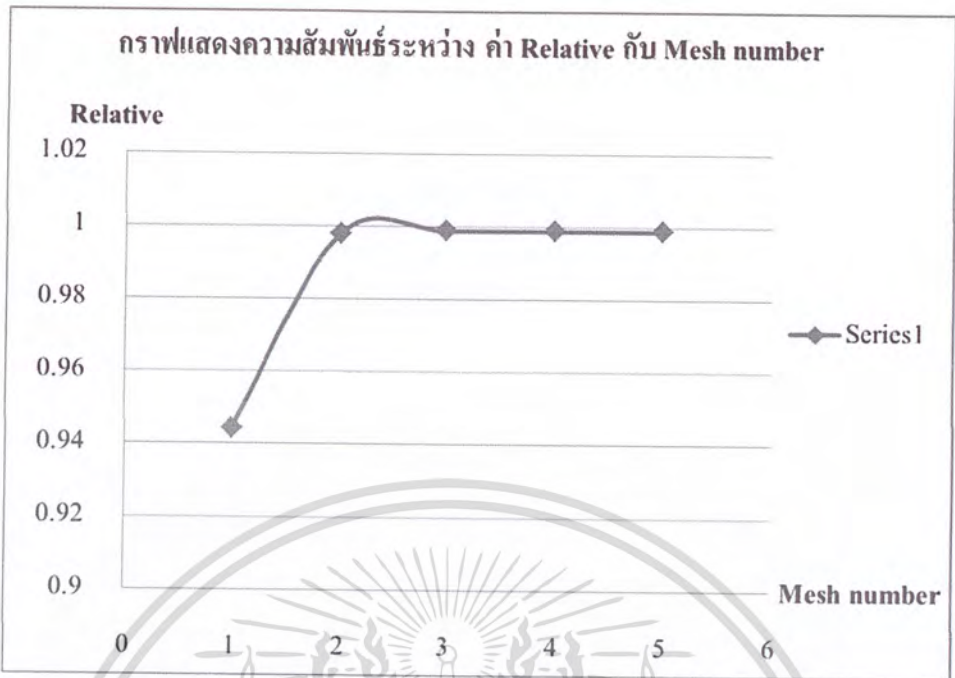
ผลการวิเคราะห์ Steel rectangular plate ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



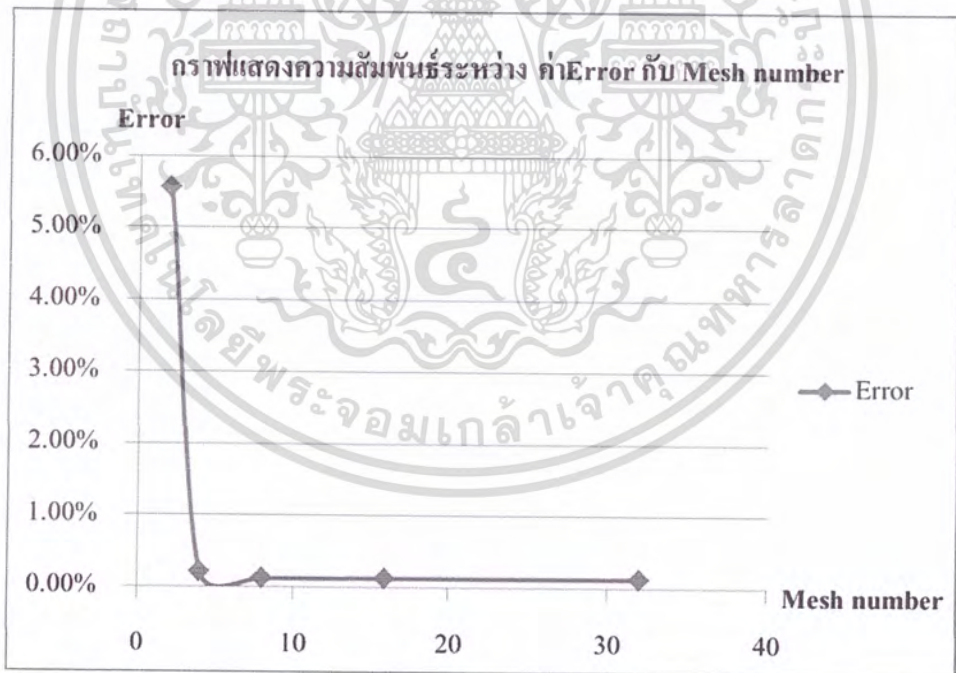
รูปที่ 4.25 แสดงการวิเคราะห์ Steel rectangular plate ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.13 ผลของค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางแผ่น เมื่อ แบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh	Deflection	Relative	Error
2x2	0.11627	0.944363223	5.56%
4x4	0.12286	0.997888239	0.21%
8x8	0.12297	0.998781676	0.12%
16x16	0.12297	0.998781676	0.12%
32x32	0.12297	0.998781676	0.12%
Exact Solution	0.12312	-	-

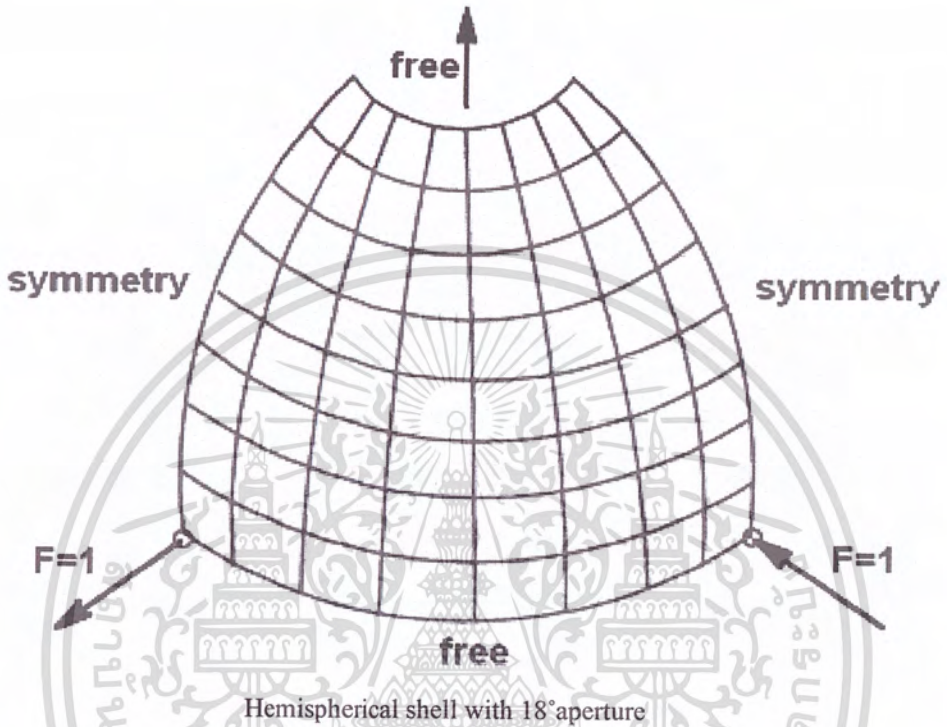


รูปที่ 4.26 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างแผ่นพื้นเป็นแบบกระจาย



รูปที่ 4.27 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อโครงสร้างแผ่นพื้นเป็นแบบกระจาย

4.6 Hemispherical shell with 18° aperture



4.28

รูปที่

$E = 6.825E7$

$V = 0.3$

$R = 10$

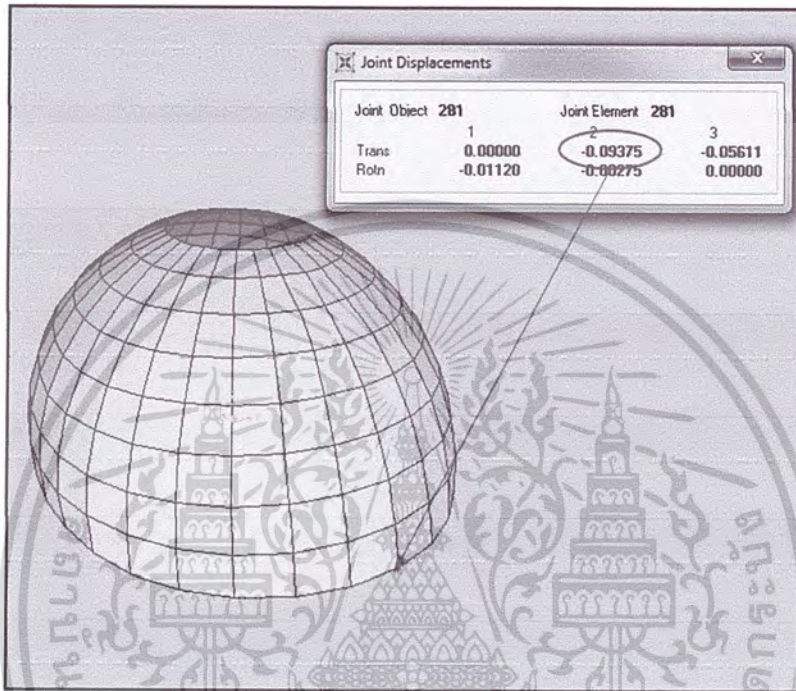
$t = 0.04$

Exact Solution ของ โครงสร้างประเภท โคมที่มีแรงกระแบบจุดกระทำที่ขอบ

Deflection ที่ขอบ= 0.094

ผลการวิเคราะห์ Hemispherical shell with 18° aperture ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

4.6.1 วิเคราะห์ Hemispherical shell เต็มรูป

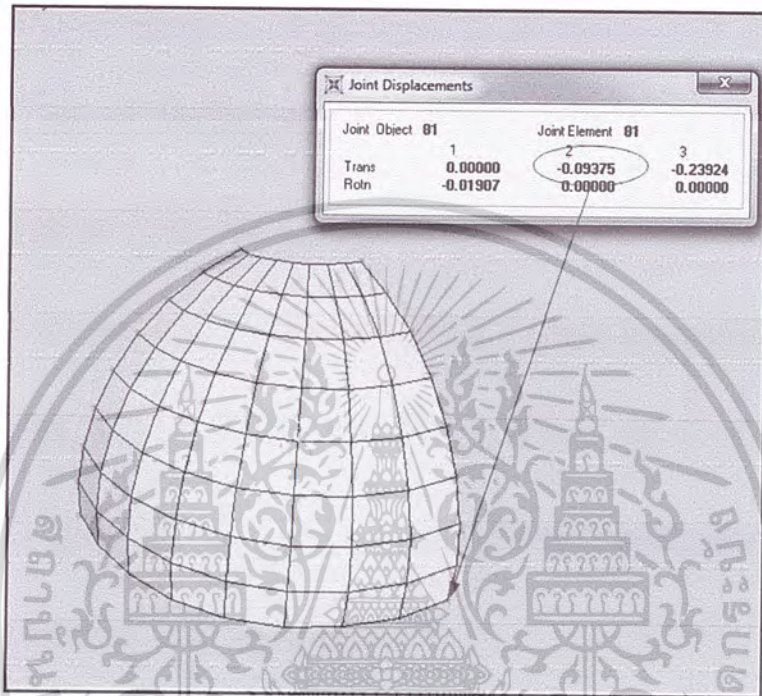


รูปที่ 4.29 แสดงการวิเคราะห์ Hemispherical shell ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.14 ผลของค่าการโก่งตัวของโครงสร้างโดม เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh	Value	Relative	Error
4x1	0.05979	0.63606	36.39%
8x2	0.02746	0.29213	70.79%
16x4	0.08782	0.93426	6.57%
32x8	0.09375	0.99734	0.27%
64x16	0.09349	0.99457	0.54%
128x32	0.09348	0.99447	0.55%
Exact solution	0.094	-	-

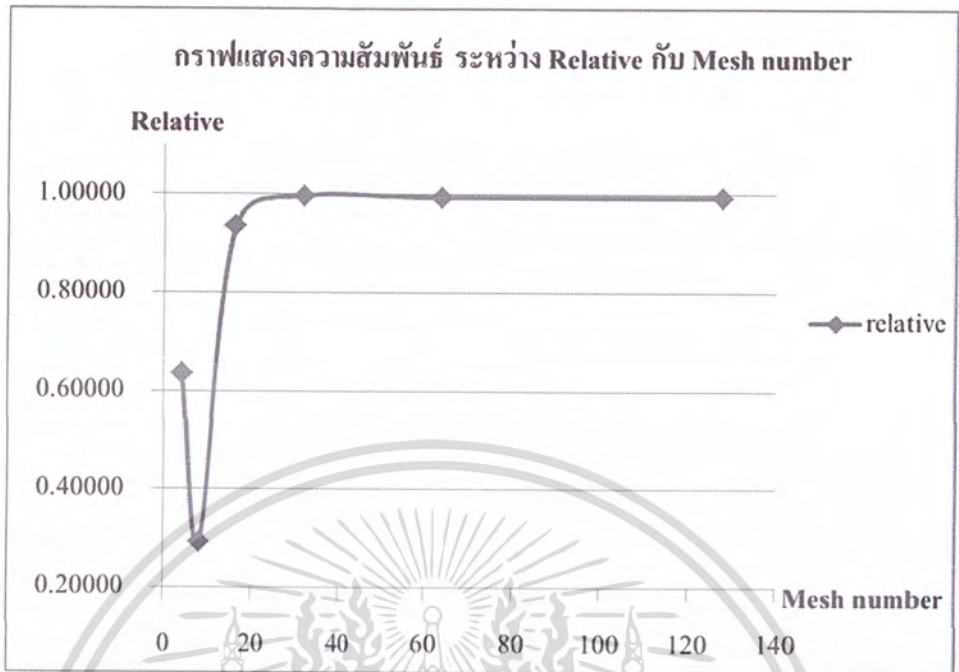
4.6.2 วิเคราะห์ Hemispherical shell แบบ symmetry ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



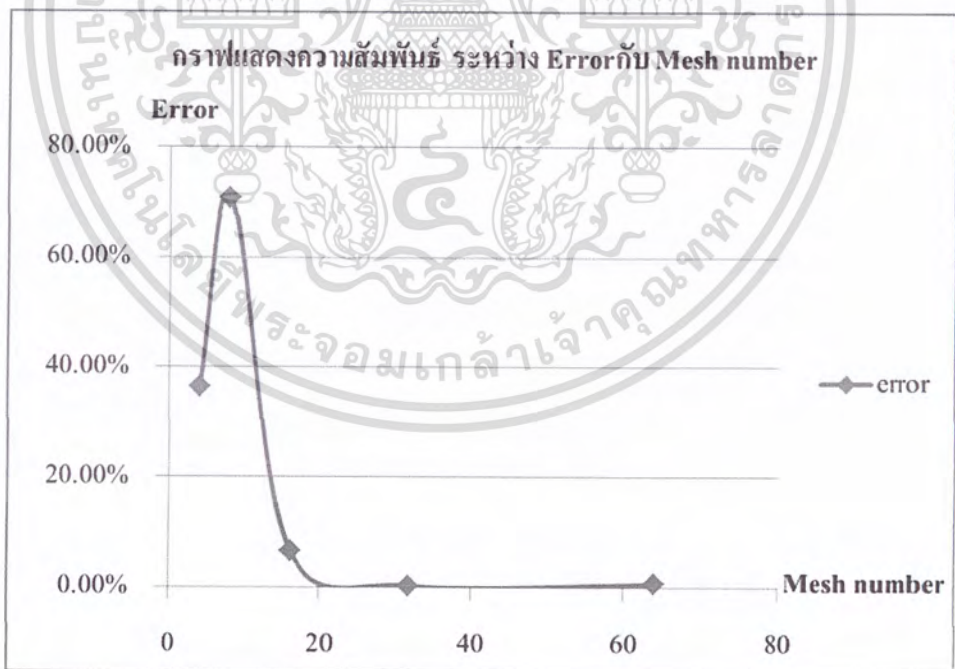
รูปที่ 4.30 แสดงการวิเคราะห์ Hemispherical shell ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.15 ผลของค่าการโก่งตัวของโครงสร้างโดม เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็นส่วนๆ

Mesh	Value	Relative	Error
2x2	0.02746	0.29213	70.79%
4x4	0.08782	0.93426	6.57%
8x8	0.09375	0.99734	0.27%
16x16	0.09349	0.99457	0.54%
32x32	0.09348	0.99447	0.55%
Exact solution	0.094	-	-

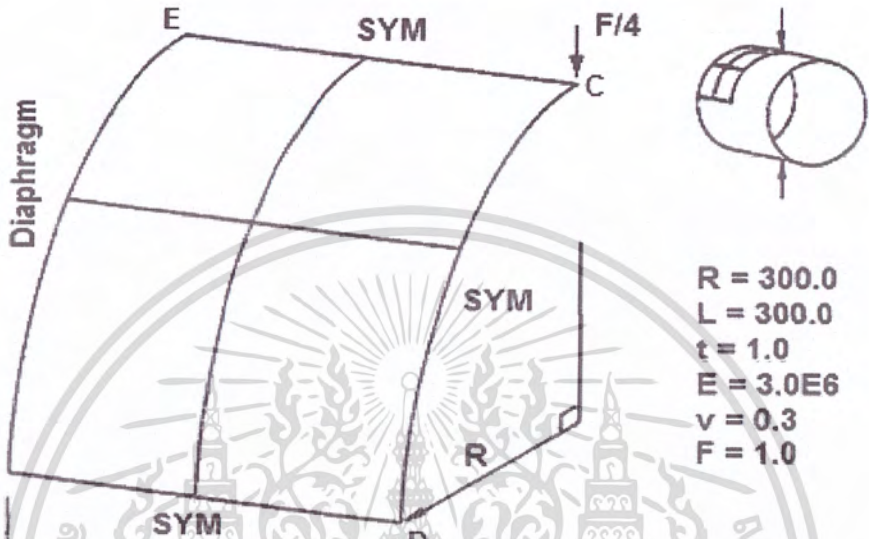


รูปที่ 4.31 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Hemispherical shell กระทำแบบจุด



รูปที่ 4.32 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Hemispherical shell กระทำแบบจุด

4.7 Pinched cylinder with rigid diaphragms

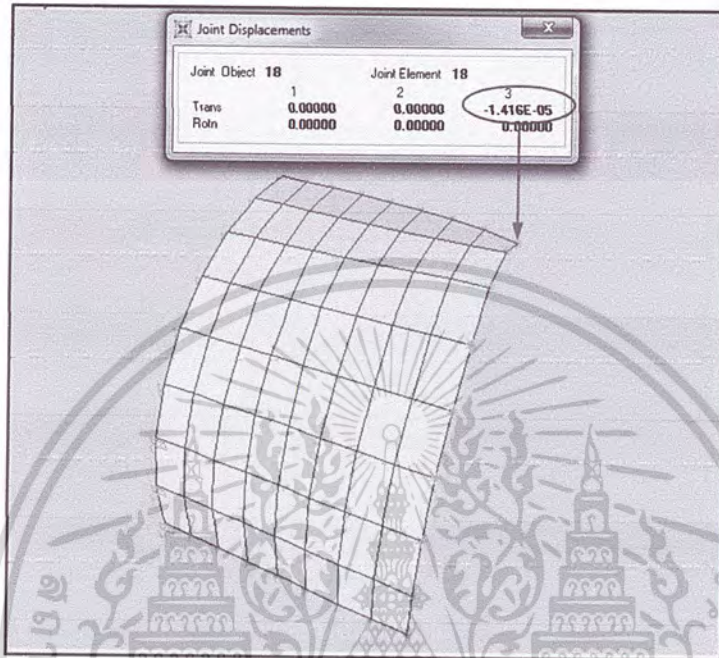


รูปที่ 4.33 Pinched cylinder with rigid diaphragms

R = 300 E = 3.0E6
 L = 300 v = 0.3
 t = 1.0 F = 1.0

Exact Solution ของโครงสร้างที่มีแรงกระแบบจุดกระทำที่กึ่งกลางทรงกระบอก
Deflection ที่กึ่งกลางทรงกระบอก = 0.000018248

