

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาการแพร่เชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์มาลาเรียโดยแบบจำลองทาง
คณิตศาสตร์

A STUDY OF THE TRANSMISSION OF PLASMODIUM VIVAX
MALARIA BY MATHEMATICAL MODEL



T117081



ปริยาภรณ์ มุมทอง

PREEYAPORN MUMTONG

ฉบับ
2/4747
2553

เลขทะเบียน... 117081
วันเดือนปี... 23 ส.ค. 2554

b. 12332732
i.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2553

KMITL-2010-SC-M-001-038

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**A STUDY OF THE TRANSMISSION OF PLASMODIUM VIVAX
MALARIA BY MATHEMATICAL MODEL**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATIC
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2010

KMITL-2010-SC-M-001-038

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2010

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การศึกษาการแพร่เชื้อพลาสโมเดียม ไวเวกซ์มาลาเรียโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
นักศึกษา นางสาวปรียาภรณ์ มุมทอง
รหัสประจำตัว 51067401
ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ. 2553
อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

บทคัดย่อ

โรคมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิต สกุลพลาสโมเดียม (*Plasmodium*) 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม (*falciparum*), ไวเวกซ์ (*vivax*), มาลาเรีย (*malariae*) และ โอวัลเล่ (*ovale*) โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) กับพลาสโมเดียมไวเวกซ์ (*Plasmodium vivax*) โรคนี้พบได้บ่อยในแอฟริกา อเมริกาใต้และเอเชีย ในประเทศไทย พบเชื้อมาลาเรียอยู่บริเวณป่าเขาชายแดนของประเทศ โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย-พม่า, ไทย-กัมพูชา และไทย-มาเลเซีย งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับการแพร่เชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ และอิทธิพลการฟักตัวของเชื้อพลาสโมเดียมได้นำมาพิจารณาในงานวิจัยฉบับนี้ด้วย โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรและยุง การประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) นำมาใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลองนำมาแสดง เพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา ผลของการศึกษานี้ สามารถเป็นแนวทางในการลดการระบาดของโรคนี้ได้

Thesis Title	A Study of the Transmission of Plasmodium Vivax Malaria by Mathematical model.
Student	Miss Preeyaporm Mumtong
Student ID	51067401
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematic
Year	2010
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Puntani Pongsumpun

ABSTRACT

Malaria disease is caused by the multiplication of protozoa parasite of the genus *Plasmodium*. Malaria in human is due to 4 types ; *Plasmodium falciparum* , *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae*, and *Plasmodium ovale*. Most Malaria cases in Thailand are due to *plasmodium falciparum* and *Plasmodium vivax*. This disease occurs in Africa, South America, and Asia. In Thailand, Malaria is found along the border with Burma, Combodia, and Malaysia. In this study, the transmission of *Plasmodium vivax* malaria and the effects of incubation of *Plasmodium vivax* is considered by using mathematical model. The population is separated into human and mosquito populations. The application of the standard dynamical modeling method is used for analyzing the behaviors of solutions. The conditions of the parameters for the disease free and endemic states are obtained. Numerical solutions are shown to support theoretical predictions. The results of this study point to the way for decreasing the outbreak of the disease.

กิตติกรรมประกาศ

ในวิทยานิพนธ์เรื่องการศึกษาการแพร่เชื้อพลาสมาเดียมไวแวกซ์มาลาเรียโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ

กราบขอบพระคุณ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ ดร.พรรณทิพย์ ภัทรอินทากร ดร.สุชุมล สาริกะวณิช ที่กรุณาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และให้ความรู้ความเข้าใจรวมถึงคำแนะนำ

กราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกคน ที่ให้คำแนะนำต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมา

ขอบคุณบัณฑิตศึกษา และบัณฑิตวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ที่ให้ความช่วยเหลือ ในเรื่องต่างๆ

ขอบพระคุณ ผศ.ดร. ชื่นชม พงษ์สวัสดิ์ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรีที่ให้คำแนะนำดี ๆ แก่ข้าพเจ้า

ขอขอบคุณ นางสาว รุจิรา คงนุ้ย ที่ช่วยเหลือและให้คำแนะนำดี ๆ

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้า ที่เป็นกำลังใจให้ และคอยสนับสนุนในทุกๆ ด้าน ที่มีส่วนช่วยให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จเรียบร้อยด้วยดีทุกประการ

นางสาวปรียาภรณ์ มุมทอง

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย.....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 คำเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง.....	3
2.2 ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ.....	3
2.3 จาโคเบียนเมทริกซ์.....	3
2.4 จุดสมดุล.....	3
2.5 การหาผลเฉลยจุดสมดุลของระบบ.....	6
2.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.....	7
2.7 Hopf Bifurcation.....	10
2.8 โรคมลาเลียเรีย.....	11
2.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	19
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	21
3.1 วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ.....	21
3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับ โรคมลาเลียเรียตามชนิด เชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์.....	22

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลงานวิจัยเบื้องต้น.....	27
บทที่ 5 สรุปผลการดำเนินงาน อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	112
5.1 สรุปผลงานวิจัย.....	112
5.2 ข้อจำกัดของโปรแกรม.....	113
5.3 แนวทางในการพัฒนา.....	113
เอกสารอ้างอิง.....	114
ภาคผนวก.....	116
ประวัติผู้เขียน.....	130



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 ตารางสัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและยุง.....	22
4.1 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค.....	75
4.2 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรัง.....	76



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 Ronald Ross.....	12
2.2 วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย.....	17
2.3 การระบาดของโรคมาลาเรีย ปี 2000-2002.....	18
2.4 พื้นที่สิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียสูงในประเทศไทยปี 2550.....	19
3.1 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปีพ.ศ. 2508-2550.....	21
3.2 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนปีพ.ศ. 2544 ใน 10 จังหวัดแรกที่มีผู้ป่วยมากที่สุด.....	22
3.3 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากร ที่ป่วยเป็นโรคมาลาเรีย.....	24
3.4 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของยุง.....	24
4.1 กราฟของค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบอบเรอริงซึ่งสอดคล้อง กับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria.....	74
4.2 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา.....	77
4.3 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	77
4.4 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา.....	78
4.5 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	78
4.6 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	79
4.7 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	79
4.8 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h).....	80

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.9 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h).....	80
4.10 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	81
4.11 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h).....	81
4.12 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้ (E_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)	82
4.13 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	82
4.14 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_v) กับสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_v).....	83
4.15 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัว อยู่ (D_h)	83
4.16 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	84

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.17 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	84
4.18 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	85
4.19 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา.....	86
4.20 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	86
4.21 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา	87
4.22 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	87
4.23 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	88
4.24 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา.....	88
4.25 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)	89
4.26 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h)	89
4.27 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	90
4.28 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)	90

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.29 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้ (E_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)	91
4.30 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	91
4.31 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_v) กับสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_v)	92
4.32 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัว อยู่ (D_h)	92
4.33 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่ สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	93
4.34 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอด เชื้อได้ (E_h)	93
4.35 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถ ถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)	94

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.36 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	96
4.37 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	96
4.38 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	97
4.39 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	97
4.40 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	98
4.41 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	98
4.42 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	99
4.43 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	99
4.44 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	100
4.45 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	100

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.46 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V = 1,400$	101
4.47 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V = 700$	101
4.48 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	102
4.49 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	103
4.50 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	103
4.51 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	104
4.52 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่กับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	104

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.53 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	105
4.54 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	105
4.55 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	106
4.56 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	106
4.57 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	107
4.58 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0,$ $E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$	107
4.59 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5,$ $R_0=37.6073$	108

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.60 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดั่งกราฟสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน.....	109
4.61 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดั่งกราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน.....	109
4.62 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดั่งกราฟสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน.....	110
4.63 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดั่งกราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน.....	110



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

โรคมาลาเรีย เป็นปัญหาสาธารณสุขที่สำคัญในประเทศไทยเนื่องจากการพบเชื้อนี้แพร่กระจายอยู่ในจังหวัดชายแดน การเกิดภาวะโรคมาลาเรียระบาด เนื่องมาจากการอพยพเคลื่อนย้ายแรงงานเข้าสู่พื้นที่โครงการพัฒนาเศรษฐกิจต่างๆ ซึ่งไวต่อการแพร่เชื้อสูง ดังนั้นควรเฝ้าระวังโรคอย่างต่อเนื่อง ให้ความรู้แก่ประชาชนและบุคลากรทางการแพทย์จะนำไปสู่การควบคุมป้องกันที่ได้ผลและช่วยให้แพทย์สามารถให้การวินิจฉัย ดูแลผู้ป่วยได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมต่อไป

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รับรวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ.2508 – 2550 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหา โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวัง ของทางสำนักกระบาดวิทยา และกรมควบคุมโรคติดต่อนำโดยแมลง กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

- 1) เพื่อศึกษาการระบาดของโรคมาลาเรียเชื้อไวเวกซ์
- 2) เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรียเชื้อไวเวกซ์
- 3) เพื่อใช้เป็นแนวทางในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียเชื้อไวเวกซ์
- 4) เพื่อใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวัง ของทางสำนักกระบาดวิทยา และกรมควบคุมโรคติดต่อนำโดยแมลง กระทรวงสาธารณสุข

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) วิเคราะห์จำนวนผู้ป่วยสำหรับโรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อ ไขว้แวกซ์แต่ละปี และแต่ละจังหวัด ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2508 – 2550 เพื่อสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อ ไขว้แวกซ์
- 2) จำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่

1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นหาเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 รวบรวมข้อมูลสถิติการเกิดโรคมาลาเรีย โดยแยกตามเชื้อที่พบทั้งหมดในประเทศไทย

ขั้นตอนที่ 3 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย ชนิดเชื้อ ไขว้แวกซ์

ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ว่าปัจจัยใดบ้างที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้

ขั้นตอนที่ 5 ทดสอบแบบจำลองที่ได้ว่ามีความเหมาะสมหรือไม่

ขั้นตอนที่ 6 พัฒนาแบบจำลองที่ได้ใหม่ถ้าแบบจำลองยังไม่เหมาะสม

ขั้นตอนที่ 7 สรุปผลที่ได้จากการทดสอบแบบจำลองและเสนอแนะแนวทางการพัฒนาแบบจำลองต่อไปในอนาคต

ขั้นตอนที่ 8 เขียนวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 เป็นแนวทางในการลดจำนวนผู้ป่วยที่ป่วยเป็นโรคมาลาเรีย ในแต่ละปี

1.5.2 เสนอแนวทางใหม่ในการลดการระบาดของโรคมาลาเรีย

1.5.3 เป็นแนวทางการวิจัยสำหรับผู้ที่มีความสนใจเกี่ยวกับวิธีการควบคุมการระบาดของโรค ควบคู่ไปกับแนวความคิดเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvalue and Eigenvector)

นิยาม 2.1.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$, X เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน R^n เรียก X ว่าเป็นเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ $AX = \lambda X$ สำหรับบางค่าสเกลาร์ λ เรียก λ ว่าค่าเฉพาะ (Eigenvalue)

2.2 ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial)

นิยาม 2.2.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$, $\det(A - \lambda I_n)$ เรียกว่า ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial) และสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

2.3 จาคอเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix)

นิยาม 2.3.1 ให้ $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของ x โดยที่ $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$ ดังนั้นอนุพันธ์ของ $f(x)$ เทียบกับ x จะเรียกว่า จาคอเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix) หรือ จาคอเบียนของ $f(x)$ นิยามโดย

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2.4 จุดสมดุล (Equilibrium point)

นิยาม 2.4.1 จุด $X_e \in R^n$ เป็นจุดสมดุล (Equilibrium point) ของ

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \quad (2.1)$$

ถ้า $f(t, X_c) = 0$ สำหรับทุกๆ $t \geq t^*$, X_c เป็นจุดสมมูลของสมการ (2.1) ที่ t^* แล้ว X_c เป็นจุดสมมูลสำหรับทุกๆ $t \geq t^*$

นิยาม 2.4.2 จุดสมมูล $X = 0$ ของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพ ถ้าสำหรับทุกๆ $\delta > 0$ และ $t_0 \in \mathbb{R}^+$ มี $\omega(\delta, t_0) > 0$ ซึ่งทำให้ $|u(t, t_0, \gamma)| < \delta$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$ เมื่อ $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$ และ $u(t, \gamma)$ เป็นคำตอบของสมการ (2.1)

นิยาม 2.4.3 จุดสมมูล $X = 0$ ของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically stable) ถ้า

- 1) จุดสมมูล $X = 0$ ของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพ และ
- 2) สำหรับทุกๆ $t_0 \geq 0$ มี $\varepsilon(t_0) > 0$ ซึ่งทำให้ $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0$ เมื่อ $|\gamma| < \varepsilon$

นิยาม 2.4.4 จุดสมมูล $X = 0$ ของสมการ (2.1) ไม่มีความเสถียรภาพ ถ้าไม่มีความเสถียรภาพในกรณีนี้มี $t_0 \geq 0$ และลำดับ $\gamma_n \rightarrow 0$ ของจุดเริ่มต้นและลำดับ t_m ซึ่ง $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$ สำหรับทุกๆ $m, t_m \geq 0$

โดยทั่วไปมีการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สองสมการมาใช้ดังนี้

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y) \quad (2.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y) \quad (2.3)$$

เมื่อ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และให้ (\bar{X}, \bar{Y}) เป็นจุดสมมูล แล้ว

$$f_1(\bar{X}, \bar{Y}) = f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

จัดผลเฉลยให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$X(t) = \bar{X} + x(t) \quad (2.4)$$

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t) \quad (2.5)$$

วิธีการนี้เรียกว่า เพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation) ของจุดสมดุล จากนั้นแทน (2.4) และ (2.5) ใน (2.2) และ (2.3) จะได้

$$\frac{d}{dt}(\bar{X}+x) = f_1(\bar{X}+x, \bar{Y}+y)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y}+y) = f_2(\bar{X}+x, \bar{Y}+y)$$

จัดรูปสมการใหม่ โดยกระจายอนุพันธ์ทางซ้าย และกระจาย f_1, f_2 ทางขวาของสมการโดยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดสมดุล (\bar{X}, \bar{Y}) แล้วจะได้ว่า

$$\frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} = f_1(\bar{X}, \bar{Y}) + f_{1x}(\bar{X}, \bar{Y})x + f_{1y}(\bar{X}, \bar{Y})y + \quad (2.6)$$

พจน์ของอันดับ x^2, y^2, xy และอันดับที่สูงขึ้น

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = f_2(\bar{X}, \bar{Y}) + f_{2x}(\bar{X}, \bar{Y})x + f_{2y}(\bar{X}, \bar{Y})y + \quad (2.7)$$

พจน์ของอันดับ x^2, y^2, xy และอันดับที่สูงขึ้น

เมื่อ $f_{1x}(\bar{X}, \bar{Y})$ เป็น $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ ถูกคำนวณที่ (\bar{X}, \bar{Y}) และในทำนองเดียวกันสำหรับ $f_{1y}(\bar{X}, \bar{Y}), f_{2x}(\bar{X}, \bar{Y}), f_{2y}(\bar{X}, \bar{Y})$ และพจน์อื่น ๆ ด้วย

โดยนิยามของจุดสมดุล ได้ว่า $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0, \frac{d\bar{Y}}{dt} = 0, f_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ และ $f_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ ดังนั้นจากสมการ (2.6) และ (2.7) จะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

จากนิยามของจาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (2.2) และ (2.3) และกำหนดโดย

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

เรียก $J(\bar{X}, \bar{Y})$ ว่า จาโคเบียนเมทริกซ์ของระบบสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$\alpha = \text{trace}(J(\bar{X}, \bar{Y})) = a_{11} + a_{22}$$

$$\beta = \det(J(\bar{X}, \bar{Y})) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

และ $\gamma = \text{discriminant} = \alpha^2 - 4\beta$

สมการเฉพาะคือ $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$ ดังนั้น ค่าเฉพาะจะอยู่ในรูปของ $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$

ในระบบเชิงเส้น สามารถมีจุดสมมูลได้มากกว่าหนึ่งจุด หรือมีจุดเป็น $(0,0)$ ถ้า

$$\beta = \det(J(\bar{X}, \bar{Y})) \neq 0$$

ทฤษฎีบท 2.4.1 จุดสมมูล $X = 0$ ของสมการ (2.1) มีความเสถียรภาพ ถ้าค่าเฉพาะของ J ทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นลบ และทุกๆ ค่าเฉพาะของ J ซึ่งมีส่วนจริงเป็นศูนย์ และเป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของ J

2.5 การหาผลเฉลยจุดสมมูลของระบบ

2.5.1 แบบจำลองจุดสมมูลของระบบเชิงเส้นชนิดไม่ต่อเนื่อง

สมการผลต่างไม่เชิงเส้น คือ สมการที่อยู่ในรูปของ

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots)$$

เมื่อ x_n คือ ค่าของ x ในลำดับที่ n และ f เป็นฟังก์ชันของการทำซ้ำๆ กัน

ผลเฉลยจุดสมมูลของระบบ ซึ่งเมื่อ \bar{X} ถูกกำหนดให้ค่าสัมพันธ์ได้อย่างชัดเจน คือ

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x}$$

ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงในลำดับที่ n ถึงลำดับที่ $n+1$ จากสมการที่อยู่ในรูป $x_{n+1} = f(x_n)$ จะได้รูปแบบความสัมพันธ์ที่เข้าใจได้ง่ายขึ้นอีก คือ

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

นิยาม 2.5.1 จุด x เป็น จุดตรึง (Fixed point) ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f(x) = x$

2.5.2 แบบจำลองจุดสมดุลของระบบเชิงเส้นชนิดต่อเนื่อง

การหาจุดสมดุลของระบบ หาได้โดยพิจารณา แบบจำลองที่มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{dX_1}{dt} = F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{dX_n}{dt} = F_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

(2.8)

ผลเฉลยจุดสมดุลของระบบสมการนี้ สามารถหาได้จากการจัดให้สมการทุกสมการของ (2.8) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

$$F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

⋮

$$F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

2.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ หรือ เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเดียว หรือหลายฟังก์ชัน และฟังก์ชันแบ่งได้ดังนี้

1) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ประกอบด้วยฟังก์ชันของตัวแปรเดียวและอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรนั้น เช่น

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

2) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ประกอบด้วยฟังก์ชันสองตัวแปรหรือมากกว่า และบางอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้น เช่น

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ อันดับของอนุพันธ์ที่อยู่ในสมการ

$$G(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2}$$

และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n จะอยู่ในรูปแบบ

$$G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n หมายถึงฟังก์ชัน f ซึ่ง $y = f(x)$ ที่นิยามบนช่วง I

และ $G(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)) = 0$ สำหรับทุก $x \in I$

2.6.1 วิธีการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา

ระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา นี้ พัฒนามาจากวิธีออยเลอร์ที่ดัดแปลงดังนี้
จากสูตรของออยเลอร์

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

สำหรับวิธีรุงเง-คูตดา นี้ให้

$$y_{i+1} = y_i + a_1k_1 + a_2k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)$$

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1) = f(x_i, y_i) + \alpha hf_x + \beta k_1 f_y + \frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta k_1 f_{xy} + \frac{\beta^2}{2} k_1^2 f_{yy} + \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left[a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1) \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 + a_2)hf + a_2 \alpha h^2 f_x + a_2 \beta h^2 k_1 f_y + a_2 h^3 \left(\frac{\alpha^2}{2} f_{xx} + \alpha \beta f_{xy} f + \frac{\beta^2}{2} f_{yy} f^2 \right) + \dots$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x, y)$ เมื่อ $y(x_0) = y_0$ อนุกรมเทย์เลอร์รอบ $x = x_i$ จะได้

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf + \frac{h^2}{2} f_x + \frac{h^2}{2} f_y f + \frac{h^3}{6} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ $y(x_{i+1})$ และ y_{i+1} ได้ $a_1 + a_2 = 1$, $a_2\alpha = \frac{1}{2}$, $a_2\beta = \frac{1}{2}$

1) ถ้า $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = 1$ จะได้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

เรียกสูตรรุงเง-กูดตาอันดับที่สอง สูตรที่ 1

2) ถ้า $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$ จะได้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right)$$

เรียกสูตรรุงเง-กูดตาอันดับที่สอง สูตรที่ 2

3) สูตรรุงเง-กูดตาอันดับที่สาม

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

4) สูตรรุงเง-กุดตาอันดับที่สี่

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

สูตรรุงเง-กุดตาอันดับที่สี่ เป็นสูตรที่นิยมใช้มากสูตรหนึ่ง

2.7 โอบไบเฟอร์เคชัน (Hopf Bifurcation)

การศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ที่มีค่าพารามิเตอร์รวมอยู่ด้วย ซึ่งพบว่า พฤติกรรมของคำตอบเปลี่ยนแปลงตามค่าพารามิเตอร์ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ถ้าพฤติกรรมของกราฟคำตอบมีลักษณะเป็นวงปิด (Limit cycle) เรียกพฤติกรรมของกราฟคำตอบแบบนี้ว่า โอบไบเฟอร์เคชัน (Hopf Bifurcation)

ดังนั้นการวิเคราะห์การเกิดโอบไบเฟอร์เคชัน ทำได้จากการวิเคราะห์ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $J(\bar{X}, \bar{Y})$ ได้ดังนี้ พิจารณาค่าเจาะจงที่อยู่ในรูป $\lambda = a(r) \pm b(r)i$

ถ้า $a(r) < 0$ แล้วกราฟของคำตอบเป็นก้นหอย (spiral) ที่มีจุดกำเนิดมีความเสถียรภาพ

ถ้า $a(r) = 0$ แล้วกราฟของคำตอบเป็นวงปิด (Limit cycle)

ถ้า $a(r) > 0$ แล้วกราฟของคำตอบเป็นก้นหอย (spiral) ที่มีจุดกำเนิดไม่มีความเสถียรภาพ กราฟของคำตอบที่มีค่าเจาะจงที่อยู่ในรูปคู่สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่มี r บางตัวทำให้ $a(r) = 0$ และทำให้ $\lambda = \pm b(r)i$ มีลักษณะเป็นวงปิด

ทฤษฎีบท 2.7.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dX}{dt} = f_1(X, Y)$$

$$\frac{dY}{dt} = f_2(X, Y)$$

ทำการแปลงเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นและหาค่าเฉพาะ $\lambda_1(r)$, $\lambda_2(r)$ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน กำหนดให้ $r=r_0$ ที่ทำให้ $\text{Re}(\lambda_1(r_0))=0$, $\text{Re}(\lambda_2(r_0))=0$ ถ้าส่วนจริงสอดคล้องกับ

$$\frac{d}{dr}[\text{Re}(\lambda_{1,2}(r_0))]_{r=r_0} > 0$$

เมื่อ $r=r_0$ แล้ว

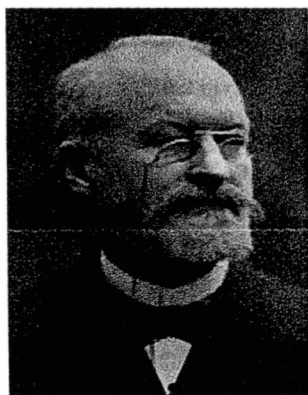
- (i) $r=r_0$ เป็นจุดไบเฟอร์เคชัน (Bifurcation point) ของระบบสมการ
- (ii) สำหรับ r_1 เมื่อ $r_1 < r < r_0$ กราฟเข้าสู่จุดสมดุลซึ่งมีความเสถียรภาพ
- (iii) สำหรับ r_2 เมื่อ $r_0 < r < r_2$ กราฟไม่เข้าสู่จุดสมดุลซึ่งไม่มีความเสถียรภาพ

2.8 โรคมาลาเรีย

2.8.1 ประวัติโรคมาลาเรีย

โรคมาลาเรียเป็นโรคที่ระบาดและคุกคามมาตั้งแต่เมื่อ 1,500 ปีก่อน แพทย์ชาวกรีกชื่อ Hippocrates ได้พบว่า มาลาเรียเป็นโรคชนิดหนึ่งที่มีสาเหตุจากการที่ผู้ป่วยใช้ชีวิตใกล้ชิดกับบริเวณที่มีน้ำนิ่ง แต่ Hippocrates ไม่รู้ว่าโรคนี้อาจมีสาเหตุที่แท้จริงมาจากเชื้อปรสิตในยุง นอกจากนี้กรุงโรมในอดีตเมื่อ 700 ปีก่อนก็เคยถูกคุกคามด้วย โรคมาลาเรีย จนกระทั่งทางรัฐบาลต้องออกกฎหมายให้กำจัดแหล่งน้ำเน่าในเมืองให้หมด ชาวโรมันในสมัยนั้นจึงได้ตั้งชื่อโรคร้ายนี้ว่า มาลาเรีย (malaria) ซึ่งมาจากการสนธิคำว่า “mal” ที่แปลว่า “เสีย” กับคำว่า “aria” ที่แปลว่า “อากาศ” เพราะในสมัยนั้นเชื่อว่าอากาศเสียคือสาเหตุที่ทำให้คนเป็นโรคนี้

ในปี พ.ศ. 2423 Charles-Louis-Alphonse Laveran แพทย์ทหารชาวฝรั่งเศส ซึ่งขณะนั้นทำงานอยู่ที่ประเทศ Algeria ได้สังเกตเห็น เชื้อมาลาเรียในเลือดของคนป่วย โดยใช้กล้องจุลทรรศน์ แต่เขาไม่รู้ว่าเชื้อโรคที่เห็นนั้นมาจากแหล่งใด อย่างไรก็ตาม ความลึกซึ้งเกี่ยวกับที่มาของโรคมาลาเรียได้ถูกเปิดเผยเป็นครั้งแรก โดย Giovanni Battista Grassi นักชีววิทยาชาวอิตาลี พบยุงก้นปล่องตัวเมีย (Anopheles spp.) และในขณะเดียวกัน Ronald Ross นักจุลชีววิทยาชาวอังกฤษ ซึ่งขณะนั้นทำงานอยู่ที่โรงพยาบาล Hyderabad ในประเทศอินเดีย เมื่อ Ross สามารถพิสูจน์ได้ว่าเชื้อพยาธิที่ Laveran เห็นนั้นมาจากการที่คนถูกยุงก้นปล่องกัด การค้นพบนี้ทำให้ Ross ได้รับรางวัลโนเบลสาขาการแพทย์



รูปที่ 2.1 Ronald Ross

2.8.2 ลักษณะการเกาะของยุงก้นปล่องขณะดูดกินเลือด

ยุงก้นปล่องที่เป็นพาหะหลักของการนำเชื้อโรคมาลาเรียที่สำคัญ ได้แก่

2.8.2.1 Anopheles dirus ตัวเมีย ส่วนของปาก (proboscis) จะยาวเกือบเท่าระยะค้ำปาก (maxillary palpi) และส่วนปลายอก (scutellum) จะโค้งเรียบไม่มีรอยหยัก ส่วนขาจะขาลายทั้ง 3 คู่ ข้อต่อระหว่างขาคู่หลังตรงส่วน Tibia และ Tarsi จะมีปื้นขาวยาวมาก เห็นได้ชัดเจน Anopheles Dirus พบในป่าที่ขอบออกไขตามแอ่งน้ำนิ่งซึ่งตามธรรมชาติ ลักษณะนิสัยชอบกินเลือดคนมาก ไม่ชอบกินเลือดสัตว์อื่นออกหากินตอนกลางคืนถึงเช้ามืด แต่ถ้าป่าที่บาง ๆ ก็หากินช่วงกลางวันด้วย ยุงชนิดนี้ เป็นชนิดที่มีความสามารถในการแพร่เชื้อมาลาเรียมากกว่ายุงพาหะชนิดอื่นในประเทศไทย

2.8.2.2 Anopheles minimus ลักษณะปาก , ระวังค้ำปากและส่วนปลายของอก คล้าย An.dirus แต่ส่วนของปากและขาตลอด An.Minimus พบตามชายป่า ขอบวางไข่ในลำธาร น้ำใส ไหลเอื่อย ๆ ยุง Anopheles จะชอบออกไขในน้ำนิ่ง ดังนั้นวิธีหนึ่งที่เราจะช่วยกำจัดมาลาเรียคือ ทำลายแหล่งน้ำนิ่งทั้งในและนอกบ้านให้หมดสิ้น

2.8.2.3 Anopheles maculates ลักษณะปาก , ระวังค้ำปาก และส่วนปลายของอกคล้าย An.dirus แต่ลักษณะของขาจะลายทั้ง 3 คู่ ขาคู่หลังจะมีปื้นขาวที่ส่วนปลาย

2.8.2.4 Anopheles sudaicus ลักษณะปาก , ระวังค้ำปาก และส่วนปลายของอก คล้าย An.dirus แต่ลักษณะของขาทุกขา จะมีจุดขาวเป็นกระไม่มีปื้นขาวเลย

2.8.3 เชื้อมาลาเรีย

ไข้มาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิต สกุล Plasmodium 4 ชนิด ได้แก่ falciparum, vivax, ovale และ malariae โดย falciparum และ malariae จะทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ vivax, ovale นั้น จะฆ่าเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ Plasmodium falciparum กับ Plasmodium vivax เป็นมาลาเรียชนิดที่รุนแรงและเป็นอันตรายมากที่สุด จึงมีชื่อว่า “malignant malaria” ผู้ที่ได้รับเชื้อนี้เข้าไปและไม่ได้รับการรักษาจะมีอาการรุนแรงเกิดเป็นมาลาเรียขึ้นสมองได้ แต่ถ้าได้รับการรักษาและหายจากโรคแล้วมักจะหายเป็นปกติโดยไม่มีอาการอื่นหลงเหลืออีกเลย

2.8.3.1 ฟัลซิพาร์มาลาเรีย (P. falciparum)

ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดฟัลซิพาร์มาลาเรีย ในระยะแรกของโรคจะมีอาการไข้ ปวดเมื่อยตามตัว คลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้องหรือท้องเดิน บางคนอาจมีไอหรือลักษณะคล้ายไข้หวัดได้ใน 4 – 5 วันแรกของโรค ไข้จะสูงลอยตลอดเวลา เนื่องจากการแตกของเม็ดเลือดแดงแต่ละชุดไม่พร้อมกัน แต่หลังจากเชื้อมาลาเรียเจริญอยู่ในระยะเดียวกันแล้ว เม็ดเลือดแดงจะแตกพร้อมกันทุก 48 ชั่วโมง จึงให้ชื่อว่า tertian malaria ผู้ป่วยอาจช็อคและเหลือง ตับม้ามโต เกิดภาวะแทรกซ้อนต่าง ๆ ได้บ่อยเช่น เกิดภาวะน้ำตาลในเลือดต่ำ เกิดภาวะความเป็นกรดเกิน (metabolic acidosis) และเสียชีวิตจากปอดบวมน้ำหรือไตวายได้

2.8.3.2 ไวแวกซ์มาลาเรีย (P.Vivax)

ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดไวแวกซ์มาลาเรียนั้นจะไม่เสียชีวิต จึงมีชื่อว่า “benign tertian malaria” แต่ผู้ป่วยจะเป็นโรคซ้ำอีก อาการของผู้ป่วยไวแวกซ์มาลาเรีย จะมีลักษณะคล้ายกับฟัลซิพาร์มาลาเรีย แต่จะพบหนาวสั่นได้บ่อยกว่า และขณะเกิดหนาวสั่น มักมีอาการปวดหัว ปวดกล้ามเนื้อมาก ผู้ป่วยที่ไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะค่อย ๆ ทุเลาและหายได้ แต่จะเป็นซ้ำได้อีกภายใน 2 ปี นานที่สุด 8 ปี

2.8.3.3 โอวัลเล่มาลาเรีย (P.Ovale)

ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดโอวัลเล่ จะมีลักษณะคล้ายกับไวแวกซ์มาลาเรีย แต่จะมีอาการน้อยกว่า และมีเชื้อกลับเป็นซ้ำน้อยกว่า ถ้าไม่ได้รับการรักษาอาการไข้จะทุเลาและหายไปได้เอง แต่เป็นซ้ำได้อีกภายใน 1 ปี นานที่สุด 5 ปี

2.8.3.4 มาลาเรีย (P.Malariae)

ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดมาลาเรียมาลาเรีย จะทำให้เกิดมีไข้หนาวสั่นวันเว้น 3 วัน คือมีไข้วันที่ 1 แล้วสบายอยู่ 3 วัน วันที่ 4 จึงมีไข้อีก จึงเรียกว่า “quartan malaria” ผู้ป่วยมักไม่มีอาการรุนแรง และกว่าจะเกิดอาการไข้ อาจใช้เวลานานเป็นปี เชื้อมาลาเรียอยู่ในคนได้เป็นเวลานานหลายปี มีรายงานนานถึง 53 ปี เชื้อนี้เป็นสาเหตุทำให้เกิด nephrotic syndrome ได้

2.8.4 การรักษามาลาเรียประกอบด้วย

1. การรักษาจำเพาะ (Specific treatment)
2. การบำบัดอาการและภาวะแทรกซ้อน (Supportive treatment)
3. การป้องกันการแพร่กระจายโรคโดยให้ยาฆ่าแกมมาโตไซท์ (Gametocytocide)

2.8.4.1 การรักษาจำเพาะ วัตถุประสงค์ของการรักษาจำเพาะคือ การกำจัดเชื้ออันเป็นต้นเหตุของโรคที่ทำให้เกิดอาการป่วยไข้ คือ ระยะเวลาในเม็ดเลือดแดง ฉะนั้นจึงต้องให้ยาฆ่าเชื้อระยะไรเฟส (blood schizonticide) สิ่งที่ต้องคำนึงถึงในการเลือกยาด้านมาลาเรีย ได้แก่

1.วิธีการบริหารยา ควรประเมินสถานะผู้ป่วยร่วมด้วย การบริหารยาโดยวิธีกินเป็นวิธีที่ง่ายและสะดวกในผู้ป่วยที่ไม่มีภาวะแทรกซ้อน แต่อาจไม่เหมาะในผู้ป่วยที่มีอาการคลื่นไส้ อาเจียนมาก ควรพิจารณาการบริหารยาคด้วยวิธีฉีด

2.ความถี่และระยะเวลาของการใช้ยา มีความสำคัญต่อการตัดสินใจในการเลือกให้ยาเป็นอย่างมาก เพราะจะมีผลต่อความร่วมมือของผู้ป่วย โดยรับประทานยาตามที่แพทย์สั่ง (compliance) การเลือกยาสำหรับผู้ป่วยที่ต้องนำยาไปบริหารเองที่บ้าน ควรเน้นวิธีที่ง่าย สะดวก เช่น รับประทานวันละครั้ง และช่วงเวลาที่ควรรับประทานยาคควรสั้น เช่น รับประทานครั้งเดียว (single dose) หรือถ้าต้องให้หลายวันก็ไม่ควรเกิน 3 วัน เป็นต้น

3.ประวัติการได้ยารักษามาลาเรีย เป็นข้อมูลสำคัญที่ทำให้ทราบถึงการดื้อยาของเชื้อมาลาเรีย การเลือกยาต้องคำนึงถึงการดื้อยาของเชื้อฟัลซิพารัมด้วยเสมอ ควรรู้การกระจายของเชื้อที่ดื้อต่อยาคชนิดต่าง ๆ เพื่อช่วยในการเลือกให้ยาอย่างมีประสิทธิภาพ

4.ควรใช้ความรู้ทางเภสัชจลนศาสตร์ของยา เช่น อัตราการดูดซึม ความเข้มข้นของยาในพลาสมาและเม็ดเลือดแดงที่มีเชื้อ การกระจายตัวของยาไปยังเนื้อเยื่อต่าง ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงและขับถ่ายยา ตลอดจนพิษวิทยาของยาเหล่านั้นเป็นพื้นฐานในการจัดขนาดยาที่เหมาะสม

2.8.4.2 การบำบัดอาการและภาวะแทรกซ้อน (Supportive treatment) การดูแลผู้ป่วยอย่างใกล้ชิดสำคัญมาก โดยเฉพาะในผู้ป่วยมาลาเรียขึ้นสมอง จะต้องมีการควบคุมสมดุลของของเหลว (Fluids) และเกลือแร่ (Electrolytes) ในร่างกาย การให้ยารักษาภาวะแทรกซ้อนจะต้องคำนึงถึงภาวะเสี่ยงและผลประโยชน์ที่จะได้รับเป็นอย่างมาก ตัวอย่างเช่น การใช้ยา corticosteroid ใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้เผยแพร่โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผู้ป่วยมาลาเรียขึ้นสมอง ไม่ทำให้การรักษาดีขึ้นแต่ผลข้างเคียงมีมาก จึงไม่ควรใช้ ส่วนการให้ยากันชักร่วมช่วยป้องกันการชักรของผู้ป่วยได้ดี จึงควรให้ยากันชักร่วมในผู้ป่วยมาลาเรียขึ้นสมอง

2.8.4.3 การป้องกันการแพร่กระจายเชื้อ สำหรับมาลาเรียฟัลซิพารัม ถ้าผู้ป่วยอยู่ในท้องที่มีหญิงซึ่งเป็นพาหะ ต้องให้ยาฆ่าแกมีโตซัยต์ คือ ไพโรมาควิน ขนาด 30 – 45 mg. รับประทานครั้งเดียวร่วมด้วย เพราะยาฆ่าเชื้อระยะไรเฟค (blood schizontocide) ฆ่าแกมีโตซัยต์ (เชื้อระยะมีเฟค) ของเชื้อฟัลซิพารัมไม่ได้ สำหรับมาลาเรียไวแวกซ์ โอวัลเล่ และมาลาริโอ ไม่ต้องให้ไพโรมาควิน เพื่อฆ่าแกมีโตซัยต์เพราะ blood schizontocide ออกฤทธิ์ฆ่าแกมีโตซัยต์ของเชื้อเหล่านี้ได้ด้วย

2.8.5 ยาที่ใช้ในการรักษามาลาเรีย ยาด้านเชื้อมาลาเรีย จำแนกตามฤทธิ์ของยาต่อเชื้อ ดังนี้

2.8.5.1 Blood schizontocide ออกฤทธิ์ฆ่าเชื้อไรเฟคในเม็ดเลือดแดง ใช้รักษาผู้ป่วยมาลาเรียเพราะเชื้อไรเฟคในเม็ดเลือดแดง เป็นตัวทำให้มีอาการป่วยไข้ ยาในกลุ่มนี้ได้แก่ คลอโรควิน (chloroquine) ซัลฟาดอกซิน/พัยริเมธามีน (SP, Fansidar) ควินิน (quinine) เมโฟลควิน (mefloquine) เมโฟลควิน ร่วมกับ SP (MSP, Fansimef) เตตราไซคลิน (tetracycline) ฮาโลแฟนทริน (halofantrine) อาร์ติมิเตอ์ (artemether) และอาร์ติซูนเนต (Artesunate)

