

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การออกแบบตัวกรองสัญญาณเชิงเลขด้วยเทคนิคตัวแปรไบควอด
โดยใช้ตัวดำเนินการไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์

**BIQUAD-PARAMETRIC TECHNIQUE FOR DIGITAL FILTER DESIGN
USING BILINEAR PASCAL MATRIX OPERATION**



วพ.
จ 755 ก
0559
ศขพ
เลขทะเบียน **117095**
วันเดือนปี **23 ส.ย. 2554**

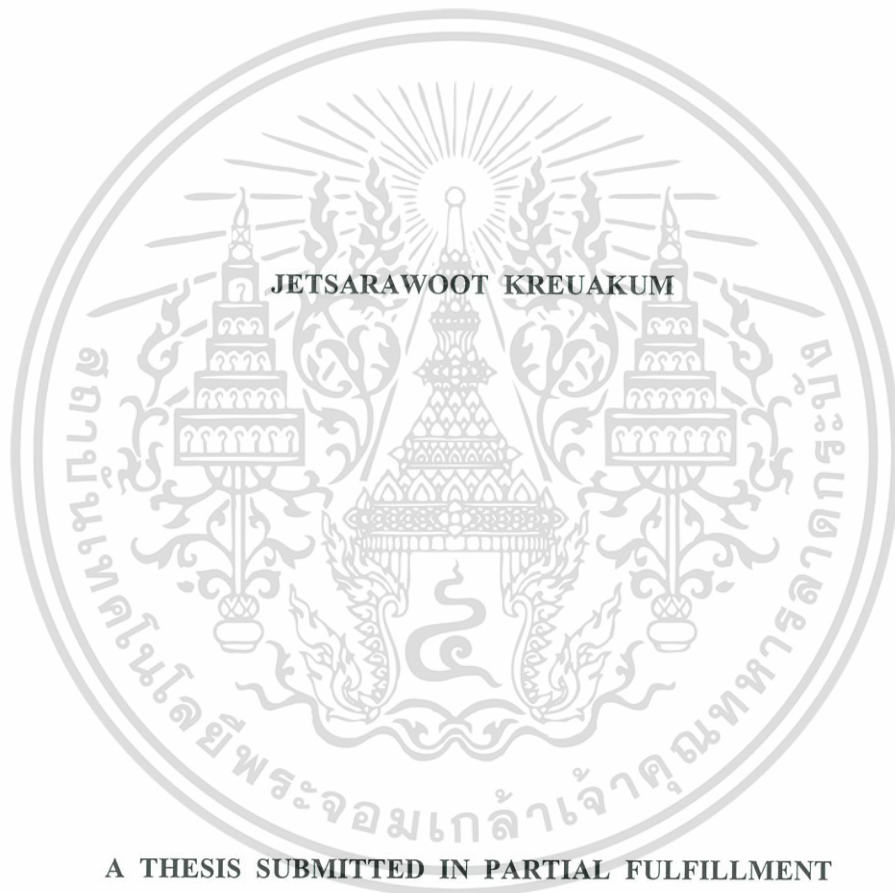
b. 12331098
i.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2553

KMITL-2010-EN-M-010-148

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**BIQUAD-PARAMETRIC TECHNIQUE FOR DIGITAL FILTER DESIGN
USING BILINEAR PASCAL MATRIX OPERATION**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATIONS ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2010

KMITL-2010-EN-M-010-148

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2010

FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวกรองสัญญาณเชิงเลขด้วยเทคนิคตัวแปรไบควอด โดยใช้ตัวดำเนินการไบลิเนียร์พาสคาลเมตริกส์
นักศึกษา	นายเจษฎาภูมิ เกรือคำ
รหัสนักศึกษา	48060975
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2553
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.สมยศ จุณณะปิยะ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอเทคนิคสำหรับการออกแบบตัวกรองสัญญาณเชิงเลข โดยใช้ตัวดำเนินการพาสคาลเมตริกส์สำหรับการแปลง S-Z โดเมน โดยในการแปลง S-Z โดเมนนั้นได้ใช้วิธีการแบบไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ดังนั้นพาสคาลเมตริกส์ที่ได้มานั้นเราได้เรียกวิธีการแปลงนี้ว่าไบลิเนียร์พาสคาลเมตริกส์สำหรับการแปลง S-Z โดเมน ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองสัญญาณเชิงอุปมามาตรฐานแบบไบควอด ได้ถูกนำมาใช้เป็นแนวคิดของการออกแบบที่ได้นำเสนอมาในเทคนิคการออกแบบที่ได้นำเสนอมา สามารถที่จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความถี่ต่างๆ ที่นำมาซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวกรองสัญญาณเชิงเลขโดยปราศจากการแปลงค่าความถี่ใดๆ ด้วยตัวแปร S มีเพียงแต่การกำหนดค่าพารามิเตอร์บางค่าเท่านั้น ด้วยวิธีการออกแบบนี้เรียกว่า เทคนิคตัวแปรไบควอด ซึ่งสามารถลดความยุ่งยากในการคำนวณการออกแบบ ซึ่งเกิดขึ้นจากเมตริกส์ของการแปลงค่าความถี่จากวิธีการออกแบบที่ผ่านมา [5]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Biquad-Parametric Technique for Digital Filter Design Using Bilinear Pascal Matrix Operation
Student	Mr. Jetsarawoot Kruakum
Student ID.	48060975
Degree	Master of Engineering
Program	Telecommunications Engineering
Year	2010
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Somyot Junnapiya

ABSTRACT

This thesis presents a design technique for digital filter design using Pascal matrix operation for s-z transformation. The s-z transformation that used is bilinear transformation, so the obtained Pascal matrix called bilinear Pascal matrix for s-z transformation. The standard analog transfer functions of biquad filter prototype are used to idea of proposed design. The proposed design technique can give various frequency characteristic of the obtained digital filter transfer function without any frequency transformation by s variables, only some setting of parameters that called biquad-parametric technique. This technique can reduce the computational complexity, which occurs from frequency transformation matrix in previous design method [5].

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำ และคำปรึกษาจาก รศ.สมยศ จุณณะปิยะ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ และดร.ศรวิวัฒน์ ชิวปรีชา ข้าพเจ้ารู้สึกทราบซึ่งในความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ทั้งสามท่านและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง และอาจารย์สุรพันธ์ ยิ้มมั่น คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกท่าน ที่ให้คำแนะนำต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมา และขอขอบคุณบัณฑิตศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ ที่ให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนในทุกเรื่องๆ ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

เจียรราวุฒิ เครือคำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐาน.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 โครงสร้างของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข.....	5
2.3 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง.....	6
2.4 การออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมาน.....	7
2.4.1 วงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท.....	7
2.4.2 วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ.....	10
2.4.3 วงจรรองสัญญาณแบบอีลิปติก.....	13
2.5 การแปลงแซด (Z Transformation).....	14
2.5.1 นิยามของการแปลงแซด.....	14
2.5.2 คุณสมบัติของการแปลงแซด.....	18
2.6 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of Z Transform).....	19
2.6.1 วิธีการหารยาว.....	19
2.6.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย.....	20
2.6.3 วิธีการ Residue.....	21

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 วงจรกรองสัญญาณเชิงเลข.....	24
3.1 วิธีอิมพัลส์อินเวรีนซ์.....	24
3.2 วิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม.....	27
3.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง.....	31
3.4 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	34
3.5 ประเภทของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข.....	36
3.5.1 วงจรกรองวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด.....	36
3.5.1.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์โดยใช้อนุกรมฟูรีเยอร์.....	41
3.5.1.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอพไออาร์ ด้วยฟังก์ชันวิน โดว์.....	43
3.5.2 วงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด.....	46
3.5.2.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1.....	47
3.5.2.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2.....	47
3.5.2.3 โครงสร้างแบบอนุกรม.....	49
3.5.2.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน.....	50
3.6 บทสรุป.....	51
บทที่ 4 ทฤษฎีและหลักการออกแบบ.....	52
4.1 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบ ไบคอต.....	52
4.2 วิธีการแปลงความถี่ด้วยเทคนิคตัวแปร ไบควอด.....	60
4.3 ทฤษฎีทวินาม (The Binomial theorem).....	67
4.4 การแปลงไบลิเนียร์ด้วยการดำเนินการปาสคาลเมตริกส์.....	69
4.5 การแปลง s-Z โดเมนด้วยตัวดำเนินการไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์.....	73
4.6 ตัวอย่างและผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ.....	76
4.6.1 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 2$	76
4.6.1.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2.....	77
4.6.1.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 2.....	77
4.6.1.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 2.....	78
4.6.1.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบก้ำจืดแถบความถี่อันดับ 2.....	78
4.6.1.5 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 2.....	79

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.6.2 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 4$	79
4.6.2.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4.....	80
4.6.2.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 4.....	81
4.6.2.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 4.....	82
4.6.2.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 4.....	83
4.6.2.5 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 4.....	85
4.6.3 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 6$	86
4.6.3.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6.....	87
4.6.3.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 6.....	88
4.6.3.3 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 6.....	90
4.6.3.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 6.....	92
4.6.3.5 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 6.....	93
4.6.4 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 3$	95
4.6.4.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3.....	96
4.6.4.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 3.....	97
4.6.5 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 5$	98
4.6.5.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5.....	99
4.6.5.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 5.....	101
4.6.6 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 7$	102
4.6.6.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7.....	104
4.6.6.2 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 7.....	106
4.7 บทสรุป.....	133
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	134
บรรณานุกรม.....	136
ภาคผนวก.....	138
ภาคผนวก ก. โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน.....	139
ภาคผนวก ข. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	146

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ไปใช้ประโยชน์ทางการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 สัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณแถบความถี่ต่ำผ่าน.....	9
2.2 Z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง.....	23
3.1 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์.....	26
3.2 ผลตอบสนองอิมพัลส์.....	43
3.3 พารามิเตอร์ที่สำคัญๆของหน้าตาแบบต่างๆ.....	44
4.1 กรณีต่างๆเมื่อ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ± 1 หรือ 0.....	56
4.2 มาตรฐานของค่าผลตอบสนองอันดับ 2 ของวงจรรองแบบไบควอด.....	56
4.3 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณแบบไบควอด.....	58
4.4 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ของวงจรรองสัญญาณแบบต่างๆ.....	62
4.5 โพลีโนเมียลของตัวส่วนที่อยู่ในรูป Factored form ที่อันดับ n เป็นจำนวนคู่.....	63
4.6 โพลีโนเมียลของตัวส่วนที่อยู่ในรูป Factored form ที่อันดับ n เป็นจำนวนคี่.....	64
4.7 ค่า Q ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่อันดับค่า n เป็นจำนวนคู่.....	66
4.8 ค่า Q ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่.....	66
4.9 การกระจายเลขชี้กำลัง.....	67
4.10 สามเหลี่ยมของปาสคาล.....	68
4.11 เปรียบเทียบผลการดำเนินการระหว่างสัมประสิทธิ์.....	133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 บล็อกไดอะแกรมของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข.....	5
2.2 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบ DSP.....	6
2.3 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal).....	6
2.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท.....	8
2.5 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s plane).....	9
2.6 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ.....	12
2.7 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติก.....	14
2.8 พื้นที่ระนาบแซคที่มีค่าลู่อื่นของ $x(n) = a^n u(n)$	16
2.9 พื้นที่ระนาบแซคที่มีค่าลู่อื่นของ $x(n) = -a^n u(-n-1)$	17
2.10 พื้นที่ระนาบแซคที่มีค่าลู่อื่นของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$	18
3.1 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม.....	30
3.2 ความสัมพันธ์ความถี่ในโดเมนอนาลอกและดิจิตอล.....	31
3.3 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง.....	32
3.4 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง.....	34
3.5 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	34
3.6 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า.....	36
3.7 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ รูปแบบโดยตรง.....	37
3.8 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบอนุกรม.....	37
3.9 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบเฟสเชิงเส้น.....	38
3.10 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบสมมาตร.....	40
3.11 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบปฏิสมมาตร.....	41
3.12 ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอูมคคิ.....	42
3.13 คุณลักษณะเฉพาะของผลตอบสนองความถี่ของตัวกรองแบบเอฟไออาร์.....	45
3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง I.....	47
3.15 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบโดยตรง II.....	48
3.16 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบอนุกรม.....	50
3.17 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบขนาน.....	51
4.1 วงจรรวมสัญญาณ (Sum signal), วงจรอินทิเกรเตอร์ (Integrator), เฟสที่มีอัตราขยายเป็น 1.....	53
4.2 วงจรไปกวอดของ Tow-thomas.....	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา VIII ต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.3 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบ ไบควอดที่ให้ค่าผลตอบสนอง 5 แบบ.....	55
4.4 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแบบ ไบควอด.....	57
4.5 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแบบ ไบควอด.....	59
4.6 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2.....	108
4.7 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2.....	108
4.8 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 2.....	109
4.9 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 2.....	109
4.10 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 2.....	110
4.11 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 2.....	110
4.12 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 2.....	111
4.13 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 2.....	111
4.14 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3.....	112
4.15 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3.....	112
4.16 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 3.....	113
4.17 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 3.....	113
4.18 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4.....	114
4.19 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4.....	114
4.20 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 4.....	115
4.21 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 4.....	115
4.22 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 4.....	116
4.23 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 4.....	116
4.24 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 4.....	117
4.25 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 4.....	117
4.26 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5.....	118
4.27 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5.....	118
4.28 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 5.....	119
4.29 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 5.....	119
4.30 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6.....	120

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.31 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6.....	120
4.32 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 6.....	121
4.33 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 6.....	121
4.34 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 6.....	122
4.35 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 6.....	122
4.36 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 6.....	123
4.37 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 6.....	123
4.38 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7.....	124
4.39 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7.....	124
4.40 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 7.....	125
4.41 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 7.....	125
4.42 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน.....	126
4.43 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน.....	127
4.44 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน..	128
4.45 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่.	128
4.46 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน.....	129
4.47 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน.....	130
4.48 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน.....	131
4.49 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่...131	
4.50 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกความถี่....132	
4.51 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกความถี่.....132	

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

หากกล่าวถึงการประมวลผลสัญญาณแล้วนั้นเราสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ก็คือ การประมวลผลสัญญาณเชิงอุปมานและการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข โดยทั่วไปแล้วการประมวลผลสัญญาณเชิงเลขนั้นมีบทบาทและมีความสำคัญอย่างมาก เพราะว่าการประมวลผลทางสัญญาณนั้น มีความแม่นยำ รวดเร็ว และสามารถคำนวณวงจรที่ซับซ้อนได้ดีกว่า แต่ก่อนที่จะได้สัญญาณในรูปแบบดิจิทัลนั้น สัญญาณในรูปแบบอนาล็อกต้นแบบ อาจมีสัญญาณรบกวน (Noise) ที่ปนเข้ามาับสัญญาณ โดยสัญญาณรบกวนนี้มีผลต่อการประมวลผลสัญญาณและมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องกำจัดสัญญาณรบกวนนี้ออกไป ซึ่งการออกแบบวงจรกรองสัญญาณนั้น มีความยุ่งยาก และซับซ้อนต่อการคำนวณและอาจเกิดความผิดพลาด ทำให้เกิดปัญหาแก่ผู้ออกแบบในกรณีที่ต้องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับที่สูงขึ้นไป ถ้าการออกแบบวงจรกรองสัญญาณไม่ดีพออาจจะทำให้องค์ประกอบความถี่บางส่วน ที่ไม่ต้องการปนเข้ามาและไม่สามารถวิเคราะห์สัญญาณนั้นได้แน่นอนการออกแบบวงจรกรองสัญญาณที่ดีจะต้องมีผลตอบสนองทางขนาดและเฟสที่เข้าใกล้ทางอุดมคติ