ผลการวิเคราะห์ Pinched cylinder with rigid diaphragms แบบที่ 1 ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

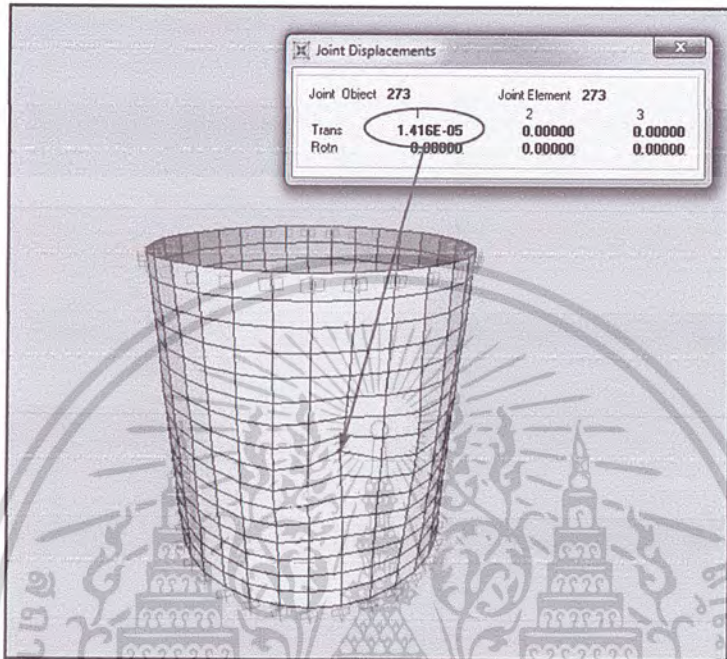


รูปที่ 4.34 แสดงการวิเคราะห์ Pinched cylinder with rigid diaphragms ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.16 ผลของค่าการโก่งตัวของโครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็น ส่วนๆ

Mesh	Value	Relative	Error
2x2	0.0000E+00	0.00	100.00%
4x4	7.7040E-06	0.42	57.78%
8x8	1.4160E-05	0.78	22.40%
16x16	1.5390E-05	0.84	15.66%
32x32	1.5310E-05	0.84	16.10%
64x64	1.5210E-05	0.83	16.65%
Exact solution	1.8248E-05	-	-

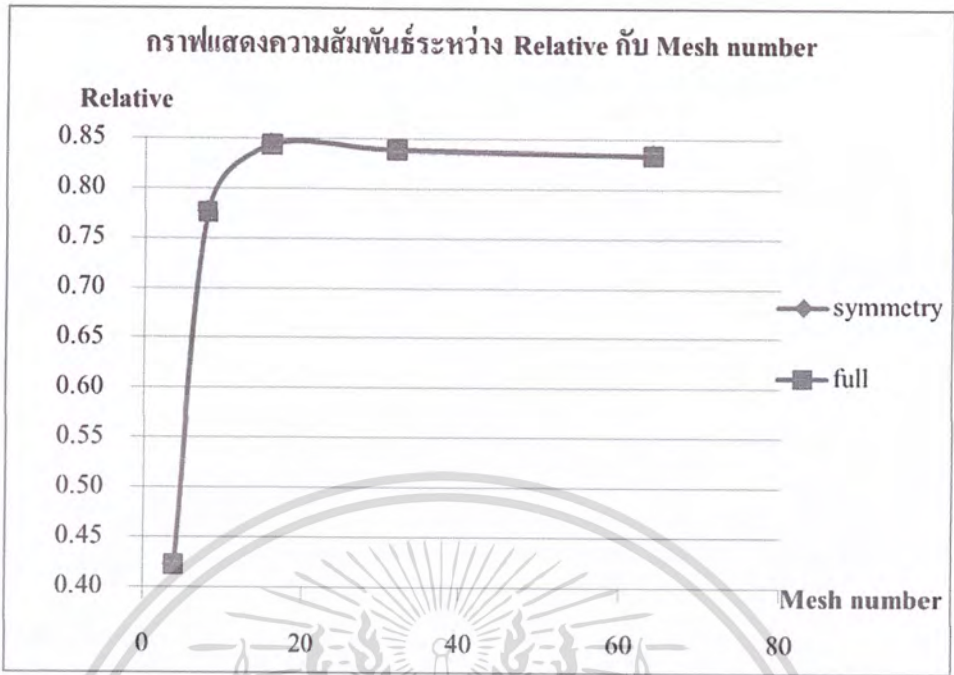
ผลการวิเคราะห์ Pinched cylinder with rigid diaphragms แบบที่ 2 ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์



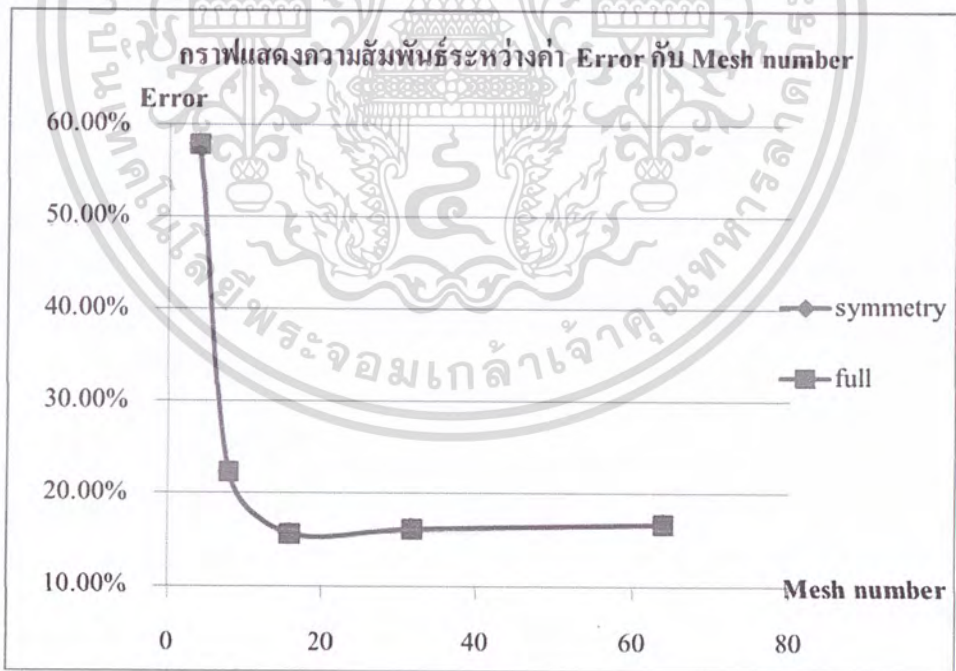
รูปที่ 4.35 แสดงการวิเคราะห์ Pinched cylinder ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.17 ผลของค่าการโก่งตัวของโครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างออกเป็น ส่วนๆ

Mesh	Value	Relative	Error
4x8	0.0000E+00	0.00	100.00%
8x16	7.7040E-06	0.42	57.78%
16x32	1.4160E-05	0.78	22.40%
32x64	1.5390E-05	0.84	15.66%
64x128	1.5300E-05	0.84	16.16%
128x256	1.5200E-05	0.83	16.70%
Exact solution	1.8248E-05	-	-

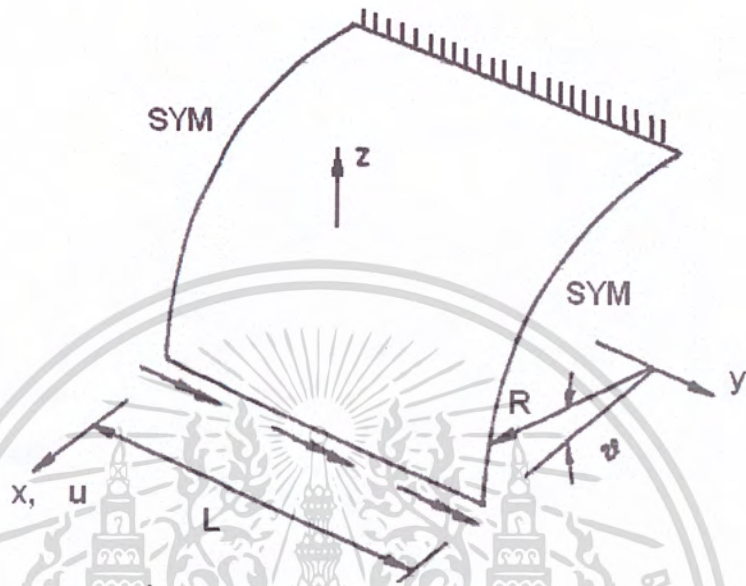


รูปที่ 4.36 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Pinched cylinder กระทำแบบจุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางทรงกระบอก



รูปที่ 4.37 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงกระทำต่อ โครงสร้าง Pinched cylinder กระทำแบบจุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางทรงกระบอก

4.8 Cantilever quarter cylinder



รูปที่ 4.38 Cantilever quarter cylinder

$L = 10$ $t = 1.0$
 $R = 10, 100$ $E = 10000$
 $\nu = 0.3$

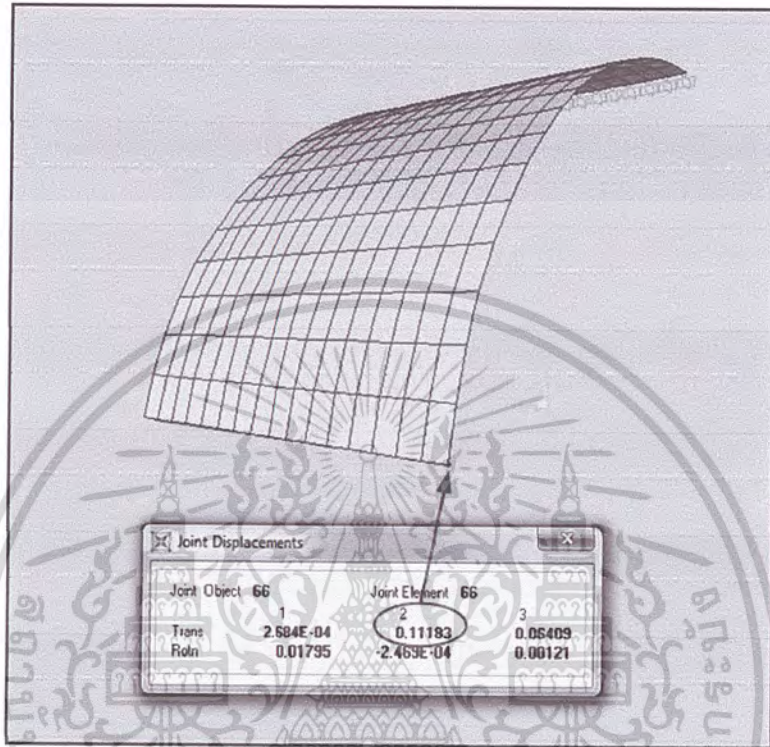
Exact Solution

$M = \text{Constant}$

Membrane forces = 0.0

$$U = 12(1-\nu^2)R^2M/ET^3$$

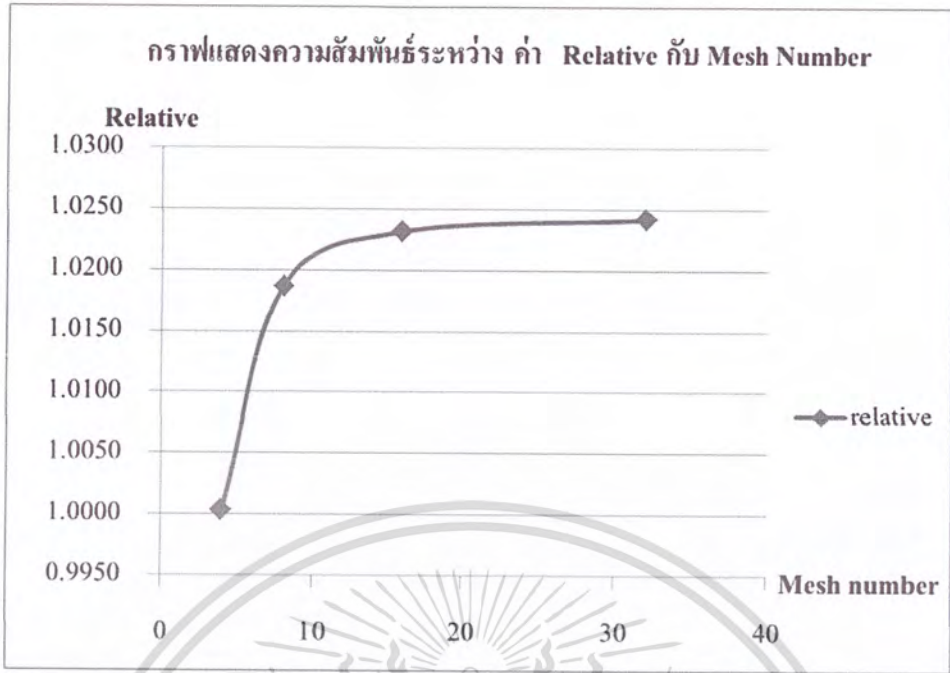
ผลการวิเคราะห์ Cantilever quarter cylinder ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ (Mesh 16x16)



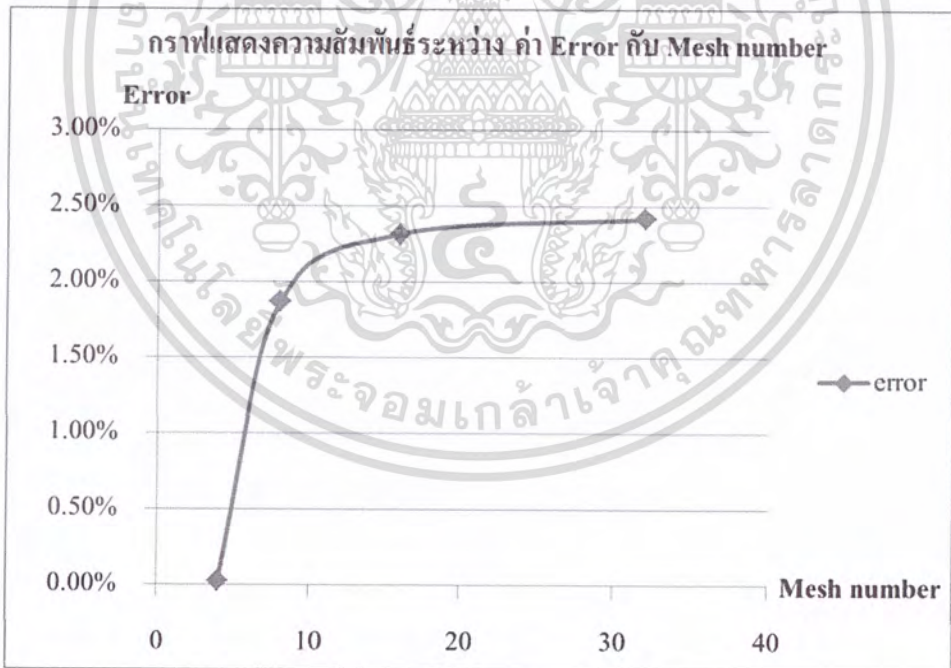
รูปที่ 4.39 แสดงการวิเคราะห์ Cantilever quarter cylinder ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 4.18 ผลของค่าการโก่งตัวของ โครงสร้าง Pinched cylinder เมื่อแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างออกเป็น ส่วนๆ

Mesh	Value 1	Value 2	Value 3	Value 4	Value 5	Average value	Relative	Error
4x4	0.10933	0.11146	0.11207	0.11146	0.10933	0.11073	1.0003	0.03%
8x8	0.11134	0.11337	0.11392	0.11337	0.11134	0.11267	1.0187	1.87%
16x16	0.11183	0.11385	0.11439	0.11385	0.11183	0.11315	1.0231	2.31%
32x32	0.11194	0.11396	0.11451	0.11396	0.11194	0.11326	1.0242	2.42%
Exact solution	-	-	-	-	-	0.1093	-	-



รูปที่ 4.40 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Relative กับ จำนวนการ แบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงดัดกระทำต่อโครงสร้าง Cantilever quarter cylinder ที่ตำแหน่งขอบล่าง



รูปที่ 4.41 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า Error กับ จำนวนการแบ่งชิ้นส่วน โดยที่แรงดัดกระทำต่อโครงสร้าง Cantilever quarter cylinder ที่ตำแหน่งขอบล่าง

บทที่ 5

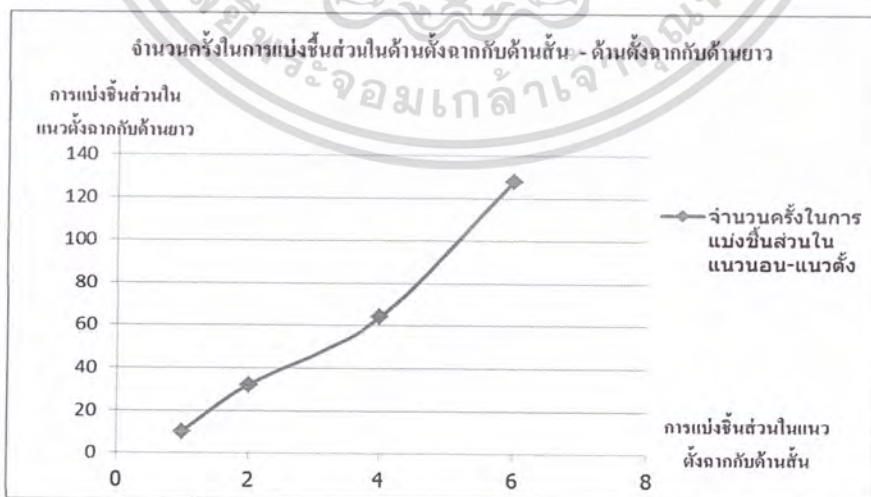
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทนี้เป็นกรกล่าวผลสรุปงานวิจัยและเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งหมดที่ได้ศึกษาตามเป้าประสงค์ที่กำหนดไว้ในบทแรก รวมถึงการเสนอแนะของงานวิจัย และการวิจัยเพื่อปรับปรุงในขั้นต่อไป ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

5.1 สรุปผลจากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

5.1.1 In-Plane and Out-of-Plane shear loading

ผลการวิเคราะห์ในคานเมื่อมีแรงกระทำแบบ In-Plane นั้น ค่าการโก่งตัวที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม มีค่าที่ใกล้เคียงกับค่า Exact Solution เมื่อเทียบกับจำนวนการแบ่งชิ้นส่วน จะเห็นได้ว่าเมื่อแบ่งชิ้นส่วน น้อยค่าที่ได้นั้นมีความคลาดเคลื่อนมาก ต้องทำการแบ่งชิ้นส่วน โครงสร้างมากขึ้น ค่าคำตอบที่ได้ถึงจะใกล้เคียง Exact Solution แต่เมื่อแบ่งชิ้นส่วน มากขึ้นเรื่อยๆ จะพบว่าค่าคำตอบที่ได้นั้นลู่ออกจากค่า Exact Solution ซึ่งการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้ ต้องคำนึงถึงค่าอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างของชิ้นส่วนด้วย ดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 แสดงค่าที่แนะนำในการแบ่งชิ้นส่วนโครงสร้างเพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับ Exact Solution