2.8.5.2 Tissue schizontocide มีฤทธิ์ฆ่าเชื้อที่อยู่ในเนื้อเยื่อ (ตับ) ถ้าฆ่าเชื้อมาก่อนเข้าเม็ดเลือดแดง (primary tissue schizontocide) ใช้เป็นยาป้องกันมาลาเรีย ได้แก่ ยาพัยริเมธามีน (pyrimethamine) ถ้าฆ่า hypnozoite ที่อยู่ในตับ ใช้เป็นยากันโรคกลับซ้ำ (antirelapse) ใช้ในการรักษามาลาเรียไวแวกซ์และมาลาเรียโอวัลเล่ให้หายขาด ได้แก่ ยาไพโรมาควิน (primaquine)

2.8.5.3 Gametocide ออกฤทธิ์ฆ่าแกมีโตซัยต์ หรือเชื้อมีเฟค ได้แก่ ยาไพโรมาควิน ใช้จัดการแพร่มาลาเรียในโครงการควบคุมกำจัดมาลาเรียของกองมาลาเรีย

2.8.5.4 Sporontocide หรือ antisporegenic drug มีฤทธิ์ขัดขวางการเกิดสปอโรซอइट์ในยุง จึงเป็นยาที่ขัดขวางการแพร่โรค ได้แก่ ไพโรมาควิน ปัญหาการดื้อยาของเชื้อมาลาเรีย Blood schizontocide ซงเป็นยาฆ่าเชื้อไรเฟคและเป็นยารักษามาลาเรีย เมื่อใช้ไประยะหนึ่งเชื้อมาลาเรีย มักจะปรับตัวคือต่อยา เชื้อฟัลซิพารัมปรับตัวคือยาได้ดีกว่าเชื้อชนิดอื่นและทำให้เกิดปัญหาในการรักษาควบคุม และกวาดล้างมาลาเรีย สำหรับในประเทศไทยมีประวัติการดื้อยาของเชื้อมาลาเรีย ดังนี้

- มีรายงานผู้ป่วยฟัลซิพารัมคือต่อยาคลอโรควิน ที่โรงพยาบาลอายุรศาสตร์เขตร้อน มหาวิทยาลัยมหิดล ในปี พ.ศ.2505 หลังจากนั้นมีการกระจายของเชื้อดื้อยาไปอย่างช้า ๆ

- พ.ศ.2514 เชื้อคือยาคลอโรควินมากขึ้น และกระจายไปทั่ว โครงการควบคุมไข้มาลาเรีย จึงเปลี่ยนการรักษาฟัลซิพาริมจากคลอโรควินเป็น SP ในการรักษาขั้นหายขาด หลังจากนั้นมีการใช้ ยา SP อย่างแพร่หลายในประเทศไทย มีการใช้เป็นยาป้องกัน ตลอดจนยาชุด จึงทำให้เกิดการคือยา ในไม่ช้า

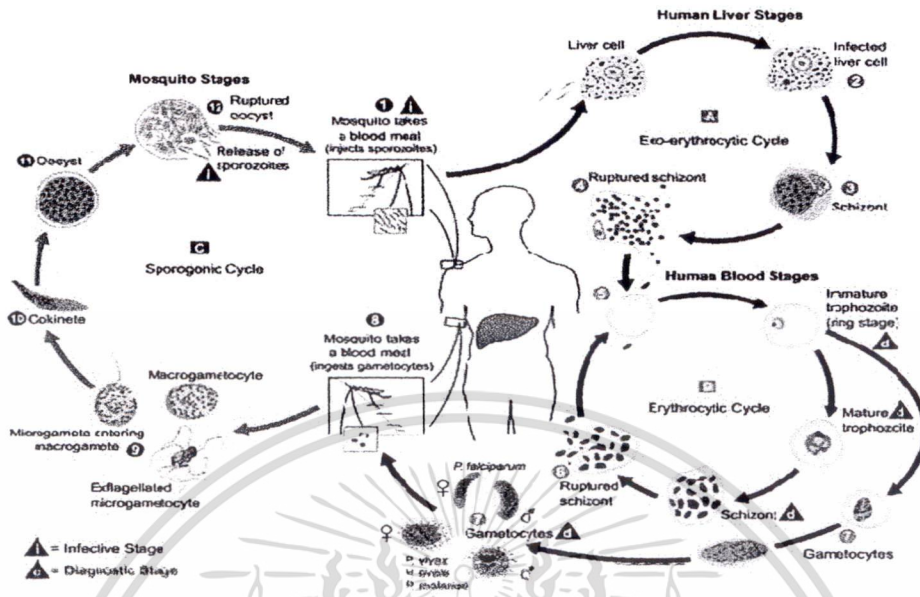
- พ.ศ.2524 กองมาลาเรีย ทำการศึกษาประสิทธิภาพของยารักษาขั้นหายขาด 5 ขนาน พบว่า Fansidar ให้ผลการรักษาต่ำมาก เพียง 30 – 40% ที่ตาก กาฬสินธุ์ และจันทบุรี

- พ.ศ.2528 กองมาลาเรียได้นำยา MSP. เข้ามาใช้ในโครงการควบคุมไข้มาลาเรีย หลังจาก MSP. ได้รับการจดทะเบียนครั้งแรกในประเทศไทย (พ.ศ.2524) และมีการควบคุมยา นี้ โดยมีข้อตกลงห้ามมิให้บริษัทจำหน่ายให้แก่ร้านขายยาหรือภาคเอกชน นอกจากจะได้รับอนุญาต จากกรมควบคุมโรคติดต่อเป็นราย ๆ ไป และไม่ให้นำใช้เป็นยาป้องกัน นับได้ว่า MSP. เป็นยาขนาน แรกที่มีระบบการควบคุมในประเทศไทย ซึ่งยาอื่นที่ได้รับการจดทะเบียนก่อนหน้านี้ เช่น คลอโรควิน ควินิน SP ไม่มีการควบคุมแต่อย่างใด และมักพบยาเหล่านี้อยู่ในยาชุดจำหน่ายทั่วไปตามแหล่ง แพร่ไข้มาลาเรีย

- พ.ศ. 2533 มีการระบาดของไข้มาลาเรียฟัลซิพาริมอย่างรุนแรง เนื่องจากมีการเปิด ชายแดนไทย-กัมพูชา ตั้งแต่ปลายปี พ.ศ. 2531 ทำให้มีคนงานชุดพลอยจากจังหวัดตราดและ จังหวัดใกล้เคียง ตลอดจนจังหวัดอื่น ๆ เกือบทั่วประเทศเดินทางข้ามชายแดนที่ อำเภอบ่อไร่ จังหวัดตราด ไปชุดพลอยในจังหวัดโพลิน ประเทศกัมพูชา ทำให้มีผู้ป่วยมาลาเรียจำนวนมาก (65,550 ราย ในจังหวัดตราด คิดเป็น 24% ของผู้ป่วยทั่วประเทศ) 90% เป็นเชื้อ P.falciparum ก่อให้เกิดผลกระทบ คือ ผลการรักษาด้วยยา MSP. ลดลงมาก ต่อมาในปี 2533 องค์การอนามัย โลกได้ประกาศแนะนำให้งดการใช้ยา MSP. ทั้งเพื่อการรักษาและเพื่อเป็นยาป้องกัน และประเทศไทยได้เริ่มใช้ Mefloquine ในรูปยาเดี่ยว แทน MSP.

- พ.ศ. 2538 กองมาลาเรียได้กำหนดนโยบายเกี่ยวกับยารักษามาลาเรียฉบับ พ.ศ.2538 โดยนำยากลุ่มอนุพันธ์ซิงเฮาซุ ได้แก่ อาร์ติซูนเนต และอาร์ติมิเตอร์ ซึ่งเป็นยาใหม่มาใช้ร่วมด้วย แนวทางการรักษามาลาเรียของโครงการควบคุมไข้มาลาเรีย กองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ (ฉบับ พ.ศ.2538)

2.8.6 วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย



รูปที่ 2.2 วงจรชีวิตของเชื้อมาลาเรีย[18]

2.8.7 เขตปรากฏโรค

มาลาเรียมีขอบเขตการแพร่กระจายอย่างกว้างขวางระหว่างเส้นรุ้งที่ 64 องศาเหนือ ถึงเส้นรุ้งที่ 32 องศาใต้ และครอบคลุมพื้นที่ซึ่งอยู่ต่ำกว่าระดับน้ำทะเลถึง 400 เมตร เช่น บริเวณ Dead sea จนถึงพื้นที่ที่อยู่สูงกว่าระดับน้ำทะเลถึง 2,600 เมตร เช่น ประเทศเคนยา ปัจจุบันมีประชากรถึง 2,020 ล้านคนจากกว่า 90 ประเทศ ที่ตั้งอยู่ในบริเวณดังกล่าวมีความเสี่ยงที่จะเป็นมาลาเรียได้

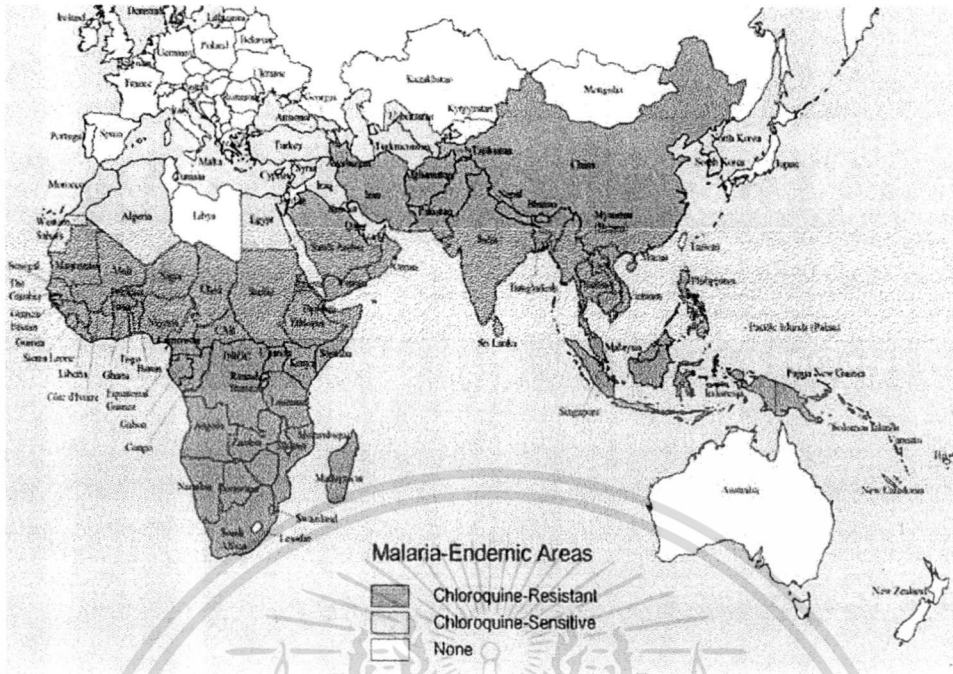
มาลาเรียชนิดฟัลซิพารัม จะพบได้บ่อยในแอฟริกา อเมริกาใต้ เอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ในเขตหนาวจะพบไม่บ่อย

มาลาเรียชนิดไวแวกซ์ พบได้ทั้งเขตร้อนและเขตอบอุ่นแถบลาตินอเมริกา ตุรกี จีน และอินเดียตอนกลาง พบได้น้อยที่แอฟริกา โดยเฉพาะแถบแอฟริกาตะวันตก

มาลาเรียชนิดมาลารีอี พบได้ทั้งในเขตร้อนและใกล้เขตร้อน โดยเฉพาะในทวีปแอฟริกา ตะวันออกและประเทศอินเดียทางตะวันตก

ประเทศไทยแหล่งของเชื้อมาลาเรียอยู่บริเวณป่าเขาชายแดนของประเทศ โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย-พม่า และไทย-กัมพูชา จังหวัดที่พบผู้ป่วยสูงมาโดยตลอด ได้แก่ แม่ฮ่องสอน ตาก กาญจนบุรี ราชบุรี ประจวบคีรีขันธ์ ระนอง สระแก้ว ตรัง และจันทบุรี ในตอนกลางของประเทศพบผู้ป่วยมาลาเรียได้น้อย และไม่พบการติดเชื้อในกรุงเทพมหานครและเขตปริมณฑล พบผู้ป่วยกระจายทุกกลุ่มอายุ โดยเฉพาะในกลุ่มอายุ 10-35 ปี อัตราส่วนของผู้ป่วยเพศชายจะมากกว่าเพศหญิง ประมาณ 2 เท่า พบผู้ป่วยได้ตลอดทั้งปีแต่จะพบมากในช่วงฤดูฝน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้นไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 การระบาดของโรคมาลาเรีย ปี 2000-2002[19]

2.8.8 โรคมาลาเรียในประเทศไทย

การคิดเชื้อผสมที่พบได้บ่อยที่สุด คือ ฟิสิกซ์พาร์มมาลาเรียร่วมกับไวแวกซ์มาลาเรีย ในประเทศไทยรายงานจากการตรวจเลือดผู้ป่วยทั่วประเทศ พบการคิดเชื้อผสมของฟิสิกซ์พาร์มกับไวแวกซ์มาลาเรียในระยะแรกพบเพียงร้อยละ 0.5 แต่รายงานจากโรงพยาบาลที่มีการติดตามผู้ป่วยฟิสิกซ์พาร์ม

ภายหลังพบว่ามียัตราการเป็นไวแวกซ์มาลาเรียสูงถึงร้อยละ 33 อาจแสดงได้ว่าในระยะแรกยัตราการได้รับเชื้อผสม 2 ชนิด เกิดได้บ่อย แต่ตรวจไม่พบหรือตรวจแยกชนิดของมาลาเรียได้ยาก ทำให้ผู้ป่วยได้รับการรักษามาลาเรียชนิดเดียว คือ ฟิสิกซ์พาร์ม แต่ภายหลังจึงเป็นมาลาเรียชนิดไวแวกซ์ตามมาในอัตราที่สูง

แสดงสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียสูงในประเทศไทยปี 2550



รูปที่ 2.4 พื้นที่สิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียสูงในประเทศไทยปี 2550[7]

2.9 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอ็ดส์วัฒน์ คำมณี (2002) ได้นำการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ ไม่เป็นเชิงเส้นมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายพฤติกรรมของโรคมาลาเรีย ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรคมาลาเรีย และแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของคำตอบของสมการ[8]

Puntani Pongsumpun (2004) ได้นำวิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (Stand dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของแบบจำลอง (SIR) ทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก แล้วแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียร ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค การลดอัตราการกัดและการลดจำนวนของยุงเป็นตัวอย่างของแนวทางที่ช่วยในการควบคุมการระบาดของโรค[9]

ทรัพย์สินชัย เอกอิมทรัพย์ และคณะ (2006) ใช้ทฤษฎีความเสถียร (Steady state) มาสร้างแบบจำลอง (SIR) ทางคณิตศาสตร์ตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมาลาเรีย และสร้างโปรแกรมการวิเคราะห์เชิงกราฟ ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมาลาเรีย และกราฟในการมาวิเคราะห์แบบจำลองเพื่อใช้ในการลดการระบาดของโรค[10]

C. Chiyaka และ W. Garira ได้นำเสนอสมการอนุพันธ์สามัญมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรีย ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ มนุษย์ที่มีภูมิคุ้มกันโรคจะช่วยในการลดความรุนแรงของโรคและวัคซีนป้องกันที่ส่งผลจะมีประสิทธิภาพในการควบคุมโรคบางส่วน[25]

NAKUL CHITNIS และ J. M. CUSHING ได้นำเสนอสมการอนุพันธ์สามัญมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่กระจายของมาลาเรียในประชากรมนุษย์และยุง ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือที่ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับหนึ่งจะเกิดทรานคริติเคิลไบเฟอร์เคชันขึ้น[27]



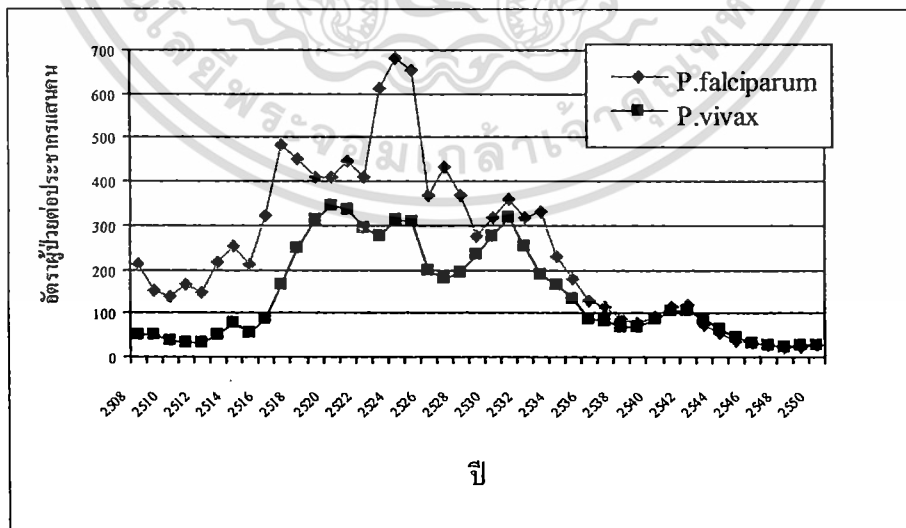
บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

3.1 วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

โรคมาลาเรียเกิดจากเชื้อปรสิต สกอลพลาสโมเดียม 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม, ไวเวกซ์, โอวัลต์และมาลาเรีย โดยฟัลซิพารัมมาลาเรียจะทำลายเซลล์เม็ดเลือดแดงทุกระยะ แต่ไวเวกซ์, โอวัลต์นั้น จะทำลายเฉพาะเซลล์เม็ดเลือดแดงที่ยังเจริญเติบโตไม่สมบูรณ์เท่านั้น โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือพลาสโมเดียมฟัลซิพารัมกับพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากนั้นนำข้อมูลทางสถิติของผู้ป่วยในแต่ละปีตั้งแต่ปี พ.ศ.2508 – 2550 ที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลของกองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุข มาวิเคราะห์ข้อมูล ผลปรากฏว่าในระยะเวลา 42 ปี พบว่าจำนวนผู้ป่วยและอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนของเชื้อชนิด พลาสโมเดียมไวเวกซ์สูงกว่าชนิดเชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัมในปี พ.ศ.2544 มีจำนวนผู้ป่วย 67,749 คน แยกเป็นชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จำนวน 36,044 คนและเชื้อ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม จำนวน 31,358 คน และมีอัตราผู้ป่วย 117 คน ต่อประชากรแสนคน [1]-[5]

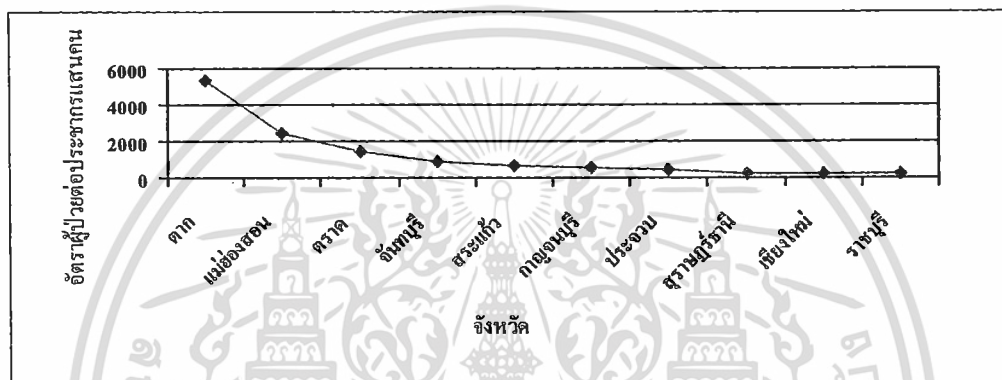
ในงานวิจัยนี้ ได้นำข้อมูลในปี พ.ศ.2544 มาพิจารณา เนื่องจากจำนวนผู้ป่วยชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์มีค่ามากที่สุด ซึ่งแสดงกราฟอัตราจำนวนผู้ป่วยได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปีพ.ศ. 2508-2550

เมื่อพิจารณาตามจังหวัดสิบจังหวัดแรกที่พบผู้ป่วยมาลาเรียมากที่สุดในประเทศไทย ปี พ.ศ. 2544 มีผลดังนี้

จังหวัดที่พบผู้ป่วยด้วยมาลาเรียสูงที่สุด คือ จังหวัดตาก ตรวจพบผู้ป่วย 23,821 ราย คิดเป็นร้อยละ 35.16 ของผู้ป่วยทั้งหมด จังหวัดที่พบผู้ป่วยด้วยมาลาเรียสูงที่สุด 10 อันดับแรก คือ จังหวัดตาก แม่ฮ่องสอน กาญจนบุรี จันทบุรี สระแก้ว เชียงใหม่ ตราด ประจวบคีรีขันธ์ สุราษฎร์ธานีและราชบุรี รวม 10 จังหวัด พบผู้ป่วยจำนวน 52,941 ราย คิดเป็นร้อยละ 76.67 ของผู้ป่วยทั้งประเทศสัดส่วนเพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ.2543 จำนวนผู้ป่วยใน 10 จังหวัดแรกลดลงร้อยละ 22.89 ซึ่งแสดงได้ด้วยกราฟดังนี้



รูปที่ 3.2 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนปีพ.ศ. 2544 ในสิบจังหวัดแรกที่มีผู้ป่วยมากที่สุด

3.2 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรียตามชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์

พิจารณาการสร้างแบบจำลองของคนและยุง ดังนี้

ตารางที่ 3.1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและยุง

สัญลักษณ์	ข้อความ
S_h	จำนวนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
E_h	จำนวนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้
I_h	จำนวนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
D_h	จำนวนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่
R_h	จำนวนประชากรที่พ้นจากการติดเชื้อ
S_v	จำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

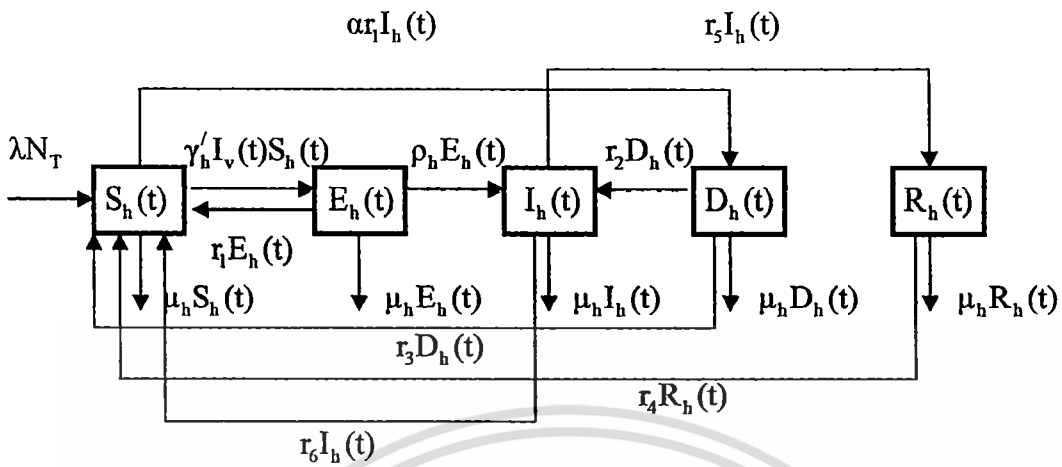
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและยุง(ต่อ)

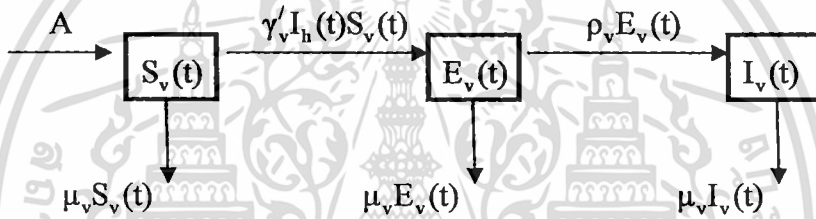
สัญลักษณ์	ข้อความ
E_v	จำนวนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้
I_v	จำนวนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
μ_h	อัตราการตายของประชากร
γ_h	อัตราการถ่ายทอดเชืชนิด <i>Plasmodium vivax</i> จากยุงไปประชากร
γ_v	อัตราการถ่ายทอดเชืชนิด <i>Plasmodium vivax</i> จากประชากรไปยุง
λ	อัตราการเกิดของประชากร
N_T	จำนวนประชากรทั้งหมด
N_V	จำนวนยุงทั้งหมด
α	ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร
r_1	อัตราที่ผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ
r_2	อัตราการที่เชื้อ <i>Plasmodium vivax</i> ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง
r_3	อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชืชนิด <i>Plasmodium vivax</i>
r_4	อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชืชนิด <i>Plasmodium vivax</i> เปลี่ยนเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
r_5	อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชืชนิด <i>Plasmodium vivax</i>
r_6	อัตราประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
ρ_h	อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
ρ_v	อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ไปเป็นยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
μ_v	อัตราการตายของยุง
A	จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1 แบบจำลองโรคมลาเรียของคนและยุง



รูปที่ 3.3 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรที่ป่วยเป็นโรคมลาเรีย



รูปที่ 3.4 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของยุง

อธิบายรายละเอียดของแบบจำลองได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่เกี่ยวข้องการติดเชื้อเทียบกับเวลา

= จำนวนคนที่เกิดใหม่ + จำนวนคนที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ที่พ้นจากการติดเชื้อ + จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ + จำนวนคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ + จำนวนคนที่พ้นจากการติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ - จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต - จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ - จำนวนคนที่ไวต่อติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา

= จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ - จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ - จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ - จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เสียชีวิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่ติดเชื่อ และสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

= จำนวนคนที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ + จำนวนคนที่ติดเชื่อที่มีเชื่อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื่อ – จำนวนคนที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ที่เสียชีวิต – จำนวนคนที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ที่พ้นจากการติดเชื่อ – จำนวนคนที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่มีความเชื่อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา

= จำนวนคนที่ไวต่อติดเชื่อเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ – จำนวนคนที่ติดเชื่อที่มีความเชื่อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื่อ – จำนวนคนที่มีความเชื่อฝังตัวอยู่ที่เสียชีวิต – จำนวนคนที่มีความเชื่อฝังตัวอยู่ที่พ้นจากการติดเชื่อ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่พ้นจากการติดเชื่อเทียบกับเวลา

= จำนวนคนที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ที่พ้นจากการติดเชื่อ – จำนวนคนที่พ้นจากการติดเชื่อที่เสียชีวิต – จำนวนคนที่พ้นจากการติดเชื่อเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อเทียบกับเวลา

= จำนวนของยูง ณ เวลาเริ่มต้น – จำนวนยูงที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อที่เสียชีวิต – จำนวนยูงที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อเปลี่ยนไปเป็นยูงที่ติดเชื่อและถ่ายทอดเชื่อได้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของยูงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

= จำนวนยูงที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อเปลี่ยนไปเป็นยูงที่ติดเชื่อและถ่ายทอดเชื่อได้ – จำนวนยูงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ที่เสียชีวิต – จำนวนยูงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เปลี่ยนไปเป็นยูงที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของยูงที่ติดเชื่อ และสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

= จำนวนยูงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เปลี่ยนไปเป็นยูงที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ – จำนวนยูงที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ที่เสียชีวิต

ข้อสังเกต จากแบบจำลอง ลูกศรที่ชี้เข้ามีค่าเป็นบวก และลูกศรที่ชี้ออกมีค่าเป็นลบ

จากแผนภาพแสดงแนวคิดเบื้องต้น นำมาเขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนและยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลาทั้งหมด

$$\frac{d}{dt}S_h = \lambda N_T + r_3 D_h + r_1 E_h + r_6 I_h + r_4 R_h - (\mu_h + \gamma'_b I_v) S_h - \alpha r_1 I_h$$

$$\frac{d}{dt}S_v = A - (\mu_v + r'_v I_h) S_v$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนและยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาทั้งหมด

$$\frac{d}{dt}E_h = \gamma'_b I_v S_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h$$

$$\frac{d}{dt}E_v = r'_v I_h S_v - (\mu_v + \rho_v) E_v$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนและยุงที่ติดเชื้อ และสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาทั้งหมด

$$\frac{d}{dt}I_h = \rho_h E_h + r_2 D_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I_h$$

$$\frac{d}{dt}I_v = \rho_v E_v - \mu_v I_v$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลาทั้งหมด

$$\frac{d}{dt}D_h = \alpha r_1 I_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D_h$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของคนที่ฟื้นจากการติดเชื้อเทียบกับเวลาทั้งหมด

$$\frac{d}{dt}R_h = r_5 I_h - (\mu_h + r_4) R_h$$

และสองเงื่อนไข ดังนี้

$$N_T = S_h + E_h + I_h + D_h + R_h \quad \text{และ} \quad N_v = S_v + E_v + I_v$$

บทที่ 4

ผลการวิจัยเบื้องต้น

สมมติว่าจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$\frac{dN_T}{dt} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{dN_v}{dt} = 0$$

จาก $N_T = S_h + E_h + I_h + D_h + R_h$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_T &= \frac{d}{dt} (S_h + E_h + I_h + D_h + R_h) \\ &= \frac{d}{dt} S_h + \frac{d}{dt} E_h + \frac{d}{dt} I_h + \frac{d}{dt} D_h + \frac{d}{dt} R_h \\ &= \lambda N_T + r_3 D_h + r_1 E_h + r_6 I_h + r_4 R_h - (\mu_h + \gamma' I_v) S_h - \alpha r_1 I_h + \gamma' I_v S_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h \\ &\quad + \rho_h E_h + r_2 D_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I_h + \alpha r_1 I_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D_h + r_5 I_h - (\mu_h + r_4) R_h \\ &= \lambda N_T - \mu_h S_h - \mu_h E_h - \mu_h I_h - \mu_h D_h - \mu_h R_h \\ &= \lambda N_T - \mu_h (S_h + E_h + I_h + D_h + R_h) \\ &= \lambda N_T - \mu_h N_T \\ &= N_T (\lambda - \mu_h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $\lambda = \mu_h$

สรุปผลสมการ ได้ว่า ค่าคงที่ของอัตราการเกิดและอัตราการตายต่อประชากรของคนมีค่าเท่ากัน

จาก $N_v = S_v + E_v + I_v$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} N_v = \frac{d}{dt} (S_v + E_v + I_v)$$

$$= \frac{d}{dt} S_v + \frac{d}{dt} E_v + \frac{d}{dt} I_v$$

$$= A - (\mu_v + \gamma'_v I_h) S_v + \gamma'_v I_h S_v - (\mu_v + \rho_v) E_v + \rho_v E_v - \mu_v I_v$$

$$= A - \mu_v S_v - \mu_v E_v - \mu_v I_v$$

$$= A - \mu_v (S_v + E_v + I_v)$$

$$= A - \mu_v N_v$$

$$= 0$$

เมื่อ $A = \mu_v N_v$ หรือ $\mu_v = \frac{A}{N_v}$

สรุปผลสมการ ได้ว่าค่าคงที่อัตราการตายของยุงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของยุงกับจำนวนยุงทั้งหมด

กำหนดให้

$$S'_h = \frac{S_h}{N_T} \quad I'_h = \frac{I_h}{N_T} \quad E'_h = \frac{E_h}{N_T} \quad R'_h = \frac{R_h}{N_T}$$

$$D'_h = \frac{D_h}{N_T} \quad S'_v = \frac{S_v}{N_v} \quad I'_v = \frac{I_v}{N_v} \quad E'_v = \frac{E_v}{N_v}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หาสมการได้ดังนี้

หา $\frac{d}{dt}S'_h$ จะได้ว่า

จาก

$$S'_h = \frac{S_h}{N_T}$$

$$N_T S'_h = S_h$$

$$\frac{d}{dt}(N_T S'_h) = \frac{d}{dt}S_h$$

$$N_T \frac{d}{dt}S'_h = \frac{d}{dt}S_h$$

$$N_T \frac{d}{dt}S'_h = \lambda N_T + r_3 D_h + r_1 E_h + r_6 I_h + r_4 R_h - (\mu_h + \gamma_h I_v) S_h - \alpha r_1 I_h$$

$$\frac{d}{dt}S'_h = \frac{\lambda N_T + r_3 D_h + r_1 E_h + r_6 I_h + r_4 R_h}{N_T} - \frac{(\mu_h + \gamma_h I_v) S_h}{N_T} - \frac{\alpha r_1 I_h}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt}S'_h = \lambda + r_3 D'_h + r_1 E'_h + r_6 I'_h + r_4 R'_h - (\mu_h + \gamma_h I'_v) S'_h - \alpha r_1 I'_h$$

จาก $\lambda = \mu_h$ และ $I_v = I'_v N_v$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}S'_h = \mu_h + r_3 D'_h + r_1 E'_h + r_6 I'_h + r_4 R'_h - (\mu_h + \gamma_h I'_v N_v) S'_h - \alpha r_1 I'_h$$

หา $\frac{d}{dt}E'_h$ จะได้ว่า

จาก

$$E'_h = \frac{E_h}{N_T}$$

$$N_T E'_h = E_h$$

$$\frac{d}{dt}(N_T E'_h) = \frac{d}{dt}E_h$$

$$N_T \frac{d}{dt} E'_h = \frac{d}{dt} E_h$$

$$N_T \frac{d}{dt} E'_h = \gamma'_h I_v S_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h$$

$$\frac{d}{dt} E'_h = \frac{\gamma'_h I_v S_h}{N_T} - \frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt} E'_h = \gamma'_h I_v S'_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E'_h$$

จาก $I_v = I'_v N_v$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} E'_h = \gamma'_h I'_v N_v S'_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E'_h$$

หา $\frac{d}{dt} I'_h$ จะได้ว่า

จาก

$$I'_h = \frac{I_h}{N_T}$$

$$N_T I'_h = I_h$$

$$\frac{d}{dt} (N_T I'_h) = \frac{d}{dt} I_h$$

$$N_T \frac{d}{dt} I'_h = \frac{d}{dt} I_h$$

$$N_T \frac{d}{dt} I'_h = \rho_h E_h + r_2 D_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I_h$$

$$\frac{d}{dt} I'_h = \frac{\rho_h E_h}{N_T} + \frac{r_2 D_h}{N_T} - \frac{(\mu_h + r_5 + r_6) I_h}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt} I'_h = \rho_h E'_h + r_2 D'_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I'_h$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา $\frac{d}{dt}D'_h$ จะได้ว่า

จาก

$$D'_h = \frac{D_h}{N_T}$$

$$N_T D'_h = D_h$$

$$\frac{d}{dt}(N_T D'_h) = \frac{d}{dt}D_h$$

$$N_T \frac{d}{dt}D'_h = \frac{d}{dt}D_h$$

$$N_T \frac{d}{dt}D'_h = \alpha r_1 I_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D_h$$

$$\frac{d}{dt}D'_h = \frac{\alpha r_1 I_h}{N_T} - \frac{(r_2 + \mu_h + r_3) D_h}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt}D'_h = \alpha r_1 I'_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D'_h$$

หา $\frac{d}{dt}R'_h$ จะได้ว่า

จาก

$$R'_h = \frac{R_h}{N_T}$$

$$N_T R'_h = R_h$$

$$\frac{d}{dt}(N_T R'_h) = \frac{d}{dt}R_h$$

$$N_T \frac{d}{dt}R'_h = \frac{d}{dt}R_h$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$N_T \frac{d}{dt} R'_h = r_5 I_h - (\mu_h + r_4) R_h$$

$$\frac{d}{dt} R'_h = \frac{r_5 I_h}{N_T} - \frac{(\mu_h + r_4) R_h}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt} R'_h = r_5 I'_h - (\mu_h + r_4) R'_h$$

หา $\frac{d}{dt} S'_v$ จะได้ว่า

จาก

$$S'_v = \frac{S_v}{N_v}$$

$$N_v S'_v = S_v$$

$$\frac{d}{dt} (N_v S'_v) = \frac{d}{dt} S_v$$

$$N_v \frac{d}{dt} S'_v = \frac{d}{dt} S_v$$

$$N_v \frac{d}{dt} S'_v = A - (\mu_v + \gamma'_v I_h) S_v$$

$$\frac{d}{dt} S'_v = \frac{A - (\mu_v + \gamma'_v I_h) S_v}{N_v}$$

$$\frac{d}{dt} S'_v = \frac{A}{N_v} - (\mu_v + \gamma'_v I_h) S'_v$$

จาก $\mu_v = \frac{A}{N_v}$ และ $I_h = N_T I'_h$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} S'_v = \mu_v - (\mu_v + \gamma'_v N_T I'_h) S'_v$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา $\frac{d}{dt}I'_v$ จะได้ว่า

จาก

$$I'_v = \frac{I_v}{N_v}$$

$$N_v I'_v = I_v$$

$$\frac{d}{dt}(N_v I'_v) = \frac{d}{dt}I_v$$

$$N_v \frac{d}{dt}I'_v = \frac{d}{dt}I_v$$

$$N_v \frac{d}{dt}I'_v = \rho_v E_v - \mu_v I_v$$

$$\frac{d}{dt}I'_v = \frac{\rho_v E_v}{N_v} - \frac{\mu_v I_v}{N_v}$$

$$\frac{d}{dt}I'_v = \rho_v E'_v - \mu_v I'_v$$

หา $\frac{d}{dt}E'_v$ จะได้ว่า

จาก

$$E'_v = \frac{E_v}{N_v}$$

$$N_v E'_v = E_v$$

$$\frac{d}{dt}(N_v E'_v) = \frac{d}{dt}E_v$$

$$N_v \frac{d}{dt}E'_v = \frac{d}{dt}E_v$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$N_v \frac{d}{dt} E'_v = \gamma'_v I_h S_v - (\mu_v + \rho_v) E_v$$

$$\frac{d}{dt} E'_v = \frac{\gamma'_v I_h S_v}{N_v} - \frac{(\mu_v + \rho_v) E_v}{N_v}$$

$$\frac{d}{dt} E'_v = \gamma'_v I_h S'_v - (\mu_v + \rho_v) E'_v$$

จาก $I_h = N_T I'_h$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} E'_v = \gamma'_v N_T I'_h S'_v - (\mu_v + \rho_v) E'_v$$