แนวทางการวิจัยนี้เริ่มจาก ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบชนิดวงจรกรองสัญญาณแบบ ไบควอด ซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนในอันดับที่ 2 และให้เอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองทางความถี่หลายแบบ เช่นผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) และแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) เป็นต้นซึ่งบางชนิดอาจมีเอาท์พุทที่เป็นผลตอบสนองแบบก้ำกัฏแถบความถี่ (Band-stop) และผ่านทุกความถี่ (All-pass) ด้วยจากนั้นใช้การดำเนินการปาสคาลเมตริกส์ สำหรับการแปลง S-Z โดเมน โดยในการแปลง S-Z โดเมนนั้นได้ใช้วิธีการแบบไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของความถี่ต่างๆที่นำมาซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข โดยปราศจากการแปลงค่าความถี่ใดๆ ด้วยตัวแปร S มีเพียงแต่การกำหนดค่าพารามิเตอร์บางค่าเท่านั้น ทำให้ได้วงจรกรองสัญญาณเชิงเลขที่มีคุณสมบัติเหมือนกับวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ อีกทั้งยังช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณแก่ผู้ออกแบบในกรณีที่ต้องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับที่สูงขึ้นไป โดยการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์นั้นถูกจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกส์ อีกทั้งยังสามารถนำไปใช้ออกแบบกับวงจรกรองสัญญาณที่ให้ผลตอบสนองทางความถี่แบบ ความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ (Odd order) ได้อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษาคือ สามารถใช้วิธีการที่ได้นำเสนอ มาช่วยให้การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขทำได้ง่ายและสะดวกขึ้น เนื่องจากในขั้นตอนการแปลงค่าสัมประสิทธิ์ มิได้ทำการแทนค่าความสัมพันธ์ของ S-Z โดยตรง แต่ใช้วิธีการแปลงค่าสัมประสิทธิ์ด้วย Matrix transformation ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปแบบการคำนวณให้อยู่ในรูปของ Matrix calculation จะช่วยให้การคำนวณนั้นๆ ง่ายขึ้น ลดความยุ่งยาก ซับซ้อน ในกรณีที่ต้องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับที่สูงขึ้นไป และเหมาะกับการคำนวณด้วย Computer program อีกทั้งยังสามารถนำไปใช้ออกแบบกับ วงจรกรองสัญญาณที่ให้ผลตอบแทนของความถี่แบบความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ (Odd order) ได้อีกด้วย ดังนั้นจุดนี้เองจึงถือว่าเป็นความน่าสนใจในการศึกษาถึงรูปแบบการแปลงค่าสัมประสิทธิ์โดยอาศัย Pascal matrix และเป็นที่มาของการสร้าง Pascal matrix นั้นเอง

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้จะวิเคราะห์และหาความสัมพันธ์ในการสร้างปาสคาลเมตริกส์ด้วยหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ซึ่งได้นำมาประยุกต์ใช้ในการแปลงค่าสัมประสิทธิ์จาก S-Z โดเมน กับฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ ชนิดวงจรกรองสัญญาณแบบไบควอด รูปแบบของการคำนวณทางคณิตศาสตร์ สามารถจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกส์ เพื่อความสะดวก และลดขั้นตอนในการออกแบบ สำหรับการออกแบบนี้มีข้อดีตรงที่ไม่ต้องมีชุดเมตริกส์สำหรับแปลงค่าความถี่ ทำให้ลดการดำเนินการระหว่างค่าสัมประสิทธิ์และความซับซ้อนในกรณีที่ต้องการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่สูงขึ้น

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การดำเนินการวิจัยเริ่มต้นวิทยานิพนธ์นี้ นำเสนอการแปลง S-Z โดเมนโดยใช้ตัวดำเนินการปาสคาลเมตริกส์ (Pascal matrix) โดยการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข การแปลง S-Z โดเมนเป็นการแปลงความถี่จากอนาล็อกโดเมนไปเป็นดิจิตอลโดเมนโดยอาศัยหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) ซึ่งแต่เดิมการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข ด้วยหลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ใช้การแทนค่าสัมประสิทธิ์โดยตรง ทำให้เกิดความยุ่งยากซับซ้อน ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอันดับที่เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูงขึ้นไป เป็นเหตุให้เกิดความผิดพลาดได้ ดังนั้นจึงมีแนวความคิดในการแปลง S-Z โดเมนด้วยวิธีการคิดคำนวณแบบปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ซึ่งการคำนวณถูกจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ทำให้ง่ายและเหมาะสำหรับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับที่สูงขึ้นไป

1.5 ขอบเขตการวิจัย

- 1.5.1 ศึกษาหลักการทำงานของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานชนิดไบควอด
- 1.5.2 ใช้หลักการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transform) ของการแปลง S-Z โดเมน ด้วยวิธีการคิดคำนวณแบบปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)
- 1.5.3 ใช้โปรแกรม MATLAB ในการจำลองการทำงานและวิเคราะห์ผลการทดลอง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 บทนำ

วงจรกรองสัญญาณเชิงเลขเป็นกระบวนการที่ไปดัดแปลงสเปกตรัมของสัญญาณให้มีสเปกตรัมเป็นไปตามข้อกำหนดที่ต้องการซึ่งอาจเป็นการเพิ่มค่าหรือลดทอนค่าขนาดของสัญญาณในแถบความถี่ที่ต้องการหรือทำการกำจัดสัญญาณในแถบความถี่ที่ไม่ต้องการออกไป ซึ่งกระบวนการเหล่านี้จุดประสงค์หลักก็เพื่อต้องการลดความผิดเพี้ยนของสัญญาณ หรือ ลดสัญญาณรบกวนที่ปะปนเข้ามาอาจเป็นผลมาจากการส่งสัญญาณไปในสายส่งหรือตัวกลางที่มีคุณภาพไม่ดี อย่างไรก็ตามข้อกำหนดที่จัดได้ว่าเป็นหัวใจของวงจรกรองสัญญาณที่ต้องการให้ความสนใจเป็นอันดับแรกคือคุณสมบัติในทางความถี่ โดยค่าที่ใช้ประกอบด้วยผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude response) และผลตอบสนองทางเฟส (Phase response) แต่ในกระบวนการออกแบบวงจรกรองสัญญาณมักจะพิจารณาผลตอบสนองทางขนาดเป็นเรื่องที่สำคัญ ส่วนผลตอบสนองทางเฟสสามารถนำมาคิดพิจารณาภายหลังได้ กล่าวคือเมื่อได้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณที่มีคุณสมบัติตรงตามข้อกำหนดของผลตอบสนองทางขนาดแล้วก็สามารถออกแบบวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกแถบความถี่ (All-pass filter) เพิ่มเข้ามาเพื่อทำหน้าที่ปรับแก้ผลตอบสนองทางเฟสให้เป็นเชิงเส้น วงจรกรองสัญญาณเชิงเลขได้มีการนำมาประยุกต์ใช้งานกันอย่างกว้างขวางนั้นอาจมาจากข้อได้เปรียบหลายประการดังต่อไปนี้

1. ผลตอบสนองความถี่สามารถออกแบบให้มีความใกล้เคียงกับผลตอบสนองความถี่ที่กำหนดให้หรือผลตอบสนองความถี่ที่ต้องการได้ นอกจากนี้การออกแบบวงจรกรองสัญญาณให้มีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นทำได้ง่าย
2. คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขที่ออกแบบและสร้างแล้วจะไม่แปรตามสภาพสิ่งแวดล้อมและอุณหภูมิหรือระยะเวลาการใช้งาน นอกจากนี้ยังสามารถใช้งานในย่านความถี่ต่ำได้เป็นอย่างดี
3. การประยุกต์ใช้งานของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบปรับตัวได้ (Adaptive filter) ทำได้ง่าย
4. ผู้ออกแบบสามารถออกแบบโดยคำนึงความยาวของคำ (Word length) ของเลขฐานสองที่ต้องการใช้และยังสามารถออกแบบให้มีผลตอบสนองความถี่ที่ต้องการได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. ในปัจจุบันถ้าพิจารณาในแง่มุมมองของเสถียรภาพของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข ความเชื่อถือ ราคาหรือขนาดของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข สิ่งเหล่านี้กำลังได้รับการพัฒนาและปรับปรุงและมีแนวโน้มว่าจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าของวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter)

วงจรรองสัญญาณเชิงเลขสามารถเขียนอธิบายในรูปของบล็อกไดอะแกรมได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยทั่วไปแล้วสัญญาณอินพุตจะเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา (Continuous time signal) หรือสัญญาณอนาล็อก $x(t)$ จะถูกสุ่ม (Sampled) ด้วยช่วงเวลาที่มีค่าคงที่ด้วยวงจรแปลงสัญญาณอนาล็อกให้เป็นสัญญาณดิจิทัล (Analog to digital converter :ADC) เพื่อให้เป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time signal) หรือสัญญาณดิจิทัล $x(n)$ จากนั้นนำสัญญาณที่ได้เข้ามาเข้ารหัสให้อยู่ในรูปของเลขฐานสองแล้วนำไปประมวลผลสัญญาณเชิงเลข หลังจากนั้นสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากการประมวลผลสัญญาณเชิงเลขเป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาจะต้องแปลงกลับให้เป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาด้วยวงจรแปลงสัญญาณดิจิทัล ให้เป็นสัญญาณอนาล็อก (Analog to digital converter : DAC) เพื่อนำไปใช้งาน

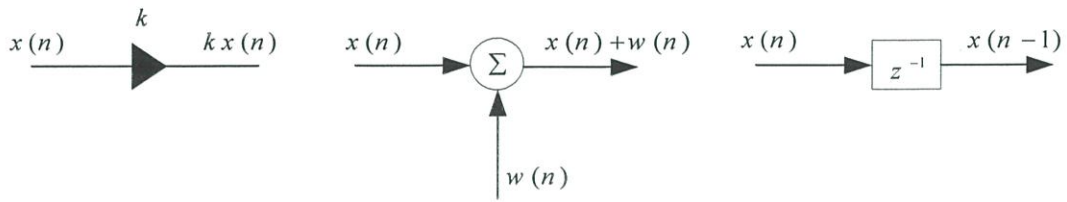


รูปที่ 2.1 บล็อกไดอะแกรมของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข

2.2 โครงสร้างของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข

วงจรรองสัญญาณเชิงเลขประกอบด้วยส่วนที่สำคัญ 3 ส่วนคือ การบวก (Adder) การคูณ (Multiplier) การหน่วงเวลา (Unit Delay) ดังแสดงในรูปที่ 2.2 การบวกและการคูณจะใช้แนวความคิดมาจากตัวเลขในหน่วยคอมพิวเตอร์ ส่วนการหน่วงจะทำให้การถึงข้อมูลในอนาคตมีค่าอย่างต่อเนื่อง ซึ่งการหน่วงเวลานั้นจะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ บวก (Positive) และลบ (Negative) โดยการหน่วงแบบบวกนี้เป็นอุปกรณ์ที่ทำหน้าที่บันทึกความจำของรีจิสเตอร์ (Register) จะเก็บค่าที่ได้ตามระยะเวลาที่กำหนดสำหรับการคำนวณครั้งต่อไป การหน่วงแบบลบจะแทนค่าด้วย z^{-1} และสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ด้วยการแปลงแซด การหน่วงแบบลบ ใช้แทนค่าต่อไปในระดับสัญญาณแทนค่าด้วย z จะมีชนิดและการใช้งานที่เหมาะสม อย่างไรก็ตามการใช้งานที่ไม่สามารถใช้งานได้เสมอไป

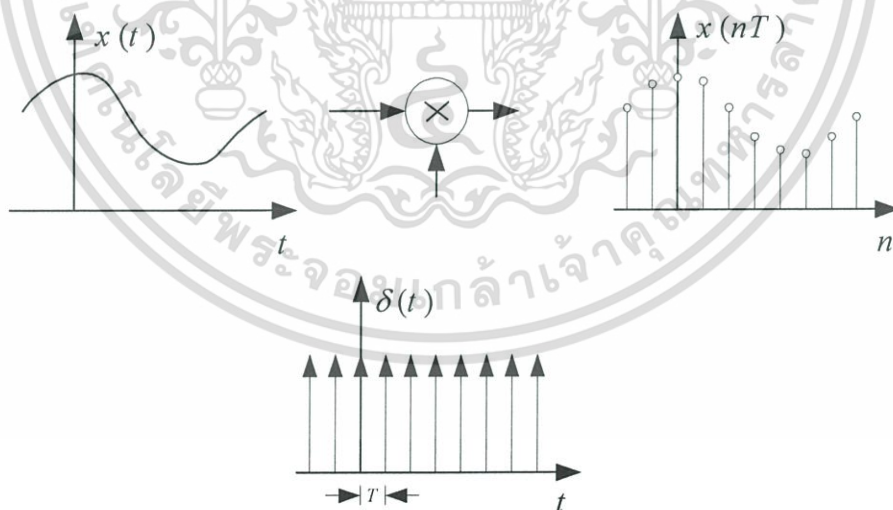
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 ตัวดำเนินการที่ใช้ในระบบ DSP

2.3 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง

จากที่ธรรมชาติของสัญญาณต่างๆมักจะเป็นสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา ดังนั้นในการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข สัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาที่สอดคล้องกันก็คือ การแทนสัญญาณที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆห่างกันที่เวลา T_s คงที่ (คือการสุ่มตัวอย่าง) ถ้าหาก T_s มีค่าที่เหมาะสมแล้วการแทนดังกล่าวก็ยังคงถูกต้องเอาไว้ ดังนั้นผลของการสุ่มก็คือการคูณสัญญาณที่ต่อเนื่องด้วยอิมพัลส์ที่เลื่อนไปเรื่อยๆ แต่ครั้งก็ห่างกันเป็นเวลา $T = T_s = 1/f_s$ กระบวนการสุ่มสัญญาณดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 การสุ่มสัญญาณ (Sampling signal)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าความถี่ของการสุ่มสัญญาณ (f_s) ซึ่งไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไป ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Theory) ของ แชนนอน (Shannon) กล่าวไว้ว่า “ถ้าหากสัญญาณที่ต่อเนื่อง $x(t)$ ที่มีความถี่ไม่เกิน $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ ข้อมูลของสัญญาณที่ต่อเนื่องนั้นสามารถอธิบายได้ด้วย $x(nT)$ ก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง f_s มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่ปฏิบัติงาน (f_{\max}) หรือ $f_s \geq 2f_{\max}$ โดยทั่วไปเราอาจสุ่มตัวอย่างด้วยความถี่ $f_{sN} = 2f_{\max}$ พอดี ค่าความถี่นี้มีชื่อเรียกว่าความถี่ไนควิสต์ (Nyquist frequency) และคาบเวลา $T_N = 1/(2f_{\max})$ นี้เรียกว่าช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างไนควิสต์ (Nyquist interval)

2.4 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน

2.4.1 วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท จะมีคุณสมบัติที่ให้ผลตอบสนองทางขนาดเรียบมากที่สุดในช่วงแถบความถี่ผ่าน ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \quad (2.1)$$

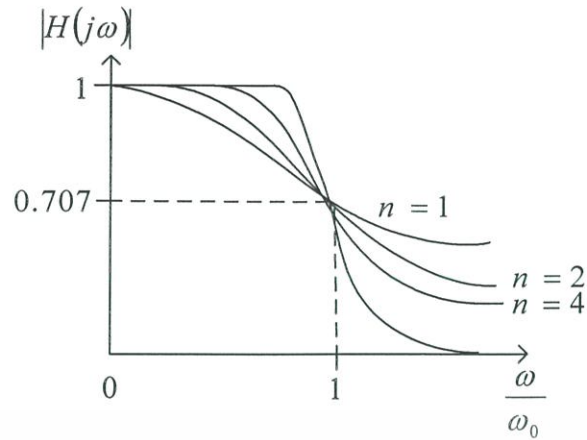
เมื่อ n คือจำนวนอันดับ (nth order)

ω_0 คือค่าความถี่ตัด (Cutoff frequency)