ในส่วนของแรงที่กระทำแบบ Out-of-Plane ค่าคำตอบที่ได้จากการ โกงตัวเมื่อวิเคราะห์ด้วย โปรแกรม เมื่อแบ่งชิ้นส่วน มากเท่าใดค่าคำตอบที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับ Exact Solution ซึ่งความคลาดเคลื่อน อยู่ในค่าที่ยอมรับได้ จึงสามารถกล่าวได้ว่า โปรแกรมที่ใช้วิเคราะห์นั้นมีความแม่นยำสำหรับ โครงสร้าง ประเภทนี้

5.1.2 Curved cantilever beam

ในส่วนของแรงที่กระทำแบบ In-Plane ค่าคำตอบที่ได้จาก โปรแกรมเมื่อแบ่งชิ้นส่วน มาก ขึ้นอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ นั่นคือค่าความคลาดเคลื่อน ไม่เกิน 5% แต่เมื่อแรงกระทำต่อ โครงสร้างเป็นแบบ Out-of-Plane ค่าตอบที่ได้อยู่ในเกณฑ์ที่ไม่สามารถนำมาใช้ได้เนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนเกิน 5% จึงไม่ แนะนำให้วิเคราะห์โครงสร้างที่มีแรงกระทำ Out-of-Plane ใน โครงสร้างประเภท กาน โค้ง

5.1.3 Twist loading in beam

เมื่อแรงกระทำแบบ Twist load ในกาน ค่าตอบที่ได้จาก โปรแกรมนั้นมีความคลาดเคลื่อน อย่างมาก จึงไม่แนะนำให้วิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้แบบ Plate ควรเลือกโมเดลรูปแบบอื่นแทน

5.1.4 Clamped square plate และ Steel rectangular plate

ในส่วนของการวิเคราะห์แผ่นพื้นซึ่งมีลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัสสี่เหลี่ยมผืนผ้า นั้นตัว โปรแกรมสามารถวิเคราะห์ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับค่า Exact Solution เมื่อแบ่งชิ้นส่วนมากขึ้นจึงสามารถ กล่าวได้ว่า โปรแกรมสามารถวิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้ได้

5.1.5 Hemispherical shell with 18° aperture

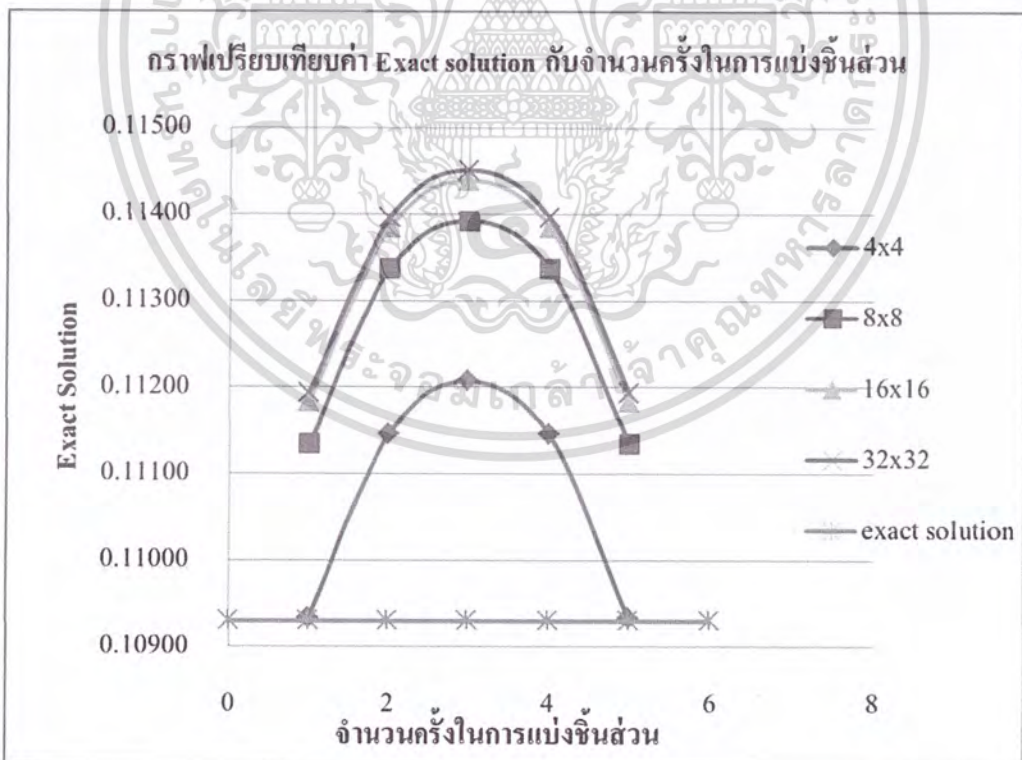
ผลการวิเคราะห์ใน โมเดลแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ แบบสมมาตร และ แบบเต็มรูป ซึ่ง ผลลัพธ์จาก โปรแกรมทั้งสองแบบมีค่าเท่ากัน โดยยิ่งแบ่งชิ้นส่วนมากเท่าไรค่าคำตอบที่ได้จะเข้าใกล้ Exact Solution มากขึ้น จึงสามารถสรุปได้ว่าตัว โปรแกรมสามารถวิเคราะห์โครงสร้างประเภทโดมได้

5.1.6 Pinched cylinder with rigid diaphragms

ผลการวิเคราะห์ในโมเดลแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ แบบสมมาตร และ แบบเต็มรูป ซึ่งผลลัพธ์จากโปรแกรมทั้งสองแบบมีค่าใกล้เคียงกัน โดยยิ่งแบ่งชิ้นส่วนมากเท่าไรคำตอบที่ได้จะเข้าใกล้ Exact Solution มากขึ้น จึงสามารถสรุปได้ว่าตัวโปรแกรมสามารถวิเคราะห์โครงสร้างประเภททรงกระบอกได้

5.1.7 Cantilever quarter cylinder

ในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้ ตัวโปรแกรมจะวิเคราะห์ค่าคำตอบที่ละจุด คำตอบที่ได้จากโปรแกรมต้องนำมาเฉลี่ย โดยคำตอบของโปรแกรมที่จุดริมสุดจะมีค่าใกล้เคียงกับ ค่า Exact Solution มากที่สุด โดยยิ่งแบ่งชิ้นส่วนมากคำตอบจะลู่ออกค่า Exact Solution ดังแสดงในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 กราฟเปรียบเทียบค่า Exact Solution ของแต่ละจุดกับจำนวนการแบ่งชิ้นส่วน

5.2 วิจัยผลลัพธ์การวิเคราะห์

5.2.1 ในการโมเดล โครงสร้างที่มีผลของแรงบิดมาเกี่ยวข้องค่าคำตอบที่ได้จากโปรแกรมมีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก อาจเกิดเนื่องจากโมเดลโครงสร้างไม่ถูกวิธี

5.2.2 โครงสร้างบางประเภทเมื่อมีการแบ่งชิ้นส่วนมากขึ้นค่าคำตอบที่ได้จากโปรแกรมอาจมีการลู่ออกจากค่า Exact Solution แต่ยังเป็นค่าที่สามารถยอมรับได้

5.2.3 โครงสร้างประเภท Plate ที่เป็นวงกลมนั้น โปรแกรมจะแบ่งชิ้นส่วนให้เอง โดยอัตโนมัติ ซึ่งเมื่อวิเคราะห์แล้วจะพบว่าคำตอบมีค่าเท่ากับ Exact Solution

5.2.4 โครงสร้างประเภท โดมหรือทรงกระบอกสามารถ โมเดล โครงสร้างแบบสมมาตร ซึ่งคำตอบที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับการ โมเดล โครงสร้างแบบเต็มรูป และใกล้เคียงกับ Exact Solution

5.3 ข้อเสนอแนะ

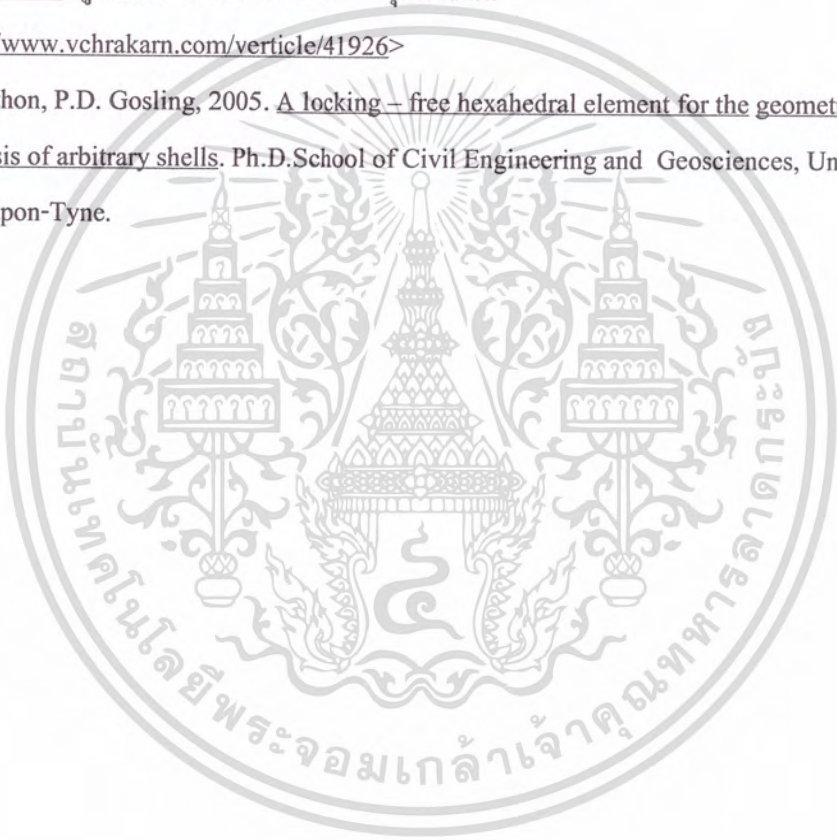
5.3.1 ในการโมเดล โครงสร้าง ต้องมีความรู้ความเข้าใจเป็นอย่างมาก เพราะถ้าโมเดลผิดแบบ ผลที่ได้นั้นจะมีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก

5.3.2 โครงสร้างที่มีความซับซ้อน ผลลัพธ์จากโปรแกรมอาจมีความคลาดเคลื่อนได้ ผู้ที่ใช้โปรแกรมควรอ้างอิงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องและเพิ่มความน่าเชื่อถือ

5.3.3 ควร โมเดล โครงสร้างเพิ่มเติมอีก เพื่อทดสอบความแม่นยำของ โปรแกรม

หนังสืออ้างอิง

- เดช พุทธเจริญทอง, 2548. การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- ยศกร ประทุมวัลย์, 1 ธันวาคม 2552. การเลือกใช้ชนิดเอลิเมนต์ (Element Type) ให้เหมาะสมกับกลศาสตร์ของแข็ง. ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ.
<URL:<http://www.vchakra.com/verticle/41926>>
- A.Petchsasithon, P.D. Gosling, 2005. A locking – free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells. Ph.D.School of Civil Engineering and Geosciences, University of Newcastle-upon-Tyne.



บรรณานุกรม

- เดช พุทธเจริญทอง, 2548. การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- ยศกร ประทุมวัลย์, 1 ธันวาคม 2552. การเลือกใช้ชนิดเอลิเมนต์ (Element Type) ให้เหมาะสมกับกลศาสตร์ของแข็ง. ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ.
<URL:<http://www.vchakarn.com/verticle/41926>>
- A.Petchsasithon, P.D. Gosling, 2005. A locking – free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells. Ph.D.School of Civil Engineering and Geosciences, University of Newcastle-upon-Tyne.
- S. P. Timoshenko and S. Woinowski-Krieger, 1959. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York .

ภาคผนวก ก

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง



ผก1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A locking-free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells

A.Petchsasithon, P.D. Gosling¹

School of Civil Engineering and Geosciences, University of Newcastle-upon-Tyne, NE1 7RU, UK.

Abstract

The development of the formulation for a highly adaptable hexahedral shell finite element is presented in this paper. A basic 18-node isoparametric hexahedral element is adopted as the basis of the formulation. Potential strategies to alleviate transverse shear, trapezoidal, thickness and membrane locking are investigated, in several combinations, using a wide variety of geometrically linear benchmarks. The most promising approach is further assessed using geometrically non-linear shell and plate problems. The recommended ANS-formulation performs well against an extensive range of benchmarks, and continues to be accurate at an aspect ratio of 1:10,000.

1 Introduction

Shells are a special type of 3-dimensional body in which one dimension, referred to as the thickness, is small compared to the other dimensions. Over the past few decades, shell structures have been represented by 2-dimensional elements such as degenerated triangles and quadrilaterals. Degenerated elements are based on three assumptions. Firstly, normals to the mid-surface in the reference configuration remain straight but not normal to the mid-surface after deformation. Secondly, the thickness of the shell does not change after deformation. Lastly, stress in thickness direction is ignored. Several papers dealing with shell structures using degenerated shell elements have been reviewed [2,6,8,14,33,34]. 5 degrees of freedom (d.o.f.), namely 3 translational and 2 rotational d.o.f. are defined at each node of elements. Hexahedral shell elements, with 3 translational d.o.f. at top and bottom surfaces rather than 5 d.o.f. at the mid-surface, are being increasingly used to represent shell structures [1,4,21-27]. Hexahedral elements by their nature have clear advantages over degenerated shell equivalent elements [1] for example, geometry definitions and kinematics are simplified by negating rotational degrees of freedom. Hexahedral elements can cope with finite rotations without the need to change the fundamental formulation. Furthermore, the need to match rotations in degenerated shell elements is avoided in hexahedral elements where C^0 continuity is ensured. Nevertheless, there are some disadvantages of hexahedral shell elements. In degenerated shell elements two types of locking phenomena are generally encountered - transverse shear locking, and membrane locking. Conversely, 4 locking problems can be found in hexahedral shell elements - thickness locking and trapezoidal locking in addition to the two locking phenomena exhibited by degenerated shell elements. The alleviation of locking from shell formulations has been the basis of a considerable research effort in the field.

In degenerated shell elements, various methods have been proposed to eliminate transverse shear and membrane locking. Uniform reduced integration was first proposed by Zienkiewicz *et al.* [13]. Nevertheless this technique may lead to zero energy modes. Zhong [14] proposed a cross-reduced integration technique to suppress zero energy modes. Dvorkin and Bathe [38] were one of the first authors to propose the concept of the assumed natural strain to avoid locking. Other substantial methods to overcome transverse shear and membrane locking problems include the use of assumed stresses and enhanced assumed strains. These two methods are based on the mixed formulation of the stationary function with modifications to the assumptions regarding stress and strain distributions. Simo and Rifai [37] proposed the enhanced assumed strain method based on three-field variational principle of Hu-Washizu. Using the two-field variational principle of Hellinger-Reissner, Pian and Sumihara [39] proposed a hybrid stress formulation. Betsch *et al.* [7] combined enhanced assumed membrane strains and assumed natural transverse shear strains to alleviate membrane and transverse shear locking, respectively.

The increasingly recognised potential advantages of hexahedral isoparametric elements in the analysis of complex three-dimensional shells and solids has resulted in enhanced research activity aiming to eliminate these locking phenomena. Ausserer and Lee [4] assumed independent strains to avoid transverse shear whilst a new constitutive matrix employing plane-stress assumption was used to eliminate thickness locking. Thickness locking may also be negated by assuming a quadratic interpolation of displacement in thickness direction [12]. Therefore, additional degrees of freedom are

¹ Corresponding author. E-mail address: p.d.gosling@ncl.ac.uk

needed to fulfil this assumption. Hauptmann and Schweizerhof [21] proposed an enhanced assumed transverse normal strain based on a three field variational principle comprising assumed natural membrane and transverse shear strains to alleviate thickness locking, membrane and transverse shear locking. Rhiu and Lee [32] introduced assumed strains to avoid membrane, transverse shear and thickness locking problems.

In this paper we combine a geometrically nonlinear eighteen node hexahedral shell element (described in section 2) with these locking alleviation strategies (detailed in section 3). Resulting new element formulation variants are proposed in section 4. To investigate the performance of the proposed element variants, several widely used numerical benchmarks and examples are tested for both geometrically linear and nonlinear problems (section 5). The paper is concluded by a discussion of the results and recommendations.

2 Geometry and kinematics

Nine nodes at each of the top ($\zeta = 1$) and bottom ($\zeta = -1$) surfaces (Fig 1) define the geometry of the element. With three degrees of freedom at each node the deformation of the element is described by 54 d.o.f.. The reference geometry \mathbf{x} is defined as,

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{18} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_i \quad (1)$$

where the N_i are expressed as,

$$N_{2i-1} = \frac{1}{2} N_i^9 (1 + \zeta), N_{2i} = \frac{1}{2} N_i^9 (1 - \zeta), 1 \leq i \leq 9 \quad (2)$$

in which the N_i^9 are nine-node Lagrangian shape functions. The displacements at any point within the element are written as,

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{18} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_i \quad (3)$$

Global Green-Lagrange strains are related to displacement as:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ W_{,z} \\ U_{,y} + V_{,x} \\ U_{,z} + W_{,x} \\ V_{,z} + W_{,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (U_{,x}^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2)/2 \\ (U_{,y}^2 + V_{,y}^2 + W_{,y}^2)/2 \\ (U_{,z}^2 + V_{,z}^2 + W_{,z}^2)/2 \\ U_{,x}U_{,y} + V_{,x}V_{,y} + W_{,x}W_{,z} \\ U_{,x}U_{,z} + V_{,x}V_{,z} + W_{,x}W_{,z} \\ U_{,y}U_{,z} + V_{,y}V_{,z} + W_{,y}W_{,z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= B_i u_i = (B_l + B_{nl})_i u_i$$

where $a_{,b}$ mean derivative of a with respect to b , B is defined as strain-displacement matrix, and can be divided into linear, B_l , and nonlinear parts, B_{nl} . In turn, these can be further divided into linear in-plane (B_{lm}), linear transverse shear (B_{ls}) and linear transverse normal (B_{ln}) components and equivalent non-linear terms - in-plane (B_{nlm}), transverse shear (B_{nls}) and transverse normal (B_{nl_n}), respectively, and represented collectively as,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ U_{,y} + V_{,x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (U_{,x}^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2)/2 \\ (U_{,y}^2 + V_{,y}^2 + W_{,y}^2)/2 \\ U_{,x}U_{,y} + V_{,x}V_{,y} + W_{,x}W_{,z} \end{pmatrix} = B_m u_i = (B_{lm} + B_{nlm}) u_i$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{,z} + W_{,x} \\ V_{,z} + W_{,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{,x}U_{,z} + V_{,x}V_{,z} + W_{,x}W_{,z} \\ U_{,y}U_{,z} + V_{,y}V_{,z} + W_{,y}W_{,z} \end{pmatrix} = B_s u_i = (B_{ls} + B_{nls}) u_i$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\varepsilon = (\varepsilon_z) = (W_{,z}) + ((U_{,z}^2 + V_{,z}^2 + W_{,z}^2)/2) = B_n u_i = (B_{ln} + B_{nl_n}) u_i$$

It is convenient to define strains in the local coordinate system consistent with material properties that are usually specified in a coordinate system in which local X - Y coordinates are tangential to the shell midsurface at Gauss quadrature points. Local X -coordinate is assumed parallel to natural coordinate ξ , with the Z coordinate normal to the shell surface, such that the local coordinates directions, \bar{X} , \bar{Y} , and \bar{Z} are,

$$\bar{X} = \frac{x_{,\xi} |_{\zeta=0}}{\|x_{,\xi} |_{\zeta=0}\|}, \bar{Z} = \frac{\bar{X} \times x_{,\xi} |_{\zeta=0}}{\|\bar{X} \times x_{,\xi} |_{\zeta=0}\|}, \bar{Y} = \bar{Z} \times \bar{X}$$

Therefore, local Green-Lagrange strains, ε^L , may be defined as,

$$\varepsilon^L = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T = T_\varepsilon^T [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T, \quad (5)$$

where T_ε is the strain transformation matrix [46].