จะได้สองเงื่อนไขใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} S'_h + I'_h + R'_h + E'_h + D'_h &= \frac{S_h}{N_T} + \frac{I_h}{N_T} + \frac{R_h}{N_T} + \frac{E_h}{N_T} + \frac{D_h}{N_T} \\ &= \frac{S_h + I_h + R_h + E_h + D_h}{N_T} \end{aligned}$$

จาก $N_T = S_h + I_h + R_h + E_h + D_h$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S'_h + I'_h + R'_h + E'_h + D'_h &= \frac{N_T}{N_T} \\ &= 1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} S'_v + I'_v + E'_v &= \frac{S_v}{N_v} + \frac{I_v}{N_v} + \frac{E_v}{N_v} \\ &= \frac{S_v + I_v + E_v}{N_v} \end{aligned}$$

จาก $N_v = S_v + E_v + I_v$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S'_v + I'_v + E'_v &= \frac{N_v}{N_v} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d}{dt} S'_h = \mu_h + r_3 D'_h + r_1 E'_h + r_6 I'_h + r_4 R'_h - (\mu_h + \gamma'_h I'_v N_v) S'_h - \alpha r_1 I'_h$$

$$\frac{d}{dt} E'_h = \gamma'_h I'_v N_v S'_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E'_h$$

$$\frac{d}{dt} I'_h = \rho_h E'_h + r_2 D'_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I'_h$$

$$\frac{d}{dt} D'_h = \alpha r_1 I'_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D'_h$$

$$\frac{d}{dt} I'_v = \rho_v E'_v - \mu_v I'_v$$

$$\frac{d}{dt} E'_v = \gamma'_v N_v I'_h S'_v - (\mu_v + \rho_v) E'_v$$

โดยที่ $S'_h + I'_h + R'_h + E'_h + D'_h = 1$ และ $S'_v + I'_v + E'_v = 1$

จุดสมดุล $(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ หาได้จากการจัดสมการข้างต้นให้เท่ากับศูนย์ จะได้

จาก $\mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 R_h^* - (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v) S_h^* - \alpha r_1 I_h^* = 0$ จะได้

$$(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v) S_h^* = \mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 R_h^* - \alpha r_1 I_h^*$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 R_h^* - \alpha r_1 I_h^*}{\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v} \quad (4.1)$$

จาก $\gamma'_h I_v^* N_v S_h^* - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h^* = 0$ จะได้

$$(r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h^* = \gamma'_h I_v^* N_v S_h^*$$

$$E_h^* = \frac{\gamma'_h I_v^* N_v S_h^*}{r_1 + \rho_h + \mu_h} \quad (4.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก $\rho_h E_h^* + r_2 D_h^* - (\mu_h + r_5 + r_6) I_h^* = 0$ จะได้

$$(\mu_h + r_5 + r_6) I_h^* = \rho_h E_h^* + r_2 D_h^*$$

$$I_h^* = \frac{\rho_h E_h^* + r_2 D_h^*}{\mu_h + r_5 + r_6} \quad (4.3)$$

จาก $\alpha r_1 I_h^* - (r_2 + \mu_h + r_3) D_h^* = 0$ จะได้

$$(r_2 + \mu_h + r_3) D_h^* = \alpha r_1 I_h^*$$

$$D_h^* = \frac{\alpha r_1 I_h^*}{r_2 + \mu_h + r_3} \quad (4.4)$$

จาก $\rho_v E_v^* - \mu_v I_v^* = 0$ จะได้

$$\mu_v I_v^* = \rho_v E_v^*$$

$$I_v^* = \frac{\rho_v E_v^*}{\mu_v}$$

(4.5)

จาก $\gamma'_v N_T I_h^* S_v^* - (\mu_v + \rho_v) E_v^* = 0$ จะได้

$$(\mu_v + \rho_v) E_v^* = \gamma'_v N_T I_h^* S_v^*$$

$$E_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* S_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

(4.6)

จาก $R_h^* = 1 - S_h^* - I_h^* - E_h^* - D_h^*$ และ $S_v^* = 1 - I_v^* - E_v^*$ แทนค่าในสมการ (4.1) , (4.6)

และแทน $I_v^* = \frac{\rho_v E_v^*}{\mu_v}$ ลงในสมการ (4.1)

จะได้สมการ (4.1) ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
 S_h^* &= \frac{\mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 R_h^* - \alpha r_1 I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 S_h^* &= \frac{\mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 (1 - S_h^* - I_h^* - E_h^* - D_h^*) - \alpha r_1 I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 S_h^* &= \frac{\mu_h + r_3 D_h^* + r_1 E_h^* + r_6 I_h^* + r_4 - r_4 S_h^* - r_4 I_h^* - r_4 E_h^* - r_4 D_h^* - \alpha r_1 I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 S_h^* &= \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 - r_4 S_h^* + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 S_h^* + \frac{r_4 S_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} &= \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 \frac{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v S_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} + \frac{r_4 S_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} &= \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 \left(\frac{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \right) S_h^* &= \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \\
 S_h^* &= \left[\frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v} \right] \left[\frac{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4} \right] \\
 S_h^* &= \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) D_h^* + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4} \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้สมการ (4.6) ใหม่ดังนี้

$$E_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* S_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

$$E_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* (1 - I_v^* - E_v^*)}{\mu_v + \rho_v}$$

$$E_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* - \gamma'_v N_T I_h^* I_v^* - \gamma'_v N_T I_h^* E_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

$$E_v^* + \frac{\gamma'_v N_T I_h^* E_v^*}{\mu_v + \rho_v} = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* - \gamma'_v N_T I_h^* I_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

$$\frac{\mu_v + \rho_v}{\mu_v + \rho_v} E_v^* + \frac{\gamma'_v N_T I_h^* E_v^*}{\mu_v + \rho_v} = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* - \gamma'_v N_T I_h^* I_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

$$\left(\frac{\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*}{\mu_v + \rho_v} \right) E_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* - \gamma'_v N_T I_h^* I_v^*}{\mu_v + \rho_v}$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* - \gamma'_v N_T I_h^* I_v^*}{\mu_v + \rho_v} \right] \left[\frac{\mu_v + \rho_v}{\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*} \right]$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v - \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v E_v^*}{\mu_v} \right] \left[\frac{\mu_v + \rho_v}{\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*} \right]$$

$$E_v^* + \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v E_v^*}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)} = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}$$

$$\frac{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) E_v^*}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)} + \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v E_v^*}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)} = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{(\mu_v^2 + \mu_v \rho_v + \mu_v \gamma'_v N_T I_h^* + \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v) E_v^*}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)} = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)} \right] \left[\frac{\mu_v (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}{\mu_v^2 + \mu_v \rho_v + \mu_v \gamma'_v N_T I_h^* + \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v} \right]$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v^2 + \mu_v \rho_v + \mu_v \gamma'_v N_T I_h^* + \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v} \right]$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v) + \gamma'_v N_T I_h^* (\mu_v + \rho_v)} \right]$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)} \right]$$

(8)

จะได้

$$I_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v \rho_v}{\mu_v (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)}$$

$$I_h^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)}$$

นำสมการ (4.2) , (4.4) แทนลงไปนสมการ (4.7)

$$S_h^* = \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) \left(\frac{\alpha r_1 I_h^*}{r_2 + \mu_h + r_3} \right) + (r_1 - r_4) E_h^* + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4}$$

$$S_h^* - \frac{(r_1 - r_4) \frac{\gamma'_h I_v^* N_v S_h^*}{r_1 + \rho_h + \mu_h}}{\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4} = \frac{\mu_h + (r_3 - r_4) \left(\frac{\alpha r_1 I_h^*}{r_2 + \mu_h + r_3} \right) + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4}$$

$$\frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) S_h^* - (r_1 - r_4) \gamma'_h I_v^* N_v S_h^*}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_h (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^* + r_4 (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_2 + \mu_h + r_3) (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \\
&\left[\frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4) - (r_1 - r_4) \gamma_h' I_v^* N_v}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \right] S_h^* \\
&= \frac{\mu_h (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^* + r_4 (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_2 + \mu_h + r_3) (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \\
&\left[\frac{r_1 \mu_h + \rho_h \mu_h + \mu_h^2 + r_1 \gamma_h' I_v^* N_v + \rho_h \gamma_h' I_v^* N_v + \mu_h \gamma_h' I_v^* N_v + r_1 r_4 + \rho_h r_4 + \mu_h r_4 - r_1 \gamma_h' I_v^* N_v + r_4 \gamma_h' I_v^* N_v}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \right] S_h^* \\
&= \frac{\mu_h (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^* + r_4 (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_2 + \mu_h + r_3) (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \\
&\left[\frac{r_1 \mu_h + \rho_h \mu_h + \mu_h^2 + \rho_h \gamma_h' I_v^* N_v + \mu_h \gamma_h' I_v^* N_v + r_1 r_4 + \rho_h r_4 + \mu_h r_4 + r_4 \gamma_h' I_v^* N_v}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \right] S_h^* \\
&= \frac{\mu_h (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^* + r_4 (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_2 + \mu_h + r_3) (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3) (\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)} \\
S_h^* &= \left[\frac{\mu_h (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^* + r_4 (r_2 + \mu_h + r_3) + (r_2 + \mu_h + r_3) (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^*}{r_1 \mu_h + \rho_h \mu_h + \mu_h^2 + \rho_h \gamma_h' I_v^* N_v + \mu_h \gamma_h' I_v^* N_v + r_1 r_4 + \rho_h r_4 + \mu_h r_4 + r_4 \gamma_h' I_v^* N_v} \right] \left[\frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h)}{(r_2 + \mu_h + r_3)} \right] \\
S_h^* &= \left[\frac{(r_2 + \mu_h + r_3) \left(\mu_h + \frac{(r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3)} + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^* \right)}{\mu_h (r_1 + \rho_h + \mu_h) + \gamma_h' I_v^* N_v (\rho_h + \mu_h + r_4) + r_4 (r_1 + \rho_h + \mu_h)} \right] \left[\frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h)}{(r_2 + \mu_h + r_3)} \right] \\
S_h^* &= \left[\frac{(r_2 + \mu_h + r_3) \left(\mu_h + \frac{(r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3)} + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^* \right)}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + r_4) + \gamma_h' I_v^* N_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} \right] \left[\frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h)}{(r_2 + \mu_h + r_3)} \right] \\
S_h^* &= \frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h) \left(\mu_h + \frac{(r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3)} + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^* \right)}{(r_1 + \rho_h + \mu_h) (\mu_h + r_4) + \gamma_h' I_v^* N_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}
\end{aligned}$$

กำหนดให้

$$r_1 + \rho_h + \mu_h = \mu_{\rho h}$$

$$r_2 + \mu_h + r_3 = \mu_{h23}$$

$$\mu_v + \rho_v = \mu_{\rho v}$$

$$r_6 - r_4 - \alpha r_1 = \alpha_{14}$$

$$r_3 - r_4 = r_{34}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$S_h^* = \frac{(r_1 + \rho_h + \mu_h) \left(\mu_h + \frac{(r_3 - r_4) \alpha r_1 I_h^*}{(r_2 + \mu_h + r_3)} + r_4 + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I_h^* \right)}{(r_1 + \rho_h + \mu_h)(\mu_h + r_4) + \gamma'_h I_v^* N_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$S_h^* = \frac{\mu \rho_{h1} \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} (\mu_h + r_4) + \frac{\gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)} (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$S_h^* = \frac{\mu \rho_{h1} \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)}{\mu \rho_{h1} (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$S_h^* = \frac{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

จาก

$$E_h^* = \frac{\gamma'_h I_v^* N_v S_h^*}{r_1 + \rho_h + \mu_h}$$

$$E_h^* = \left[\frac{\gamma'_h I_v^* N_v}{\mu \rho_{h1}} \right] \left[\frac{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} \right]$$

$$E_h^* = \frac{\gamma'_h I_v^* N_v \mu \rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_h^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \mu \rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$E_h^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$D_h^* = \frac{\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}$$

พิจารณาสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$I_h^* = \frac{\rho_h E_h^* + r_2 D_h^*}{\mu_h + r_5 + r_6}$$

$$I_h^* = \frac{\rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} + \frac{r_2 \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}$$

$$(\mu_h + r_5 + r_6) I_h^* = \frac{\rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} + \frac{r_2 \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}$$

$$(\mu_h + r_5 + r_6) I_h^* - \frac{r_2 \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} = \frac{\rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$\frac{(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) I_h^*}{\mu_{h23}} = \frac{\rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v (\mu_{h23} \mu_h + r_{34} \alpha r_1 I_h^* + \mu_{h23} r_4 + \mu_{h23} \alpha_{14} I_h^*)}{\mu_{h23} [\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)]}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) I_h^* = \frac{\rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v (\mu_{h23} \mu_h + r_{34} \alpha r_1 I_h^* + \mu_{h23} r_4 + \mu_{h23} \alpha_{14} I_h^*)}{[\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)]}$$

$$\begin{aligned} & [(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) I_h^*] [\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)] \\ & = \rho_h \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v (\mu_{h23} \mu_h + r_{34} \alpha r_1 I_h^* + \mu_{h23} r_4 + \mu_{h23} \alpha_{14} I_h^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) I_h^*] [\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)] \\ & = (\mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2 + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) I_h^* + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T (I_h^*)^2 \\ & + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) (I_h^*)^2 \\ & = (\mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2 + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) I_h^* + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T (I_h^*)^2 \\ & + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) (I_h^*)^2 \\ & = \mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2 + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v I_h^* + \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v (I_h^*)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left((\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) \right) (I_h^*)^2 \\ & - r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v \\ & + (\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) - \mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v) I_h^* = 0 \end{aligned}$$

$$\left[\left((\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) \right) I_h^* \right. \\ \left. - r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v \right. \\ \left. + (\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) - \mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v) \right] I_h^* = 0$$

จึงได้ $I_h^* = 0$ และ

$$\left[\left((\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) \right) I_h^* \right. \\ \left. - r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v \right. \\ \left. + (\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) - \mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v) \right] = 0$$

$$I_h^* = \frac{\mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4)}{(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T + (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4) - r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v}$$

$$I_h^* = \frac{\mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4)}{[(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) (\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) \gamma'_v N_T + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)) - r_{34} \alpha r_1 \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v - \mu_{h23} \alpha_{14} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v]}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาที่ $I_h^* = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} E_h^* &= 0 & D_h^* &= 0 & S_h^* &= 1 \\ E_v^* &= 0 & I_v^* &= 0 \end{aligned}$$

ภายใต้สภาวะไร้โรคจะได้จุดสมดุล $E_1 (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ คือ $E_1 (0, 1, 0, 0, 0, 0)$

ภายใต้สภาวะระบาดเร็วจะได้จุดสมดุล $E_2 (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ เมื่อ

$$\begin{aligned} I_h^* &= \frac{\mu_{h23}\mu_h\rho_v\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + \mu_{h23}r_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_h(\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu_{h1}\mu_{\rho_v}(\mu_h + r_4)}{\left[(\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)(\mu_{h1}\mu_{\rho_v}(\mu_h + r_4)\gamma_v N_T + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v}(\rho_h + \mu_h + r_4)) - r_3\alpha_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_{h23}\alpha_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v \right]} \\ S_h^* &= \frac{\mu_{h1}\mu_{\rho_v} \left(\mu_h + \frac{r_3\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v' N_T I_h^*)}{\mu_{h1}\mu_{\rho_v} (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma_v' N_T I_h^*) + \gamma_h' N_v \gamma_v' N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} \\ E_h^* &= \frac{\gamma_v' N_T I_h^* \rho_v \gamma_h' N_v \left(\mu_h + \frac{r_3\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu_{h1}\mu_{\rho_v} (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma_v' N_T I_h^*) + \gamma_h' N_v \gamma_v' N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} \\ D_h^* &= \frac{\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} \\ I_v^* &= \frac{\gamma_v' N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma_v' N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)} \\ E_v^* &= \left[\frac{\gamma_v' N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v) + \gamma_v' N_T I_h^* (\mu_v + \rho_v)} \right] \end{aligned}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเร็วจะพบว่า $I_h^* > 0$ เมื่อ

จาก

$$I_h^* = \frac{\mu_{h23}\mu_h\rho_v\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + \mu_{h23}r_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_h(\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu_{h1}\mu_{\rho_v}(\mu_h + r_4)}{\left[(\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)(\mu_{h1}\mu_{\rho_v}(\mu_h + r_4)\gamma_v N_T + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v}(\rho_h + \mu_h + r_4)) - r_3\alpha_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_{h23}\alpha_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v \right]}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v + \mu_{h23}r_4\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v - \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)}{\left[(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)(\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)\gamma_v N_T + \gamma_h N_v\gamma_v N_{TPv}(\rho_h + \mu_h + r_4)) - r_3\alpha_1\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v - \mu_{h23}\alpha_{14}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v \right]} > 0$$

$$\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v + \mu_{h23}r_4\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v - \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4) > 0$$

$$\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v + \mu_{h23}r_4\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v > \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)$$

$$(\mu_h + r_4)\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v > \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)$$

$$\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v > \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v$$

นั่นคือ $I_h^* > 0$ เมื่อ

$$\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v > \mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v$$

$$\frac{\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v}{\mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v} > 1$$

$$R_0 > 1$$

เมื่อ $R_0 = \frac{\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{TPv}\gamma_h N_v}{\mu_v(\mu_h\mu_{h23} + r_5\mu_{h23} + r_6\mu_{h23} - r_2\alpha_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v}$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า $S_h^* > 0$ โดยที่

$$S_h^* = \frac{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34}\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*)}{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)(\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v \gamma_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34}\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*)}{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v(\mu_h + r_4)(\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v \gamma_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} > 0$$

$$\mu\rho_{h1}\mu\rho_v \left(\mu_h + \frac{r_{34}\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) > 0$$

$$\mu_v + \gamma_v N_T I_h^* > 0$$

$$I_h^* > \frac{-\mu_v}{\gamma_v N_T}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$\frac{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v\left(\mu_h+\frac{r_{34}\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}+r_4+\alpha_{14}I_h^*\right)\left(\mu_v+\gamma'_v N_T I_h^*\right)}{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v\left(\mu_h+r_4\right)\left(\mu_v+\gamma'_v N_T I_h^*\right)+\gamma'_h N_v\gamma'_v N_T I_h^*\rho_v\left(\rho_h+\mu_h+r_4\right)}>0$$

$$\mu\rho_{h1}\mu\rho_v\left(\mu_h+\frac{r_{34}\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}+r_4+\alpha_{14}I_h^*\right)\left(\mu_v+\gamma'_v N_T I_h^*\right)>0$$

$$\mu_h+\frac{r_{34}\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}+r_4+\alpha_{14}I_h^*>0$$

$$I_h^*>\frac{\mu_{h23}\left(-\mu_h-r_4\right)}{r_{34}\alpha r_1+\alpha_{14}\mu_{h23}}$$

นั่นคือ $S_h^* > 0$ เมื่อ $I_h^* > \frac{-\mu_v}{\gamma'_v N_T}$ หรือ $I_h^* > \frac{\mu_{h23}\left(-\mu_h-r_4\right)}{r_{34}\alpha r_1+\alpha_{14}\mu_{h23}}$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า $E_h^* > 0$ โดยที่

$$E_h^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} > 0$$

$$\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) > 0$$

$$\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v > 0$$

$$I_h^* > 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu \rho_{h1} \mu \rho_v (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + \gamma'_h N_v \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)} > 0$$

$$\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \gamma'_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) > 0$$

$$\mu_h + \frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* > 0$$

$$\frac{r_{34} \alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + \alpha_{14} I_h^* > -\mu_h - r_4$$

$$I_h^* > \frac{\mu_{h23} (-\mu_h - r_4)}{r_{34} \alpha r_1 + \mu_{h23} \alpha_{14}}$$

นั่นคือ $E_h^* > 0$ เมื่อ $I_h^* > 0$ หรือ $I_h^* > \frac{\mu_{h23} (-\mu_h - r_4)}{r_{34} \alpha r_1 + \mu_{h23} \alpha_{14}}$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า $D_h^* > 0$ โดยที่

$$D_h^* = \frac{\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\alpha r_1 I_h^*}{\mu_{h23}} > 0$$

$$I_h^* > 0$$

นั่นคือ $D_h^* > 0$ เมื่อ $I_h^* > 0$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า $I_v^* > 0$ โดยที่

$$I_v^* = \frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)(\mu_v + \rho_v)} > 0$$

$$\gamma'_v N_T I_h^* \rho_v > 0$$

$$I_h^* > 0$$

นั่นคือ $I_v^* > 0$ เมื่อ $I_h^* > 0$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเร็วรั้งจะพบว่า $E_v^* > 0$ โดยที่

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)(\mu_v + \rho_v)} \right]$$

จะได้ว่า

$$\frac{\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v}{(\mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)(\mu_v + \rho_v)} > 0$$

$$\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v > 0$$

$$I_h^* > 0$$

นั่นคือ $E_v^* > 0$ เมื่อ $I_h^* > 0$

จากการพิจารณาข้างต้นพบว่าเงื่อนไขที่ทำให้ $I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*$ มีค่ามากกว่าศูนย์คือ

$$\mu_{h23} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v > \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v$$

$$\frac{\mu_{h23} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v}{\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v} > 1$$

$$R_0 > 1$$

$$\text{เมื่อ } R_0 = \frac{\mu_{h23} \rho_h \gamma'_v N_T \rho_v \gamma'_h N_v}{\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$X_1 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \rho_h E'_h + r_2 D'_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I'_h$$

$$X_2 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \mu_h + (r_3 - r_4) D'_h + (r_1 - r_4) E'_h + (r_6 - r_4 - \alpha r_1) I'_h + r_4 - (\mu_h + \gamma'_h I'_v N_v + r_4) S'_h$$

$$X_3 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \gamma'_h I'_v N_v S'_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E'_h$$

$$X_4 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \alpha r_1 I'_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D'_h$$

$$X_5 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \rho_v E'_v - \mu_v I'_v$$

$$X_6 (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \gamma'_v N_T I'_h (1 - I'_v) - (\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I'_h) E'_v$$

จะได้ Jacobain Matrix คือ

$$J = \begin{pmatrix} X_{1I'_h} & X_{1S'_h} & X_{1E'_h} & X_{1D'_h} & X_{1I'_v} & X_{1E'_v} \\ X_{2I'_h} & X_{2S'_h} & X_{2E'_h} & X_{2D'_h} & X_{2I'_v} & X_{2E'_v} \\ X_{3I'_h} & X_{3S'_h} & X_{3E'_h} & X_{3D'_h} & X_{3I'_v} & X_{3E'_v} \\ X_{4I'_h} & X_{4S'_h} & X_{4E'_h} & X_{4D'_h} & X_{4I'_v} & X_{4E'_v} \\ X_{5I'_h} & X_{5S'_h} & X_{5E'_h} & X_{5D'_h} & X_{5I'_v} & X_{5E'_v} \\ X_{6I'_h} & X_{6S'_h} & X_{6E'_h} & X_{6D'_h} & X_{6I'_v} & X_{6E'_v} \end{pmatrix} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v)$$

โดยสมาชิกของจาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$X_{1I'_h} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = -(\mu_h + r_5 + r_6)$$

$$X_{1S'_h} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = 0$$

$$X_{1E'_h} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = \rho_h$$

$$X_{1D'_h} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = r_2$$

$$X_{1I'_v} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = 0$$

$$X_{1E'_v} (I'_h, S'_h, E'_h, D'_h, I'_v, E'_v) = 0$$

$$X_{2I_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = r_6 - r_4 - \alpha r_1$$

$$X_{2S_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -(\mu_h + \gamma_h' I_v^* N_v + r_4)$$

$$X_{2E_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = r_1 - r_4$$

$$X_{2D_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = r_3 - r_4$$

$$X_{2I_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -\gamma_h' N_v S_h^*$$

$$X_{2E_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{3I_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{3S_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = \gamma_h' I_v^* N_v$$

$$X_{3E_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -(r_1 + \rho_h + \mu_h)$$

$$X_{3D_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{3I_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = \gamma_h' N_v S_h^*$$

$$X_{3E_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{4I_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = \alpha r_1$$

$$X_{4S_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{4E_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{4D_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -(r_2 + \mu_h + r_3)$$

$$X_{4I_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{4E_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{5I_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{5S_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{5E_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{5D_h'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{5I_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -\mu_v$$

$$X_{5E_v'} (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = \rho_v$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$X_{6I_h'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = \gamma_v' N_T (1 - I_v^* - E_v^*)$$

$$X_{6S_h'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{6E_h'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{6D_h'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = 0$$

$$X_{6I_v'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -\gamma_v' N_T I_h^*$$

$$X_{6E_v'}(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*) = -(\mu_v + \rho_v + \gamma_v' N_T I_h^*)$$

ซึ่งสามารถนำมาเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ดังนี้

$$J = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha_1 & -(\mu_h + \gamma_h' I_v' N_v + r_4) & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma_h' N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma_h' I_v' N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) & 0 & \gamma_h' N_v S_h^* & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_v & \rho_v \\ \gamma_v' N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_v' N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma_v' N_T I_h^*) \end{pmatrix}_{(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)}$$

ค่าเฉพาะของสมการหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_6) = 0$$

เมื่อ I_6 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 6×6

$$I_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1(0,1,0,0,0)$ จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมดุลดังนี้

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma'_h I_v^* N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) & 0 & \gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & \rho_v \\ \gamma'_v N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma'_v N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \end{pmatrix}_{(0,1,0,0,0)}$$

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + r_4) & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v & 0 \\ 0 & 0 & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) & 0 & \gamma'_h N_v & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & \rho_v \\ \gamma'_v N_T & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_v + \rho_v) \end{pmatrix}_{(0,1,0,0,0)}$$

$$J_{E_1} - \lambda I_6 = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + r_4) - \lambda & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v & 0 \\ 0 & 0 & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda & 0 & \gamma'_h N_v & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & \rho_v \\ \gamma'_v N_T & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_v + \rho_v) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + r_4) - \lambda & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v & 0 \\ 0 & 0 & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda & 0 & \gamma'_h N_v & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & \rho_v \\ \gamma'_v N_T & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_v + \rho_v) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\mu_h - r_5 - r_6 - \lambda)(-\mu_h - r_4 - \lambda)(-\tau_1 - \rho_h - \mu_h - \lambda)(-\tau_2 - \mu_h - r_3 - \lambda)(-\mu_v - \lambda)(-\mu_v - \rho_v - \lambda)$$

$$= 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$\begin{array}{ll}
 -\mu_h - r_5 - r_6 - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -\mu_h - r_5 - r_6 \\
 -\mu_h - r_4 - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -\mu_h - r_4 \\
 -r_1 - \rho_h - \mu_h - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -r_1 - \rho_h - \mu_h \\
 -r_2 - \mu_h - r_3 - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -r_2 - \mu_h - r_3 \\
 -\mu_v - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -\mu_v \\
 -\mu_v - \rho_v - \lambda = 0 & , \quad \lambda = -\mu_v - \rho_v
 \end{array}$$

จากค่าเฉพาะทั้ง 6 ค่า พบว่ามีค่าเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพ[6]-[10]
เมื่อ $R_0 < 1$

2) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล $E_2 (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ เมื่อ

$$I_h^* = \frac{\mu_{h23} \mu_h \rho_h \gamma_v N_T \rho_v \gamma_h N_v + \mu_{h23} r_4 \rho_h \gamma_v N_T \rho_v \gamma_h N_v \mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha_1) \mu_{h1} \mu_{h1} \mu_{h1} (\mu_h + r_4)}{[(\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha_1) (\mu_{h1} \mu_{h1} \mu_{h1} (\mu_h + r_4) \gamma_v N_T + \gamma_h N_v \gamma_v N_T \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)) + r_3 \alpha_1 \rho_h \gamma_v N_T \rho_v \gamma_h N_v - \mu_{h23} \alpha_1 \rho_h \gamma_v N_T \rho_v \gamma_h N_v]}$$

$$S_h^* = \frac{\mu_{h1} \mu_{h1} \mu_{h1} \left(\mu_h + \frac{r_3 \alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*)}{\mu_{h1} \mu_{h1} \mu_{h1} (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v \gamma_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$E_h^* = \frac{\gamma_v N_T I_h^* \rho_v \gamma_h N_v \left(\mu_h + \frac{r_3 \alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + r_4 + \alpha_{14} I_h^* \right)}{\mu_{h1} \mu_{h1} \mu_{h1} (\mu_h + r_4) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v \gamma_v N_T I_h^* \rho_v (\rho_h + \mu_h + r_4)}$$

$$D_h^* = \frac{\alpha_1 I_h^*}{\mu_{h23}}$$

$$I_v^* = \frac{\gamma_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)}$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v) + \gamma_v N_T I_h^* (\mu_v + \rho_v)} \right]$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ดังนี้

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma'_h I_v^* N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) & 0 & \gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & \rho_v \\ \gamma'_v N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma'_v N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \end{pmatrix} \quad (r_1, S_h, E_h^*, D_h^*, I_v, E_v)$$

$$J_{E_2} - \lambda I_6 = \begin{pmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) - \lambda & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma'_h I_v^* N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda & 0 & \gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & \rho_v \\ \gamma'_v N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma'_v N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_6) = \begin{vmatrix} -(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda & 0 & \rho_h & r_2 & 0 & 0 \\ r_6 - r_4 - \alpha r_1 & -(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) - \lambda & r_1 - r_4 & r_3 - r_4 & -\gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma'_h I_v^* N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda & 0 & \gamma'_h N_v S_h^* & 0 \\ \alpha r_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda & \rho_v \\ \gamma'_v N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma'_v N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & [(-(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda)(-\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) - \lambda)(-(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda)(-(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda)(-\mu_v - \lambda)(-\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^* - \lambda) \\ & - [(\gamma'_v N_T I_h^*)(\rho_v)(\alpha r_1)(\gamma'_h I_v^* N_v)(r_1 - r_4)(r_2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(-(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda)(-\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) - \lambda)(-(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda)(-(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda)(-\mu_v - \lambda)(-\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^* - \lambda) \\ & - [(\gamma'_v N_T I_h^*)(\rho_v)(\alpha r_1)(\gamma'_h I_v^* N_v)(r_1 - r_4)(r_2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(-(\mu_h + r_5 + r_6) - \lambda)(-\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) - \lambda)(-(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) - \lambda)(-(\tau_2 + \mu_h + r_3) - \lambda)(-\mu_v - \lambda)(-\mu_v + \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^* - \lambda) \\ & + [(\gamma'_v N_T I_h^*)(\rho_v)(\alpha r_1)(\gamma'_h I_v^* N_v)(r_1 - r_4)(r_2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(\mu_h + r_5 + r_6)(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v)\lambda + \lambda^2] [\mu \rho_{h1} \mu_{h23} + (\mu_{h23} + \mu \rho_{h1})\lambda + \lambda^2] \\ & [\mu_v (\mu \rho_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu \rho_v + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)\lambda + \lambda^2] + [(\gamma'_v N_T I_h^*)(\rho_v)(\alpha r_1)(\gamma'_h I_v^* N_v)(r_1 - r_4)(r_2)] = 0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left[\begin{aligned} & (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \lambda^2 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} \lambda \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda^2 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \lambda^3 + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \lambda^2 \\ & + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda^3 + \lambda^4 \end{aligned} \right] \left[\mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda + \lambda^2 \right]$$

$$+ \left[(\gamma'_v N_T I_h^*) (\rho_v) (\alpha_1) (\gamma'_h I_v^* N_v) (\tau_1 - \tau_4) (\tau_2) \right] = 0$$

$$\left[\begin{aligned} & (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^2 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^2 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^3 \\ & + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^2 + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^3 + \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^4 \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^2 \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^3 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^2 \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^3 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^4 + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^5 \\ & + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^4 + (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \lambda^5 \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} \lambda^2 + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda^3 \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \lambda^4 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} \lambda^3 \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda^4 + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \lambda^5 + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \lambda^4 \\ & + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \lambda^5 + \lambda^6 \end{aligned} \right]$$

$$+ \left[(\gamma'_v N_T I_h^*) (\rho_v) (\alpha_1) (\gamma'_h I_v^* N_v) (\tau_1 - \tau_4) (\tau_2) \right] = 0$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\left[\begin{aligned} & (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\gamma'_v N_T I_h^*) (\rho_v) (\alpha_1) (\gamma'_h I_v^* N_v) (\tau_1 - \tau_4) (\tau_2) \\ & + \left[(\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \right] \lambda \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ & + \left[(\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \right] \lambda^2 \\ & + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \\ & + \left[(2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \right] \lambda^3 \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \\ & + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \\ & + \left[\mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \right] \lambda^4 \\ & + (\mu_h + \tau_5 + \tau_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + \tau_4) + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \\ & + \left[\mu_{p_{h1}} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + \tau_5 + \tau_6 + \tau_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \right] \lambda^5 + \lambda^6 \\ & = 0 \end{aligned} \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$T_1 = (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\gamma'_v N_T I_h^*) (\rho_v) (\alpha_{r_1}) (\gamma'_h I_v^* N_v) (r_1 - r_4) (r_2)$$

$$T_2 = (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)$$

$$T_3 = (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \mu_{p_{h1}} \mu_{h23}$$

$$T_4 = (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}})$$

$$T_5 = \mu_v (\mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) \\ + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \\ + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}) + \mu_{p_{h1}} \mu_{h23}$$

$$T_6 = \mu_{p_{h1}} \mu_{h23} (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (\mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*) + (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v) \\ + (\mu_{h23} + \mu_{p_{h1}})$$

กำหนดให้

$$\mu_{h_{v5}} = (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \quad \mu_{2h_{v5}} = 2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v$$

$$\mu_{h23p} = \mu_{h23} + \mu_{p_{h1}}$$

$$\mu_{p_{vv}} = \mu_{p_v} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*$$

$$\mu_{p_v} = \mu_{p_v} + \gamma'_v N_T I_h^*$$

$$r_{2v} = \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \alpha_{r_1} r_2 \gamma'_h I_v^* N_v$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัดรูป $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ ใหม่ดังนี้

$$T_1 = \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + r_{2v} (r_1 - r_4)$$

$$T_2 = \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}$$

$$T_3 = \mu_{hv5} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23}$$

$$T_4 = \mu_{2hv5} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}$$

$$T_5 = \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{pvv} + \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} + \mu_{h1} \mu_{h23}$$

$$T_6 = \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}$$

จะได้ $\lambda^6 + T_6 \lambda^5 + T_5 \lambda^4 + T_4 \lambda^3 + T_3 \lambda^2 + T_2 \lambda + T_1 = 0$

พิจารณา $T_1 > 0$ เมื่อ

จาก $T_1 = \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + r_{2v} (r_1 - r_4)$

จะได้ว่า

$$\mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + r_{2v} r_1 - r_{2v} r_4 > 0$$

$$\mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + r_{2v} r_1 > r_{2v} r_4$$

นั่นคือ $T_1 > 0$ เมื่อ

$$\mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + r_{2v} r_1 > r_{2v} r_4$$

พิจารณา $T_2 > 0$ เมื่อ

จาก $T_2 = \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน T_2 เป็นบวกหมดส่งผลให้ T_2 มีค่าเป็นบวกเสมอ

พิจารณา $T_3 > 0$ เมื่อ

จาก $T_3 = \mu_{hv5} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h1} \mu_{h23}$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน T_3 เป็นบวกหมดส่งผลให้ T_3 มีค่าเป็นบวกเสมอ

พิจารณา $T_4 > 0$ เมื่อ

จาก $T_4 = \mu_{2hv5} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{h23p} \mu_{v} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน T_4 เป็นบวกหมดส่งผลให้ T_4 มีค่าเป็นบวกเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา $T_5 > 0$ เมื่อ

$$\text{จาก } T_5 = \mu_v \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{pvv} + \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} + \mu_{p h1} \mu_{h23}$$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน T_5 เป็นบวกหมดส่งผลให้ T_5 มีค่าเป็นบวกเสมอ

พิจารณา $T_6 > 0$ เมื่อ

$$\text{จาก } T_6 = \mu_{p h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}$$

จะได้ว่าทุกพจน์ใน T_6 เป็นบวกหมดส่งผลให้ T_6 มีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้นจากการพิจารณาค่า $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ พบว่าทุกค่ามีค่ามากกว่าศูนย์

จาก The Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (T_6) \quad H_2 = \begin{pmatrix} T_6 & 1 \\ T_4 & T_5 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} T_6 & 1 & 0 \\ T_4 & T_5 & T_6 \\ T_2 & T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} T_6 & 1 & 0 & 0 \\ T_4 & T_5 & T_6 & 1 \\ T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ 0 & T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \quad H_5 = \begin{pmatrix} T_6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_4 & T_5 & T_6 & 1 & 0 \\ T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \\ 0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 \end{pmatrix} \quad H_6 = \begin{pmatrix} T_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_4 & T_5 & T_6 & 1 & 0 & 0 \\ T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 1 \\ 0 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & T_2 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = T_6$$

$$\det H_2 = T_6 T_5 - T_4$$

$$\det H_3 = T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 T_6^2 - T_4^2$$

$$\det H_4 = T_3 (T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2 (T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2) + T_6 T_1 (T_6 T_5 - T_4)$$

$$\det H_5 = T_2 (T_3 (T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2 (T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2))$$

$$+ T_1 (T_6 T_4 (T_6 T_3 - 3T_2) + T_4^2 + T_6 (2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1))$$

$$\det H_6 = T_1 (T_2 (T_3 (T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2 (T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2)))$$

$$+ T_1 (T_6 T_4 (T_6 T_3 - 3T_2) + T_4^2 + T_6 (2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1))$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = T_6 > 0$$

$$\det H_2 = T_6 T_5 - T_4 > 0$$

$$\det H_3 = T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 T_6^2 - T_4^2 > 0$$

$$\det H_4 = T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2) + T_6 T_1(T_6 T_5 - T_4) > 0$$

$$\det H_5 = T_2(T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2)) \\ + T_1(T_6 T_4(T_6 T_3 - 3T_2) + T_4^2 + T_6(2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1)) > 0$$

$$\det H_6 = T_1(T_2(T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2))) \\ + T_1(T_6 T_4(T_6 T_3 - 3T_2) + T_4^2 + T_6(2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1)) > 0$$