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

1. $|H_n(j\omega_0)| = 1$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรงดันเท่ากับหนึ่ง ที่ $\omega = 0$)
2. $|H_n(j\omega_0)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ สำหรับทุกค่า n (อัตราขยายแรงดันที่ $\omega = \omega_0$)
3. $|H_n(j\omega_0)|$ หมายความว่า อัตราการลดลงด้วยผลคูณของจำนวน n โพลเมื่อ $\omega > \omega_0$ เช่น $n = 1$ อัตราการลดลงเท่ากับ -20 dB/decade และ $n = 2$ อัตราการลดลงเท่ากับ -40 dB/decade เป็นต้น
4. อนุพันธ์ของ $|H_n(j\omega)|$ เท่ากับศูนย์เมื่อ $\omega = 0$ นั่นคือจะเกิดผลตอบสนองแบบราบเรียบสูงสุดที่ (maximally flat response) ที่ $\omega = 0$
5. กรณีที่ $n > 10$ ผลตอบสนองจะเข้าใกล้ผลตอบสนองทางอุดมคตินั้นก็คือการเปลี่ยนจากแถบความถี่ผ่าน ไปยังแถบความถี่หยุดเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

สังเกตได้ว่าในช่วงแถบความถี่ผ่านหรือแถบความถี่หยุดไม่มีการแกว่งตัวขึ้นลงของอัตราขยายแต่อย่างใด (Maximally flat) เนื่องจากผลตอบสนองทางขนาดมีค่าลดลงตลอดตามการเพิ่มของความถี่ จึงจัดได้ว่ามีคุณลักษณะของฟังก์ชันโมโนโทนิก (Monotonic function) และเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาด

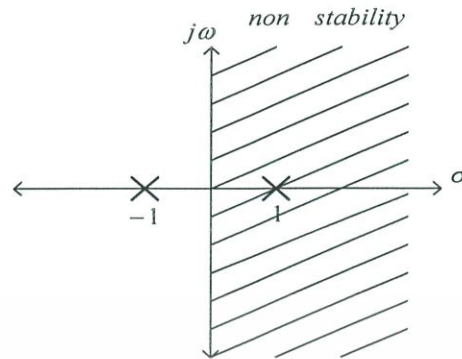
$$\begin{aligned}
 |H_n(s)|^2 &= \left| \frac{1}{1 + [(s/j)/\omega_0]^{2n}} \right|^2 = \left| \frac{1}{1 + (-j)^n (s/\omega_0)^{2n}} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{1 + [(-1)^2 (j)^2]^n (s/\omega_0)^{2n}} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{D_n(s)D_n(-s)} \right|^2
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$D_n(s)$ คือโพลิโนเมียล (Polynomial) ของโดเมน s ซึ่งมีรากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงบวกและลบจะได้ว่า $D_n(s) = D_n(-s)$ และถ้ากำหนดให้ $n=1$ และ $\omega_0=1$ สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$|H_n(s)|^2 = \left| \frac{1}{1-s^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{D_n(s)D_n(-s)} \right|^2 \tag{2.3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $D_n(s)D_n(-s) = 1 - s^2 = (1 + s)(1 - s)$



รูปที่ 2.5 ตำแหน่งโพลในระนาบเอส (s plane)

ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังนี้

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1} \tag{2.4}$$

จากสมการที่ (2.4) เรียกว่าวงจรรองสัญญาณแถบความถี่ต่ำผ่านแบบบัตเตอร์เวิร์ท (Butterworth Lowpass Filter) อันดับที่ 2 และ $s+1$ เรียกว่า (Butterworth polynomial of second order filter) สามารถเขียนรูปทั่วไปของสมการได้ว่า

$$D_n(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \tag{2.5}$$

ตารางที่ 2.1 สัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณแถบความถี่ต่ำผ่าน

n	$D_n(s)$
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + 1.4142s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 1.9319 + 1)$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทได้จากสมการที่ (2.6)

$$n = \frac{\log \left[\frac{10^{(\alpha_{\min}/10)} - 1}{10^{(\alpha_{\max}/10)} - 1} \right]}{2 \log \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad (2.6)$$

2.4.2 วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ (Chebyshev Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟชนิดนี้มีคุณสมบัติให้ผลตอบสนองทางขนาดในช่วงแถบความถี่ผ่านเป็นขดคลื่นเท่ากันตลอดและให้ความชันมากที่สุด ณ ความถี่คัทออฟ ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (2.7)$$

เมื่อ ε คือตัวประกอบความพลิว (Ripple factor)

$C_n(\cdot)$ คือพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งอันดับที่ n (nth order Chebyshev polynomial of the first kind)

คุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ

1. $\omega = 0$

$$|C_n(0)| = 0 \quad n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$|C_n(0)| = 1 \quad n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$|H_n(j0)| = 1 \quad n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$|H_n(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

2. $\omega = 1$

$$|C_n(1)| = 1 \quad \text{ทุกค่า } n$$

$$|H_n(j1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad \text{ทุกค่า } n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน $\omega = s/j$ ลงในผลตอบสนองทางขนาดจะได้ว่า

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(s/j)} \quad (2.8)$$

โดยที่

$$C_n(s/j) = 0 \pm j(1/\varepsilon) = \cos(nu_k) \cosh(nv_k) - j \sin(nu_k) \sinh(nv_k) \quad (2.9)$$

และ $\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_{\max}} - 1}$

ถ้ากำหนดให้ $\cos(nu_k) = 0$ จะได้ว่า

$$u_k = \frac{\pi}{2n} (2k+1) \quad (2.10)$$

ถ้ากำหนดให้ $\sin(nv_k) = \pm 1$ จะได้ว่า

$$\sinh(nv_k) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

$$v_k = \frac{1}{n} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \quad (2.12)$$

จะได้ว่า

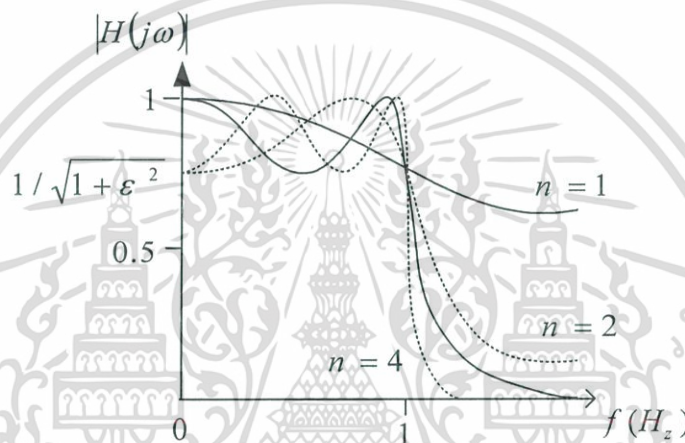
$$s = \sinh(v_k) \sin \left[\frac{\pi}{2n} (2k+1) \right] - j \cosh(v_k) \cos \left[\frac{\pi}{2n} (2k+1) \right] \quad (2.13)$$

และสามารถหาลำดับ n ของวงจรกรองสัญญาณแบบเชบีเชฟได้จากสมการที่ (2.14)

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[\frac{10^{\alpha_{\min}/10} - 1}{10^{\alpha_{\max}/10} - 1} \right]}{\cosh^{-1}(\omega_s)} \quad (2.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังแสดงในรูปที่ 2.6 จะเห็นได้ว่าการเพิ่มอันดับของวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะช่วยให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่ที่มีความชันมากขึ้น ซึ่งเป็นแนวโน้มเดียวกันกับกรณีของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท อย่างไรก็ตามที่วงจรรองสัญญาณลำดับเท่าๆกัน พบว่าวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟจะให้ช่วงแถบเปลี่ยนความถี่ที่แคบกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณาในช่วงแถบความถี่ผ่านของวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟพบว่ามีความพลีวของอัตราขยายเกิดขึ้นโดยมีการแกว่งตัวขึ้นลงตลอดช่วง สังเกตได้ว่าคุณลักษณะเช่นนี้ไม่เกิดขึ้นกับวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ทั้งนี้ความสูงต่ำของการแกว่งสามารถควบคุมได้จากตัวแปร ε โดยขนาดความกว้างของการแกว่งจะอยู่ภายในช่วง 1 ถึง $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$



รูปที่ 2.6 ผลตอบสนองของวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ

ข้อเปรียบเทียบระหว่างวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ

1. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop band) ที่ใกล้เคียงกับวงจรรองสัญญาณทางอุดมคติได้มากกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท
2. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟมีช่วงแถบความถี่เปลี่ยนแปลง (Transition band) น้อยกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท
3. แอมพลิจูด (Amplitude) ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทที่ $\omega = 0$ จะมีการแกว่งตัวขึ้นลง (Maximally flat) น้อยกว่าวงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ
4. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟอันดับที่ 3 จะมีประสิทธิภาพดีเท่ากับวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทอันดับที่ 5
5. วงจรรองสัญญาณแบบเชบีเชฟ ที่อันดับต่างๆ จะมีความเป็นเชิงเส้น (Linear phase)

มากกว่าวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4.3 วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติก (Elliptic Filter)

วงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติกให้คุณสมบัติรวมระหว่างวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทและแบบเชบีเชฟ กล่าวคือจะให้ผลตอบสนองทางขนาดลักษณะคลื่นเท่ากันทั้งช่วงแถบความถี่ผ่าน (Pass band) และช่วงแถบความถี่ไม่ผ่าน (Stop band) ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) มีดังนี้

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega/\omega_0)} \quad (2.15)$$

เมื่อกำหนดให้

$$R_n(\omega/\omega_0) = \begin{cases} M \prod_{i=1}^{n/2} \frac{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{s_i}^2} & n \text{ คู่} \\ M \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{p_i}^2}{(\omega/\omega_0)^2 - \omega_{s_i}^2} & n \text{ 홀} \end{cases} \quad (2.16)$$

โดยที่ $M = \frac{\sqrt{10^{0.1K_s} - 1}}{\sqrt{10^{0.1K_p} - 1}}$

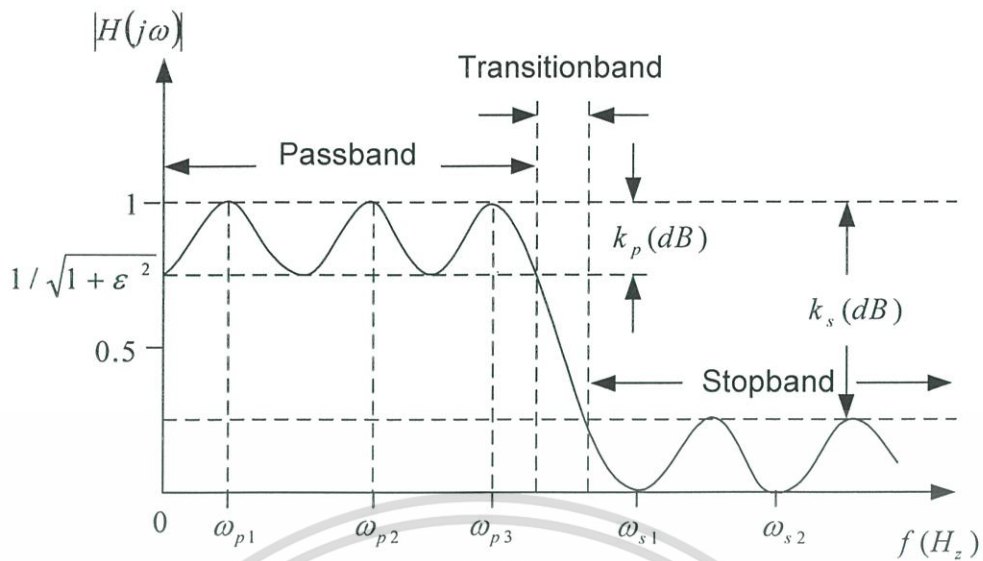
เพื่อความสะดวกในการอธิบายตัวแปรต่างๆ ที่กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อนี้เราจะอาศัยรูปที่ 2.7 จะได้ว่า

ω_{p_i} คือความถี่ศูนย์กลาง i ในช่วงแถบความถี่ผ่านที่มีแอมพลิจูดสูงสุด

ω_{s_i} คือความถี่ศูนย์กลาง i ในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านที่มีแอมพลิจูดสูงสุด

K_p คือแอมพลิจูดที่เบี่ยงเบนสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านในหน่วย dB

K_s คือผลต่างระหว่างแอมพลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ผ่านและแอมพลิจูดสูงสุดในช่วงแถบความถี่ไม่ผ่านในหน่วย dB



รูปที่ 2.7 ผลตอบสนองของวงจรกรองสัญญาณแบบอีลิปติก

2.5 การแปลงแซด (z Transformation)

การแปลงแซด (z Transform) เป็นการใช้คณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time systems) ซึ่งจะแตกต่างจากการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ใช้สำหรับวิเคราะห์สัญญาณของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา (Continuous time systems) ดังนั้นแนวทางวิเคราะห์ของการแปลงแซด (z Transform) จะใช้โพลและซีโรมาอธิบายในระบบ

2.5.1 นิยามของการแปลงแซด

การแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) สามารถนิยามอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ (Power series) ได้ตามสมการที่ (2.17)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.17)$$

เมื่อ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable) $z = re^{j\omega}$

$x(n)$ เป็นอันดับสัญญาณ (Sequence signal)

ความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซด (z Transform) และการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณที่

ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time fourier transform : DTFT) มีได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$x(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)re^{j\omega n} \quad (2.18)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x(n)r^{-n}\}e^{-j\omega n} \quad (2.19)$$

$$= DTFT\{x(n)r^{-n}\} \quad (2.20)$$

ถ้า $r = 1 \rightarrow |z| = 1$ สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ว่า

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = x(e^{j\omega}) = DTFT\{x(n)\} \quad (2.21)$$

แต่สำหรับการแปลงแซด (z Transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete time) ในระบบที่คอสอล (Causal system) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.22)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.22)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการแปลงแซดของสัญญาณระหว่าง $x(n)$ และ $X(z)$ โดยใช้สัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$x(z) = Z\{x(n)\} \quad (2.23)$$

นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงแซดของ $x(n)$ และ $X(z)$ ได้ในรูปแบบดังนี้คือ

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad (2.24)$$

ซึ่งบริเวณกลุ่มของ z บนระนาบแซดที่ทำให้ $X(z)$ หาค่าได้เรียกว่าบริเวณที่มีการลู่อเข้า (Region of convergence: ROC) โดยการลู่อเข้าจะขึ้นอยู่กับ $|z|$ แต่ไม่ขึ้นอยู่กับ ω และเมื่อลองพิจารณาการแปลงแซด (z Transform) ของอันดับสัญญาณ $x(n) = a^n u(n)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

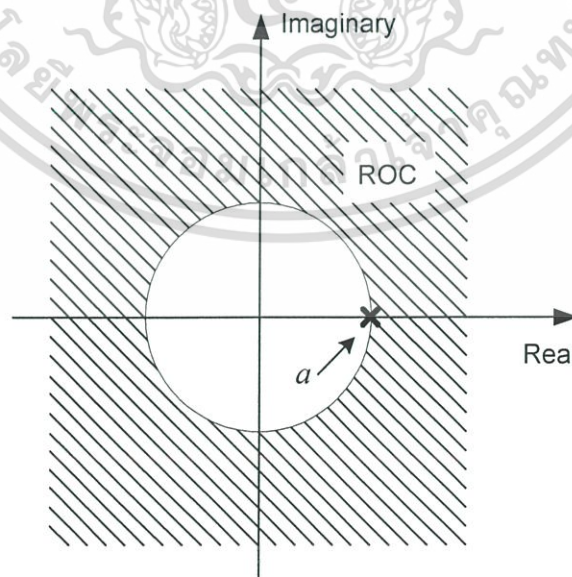
ความสัมพันธ์ที่ได้อยู่ในรูปของอนุกรมเรขาคณิตที่มีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{ทั้งนี้ } |x| < 1 \tag{2.26}$$

จากสมการที่ (2.25) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \tag{2.27}$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $|a| > 1$ จะทำให้ ROC จะไม่ซ้อนทับพื้นที่วงกลมระนาบหนึ่งหน่วย (Unit circle) และไม่สามารถหาค่า $X(z)$ ได้