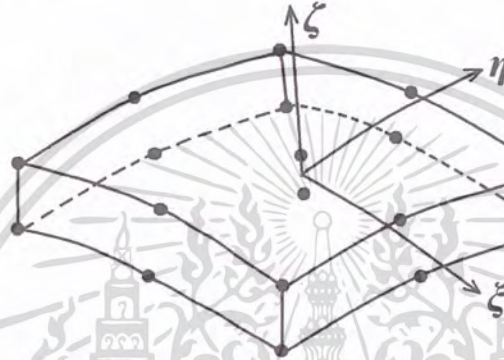


Fig 1. Eighteen-node hexahedral element geometry.

2.1 Principle of Virtual Work

The basis of the element formulation is the principle of virtual work, expressed as,

$$\delta W_i - \delta W_e = \delta W, \quad (6)$$

where δW_i is virtual work done by the external load, while the internal virtual work may be defined as,

$$\delta W_i = \int_{V_0} \delta \varepsilon^T \sigma dV \quad (7)$$

The change in Green-Lagrange strain in equation (4) can be shown as,

$$\delta \varepsilon = (B_l + 2B_{nl}) U_i + E_n, \quad (8)$$

where E_n is a higher-order term in δU_i and is neglected for small virtual displacements. The stress-strain relationship is written as,

$$\sigma = C \varepsilon, \quad (9)$$

with C the constitutive matrix. Substituting equation (7), and (8) into equation (6) gives,

$$\delta W = \delta U_i^T \int_{V_0} (B_l + 2B_{nl})^T \sigma dV - \delta U_i^T P = \delta U_i^T \psi, \quad (10)$$

where P , and ψ are external force and out-of-balance force vectors, respectively. From equation (10), the out-of-balance force vector may be written as,

$$\psi = \int_{V_0} (B_l + 2B_{nl})^T C (B_l + B_{nl}) dV U_i - P \quad (11)$$

The equilibrium state is defined when the out-of-balance force vector is zero, with the solution to this problem (11) non-linear in the global displacements. The incremental form of the displacements, U_i , is obtained using the Newton-Raphson method. The relationship of out-of-balance force and incremental displacement may be expressed as,

$$K_t \Delta U_i = P - \int_{V_0} (B_i + 2B_{nl})^T C (B_i + B_{nl}) dV U_i \quad (12)$$

where K_t is tangent stiffness matrix and can be derived by differentiating the out-of-balance force vector, ψ , with respect to displacement, U_i . Therefore, the tangent stiffness [45], K_t , is defined as,

$$K_t = \frac{\partial \psi(U)}{\partial U} = K_{tl} + K_{ml} + K_{t\sigma} \quad (13)$$

where K_{tl} , K_{ml} , and $K_{t\sigma}$ denote linear, non-linear and initial stress tangent stiffness matrices, respectively and are given by,

$$\begin{aligned} K_{tl} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^T C B_i |J| d\xi d\eta d\zeta \\ K_{ml} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2B_i^T C B_{nl} + 2B_{nl}^T C B_i + 4B_{nl}^T C B_{nl}) |J| d\xi d\eta d\zeta \\ K_{t\sigma} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G^T \bar{\sigma} G |J| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (14)$$

$|J|$ is determinant of jacobian matrix. G can be evaluated as,

$$G = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & \dots & N_{18,x} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & \dots & N_{18,y} & 0 & 0 \\ N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 & \dots & N_{18,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & 0 & N_{18,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & \dots & 0 & N_{18,y} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & \dots & 0 & N_{18,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & \dots & 0 & 0 & N_{18,x} \\ 0 & 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & 0 & N_{18,y} \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & \dots & 0 & 0 & N_{18,z} \end{bmatrix}$$

and $\bar{\sigma}$ is,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Substituting equation (13), and (14) into (12), the incremental displacement at each step, ΔU_i , can be evaluated.

3 Locking Alleviation

In its standard form, this element formulation exhibits transverse shear, membrane, thickness and trapezoidal locking. A number of approaches to eliminate locking phenomena have been proposed and are summarised in this section for completeness and consistency, and for notational convenience.

3.1 Transverse Shear Locking Alleviation. In theory, for thin shells, transverse shear strains, γ_{xz} and γ_{yz} , are considered small and sometimes zero for very thin shells. In assuming these transverse shear strains are zero, the corresponding formulation is limited to thin shells without consideration of transverse deformations. Degenerated shell elements (in which the through-thickness dimension is explicitly removed from the volume integration) apply to both thick and thin shells. Most finite

elements for degenerated shells encounter excess stiffness in shear as the shell becomes thin. This leads to shear locking phenomenon. There are various ways suggested by researchers to avoid this phenomenon. The assumed natural transverse shear strain (ANS) concept was first proposed by Dvorkin and Bathe[38]. Huang and Hinton[2] also proposed ANS method for nine-node degenerated shells. The philosophy of this method is to substitute the total potential energy Π by an assumed total potential energy Π^{ANS} as,

$$\pi^{ANS} = \pi + \int_{V_0} \lambda_{\xi\zeta} (\gamma_{\xi\zeta}^{ANS} - \gamma_{\xi\zeta}) dV + \int_{V_0} \lambda_{\eta\zeta} (\gamma_{\eta\zeta}^{ANS} - \gamma_{\eta\zeta}) dV, \quad (15)$$

where $\lambda_{\xi\zeta}$ and $\lambda_{\eta\zeta}$ are Lagrangian multipliers. Transverse shear strains $\gamma_{\xi\zeta}$ and $\gamma_{\eta\zeta}$ are displacement-dependent strains. In this formulation, in case of linear elastic isotropic material, the strain energy can be divided into in-plane strain, transverse normal and transverse shear strain energy and may be represented as,

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{V_0} \varepsilon_{ip}^T C_{ip} \varepsilon_{ip} dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} \varepsilon_n^T C_n \varepsilon_n dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} \gamma_s^T C_s \gamma_s dV + W_e, \quad (16)$$

in which ε_{ip} , ε_n and γ_s are in-plane, transverse normal and transverse shear strains, respectively. C_{ip} , C_n and C_s are constitutive matrices for in-plane transverse normal and transverse shear, respectively and will be discussed in detail subsequently. For a 9-node degenerated shell element, the assumed natural transverse shear strain, $\gamma_{\xi\zeta}^{ANS}$, is chosen to be quadratic in η and linear in ξ , while $\gamma_{\eta\zeta}^{ANS}$, is chosen to be quadratic in ξ and linear in η . The assumed transverse shear strains used in this paper are the same as in the 9-node degenerated shell elements since the assumed natural transverse shear strains are interpolated only in the ξ and η directions. The assumed natural transverse shear strains, $\gamma_{\xi\zeta}^{ANS}$ and $\gamma_{\eta\zeta}^{ANS}$, may be defined as,

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta}^{ANS} &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\xi)(\eta^2 + \eta)\gamma_{\xi\zeta}^{11} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi)(1 - \eta^2)\gamma_{\xi\zeta}^{21} + \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\xi)(\eta^2 - \eta)\gamma_{\xi\zeta}^{31} \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\xi)(\eta^2 + \eta)\gamma_{\xi\zeta}^{12} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi)(1 - \eta^2)\gamma_{\xi\zeta}^{22} + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\xi)(\eta^2 - \eta)\gamma_{\xi\zeta}^{32} \\ \gamma_{\eta\zeta}^{ANS} &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\eta)(\xi^2 + \xi)\gamma_{\eta\zeta}^{11} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\eta)(1 - \xi^2)\gamma_{\eta\zeta}^{21} + \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\eta)(\xi^2 - \xi)\gamma_{\eta\zeta}^{31} \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\eta)(\xi^2 + \xi)\gamma_{\eta\zeta}^{12} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\eta)(1 - \xi^2)\gamma_{\eta\zeta}^{22} + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\eta)(\xi^2 - \xi)\gamma_{\eta\zeta}^{32} \end{aligned} \quad (17)$$

The coordinates of $\gamma_{\xi\zeta}^{ij}$ and $\gamma_{\eta\zeta}^{ij}$ are shown in figure 2. Local assumed transverse shear strains are needed for total potential energy evaluation, and can be obtained from natural transverse shear strains as [1]

$$\begin{pmatrix} \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{\zeta}} \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{pmatrix}$$

Substitute assumed local transverse shear strain, γ_{XZ}^{ANS} and γ_{YZ}^{ANS} into equation (16) gives

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{V_0} \varepsilon_{ip}^T C_{ip} \varepsilon_{ip} dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} \varepsilon_n^T C_n \varepsilon_n dV + \frac{1}{2} \int_{V_0} (\gamma_s^{ANS})^T C_s \gamma_s^{ANS} dV + W_e \quad (18)$$

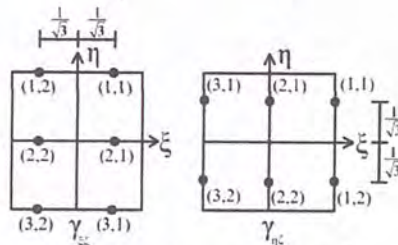


Fig 2. Coordinates of $\gamma_{\xi\zeta}^{ij}$ and $\gamma_{\eta\zeta}^{ij}$.

Transverse shear locking may also be alleviated by employing assumed transverse shear strains (AS). The AS method is based on mixed form of the stationary function. Its implementation using the

Hellinger-Reissner principle [30] is summarised here. Park *et al.* [3] used the AS method to avoid both transverse shear and membrane locking. However, the resulting formulation was computationally expensive with additional d.o.f. associated with the AS method. This can be avoided if only transverse shear locking is eliminated by assuming enhanced transverse shear strains, and other locking phenomena are suppressed by methods that do not require the addition of d.o.f.. The principle of virtual work based on HR principle may be rewritten as

$$\int \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} dV - \delta W_e = 0, \quad (19)$$

where $\bar{\varepsilon}$, and $\bar{\sigma}$ are the displacement-dependent strain and second Piola-Kirchhoff stress, respectively. The second Piola-Kirchhoff stress may be defined as

$$\bar{\sigma} = C \bar{\varepsilon}$$

with $\bar{\varepsilon}$ the displacement-independent which is related to displacement-dependent strain ε through compatibility equation,

$$\int_{V_0} \delta \bar{\sigma}^T (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) dV = 0 \quad (20)$$

The displacement-independent strain comprises lower and higher order polynomial functions of the natural coordinates (ξ, η, ζ), and may be represented as,

$$\bar{\varepsilon} = M \alpha \quad (21)$$

where M , and α are displacement-independent strain shape functions, and parameter vector, respectively. The displacement-independent strains consist only of transverse shear terms, whereas displacement-independent transverse shear strain shape functions, M_s , are chosen from displacement-independent strain shape functions, M , as in Park *et al.* [3]. The displacement-independent transverse shear strain shape functions, M_s , may be expressed as

$$M_s = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 & c_1 & 0 & \zeta c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & b_1 & 0 & d_1 & 0 & \zeta d_1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

where a_i, b_i, c_i and d_i can be defined as

$$a_i = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta], b_i = [\zeta \quad \zeta\xi \quad \zeta\eta \quad \zeta\xi\eta], c_i = \xi\eta^2, d_i = \xi^2\eta$$

3.2 Membrane Locking Alleviation. Membrane locking in hexahedral elements may appear because of the coupling of in-plane normal strains and shear strains. This locking becomes more serious when aspect ratio is high. Two established candidate methods are available to overcome membrane locking. The first uses assumed shear strains (AS), and, as before, is based on the Hellinger-Reissner principle [39] (see section 3.1).

In this case, the displacement-independent strains used to eliminate membrane locking consist only of in-plane terms. Conversely, the displacement-independent in-plane strain shape functions, M_{ip} , are chosen from displacement-independent strain shape functions, M (Park *et al.* [3]), with the former, M_{ip} , expressed as,

$$M_{ip} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & \zeta c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & d_1 & 0 & \zeta d_1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Alternatively, membrane locking may be alleviated by assuming natural membrane strains (ANS) as proposed by Bucalem and Bathe [34]. The assumed natural membrane strain, ε_ξ^{ANS} , are chosen to be quadratic in η and linear in ξ , ε_η^{ANS} , to be quadratic in ξ and linear in η and $\gamma_{\xi\eta}^{ANS}$, to be both linear in ξ and η . The assumed natural in-plane strains, ε_ξ^{ANS} , ε_η^{ANS} and $\gamma_{\xi\eta}^{ANS}$, can be expressed as

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi^{ANS} &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\xi)(\eta^2 + \eta)\varepsilon_\xi^{11} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi)(1 - \eta^2)\varepsilon_\xi^{21} + \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}\xi)(\eta^2 - \eta)\varepsilon_\xi^{31} \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\xi)(\eta^2 + \eta)\varepsilon_\xi^{12} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi)(1 - \eta^2)\varepsilon_\xi^{22} + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\xi)(\eta^2 - \eta)\varepsilon_\xi^{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\eta}^{ANS} &= \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\eta)(\xi^2 + \xi)\varepsilon_{\eta}^{11} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\eta)(1-\xi^2)\varepsilon_{\eta}^{21} + \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\eta)(\xi^2 - \xi)\varepsilon_{\eta}^{31} \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}\eta)(\xi^2 + \xi)\varepsilon_{\eta}^{12} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\eta)(1-\xi^2)\varepsilon_{\eta}^{22} + \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}\eta)(\xi^2 - \xi)\varepsilon_{\eta}^{32} \\
\varepsilon_{\xi\eta}^{ANS} &= \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\xi)(1+\sqrt{3}\eta)\varepsilon_{\xi\eta}^{11} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\xi)(1+\sqrt{3}\eta)\varepsilon_{\xi\eta}^{21} \\
&\quad + \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}\xi)(1-\sqrt{3}\eta)\varepsilon_{\xi\eta}^{12} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\xi)(1-\sqrt{3}\eta)\varepsilon_{\xi\eta}^{22}
\end{aligned} \tag{24}$$

The coordinates of ε_{ξ}^{ij} , ε_{η}^{ij} and $\gamma_{\xi\eta}^{ij}$ are shown in figure 3. The local in-plane strains can be obtained from natural in-plane strains as [1]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi}^2 & y_{,\xi}^2 & x_{,\xi} y_{,\xi} \\ x_{,\eta}^2 & y_{,\eta}^2 & x_{,\eta} y_{,\eta} \\ 2x_{,\xi} x_{,\eta} & 2y_{,\xi} y_{,\eta} & x_{,\xi} y_{,\eta} + x_{,\eta} y_{,\xi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{pmatrix} \tag{25}$$

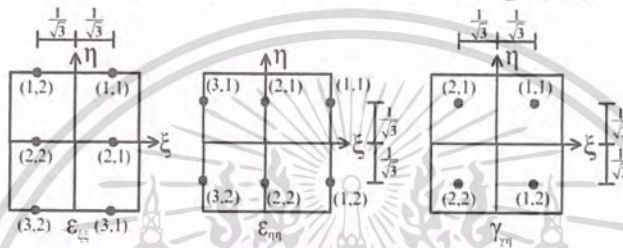


Fig 3. Coordinates of ε_{ξ}^{ij} , ε_{η}^{ij} , and $\gamma_{\xi\eta}^{ij}$.

3.3 Thickness Locking Alleviation. The thickness locking happens in hexahedral elements if linear interpolation is used in thickness direction. Let consider St.-Venant-Kirchoff material law. From stress-strain relationship, σ_z varies with ε_z (constant through thickness direction), $v\varepsilon_x$ and $v\varepsilon_y$. In pure bending case, σ_z should be zero but due to the fact that ε_z is constant through thickness and ε_x and ε_y are linear through thickness, σ_z is linear. This leads to over-stiff in thickness direction. Thickness locking may be eliminated by a modified constitutive matrix [4]. The constitutive matrix is generally used for 3-dimensional solid elements while shell structures are normally based on plane-stress assumptions. In plane-stress assumptions, the effect of σ_z on ε_x and ε_y is neglected. From this assumption, a modified constitutive matrix, C_m , may be derived as,

$$C_m = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix}, \tag{26}$$

where E , ν and β are Young's modulus, Poisson's ratio and a shear correction factor (commonly taken as 5/6 to include the non-uniform distribution of transverse shear stress along the thickness), respectively. G is the shear modulus and assumed to be $E/2(1+\nu)$. The limitation of constitutive matrix is that it can only be employed when strains are considerably small. The modified constitutive matrix can be divided into in-plane (C_{ip}), transverse shear (C_s) and transverse normal (C_n) constitutive sub-matrices as

$$C_{ip} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, C_s = \begin{bmatrix} \beta G & 0 \\ 0 & \beta G \end{bmatrix}, C_n = E$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 Trapezoidal Locking Alleviation. When distorted meshes (the thickness directors are not 90° angle to the element mid surface) are used to model shell structures, trapezoidal locking happens. Trapezoidal locking may be effectively reduced by assuming natural transverse normal strain (Bischoff and Ramm [5]) that take the form,

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = & N_1(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_1 = -1, \eta_1 = -1) + N_2(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_2 = +1, \eta_2 = -1) \\ & + N_3(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_3 = +1, \eta_3 = +1) + N_4(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_4 = -1, \eta_4 = +1) \\ & + N_5(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_5 = 0, \eta_5 = -1) + N_6(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_6 = +1, \eta_6 = 0) \\ & + N_7(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_7 = 0, \eta_7 = +1) + N_8(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_8 = -1, \eta_8 = 0) \\ & + N_9(\xi, \eta)\varepsilon_z(\xi_9 = 0, \eta_9 = 0), \end{aligned} \quad (27)$$

in which N_i are the nine-node Lagrange shape functions. The local transverse normal strain can be obtained from natural transverse normal strain as [1]

$$\varepsilon_z = \frac{1}{z, \zeta^2} \varepsilon_z \quad (28)$$

4 Proposed Trial Element Formulations

Three new trial element formulations are proposed by augmenting the basic 18-node hexahedral solid shell element with candidate methodologies to eliminate locking. It is convenient to divide element stiffness into in-plane, transverse shear and transverse normal stiffnesses, since each stiffness can be implemented separately.