พิจารณาเงื่อนไขข้างต้นดังนี้

พิจารณา $T_6 > 0$

$$\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} + \mu_{h23p} > 0$$

ดังนั้น $T_6 > 0$

พิจารณา $T_6 T_5 - T_4 > 0$

$$T_6 T_5 = (\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}) (\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}) \\ = \mu_v\mu_{pv}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + \mu_{hv5}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} \\ + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu^2\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 \\ + \mu_{hv5}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{2hv5}\mu_{pvv} \\ + \mu_{hv5}\mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{2hv5} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 \\ + \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{h23p} \\ - T_4 = -\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} - \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} - \mu_{hv5}\mu_{pvv} - \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} - \mu_{hv5}\mu_{h23p}$$

$$T_6 T_5 - T_4 = -\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} - \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} - \mu_{hv5}\mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{pvv} \\ - \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} - \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_v\mu_{pv}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} \\ + \mu_{2hv5}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + \mu_{hv5}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} \\ + \mu^2\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} \\ + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{2hv5} + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 \\ + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 + \mu\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{h23p}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
T_6 T_5 - T_4 &= \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2 + \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
&+ \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p} \mu_{pvv}^2 \\
&+ \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{pvv} + \mu_{h23p} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \\
&+ \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}^2 \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 + \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p}
\end{aligned}$$

$$T_6 T_5 - T_4 > 0$$

ดังนั้น $T_6 T_5 - T_4 > 0$

พิจารณา $T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 (T_6)^2 - (T_4)^2 > 0$

$$\begin{aligned}
T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 (T_6)^2 - (T_4)^2 &> 0 \\
(T_6 T_5 - T_4) T_4 + (T_2 - T_3 T_6) T_6 &> 0
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
T_6 T_5 - T_4 &= \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2 + \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
&+ \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{pvv}^2 + \mu_{h23p} \mu_{pvv}^2 \\
&+ \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{pvv} + \mu_{h23p} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \\
&+ \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}^2 \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 + \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p}
\end{aligned}$$

$$T_4 = \mu_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
T_2 - T_3 T_6 = & -\mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \\
& - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} \\
& - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p} \\
(T_2 - T_3 T_6) T_6 = & -\mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{\rho_{h1}}^3 \mu_{h23}^3 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^3 \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^3 \mu_{h23}^3 \mu_{p_{vv}}^3 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^3 \mu_{h23}^3 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \\
& - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^3 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^3 \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \\
& - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{2hv5} \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^3 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \\
& - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^3 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}}^2 \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^3 - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^3 - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{2hv5} \\
& - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}}^2 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} \\
& - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^3 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^3 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5}^2 \\
& - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} \mu_{2hv5} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p} \mu_{2hv5} \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} - \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{p_{vv}} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} \\
& - \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{p_{vv}} - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}}^2 \mu_{h23p} \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu_{h23p} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{p_{vv}} \mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{2hv5} \mu_{h23p} - \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^3 \mu_v \mu_{pv} - \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p}^2 - \mu_{hv5} \mu_{h23p}^3 \mu_{p_{vv}} \\
& - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{p_{vv}} \mu_{h23p}^2 - \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1}} \mu_{h23} \mu_{h23p}^2
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& (T_6 T_5 - T_4) T_4 + (T_2 - T_3 T_6) T_6 = \mu^2_v \mu^2_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} + \mu^2_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_v \mu_{pv} \\
& + \mu_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} + \mu^2_v \mu^2_{pv} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} + \mu^2_{2hv5} \mu^2_{pvv} \mu_v \mu_{pv} + \mu^2_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} \mu_v \mu_{pv} \\
& + \mu^3_{2hv5} \mu_{pvv} \mu_v \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} + \mu^2_v \mu^2_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} + \mu^2_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_v \mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu^2_v \mu^2_{pv} \mu_{pvv} \mu_{h23p} + \mu_{2hv5} \mu^2_{pvv} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu^2_{h23p} \mu^2_{pvv} \mu_v \mu_{pv} \\
& + \mu^2_{h23p} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} \mu_v \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu^3_{h23p} \mu_{pvv} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^3_{pvv} \mu_{hv5} \\
& + \mu^2_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_{hv5} + \mu_{2hv5} \mu^3_{pvv} \mu_{hv5} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_{hv5} \\
& + \mu^2_{2hv5} \mu^2_{pvv} \mu_{hv5} + \mu_{h23p} \mu_{2hv5} \mu^2_{pvv} \mu_{hv5} + \mu^2_{hv5} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{pvv} + \mu^2_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^3_{pvv} \mu_{h23p} \\
& + \mu^2_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^3_{pvv} \mu_{2hv5} + \mu^2_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} + \mu_v \mu_{pv} \mu^2_{pvv} \mu_{2hv5} \mu_{h23p} + \mu^2_{2hv5} \mu^3_{pvv} \mu_{h23p} \\
& + \mu^2_{h23p} \mu^3_{pvv} \mu_{2hv5} + 2\mu^2_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu^2_{pvv} + \mu^3_{2hv5} \mu^2_{pvv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu^2_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + \mu^3_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu_{pvv} \\
& + \mu^3_{h23p} \mu^2_{pvv} \mu_{2hv5} + \mu^2_{2hv5} \mu^3_{h23p} \mu_{pvv} + \mu^2_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} + \mu_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{hv5} \\
& + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{hv5} \mu_{h23p} + \mu^2_{h23p} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} \mu_{hv5} + \mu^2_{hv5} \mu_{2hv5} \mu_{h23p} + \mu^2_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu_{hv5} + \mu_{2hv5} \mu^3_{h23p} \mu_{hv5} \\
& - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^2_{pvv} - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^2_{pvv} - \mu \rho^3_{h1} \mu^3_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu^2_{pvv} \\
& - \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu^3_{pvv} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} - \mu_{2hv5} \mu \rho^3_{h1} \mu^3_{h23} \mu^3_{pvv} - \mu_{hv5} \mu \rho^3_{h1} \mu^3_{h23} \mu^2_{pvv} - 2\mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu^2_{pvv} \\
& - \mu_{2hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^3_{pvv} - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} - \mu^2_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
& - 2\mu^2_{2hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^2_{pvv} - \mu_{hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} - \mu_{2hv5} \mu^2_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
& - \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} \mu_{pvv} - \mu_{hv5} \mu^2_{h23p} \mu^2_{pvv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_{h23p} \\
& - \mu_{hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu_{h23p} \mu_{pvv} - \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} - \mu_{bv5} \mu_{h23p} \mu^3_{pvv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} - \mu_{2hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu^3_{pvv} \\
& - \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu^2_{pvv} - \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^3_{pvv} - 2\mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu_{pvv} - 2\mu^2_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \\
& - \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} \mu_{pvv} - \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{pvv} \mu_{h23p} - \mu_{hv5} \mu \rho^2_{h1} \mu^2_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} - \mu^3_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
& - \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu^2_{2hv5} - \mu^2_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} - \mu_{bv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p} \mu_{2hv5}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}^2\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv} \\ &+ \mu_{hv5}\mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}\mu_v\mu_{pv}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}^2 + 2\mu_{pvv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_v\mu_{pv} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv}\mu_{h23p} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{pvv}^3\mu_{hv5} \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{hv5}\mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 + \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{h23p}\mu_{hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{hv5} + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{hv5} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_{pvv}^3 + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^3 + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}^2 \\ &+ \mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2\mu_{pvv} + \mu_{hv5}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{h23p} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5} + \mu_{h23p}^2\mu_{hv5} \end{aligned} \right) \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{hv5} - \mu_{2hv5}\mu_{h23p} - \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}} \end{aligned} \right) \mu_v\mu_{pv}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} - \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}} - \mu_{hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}} \\ &- 2\mu_v\mu_{pv} - 2\mu_{2hv5}\mu_{pvv} - 2\mu_{2hv5}^2 - \mu_{2hv5}\mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{hv5}\mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}^2\mu_{h23p} - \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 - \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{h23p}} \\ &-\mu_{hv5}\mu_{pvv} - \mu_{pvv} - \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_v\mu_{pv}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{2hv5}} - \mu_{h23p}\mu_{pvv} - \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{h23p}} - \mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 \end{aligned} \right) \mu_{hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvy}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{pvv} - 2\mu_{2hv5} - \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvy}^2} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-\mu_{hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}} - \mu_{2hv5}^2\mu_{pvv} - \mu_{hv5}\mu_{2hv5} - \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{h23p} - \mu_{hv5}\mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}} \\
 &- 2\mu_{hv5}\mu_v\mu_{pv}\mu_{2hv5}\mu_{pvv}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 (T_6)^2 - (T_4)^2 > 0$ เมื่อ $B_1 > B_2$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}^2\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_v\mu_{pv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv} \\ &+ \mu_{hv5}\mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}\mu_v\mu_{pv}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}^2 + 2\mu_{pvv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_v\mu_{pv} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv}\mu_{h23p} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{pvv}^3\mu_{hv5} \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{hv5}\mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 + \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_{hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{h23p}\mu_{hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{\rho_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{hv5} + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{hv5} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_{pvv}^3 + \mu_{h23p}\mu_{pvv}^3 + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{pvv}^2 \\ &+ \mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}^2\mu_{pvv}^2 + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}^2\mu_{pvv} + \mu_{hv5}^2 \end{aligned} \right) \mu_{2hv5}\mu_{h23p} \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5} + \mu_{h23p}^2\mu_{hv5} \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
B_2 = & \left(\mu_{hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \right) \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv}^2 \\
& + \left(\begin{aligned} & + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \\ & + 2\mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{2hv5} \mu_{pv} + 2\mu_{2hv5}^2 + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv}^2 \\
& + \left(\begin{aligned} & + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p} \\ & + \mu_{hv5} \mu_{pv} + \mu_{pv} + \mu_{h23p} \end{aligned} \right) \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \\
& + \left(+ \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{h23p}^2 \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p} + \mu_{h23p}^2 \mu_{pv}^2 \right) \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \\
& + \left(+ \mu_{pv} + 2\mu_{2hv5} + \mu_{h23p} \right) \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv}^2 \\
& + \left(+ \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \right) \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \\
& + 2\mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \mu_{pv}
\end{aligned}$$

พิจารณา $T_3 T_6 - 3T_2 > 0$

$$\begin{aligned}
T_3 T_6 = & \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv}^2 + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} \\
& + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv}^2 \\
& + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \\
& + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \\
& + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 T_6 - 3T_2 = & -3\mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} - 3\mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \\
& - 3\mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \\
& + \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv}^2 + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv}^2 \\
& + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} \\
& + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 T_6 - 3T_2 = & -2\mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} - 2\mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} - 2\mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \\
& + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} + \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv}^2 \\
& + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1}^2 \mu_{h23}^2 \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv}^2 \\
& + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv}^2 + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{pv} + \mu_{2hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pv} \mu_{h23p} \\
& + \mu_{hv5} \mu \rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
T_3 T_6 - 3T_2 &= \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} + \mu_{\rho}^2 \mu_{h1} \mu_{h23}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv}^2 \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \\
&+ \mu_{2hv5} \mu_{\rho}^2 \mu_{h1} \mu_{h23}^2 \mu_{pvv}^2 \\
&+ \mu_{hv5} \mu_{\rho}^2 \mu_{h1} \mu_{h23}^2 \mu_{pvv} + \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} \\
&+ \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} \\
&+ \mu_{hv5} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{2hv5} + \mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} \\
&+ \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \\
&+ \mu_{hv5} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p} + \mu_{hv5} \mu_{h23p} (\mu_{pvv}^2 - 2\mu_v \mu_{pv}) + \mu_{2hv5} \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{pvv}^2 - 2\mu_v \mu_{pv}) \\
&+ \mu_{\rho} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} (\mu_{2hv5}^2 - 2\mu_{hv5}) \\
\text{พิจารณา } \mu_{pvv}^2 - 2\mu_v \mu_{pv} &\text{ เนื่องจาก}
\end{aligned}$$

$$\mu_{pvv} = \mu_{\rho} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*$$

$$\mu_{pv} = \mu_{\rho} + \gamma'_v N_T I_h^*$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\mu_{pvv}^2 - 2\mu_v \mu_{pv} &= (\mu_{\rho} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*)^2 - 2\mu_v (\mu_{\rho} + \gamma'_v N_T I_h^*) \\
&= (\mu_{\rho}^2 + \mu_v \mu_{\rho} + \gamma'_v N_T I_h^* \mu_{\rho} + \mu_v \mu_{\rho} + (\mu_v)^2 + \gamma'_v N_T I_h^* \mu_v \\
&\quad + \gamma'_v N_T I_h^* \mu_{\rho} + \gamma'_v N_T I_h^* \mu_v + (\gamma'_v N_T I_h^*)^2 - 2\mu_v \mu_{\rho} - 2\mu_v \gamma'_v N_T I_h^* \\
&= (\mu_{\rho}^2 + (\mu_v)^2 + (\gamma'_v N_T I_h^*)^2 + 2\gamma'_v N_T I_h^* \mu_{\rho} + 2\mu_v \mu_{\rho} + 2\gamma'_v N_T I_h^* \mu_v \\
&\quad - 2\mu_v \mu_{\rho} - 2\mu_v \gamma'_v N_T I_h^*) \\
&= (\mu_{\rho}^2 + (\mu_v)^2 + (\gamma'_v N_T I_h^*)^2 + 2\gamma'_v N_T I_h^* \mu_{\rho}
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \mu_{pvv}^2 - 2\mu_v \mu_{pv} > 0$$

พิจารณา $\mu_{2hv5}^2 - 2\mu_{hv5}$ เนื่องจาก

$$\mu_{hv5} = (\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4), \quad \mu_{2hv5} = 2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\mu_{2hv5}^2 - 2\mu_{hv5} &= (2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v)^2 - 2(\mu_h + r_5 + r_6) (\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4) \\
&= 2\mu_h r_5 + 2\mu_h r_6 + 2\mu_h r_4 + 2\mu_h \gamma'_h I_v^* N_v + (r_5)^2 + r_5 r_6 + r_5 r_6 + (r_6)^2 \\
&\quad + (r_4)^2 + r_4 \gamma'_h I_v^* N_v + r_4 \gamma'_h I_v^* N_v + (\gamma'_h I_v^* N_v)^2 \\
&\quad + (2\mu_h)^2 - 2(\mu_h)^2 + 2\mu_h \gamma'_h I_v^* N_v - 2\mu_h \gamma'_h I_v^* N_v + 2\mu_h r_4 - 2\mu_h r_4 \\
&\quad + 2\mu_h r_5 - 2\mu_h r_5 + 2r_5 \gamma'_h I_v^* N_v - 2r_5 \gamma'_h I_v^* N_v + 2r_4 r_5 - 2r_5 r_4 \\
&\quad + 2\mu_h r_6 - 2\mu_h r_6 + 2r_6 \gamma'_h I_v^* N_v - 2r_6 \gamma'_h I_v^* N_v + 2r_4 r_6 - 2r_4 r_6 \\
&= 2\mu_h r_5 + 2\mu_h r_6 + 2\mu_h r_4 + 2\mu_h \gamma'_h I_v^* N_v + (r_5)^2 + r_5 r_6 + r_5 r_6 + (r_6)^2 \\
&\quad + (r_4)^2 + r_4 \gamma'_h I_v^* N_v + r_4 \gamma'_h I_v^* N_v + (\gamma'_h I_v^* N_v)^2
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ดังนั้น } \mu^2_{2hv5} - 2\mu_{hv5} > 0$$

จาก $\mu^2_{2hv5} - 2\mu_{hv5} > 0$ และ $\mu^2_{p_{vv}} - 2\mu_{v,p_{vv}} > 0$ จึงทำให้ $T_3T_6 - 3T_2 > 0$ ด้วย

$$\text{พิจารณา } 2T_6T_5T_2 - T_5T_4^2 - T_6^2T_1 > 0$$

$$2T_6T_5T_2 - T_5T_4^2 - T_6^2T_1 = T_6(2T_5T_2 - T_6T_1) - T_5T_4^2$$

$$T_5T_2 = (\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p} + \mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{h23p}^2\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ \mu_{2hv5}\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + (\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23} + \mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ \mu_{h23p}\mu_{p_{vv}}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ (\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{v,p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + \mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2 + \mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2$$

$$+ \mu_{hv5}^2\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + (\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{p_{vv}}$$

$$2T_5T_2 = 2(\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p} + 2\mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2(\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23} + 2\mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2\mu_{h23p}\mu_{p_{vv}}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2(\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{v,p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2$$

$$+ 2\mu_{hv5}^2\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2(\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{p_{vv}}$$

$$T_6T_1 = (\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ \mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + \mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}r_{2v}(r_1 - r_4) + \mu_{p_{vv}}r_{2v}(r_1 - r_4) + \mu_{2hv5}r_{2v}(r_1 - r_4)$$

$$+ \mu_{h23p}r_{2v}(r_1 - r_4)$$

$$2T_5T_2 - T_6T_1 = 2(\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p} + 2\mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{v,p_{vv}} + 2(\mu_{v,p_{vv}})^2 \mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23} + 2\mu_{2hv5}\mu_{p_{vv}}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2\mu_{h23p}\mu_{p_{vv}}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

$$+ 2(\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}\mu_{v,p_{vv}} + 2\mu_{v,p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}^2$$

$$+ 2\mu_{hv5}^2\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}} + 2(\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{p_{vv}}$$

$$- (\mu_{p_{h1}}\mu_{h23})^2 \mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{v,p_{vv}} - \mu_{p_{vv}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} - \mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}}$$

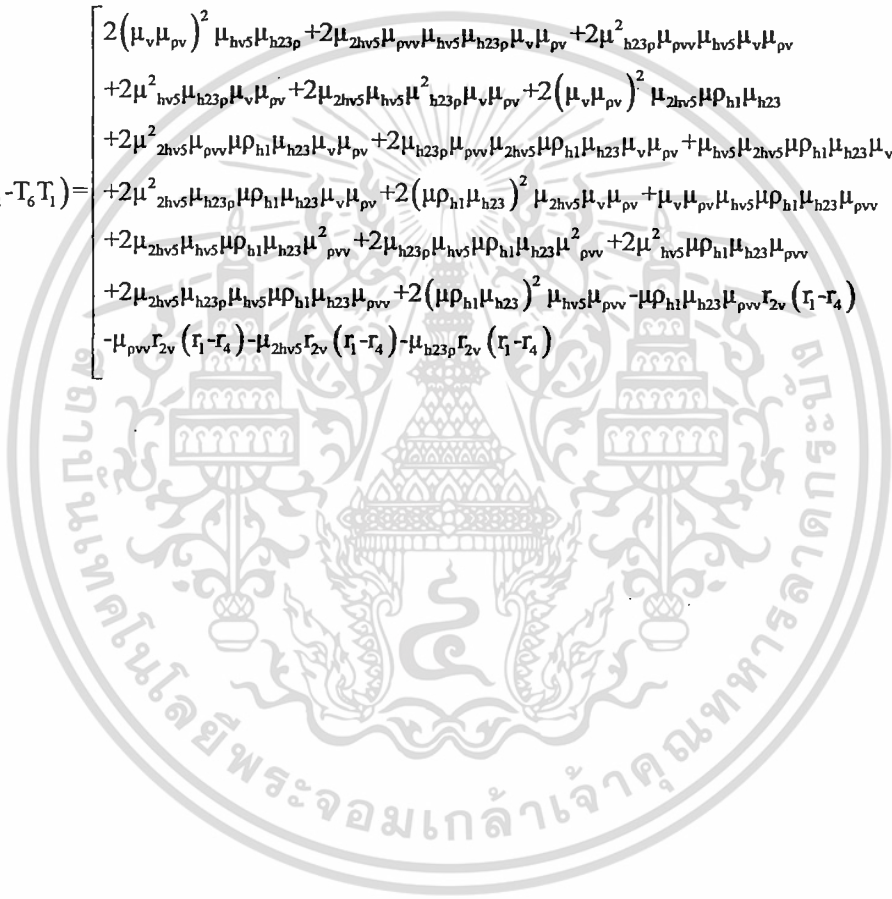
$$- \mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{v,p_{vv}} - \mu_{p_{h1}}\mu_{h23}\mu_{p_{vv}}r_{2v}(r_1 - r_4) - \mu_{p_{vv}}r_{2v}(r_1 - r_4) - \mu_{2hv5}r_{2v}(r_1 - r_4)$$

$$- \mu_{h23p}r_{2v}(r_1 - r_4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 2T_5T_2 - T_6T_1 = & 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p} + 2\mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{pvv}\mu_{hv5}\mu_v\mu_{pv} \\
 & + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} \\
 & + 2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} \\
 & + 2(\mu_{p_{h1}h_{23}})^2 \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_v\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 \\
 & + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 + 2\mu_{hv5}^2\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 \\
 & - \mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) - \mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) - \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) \\
 & - \mu_{h23p}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4)
 \end{aligned}$$

$$T_6(2T_5T_2 - T_6T_1) = \left[\begin{aligned}
 & 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p} + 2\mu_{2hv5}\mu_{pvv}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{pvv}\mu_{hv5}\mu_v\mu_{pv} \\
 & + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}} \\
 & + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} \\
 & + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_v\mu_{pv} + 2(\mu_{p_{h1}h_{23}})^2 \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_v\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}} \\
 & + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 + 2\mu_{hv5}^2\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}^2 \\
 & + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}} + 2(\mu_{p_{h1}h_{23}})^2 \mu_{hv5}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}} \\
 & - \mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) \\
 & - \mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) - \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4) \\
 & - \mu_{h23p}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{p_{h1}h_{23}}(r_1-r_4)
 \end{aligned} \right] \left[\begin{aligned}
 & \mu_{p_{h1}h_{23}}\mu_{h23p}\mu_{p_{h1}h_{23}} \\
 & + \mu_{p_{h1}h_{23}} + \mu_{2hv5} \\
 & + \mu_{h23p}
 \end{aligned} \right]$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
T_6 (2T_5 T_2 - T_6 T_1) = & 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^2 + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}} \\
& + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{2hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{pvv} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 (\mu_{pvv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{2hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_v \mu_{pv} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^3 \mu_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}})^2 \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{pvv}^3 + 2\mu_{h23p} \mu_{hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{pvv}^3 + 2\mu_{hv5}^2 (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}})^2 \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{hv5} (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}})^2 + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^3 \mu_{hv5} \mu_{pvv}^2 - (\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}})^2 r_{2v} (r_1 - r_4) \\
& - \mu_{pvv}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} r_{2v}} (r_1 - r_4) - \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} r_{2v}} (r_1 - r_4) - \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} r_{2v}} (r_1 - r_4) \\
& + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5} \mu_{pvv}^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \\
& + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv}} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{pvv} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^2 \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^3 + 2\mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^3 + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^2 \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}}^2 + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{hv5} \mu_{pvv}^2 - \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2} r_{2v} (r_1 - r_4) \\
& - \mu_{pvv}^2 r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{2hv5} \mu_{pvv} r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{h23p} \mu_{pvv} r_{2v} (r_1 - r_4) \\
& + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_{2hv5} + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{pvv} \mu_{hv5} \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv} \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} \\
& + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_v \mu_{pv} \mu_{2hv5} + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^3 \mu_{pvv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + 2\mu_{h23p} \mu_{pvv}^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^3 \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{2hv5}^2 \mu_v \mu_{pv} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2\mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5}} + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{hv5} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} - \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{2hv5} r_{2v}} (r_1 - r_4) \\
& - \mu_{pvv} \mu_{2hv5} r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{2hv5}^2 r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{h23p} \mu_{2hv5} r_{2v} (r_1 - r_4) \\
& + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 + 2\mu_{2hv5} \mu_{pvv} \mu_{hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^3 \mu_{pvv} \mu_{hv5} \mu_v \mu_{pv} \\
& + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{h23p}^2 \mu_v \mu_{pv} + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{h23p}^3 \mu_v \mu_{pv} + 2(\mu_v \mu_{pv})^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23p}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{pvv} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p}} + 2\mu_{h23p}^2 \mu_{pvv}^2 \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + \mu_{hv5} \mu_{2hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p}} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2 \mu_{h23p} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_v \mu_{pv}} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{2hv5} \mu_v \mu_{pv} \mu_{h23p} + \mu_v \mu_{pv} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p}} \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p}} + 2\mu_{h23p} \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}^2} + 2\mu_{hv5}^2 \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p}} \\
& + 2\mu_{2hv5} \mu_{h23p}^2 \mu_{hv5} \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv}} + 2(\mu_{\rho_{h1} \mu_{h23}})^2 \mu_{hv5} \mu_{pvv} \mu_{h23p} - \mu_{\rho_{h1} \mu_{h23} \mu_{pvv} \mu_{h23p} r_{2v}} (r_1 - r_4) \\
& - \mu_{pvv} \mu_{h23p} r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{2hv5} \mu_{h23p} r_{2v} (r_1 - r_4) - \mu_{h23p}^2 r_{2v} (r_1 - r_4)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& T_6(2T_5T_2 - T_6T_1) - T_5T_4^2 = 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 \\
& + 2\mu_{h23p}^2\mu_{pvv}^2\mu_{hv5}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h1}\mu_{h23} + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{h23p}^2\mu_v\mu_{pv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} \\
& + 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5}^2(\mu_{pvv}\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{pvv}^2\mu_{2hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_v\mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5}\mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^3 \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} \\
& + \mu_v\mu_{pv}\mu_{hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv})^2 + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{pvv}^3 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{pvv}^3 \\
& + 2\mu_{hv5}^2(\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv})^2 + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}(\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv})^2 + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^3 \mu_{hv5}\mu_{pvv}^2 \\
& + 2(\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{pvv}^2\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} \\
& + 2\mu_{h23p}^2\mu_{pvv}^2\mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv}\mu_{pvv} \\
& + \mu_v\mu_{pv}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + 2\mu_{2hv5}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^3 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^3 + \mu_{hv5}^2\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 \\
& + 2\mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{pvv}^2 + \mu_{hv5}^2\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv}\mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2\mu_{hv5}\mu_{h23p}^2\mu_v\mu_{pv} \\
& + (\mu_v\mu_{pv})^2 \mu_{2hv5}^2\mu_{h1}\mu_{h23} + 2\mu_{2hv5}^3\mu_{pvv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{h23p}\mu_{pvv}^2\mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} \\
& + \mu_{hv5}\mu_{2hv5}^2\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + 2\mu_{2hv5}^3\mu_{h23p}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}^2\mu_v\mu_{pv} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 + 2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2\mu_{2hv5} + 2\mu_{hv5}^2\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}\mu_{2hv5} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{pvv}\mu_{2hv5} + \mu_{2hv5}^2\mu_{pvv}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h23p} \\
& + 2\mu_{2hv5}^2\mu_{h23p}^2\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv}\mu_{h23p} + 2\mu_{h23p}^2\mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}^2 \\
& + 2(\mu_{h1}\mu_{h23})^2 \mu_{hv5}\mu_{pvv}\mu_{h23p}
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

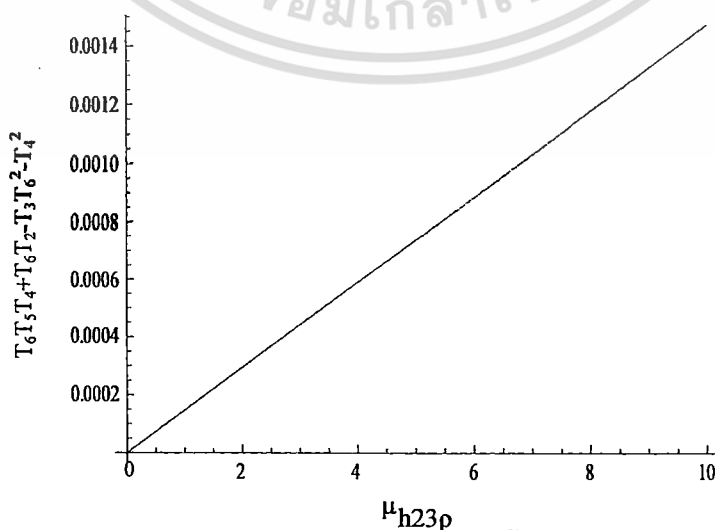
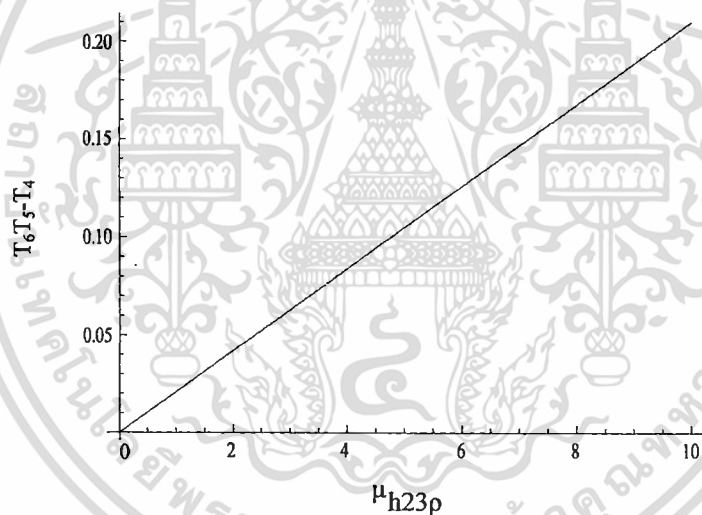
$$\begin{aligned}
 & \mu_{2h\nu 5}^2 (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^3 + \mu_{h23\rho} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^3 \mu_{2h\nu 5} + \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \\
 & + (\mu_{2h\nu 5})^3 \mu_{p\nu\nu} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^2 (\mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + (\mu_{2h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h23\rho} \mu_{h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + (\mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{h\nu 5} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{h\nu 5})^2 \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + (\mu_{h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + (\mu_{2h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \\
 & + (\mu_{2h\nu 5})^3 (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{p\nu\nu} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^3 + \mu_{h23\rho}^2 (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^3 + \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \\
 & + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{h\nu 5} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{p\nu\nu} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^3 + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{h\nu 5} (\mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + (\mu_{2h\nu 5})^2 (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{p\nu\nu} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \\
 & + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv})^2 \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \\
 & + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5})^2 \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} + \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5}^2 \mu_{h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^3 \\
 & + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^2 (\mu_{p\nu\nu})^3 \mu_{h\nu 5} + (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5})^2 (\mu_{h23\rho})^2 + \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} + (\mu_{h\nu 5})^3 \mu_{p\nu\nu}^2 \\
 & - \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} (\mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 + (\mu_{h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} (\mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 \\
 & + (\mu_{2h\nu 5})^2 (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho} \mu_{h\nu 5})^2 \mu_{p\nu\nu} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \\
 & + (\mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h23\rho})^2 \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} + \mu_{h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \\
 & + \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 + \mu_{h\nu 5} \mu_{2h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^3 \mu_{h23\rho} + (\mu_{2h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} (\mu_{p\nu\nu})^3 + \mu_{h\nu 5} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 + (\mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \\
 & + (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{p\nu\nu} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{2h\nu 5} + \mu_{h23\rho} \mu_{h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu})^3 \mu_{2h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 (\mu_{p\nu\nu})^3 + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{2h\nu 5} + \mu_{h\nu 5} \mu_{2h\nu 5} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \\
 & + (\mu_{h\nu 5} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} + \mu_{h\nu 5} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 + (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} + (\mu_{2h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{p\nu\nu} + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{p\nu\nu} \\
 & + \mu_{h\nu 5} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 + (\mu_{2h\nu 5})^3 (\mu_{h23\rho})^2 \mu_{p\nu\nu} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{p\nu\nu} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} \\
 & + (\mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 + (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 + \mu_{2h\nu 5} (\mu_{h23\rho})^3 (\mu_{p\nu\nu})^2 \mu_{h\nu 5} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5}^2 (\mu_{h23\rho})^3 \\
 & + (\mu_{h\nu 5})^3 \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 + (\mu_{h\nu 5})^3 \mu_{h23\rho} + (\mu_{2h\nu 5})^2 \mu_{h23\rho} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 \\
 & + (\mu_{2h\nu 5})^2 (\mu_{h23\rho})^3 \mu_{p\nu\nu} \mu_{h\nu 5} + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h\nu 5}^2 (\mu_{h23\rho})^3 + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{\nu\mu} \mu_{pv} \mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho} + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} (\mu_{h\nu 5} \mu_{h23\rho})^2 + (\mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu})^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) \\
 & + \mu_{p\nu\nu} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) \\
 & + \mu_{p\nu\nu}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{2h\nu 5} \mu_{p\nu\nu}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{h23\rho} \mu_{p\nu\nu}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{p\nu\nu} \mu_{2h\nu 5}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{2h\nu 5}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) \\
 & + \mu_{h23\rho} \mu_{2h\nu 5}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h1} \mu_{h23} \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{p\nu\nu} \mu_{h23\rho} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{2h\nu 5} \mu_{h23\rho} \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4) + \mu_{h23\rho}^2 \tau_{2\nu} (\tau_1 - \tau_4)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

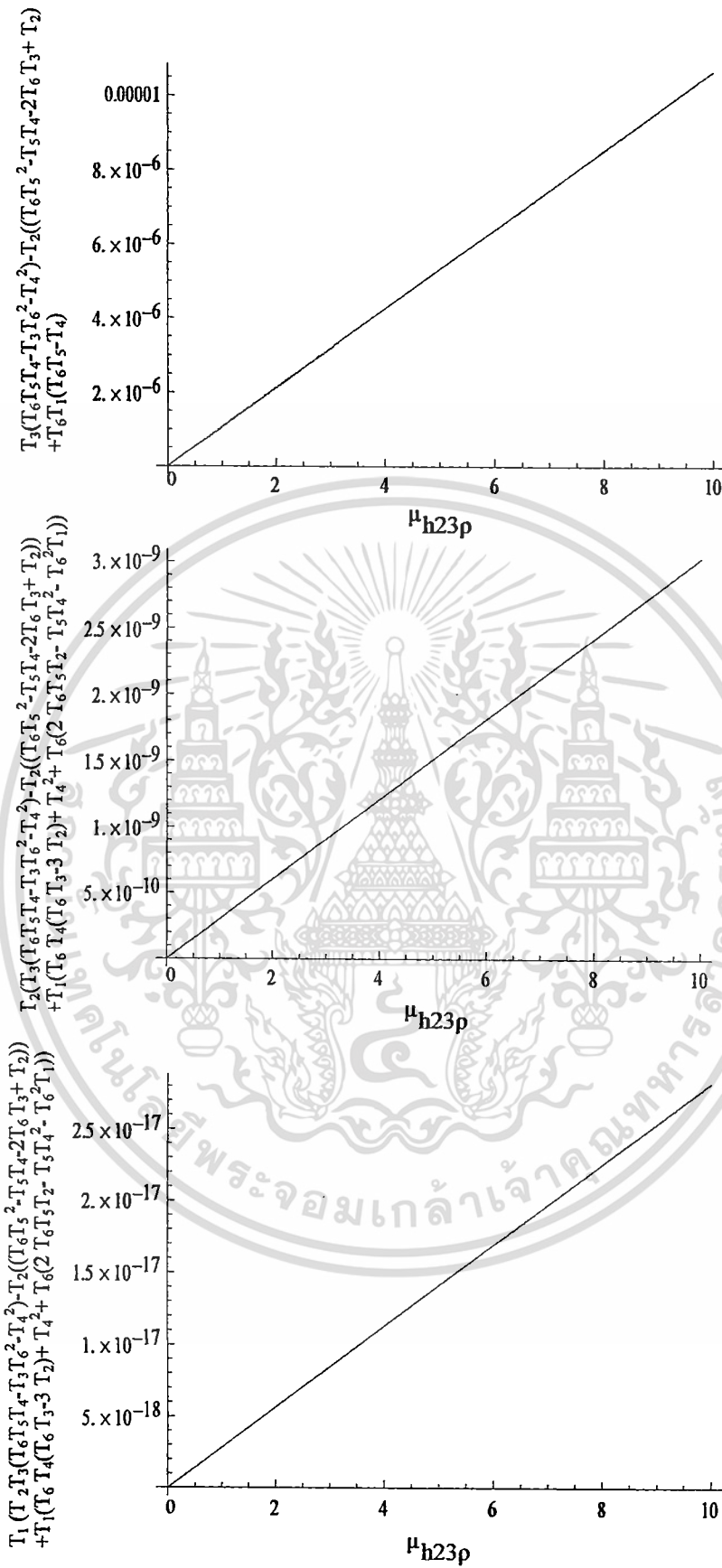
ต่อไปจะพิจารณาตัวอย่างข้อมูลดังนี้

กำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมด 1,000 คน นั่นคือ $N_T = 1,000$ คน, ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 71 ปี จำนวนประชากรคงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการตายของประชากร ดังนั้น $\mu_h = \lambda = 1/(365 * 71)$ ต่อวัน, ระยะเวลาของผู้ที่ติดเชื้อมาก่อนแสดงอาการ 14 วันเท่ากับ ระยะเวลาของผู้ที่ฟื้นจากการป่วยแล้วกลับไปป่วยอีกครั้งนั่นคือ $r_1 = r_4 = 1/14$ ต่อวัน, ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วันนั่นคือ $r_2 = 1/10$ ต่อวัน, ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับ ระยะเวลาของการฟื้นจากการติดเชื้อเป็นเวลา 20 วันนั่นคือ $r_3 = r_5 = 1/20$ ต่อวัน, จำนวนทั้งหมด 900 ตัว นั่นคือ $N_V = 900$ ตัว, ยุงหนึ่งตัวมีอายุเฉลี่ย 7 วันนั่นคือ $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, ค่าคงที่อัตราการตายของยุงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของยุงกับจำนวนยุงทั้งหมด $\mu_v = A/N_v$ นั่นคือ $A = \frac{900}{7} \approx 129$ ตัว [11]-[15]

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้นจากสมการเงื่อนไขใช้ค่าพารามิเตอร์ข้างต้นสามารถแสดงกราฟของสมการได้ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1 กราฟของค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาคเรื้อรังซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกราฟข้างต้นแสดงให้เห็นว่า determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็น เป็นบวกแสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 > 1$

จากการสร้างแบบจำลองของโรคมาลาเรียข้างต้นพบว่า เราสามารถหาจุดสมดุลได้ 2 จุด คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 > 1$ นั่นหมายถึงว่าในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียควรกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น

ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะไร้โรค

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการตายของประชากร	μ_h	0.0000391	วัน ⁻¹
อัตราการเกิดของประชากร	λ	0.0000391	วัน ⁻¹
อัตราการตายของยุง	μ_v	0.05	วัน ⁻¹
จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	A	4,000	ตัว
จำนวนประชากรทั้งหมด	N_T	1,500	คน
จำนวนยุงทั้งหมด	N_V	200	ตัว
อัตราที่ผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ	r_1	0.0714285	วัน ⁻¹
อัตราการที่เชื้อ Plasmodium vivax ในผู้ที่มีเชื้อ ฟังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	r_2	0.0005479	วัน ⁻¹
อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax	r_3	0.0333333	วัน ⁻¹
อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax เปลี่ยนเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_4	0.0001826	วัน ⁻¹
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax	r_5	0.3333333	วัน ⁻¹
อัตราประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_6	0.1	วัน ⁻¹