รูปที่ 2.8 พื้นที่ระนาบแซดที่มีกรค่าคู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

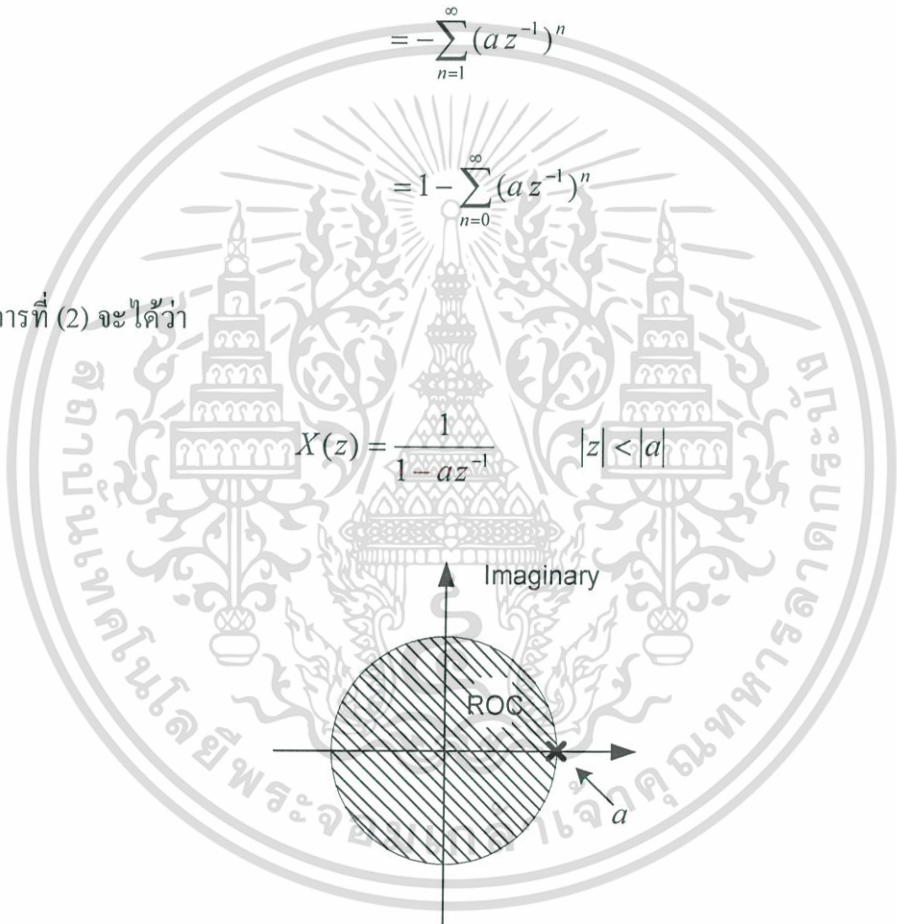
ดังนี้

ถ้ามีอินทิกรัลสัญญาณ $x(n) = -a^n u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซด (z Transform) ได้

$$\begin{aligned}
 X(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} \\
 &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} (a z^{-1})^n \\
 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

จากสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad |z| < |a| \tag{2.29}$$



รูปที่ 2.9 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าลู่อื่นของ $x(n) = -a^n u(-n-1)$

สังเกตเห็นได้ว่าทั้งสองกรณี มีค่าการแปลงแซด (z Transform) ที่เหมือนกันแต่จะมีบริเวณที่มีการลู่อื่น ROC ของสัญญาณครอบคลุมพื้นที่ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องระบุ ROC ลงไปเพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในกรณีที่ต้องทำการแปลงแซดผกผัน (Inverse z Transform)

ถ้ามีอินทิกรัลสัญญาณ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ สามารถทำการแปลงแซดได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^n u(n) - b^n u(-n-1)\} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} (b z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} + \frac{1}{1 - b z^{-1}} \quad |a| < |z| < |b| \end{aligned} \quad (2.30)$$



รูปที่ 2.10 พื้นที่ระนาบแซดที่มีการค่าคู่เข้าของ $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$

2.5.2 คุณสมบัติของการแปลงแซด (z Transform)

1. คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

$$\begin{aligned} x_1(n) &\leftrightarrow X_1(z) & ROC &= R_1 \\ x_2(n) &\leftrightarrow X_2(z) & ROC &= R_2 \\ ax_1(n) + bx_2(n) &\leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) & ROC &= R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

2. คุณสมบัติการเลื่อนทางเวลา (Time shifting property)

$$\begin{aligned} x(n - n_0) &\leftrightarrow z^{-n_0} X_1(z) & ROC &= R \\ & & & (\text{ยกเว้นที่ } z = 0 \text{ และ } z = \infty) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. คุณสมบัติการคูณด้วยเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential property)

$$z_0^n x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{ROC} = |z|R$$

4. คุณสมบัติการกลับเวลา (Time reversal property)

$$x(-n) \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R}$$

5. คุณสมบัติการคูณประสาน (Convolution property)

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

6. คุณสมบัติการหาอนุพันธ์ (Differentiation property)

$$n x(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = R$$

7. คุณสมบัติเชิงซ้อน (Conjugation property)

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R$$

2.6 การแปลงแซดผกผัน (Inversion of z Transform)

การแปลงแซดผกผันก็คือกระบวนการกลับกันในการแปลงฟังก์ชัน $X(z)$ เพื่อหาอันดับสัญญาณทางเวลา $x(n)$ โดยทั่วไปนิยมทำการแปลงแซดผกผันได้ 3 วิธีด้วยกันก็คือ

2.6.1 วิธีการหารยาว (Direct division method)

วิธีการหารยาวคือการกระจาย $X(z)$ อยู่ในรูปอนุกรมกำลังอนันต์ (Infinite power series) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ &= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ของ z^{-n} ก็คืออันดับพจน์ที่ n ของอันดับสัญญาณสามารถหาได้จากหารหารระหว่าง $B(z)$ และ $A(z)$

2.6.2 วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (Partial fraction expansion method)

โดยทั่วไปเราสามารถจัดฟังก์ชัน $X(z)$ ให้อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยได้ดังนี้

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (2.32)$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (2.32) ใหม่จะได้ว่า

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})} \quad (2.33)$$

ในการแยกเศษส่วนย่อยเราจะพิจารณาเฉพาะส่วนของโพลและสามารถทำการแบ่งได้เป็น 2 กรณี

1. กรณีที่ โพล ทุกตัวอยู่ตำแหน่งไม่ซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าเดียว (Distinct pole)

$$X(z) = C_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} \quad (2.34)$$

$$X(z) = C_0 + \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (2.35)$$

2. กรณีที่ โพล อยู่ตำแหน่งซ้ำกันเรียกว่า โพลค่าซ้ำ (Multiple pole)

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(z - p_k)^i} \quad (2.36)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ D_i หาได้จาก

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [(z - p_k)^m X(z)]_{z=p_k} \quad (2.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.3 วิธีการ Residue

การแปลงแซดผกผันด้วยวิธีนี้ค่า $x(n)$ จะถูกแทนด้วยการอินทิเกรตคอนทัวร์ (Contour integral) ดังสมการที่ (2.38)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j_C} \oint z^{n-1} X(z) dz \quad (2.38)$$

เมื่อ C คือเส้นทางการอินทิเกรตคอนทัวร์โพลของ $X(z)$ ที่อยู่ในรูปเศษส่วนและโพลิโนเมียล (Rational and polynomials) คำตอบจะถูกแทนอยู่ในรูปตัวแปรเชิงซ้อนด้วยทฤษฎีของ Cauchy's residue ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า $x(n)$ ก็คือผลรวมของการทำ Residue เฉพาะโพลในบริเวณ C ของฟังก์ชัน $z^{n-1} X(z)$ เขียนได้ดังสมการที่ (2.39)

$$\text{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_k)^m F(z)]_{z=p_k} \quad (2.39)$$

เมื่อ $F(z) = z^{n-1} X(z)$

2.6.4 สมการผลต่างสลับเนื่อง

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงอุปมาน คุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา จะสามารถเขียนอธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เช่นเดียวกัน ในระบบเชิงเลขก็จะมีสมการผลต่างสลับเนื่อง (Difference equation) ไว้ใช้ในการอธิบายคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ซึ่งสมการผลต่างสลับเนื่องอันดับที่ n สามารถเขียนได้เป็น

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^m b_k y(n-k) \quad (2.40)$$

โดยที่ $x(n)$ เป็นอันดับสัญญาณขาเข้า $y(n)$ เป็นอันดับสัญญาณขาออกและ a_k, b_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์สมการผลต่างสามารถแสดงในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้คุณสมบัติการหน่วงเวลาของการแปลงแซด คือ

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z) \quad (2.41)$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z) \quad (2.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.40) จะได้

$$Y(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^m b_k z^{-k} Y(z) \quad (2.43)$$

จัดรูปสมการเพื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอน

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^m b_k z^{-k}\right)} \quad (2.44)$$

2.7 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้บรรยายเกี่ยวกับความหมายและข้อดีต่างๆของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข โดยมีขั้นตอนการดำเนินการกับสัญญาณในการเปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับระบบนั้นๆ รวมทั้งเงื่อนไขที่ต้องพิจารณา โดยเฉพาะปัญหาเกี่ยวกับความเสถียรภาพของระบบที่ทำการออกแบบ นอกจากนี้ยังกล่าวถึง ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง การแปลงแซด การแปลงแซดผกผัน เนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นประเด็นสำคัญที่ควรทราบและใช้เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญในการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลข

ตารางที่ 2.2 z Transform ของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta(n)$	1	All z
2. $u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta(n-m)$	z^m	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ 0 (if $m < 0$)
5. $a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-a^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $(\cos(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $(\sin(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $(r \cos(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{1-r \cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r \cos(\omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $(r \sin(\omega_0 n)u(n))$	$\frac{r \sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r \cos(\omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วงจรรองสัญญาณเชิงเลข

วิธีการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขที่นิยมมากวิธีหนึ่งก็คือ การออกแบบโดยอิงวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ ซึ่งได้แก่วงจรรองสัญญาณแบบ บัตเตอร์เวิร์ท เชปีเชฟ อีลิปติก และอื่นๆ โดยเราสามารถใส่ฟังก์ชันหรือการเปลี่ยนแปลงอย่างใดอย่างหนึ่งที่สามารถแปลงฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอนาล็อก (ซึ่งอยู่ใน s โดเมน) มาเป็นระบบดิจิทัล (ซึ่งอยู่ใน z โดเมน) ได้ ซึ่งการแปลงที่ใช้มีอยู่หลายแบบ เช่น การแปลงอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations) การแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations) การแปลงผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations) และการแปลงผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformations) โดยหัวข้อนี้จะกล่าวไว้ทั้งหมด

3.1 วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations)

วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ (Impulse invariant transformations) เป็นวิธีหนึ่งที่พยายามทำให้ผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข $h(nT)$ มีความใกล้เคียงกับผลตอบสนองอิมพัลส์จากวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ $h(t)$ ที่ได้ทำการออกแบบไว้ ซึ่งหลักการของวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ นั้นอาศัยหลักการแปลงลาปลาซผกผันจากฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมาน $H_a(s)$ เพื่อหาผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ จากนั้นทำการเปลี่ยนฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ $h(t)$ ไปเป็นฟังก์ชันผลตอบสนองอิมพัลส์ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข $h(nT)$ ด้วยหลักการสุ่มตัวอย่างทางเวลา T สุดท้ายนี้ ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ก็จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเลข $H(z)$ ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ตามนี้

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{s - a_k} \quad (3.1)$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) จากสมการที่ (3.1) จะได้ว่า

$$h(t) = \sum_{k=1}^N b_k e^{(a_k t)} u(t) \quad (3.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย

จากสมการที่ (3.2) เป็นผลตอบสนองอิมพัลส์นาลอกและทำการสุ่มตัวอย่างทางเวลาจะได้ว่า

$$h(nT) = h(t)|_{t=nT} \quad (3.3)$$

ในสมการที่ (3.3) เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) เพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขได้ดังนี้

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N b_k e^{nTa_k} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N b_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{a_k T} z^{-1} \right)^n \\ H(z) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{b_k}{1 - e^{a_k T} z^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสมการที่ (3.1) และ (3.4) จะได้ว่า

$$\frac{b_k}{s - a_k} \Rightarrow \frac{b_k}{1 - e^{a_k T} z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > e^{a_k T} \quad (3.5)$$

โดยที่ a_k เป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน $s = a_k$ และ $e^{a_k T}$ ก็จะเป็นตำแหน่งโพลของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข $z = e^{a_k T}$ ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ทั้งสองได้ดังนี้

$$z = e^{sT} \quad \text{และ} \quad s = \left(\frac{1}{T} \right) \ln(z) \quad (3.6)$$

จากสมการที่ (3.6) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอสกับระนาบแซดเป็นลักษณะการแมป (Mapping) ที่ไม่ใช่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ $s = \sigma + j\omega$ แทนลงไป ในสมการที่ (3.6) จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega} \tag{3.7}$$

โดยที่ $\Omega = \omega T = \frac{2\pi f}{f_s}$ เรเดียน/อัตราการสุ่ม

การทรานส์ฟอร์มจากระนาบเอสไปเป็นระนาบแซค สามารถสรุปได้ดังนี้

1. จุดกำเนิด (Origin) พบว่า $s = 0$ ในระนาบเอสสามารถแมปไปยัง $z = 1$ ของระนาบแซค ซึ่งสอดคล้องได้ว่า $s = 0 \pm j\omega_s$ และ $z = e^{j\omega_s T} = e^{j2\pi} = 1$
2. แกน $j\omega$ พบว่า $\sigma = 0$, $z = e^{j\Omega}$ และ $|z| = 1$ โดยที่ ω เพิ่มจาก ω_0 ไปเป็น $\omega_0 + \omega_s$ และความถี่ Ω เพิ่มจาก Ω_0 ไปเป็น $\Omega_0 + 2\pi$ เมื่อ $\omega_s = 2\pi f_s$ สามารถแมปไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซค
3. ครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายพบว่ามี $\sigma < 0$ จะทำให้ $z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$ หรือ $|z| = e^{\sigma T} < 1$ ก็คือครึ่งระนาบเอสด้านซ้ายถูกแมปไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซค
4. ครึ่งระนาบเอสด้านขวาพบว่ามี $\sigma > 0$ จะทำให้ $|z| = e^{\sigma T} > 1$ ก็คือครึ่งระนาบเอสด้านขวาถูกแมปไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซค

นอกจากนี้พบว่า การออกแบบวงจรกรองสัญญาณดิจิทัลด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ไม่เหมาะสมกับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่สูงผ่าน (High pass filter) และวงจรกรองสัญญาณก้ำจืดแถบความถี่ (Band stop filter) เนื่องจากไม่ว่าคาบการสุ่ม T จะต่ำเพียงใดก็ยังคงเกิดปรากฏการณ์ของ Aliasing ทำให้สเปกตรัมของสัญญาณที่ต้องการผิดเพี้ยนไปและถ้าผลตอบสนองความถี่ที่สูงก็จะมีค่าผิดเพี้ยนไปมาก

ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของการทรานส์ฟอร์มด้วยวิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์

$H(s)$	$H(z)$ (โดยที่ $\alpha = e^{a_k T}$)
$\frac{b_k}{(s + a_k)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1} d^{m-1} b_k}{(m-1)! d a_k^{m-1} (1 - e^{-a_k T} z^{-1})}$
$\frac{s + a_k}{(s + a_k)^2 + b_k^2}$	$\frac{1 - e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1}}{1 - 2e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1} + e^{-2a_k T} z^{-2}}$
$\frac{s + a_k}{(s + a_k)^2 + b_k^2}$	$\frac{e^{-a_k T} (\sin b_k T) z^{-1}}{1 - 2e^{-a_k T} (\cos b_k T) z^{-1} + e^{-2a_k T} z^{-2}}$

3.2 วิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformations)

วิธีการแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มจากวงจรกรองสัญญาณเชิงอนุพันธ์ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข เป็นเทคนิคที่ได้รับความนิยมมากเป็นพิเศษเพราะการแมป (Mapping) จะเป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One Mapping) ของความถี่แต่ละจุดบนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอส ไปสู่ความถี่แต่ละจุดบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งในระนาบแซด ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม ดังนั้นเราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{b_0}{a_1s + a_0} \quad (3.8)$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (3.8) ใหม่จะได้ว่า

$$a_1sY_a(s) + a_0Y_a(s) = b_0X_a(s) \quad (3.9)$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse laplace transform) เพื่อหาความสัมพันธ์ทางเวลาและจัดให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่อง

$$a_1y'_a(t) + a_0y_a(t) = b_0x_a(t) \quad (3.10)$$

ทฤษฎีการอินทิเกรตเขียนได้ว่า

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(t) dt + y_a(t_0) \quad (3.11)$$

จากสมการที่ (3.11) กำหนดให้ $t = nT$ และ $t_0 = (n-1)T$ จะได้ว่า

$$y_a(t) = \int_{(n-1)T}^{nT} y'_a(t) dt + y_a[(n-1)T] \quad (3.12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำการประมาณค่าการอินทิเกรตด้วย กฎการอินทิเกรตแบบสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) ได้

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2)\{y'_a(nt) + y'_a[(n-1)T]\} \quad (3.13)$$

จากสมการที่ (3.10) สามารถเขียนได้ว่า

$$y'_a(t) = \frac{-a_0}{a_1} y_a(t) + \frac{b_0}{a_1} x_a(t) \quad (3.14)$$

$$y'_a[(n-1)T] = \frac{-a_0}{a_1} y_a([(n-1)T] + \frac{b_0}{a_1} x_a[(n-1)T] \quad (3.15)$$

นำสมการที่ (3.14) และ (3.15) แทนลงในสมการที่ (3.13) จะได้ว่า

$$y_a(nt) = y_a[(n-1)T] + (T/2) \left\{ \frac{-a_0}{a_1} y_a(t) + \frac{b_0}{a_1} x_a(t) - \frac{a_0}{a_1} y_a([(n-1)T] + \frac{b_0}{a_1} x_a[(n-1)T] \right\} \quad (3.16)$$

ทำการแปลงแซคทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.16) จะได้ว่า

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} + \frac{a_0 T}{2a_1} Y(z) + \frac{a_0 T}{2a_1} Y(z)z^{-1} = \frac{b_0 T}{2a_1} X(z) + \frac{b_0 T}{2a_1} X(z)z^{-1} \quad (3.17)$$

จัดรูปสมการที่ (3.17) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{b_0 T}{2a_1} + \frac{b_0 T}{2a_1} z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{a_0 T}{2a_1} + \frac{a_0 T}{2a_1} z^{-1}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{b_0}{a_1 \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a_0} \quad (3.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.8) และ (3.19) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow [(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]} \quad (3.20)$$

จะได้ว่า

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad \text{และ} \quad z = \frac{2+sT}{2-sT} \quad (3.21)$$

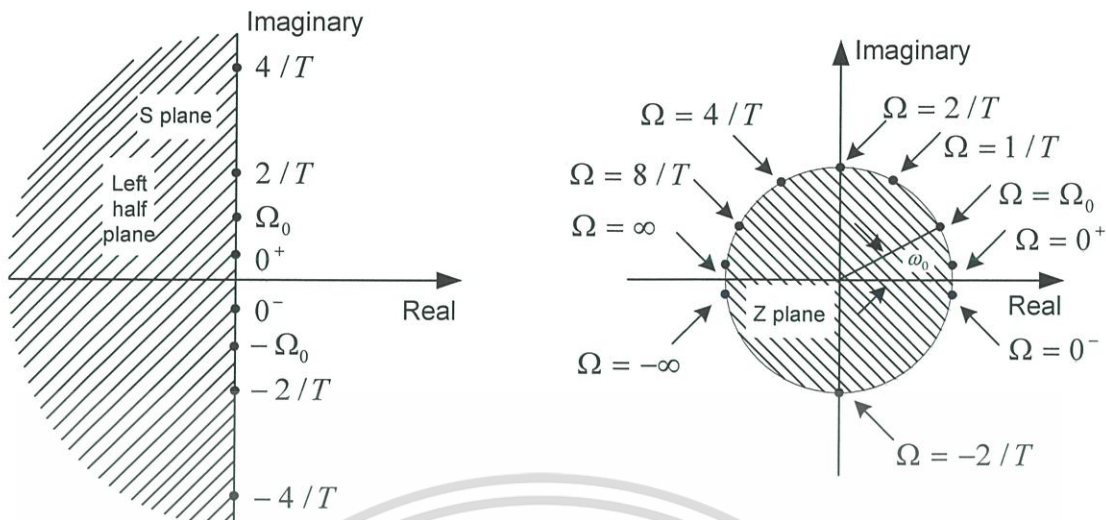
กำหนดให้ $s = \sigma + j\Omega$ แทนลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$|z| = \frac{\left| 1 + \frac{T}{2}\sigma + j\frac{T}{2}\Omega \right|}{\left| 1 - \frac{T}{2}\sigma - j\frac{T}{2}\Omega \right|} \quad (3.22)$$

$$|z| = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}\sigma \right)^2 + \left(\frac{T}{2}\Omega \right)^2}{\left(1 - \frac{T}{2}\sigma \right)^2 + \left(\frac{T}{2}\Omega \right)^2}$$

จากสมการที่ (3.22) สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 3 กรณีคือ

1. กรณี $\sigma > 0$ พบว่า $|z| > 1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านขวาถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
2. กรณี $\sigma < 0$ พบว่า $|z| < 1$ นั่นคือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณครึ่งหนึ่งในระนาบเอสทางด้านซ้ายถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด
3. กรณี $\sigma = 0$ พบว่า $|z| = 1$ คือ ตำแหน่งของโพลที่อยู่บริเวณบนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในระนาบแซด



รูปที่ 3.1 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีแปลงไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม

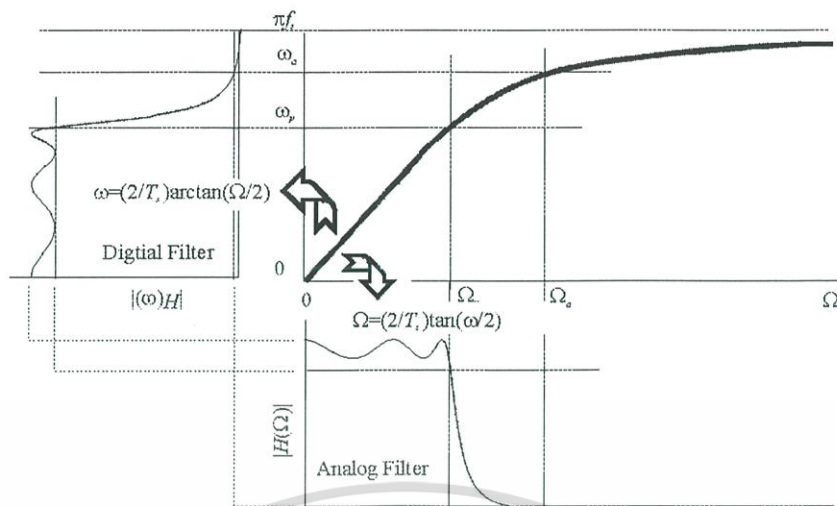
วงจรรองสัญญาณเชิงอุปทานมีความเสถียรภาพนั้นก็ต่อเมื่อ ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอส ที่มีความเสถียรภาพนั้นเมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซคค์ก็พบว่า วงจรรองสัญญาณเชิงเลขจะมีความเสถียรภาพด้วย เนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย อย่างไรก็ตามบริเวณที่สนใจเป็นพิเศษคือ กรณีที่ $\sigma = 0$ พบว่า $|z|=1$ จะได้ว่า $s = j\Omega$ และ $z = e^{j\omega T}$ แทนลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$j\Omega = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - e^{j\omega T}}{1 + e^{j\omega T}} \right)$$

$$= \frac{2}{T} \left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} \right) \tag{3.23}$$

จะได้ว่า
$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \tag{3.24}$$

จากสมการที่ (3.24) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในโดเมนอนาลอก (Ω) และความถี่ในโดเมนดิจิทัล (ω) โดยมีความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าในช่วงความถี่สูงๆ ความสัมพันธ์ของความถี่ทั้งสองมีกราฟลักษณะไม่เป็นลักษณะเชิงเส้น ซึ่งผลกระทบจากความไม่เป็นเชิงเส้นนี้ก็คือจะทำให้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟสในบริเวณความถี่สูงๆเพี้ยนไปปรากฏการณ์ลักษณะนี้เรียกว่า ปรากฏการณ์หัดแคบ (Wrapping Effect) เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ความถี่ในโดเมนอนาลอกและดิจิตอล

ดังนั้นในการออกแบบจึงต้องมีการชดเชยผลของปรากฏการณ์หัดแคบนี้ (Prewrapping) ซึ่งสรุปขั้นตอนการออกแบบวงจรสัญญาณเชิงเลขด้วยวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์มได้ดังนี้

1. ออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ โดยการหาฟังก์ชันถ่ายโอน $H_a(s)$
2. กำหนดความถี่คัตออฟ (Cutoff frequency) และความถี่สุ่ม (Sampling frequency) ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข
3. ทำการชดเชยผลของปรากฏการณ์หัดแคบ โดยการหาค่า $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$
4. การสเกลความถี่ (Frequency scaling) ของ $H_a(s)$
5. หาค่า $H(z)$ โดยแทนค่า $s = \frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$

3.3 วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward difference transformations)

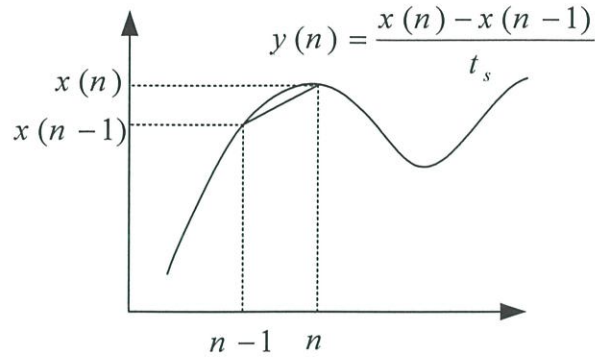
เราจะทำการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข $H(z)$ โดยมีคุณสมบัติของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานตามสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ได้ดังนี้

$$\sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \tag{3.25}$$

โดยที่ $x_a(t)$ เป็นสัญญาณเข้าที่ต่อเนื่องทางเวลา

$y_a(t)$ เป็นสัญญาณออกที่ต่อเนื่องทางเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทรานส์ฟอร์ม (Laplace transform) ในสมการที่ (3.25) จะได้ว่า

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^M a_k s^k} \quad (3.26)$$

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองอันดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.3 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.27) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}[y(n)] = [y(n) - y(n-1)]/T \quad (3.27)$$

ทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.27) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n) - y(n-1)]/T) = Y(z)(1 - z^{-1})/T \quad (3.28)$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังมีลำดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \quad (3.29)$$

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1 - z^{-1})/T]^k \quad (3.30)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังที่อันดับสูงๆ ในสมการที่ (3.25) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k \nabla^{(k)} [y_a(n)] = \sum_{k=0}^N b_k \nabla^{(k)} [x_a(n)] \quad (3.31)$$

เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.31)

$$\sum_{k=0}^M a_k Z(\nabla^{(k)} [y_a(n)]) = \sum_{k=0}^N b_k Z(\nabla^{(k)} [x_a(n)]) \quad (3.32)$$

ใช้สมการที่ (3.30) แทนลงในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1}) / T]^k Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1}) / T]^k X(z) \quad (3.33)$$

จัดรูปสมการที่ (3.33) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1}) / T]^k}{\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1}) / T]^k} \quad (3.34)$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.26) และ (3.34) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow (1-z^{-1})/T} \quad (3.35)$$

จะได้ว่า

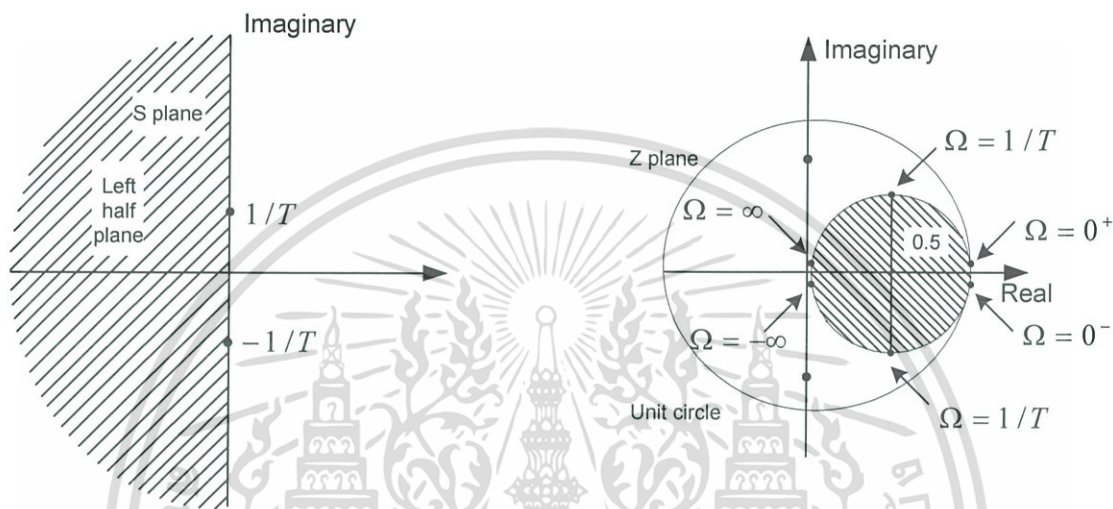
$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad \text{และ} \quad z = \frac{1}{1 - sT} \quad (3.36)$$

เมื่อพิจารณาในส่วน $\sigma = 0$ จะได้ว่า $s = j\omega$ แทนลงในสมการที่ (3.36)

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} \Rightarrow z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right) \Rightarrow \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (3.37)$$

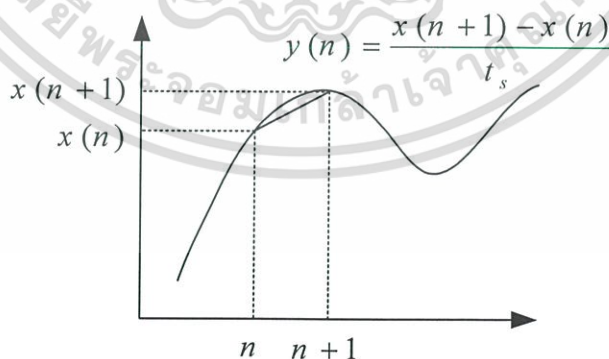
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (3.37) จะได้ว่าตำแหน่งของโพลที่อยู่บนแกน $j\Omega$ ในระนาบเอสถูกแมป (Mapping) ไปยังบริเวณบนเส้นรอบวงกลมรัศมี (1/2) หน่วยในระนาบแซคในทำนองเดียวกัน ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพเมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซคก็พบว่าวงจรรองสัญญาณดิจิทัลจะมีความเสถียรภาพด้วย เนื่องจากโพลทุกตัวอยู่ภายในวงกลมรัศมี (1/2) หน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง

3.4 วิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า (Forward difference transformations)



รูปที่ 3.5 อัลกอริทึมผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าคือ การหาค่าเฉลี่ยผลต่างของทั้งสองลำดับสัญญาณ ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 3.5 สามารถเขียนเป็นสมการที่ (3.38) ได้ดังนี้

$$\nabla^{(1)}[y(n)] = [y(n+1) - y(n)]/T \quad (3.38)$$

เมื่อทำการแปลงแซดทรานส์ฟอร์ม (z Transform) ในสมการที่ (3.38) จะได้ว่า

$$Z(\nabla^{(1)}[y(n)]) = Z([y(n+1) - y(n)]/T) = Y(z)(1 - z^{-1})/z^{-1}T \quad (3.39)$$