In the first element formulation, denoted *AS/δANS*, assumed in-plane strains (AS), assumed natural transverse shear strains (ANS), a modified constitutive matrix and assumed natural transverse normal strains are adopted to eliminate membrane, transverse shear, thickness and trapezoidal locking, respectively. Element linear and nonlinear tangent stiffness matrices may be rewritten as

$$K_{st} = K_{ilm} + K_{ils} + K_{tln}, \quad K_{tnl} = K_{tnlm} + K_{tnls} + K_{tnln} \quad (29)$$

where K_{ilm} , K_{ils} and K_{tln} are linear in-plane, transverse shear and transverse normal linear tangent stiffness matrices, respectively, with corresponding non-linear counterparts denoted as K_{tnlm} , K_{tnls} and K_{tnln} . $K_{ilm} + K_{tnlm}$ may be expressed as,

$$K_{ilm} + K_{tnlm} = \mathbf{L}_{ip}^T \mathbf{P}_{ip}^{-1} \mathbf{L}_{ip} \quad (30)$$

$$\text{where, } \mathbf{L}_{ip} = \int_{V_0} \mathbf{M}_{ip}^T \mathbf{C}_{ip} (\mathbf{B}_{ilm} + 2\mathbf{B}_{nlm}) dV, \quad \mathbf{P}_{ip} = \int_{V_0} \mathbf{M}_{ip}^T \mathbf{C}_{ip} \mathbf{M}_{ip} dV.$$

The tangent transverse shear, $K_{ils} + K_{tnls}$ and tangent transverse normal stiffness matrices $K_{tln} + K_{tnln}$ may be written as,

$$\begin{aligned} K_{ils} + K_{tnls} &= \int_{V_0} (\mathbf{B}_{ils}^{ANS} + 2\mathbf{B}_{nls}^{ANS})^T \mathbf{C}_s (\mathbf{B}_{ils}^{ANS} + 2\mathbf{B}_{nls}^{ANS}) dV \\ K_{tln} + K_{tnln} &= \int_{V_0} (\mathbf{B}_{tln}^{ANS} + 2\mathbf{B}_{nln}^{ANS})^T \mathbf{C}_n (\mathbf{B}_{tln}^{ANS} + 2\mathbf{B}_{nln}^{ANS}) dV \end{aligned} \quad (31)$$

The initial stress tangent stiffness matrix in equation (14) may be rewritten as,

$$K_{t\sigma} = \int_{V_0} \mathbf{G}^T \overline{\overline{\sigma}}_m \mathbf{G} dV, \quad (32)$$

where $\overline{\overline{\sigma}}_m$ may be defined as,

$$\overline{\overline{\sigma}}_m = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\sigma}}_{xx} & \overline{\overline{\tau}}_{xy} & \overline{\overline{\tau}}_{xz} \\ \overline{\overline{\tau}}_{xy} & \overline{\overline{\sigma}}_{yy} & \overline{\overline{\tau}}_{yz} \\ \overline{\overline{\tau}}_{xz} & \overline{\overline{\tau}}_{yz} & \overline{\overline{\sigma}}_{zz} \end{bmatrix},$$

in which $\overline{\overline{\sigma}}_{xx}$, $\overline{\overline{\tau}}_{xy}$ and $\overline{\overline{\sigma}}_{yy}$ are calculated from independent-displacement in-plane strain while $\overline{\overline{\tau}}_{xz}$, $\overline{\overline{\tau}}_{yz}$ and $\overline{\overline{\sigma}}_{zz}$ are calculated from assumed transverse and normal strains, respectively. The internal force vector, F_i in equation (11) may be rewritten as

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
F_i = & \int_{V_0} (B_{ls}^{ANS} + 2B_{nls}^{ANS})^T C_s (B_{ls}^{ANS} + B_{nls}^{ANS}) dV U_i \\
& + \int_{V_0} (B_{ln}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_n (B_{ln}^{ANS} + B_{nlm}^{ANS}) dV U_i \\
& + \int_{V_0} (B_{lm} + 2B_{nlm})^T C_{ip} \bar{\sigma}_m dV + \mathbf{L}_{ip}^T \mathbf{P}_{ip}^{-1} \int_{V_0} M_{ip}^T C_{ip} (\varepsilon_m - \bar{\varepsilon}_m) dV
\end{aligned} \quad (33)$$

where $\bar{\sigma}_m$, ε_m and $\bar{\varepsilon}_m$ are Piola-Kirchhoff in-plane stresses, displacement-dependent and independent in-plane strains, respectively.

The second element formulation, denoted *ANSI8ANS*, differs from this first only in that assumed natural in-plane strains (ANS) are used to eliminate membrane locking in place of assumed in-plane strains (AS). It is similar to the formulation proposed by Harnau and Schweizerhof [22] with the exception that here a modified constitutive matrix is used to alleviate thickness locking, whereas Harnau and Schweizerhof's formulation uses enhanced assumed transverse normal strains (with a corresponding computational burden). Equation (29) remains valid for the linear and nonlinear element tangent stiffness matrices, while the tangent transverse shear and normal stiffness matrices are defined by equation (31). The in-plane stiffness matrix, $K_{ilm} + K_{inlm}$, is,

$$K_{ilm} + K_{inlm} = \int_{V_0} (B_{lm}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_{ip} (B_{lm}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS}) dV \quad (34)$$

The initial stress stiffness is given by equation (32) with,

$$\bar{\sigma}_m = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

where all six stress terms are evaluated from assumed in-plane, transverse shear and normal strains. The internal force vector, F_i , is defined as,

$$\begin{aligned}
F_i = & \int_{V_0} (B_{ls}^{ANS} + 2B_{nls}^{ANS})^T C_s (B_{ls}^{ANS} + B_{nls}^{ANS}) dV U_i \\
& + \int_{V_0} (B_{ln}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_n (B_{ln}^{ANS} + B_{nlm}^{ANS}) dV U_i \\
& + \int_{V_0} (B_{lm}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_{ip} (B_{lm}^{ANS} + B_{nlm}^{ANS}) dV U_i.
\end{aligned} \quad (35)$$

Assumed natural in-plane strains (ANS) and assumed transverse shear strains (AS) alleviate membrane and transverse shear locking, respectively, in the final element formulation (*ANSI8AS*). Equation (34) and the second equation in (31) remain valid. The tangent transverse shear stiffness, $K_{ils} + K_{imls}$, is defined as,

$$K_{ils} + K_{imls} = \mathbf{L}_s^T \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{L}_s, \quad (36)$$

$$\text{where, } \mathbf{L}_s = \int_{V_0} M_s^T C_s (B_{ls} + 2B_{nls}) dV, \mathbf{P}_s = \int_{V_0} M_s^T C_s M_s dV.$$

In equation (32) $\bar{\sigma}_m$ is,

$$\bar{\sigma}_m = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

where τ_{xz} and τ_{yz} are calculated from independent-displacement transverse shear strains while σ_{xx} , τ_{xy} , σ_{yy} and σ_{zz} are calculated from dependent-displacement in-plane and transverse normal strains, respectively. The internal force vector, F_{is} , is,

$$\begin{aligned}
F_i = & \int_{V_0} (B_{ls} + 2B_{nls})^T \bar{\sigma}_s dV + L_s^T P_s^{-1} \int_{V_0} M_s^T C_s (\varepsilon_s - \bar{\varepsilon}_s) dV \\
& + \int_{V_0} (B_{ln}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_n (B_{ln}^{ANS} + B_{nlm}^{ANS}) dV U_i \\
& + \int_{V_0} (B_{lm}^{ANS} + 2B_{nlm}^{ANS})^T C_{lp} (B_{lm}^{ANS} + B_{nlm}^{ANS}) dV U_i.
\end{aligned} \tag{37}$$

where $\bar{\sigma}_s$, ε_s and $\bar{\varepsilon}_s$ are Piola-Kirchhoff transverse shear stresses, displacement-dependent and displacement-independent transverse shear strains, respectively.

5 Numerical Examples

Numerical tests have been performed to demonstrate the behaviour of the element formulations with respect to transverse shear, membrane, thickness and trapezoidal locking in the analysis of geometrically linear and non-linear shell structures. Geometrically non-linear problems have been solved using the Newton-Raphson algorithm with iterations terminated when the Euclidean norm of incremental displacement vector is less than 10^{-4} of the Euclidean norm of total displacement vectors. It may also be noted that the newly proposed element formulations presented in this paper are fully integrated. The comparator elements for which results are provided in this section either use selective or full-reduced (in the case of the nine-node Lagrangian element - LAG9) integration to enhance their behaviours.

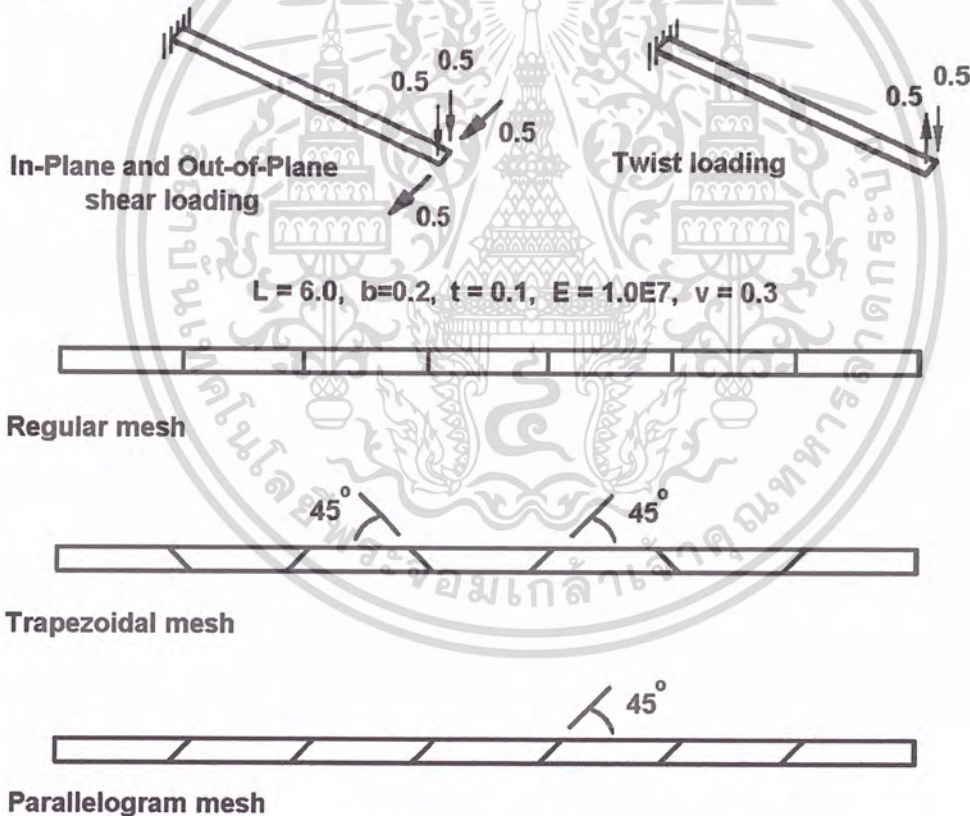


Fig 4. Straight cantilever beam.

GEOMETRICALLY LINEAR NUMERICAL EXAMPLES

Cantilever beam tests

Straight, curved and cantilever beam problems (figures 4-6) evaluate element sensitivity to various deformation patterns and mesh distortions. The straight cantilever beam test is intended to investigate the sensitivity of the formulation to trapezoidal and parallelogram mesh distortions. The curved

cantilever beam establishes the accuracy of structure to overall geometric distortion, whilst the twisted beam predicts the effect of warping with the twist of each element of 7.5° . The straight cantilever beam is subjected to in-plane, out-of-plane and twist loading at the free end. Both the curved and twisted beams are loaded by in-plane and out-of-plane shear loads only. Geometries, material properties and loading of straight, curved and twisted cantilever beams are defined in figures 4, 5 and 6, respectively. The exact displacement solutions obtained from Belytschko and Liu [40] are summarised in table 1. Results from proposed element formulations (e.g. *ANS18ANS*, *AS18ANS*, and *ANS18AS*), semiloof [28] and nine-node Lagrangian (LAG9) [28] are shown in figures 7-10.

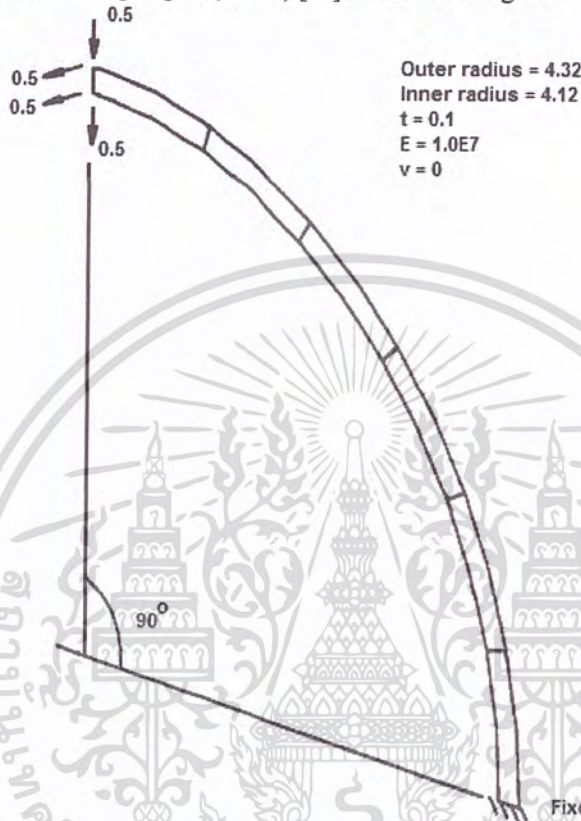


Fig 5. Curved cantilever beam.

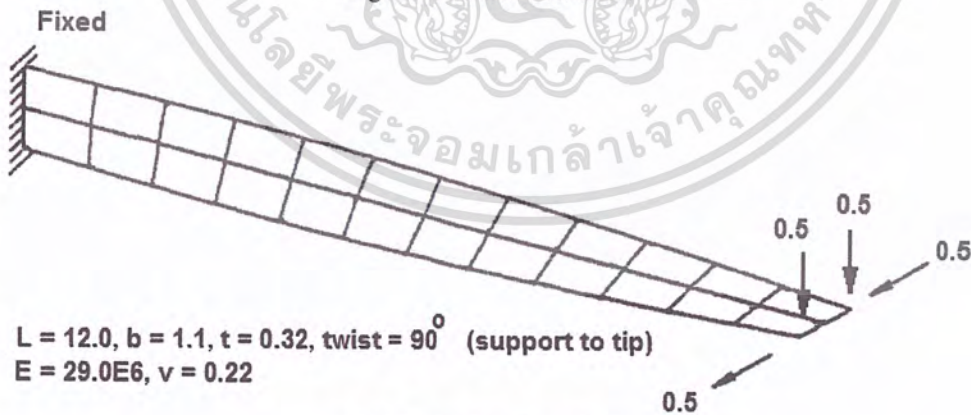


Fig 6. Twisted cantilever beam

Analyses of the straight beams under in-plane and out of plane loading using the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations are reasonably accurate for regular mesh, trapezoidal mesh, and parallelogram mesh (figure 7 and 8). They imply that all 3 proposed element formulations are relatively insensitive to mesh distortion with results from distorted meshes varying from the regular mesh values by a maximum of 4.9%. While results from straight cantilever beam under twist loading are slightly

poorer than those under in-plane and out of plane loading, the proposed elements perform well compared with the semiloof quadrilateral. Again, results from curved beam under in-plane and out-of-plane loading as shown in figure 9 are close to exact solutions. The final cantilever beam test is the twisted beam. The *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations perform well in predicting the end displacement (see figure 10), implying insensitivity to warping of the geometry.

Results of the cantilever beam test demonstrate that the proposed formulations *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* are neither sensitive to mesh distortion nor to warping of the geometry.

Tip loading	straight beam	curved beam	twisted beam
In-plane loading	0.1081	0.08735	0.005424
Out-of-plane loading	0.4321	0.5022	0.001754
twist couple	3.204×10^{-4}	-	-

Table 1. Exact displacement solutions for cantilever beams[40].

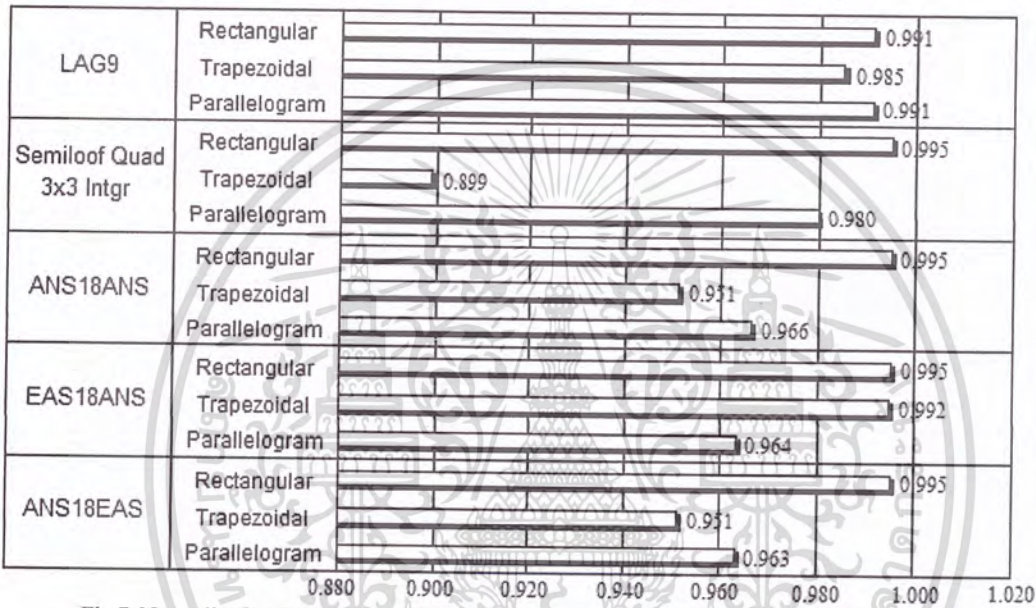


Fig 7. Normalized end displacement for straight cantilever beams subjected to in-plane loading.