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงค่าพารามิเตอร์สำหรับสภาวะระบาดเรื้อรัง

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการตายของประชากร	μ_h	0.0000391	วัน ⁻¹
อัตราการเกิดของประชากร	λ	0.0000391	วัน ⁻¹
อัตราการตายของยุง	μ_v	0.25	วัน ⁻¹
จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	A	4,000	ตัว
จำนวนประชากรทั้งหมด	N_T	1,500	คน
จำนวนยุงทั้งหมด	N_v	1,000	ตัว
อัตราที่ผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ	r_1	0.0714285	วัน ⁻¹
อัตราการที่เชื้อ Plasmodium vivax ในผู้ที่มิใช่ผู้ฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	r_2	0.0005479	วัน ⁻¹
อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax	r_3	0.0333333	วัน ⁻¹
อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax เปลี่ยนเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_4	0.0001826	วัน ⁻¹
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิด Plasmodium vivax	r_5	0.3333333	วัน ⁻¹
อัตราประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_6	0.1	วัน ⁻¹

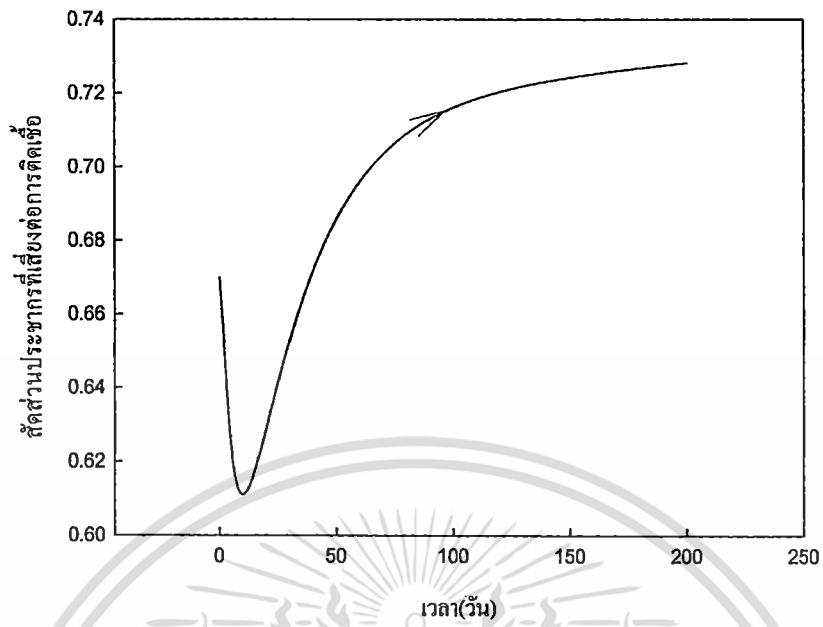
การจำลองเชิงตัวเลข

ในกรณีสถานะไร้โรค

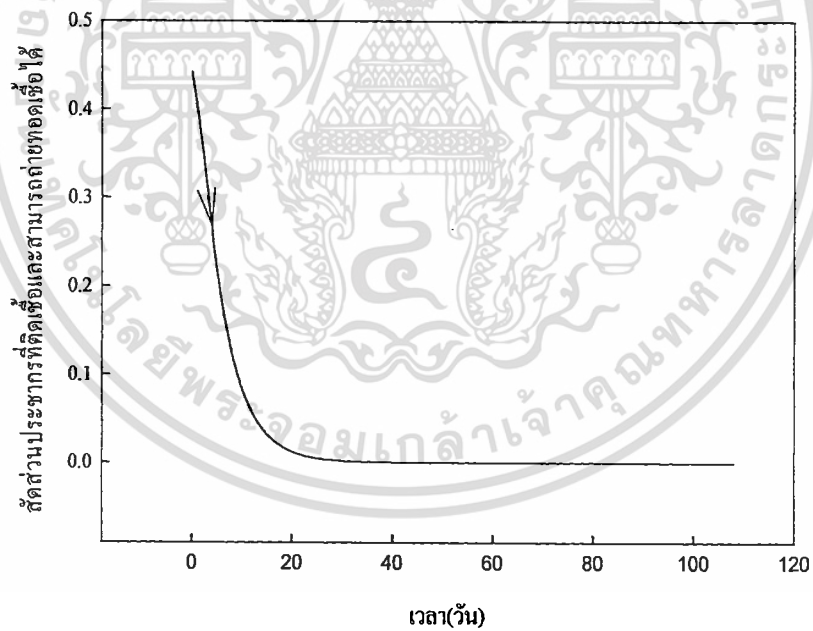
ในกรณีสถานะไร้โรค ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\mu_h = 0.0000391, \mu_v = 0.05, R_0 = 0.342116, r_1 = 0.0714285, r_2 = 0.0005479, \\ r_3 = 0.0333333, r_4 = 0.0001826, r_5 = 0.3333333, r_6 = 0.1, \alpha = 0.75, \gamma'_h = 0.22, \\ \gamma'_v = 0.0016$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

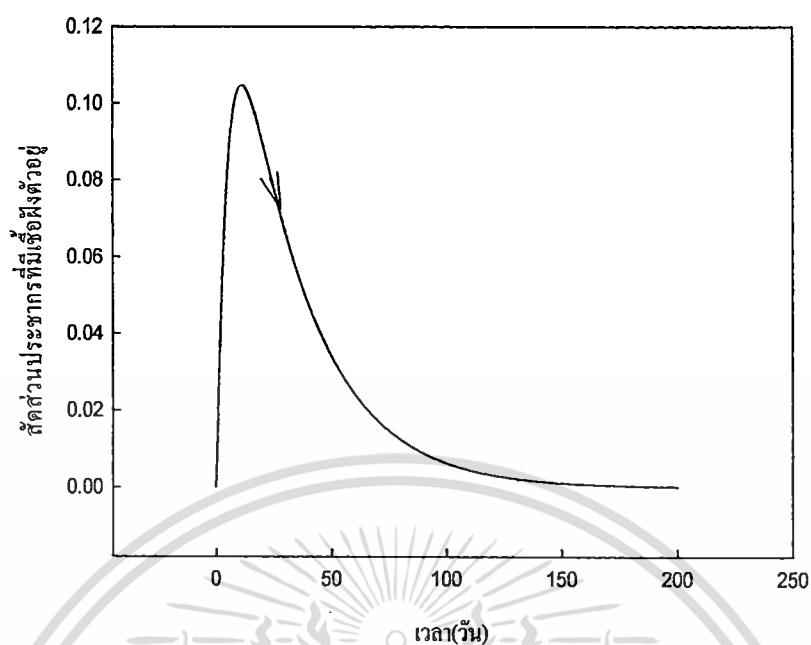


รูปที่ 4.2 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อเทียบกับเวลา

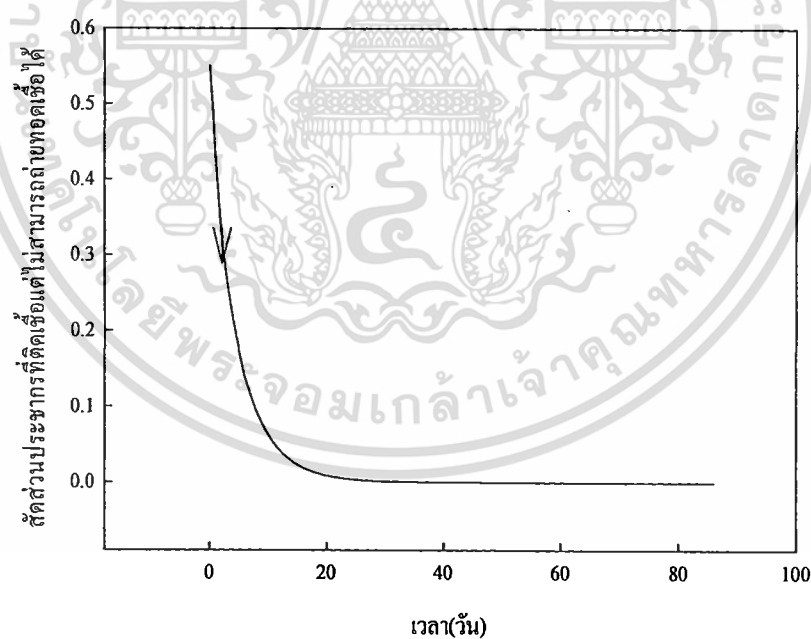


รูปที่ 4.3 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

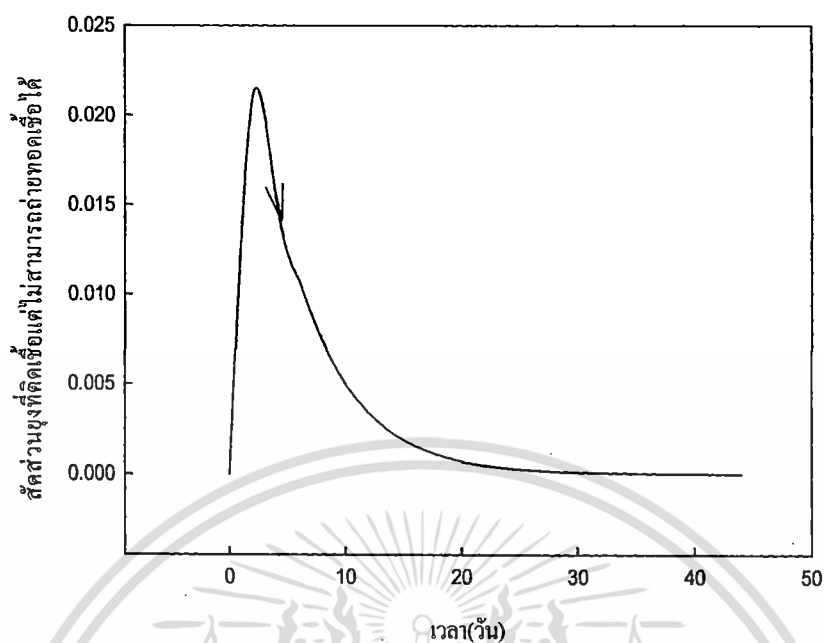


รูปที่ 4.4 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื่อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา

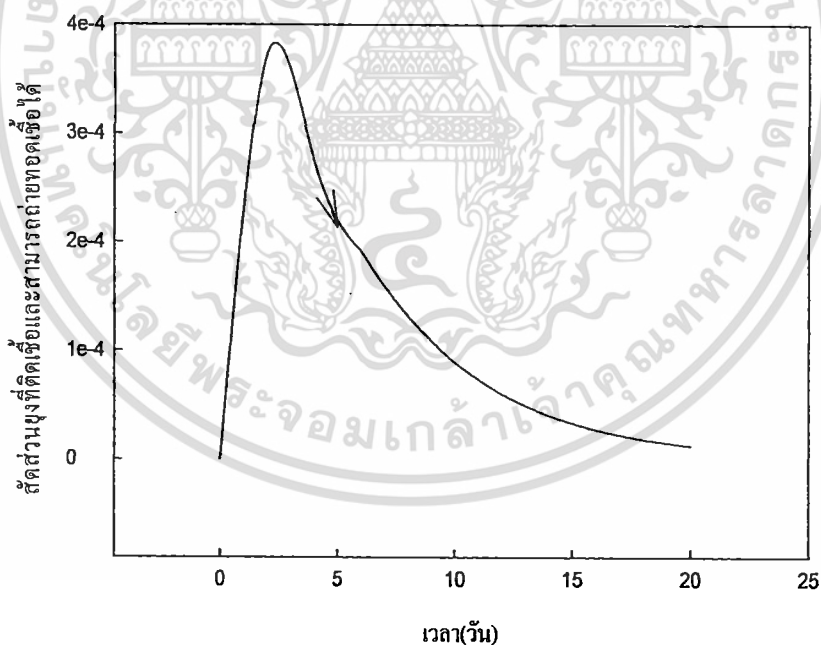


รูปที่ 4.5 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

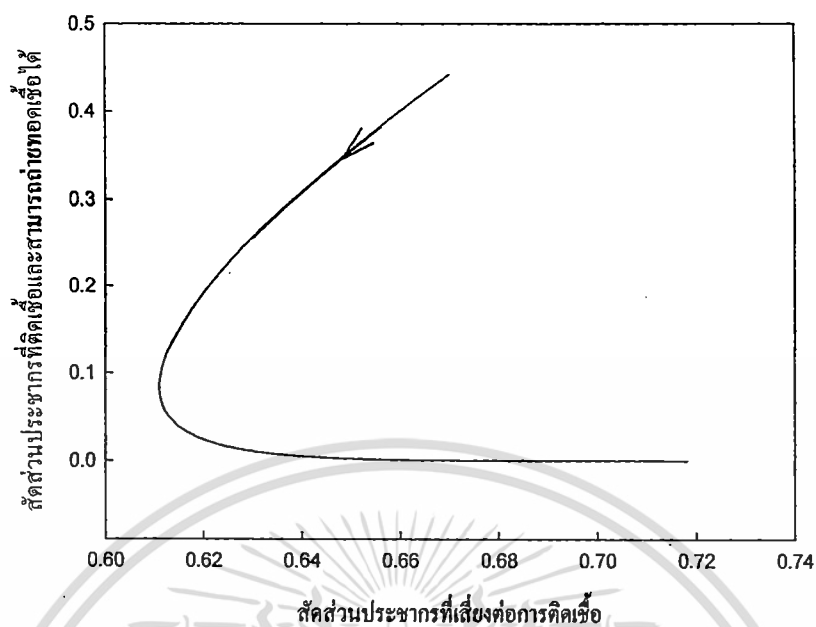


รูปที่ 4.6 กราฟแสดงสัดส่วนขุขึ่งที่ติดเชือแตไม่สามารถถ่ายทอคเชือได้เทียบกับเวลา

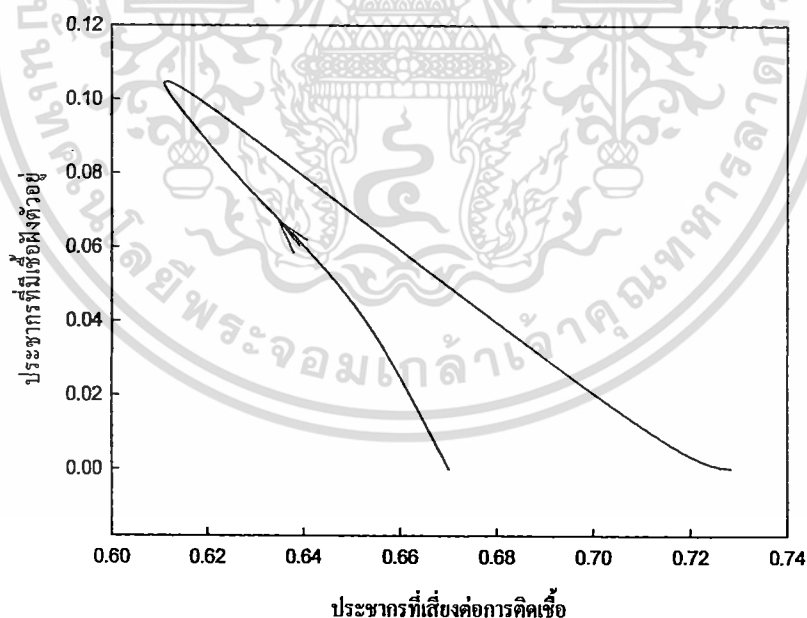


รูปที่ 4.7 กราฟแสดงสัดส่วนขุขึ่งที่ติดเชือและสามารถถ่ายทอคเชือได้เทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

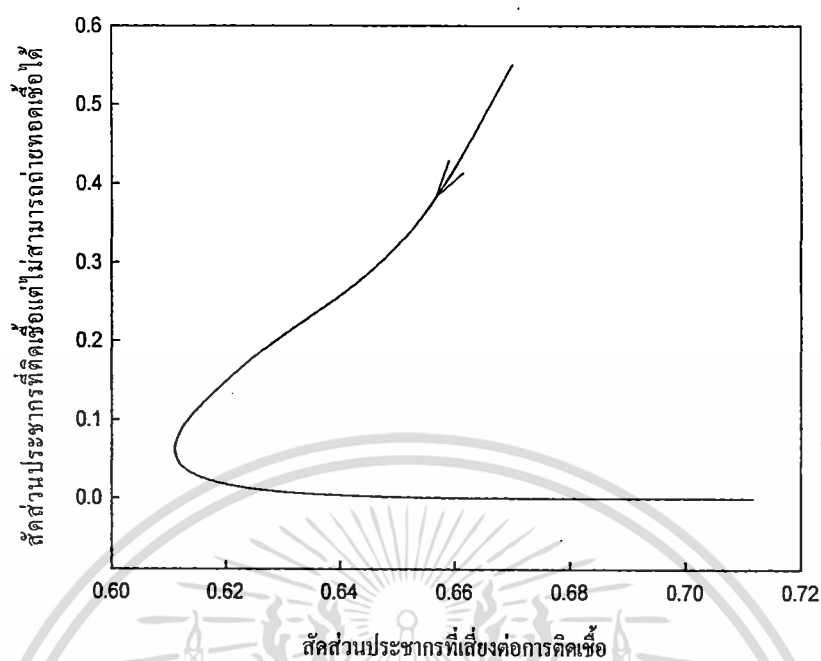


รูปที่ 4.8 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)

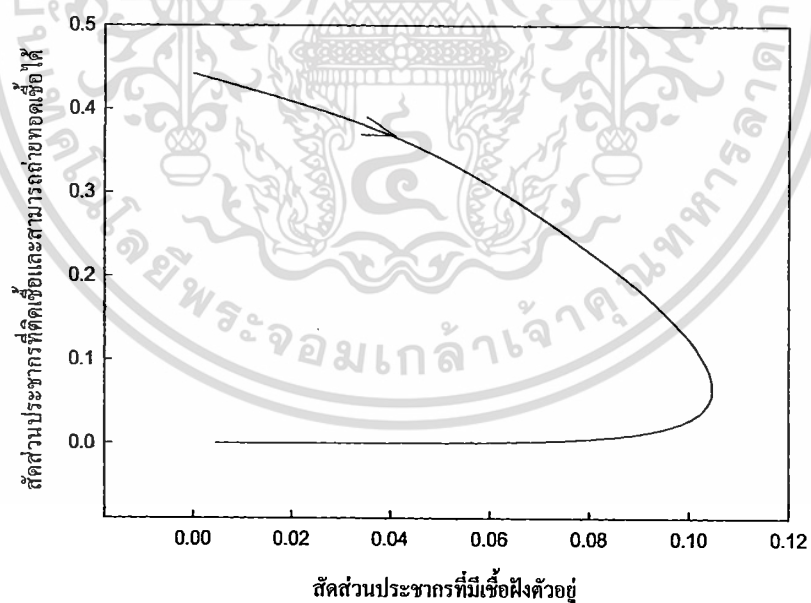


รูปที่ 4.9 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

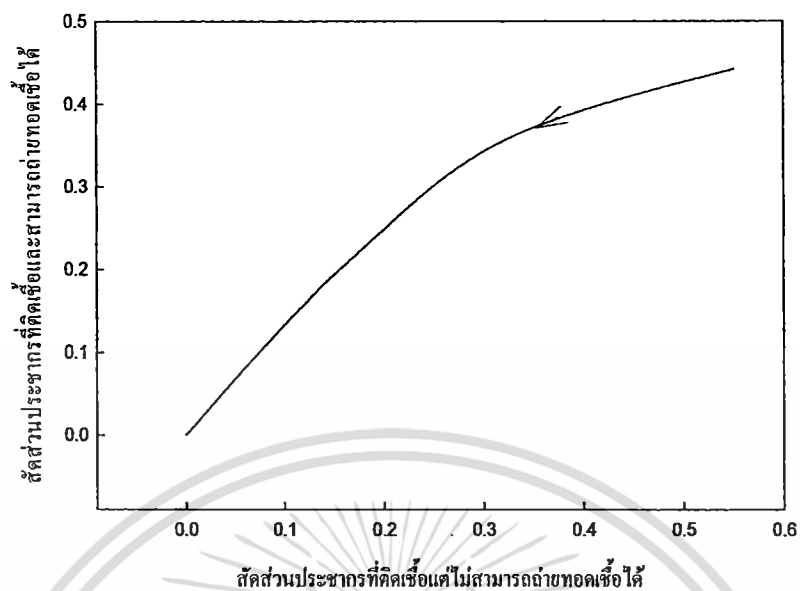


รูปที่ 4.10 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

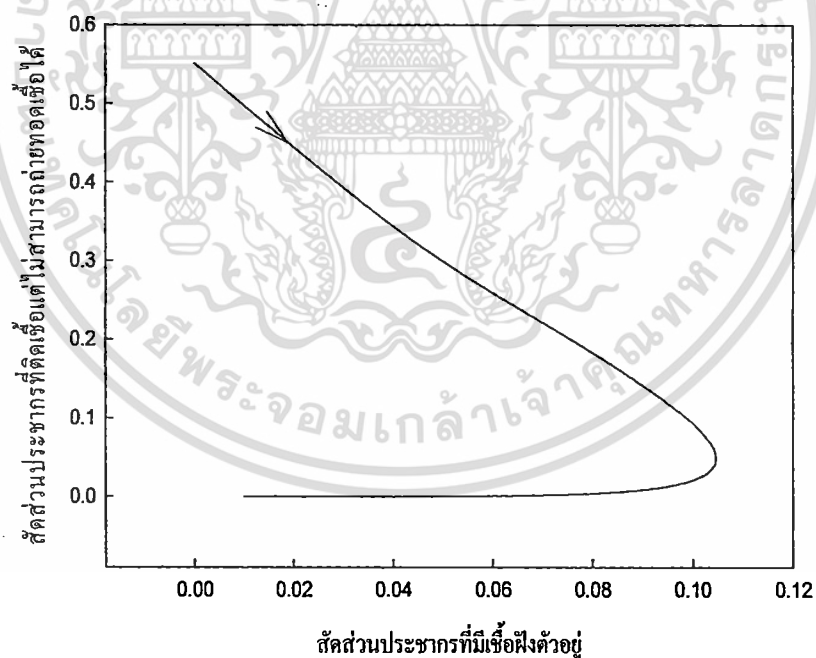


รูปที่ 4.11 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

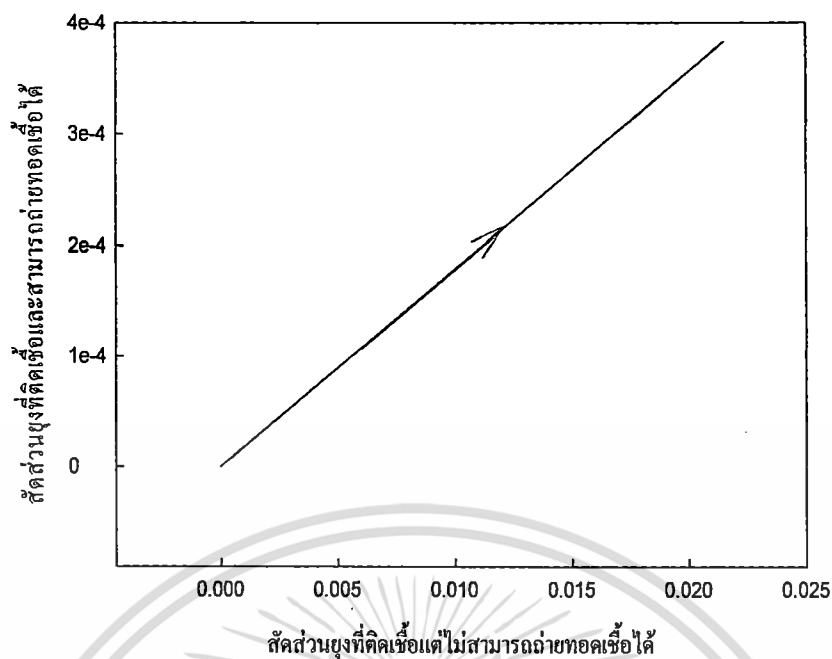


รูปที่ 4.12 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)

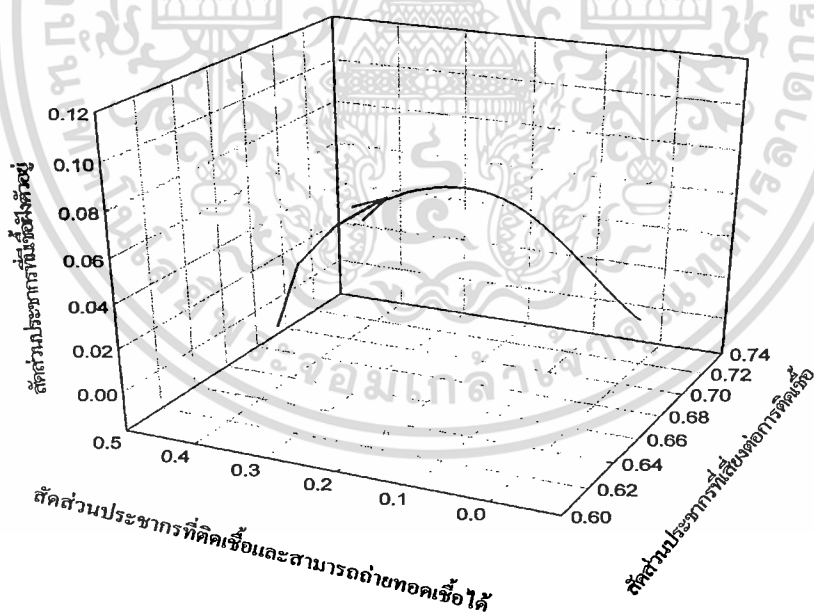


รูปที่ 4.13 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

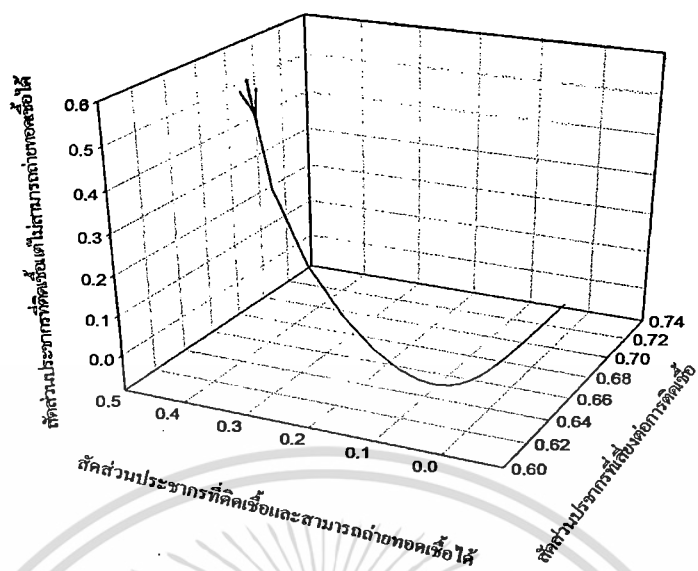


รูปที่ 4.14 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_v) กับสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_v)

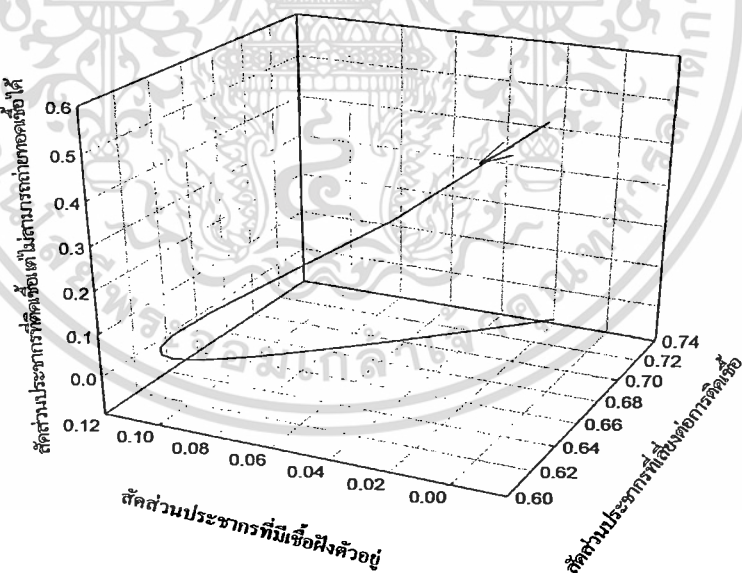


รูปที่ 4.15 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

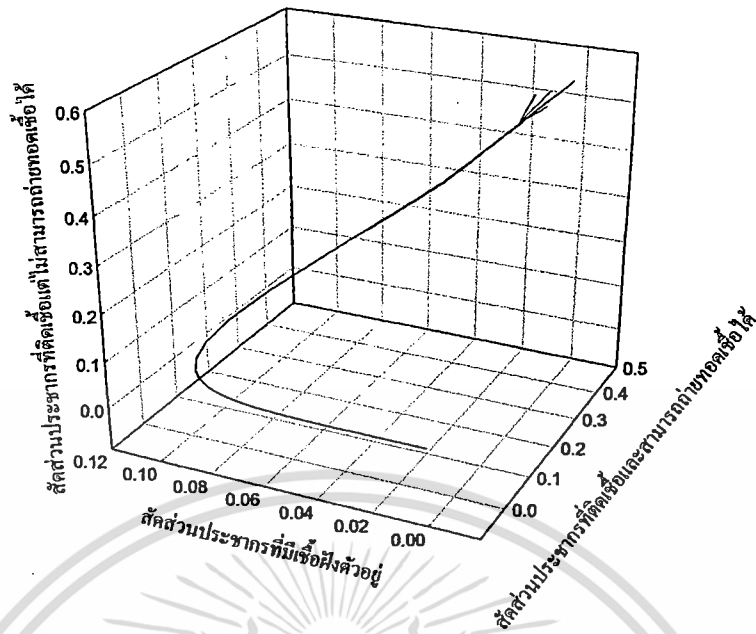


รูปที่ 4.16 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)



รูปที่ 4.17 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



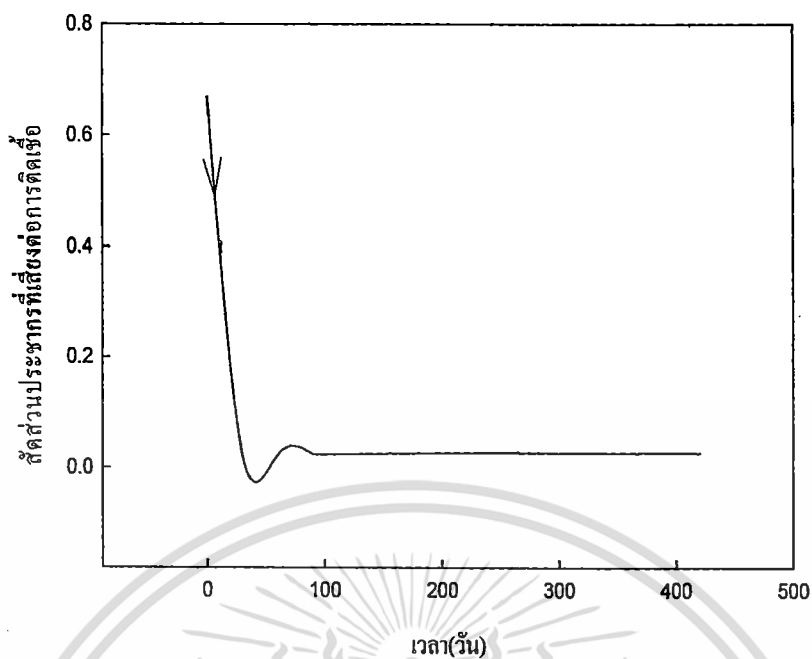
รูปที่ 4.18 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

การจำลองเชิงตัวเลข

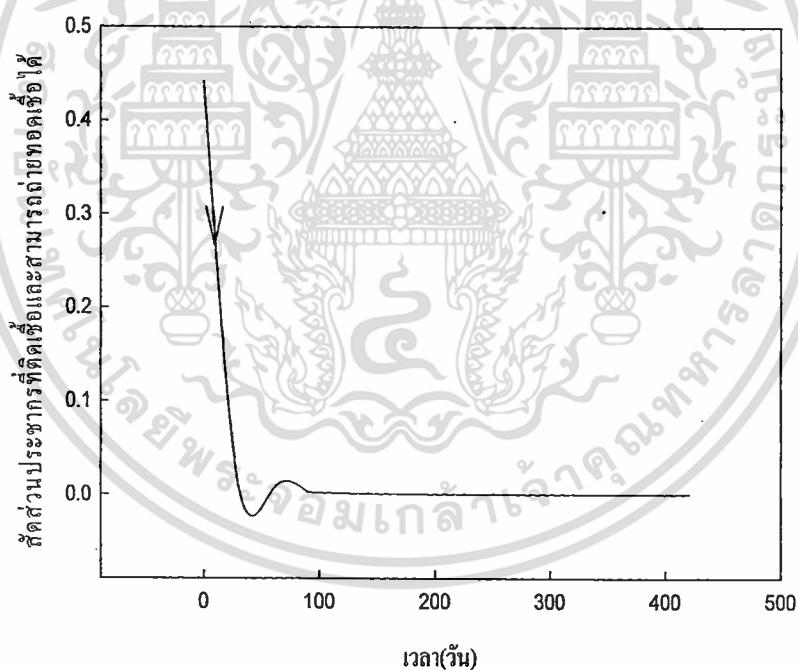
ในกรณีสภาวะระบาดเรื้อรัง

ในกรณีสภาวะระบาดเรื้อรัง ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\begin{aligned} \mu_h &= 0.0000391, \mu_v = 0.25, R_0 = 37.6073, r_1 = 0.0714285, r_2 = 0.0005479, \\ r_3 &= 0.0333333, r_4 = 0.0001826, r_5 = 0.3333333, r_6 = 0.1, \alpha = 0.75, \gamma'_h = 0.22, \\ \gamma'_v &= 0.0016 \end{aligned}$$

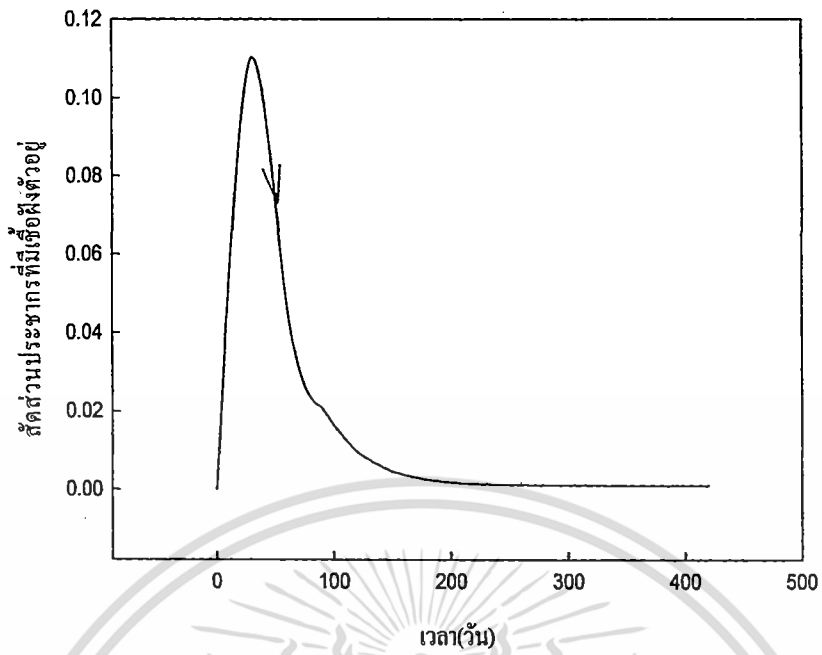


รูปที่ 4.19 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา

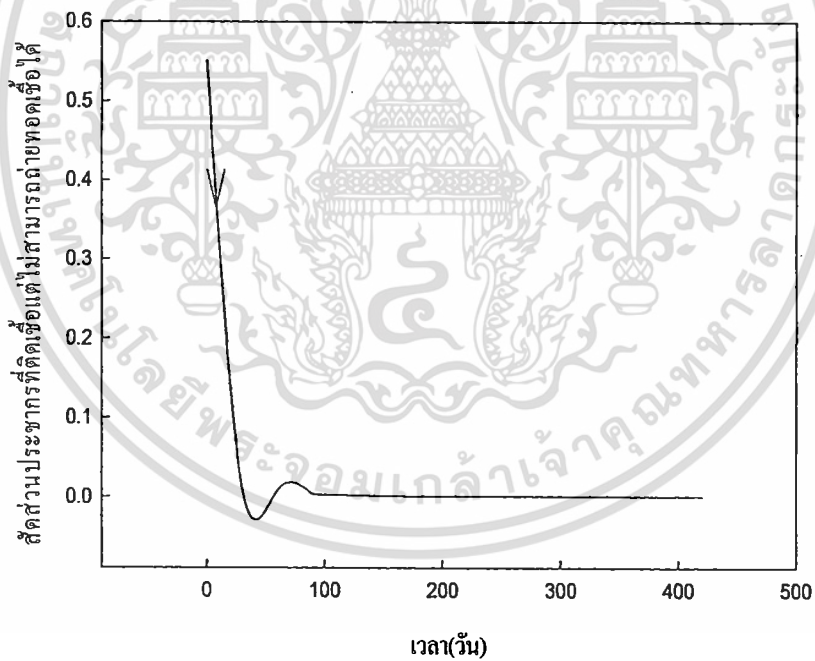


รูปที่ 4.20 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

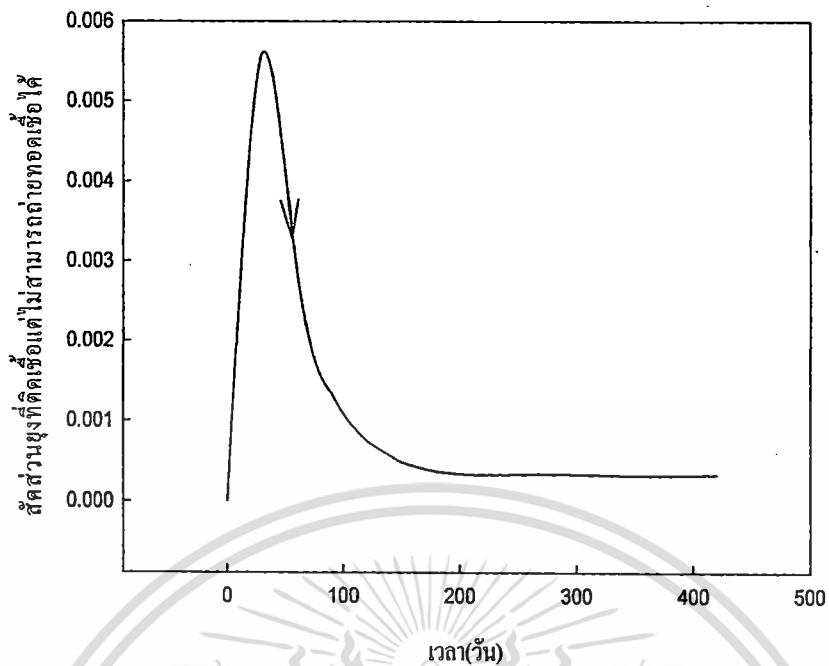


รูปที่ 4.21 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื่อฟังตัวอยู่เทียบกับเวลา