ในกรณีที่ การประมาณค่าด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้ามีอันดับสูงๆ สามารถเขียนได้ตามนี้

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}[y(n)]] \quad (3.40)$$

และ

$$Z(\nabla^{(k)}[y(n)]) = Y(z)[(1 - z^{-1})/z^{-1}T]^k \quad (3.41)$$

ใช้สมการที่ (3.30) แทนลงในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1})/z^{-1}T]^k Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1})/z^{-1}T]^k x(z) \quad (3.42)$$

จัดรูปสมการที่ (3.42) จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k [(1 - z^{-1})z^{-1}/T]^k}{\sum_{k=0}^M a_k [(1 - z^{-1})z^{-1}/T]^k} \quad (3.43)$$

เมื่อการเปรียบเทียบสมการที่ (3.26) และ (3.43) จะเห็นความสัมพันธ์ได้ว่า

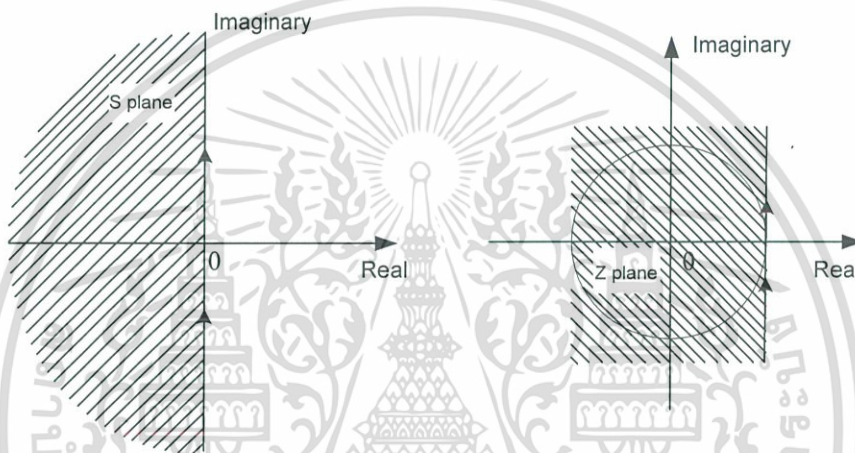
$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s \rightarrow (1-z^{-1})/z^{-1}T} \quad (3.44)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ว่า

$$s = \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}T} \text{ และ } z = 1 + sT \tag{3.45}$$

อย่างไรก็ดีวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้าจะไม่ค่อยนิยมมากนักในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขเพราะว่า ตำแหน่งของโพลทุกตัวอยู่บริเวณทางด้านซ้ายในระนาบเอสที่มีความเสถียรภาพนั้น โดยทั่วไปเมื่อทำการแมป (Mapping) ไปสู่ระนาบแซคอาจเกิดปัญหาความไม่เสถียรภาพได้เนื่องจากว่า โพลอาจอยู่ภายนอกวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ดังแสดงได้ในรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 ผลการแมป (Mapping) ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า

3.5 ประเภทของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข

3.5.1 วงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัด (FIR Filter)

เมื่ออธิบายถึงวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดที่มีคุณสมบัติคอซอล (Casual FIR system) สามารถเขียนแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k) = h(n) * x(n) \tag{3.46}$$

โดยที่ $x(n)$ คืออันดับดับสัญญาณเข้าในระบบ

$y(n)$ คืออันดับดับสัญญาณออกจากระบบ

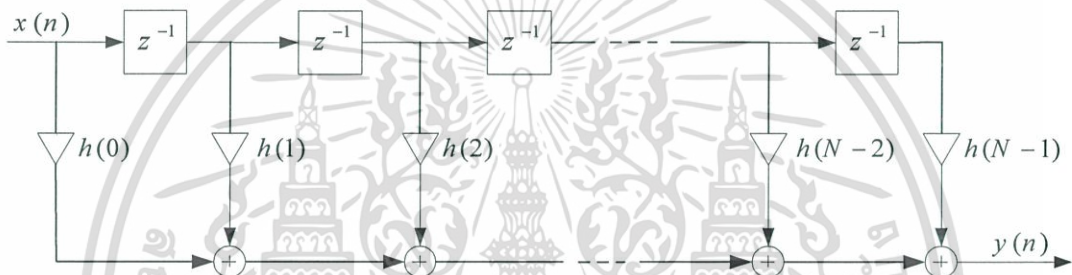
$h(n)$ คือสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

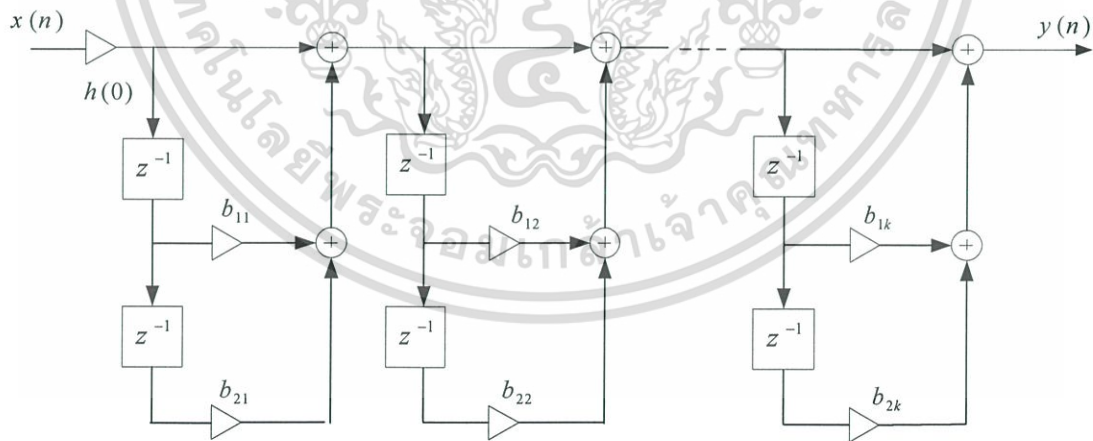
สามารถอธิบายถึงคุณลักษณะของผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse response) โดยมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (3.47)$$

จากสมการที่ (3.46) ก็คือสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ของวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดนั่นเอง ซึ่งรูปแบบของสมการอธิบายความสัมพันธ์ในทางเวลา โดยสัญญาณขาออกจากระบบ $y(n)$ จะขึ้นอยู่กับสัญญาณขาเข้า ณ เวลาปัจจุบันและอดีตเท่านั้น และสามารถนำมาเขียนเป็นโครงสร้างได้หลายลักษณะ

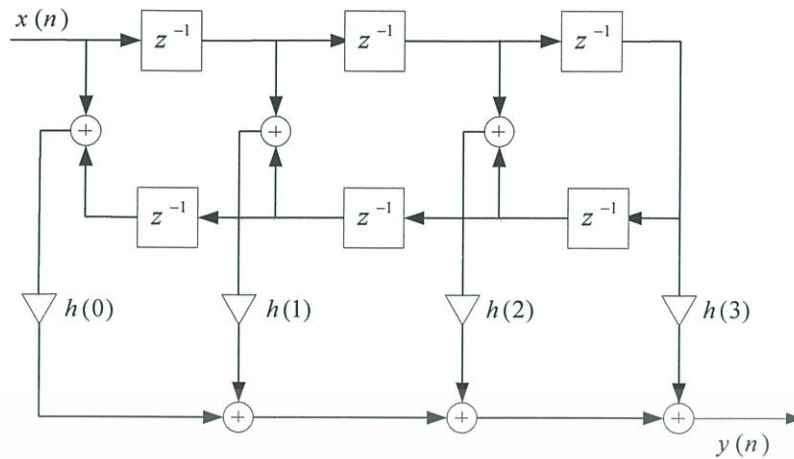


รูปที่ 3.7 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ รูปแบบโดยตรง



รูปที่ 3.8 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ แบบอนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.9 โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณเฟอไออาร์ แบบเฟสเชิงเส้น

จากรูปที่ 3.9 จะเห็นได้ว่าวงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์จำกัดที่มีโครงสร้างแบบเฟสเชิงเส้น ซึ่งจะให้ผลตอบสนองเป็นลักษณะเฟสเชิงเส้น (Phase linear) จัดได้ว่าเป็นเรื่องสำคัญสำหรับการประยุกต์ใช้งานกับแอปพลิเคชันบางประเภทเช่น เสียงดนตรี วิทยุทัศน์ และการส่งผ่านข้อมูล เป็นต้นและประเด็นที่น่าสนใจในที่นี่ก็คือ โครงสร้างแบบเฟสเชิงเส้นจะช่วยลดหรือประหยัดจำนวนอุปกรณ์การคูณลงได้ประมาณครึ่งหนึ่งที่ใช้สร้างวงจรกรองสัญญาณเมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างรูปแบบโดยตรง

ข้อได้เปรียบและข้อเสียเปรียบของวงจรกรองสัญญาณเฟอไออาร์เปรียบเทียบกับไอไออาร์

1. วงจรกรองสัญญาณเฟอไออาร์สามารถออกแบบให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นได้ โดยที่เฟสเชิงเส้นมีความสำคัญต่อการนำไปใช้งาน
2. วงจรกรองสัญญาณเฟอไออาร์จะมีความเสถียรภาพแน่นอน (Stable) เนื่องจากว่ามีโพลอยู่ที่จุดกำเนิด (Origin) บนระนาบแซด
3. สัญญาณรบกวนจากการ Quantize สามารถละทิ้งได้สำหรับโครงสร้างแบบไม่ป้อนกลับ
4. ที่อันดับสูงๆ ต้องการตัวเก็บค่าสัมประสิทธิ์มากกว่าวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.47) กำหนดให้ $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-jk\omega} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.48)$$

จะได้ผลตอบสนองทางขนาดและเฟส

$$M(\omega) = |H(e^{j\omega})|$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{-\text{Im} H(e^{j\omega})}{\text{Re} H(e^{j\omega})} \quad (3.49)$$

พิจารณาค่าหน่วยเฟส (Phase delay) และค่าหน่วยกลุ่ม (Group delay)

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad \text{และ} \quad \tau_g = -\frac{\partial \theta(\omega)}{\partial \omega} \quad (3.50)$$

สำหรับวงจรกรองสัญญาณที่มีค่า τ_p และ τ_g คงที่นั่นคือเป็นอิสระต่อความถี่เรียกว่า วงจรกรองสัญญาณที่มีเฟสเป็นเชิงเส้น

$$\theta(\omega) = -\tau\omega \quad -\pi < \omega < \pi \quad (3.51)$$

จากสมการที่ (3.48), (3.49) และ (3.51) ผลตอบสนองทางเฟสสามารถเขียน

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = \tan^{-1} \frac{-\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} \quad (3.53)$$

จะได้ว่า
$$\sum_{k=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega\tau - \omega n) = 0$$

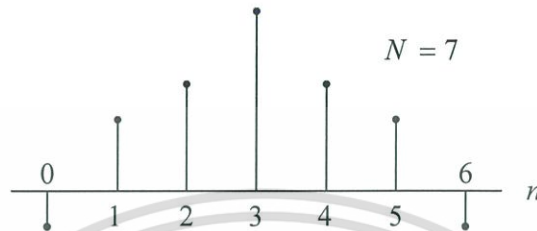
จะเห็นได้ว่าการที่วงจรกรองสัญญาณเอพ็โอราร์จะมีผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น เนื่องจากผลบวกของฟังก์ชันไซน์มารวมกันเป็นศูนย์ การที่มีคุณสมบัติอย่างนี้ได้ ก็คือผลตอบสนองอิมพัลส์ทั้งสองด้านต้องสมมาตรกันตามสมการที่ (3.52) และ (3.53)

$$\tau = \frac{(N-1)}{2} \quad (3.53)$$

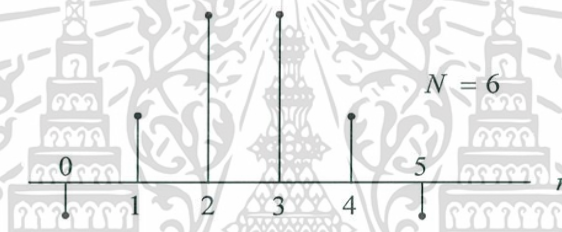
และ $h(n) = h(N-1-n)$ สำหรับ $0 < n < N-1$ (3.54)

ดังนั้นวงจรกรองสัญญาณเอพ็โอราร์จะมีค่าหน่วยเฟสและค่าหน่วยกลุ่มคงที่ตามเงื่อนไขของสมการที่ (3.53) และคุณสมบัติความสมมาตรตามสมการที่ (3.54) โดยที่ถ้าหาก N เป็นเลขคี่นั้นแสดงว่า จุดกึ่งกลางของความสมมาตรจะอยู่ที่ผลตอบสนองอันดับ $(N-1)/2$ เช่นตัวอย่างเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับวงจรกรองสัญญาณเอพ็โอร်ที่มีลำดับ $N = 7$ จะพบว่า $h(0) = h(6)$, $h(1) = h(5)$, $h(2) = h(4)$, $h(3)$ แต่ถ้าหากว่า N เป็นเลขคู่จุดกึ่งกลางของความสมมาตรจะอยู่ที่ผลตอบสนองอันดับ $(N-2)/2$ และ $N/2$ ดังรูปที่ 3.10 (a) และ (b) เรียกว่า การสมมาตรแบบสมมาตรคู่ (Even symmetry)



(a) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ สมมาตรคู่



(b) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบ สมมาตรคี่

รูปที่ 3.10 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบสมมาตร

ในบางกรณีการออกแบบอาจต้องการให้เพียงค่า ความหน่วงกลุ่ม τ_g มีค่าคงตัวเท่านั้น

$$\theta(\omega) = \theta_o - \tau\omega \quad (3.55)$$

โดยที่ θ_o เป็นค่าเฟสคงตัว วงจรกรองสัญญาณที่มีผลตอบสนองทางเฟสแบบนี้ต้องมีเงื่อนไขคือ

$$\theta_o = \pm\pi/2$$

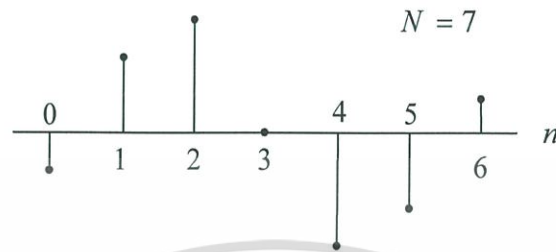
$$\tau = (N-1)/2 \quad (3.56)$$

$$\text{และ } h(k) = -h(N-1-k) \text{ สำหรับ } 0 < k < N-1 \quad (3.57)$$

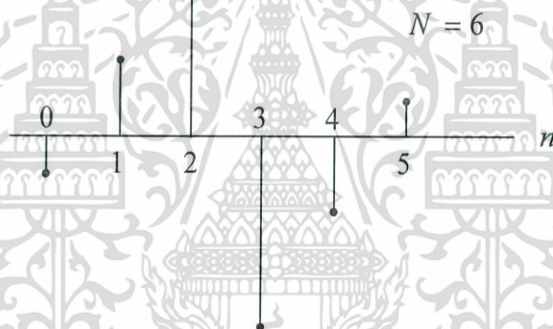
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ลงนามในสื่อบริการเชิงพาณิชย์ ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีนี้ผลตอบสนองอิมพัลส์เรียกว่าเป็นแบบปฏิสมมาตร (Anti-symmetry) หรือสมมาตรคี่ (Odd symmetry) โดยที่จุดกึ่งกลางความสมมาตรเหมือนกับกรสมมาตรแบบสมมาตรคู่ ดังรูปที่ 3.11 (c) และ (d)