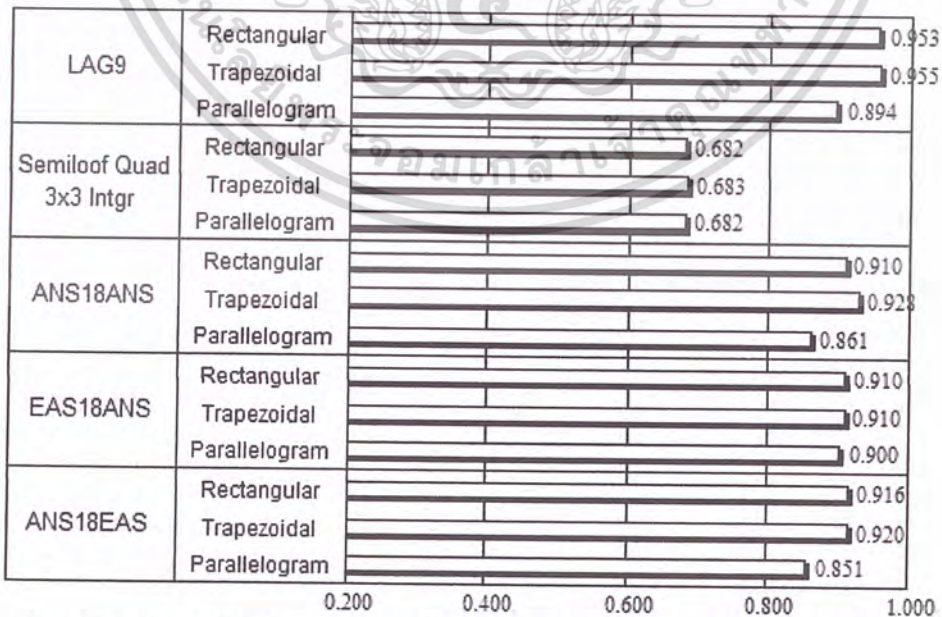


Fig 8. Normalized end displacement for straight cantilever beams subjected to twist loading.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา¹² และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

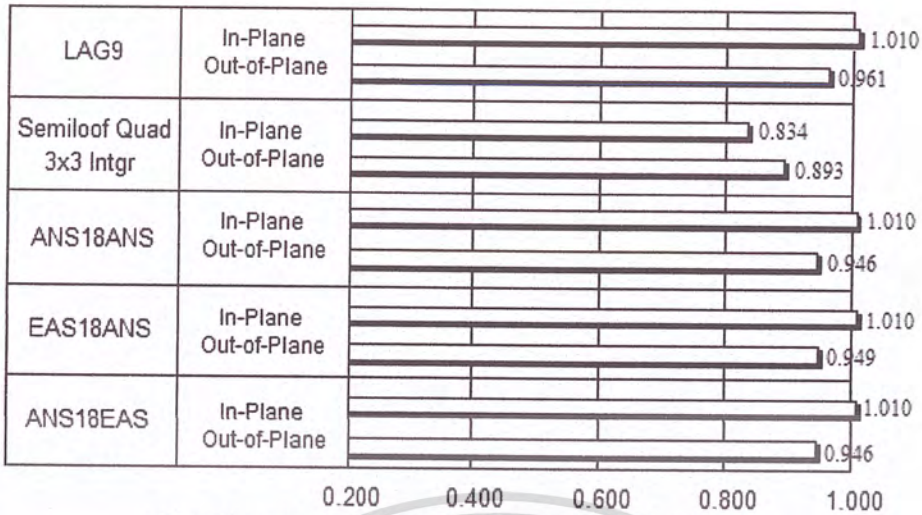


Fig 9. Normalized end displacement for curved cantilever beams.

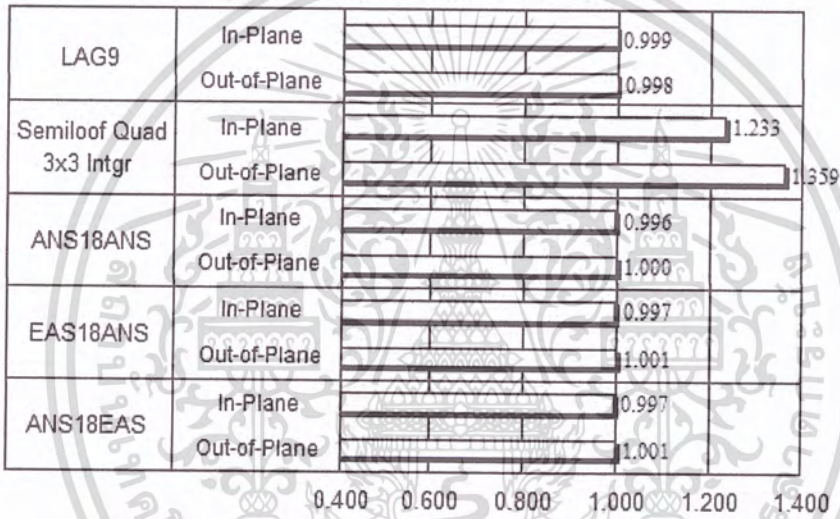


Fig 10. Normalized end displacement for twisted cantilever beams.

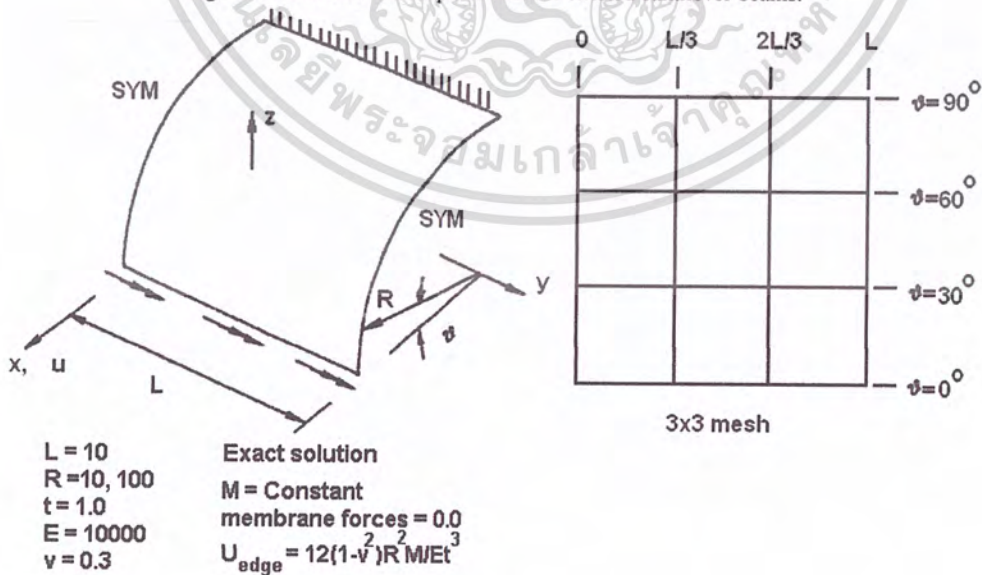


Fig 11. geometry, loading and material properties of cantilever quarter cylinder.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา 13 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Cantilever quarter cylinder.

The cantilever quarter cylinder test is intended to demonstrate an element's ability to represent inextensional bending modes. The cantilever cylinder is loaded by a constant bending moment at the free end as indicated in figure 11, along with the shell geometry, loading and material properties. This test effectively represents a bending patch test for curved shells since the exact solution contains pure bending. The results of *AS18ANS*, *ANS18ANS*, *ANS18AS*, semiloof [28] and LAG9 [28] elements for quarter cantilever are depicted in table 2. While it is apparent that the semiloof element performs poorly, all the proposed formulations show levels of accuracy equivalent to the nine-node Lagrangian element (LAG9) with maximum absolute errors in predicted bending moments and transverse tip-displacements less than 0.1%. Furthermore, the order of the ratio of the maximum membrane to bending stresses is close to zero (10^{-8} - 10^{-9}). This implies that the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations are free of membrane locking, exhibiting pure bending without any membrane stresses, and, therefore, pass the curved shell bending patch test.

R/t	Semiloof quad 3x3 Intgr	LAG9	ANS18ANS	ANS18AS	AS18ANS
Maximum absolute percentage error – bending moment					
10	26.4	0.0	0.0	0.0	0.0
100	76.1	0.0	0.1	0.0	0.0
Maximum absolute percentage error - transverse tip displacement					
10	23.4	0.1	0.1	0.0	0.0
100	65.7	0.0	0.1	0.0	0.0
order of (max membrane stress/max theoretical bending stress)					
10	1	1×10^{-8}	1×10^{-8}	1×10^{-8}	1×10^{-8}
100	1	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}

Table 2. Results for cantilever cylinder.

Torsion bending of thin Z-section

The encastre Z-section, is subjected to torsional loading at the free end as illustrated in figure 12. This test investigates the accuracy of predicting the behaviour of structures with facets and junctions. Normalized stresses with respect to exact solutions obtained from NAFEMS [41] at points A and B are given in table 3. A mesh comprising just 4 of any of the new elements along the length of the beam accurately captures the stress distribution (e.g. maximum error is 4.5%).

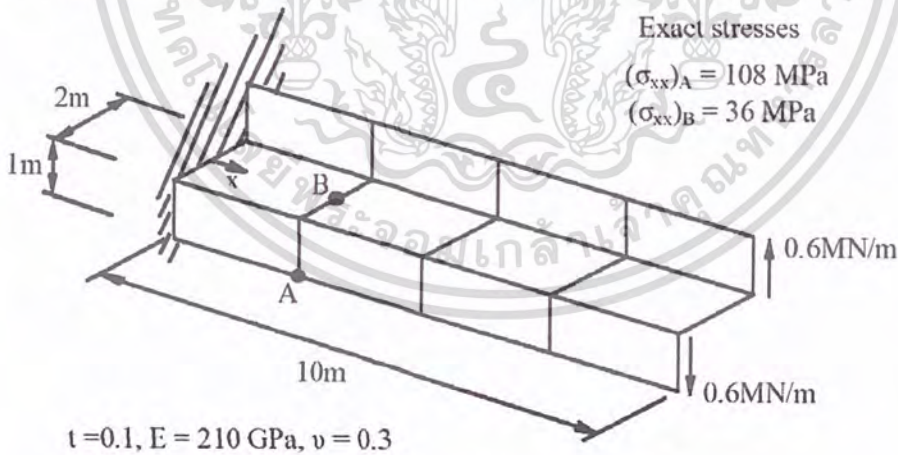


Fig 12. Geometry, loading and material properties of thin Z-section.

Number of Element along the length	Longitudinal stresses (Normalized values)					
	AS18ANS		ANS18ANS		ANS18AS	
	Point A	Point B	Point A	Point B	Point A	Point B
4	1.045	0.999	1.031	1.001	1.032	1.001
8	1.013	1.026	1.016	1.022	1.017	1.028

Table 3. Normalized stress at point A and B of thin Z-section.

Clamped square plate

The analysis of a clamped square plate subjected to a central point load with length/thickness ratios (L/t) in the range 100 to 10000 test the accuracy of predicting the behaviour of thin plates. These normally suffer from transverse shear and thickness locking when represented by solid shell elements. The geometry of the generic clamped square plate is shown in figure 13 and discretised by 2x2 and 4x4 meshes. Assuming symmetry, only 1x1 (viz 2x2) and 2x2 (viz 4x4) meshes are analysed. Normalized maximum deflections for *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations, and the basic hexahedral element without membrane, transverse shear and thickness locking alleviation, are compared with the *EAS7-ANS* element proposed by Andelfinger and Ramm [36] (see figure 14 and table 4). Andelfinger and Ramm proposed their 4-node degenerated shell element using the EAS method for membrane alleviation and the ANS method for transverse shear locking. Maximum deflections are normalized with respect to the exact solutions obtained from Timoshenko and Woinowsky [45].

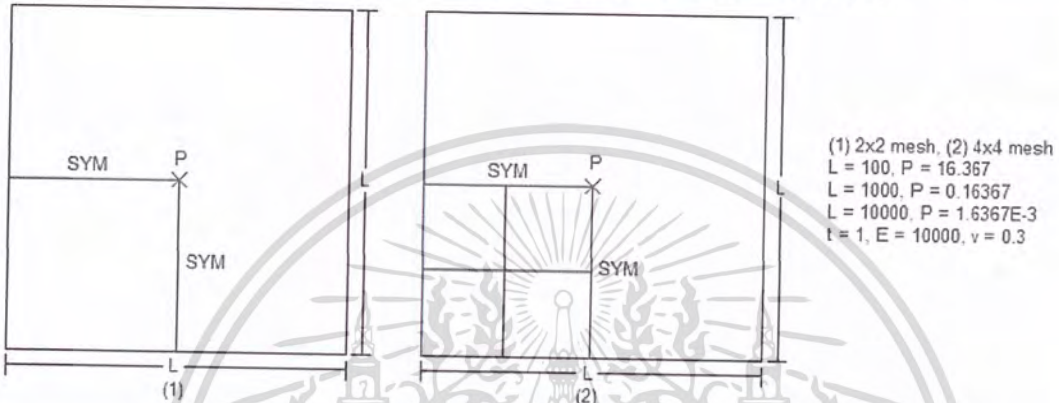


Fig 13. Clamped square plate.

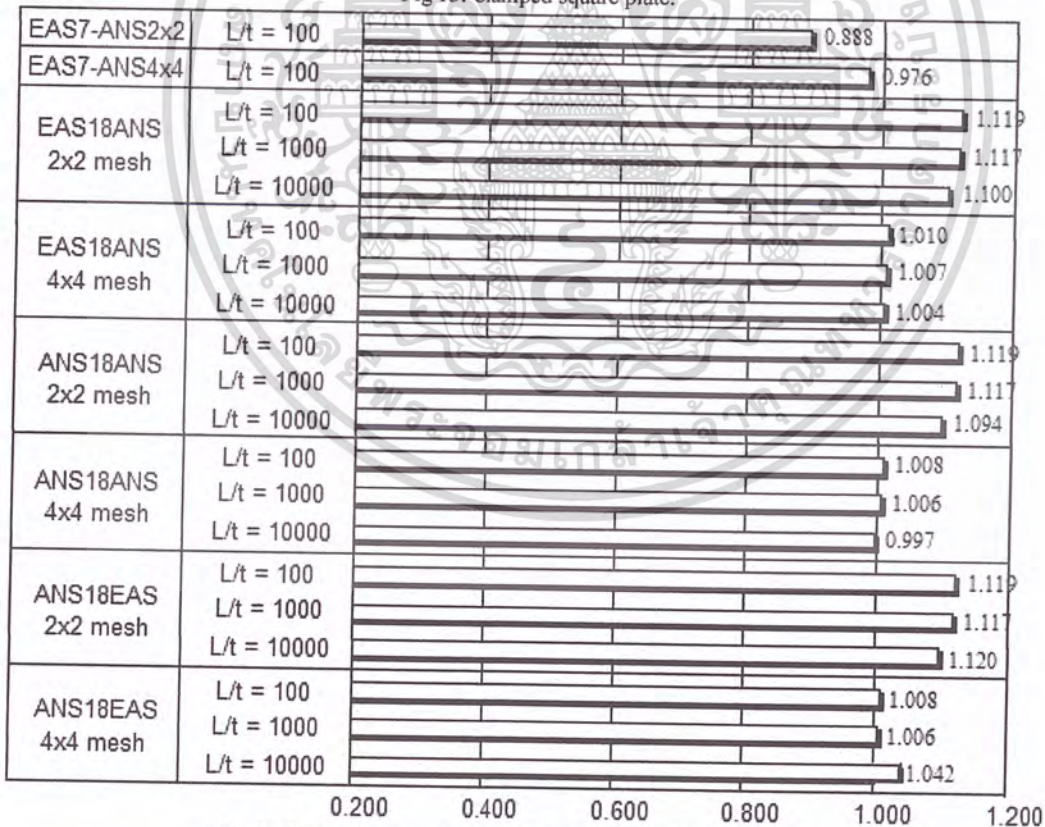


Fig 14. Normalized maximum deflection of clamped square plates.

The proposed *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations converge rapidly to the exact solution with mesh refinement (e.g. less than 1% error, with the exception of *ANS18AS* when

$L/t=10000$). They compete effectively with those degenerated shells published by Andelfinger and Ramm [36]. From this evidence, it can be argued that using the proposed solid elements to model plate structures is valid when compared with equivalent degenerated shell elements, given that the proposed formulation *AS18ANS* uses the same methods to negate membrane and transverse shear locking, as adopted in the *EAS7-ANS* element. Furthermore, when the length to thickness ratio (L/t) becomes large (the plate becomes thin), the accuracy of the results is upheld, even for L/t of 10000, which is far beyond the practical range. It is also worth noting that changing L and t without changing L/t ratio has little effect on accuracy. For example, adopting $L=1$ and $t=1E-4$ and a 4×4 mesh, normalized displacements for *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations are 0.9974, 0.9903 and 1.0060, respectively.

Collectively, the analyses of the clamped square plates indicate that all proposed formulations are free from transverse shear locking and thickness locking, with accuracy maintained as the plate becomes very thin. Interestingly, if the element is implemented without membrane locking alleviation, then approximately same results are obtained as for the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations, whilst without the inclusion of transverse shear and thickness locking alleviation, very poor performance is exhibited (e.g. see table 4). Therefore, for this class of problem, membrane locking is not significant, with the converse true of transverse shear and thickness locking.

Element type	L/t	Normalised Value	
		2x2 mesh	4x4 mesh
18-node hexahedral without membrane locking alleviation	100	1.104	1.006
	1000	1.102	1.003
	10000	1.095	1.002
18-node hexahedral without membrane locking alleviation	100	1.026×10^{-2}	0.587
	1000	1.033×10^{-4}	0.576
	10000	1.034×10^{-6}	0.580

Table 4. Normalized maximum deflection of clamped square plate for element without locking alleviation.

Hemispherical shell with 18° aperture

The analysis of the hemispherical 'open' shell, 'pinched cylinder' and 'Scordelis-Lo roof' test problems couple membrane and bending modes. They test if the element formulations exhibit membrane locking, on the basis that the membrane strain energy should not dominate the total energy for thin curved shells. To investigate if the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations are free from membrane locking, these formulations are compared with the exact solution. They are also compared with predictions using the same discretisation of semiloof and nine-node Lagrangian (LAG9) elements [28]. The basic element formulation, excluding membrane and transverse shear and thickness locking alleviation, is used to demonstrate the effectiveness of the membrane locking alleviation methodology, and that the inclusion of transverse shear and thickness locking alleviations continues to enhance the proposed element formulations.

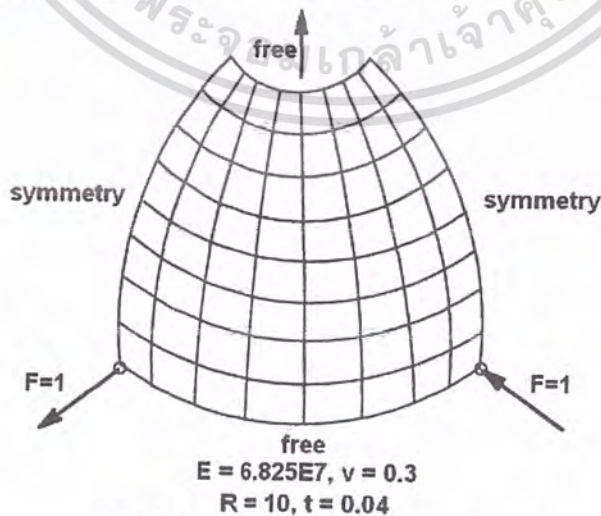


Fig 15. Hemispherical shell with 18° cut.

The hemispherical shell with an 18° aperture is represented by a quadrant (assuming symmetry) and subjected to two equal and opposite concentrated loads as shown in figure 15. The structure is discretised by 2×2 , 4×4 , 6×6 , and 8×8 meshes. This problem investigates the ability of an element to represent inextensional bending modes, given that membrane strains within the shell are small. The exact (non-dimensional) radial displacement at the points of load application is 0.094 (Macneal and Harder [26]).