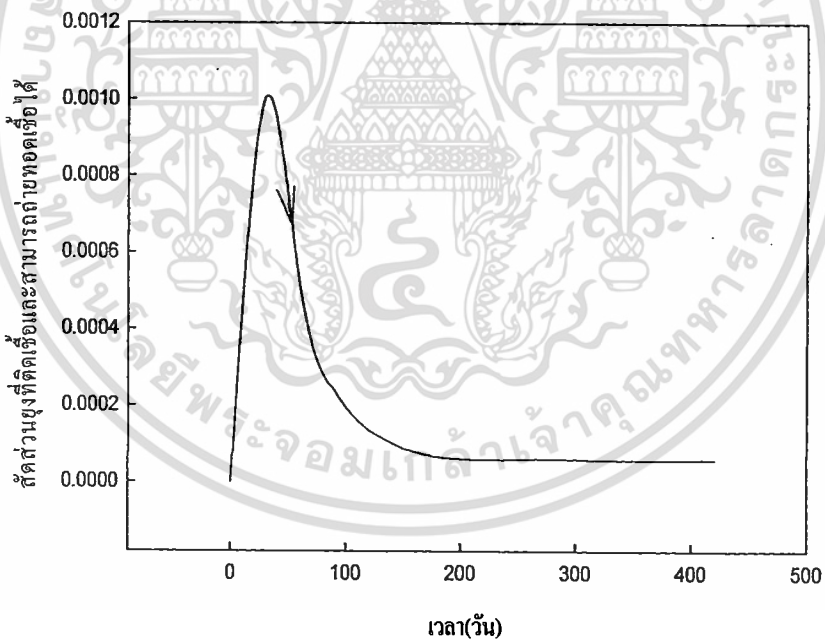


รูปที่ 4.22 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

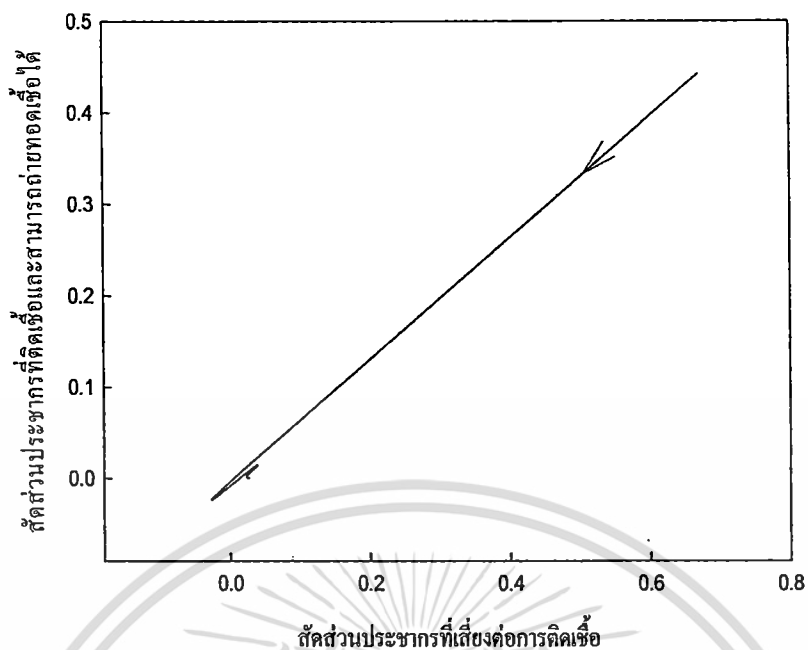


รูปที่ 4.23 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา

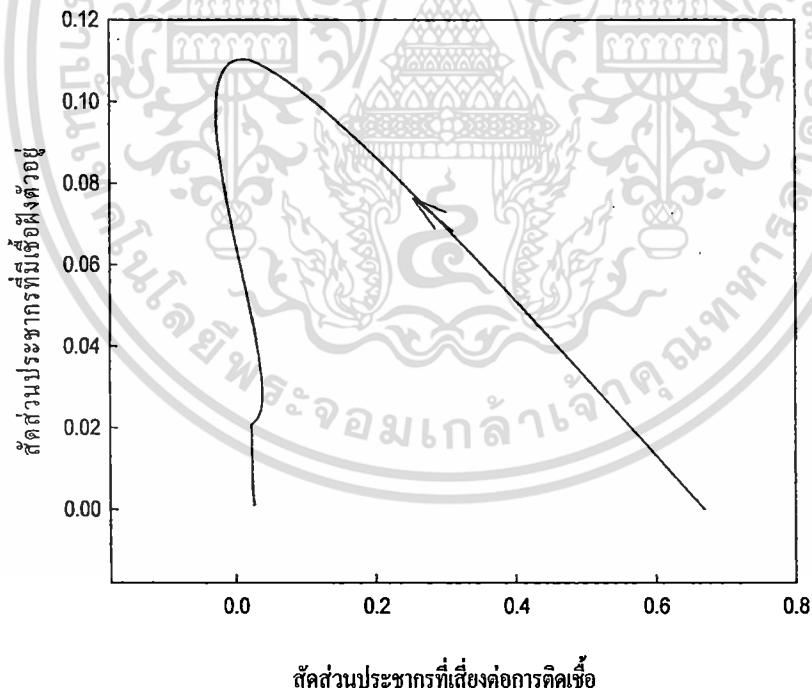


รูปที่ 4.24 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา

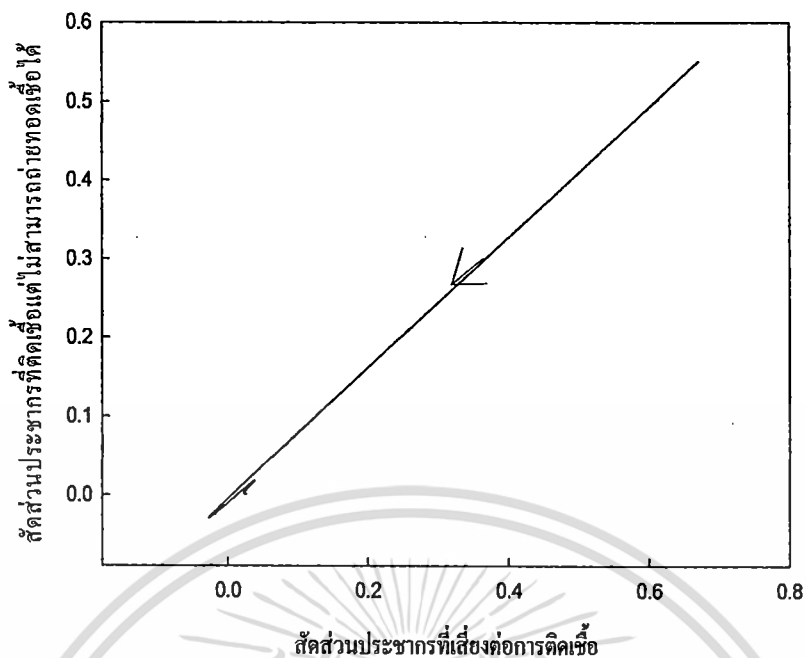
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



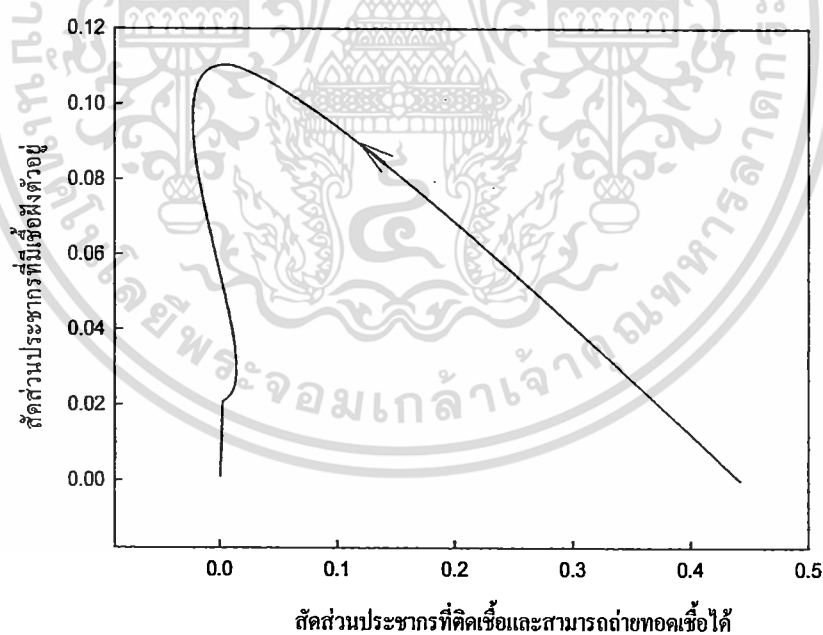
รูปที่ 4.25 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)



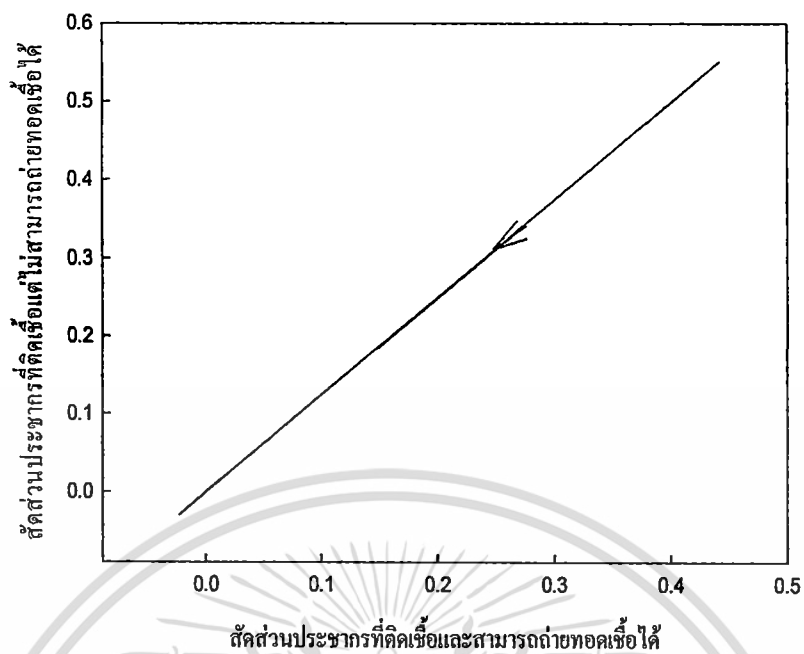
รูปที่ 4.26 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h)



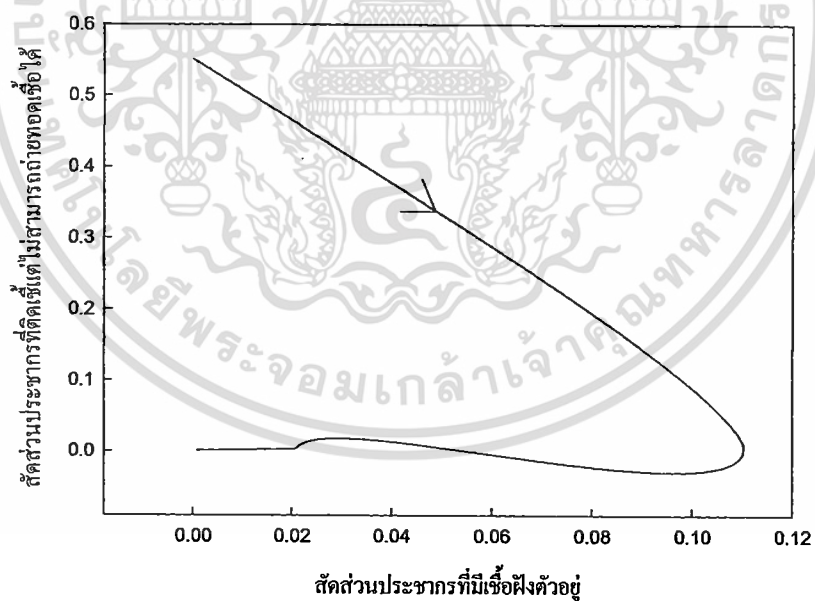
รูปที่ 4.27 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ (S_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถจ่ายทอดเชื่อได้ (E_h)



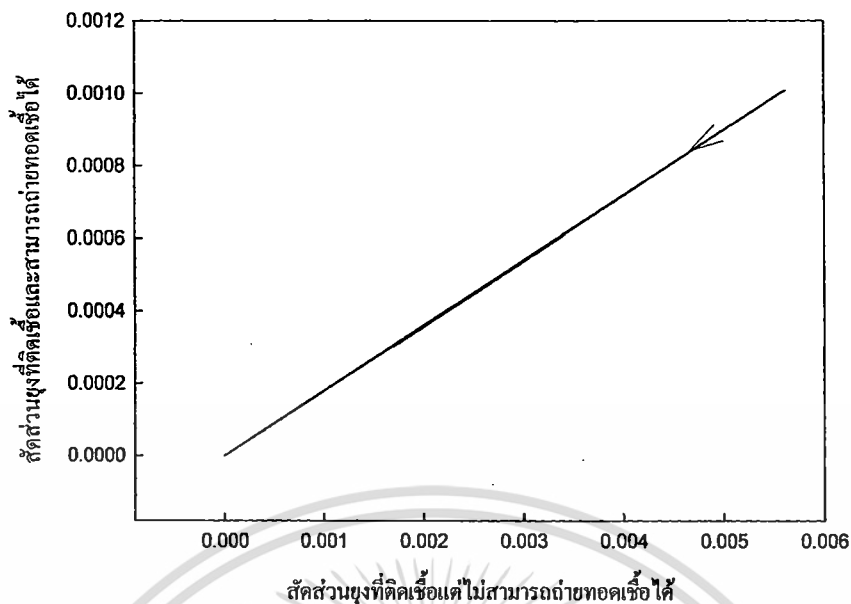
รูปที่ 4.28 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื่อและสามารถจ่ายทอดเชื่อได้ (I_h) กับสัดส่วนประชากรที่มีเชื่อฝังตัวอยู่ (D_h)



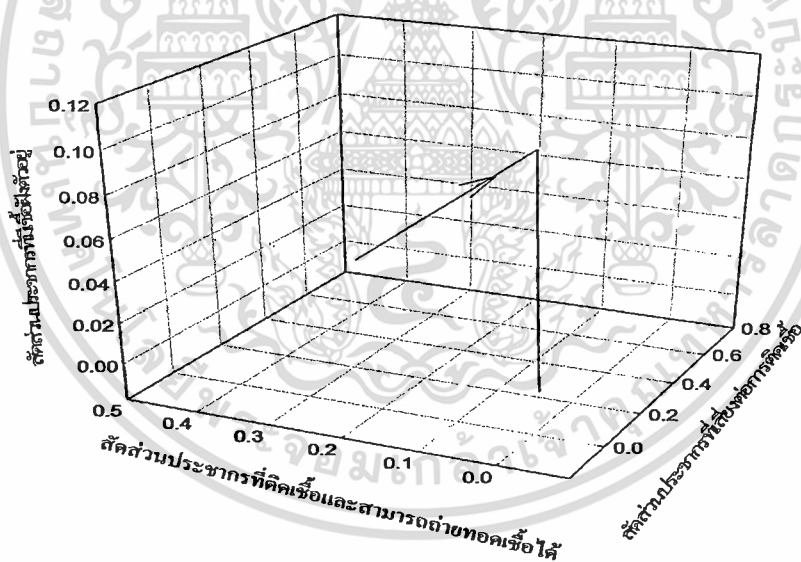
รูปที่ 4.29 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)



รูปที่ 4.30 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) กับสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

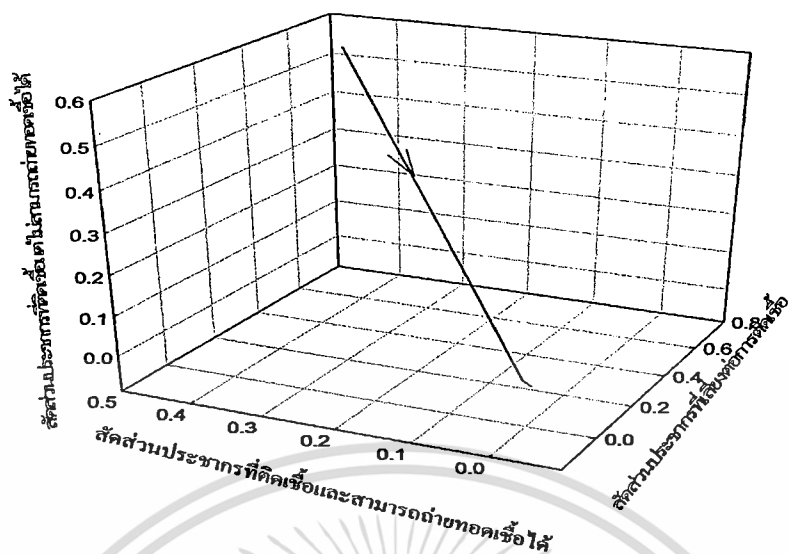


รูปที่ 4.31 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h) กับสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h)

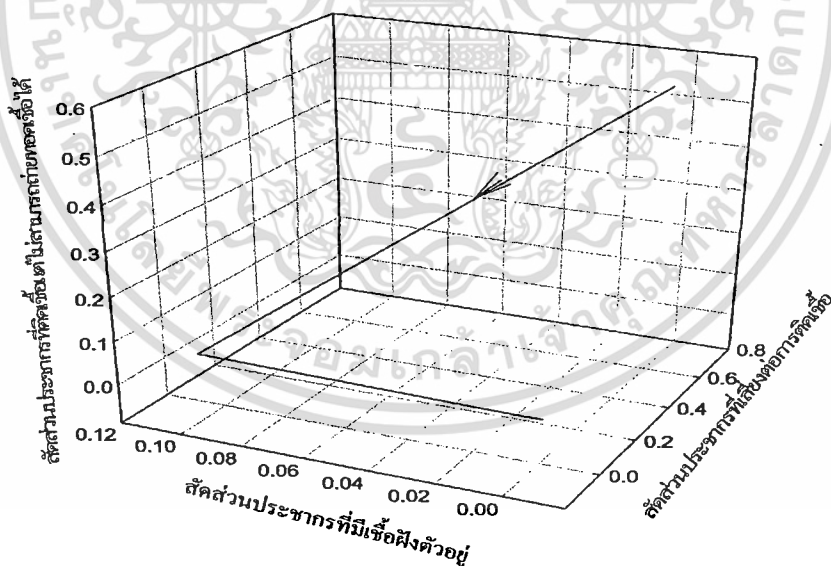


รูปที่ 4.32 กราฟแสดงแนวโน้มของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

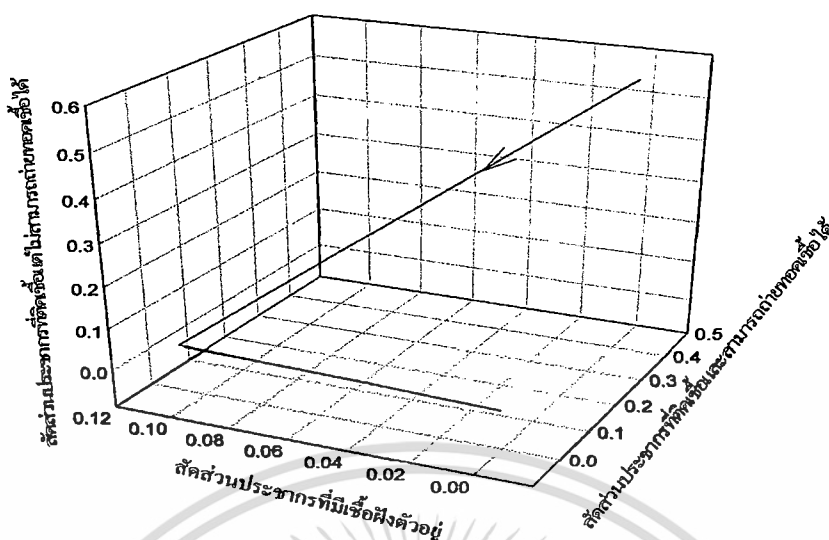


รูปที่ 4.33 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (I_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)



รูปที่ 4.34 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ (S_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ (E_h)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.35 กราฟแสดงแนววิถีของผลเฉลยบนระนาบ สัดส่วนประชากรที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ (I_h), สัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ (D_h) และสัดส่วนประชากรที่คิดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ (E_h)

การเปรียบเทียบระหว่างค่า R_0 ในสภาวะระบาคเรื่อริง

อธิบายรายละเอียดของค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ได้ดังนี้

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน = (อัตราการที่เชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราการตายของประชากร + อัตราผู้ที่ฟื้นฟูจากการติดเชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์) (อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้) (อัตราการถ่ายทอดเชื้อ พลาสมโมเดียมไวแวกซ์จากประชากรไปยุง) (จำนวนประชากรทั้งหมด) (อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่คิดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นยุงที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้) (อัตราการถ่ายทอดเชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์จากยุงไปประชากร) (จำนวนยุงทั้งหมด) / ((อัตราการที่เชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราการตายของประชากร + อัตราผู้ที่ฟื้นฟูจากการติดเชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์) (อัตราการตายของประชากร + อัตราการฟื้นฟูของผู้ป่วยที่ติดเชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์ + อัตราประชากรที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ) - ((อัตราการที่เชื้อพลาสมโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง) (ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร) (อัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การคิดเชื่อ))) (อัตราการตายของยุง) (อัตราที่ผู้ที่คิดเชื่อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการคิดเชื่อ+ อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ที่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ + อัตราการตายของประชากร) (อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากผู้ที่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นยุงที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้+อัตราการตายของยุง)

ให้ จำนวนประชากรที่คิดเชื่อ = จำนวนประชากรทั้งหมด \times อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ที่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้

จำนวนยุงที่คิดเชื่อ = จำนวนยุงทั้งหมด \times อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่คิดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นยุงที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้

เขียนสมการค่าสืบพันธุ์พื้นฐานใหม่ได้ดังนี้

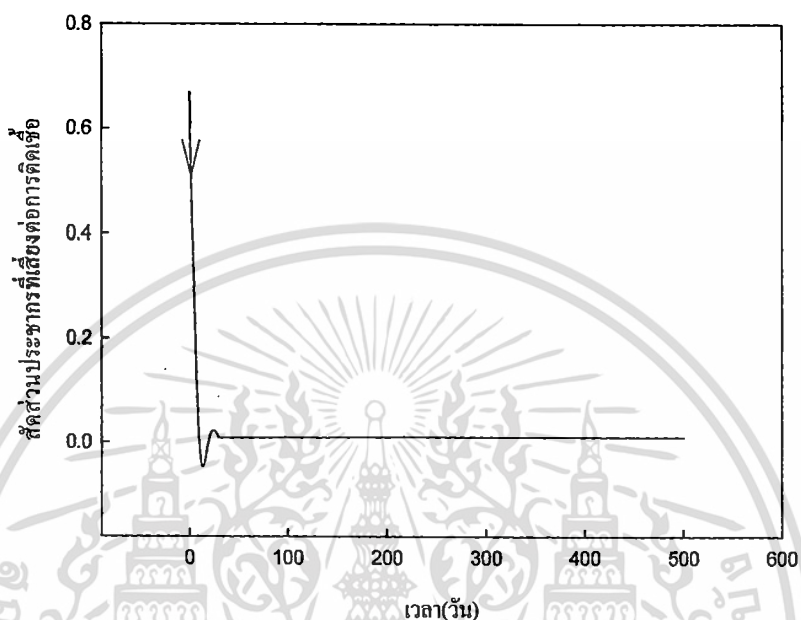
ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน = (อัตราการที่เชื้อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์ ในผู้ที่มิมีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราการตายของประชากร+อัตราผู้ที่พ้นจากการคิดเชื่อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์) \times จำนวนประชากรที่คิดเชื่อ \times จำนวนยุงที่คิดเชื่อ \times อัตราการถ่ายทอดเชื้อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์จากยุงไปประชากร \times อัตราการถ่ายทอดเชื้อ พลาสโมเดียม ไวกเวกซ์จากประชากรไปยุง / ((อัตราการที่เชื้อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์ ในผู้ที่มิมีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง + อัตราการตายของประชากร+อัตราผู้ที่พ้นจากการคิดเชื่อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์) (อัตราการตายของประชากร+อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่คิดเชื่อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์+อัตราประชากรที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการคิดเชื่อ) - ((อัตราการที่เชื้อพลาสโมเดียม ไวกเวกซ์ ในผู้ที่มิมีเชื้อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่คิดเชื่ออีกครั้ง) (ร้อยละผู้คิดเชื่อของประชากร) (อัตราที่ผู้ที่คิดเชื่อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการคิดเชื่อ))) (อัตราการตายของยุง) (อัตราที่ผู้ที่คิดเชื่อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการคิดเชื่อ+ อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ที่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นผู้ที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ + อัตราการตายของประชากร) (อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่คิดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ไปเป็นยุงที่คิดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้+อัตราการตายของยุง)

เขียนในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

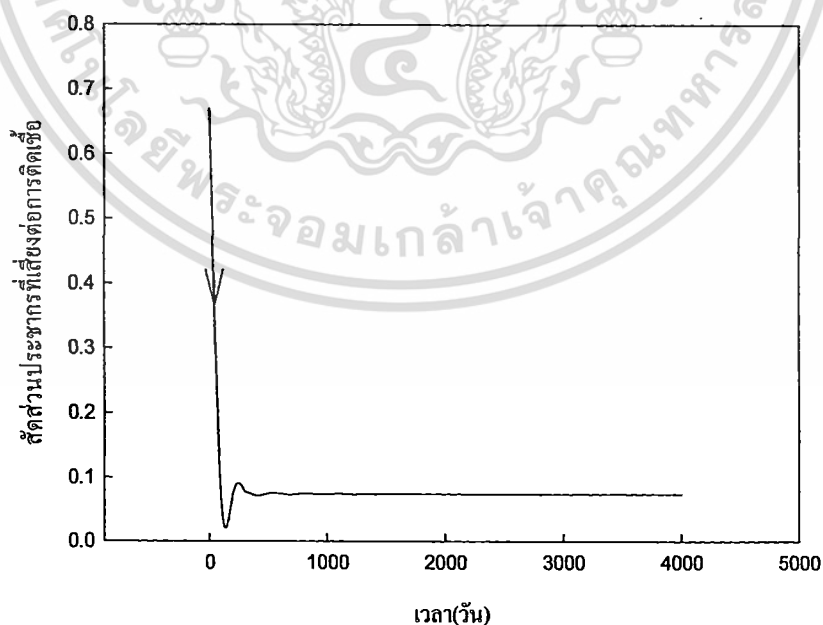
$$R_0 = \frac{\mu_{h23} \rho_h \gamma_v' N_T \rho_v \gamma_h' N_v}{\mu_v (\mu_h \mu_{h23} + r_5 \mu_{h23} + r_6 \mu_{h23} - r_2 \alpha r_1) \mu \rho_{h1} \mu \rho_v}$$

ในการเปรียบเทียบค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน(R_0) ค่าพารามิเตอร์กำหนดให้เป็น

$$\mu_h = 0.0000391, \mu_v = 0.35, r_1 = 0.0714285, r_2 = 0.0005479, r_3 = 0.0333333, \\ r_4 = 0.0001826, r_5 = 0.3333333, r_6 = 0.1, \alpha = 0.75, \gamma'_h = 0.22, \gamma'_v = 0.0016,$$



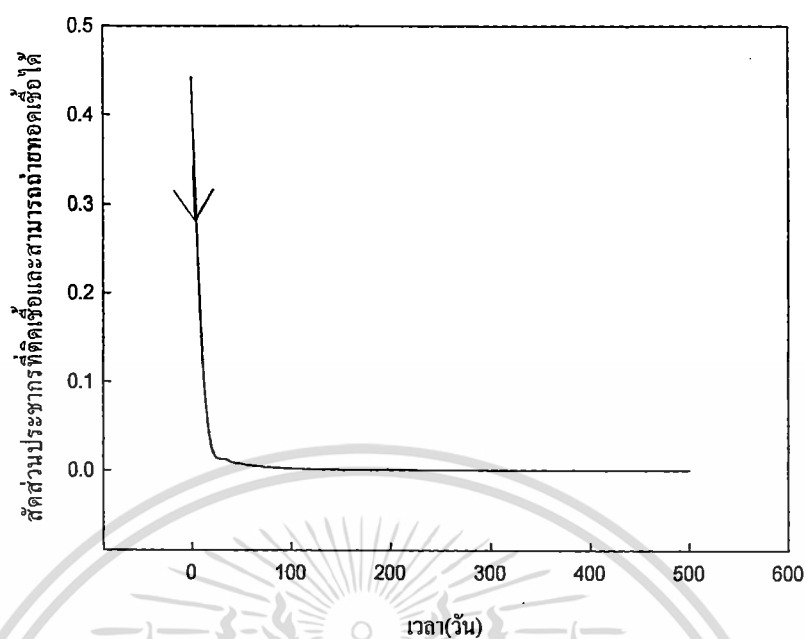
รูปที่ 4.36 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 97.326$ และ $N_V = 1,400$



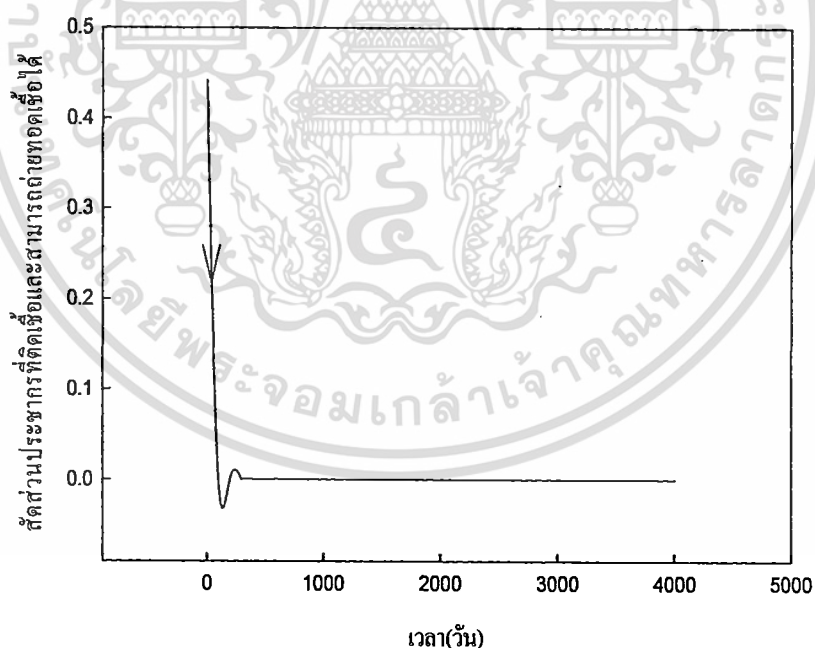
รูปที่ 4.37 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 13.5103$

และ $N_V = 700$

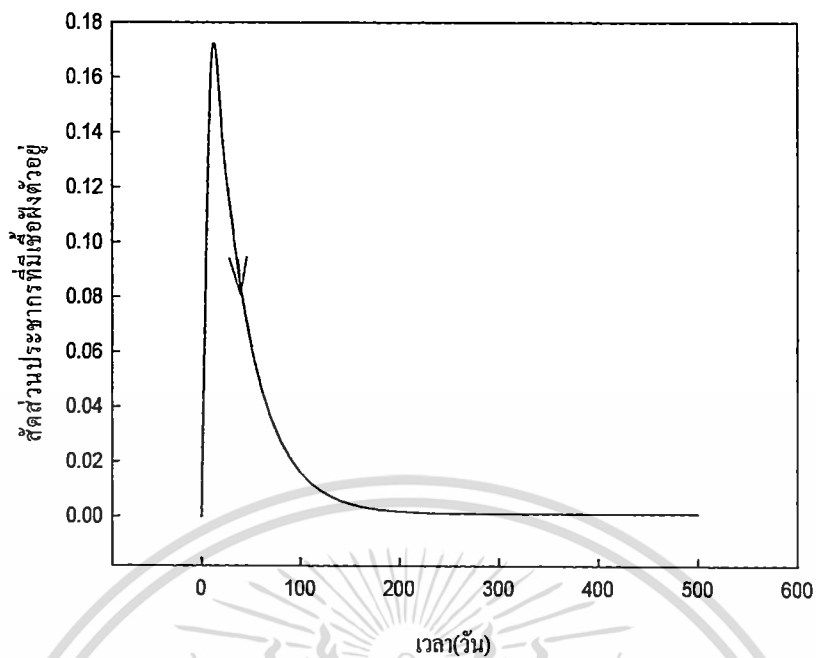
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



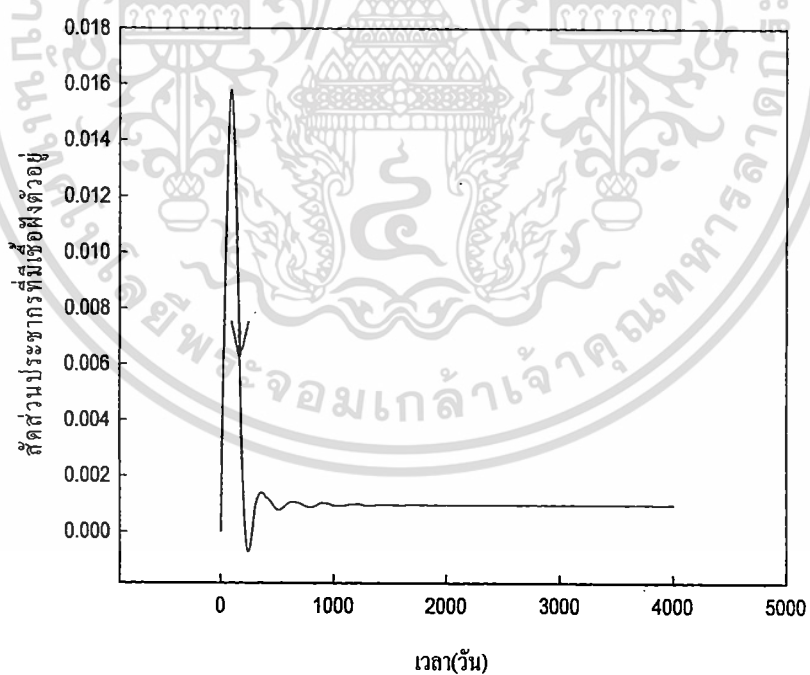
รูปที่ 4.38 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V=1,400$



รูปที่ 4.39 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V=700$

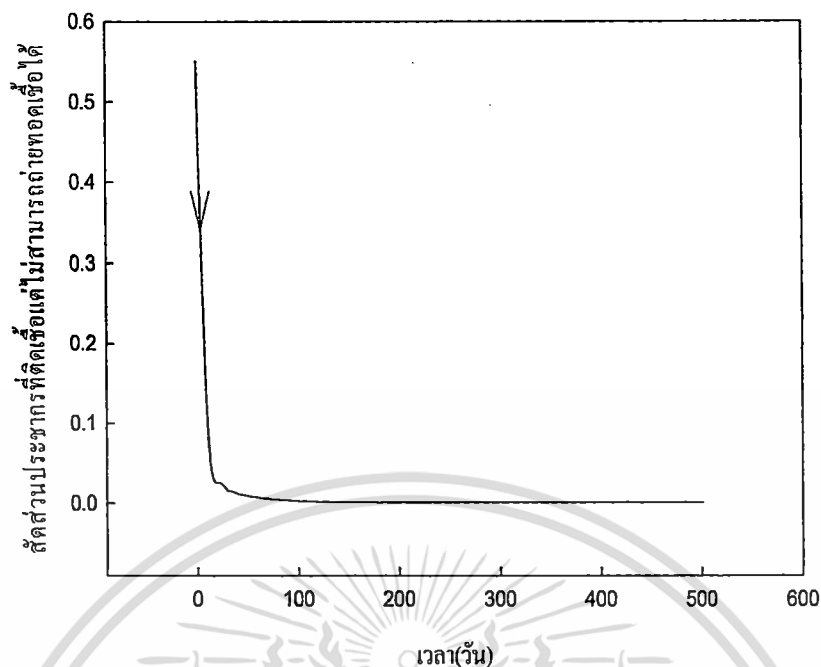


รูปที่ 4.40 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 97.326$
และ $N_V = 1,400$

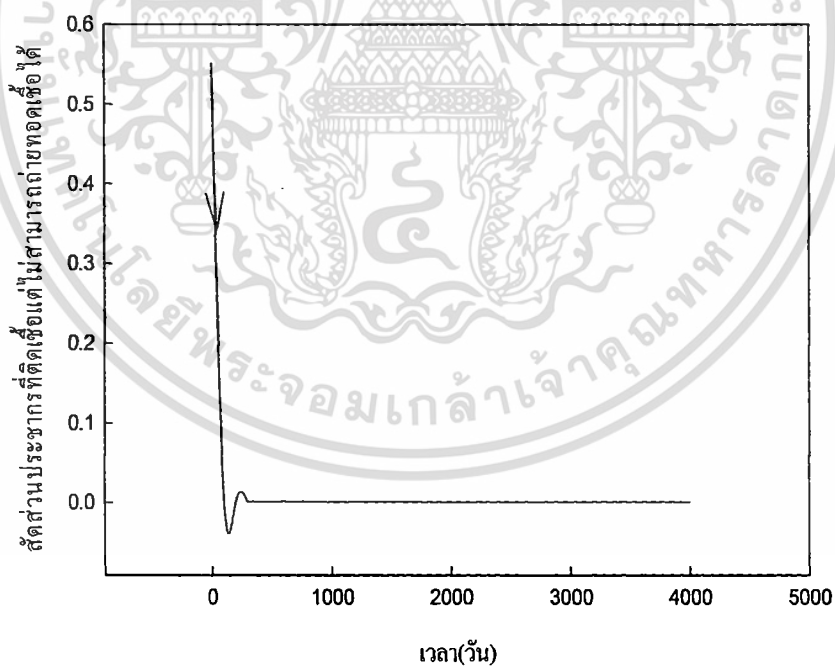


รูปที่ 4.41 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0 = 13.5103$
และ $N_V = 700$