(c) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบปฏิสมมาตรคู่



(d) ผลตอบสนองอิมพัลส์ของเฟสเชิงเส้นแบบปฏิสมมาตรคี่

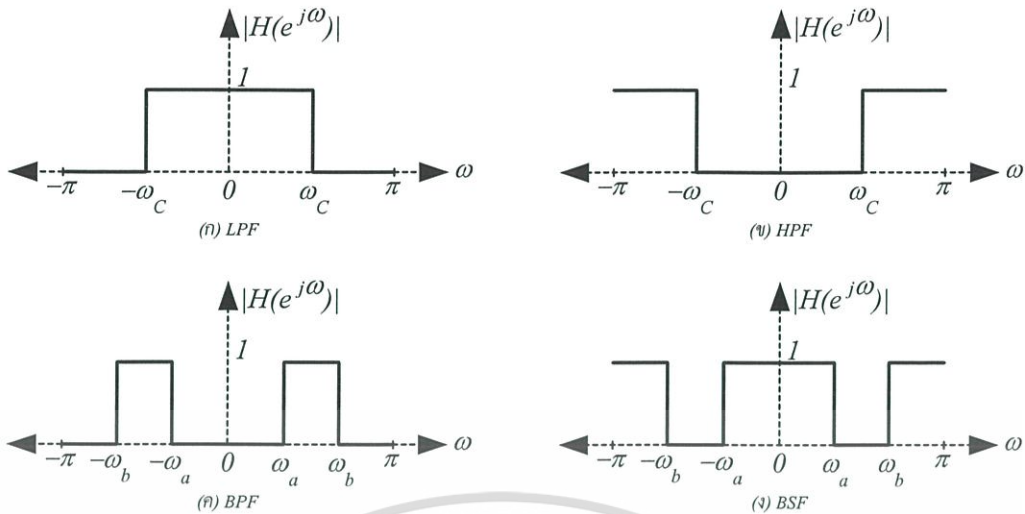
รูปที่ 3.11 ผลตอบสนองอิมพัลส์แบบปฏิสมมาตร

เนื่องจากวงจรกรองสัญญาณ เอฟไออาร์ที่เราพิจารณานั้นให้ผลตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้น (Linear phase) ดังนั้นการออกแบบจึงกระทำโดยใช้การพิจารณาทางขนาด (Magnitude) มีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณอยู่ 2 วิธีที่นิยมคือ

3.5.1.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์โดยใช้อนุกรมฟูรีเยอร์

โดยทั่วไปแล้วการออกแบบวงจรกรองสัญญาณนั้น กระทำโดยการประมาณค่าให้มีผลตอบสนองความถี่ใกล้เคียงกับผลตอบสนองทางอุดมคติดังรูปที่ 3.12 ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาวงจรกรองผ่านความถี่ต่ำทางอุดมคติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.12 ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณอุดมคติ

ผลตอบสนองทางอุดมคติ $H(e^{j\omega})$ ซึ่งกระจายให้อยู่ในพจน์ทางโดเมนเวลา (Time domain) และสามารถหาค่าผลตอบสนองอิมพัลส์ $h(n)$ ได้จากความสัมพันธ์ของการแปลงกลับของฟูเรียร์ได้ดังนี้

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.58)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.59)$$

จากรูปที่ 3.12 จะเห็นว่า $H(e^{j\omega}) = 1$ และมีขอบเขตช่วง $-\omega_c$ จนถึง ω_c ดังนั้นค่าของผลตอบสนองอิมพัลส์หาได้จากสมการที่ (3.60)

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \times e^{j\omega n} d\omega \quad (3.60)$$

$$h(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < k < \infty \quad (3.61)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในสมการที่ (3.61) จะพบปัญหาที่ $n=0$ เพราะผลตอบสนองต่ออิมพัลส์ $h(n)$ มีค่าเป็นเศษศูนย์ส่วนด้วยศูนย์ วิธีแก้ไขปัญหา เราสามารถหาค่า $h(0)$ ได้โดยใช้ทฤษฎีของโลปีตัล จะได้ว่า

$$h(0) = \frac{\lim_{n \rightarrow 0} \frac{d(\sin(\omega_c n))}{d(n)}}{\lim_{n \rightarrow 0} \frac{d(\pi n)}{d(n)}} = \frac{\omega_c}{\pi} \quad (3.62)$$

สำหรับวงจรกรองความถี่แบบอื่นๆ เราสามารถหาผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_d(k)$ ได้โดยการแปลง IDTFT เพื่อหาผลตอบสนองเชิงความถี่ของวงจรกรองนั้นๆ ได้ดังตารางที่ 3.2 เพื่อใช้ในการออกแบบต่อไป

ตารางที่ 3.2 ผลตอบสนองอิมพัลส์

ชนิดของตัวกรอง	$h(n), -\infty < n < \infty$	$h(n), n = 0$
วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน	$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$\frac{\omega_c}{\pi}$
วงจรกรองความถี่สูงผ่าน	$\delta(n) - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$1 - \frac{\omega_c}{\pi}$
วงจรกรองแถบความถี่ผ่าน	$\frac{\sin(\omega_b n) - \sin(\omega_a n)}{\pi n}$	$\frac{\omega_b}{\pi} - \frac{\omega_a}{\pi}$
วงจรแถบความถี่หยุดผ่าน	$\delta(n) - \frac{\sin(\omega_b n) - \sin(\omega_a n)}{\pi n}$	$1 - \frac{\omega_b}{\pi} + \frac{\omega_a}{\pi}$

3.5.2.1 การออกแบบวงจรกรองสัญญาณแอฟไออาร์ ด้วยฟังก์ชันวินโดว์

ทราบกันดีว่าถ้าต้องการให้วงจรกรองสัญญาณมีผลตอบสนองเหมือนกับผลตอบสนองทางอุดมคตินั้นจะต้องใช้สัมประสิทธิ์ยาวถึงอนันต์ ซึ่งในการสร้างวงจรกรองสัญญาณจริงนั้นไม่สามารถทำได้จึงต้องจำกัดช่วงความยาว แต่ส่งผลให้ผลตอบสนองทางขนาดในช่วงแถบความถี่ผ่านเกิดการกระเพื่อม (Ripple) จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์และปัญหานี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อปรากฏการณ์กิบบ์ (Gibb's phenomenon) ด้วยเหตุนี้ถ้าวงจรกรองสัญญาณมีจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์ที่มากพอจะให้คุณสมบัติที่ใกล้เคียงกับทฤษฎีมากขึ้น แต่ในการสร้างวงจรเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังกล่าวซึ่งทางปฏิบัติเป็นสิ่งที่ทำได้ยากและไม่เหมาะสม เพราะว่าการคำนวณต้องใช้เวลานานและเป็นการสิ้นเปลืองอุปกรณ์อีกด้วย วิธีที่เหมาะสมในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณก็คือจำกัดจำนวนเทอมสัมประสิทธิ์ที่น้อยลง แต่มีการปรับค่า $h(n)$ ที่ได้โดยปรับน้ำหนักใหม่ตามลักษณะการคูณเฉพาะช่วง (Window function) สามารถที่จะลดการกระเพื่อมและปรับปรุงช่วงเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนอง (Transition) ได้

$$\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n) \quad (3.63)$$

การคูณจุดต่อจุดใน โดเมนเวลาคือการคูณประสาน (Convolution) ใน โดเมนความถี่ ดังนั้น

$$\hat{H}(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) * W(e^{j\theta}) \quad (3.64)$$

จากตารางที่ 3.3 ฟังก์ชันหน้าต่างที่นิยมใช้กันมากมีดังนี้ Rectangular, Hanning, Hamming, Blackman อันที่จริงมีมากกว่านั้นขึ้นอยู่กับความเหมาะสมต่อการใช้งาน

ตารางที่ 3.3 พารามิเตอร์ที่สำคัญๆของหน้าต่างแบบต่างๆ

Window	δ_{pass}	$A_{stop} = 20 \log \delta_{stop}$	Δf	$W(n), n = 0, 1, \dots, N-1$
Rectangular	89%	21	$2/N$	1
Hanning	0.63%	44	$4/N$	$0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Hamming	0.22%	53	$4/N$	$0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	0.02%	74	$6/N$	$0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

ซึ่งในที่นี้ทำความเข้าใจเพิ่มเติมเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่สำคัญๆตามลักษณะเฉพาะของวิธีหน้าต่างต่อการออกแบบวงจรกรองความถี่ เช่น ความถี่ตัด อัตราการลดทอน ความพลิวหรือริบเปิดของแถบผ่านและความกว้างของแถบเปลี่ยน โดยพิจารณาตามรูปที่ 3.13 ดังนี้

1. ความถี่ตัด (Cutoff frequency ; f_c) หมายถึงจุดตัดของความถี่ที่ให้สัญญาณผ่านหรือไม่ผ่านไปยังขั้วออกของวงจรกรอง สำหรับวงจรกรองความถี่ของเอฟไออาร์กำหนดค่าความถี่ที่ขนาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลดลงประมาณ 0.5 นิยามนี้แตกต่างกับแบบไอโออาร์ที่ใช้นิยามเดียวกันกับวงจรกรองเชิงอุปมานคือ ที่ขนาดลดลงประมาณ 0.707

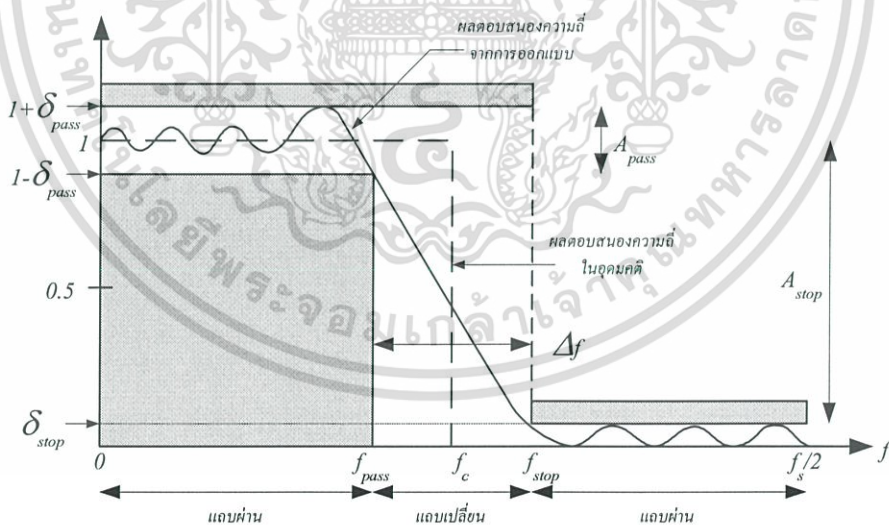
2. การลดทอนของแถบหยุด (Stop band attenuation; A_{stop}) คือจำนวนเท่าที่แถบหยุดลดทอนลง วัดค่าเป็น dB โดยการลดทอนของแถบหยุดมีความสัมพันธ์กับความพลีวของแถบหยุดแสดงดังสมการที่ (3.65)

$$A_{pass} = 20 \log \delta_{stop} \quad (3.65)$$

3. ความพลีวหรือริบเปิลของแถบผ่าน (Pass band ripple; δ_{pass}) หมายถึงค่าสูงสุดที่ขนาดแถบผ่านแกว่งออกห่างจากค่า 1 ตามรูปที่ 3.13 เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A_{pass} = 20 \log \frac{1 + \delta_{pass}}{1 - \delta_{pass}} \quad (3.66)$$

4. ความกว้างของแถบเปลี่ยน (Transition band width; Δf) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดเทียบกับช่วงความถี่



รูปที่ 3.13 คุณลักษณะเฉพาะของผลตอบสนองความถี่ของตัวกรองแบบเอลิปซoidal

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.2 วงจรกรองสัญญาณแบบผลตอบสนองอิมพัลส์ไม่จำกัด (IIR Filter)

วงจรกรองสัญญาณไอโออาร์จะมีความแตกต่างไปจากวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ ก็คือ มีการรวมเอาผลของสัญญาณขาออกในอดีตมาคำนวณด้วยหรือเรียกได้ว่าการ Feedback นั้นเอง ที่สำคัญก็คือการออกแบบวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์ จะใช้จำนวนเทอมสัมประสิทธิ์น้อยกว่าการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ ทำให้ช่วยลดเวลาของการคำนวณลง แต่ข้อเสียมันก็มีเช่นกันก็คือการออกแบบจะต้องใช้ความละเอียดอ่อนเรื่องสัมประสิทธิ์การ Feedback เป็นอย่างมาก เพราะอาจก่อให้เกิดการ Unstable ได้ และการออกแบบวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์จะเป็นการยากอย่างยิ่งที่จะให้ผลเป็นแบบ Linear phase characteristic ซึ่งสามารถทำได้ง่ายโดยการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเอฟไออาร์ ดังนั้นวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์สามารถเขียนอธิบายการทำงานได้ด้วยสมการผลต่างสืบเนื่อง (Difference equation) ดังนี้

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad (3.67)$$

โดยที่ $x(n)$, $y(n)$ เป็นอันดับสัญญาณเข้าและออกตามลำดับ
 a_k , b_k เป็นสัมประสิทธิ์ของอันดับสัญญาณเข้าและออก

ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \quad (3.68)$$

จากสมการการที่ (3.68) สามารถนำมาเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (3.69)$$

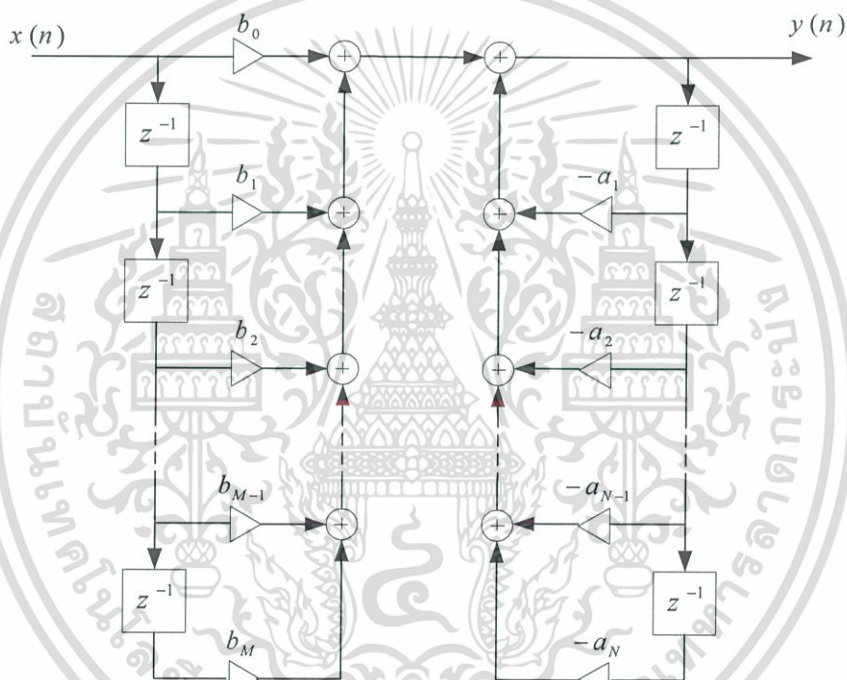
จากสมการที่ (3.69) นำไปจัดเทอมต่างๆใหม่และเขียนอยู่ในรูปสมการผลต่างสืบเนื่องได้

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^M a_k Y(z) z^{-k} \quad (3.70)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5.2.1 โครงสร้างแบบโดยตรง 1 (Direct form I)

โครงสร้างแบบนี้ใช้อุปกรณ์หน่วยสัญญาณหรือชิพรีจิสเตอร์ถึงสองชุด ชุดหนึ่งสำหรับบรรจุลำดับสัญญาณเข้า $x(n-k)$ อีกชุดหนึ่งจะไว้ใช้สำหรับบรรจุลำดับสัญญาณออก $y(n-k)$ โดยที่ $k=0,1,2,\dots,n$ โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณนี้ไม่เหมาะสมสำหรับวงจรกรองสัญญาณที่มีวางโพลอยู่ใกล้เส้นรอบวงกลมรัศมี 1 หน่วย ทั้งนี้เนื่องจากปรากฏการณ์ซึ่งไม่เป็นเชิงเส้นเช่น สิ่งรบกวนที่เกิดจากการคูณ (Product quantization noise) และสภาพความไวของสัมประสิทธิ์ (Coefficient sensitivity) สูงนิยมสร้างเฉพาะกับวงจรที่มีอันดับต่ำ เช่น อันดับหนึ่งหรืออันดับสอง