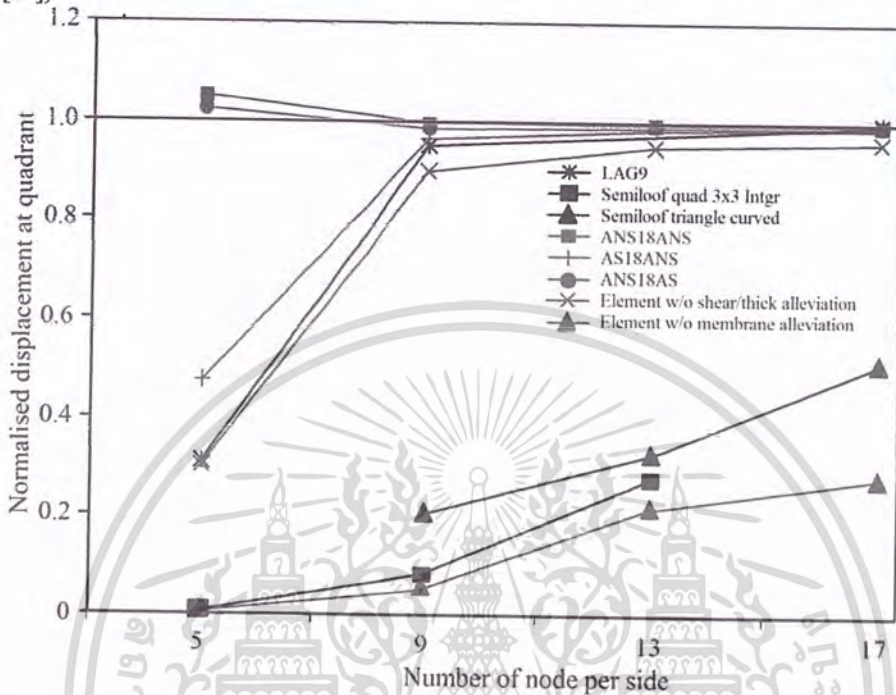


Fig 16. Normalized displacement at quadrant of hemispherical shell with 18° cut.

Normalized results, shown in figure 16 for comparison with other available solutions [28], indicate that the proposed formulations *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* perform well in comparison with the nine-node Lagrangian element (LAG9), even for a very coarse mesh (e.g. 4×4), and are demonstrably free of membrane locking. Solutions from the proposed formulations converge with mesh refinement, such that an 8×8 element discretisation is generally sufficient. Comparable results of the same hexahedral element without membrane locking alleviation are very poor, even for a 6×6 mesh (normalized displacement is 0.218). However, the accuracies of the predicted displacements using the equivalent element formulation without transverse shear and thickness locking alleviations are only slightly reduced when compared with the performances of *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations.

Pinched cylinder with rigid diaphragms

A cylinder with rigid diaphragms is subjected to a central point load (see figure 17). This problem is used to check the ability of an element to model both inextensional bending modes and complex membrane states. The displacement at the point of load application is normalised with respect to exact solution from Belytschko and Liu [40] for comparison. As before, solutions obtained from the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations are combined with those from the semiloof and nine-node Lagrangian (LAG9) elements [28] (figure 18). Solutions from modified hexahedral element formulations excluding membrane, transverse shear, and thickness locking alleviations are also included. To observe the accuracy of stress of proposed formulation, normalized circumferential stresses along the ridge of the cylinder predicted by the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations using an 8×8 element discretisation are also compared with exact solution [28] and the nine-node Lagrangian element (LAG9) [28] in figure 19.

The proposed formulations and the nine-node Lagrangian element converge to the exact solution at an 8×8 mesh, with quadrilateral semiloof element expected to converge at a much finer discretisation. The results for the equivalent elements without membrane locking alleviation and transverse shear and thickness locking alleviations are significantly worse than obtained from the *AS18ANS*, *ANS18ANS* and

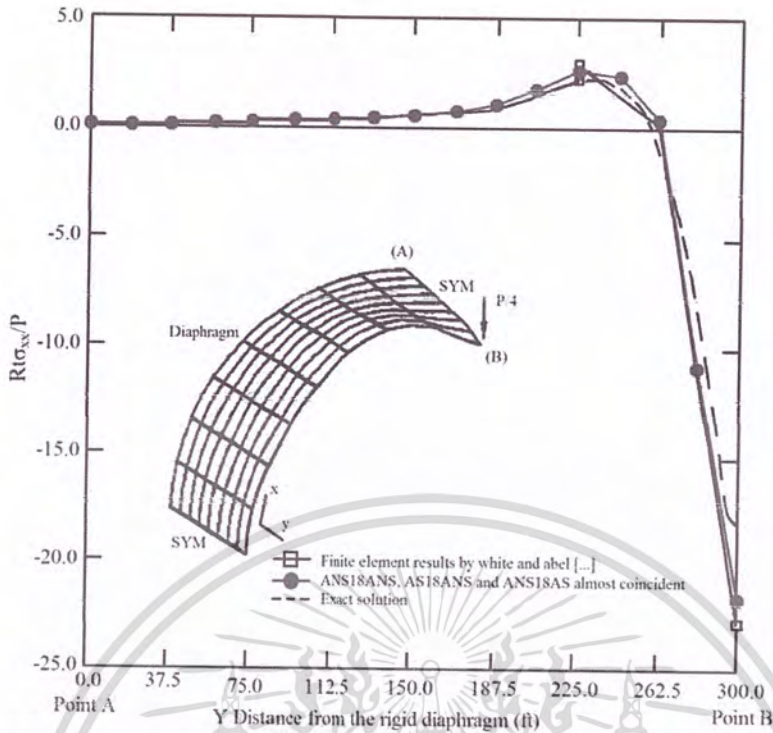


Fig 19. Normalized circumferential stress along the ridge of pinched cylinder with rigid diaphragm.

Scordelis-Lo roof

The Scordelis-Lo roof subjected to self-weight only as shown in figure 20. This problem enables the ability of elements to model complex states of membrane strain to be investigated, but that it is insensitive to inextensional bending modes Belytschko and Liu [40]. The normalized displacements at the mid-point of the free edge of the roof as predicted by the *ASI8ANS*, *ANSI8ANS* and *ANSI8AS* element formulations, are presented in figure 21, along with the semiloof and nine-node Lagrangian (*LAG9*) element results [28]. The effectiveness of the membrane locking alleviation, and the contribution of transverse shear and thickness locking, are also demonstrated (figure 21). Longitudinal forces at the midspan obtained from the *ASI8ANS*, *ANSI8ANS* and *ANSI8AS* formulations, with a 2×2 discretisation are plotted and compared with exact the solution (Scordelis and Lo [42]) and predictions from the nine-node Lagrangian *LAG9* [28] (figure 22).

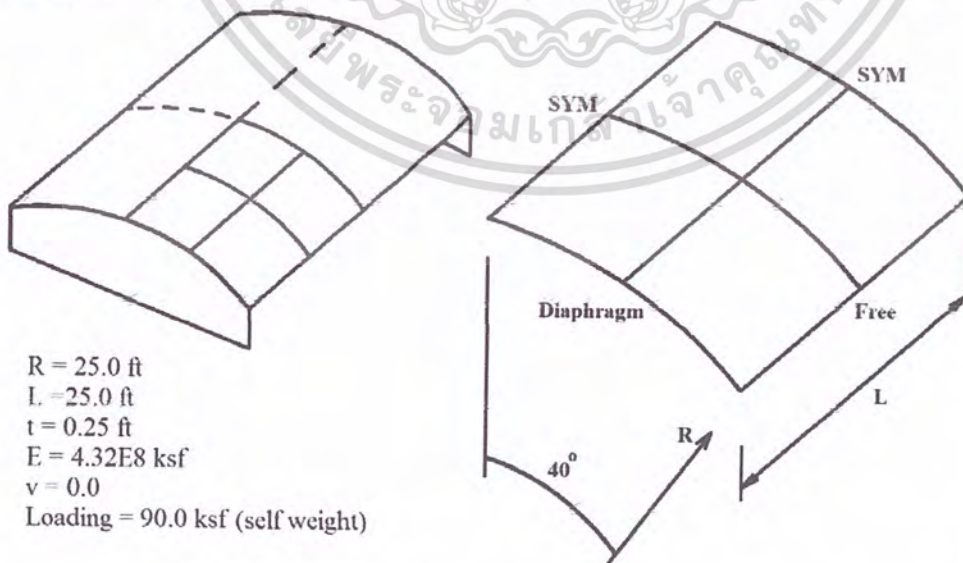


Fig 20. Scordelis-Lo roof.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา 19 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

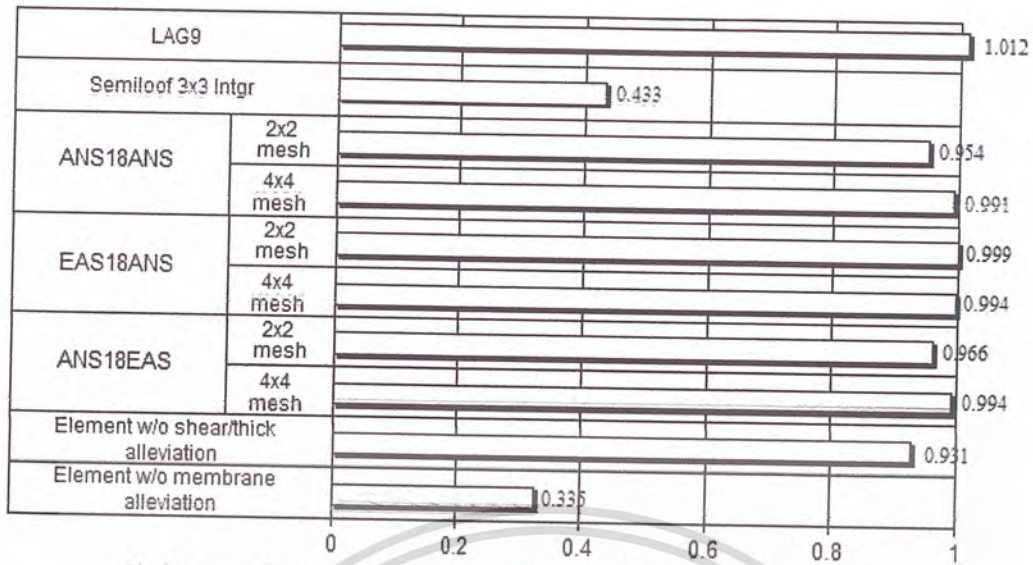


Fig 21. Normalized displacement of Scordelis-Lo roof at the middle of the free edge.

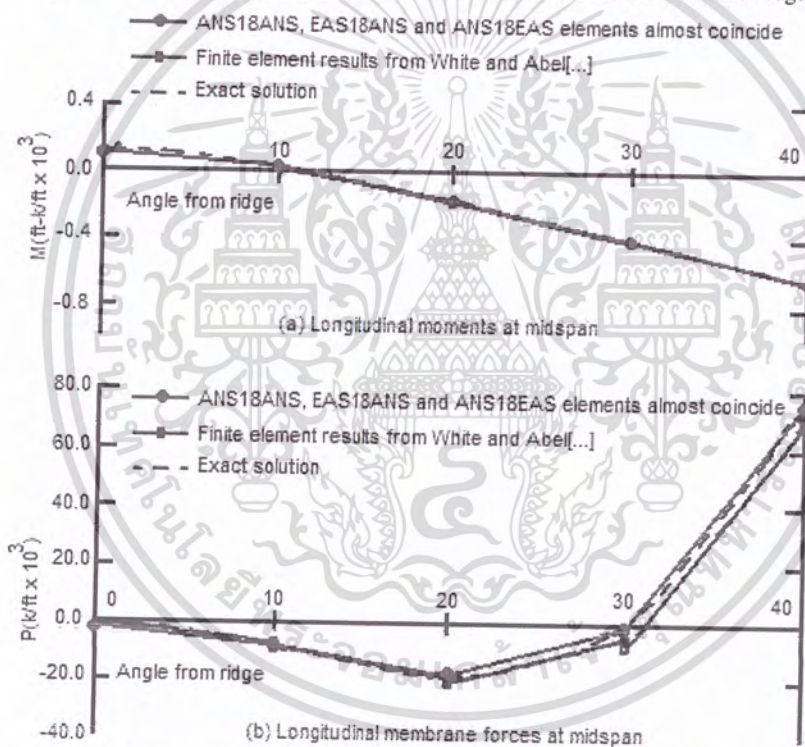


Fig 22. Longitudinal shell force of Scordelis-Lo roof at midspan.

Normalised displacements are shown to converge towards the exact solution using a coarse (2x2) mesh of *AS18ANS* elements. Similar results are obtained for the nine-node Lagrangian element (LAG9) [28], whilst mesh refinement is required to achieve similar levels of accuracy using elements based on the *ANS18ANS* and *ANS18AS* formulations. Longitudinal forces from all the proposed elements converge to the exact solution assuming a coarse (2x2) mesh, with a 4x4 element discretisation required to similar results using the nine-node Lagrangian (LAG9) element.

Solutions to the hemispherical shell, pinched cylinder and Scordelis-Lo roof demonstrate that the proposed formulations *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* perform well, even with coarse meshes. Ignoring transverse shear and thickness locking alleviation leads to some loss of accuracy for reasonably thin shells. Membrane locking is clearly significant in the unmodified element, and effectively alleviated using either AS or ANS methodologies.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อที่ 20 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

GEOMETRICALLY NON-LINEAR NUMERICAL EXAMPLES

The geometrically linear numerical test examples indicate that the proposed trial formulations *AS18ANS*, *ANS18ANS* and *ANS18AS* perform well and to similar levels of accuracy. However, the necessary introduction of additional d.o.f. in the *AS18ANS* and *ANS18AS* formulations incurs a substantial computational penalty. Therefore, the geometrically non-linear numerical are solved using only the more efficient element derived from the *ANS18ANS* formulation.

Clamped Square Plate subjected to Uniform Pressure

A clamped square plate of side length 1000 and with a thickness of 2 units, is subjected to uniform pressure. Young's modulus and Poisson's ratio are 20000 units and 0.3, respectively. Assuming symmetry, a quarter of the plate is modelled using a 2×2 discretisation.

The relationship between the uniform pressure loaded and the ratio of the maximum deflection of the plate to the plate thickness is presented in figure 23. The finite element solution (*ANS18ANS*) is validated by Way's solution [48] obtained from a converged Rayleigh-Ritz representation.

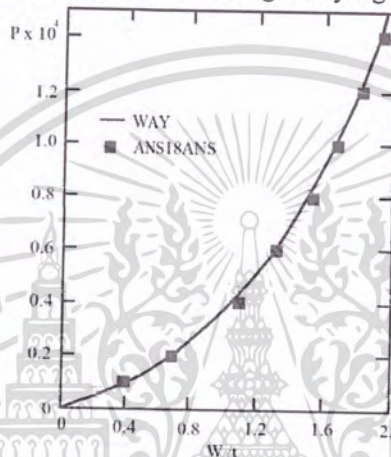


Fig 23. Ratio of maximum deflection to plate thickness for uniform pressure loading on clamped square plate.

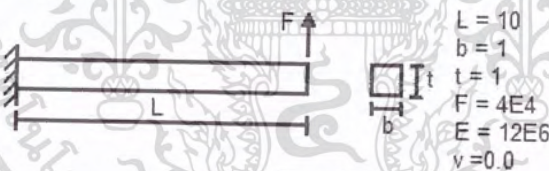


Fig 24. Cantilever beam.

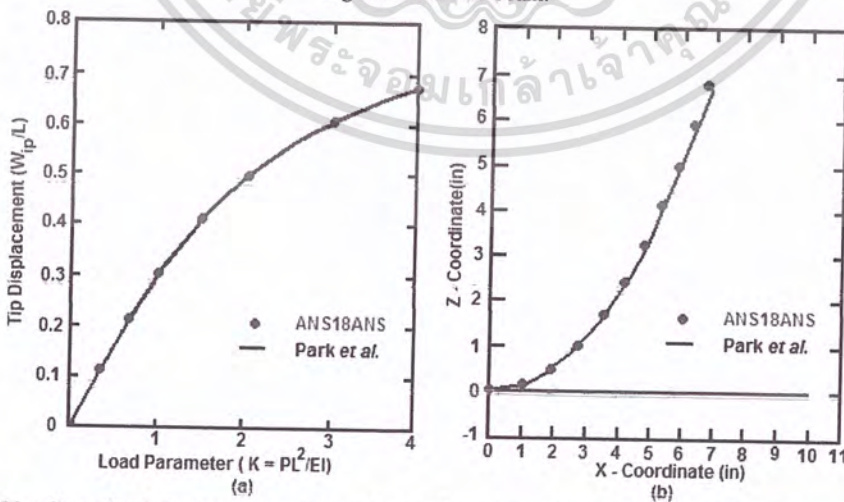


Fig 25. (a) Non-linear load-displacement response for cantilever beam of Fig 27. (b) Cantilever geometry at a load of 18.2 kN (40000lb).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อที่ 21 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Cantilever Beam subjected to a Vertical Tip Load

A cantilever beam subjected to vertical tip load is one of the most widely used numerical examples in geometrically nonlinear analyses. The geometry, loading and material properties are given in figure 24. The tip loading applied to cantilever beam is 40000 lb. The beam is discretised by 5 elements along the length of the beam. The total load of 40000 lb has been applied in 7 increments (e.g. 3 equal increments from 0 to 10000 lb, 2 in the range 10000-20000 lb and 2 equal from 20000-40000 lb to enable a clear representation of the displacement response).

The relationship between the tip displacement and load factor, and the deformed shape of cantilever beam when subjected to a tip load of up to 40000 lb load are compared with those published by Park *et al.* [3] (obtained using an assumed strain element and load increments ("NSTEP") of 1, 4 and 10) and the exact solution of Mattiasson [3] in figure 25(a) and 25(b), respectively. It is evident that the results of the analysis using the proposed formulation are almost identical to these independently obtained solutions.

Split Ring Plate Loaded at a Free Edge

This benchmark was first proposed by Basar and Ding [49] and investigates the performance of finite rotation formulations for shell structures. The ring plate is clamped at one edge and loaded at the other, where these edges are defined by cutting (or splitting) a circular (doughnut) plate (e.g. along the line AB in figure 25(a)). The geometry, loading and material properties of the plate are given in figure 26(a), with the deformed shape of ring plate subjected to a load factor of 80 illustrated in figure 26(b).

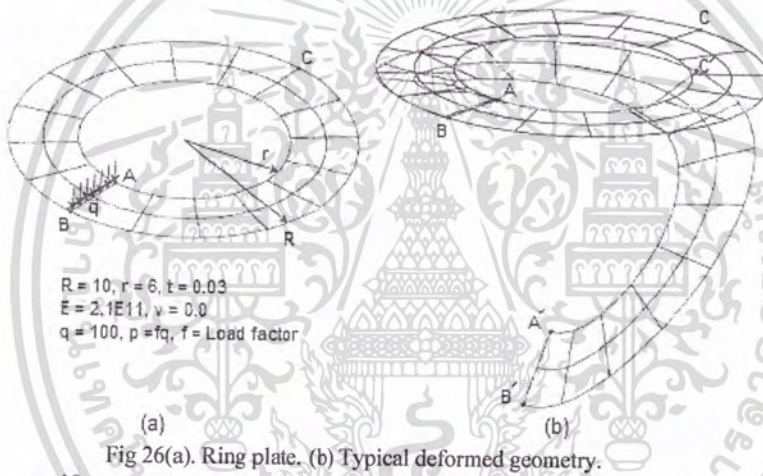


Fig 26(a). Ring plate. (b) Typical deformed geometry.