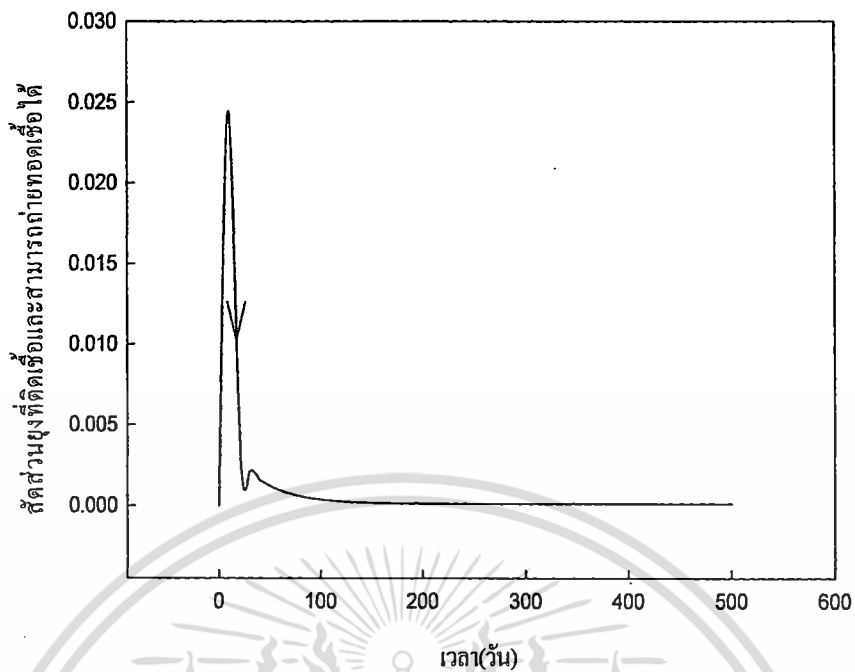
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



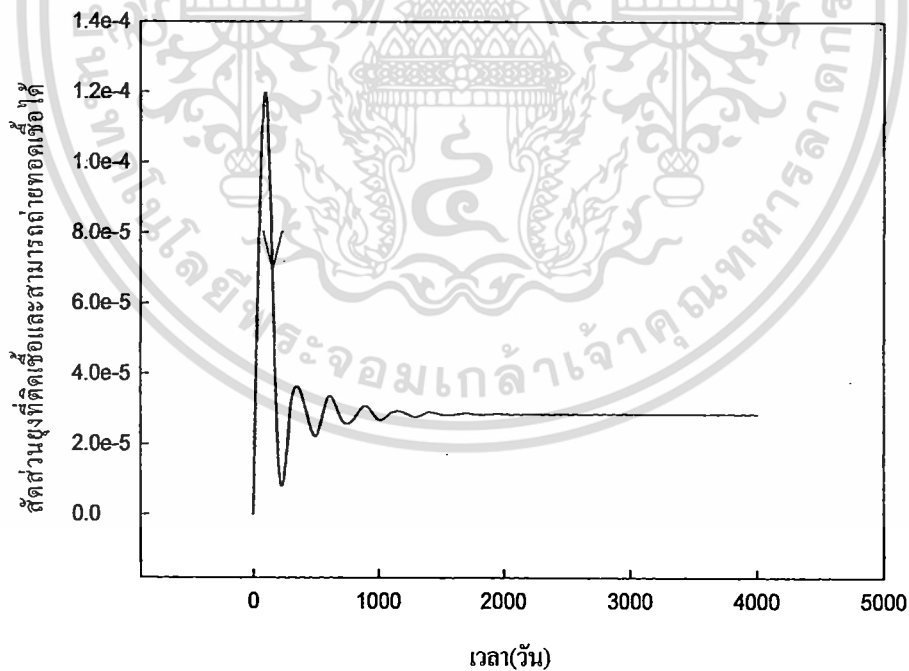
รูปที่ 4.42 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V=1,400$



รูปที่ 4.43 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V=700$



รูปที่ 4.46 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=97.326$ และ $N_V=1,400$



รูปที่ 4.47 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้เทียบกับเวลา ที่มีค่า $R_0=13.5103$ และ $N_V=700$

จากรูปที่ 4.36 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.37

จากรูปที่ 4.38 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.39

จากรูปที่ 4.40 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.41

จากรูปที่ 4.42 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.43

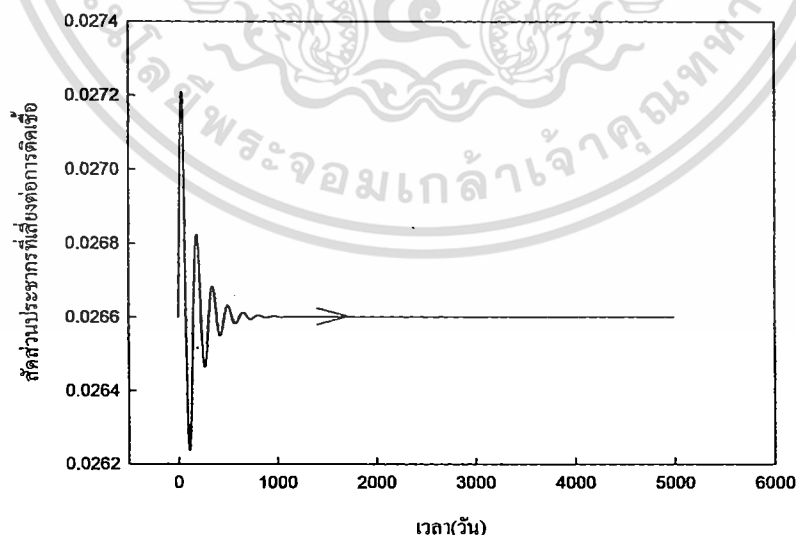
จากรูปที่ 4.44 พบว่ากราฟสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.45

จากรูปที่ 4.46 พบว่ากราฟสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.47

ดังนั้นสรุปได้ว่าชุดข้อมูลที่มีค่า R_0 มากจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่า R_0 น้อยและชุดข้อมูลที่มีจำนวนยุงทั้งหมดมากจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีจำนวนยุงทั้งหมดน้อย

การเปรียบเทียบระหว่างค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ในสภาวะระบอดเรื้อรัง

ในการเปรียบเทียบค่าเริ่มต้นภายใต้สภาวะระบอดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล $E_2 (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ คือ (0.00064586, 0.0266009, 0.000872935, 0.00102003, 0.0000583927, 0.000328973)

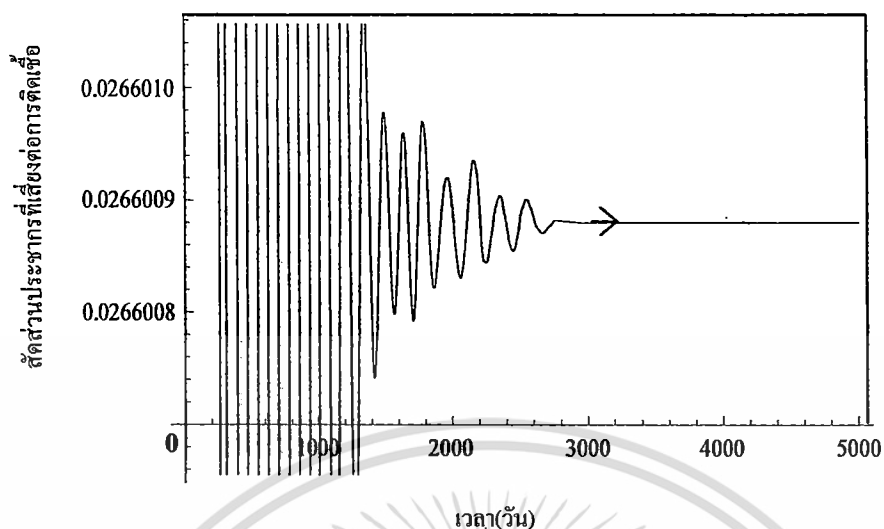


รูปที่ 4.48 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้

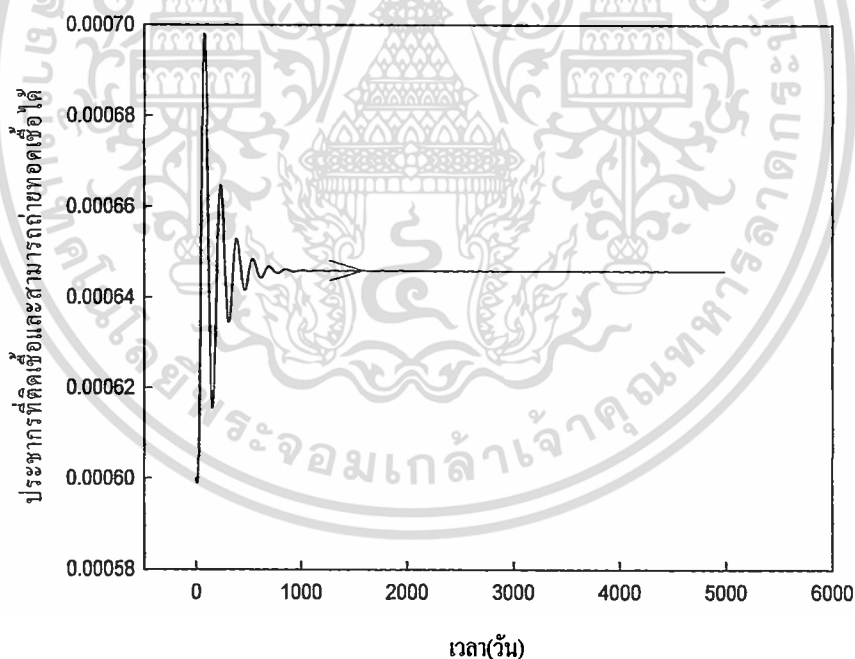
$$I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003,$$

$$R_0=37.6073$$

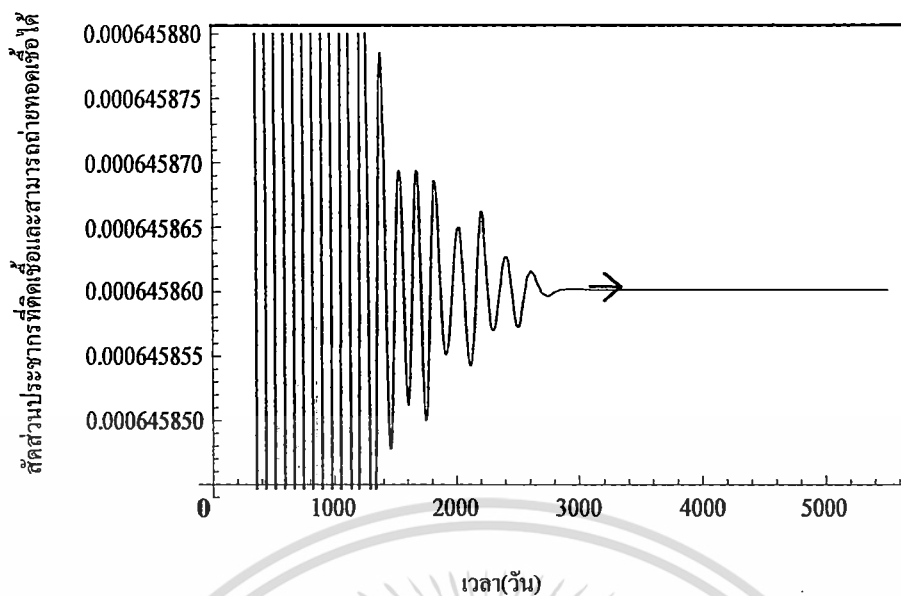
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



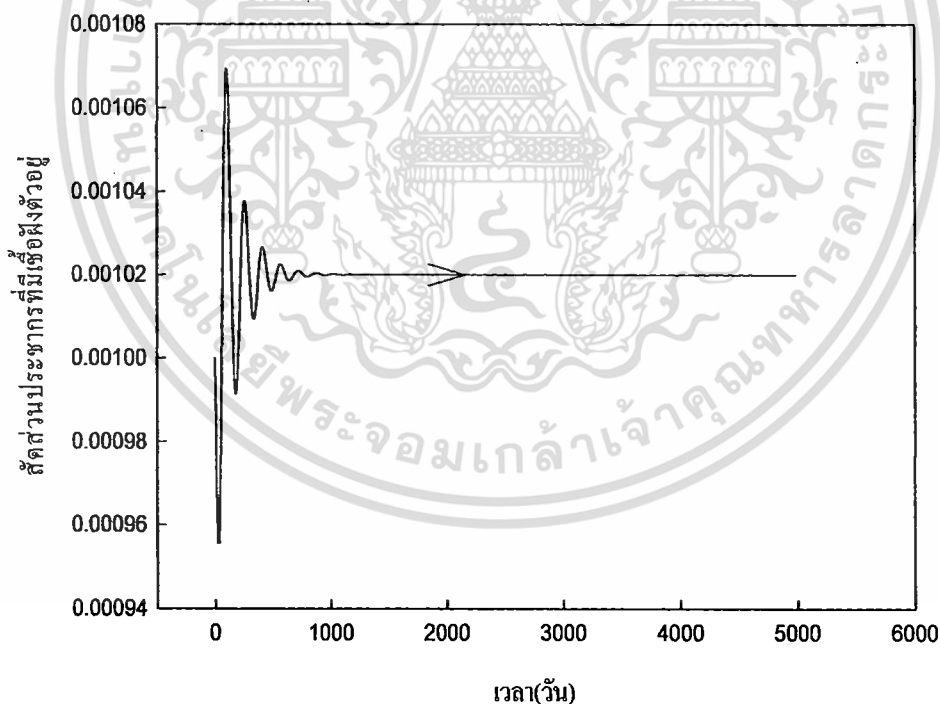
รูปที่ 4.49 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$



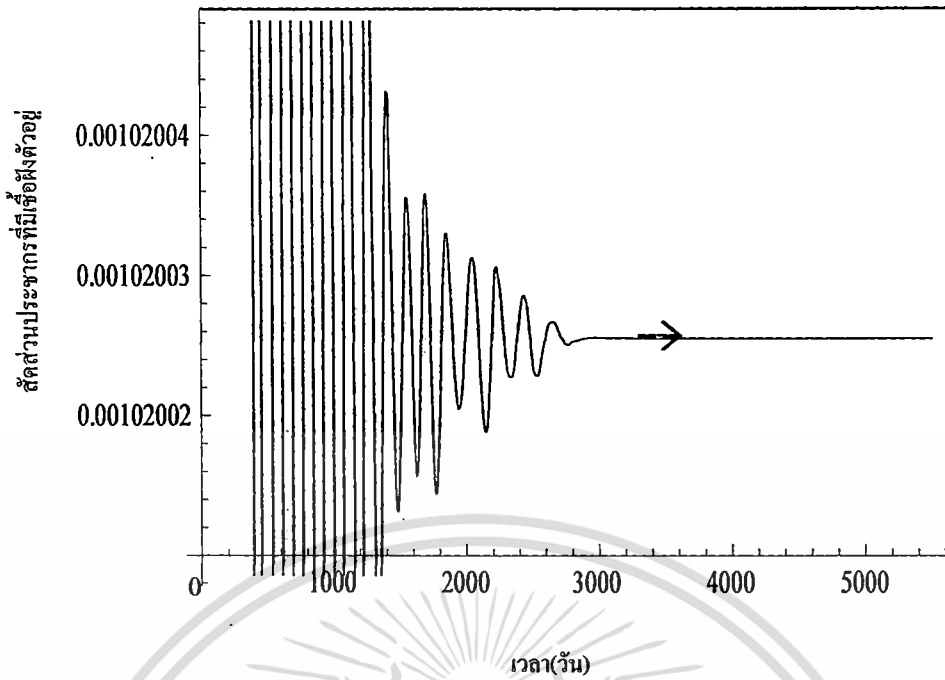
รูปที่ 4.50 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายถอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$



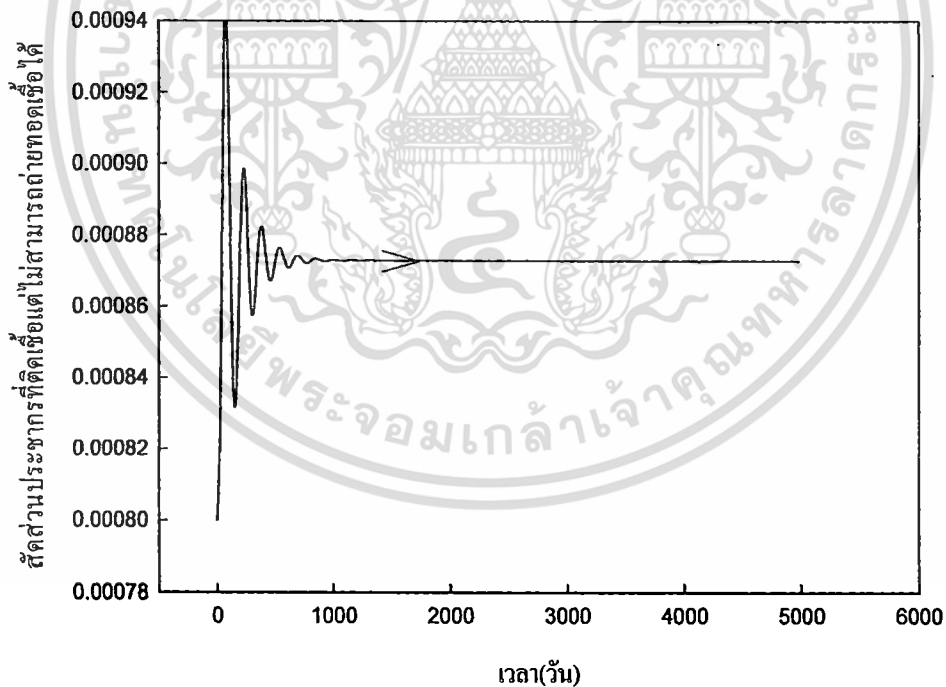
รูปที่ 4.51 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายถอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$



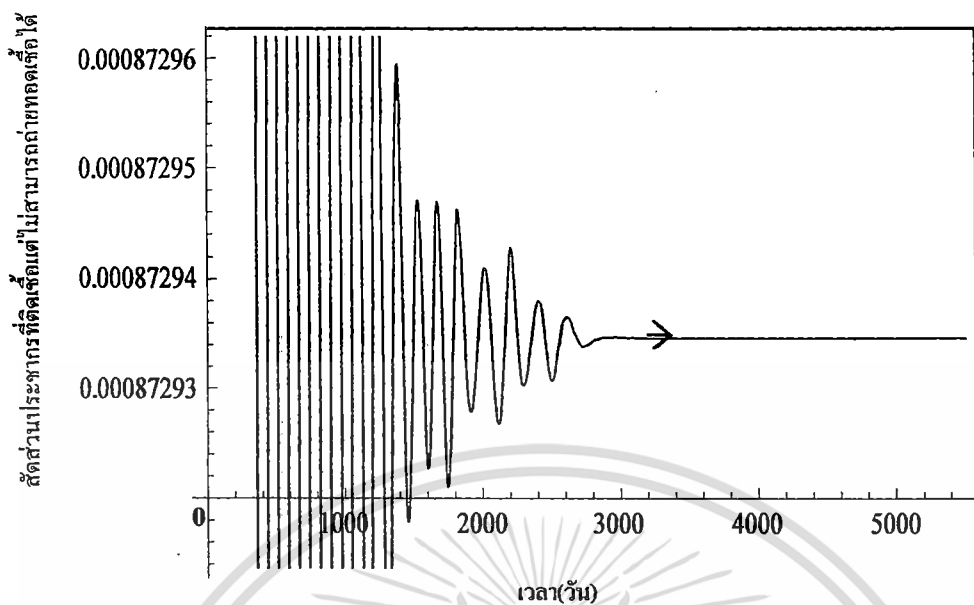
รูปที่ 4.52 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$



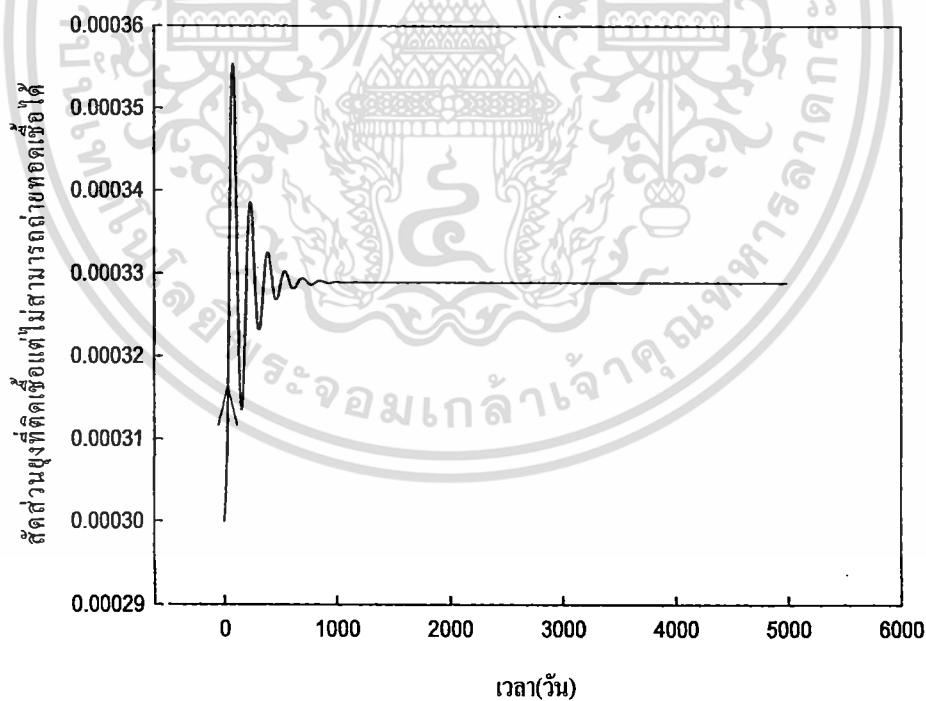
รูปที่ 4.53 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$



รูปที่ 4.54 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายถอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$

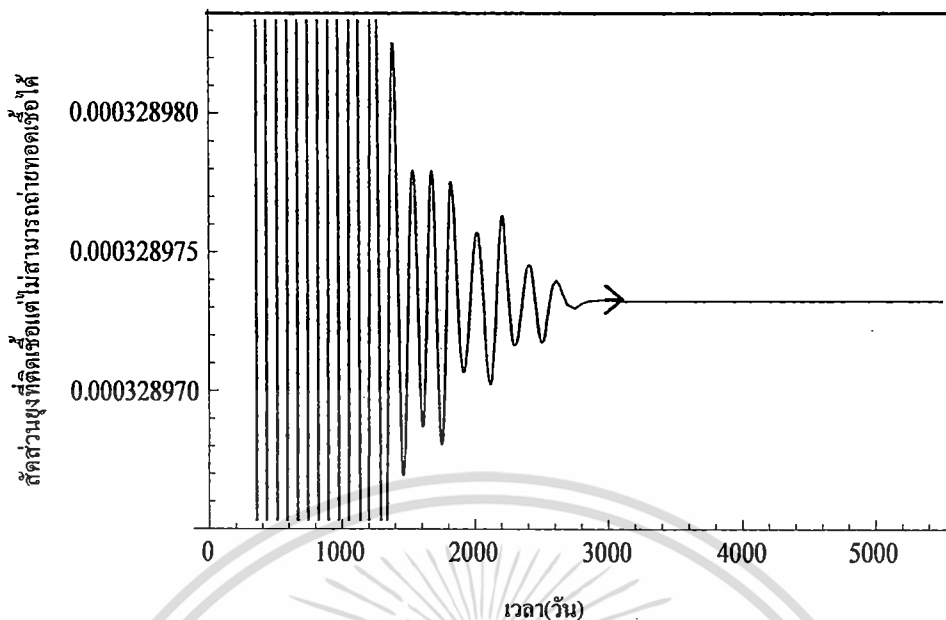


รูปที่ 4.55 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$

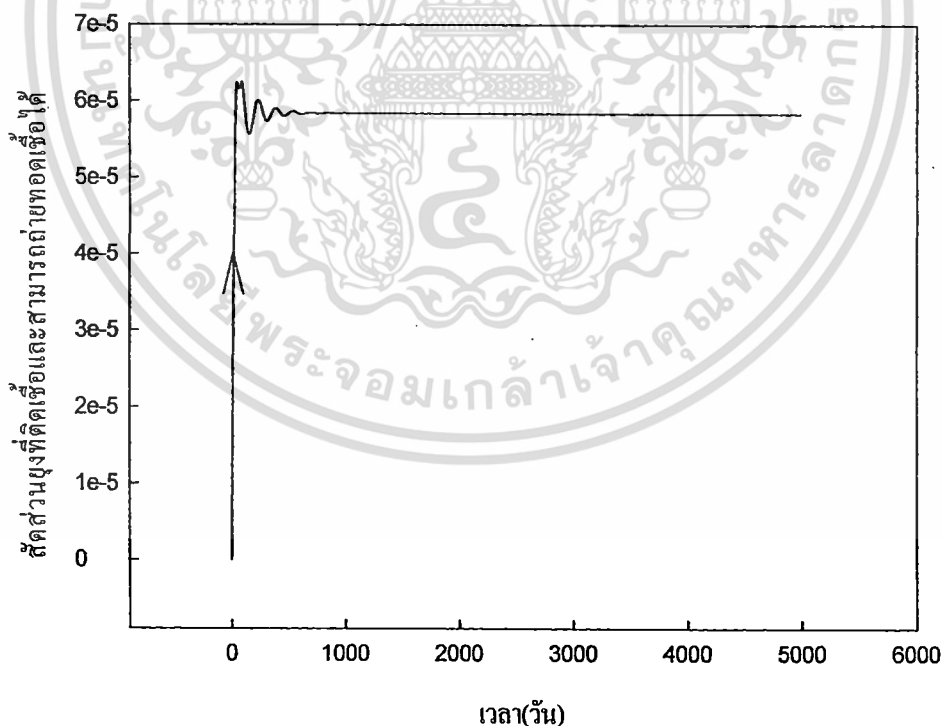


รูปที่ 4.56 กราฟแสดงสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$

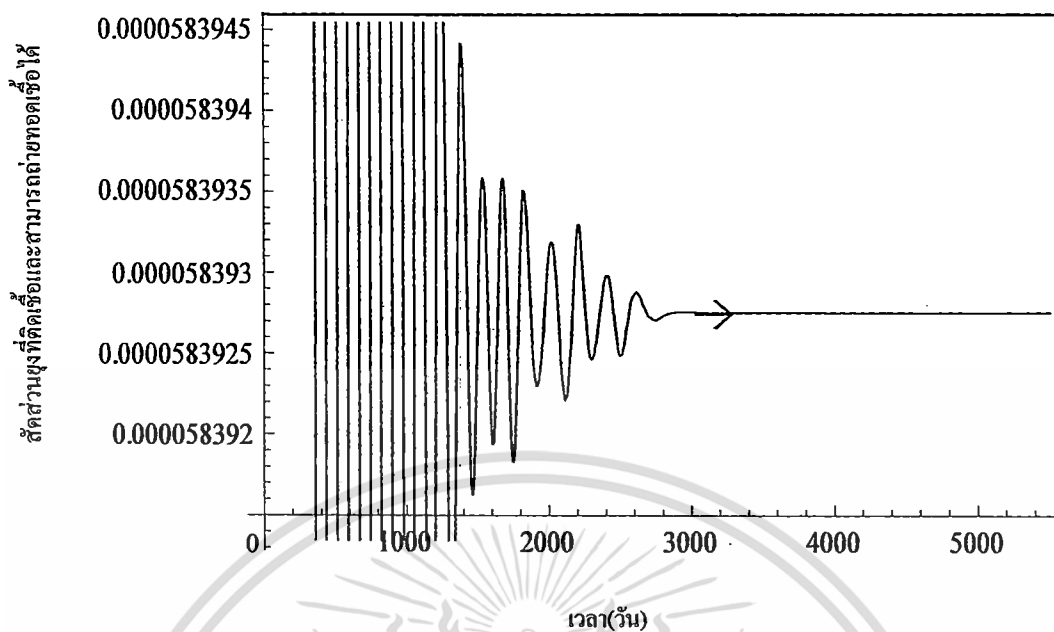
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.57 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$



รูปที่ 4.58 กราฟแสดงสัดส่วนผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้น ดังนี้ $I_h^*[0]=0.0006, S_h^*[0]=0.0266, E_h^*[0]=0.0008, D_h^*[0]=0.001, I_v^*[0]=0, E_v^*[0]=0.0003, R_0=37.6073$



รูปที่ 4.59 กราฟแสดงสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา ซึ่งมีค่าเริ่มต้นดังนี้ ดังนี้ $I_h^*[0]=0.5, S_h^*[0]=0.5, E_h^*[0]=0.5, D_h^*[0]=0.5, I_v^*[0]=0.5, E_v^*[0]=0.5, R_0=37.6073$

จากรูปที่ 4.48 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.49

จากรูปที่ 4.50 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.51

จากรูปที่ 4.52 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.53

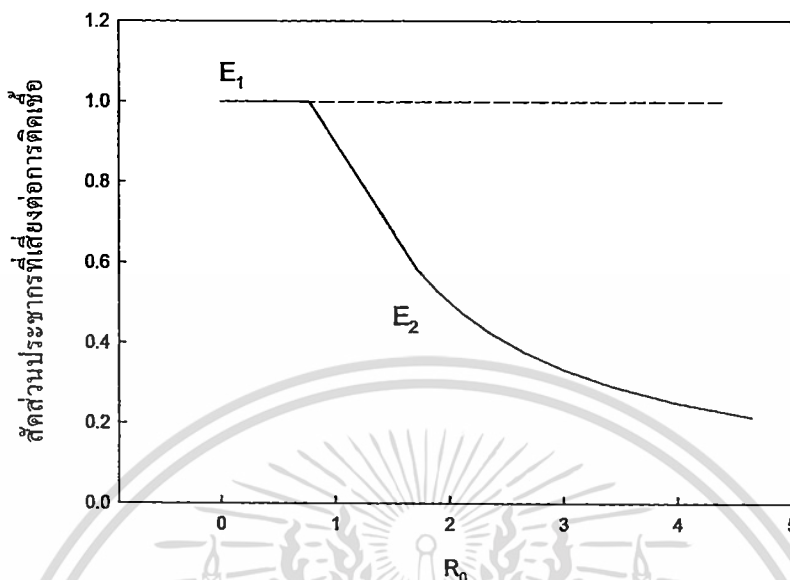
จากรูปที่ 4.54 พบว่ากราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.55

จากรูปที่ 4.56 พบว่ากราฟสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.57

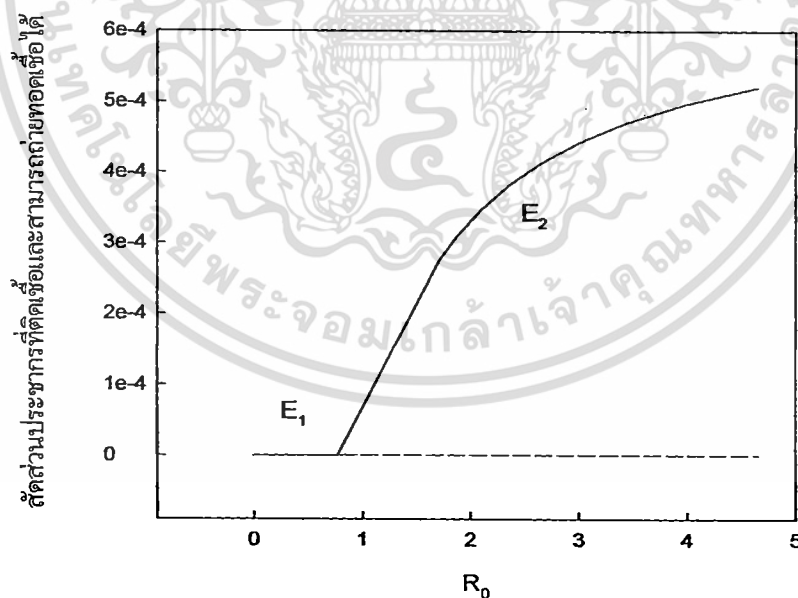
จากรูปที่ 4.58 พบว่ากราฟสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลาลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่ารูปที่ 4.59

ดังนั้นสรุปได้ว่าชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นเข้าใกล้จุดสมดุลจะลู่เข้าหาจุดสมดุลเร็วกว่าชุดข้อมูลที่มีค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างจากจุดสมดุล

แผนภาพไบเฟอร์เคชัน(Bifurcation)ของจุดสมดุล

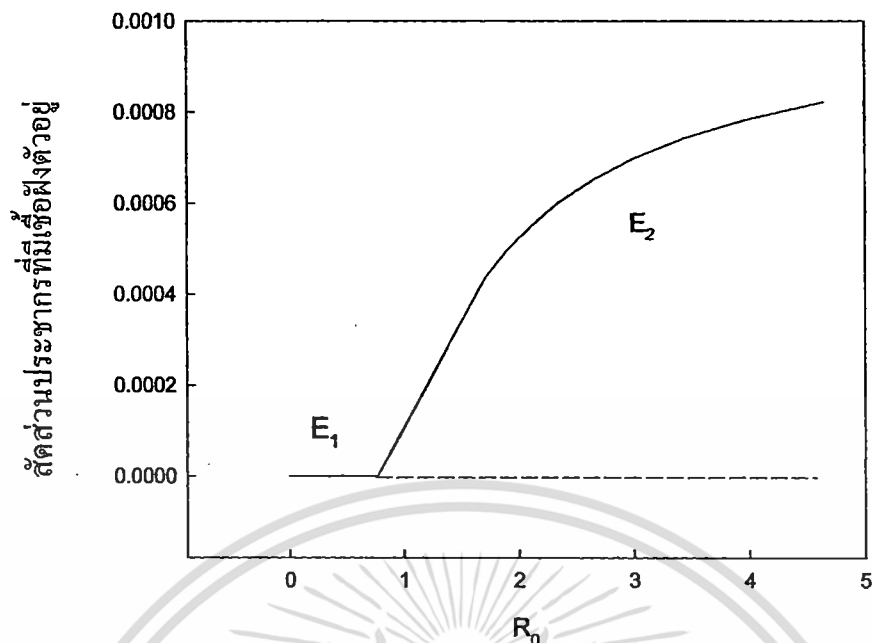


รูปที่ 4.60 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดังกราฟสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน — แทนความเสถียรภาพ ---- แทนความไม่เสถียรภาพ

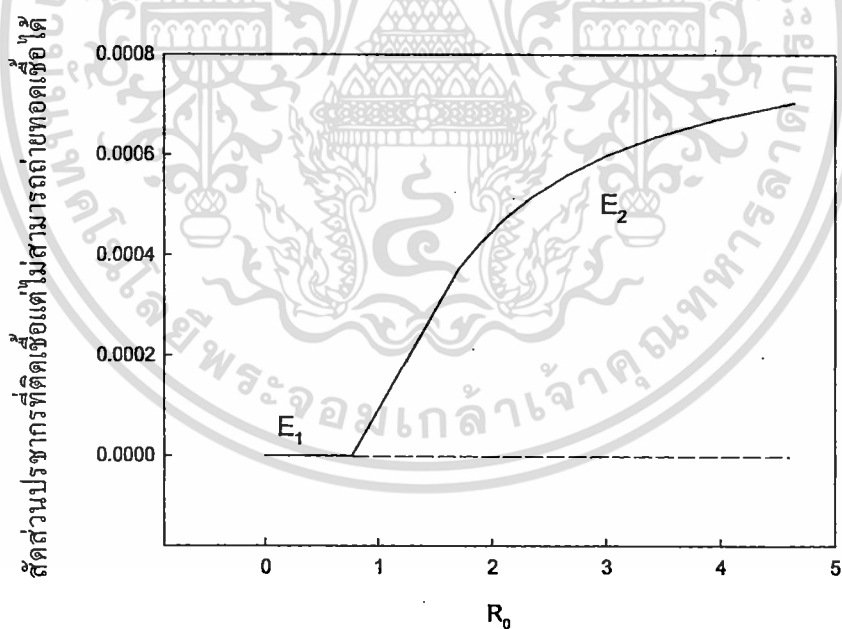


รูปที่ 4.61 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดังกราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน — แทนความเสถียรภาพ ---- แทนความไม่เสถียรภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.62 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดังกราฟสัดส่วนประชากรที่เสี่ยงต่อไข้หวัดใหญ่เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน — แทนความเสถียรภาพ ---- แทนความไม่เสถียรภาพ



รูปที่ 4.63 แผนภาพไบเฟอร์เคชันแสดงความเสถียรภาพของจุดสมดุล ถูกแสดงดังกราฟสัดส่วนประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน — แทนความเสถียรภาพ ---- แทนความไม่เสถียรภาพ

จากรูปที่ 4.60 - 4.63 พบว่า E_1 มีความเสถียรภาพเมื่อ R_0 น้อยกว่า 1 และถ้า R_0 มากกว่า 1 E_1 มีความไม่เสถียรภาพ ในทางกลับกันพบว่า E_2 มีความเสถียรภาพเมื่อ R_0 มากกว่า 1

ดังนั้นสรุปได้ว่าจุดสมดุลในสภาวะไร้โรคจะเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานน้อยกว่าหนึ่ง และจุดสมดุลในสภาวะระบาดเรื้อรังจะเสถียรภาพเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมากกว่าหนึ่ง



บทที่ 5

สรุปผลการดำเนินงาน อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

งานวิจัยฉบับนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ ในแบบจำลองที่ได้สมมติให้จำนวนประชากรมนุษย์และยุงทั้งหมดเป็นค่าคงที่ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้เป็นสมการอนุพันธ์ของ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ , ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ , ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ , ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ , ยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ , ยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ พบว่าผลเฉลยของแบบจำลองที่ได้นั้นแตกต่างกัน ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของ โรคมาลาเรียชนิดเชื้อ พลาสโมเดียมไวเวกซ์นั้นจะได้จุดสมดุล 2 จุดคือจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค และจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของพารามิเตอร์ และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่ง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคจะเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง แต่ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่งจะทำให้จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคจะไม่เสถียรภาพ

ภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังพบว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่มากจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่น้อย , จำนวนยุงมีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือจำนวนยุงที่มากจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่าจำนวนยุงที่น้อย และค่าเริ่มต้นมีผลต่อการเข้าสู่หาจุดสมดุลคือค่าเริ่มต้นเข้าใกล้จุดสมดุลจะเข้าสู่หาจุดสมดุลเร็วกว่าค่าเริ่มต้นที่อยู่ห่างจากจุดสมดุล

การควบคุมการระบาดของ โรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ สามารถทำได้โดยการควบคุมประชากรยุงที่มีผลต่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน หากเกิดการระบาดของโรค ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่ามากกว่าหนึ่ง

สำหรับการควบคุมการระบาดของ โรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามข้อมูลของการระบาดของ โรคมาลาเรียชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ เพื่อให้แบบจำลองให้มีประสิทธิภาพและสามารถใช้งานได้จริง เราจึงนำโปรแกรม Mathematica มาช่วยในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการระบาดภายใต้สภาวะไร้โรค และสภาวะระบาดเรื้อรัง โดยโปรแกรมจะบอกให้ทราบถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา , อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอด

เชื่อได้เทียบกับเวลา , อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา , อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่มีเชื่อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา , อัตราการเปลี่ยนแปลงของยุงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา , อัตราการเปลี่ยนแปลงของยุงที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้เทียบกับเวลา , คำสืบพันธุ์พื้นฐานและนำโปรแกรม Sigmaplot มาช่วยในการวาดกราฟ

5.2 ข้อจำกัดของโปรแกรม

1) เราต้องทราบจำนวนประชากรทั้งหมด , อัตราการตายของประชากร , อัตราการเกิดของประชากร , อัตราที่ผู้ที่ติดเชื่อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ เปลี่ยน ไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื่อ , อัตราการที่เชื่อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ในผู้ที่มีเชื่อฝังตัวอยู่ สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื่ออีกครั้ง , อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื่อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ , อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื่อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ เปลี่ยนเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ , อัตราการฟื้น ไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื่อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ , อัตราประชากรที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้ ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื่อ , อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ ไปเป็นผู้ที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้

2) จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น , จำนวนยุงทั้งหมด , อัตราการตายของยุง , อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่ติดเชื่อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื่อได้ ไปเป็นยุงที่ติดเชื่อและสามารถถ่ายทอดเชื่อได้

5.3 แนวทางในการพัฒนา

- 1) ลดข้อจำกัดของ โปรแกรมให้น้อยลง
- 2) แยกกลุ่มประชากรเสี่ยงต่อการติดเชื่อระหว่างเพศหญิงกับเพศชายว่ากลุ่มใดมีอัตราการแพร่เชื่อสูงกว่ากันและมีผลต่อ โปรแกรมหรือไม่

เอกสารอ้างอิง

- [1] กองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ, “รายงานประจำปี 2544” หน้า 156-163, 2001.
- [2] กองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ, “รายงานประจำปี 2545” หน้า 133-140, 2002.
- [3] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2546” หน้า 11-21, 2003.
- [4] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2547”, 2004.
- [5] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2548”, 2005.
- [6] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2549”, 2006.
- [7] สำนักโรคติดต่อนำโดยแมลง กรมควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2550”, 2007.
- [8] เฮอร์สวัณน์ คำมณี, “แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่เชื้อ PLASMODIUM VIVAX มาลาเรีย”, คณิตศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยมหิดล, 2002.
- [9] Puntani Pongsumpun, “Transmission Model for Dengue virus infection in Thailand”, Faculty of Graduate Studies Mahidol University, 2004.
- [10] ทรัพย์สินชัย เอกอิมทรัพย์ และคณะ, “แบบจำลองตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมาลาเรีย”, ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2549.
- [11] P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit, and I. M. Tang, “Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions,” Southeast Asian J Trop Med Publ Health, vol. 35, pp. 155-159, 2004.
- [12] P. Pongsumpun, and I. M. Tang, “Mathematics model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria,” Int j math models and methods in applied sci, vol. 3, pp. 117-121, 2007.
- [13] http://www.siamhealth.net/public_html/Disease/infectious/malaria/distribution.htm
- [14] www.thaivbd.org

- [15] <http://lifestyle.kingsolder.com>
- [16] www.dmsc.moph.go.th/itc/mis/doc2/.../maralia_4-12-51.pdf
- [17] <http://www.thaiclinic.com/medbible/malaria.html>
- [18] <http://www.cdc.gov/malaria>
- [19] http://volunteer-nepal.abroaderview.org/images/mapa_malaria_asia.gif
- [20] Soto J, Toledo J, Gutierrez P, Luzz M, Llinas N, Cedeno N, et al. Plasmodium vivax clinically resistant to chloroquine in Colombia. *Am J Trop Med Hyg.* 2001;65:90-3.
- [21] J. C. Koella, On the use of mathematical models of malaria transmission, *Acta Tropica*, 49(1991), pp. 1–25.
- [22] G. A. Ngwa, Modelling the dynamics of endemic malaria in growing populations, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 4 (2004), pp. 1173–1202.
- [23] H. M. Yang, Malaria transmission model for different levels of acquired immunity and temperature-dependent parameters (vector), *Revista de Sa'ude P'ublica*, 34 (2000), pp. 223–231.
- [24] J. Tumwiine, J.Y.T. Mugisha, L.S. Luboobi, “A mathematical model for the dynamics of malaria in a human host and mosquito vector with temporary immunity”, Elsevier Applied Mathematics and Computation, 2007
- [25] C. Chiyaka, W. Garira, S. Dube, “Transmission model of endemic human malaria in a partially immune population”, Elsevier Mathematical and Computer Modelling, 2007
- [26] A.P.K. deZoysa, C.Mendis, A.C.Gamage-Mendis, S.Weerasinghe, P.R.J.Herath, K.N.Mendis, “A mathematical model for Plasmodium vivax malaria transmission : estimation of the impact of transmission-blocking immunity in an endemic area”, *Bulletin of the World Health Organization*, 1991 pp. 725-734
- [27] Nakul Chitnis, J. M. Cushing, J. M. Hyman, “Bifurcation analysis of a mathematical model for malaria transmission”, *SIAM J. APPL. MATH*, Volume 67, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การวิเคราะห์การแพร่เชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์โดยใช้ตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ปรียาภรณ์ มุมทอง¹ และ พันธณี พงศ์สัมพันธ์²

โรคมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิต สกัลพลาสโมเดียม (*Plasmodium*) 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม (*falciparum*) ไวแวกซ์ (*vivax*) โอวัลเล่ (*ovale*) และมาลาเรีย (*malaria*) โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) กับพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) โรคนี้พบได้บ่อยในแอฟริกา อเมริกาใต้ เอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ในประเทศไทยพบเชื้อมาลาเรียอยู่บริเวณป่าเขาชายแดนของประเทศ โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย-พม่า และไทย-กัมพูชา ยุ้งกันปล่องเป็นพาหะหลักของการนำเชื้อโรคมาลาเรีย งานวิจัยนี้ ศึกษาเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรและจากนั้นจึงได้ประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของค่าตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) และแสดงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง เพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา พร้อมทั้งการวิเคราะห์ถึงการควบคุมโรคมาลาเรีย

คำสำคัญ : พลาสโมเดียมไวแวกซ์; จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค; จุดสมดุล; สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง; สมการเชิงพลวัต; มาลาเรีย

ปรียาภรณ์ มุมทอง และ พันธณี พงศ์สัมพันธ์

สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

กรุงเทพมหานคร 10520

e-mail : ¹pormarch@hotmail.com และ ²kppuntan@kmitl.ac.th

การวิเคราะห์การแพร่เชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์โดยใช้ตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ปริญภรณ์ มุมทอง และ พันธณี พงศ์สัมพันธ์

pormarch@hotmail.com และ kppuntan@kmitl.ac.th

สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

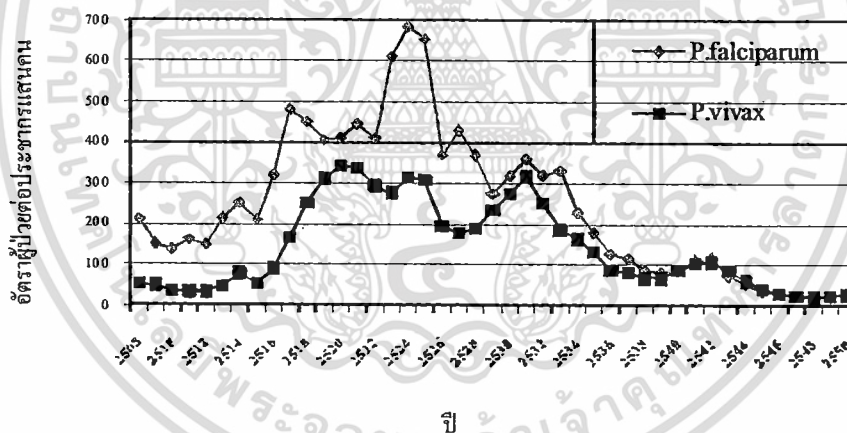
บทคัดย่อ: โรคมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิต สกัลพลาสโมเดียม (*Plasmodium*) 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม (*falciparum*), ไวแวกซ์ (*vivax*), โอวัลเล่ (*ovale*) และมาลาเรีย (*malaria*) โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม (*Plasmodium falciparum*) กับพลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) โรคนี้พบได้บ่อยในแอฟริกา อเมริกาใต้ เอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ในประเทศไทย พบเชื้อมาลาเรียอยู่บริเวณป่าเขาชายแดนของประเทศ โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย-พม่า และไทย-กัมพูชา ยุ้งก้นปล่องเป็นพาหะหลักของการนำเชื้อโรคมาลาเรีย งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับการแพร่เชื้อ พลาสโมเดียมไวแวกซ์ โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของประชากรและยุ้ง จากนั้นประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงผลวัดมาตรฐาน (standard dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภาพของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) และแสดงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลองเพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา พร้อมทั้งการวิเคราะห์ถึงการควบคุมโรคมาลาเรีย

คำสำคัญ: พลาสโมเดียมไวแวกซ์; จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค; จุดสมดุลสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง; สมการเชิงผลวัด; มาลาเรีย

1. บทนำ

โรคมาลาเรีย เป็นปัญหาสาธารณสุขที่สำคัญในประเทศไทยเนื่องจากมีการพบเชื้อนี้แพร่กระจายอยู่ในจังหวัดชายแดน โรคมาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อปรสิต สกัลพลาสโมเดียม 4 ชนิด ได้แก่ ฟัลซิพารัม, ไวแวกซ์, โอวัลเล่และมาลาเรีย โดยเชื้อที่มีความสำคัญในประเทศไทยมี 2 ชนิด คือ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม กับ พลาสโมเดียมไวแวกซ์ โดยมียุ้งก้นปล่องเป็นพาหะหลักของการนำเชื้อโรคมาลาเรีย อาการของโรคนี้ขึ้นอยู่กับชนิดเชื้อ ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมฟัลซิพารัม ในระยะแรกของโรคจะมีอาการไข้ ปวดเมื่อยตามตัว คลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้องหรือท้องเดิน บางคนอาจมีไอหรือ

ลักษณะคล้ายไข้หวัดได้ใน 4 – 5 วันแรกของโรค ไข้จะสูงลอยตลอดเวลา อาการของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ จะมีลักษณะคล้ายกับ พลาสโมเดียมฟัลซิพารัม จะพบหนาวสั่น ได้บ่อยกว่า และขณะเกิดหนาวสั่น มักมีอาการปวดหัว ปวดกล้ามเนื้อมาก ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมโอวัลต์จะมีลักษณะคล้ายกับพลาสโมเดียมไวแวกซ์ แต่จะมีอาการน้อยกว่า ผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิด พลาสโมเดียมมาลาเรีย จะทำให้เกิดมีไข้หนาวสั่นวันเว้น 3 วัน โรคนี้พบได้บ่อยในแอฟริกา อเมริกาใต้ เอเชีย พบได้ทั้งในเขตร้อนและกึ่งเขตร้อน ในประเทศไทย พบเข็มาลาเรียอยู่บริเวณป่าเขาชายแดนของประเทศ โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย-พม่า และไทย-กัมพูชา จังหวัดที่พบผู้ป่วยด้วยไข้มาลาเรียสูงสุด 10 อันดับแรก คือ จังหวัดยะลา ตาก สงขลา แม่ฮ่องสอน ชุมพร นราธิวาส ระนอง ประจวบคีรีขันธ์ กาญจนบุรี และจันทบุรี จำนวนผู้ป่วยและอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนของเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวแวกซ์ สูงกว่าชนิดเชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัม ในปี พ.ศ.2544 มีจำนวนผู้ป่วย 67,749 คน แยกเป็นชนิดเชื้อ พลาสโมเดียมไวแวกซ์ จำนวน 36,044 คนและเชื้อพลาสโมเดียมฟัลซิพารัม จำนวน 31,358 คน และมีอัตราผู้ป่วย 117 คน ต่อประชากรแสนคน กราฟแสดงอัตราจำนวนผู้ป่วยดังนี้



รูปที่ 1 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปีพ.ศ. 2508-2550

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ โรคนี้ผู้วิจัยจึงได้ ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ.2508 – 2550 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหา โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับ โรคมาลาเรีย เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูล ทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวัง ของทางสำนัก ระบาดวิทยา และกรมควบคุมโรคติดต่อฯ โดยแมลง กระทรวงสาธารณสุขต่อไป [1]-[5]

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เราเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคมาลาเรียตามชนิดเชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรสองกลุ่มระหว่างประชากรมนุษย์และยุง ซึ่งแต่ละกลุ่มประชากรจะมีขนาดคงที่ ในกลุ่มของประชากรมนุษย์จะแบ่งออกเป็น 5 กรณี ได้แก่ ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่และประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อ ในกลุ่มของยุงแบ่งออกเป็น 3 กรณี ได้แก่ ยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้และยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ในที่นี้พิจารณาถึงอิทธิพลการฟักตัวของเชื้อ พลาสโมเดียมไวเวกซ์ในประชากรมนุษย์และในยุง ซึ่งนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคที่ติดเชื้อ โดยที่สมการพลศาสตร์ของประชากรมนุษย์ สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}S_h = \lambda N_T + r_3 D_h + r_1 E_h + r_6 I_h + r_4 R_h - (\mu_h + \gamma'_h I_v) S_h - \alpha I_h \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}E_h = \gamma'_h I_v S_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E_h \quad (1.2)$$

$$\frac{d}{dt}I_h = \rho_h E_h + r_2 D_h - (\mu_h + r_5 + r_6) I_h \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}D_h = \alpha I_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D_h \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt}R_h = r_5 I_h - (\mu_h + r_4) R_h \quad (1.5)$$

โดยที่ S_h, E_h, I_h, D_h และ R_h เป็นจำนวนประชากรมนุษย์ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้, ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ และประชากรที่ฟื้นจากการติดเชื้อตามลำดับ

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและยุง

ข้อความ	สัญลักษณ์	ข้อความ	สัญลักษณ์
อัตราการเกิดของประชากร	λ	อัตราการตายของยุง	μ_v
อัตราการตายของประชากร	μ_h	จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น	A
จำนวนประชากรทั้งหมด	N_T	ร้อยละผู้ติดเชื้อของประชากร	α
อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากยุง ไปประชากร	γ'_h	อัตราการถ่ายทอดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ จากประชากร ไปยุง	γ'_v
อัตราที่ผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อ	r_1	อัตราที่เชื้อพลาสโมเดียมไวเวกซ์ ในผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่สามารถเป็นผู้ที่ติดเชื้ออีกครั้ง	r_2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์	r_3	อัตราผู้ที่ฟื้นจากการติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์ เปลี่ยนเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_4
อัตราการฟื้นไข้ของผู้ป่วยที่ติดเชื้อชนิดพลาสโมเดียมไวเวกซ์	r_5	อัตราประชากรที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	r_6
อัตราที่ประชากรเปลี่ยนจากผู้ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	ρ_h	อัตราที่ยุงเปลี่ยนจากยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไปเป็นยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	ρ_v

สมการพลศาสตร์ของยุง มีดังนี้

$$\frac{d}{dt} S_v = A - (\mu_v + r'_v I_h) S_v \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} E_v = r'_v I_h S_v - (\mu_v + \rho_v) E_v \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt} I_v = \rho_v E_v - \mu_v I_v \quad (1.8)$$

โดยที่ S_v, E_v และ I_v เป็นจำนวนยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, ยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้และยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ตามลำดับ ซึ่ง $N_T = S_h + E_h + I_h + D_h + R_h$ เป็นจำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมดและ $N_v = S_v + E_v + I_v$ เป็นจำนวนยุงทั้งหมด สมมติว่าจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$\frac{dN_T}{dt} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{dN_v}{dt} = 0$$

จาก $N_T = S_h + E_h + I_h + D_h + R_h$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} N_T = \frac{d}{dt} S_h + \frac{d}{dt} E_h + \frac{d}{dt} I_h + \frac{d}{dt} D_h + \frac{d}{dt} R_h \quad (1.9)$$

เนื่องจากจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ให้ด้านขวามือของสมการ (1.9) เป็นศูนย์เมื่อ $\lambda = \mu_h$ (ค่าคงที่ของอัตราการเกิดและอัตราการตายต่อประชากรมนุษย์มีค่าเท่ากัน)

จาก $N_v = S_v + E_v + I_v$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} N_v = \frac{d}{dt} S_v + \frac{d}{dt} E_v + \frac{d}{dt} I_v \quad (2.0)$$

เนื่องจากจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ให้ด้านขวามือของสมการ (2.0) เป็นศูนย์เมื่อ $\mu_v = \frac{A}{N_v}$

(ค่าคงที่อัตราการตายของยุงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของยุงกับจำนวนยุงทั้งหมด)

กำหนดให้

$$\begin{aligned} S'_h &= \frac{S_h}{N_T} & I'_h &= \frac{I_h}{N_T} & E'_h &= \frac{E_h}{N_T} & R'_h &= \frac{R_h}{N_T} \\ D'_h &= \frac{D_h}{N_T} & S'_v &= \frac{S_v}{N_v} & I'_v &= \frac{I_v}{N_v} & E'_v &= \frac{E_v}{N_v} \end{aligned}$$

สามารถจัดสมการ (1.1) – (1.4) และ (1.7) – (1.8) ได้สมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d}{dt} S'_h = \mu_h + r_1 D'_h + r_2 E'_h + r_3 I'_h + r_4 R'_h - (\mu_h + \gamma_h I'_v N_v) S'_h - \alpha r_1 I'_h \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} E'_h = \gamma_h I'_v N_v S'_h - (r_1 + \rho_h + \mu_h) E'_h \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} I'_h = \rho_h E'_h + r_2 D'_h - (\mu_h + r_3 + r_4) I'_h \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} D'_h = \alpha r_1 I'_h - (r_2 + \mu_h + r_3) D'_h \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} I'_v = \rho_v E'_v - \mu_v I'_v \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} E'_v = \gamma'_v N_T I'_h S'_v - (\mu_v + \rho_v) E'_v \quad (2.6)$$

สำหรับสมการของ R'_h และ S'_v สามารถหาได้จากเงื่อนไขต่อไปนี้อย่างไรก็ตาม $S'_h + I'_h + R'_h + E'_h + D'_h = 1$

และ $S'_v + I'_v + E'_v = 1$

3. การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

A. จุดสมดุล

จุดสมดุล $(I^*_h, S^*_h, E^*_h, D^*_h, I^*_v, E^*_v)$ หาได้จากการจัดสมการ (2.1) – (2.6) ให้เท่ากับศูนย์ จะได้จุดสมดุลสองจุดคือจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 (I^*_h, S^*_h, E^*_h, D^*_h, I^*_v, E^*_v)$ เมื่อ

$$I_h^* = \frac{\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + \mu_{h23}\tau_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + (\mu_h\mu_{h23} + \tau_5\mu_{h23} + \tau_6\mu_{h23} - \tau_2\alpha\tau_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4)}{\left[(\mu_h\mu_{h23} + \tau_5\mu_{h23} + \tau_6\mu_{h23} - \tau_2\alpha\tau_1)(\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4))\gamma_v N_T + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v} (\rho_h + \mu_h + \tau_4) \right] - \tau_3\alpha\tau_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + \mu_{h23}\alpha_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v} \quad (3.1)$$

$$S_h^* = \frac{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v \left(\mu_h + \frac{\tau_3\alpha\tau_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + \tau_4 + \alpha_4 I_h^* \right) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*)}{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v} (\rho_h + \mu_h + \tau_4)} \quad (3.2)$$

$$E_h^* = \frac{\gamma_v N_T I_h^* \rho_v \gamma_h N_v \left(\mu_h + \frac{\tau_3\alpha\tau_1 I_h^*}{\mu_{h23}} + \tau_4 + \alpha_4 I_h^* \right)}{\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4) (\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v} (\rho_h + \mu_h + \tau_4)} \quad (3.3)$$

$$D_h^* = \frac{\alpha\tau_1 I_h^*}{\mu_{h23}} \quad (3.4)$$

$$I_v^* = \frac{\gamma_v N_T I_h^* \rho_v}{(\mu_v + \gamma_v N_T I_h^*) (\mu_v + \rho_v)} \quad (3.5)$$

$$E_v^* = \left[\frac{\gamma_v N_T I_h^* \mu_v}{\mu_v (\mu_v + \rho_v) + \gamma_v N_T I_h^* (\mu_v + \rho_v)} \right] \quad (3.6)$$

โดยที่ I_h^* เป็นผลเฉลยของสมการ

$$A_1 (I_h^*)^2 + A_2 I_h^* = 0 \quad (4)$$

ผลเฉลยของสมการ (4) คือ $I_h^* = 0$ และ $I_h^* = \frac{A_2}{A_1}$ เมื่อ

$$A_2 = \mu_{h23}\mu_h\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v + \mu_{h23}\tau_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_v (\mu_h\mu_{h23} + \tau_5\mu_{h23} + \tau_6\mu_{h23} - \tau_2\alpha\tau_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4)$$

$$A_1 = \left[(\mu_h\mu_{h23} + \tau_5\mu_{h23} + \tau_6\mu_{h23} - \tau_2\alpha\tau_1)(\mu\rho_{h1}\mu\rho_v (\mu_h + \tau_4))\gamma_v N_T + \gamma_h N_v\gamma_v N_{T\rho_v} (\rho_h + \mu_h + \tau_4) \right] - \tau_3\alpha\tau_1\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v - \mu_{h23}\alpha_4\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v$$

เงื่อนไขที่ทำให้ $I_h^* > 0$ เมื่อ $R_0 > 1$, ($R_0 = \frac{\mu_{h23}\rho_h\gamma_v N_{T\rho_v}\gamma_h N_v}{\mu_v (\mu_h\mu_{h23} + \tau_5\mu_{h23} + \tau_6\mu_{h23} - \tau_2\alpha\tau_1)\mu\rho_{h1}\mu\rho_v}$)

B. ความเสถียรภาพ

ความเสถียรภาพของจุดสมดุลจะพิจารณาในรูปค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์จาโค

เบียน จากระบบสมการ (2.1) – (2.6) นำมาเขียนในรูปของเมทริกซ์จาโคเบียนได้ดังนี้

$$J = \begin{pmatrix} -(\mu_h + \tau_5 + \tau_6) & 0 & \rho_h & \tau_2 & 0 & 0 \\ \tau_6 - \tau_4 - \alpha\tau_1 & -(\mu_h + \gamma_v I_h^* N_v + \tau_4) & \tau_4 - \tau_4 & \tau_3 - \tau_4 & -\gamma_h N_v S_h^* & 0 \\ 0 & \gamma_h I_h^* N_v & -(\tau_1 + \rho_h + \mu_h) & 0 & \gamma_h N_v S_h^* & 0 \\ \alpha\tau_1 & 0 & 0 & -(\tau_2 + \mu_h + \tau_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & \rho_v \\ \gamma_v N_T (1 - I_v^* - E_v^*) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_v N_T I_h^* & -(\mu_v + \rho_v + \gamma_v N_T I_h^*) \end{pmatrix} \quad (I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$$

พิจารณาหาค่าลักษณะเฉพาะได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_c) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

C. จุดสมดุลง่ายได้สภาวะไร้โรค

จุดสมดุลง่ายได้สภาวะไร้โรค $E_1(0,1,0,0,0,0)$ ได้ สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$(-\mu_h - r_5 - r_6 - \lambda)(-\mu_h - r_4 - \lambda)(-r_1 - \rho_h - \mu_h - \lambda)(-r_2 - \mu_h - r_3 - \lambda)(-\mu_v - \lambda)(-\mu_v - \rho_v - \lambda) = 0 \quad (5)$$

จากสมการลักษณะเฉพาะ (5) จะได้ค่าลักษณะเฉพาะ 6 ค่า ดังนี้

$$\lambda_1 = -\mu_h - r_5 - r_6, \lambda_2 = -\mu_h - r_4, \lambda_3 = -r_1 - \rho_h - \mu_h, \lambda_4 = -r_2 - \mu_h - r_3, \lambda_5 = -\mu_v, \lambda_6 = -\mu_v - \rho_v$$

พบว่า มี ค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลง่ายมีความเสถียรภาพ [6]-[8] เมื่อ $R_0 < 1$

D. จุดสมดุลง่ายได้สภาวะระบาดเรื้อรัง

จุดสมดุลง่ายได้สภาวะระบาดเรื้อรัง $E_2(I_h^*, S_h^*, E_h^*, D_h^*, I_v^*, E_v^*)$ ได้ สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\lambda^6 + T_6\lambda^5 + T_5\lambda^4 + T_4\lambda^3 + T_3\lambda^2 + T_2\lambda + T_1 = 0 \quad (6)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} T_1 &= \mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + r_{2v}(r_1 - r_4), T_2 = \mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv}, \\ T_3 &= \mu_{hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h1}\mu_{h23}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{h1}\mu_{h23}, \\ T_4 &= \mu_{2hv5}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{h23p}\mu_v\mu_{pv} + \mu_{hv5}\mu_{pvv} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{hv5}\mu_{h23p}, \\ T_5 &= \mu_v\mu_{pv} + \mu_{2hv5}\mu_{pvv} + \mu_{h23p}\mu_{pvv} + \mu_{hv5} + \mu_{2hv5}\mu_{h23p} + \mu_{h1}\mu_{h23}, \\ T_6 &= \mu_{h1}\mu_{h23}\mu_{pvv} + \mu_{pvv} + \mu_{2hv5} + \mu_{h23p} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned} \mu_{hv5} &= (\mu_h + r_5 + r_6)(\mu_h + \gamma'_h I_v^* N_v + r_4), \mu_{2hv5} = 2\mu_h + r_5 + r_6 + r_4 + \gamma'_h I_v^* N_v, \mu_{h23p} = \mu_{h23} + \mu_{h1}, \\ \mu_{pvv} &= \mu_{pv} + \mu_v + \gamma'_v N_T I_h^*, \mu_{pv} = \mu_{pv} + \gamma'_v N_T I_h^*, r_{2v} = \gamma'_v N_T I_h^* \rho_v \alpha r_2 \gamma'_h I_v^* N_v \end{aligned}$$

ค่าลักษณะเฉพาะ ของจุดสมดุลง่ายได้สภาวะระบาดเรื้อรังมีค่าเป็นลบเมื่อสอดคล้องกับ Routh-Hurwitz Criteria ที่ซึ่ง

$$T_6 > 0 \quad (7.1)$$

$$T_6 T_5 - T_4 > 0 \quad (7.2)$$

$$T_6 T_5 T_4 + T_6 T_2 - T_3 T_6^2 - T_4^2 > 0 \quad (7.3)$$

$$T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2) + T_6 T_1(T_6 T_5 - T_4) > 0 \quad (7.4)$$

$$T_2(T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2)) + T_1(T_6 T_4(T_6 T_5 - 3T_2) + T_4^2 + T_6(2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1)) > 0 \quad (7.5)$$

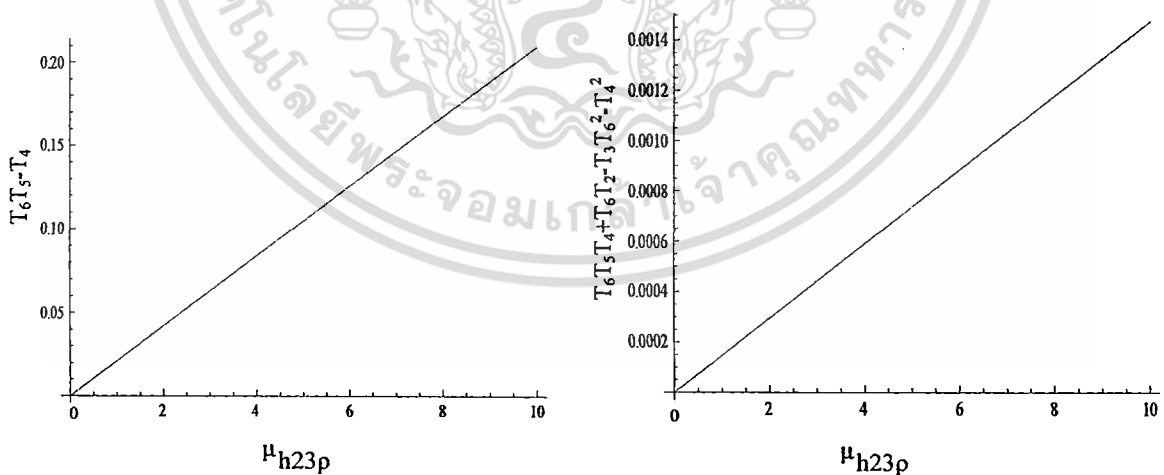
$$T_1(T_2(T_3(T_6 T_5 T_4 - T_4^2 - T_6^2 T_3) - T_2(T_6 T_5^2 - T_5 T_4 - 2T_6 T_3 + T_2)) + T_1(T_6 T_4(T_6 T_5 - 3T_2) + T_4^2 + T_6(2T_6 T_5 T_2 - T_5 T_4^2 - T_6^2 T_1))) > 0 \quad (7.6)$$

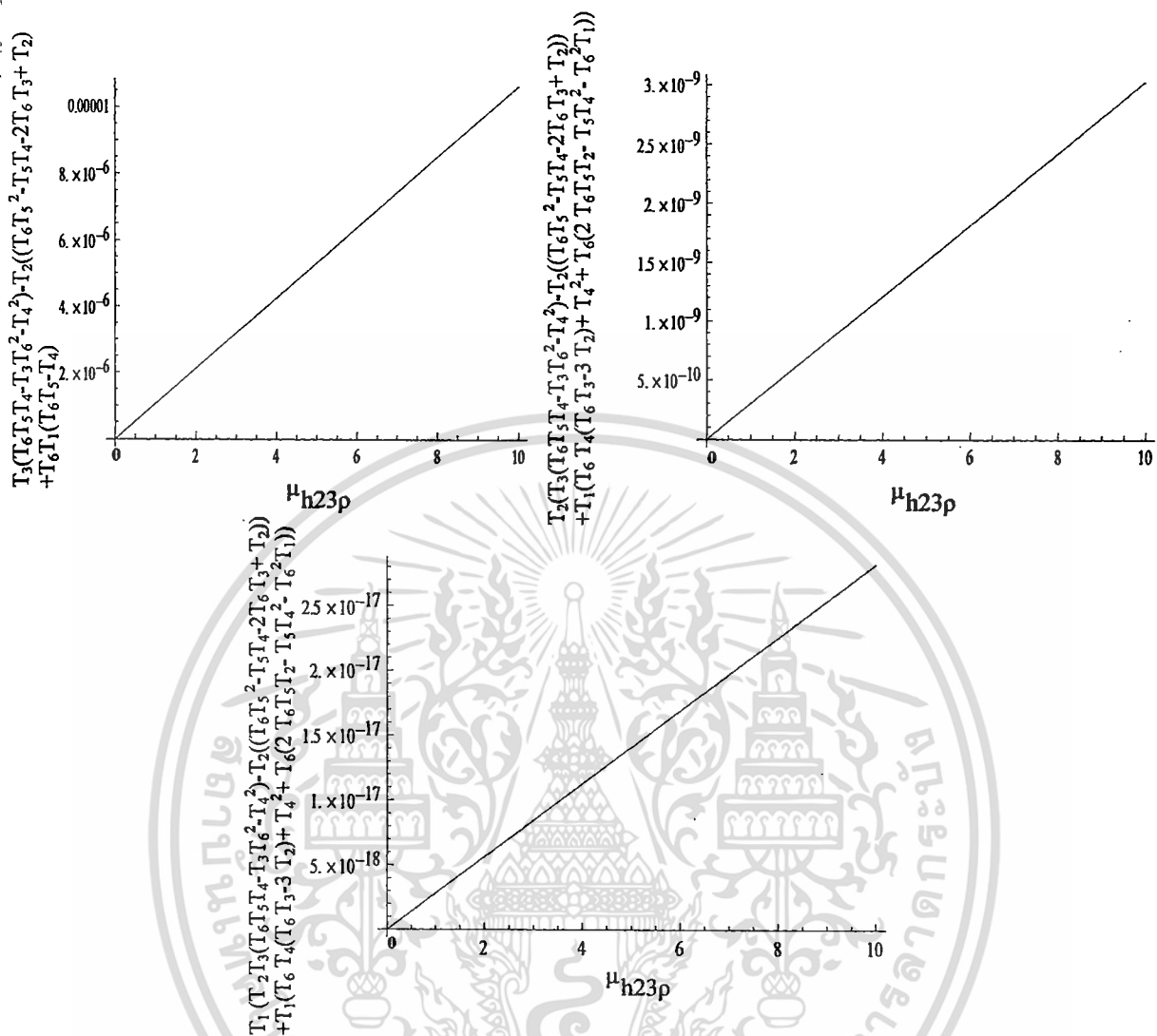
กำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมด 1000 คน นั่นคือ $N_T = 1000$ คน, ประชากรหนึ่งคนมีอายุเฉลี่ย 71 ปี จำนวนประชากรคงที่ทำให้อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการตายของประชากร

ดังนั้น $\mu_h = \lambda = 1/(365 * 71)$ ต่อวัน, ระยะเวลาของผู้ที่ติดเชื้อก่อนแสดงอาการ 14 วันเท่ากับระยะเวลาของผู้ที่ฟื้นจากการป่วยแล้วกลับไปป่วยอีกครั้งนั่นคือ $r_1 = r_4 = 1/14$ ต่อวัน, ระยะเวลาที่เชื้อฝังตัวอยู่ในผู้ป่วย 10 วันนั่นคือ $r_2 = 1/10$ ต่อวัน, ระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาอาการป่วยเท่ากับระยะเวลาของการฟื้นจากการติดเชื้อเป็นเวลา 20 วันนั่นคือ $r_3 = r_5 = 1/20$ ต่อวัน, จำนวนทั้งหมด 900 ตัว นั่นคือ

$N_v = 900$ ตัว, ยุงหนึ่งตัวมีอายุเฉลี่ย 7 วันนั่นคือ $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, ค่าคงที่อัตราการตายของยุงเท่ากับอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่อัตราการเกิดใหม่ของยุงกับจำนวนยุงทั้งหมด $\mu_v = A/N_v$ นั่นคือ $A=900/7$ ตัว [9]-[13]

พิจารณาเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria ดังนั้นจากอสมการที่ (7.2)-(7.6) ใช้ค่าพารามิเตอร์ข้างต้นสามารถแสดงกราฟของอสมการที่ (7.2)-(7.6) ได้ดังนี้





รูปที่ 2 กราฟของค่าพารามิเตอร์สำหรับจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz Criteria

จากการสร้างแบบจำลองของโรคมาลาเรียข้างต้นพบว่า เราสามารถหาจุดสมดุลได้ 2 จุด คือ จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมักมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 < 1$ จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังมีความเสถียรภาพเมื่อ $R_0 > 1$ นั้นหมายความว่าในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียควรกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กล่าวมาข้างต้น

4. บรรณานุกรม

- [1] กองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ, “รายงานประจำปี 2544” หน้า 156-163, 2001.
- [2] กองมาลาเรีย กรมควบคุมโรคติดต่อ, “รายงานประจำปี 2545” หน้า 133-140, 2002.

- [3] สำนักโรคติดต่อฯ โดยแมลง ควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2546” หน้า 11-21, 2003.
- [4] สำนักโรคติดต่อฯ โดยแมลง ควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2547-2551” 2008.
- [5] สำนักโรคติดต่อฯ โดยแมลง ควบคุมโรค, “รายงานประจำปี 2546” หน้า 11-21, 2003
- [6] A. Kammanee, “Mathematics model of transmission of Plasmodium Vivax Malaria,” 2002.
- [7] P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit, and I. M. Tang, “Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions,” *Soutseast Asian J Trop Med Publ Health*, vol. 35, pp. 155-159, 2004.
- [8] P. Pongsumpun, and I. M. Tang, “Mathematics model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria,” *Int j math models and methods in applied sci*, vol. 3, pp. 117-121, 2007.
- [9] http://www.siamhealth.net/public_html/Disease/infectious/malaria/distribution.htm
- [10] www.thaivbd.org
- [11] <http://lifestyle.kingsolder.com>
- [12] www.dmhc.moph.go.th/itc/mis/doc2/.../maralia_4-12-51.pdf
- [13] <http://www.thaiclinic.com/medbible/malaria.html>

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล	นางสาวปรียาภรณ์ มุมทอง
วัน เดือน ปี เกิด	18 พฤษภาคม 2527
สถานที่เกิด	จังหวัดสุรินทร์
ประวัติการศึกษา	ระดับมัธยมศึกษาจบจากโรงเรียนสิรินธร จังหวัดสุรินทร์ ระดับปริญญาตรีจบจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ระดับปริญญาโทจบจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
วุฒิการศึกษา	ระดับปริญญาตรี: วิทยาศาสตร์บัณฑิต ระดับปริญญาโท: วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต
ปีการศึกษาที่จบ	ระดับปริญญาตรี: 2549 ระดับปริญญาโท: 2553

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้