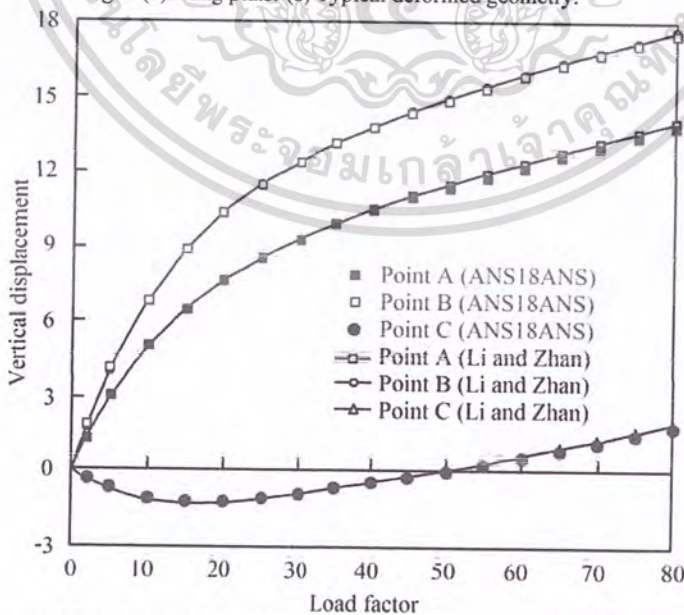


Fig 27. Non-linear load-displacement responses at points A, B, and C of ring plate (Fig 26).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา 22 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The relationship between the incremented load (viz. load factor) and deflections at points A, B and C (defined in figure 26(a)) are plotted and compared with those published by Li and Zhan [31] in figure 27. From the correlation of the two sets of solutions, it is inferred that the proposed hexahedral formulation is capable of predicting the deformation of a shell structure that includes substantial finite rotations.

Plate Subjected to a Uniform Pressure Load

In this test, a square plate (as defined in figure 28) is simply supported on two opposite sides, and loaded by a total uniform pressure of $3.7 \times 10^{-4} \text{ N/mm}^2$. The load is applied in 20 equal increments and the plate discretised by a 5x5 mesh.

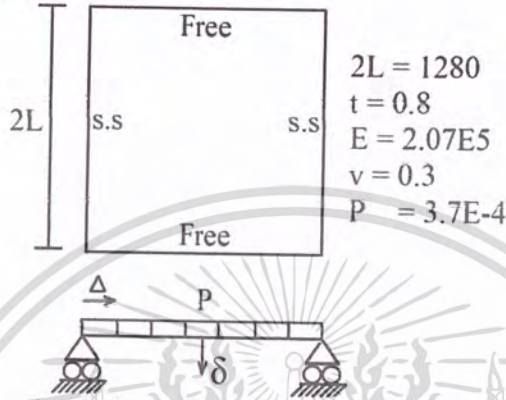


Fig 28. Plate subjected to uniform pressure load.

The predicted load-deflection behaviour of the plate compares extremely well with the theoretical and numerical results published by Saleeb *et al.* [16] (see figure 29). What is less clear from figure 29, is that the mid-span vertical deflection due to a uniform pressure of $3.7 \times 10^{-4} \text{ N/mm}^2$ is approximately 560 times the plate thickness. This type of deformation is generally encountered in the binder-wrap phase of a sheet metal forming operation in the automotive industry [16], and clearly demonstrates the geometrically non-linear capabilities of the proposed element formulation.

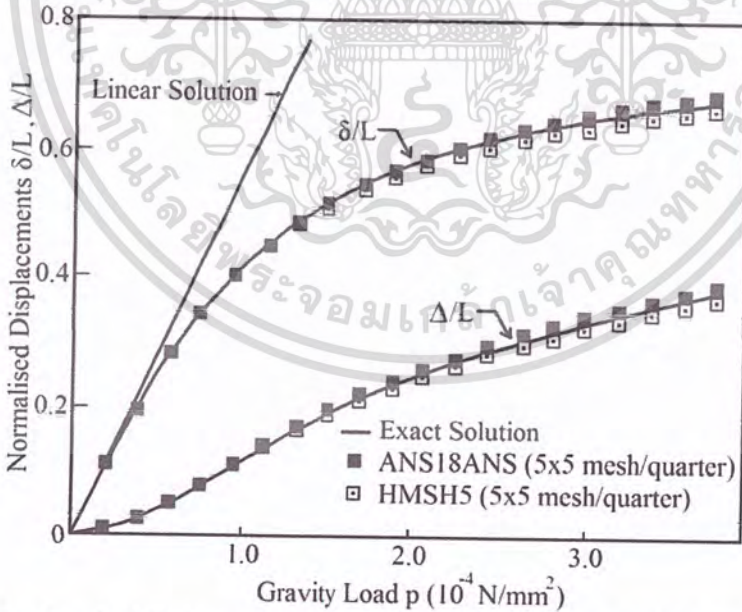


Fig 29. Non-linear load-displacement (normalized) responses for uniformly loaded plate (Fig 28).

Pinched cylinder

A pinched cylinder with a radius of 100, length of 200, and formed from an isotropic material with a Young's modulus of 3×10^4 and a Poisson's ratio of 0.3, is subjected to a central point load of 730.4

units. The load is applied in four equal load increments. Exploiting symmetry, only one-eighth of cylinder is modelled using an 8x8 mesh of elements.

The predicted deflection at the point of load application is compared with those of Saleeb *et al.* [16] (denoted HMSH5) in figure 30. A comparison is also made of the radial and axial displacements at points C and D (figure 19), respectively, in table 5. Both comparisons are mutually supportive.

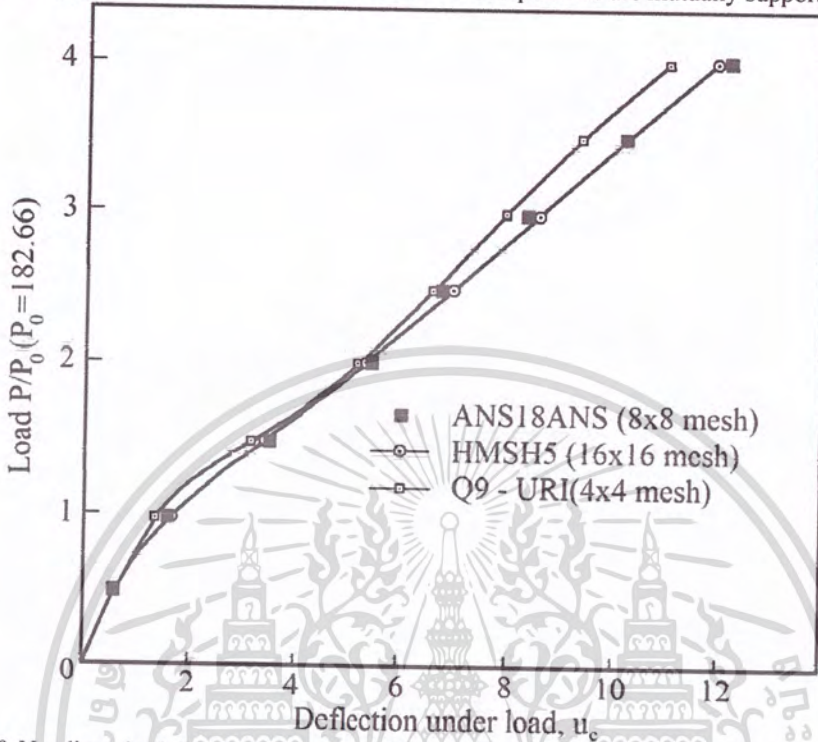


Fig 30. Non-linear load-displacement response for pinched cylinder at the point of load application.

Load P/P_0 ($P_0 = 182.66$)	ANS18ANS (8x8 mesh)		HMSH5(16x16mesh)	
	U_c	W_d	U_c	W_d
2	5.396	0.154	5.302	0.156
4	12.192	0.680	11.975	0.665

Table 5. Displacement of pinched cylinder subjected to central load.

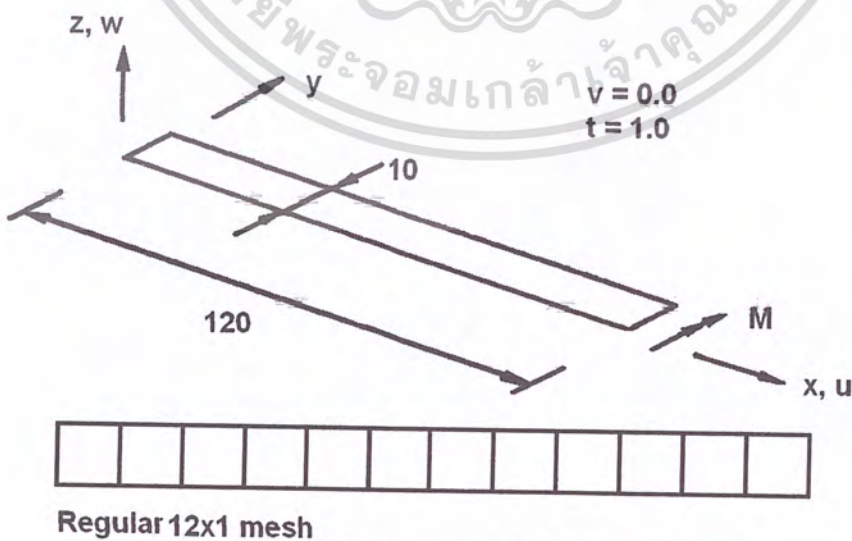


Fig 31. Large displacement cantilever subjected to pure bending.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อที่ 24 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Cantilever beam subjected to bending moment at the free end

In the standard form of this benchmark, a cantilever beam in the form of a long, narrow plate (see figure 31), is subjected to a bending moment at the free end. The beam is discretised by a uniform 12×1 mesh (figure 31). The bending moment is applied incrementally, with a maximum value of $2\pi EI/L$. 20 equal load steps have been used. As the hexahedral element does not have rotational d.o.f., the moment is represented by combinations of globally applied point loads that are equivalent to the benchmark moment (but strictly, only at the beginning of the load increment). The deformed shape of cantilever beam is shown in figure 32. The displacement u and w , and the rotation, θ , at the free end are depicted in figure 33.

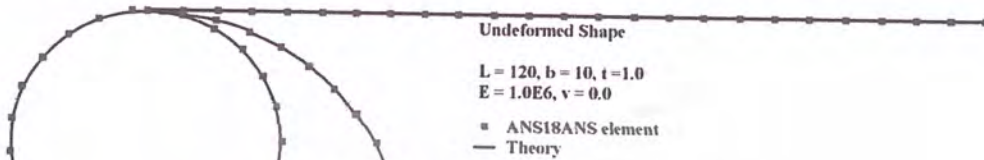


Fig 32. Bending of the elastic cantilever beam into a full circle (12×1 regular mesh)

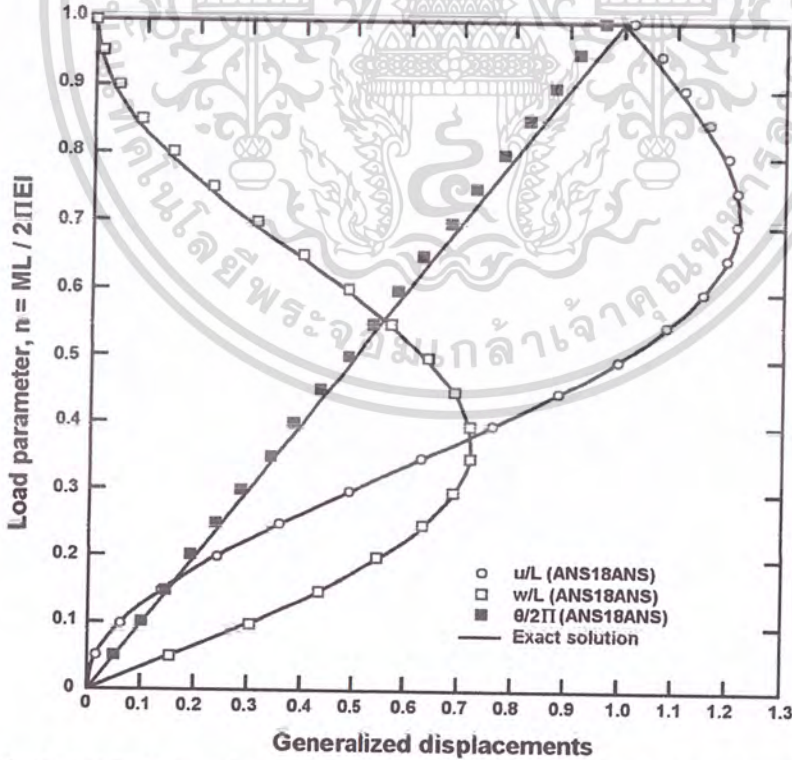


Fig 33. Relationship between load and displacements of cantilever subjected to bending moment

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อที่ 25 และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Comparisons between the finite element prediction and the exact solution are shown to be generally good, with a maximum error of 3.6%. The solution is seen to drift with increasing load parameter as the error in representing the moment by a set of equivalent point loads is accumulated.

6 Conclusions

Three variations of a basic 18-node hexahedral shell finite element have been formulated by altering the methodologies by which locking may be alleviated. All three element formulations have been extensively assessed against geometrically linear benchmarks and perform well. These benchmarks also indicate that it is computationally expedient and numerically appropriate to use the assumed natural strains (ANS) approach to alleviate membrane, transverse shear and thickness locking. Results of additional geometrically non-linear benchmarks have demonstrated the validity of the proposed ANS formulation.

References

1. Sze KY., Yao LQ. A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling part I-solid-shell element formulation. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000; 48: 545-564
2. Huang HC., Hinton E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1986; 22: 73-92
3. Park HC., Cho C., Lee SW. An efficient assumed strain element model with six DOF per node for geometrically non-linear shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1995; 38: 4101-4122
4. Ausserer MF., Lee SW. An eighteen-node solid element for thin shell analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1988; 26: 1345-1364
5. Bischoff M., Ramm E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1997; 40: 4427-4449
6. Choi C., Paik JG. An efficient four node degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis. *Thin-Wall Structures* 1996; 24: 261-283
7. Betsch P., Gruttmann F., Stein E. A 4-node finite element for the implementation of general 3D-elasticity at finite strains. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng* 1996; 130: 57-79
8. Wanji C., Shijie Z. Refined hybrid degenerated shell element for geometrically non-linear analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1998; 41: 1195-1213
9. Li M., Zhan F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part V. The shell element with drilling degree of freedom based on Biot strain. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng* 2000; 189: 743-759
10. Sze KY., Sim YS., Soh AK. A hybrid stress quadrilateral shell element with full rotational D.O.F.S. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1997; 40: 1785-1800
11. Dvorkin EN., Pantuso D., Repetto EA. A formulation of the MITC4 shell element for finite strain elasto-plastic analysis. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng* 1995; 125: 17-40
12. Buchter N., Ramm E., Roehl D. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1994; 37: 2551-2568
13. Zienkiewicz OC., Taylor RL, Too JM. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 1971; 3: 275-290
14. Zhong ZH. A bilinear shell element with the cross-reduced integration technique. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1993; 36: 611-625
15. Pugh ED., Hinton E., Zienkiewicz OC. A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 1978; 12: 1059-1079
16. Saleeb AF., Chang TY., Graf W., Yingyeunong S. A hybrid/mixed model for non-linear shell analysis and its applications to large-rotation problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1990; 29: 407-446
17. Sze KY., Ghali A. Hybrid hexahedral element for solids, plates, shells and beams by selective scaling. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1993; 36: 1519-1540
18. Sze KY., Yi S., Tay MH. An explicit hybrid stabilized eighteen-node solid element for thin-shell analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 1997; 40: 1839-1856
19. Hauptmann R., Schweizerhof K., Doll S. Extension of the 'solid-shell' concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000; 49: 1121-1141
20. Roehl D., Ramm E. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Solids Structures* 1996; 33: 3215-3237
21. Hauptmann R., Schweizerhof K. A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1998; 42: 49-69
22. Harnau M., Schweizerhof K. About linear and quadratic "solid-shell" elements at large deformations. *Computers and Structures* 2002; 80: 805-817
23. Hong WI., Kim JH., Kim YH., Lee SW. An assumed strain triangular curved solid shell element formulation for analysis of plates and shells undergoing finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; 52: 747-761

24. Bucalem ML., Nobrega SHS. A mixed formulation for general triangular isoparametric shell elements based on the degenerated solid approach. *Computers and Structures* 2000; **78**: 35-44
25. Hong CH., Kim YH. A partial assumed strain formulation for triangular solid shell element. *Finite Elements in Analysis and Design* 2002; **38**: 375-390
26. Macneal RH., Harder RL.. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in Analysis and Design* 1985; **1**: 3-20
27. Holt M., Krishnamurthy K. A 14-point reduced integration scheme for solid elements. *Computers and Structures* 1995; **54**: 725-730
28. White DW., Abel JF. Testing of shell finite element accuracy and robustness. *Finite elements in Analysis and Design* 1989; **6**: 129-151
29. Kemp BL., Cho C., Lee SW. A four-node solid shell element formulation with assumed strain. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1998; **43**: 909-924
30. Yeom CH., Lee SW. On the strain assumption in a finite element model for plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1991 **31**: 287-305
31. Li M., Zhan F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part IV. The FE formulation of Mindlin plate and shell based on Green-Lagrangian strain. *Comput. Methods Appl Mech Engng.* 2000; **182**: 187-203
32. Rhiu JJ., Lee SW. A nine node finite element for analysis of geometrically non-linear shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1988; **26**: 1945-1962
33. Kim JH., Lee SW. A finite element formulation with stabilization matrix for geometrically non-linear shells. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1992; **33**: 1703-1720
34. Bucalem ML., Bathe KJ. Higher-order MITC general shell elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1993; **36**: 3729-3754
35. Hong WI., Kim JH., Kim YH., Lee SW. An assumed strain triangular curved solid shell element formulation for analysis of plates and shells undergoing finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; **52**: 747-761
36. Andelfinger U., Ramm E. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1993; **36**: 1311-1337
37. Simo JC., Rifai MS. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1990; **29**: 1595-1638
38. Dvorkin EN., Bathe KJ. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engng. Comput.* 1984; **1**: 77-88
39. Pian THH., Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1984; **20**: 1685-1695
40. Belytschko T., Liu WK. Test problems and anomalies in shell finite elements. *Reliability of Meths Engng. Anal.*, Proc. Int. Conf. University College, Swansea, U.K. 1986: 393-406
41. NAFEMS. Proposed NAFEMS linear benchmarks. National agency for finite element methods and standards, U.K. 1986
42. Scordelis AC., Lo KS. Computer analysis of cylindrical shells. *ACI J.* 1964; **61**: 539-561
43. Verheghe B., Powell GH. Control of zero-energy modes in 9-node plane element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1986; **23**: 863-869
44. zienkiewicz OC., Taylor RL. *The finite element method. Vol 1*, 4th edn, McGraw-Hill, London, 1989.
45. Crisfield MA. *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Vol1*, John Wiley&Sons, England, 1997.
46. Beer G., Watson JO. *Introduction to finite and boundary element methods for engineers*, John Wiley&Sons, England, 1994.
47. Timoshenko SP., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells* 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1970.
48. Way S. Uniformly loaded, clamped rectangular plate with large deflection. *Proc. 5th Int Cong. on Applied Mechanics* 1938, Cambridge, MA.
49. Basar Y., Ding Y. Finite rotation elements for the non-linear analysis of thin shell structures. *Int. J. Solids Struct.* 1990; **26**: 83-87

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้