รูปที่ 3.14 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์ แบบโดยตรง I

3.5.2.2 โครงสร้างแบบโดยตรง 2 (Direct form II)

โครงสร้างแบบนี้เริ่มต้นด้วยการแยกฟังก์ชันถ่ายโอนหรือ $H(z)$ ออกเป็น 2 วงจรคูณแล้วต่ออนุกรมกันดังนี้

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left[\frac{1}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \right] \left[\sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \right] \quad (3.71)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= H_1(z) \bullet H_2(z) \tag{3.72}$$

โดยที่ $H_1(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่มีโพลเพียงอย่างเดียว
 $H_2(z)$ เป็นวงจรกรองสัญญาณที่มีซีโรเพียงอย่างเดียว
 กำหนดให้

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}} \tag{3.73}$$

และ

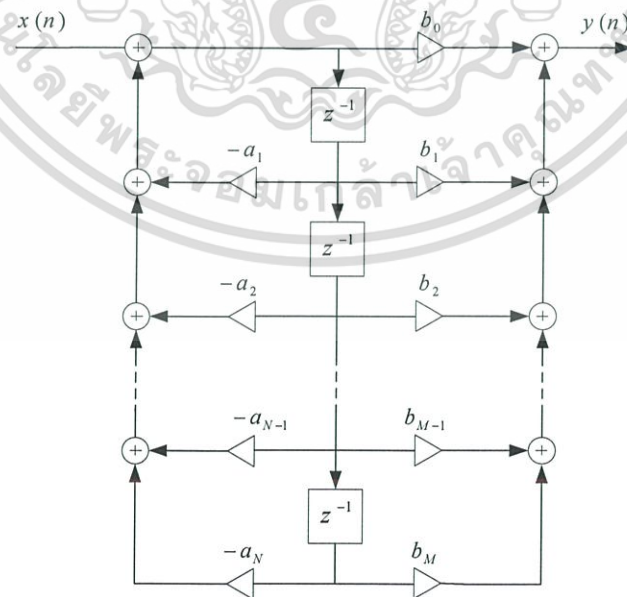
$$H_2(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \tag{3.74}$$

นำสมการที่ (3.73) และสมการที่ (3.74) มาเขียนในรูปสมการผลต่างสลับเนื่องได้ดังนี้

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=0}^M a_k w(n-k) \tag{3.75}$$

และ

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k w(n-k) \tag{3.76}$$



รูปที่ 3.15 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์ แบบโดยตรง II

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.15 การคำนวณของสัญญาณออก $y(n)$ ในครั้งแรกต้องคำนวณหาลำดับสัญญาณ $w(n)$ ก่อนซึ่งเป็นสัญญาณกลาง (Intermediate signal) ตามสมการที่ (3.75) แล้วจึงใช้ผลลัพธ์นี้ไปแทนในสมการที่ (3.76) เพื่อคำนวณหา $y(n)$ ซึ่งเป็นอันดับสัญญาณออกตามต้องการ โครงสร้างแบบโดยตรง 2 มีข้อเสียคือคุณสมบัติความไม่เป็นเชิงเส้น เช่น สิ่งรบกวนจากผลการคูณหรือสภาวะความไวของสัมประสิทธิ์เหมือนโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และมีโอกาสเกิดการล้น (Over flow) ได้มากกว่าโครงสร้างแบบโดยตรง 1 ส่วนข้อดีโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นิยมกันไปสร้างเป็นวงจรกรองสัญญาณกันมาก สืบเนื่องจากลำดับสัญญาณเข้าของตัวคูณทุกตัวดังแสดงในรูปที่ 3.14 และรูปที่ 3.15 ลำดับสัญญาณเข้านี้ไม่ได้ขึ้นกับสัญญาณที่เพิ่งคำนวณไปเลย ด้วยเหตุผลนี้ทำให้เราสามารถสร้างวงจรที่สามารถทำการคูณพร้อมๆ กันได้เลย อันเป็นผลให้การประมวลผลหรือการคำนวณของวงจรมีความเร็วสูง ทำให้แถบความถี่ปฏิบัติงาน (Bandwidth) ของวงจรสูงขึ้น

3.5.2.3 โครงสร้างแบบอนุกรม (Cascade form)

โครงสร้างวงจรกรองสัญญาณที่กล่าวมาข้างต้นคือวงจรกรองสัญญาณโครงสร้างแบบโดยตรง 1 และโครงสร้างแบบโดยตรง 2 นั้นจะมีปัญหาในการควบคุมปรากฏการณ์ความไม่เป็นเชิงเส้นได้ยาก เมื่อค่าของ M และ N มีค่ามากๆ (นั่นก็คืออันดับสูงๆ) ดังนั้นจึงนิยมแบ่งย่อยวงจรกรองสัญญาณออกเป็นส่วยย่อยๆ อันดับต่ำๆมาต่ออนุกรมกัน (Cascade form) หรือต่อขนานวิธีการก็นำฟังก์ชันถ่ายโอนมาเขียนในรูปผลคูณย่อยๆ ดังแสดงในสมการที่ (3.77)

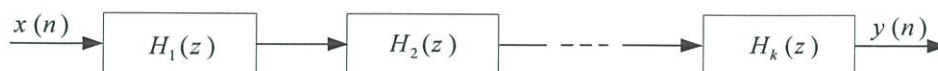
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 \sum_{k=0}^K H_k(z) \quad (3.77)$$

โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสองตามลำดับดังนี้

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (3.78)$$

จากรูปที่ 3.16 $H_k(z)$ อาจจะสร้างได้โดยใช้โครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 โครงสร้างแบบนี้ทำให้สภาพไวต่อสัมประสิทธิ์ต่ำกว่าแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาก สำหรับสิ่งรบกวนนั้นถ้าหากทำสเกล (Scaling) สัมประสิทธิ์แต่ละภาคให้ดีแล้วก็ต้องสามารถกำจัดสิ่งรบกวนออกไปได้



รูปที่ 3.16 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอโออาร์ แบบอนุกรม

3.5.2.4 โครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form)

สำหรับโครงสร้างแบบต่อขนาน (Parallel form) หาได้จาก การนำฟังก์ชันถ่ายโอน $H(z)$ มาแยกเป็นเศษส่วนย่อย ดังแสดงในสมการที่ (3.79)

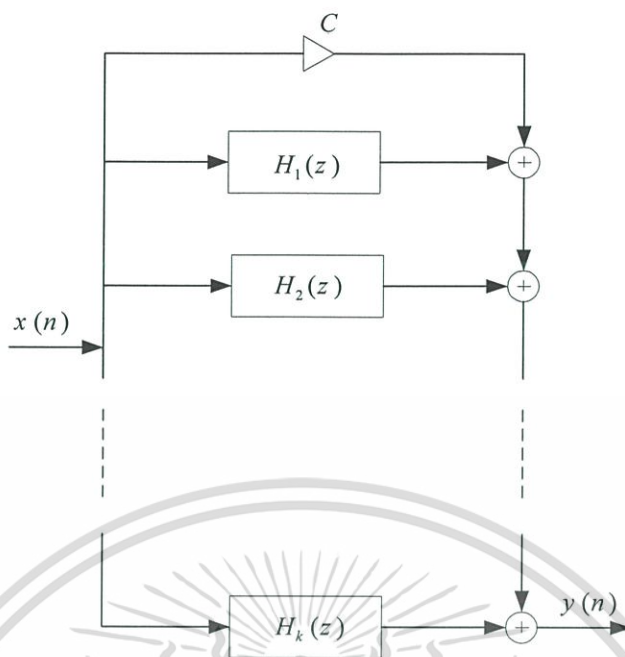
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = C + \sum_{k=0}^K H_k(z) \quad (3.79)$$

โดยที่ $H_k(z)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณอันดับหนึ่งหรืออันดับสอง ตามลำดับดังนี้

$$H_k(z) = \frac{b_{0k}}{1 + a_{1k}z^{-1}} \quad (3.80)$$

$$H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

โครงสร้างต่อแบบขนานโดยทั่วไปแล้วให้ระดับของสิ่งรบกวนน้อยกว่าแบบต่ออนุกรม $H_k(z)$ สามารถนำโครงสร้างแบบโดยตรง 1 หรือแบบโดยตรง 2 มาสร้างแบบขนานได้ ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณไอไออาร์ แบบขนาน

ในการจัดการ โครงสร้างของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบไอไออาร์ให้มีโครงสร้างเป็นแบบขนานจะให้ผลดีคือเป็นวิธีที่เหมาะสมที่จะใช้กับระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลขแบบขนานซึ่งจะสามารถทำงานได้เร็ว

3.6 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญเกี่ยวข้องกับหลักการและความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในอนาลอกโดเมน (Analog domain) กับดิจิทัลโดเมน (Digital domain) ด้วยวิธีการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ ดังที่กล่าวมาทั้งหมดเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่จะนำไปประยุกต์เข้ากับการแปลง S-Z โดยใช้การดำเนินการด้วยปาสคาลเมตริกซ์ นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงเกี่ยวกับประเภท โครงสร้างต่างๆ คุณสมบัติของการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข โดยใช้วิธีการต่างๆ เพื่อให้เกิดความรู้เป็นพื้นฐานและแนวทางในการออกแบบต่อไป

บทที่ 4

ทฤษฎีและหลักการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข

โดยใช้ตัวดำเนินการโพลีเนียร์ปาสกาลเมตริกส์

4.1 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอด

โดยส่วนมากเมื่อพูดถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดมักจะนึกถึงวงจรกรองสัญญาณไบควอดที่เป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog filter) ซึ่งจะให้อาชีพที่ที่เป็นผลตอบสนองทางความถี่หลายแบบ เช่นผลตอบสนองแบบความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) และแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) เป็นต้น ซึ่งบางชนิดอาจมีอาชีพที่ที่เป็นผลตอบสนองแบบก้ำจัดแถบความถี่ (Band-stop) และผ่านทุกความถี่ (All-pass) อีกด้วย โดยรูปแบบพื้นฐานในการสร้างวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดนี้ อาจทำการสร้างด้วยวงจรรอบแอมป์ [7] หรือเป็นพวงจรร CMOS Transistors ตามแต่เทคโนโลยีการออกแบบ แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) จะเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมาน หรือกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนในเอสโดเมน (S-domain) ดังตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอด โดยจะเริ่มพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบความถี่ต่ำผ่าน ที่ใช้เป็นตัวแบบโดยที่ $T(s)$ เป็นตัวจำแนกความเป็นไปได้ของเกน (Gain) และวงจรที่นำมาทำจะเป็นอินเวอร์ตติ้ง (Inverting) หรืออนอินเวอร์ตติ้ง (Non-inverting) ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$T(s) = \frac{\pm H\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} \quad (4.1)$$

จากนั้นจึงทำการสเกลความถี่โดยให้ $\omega_0 = 1$ และเลือกเครื่องหมายลบของฟังก์ชันถ่ายโอนจะได้

$$T(s) = \frac{-H}{s^2 + (1/Q)s + 1} = \frac{V_2}{V_1} \quad (4.2)$$

$$(s^2 + (1/Q)s + 1)V_2 = -HV_1 \quad (4.3)$$

และทำการหารสมการ (4.3) ทั้งสองด้านด้วย $s(s + 1/Q)$ จะได้สมการ (4.4)

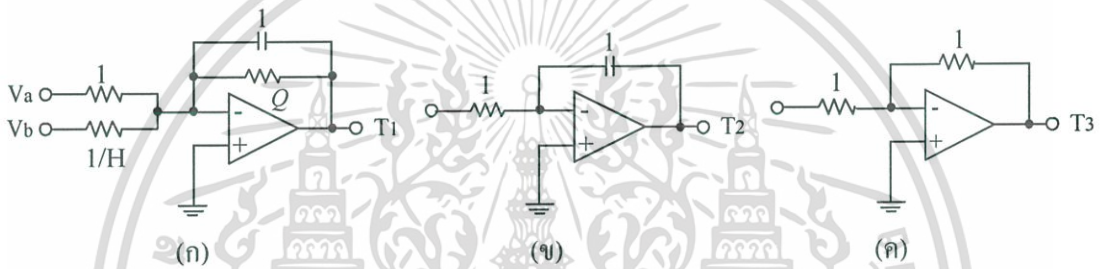
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(1 + \frac{1}{s(s + 1/Q)}\right) V_2 = \frac{-H}{s(s + 1/Q)} V_1 \quad (4.4)$$

เมื่อทำการย้ายข้างสมการ (4.4) จะได้

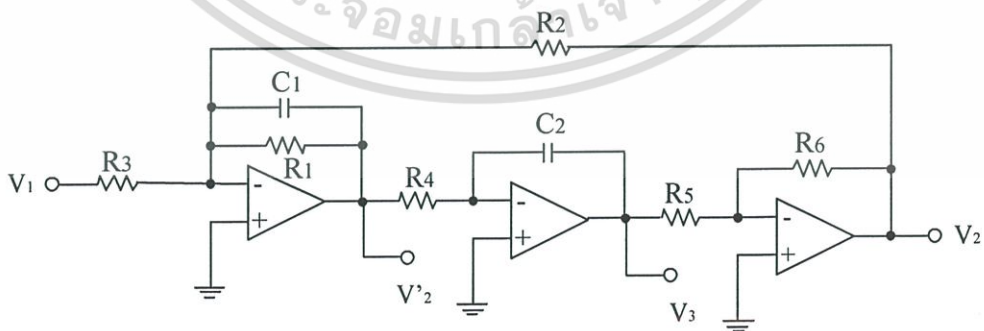
$$V_2 = \left(\frac{-1}{s + 1/Q} V_2 + \frac{-H}{s + 1/Q} V_1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) \cdot (-1) \quad (4.5)$$

ซึ่งจากการทำการคำนวณและการวิเคราะห์จะได้สามวงจรคือ



รูปที่ 4.1 (ก) วงจรรวมสัญญาณ (Sum signal) (ข) วงจรอินทิเกรเตอร์ (Integrator) (ค) วงจรขยายแบบกลับเฟสที่มีอัตราขยายเป็น 1

โดยถ้านำทั้งสามวงจรมาต่อกันแล้วเพิ่มส่วนป้อนกลับ (Feedback) จะเรียกว่าสมการไบคอตแบบสามเอาต์พุตแสดงได้ดังรูป



รูปที่ 4.2 วงจรไบคอตของ Tow-thomas

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1/R_3 R_4 C_1 C_2}{s^2 + (1/R_1 C_1)s + 1/R_2 R_4 C_1 C_2} \quad (4.6)$$

โดยจากสมการฟังก์ชันถ่ายโอน (4.6) จะพบว่าจะมีสามพารามิเตอร์ที่ต้องพิจารณาคือสมการ (4.7) (4.8) และ (4.9)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_2}} \quad (4.7)$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_1^2 C_1}{R_2 R_4 C_2}} \quad (4.8)$$

$$H = \frac{R_2}{R_3} \quad (4.9)$$

และยังมีอีกสิ่งที่น่าสนใจในวงจรไปควอดนี้ก็คือค่า $\frac{V_2}{V_3} = -1$ ทำให้การหาค่าของ $\frac{V_3}{V_1}$ ได้ดังนี้

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_3}{V_2} = -\frac{V_2}{V_1} \quad (4.10)$$

นั่นก็คือฟังก์ชันถ่ายโอน $\frac{V_3}{V_1}$ จะเรียกว่าวงจรตรงความถี่ต่ำแบบไม่กลับเฟส โดยจะย้อนกลับ ไปมีความสัมพันธ์ในรูปวงจรถือ ความสัมพันธ์ระหว่าง V_3 แต่ V_2' โดยฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\frac{V_3}{V_2'} = \frac{1}{R_4 C_2 s} \quad (4.11)$$

จากกฎลูกโซ่จะได้

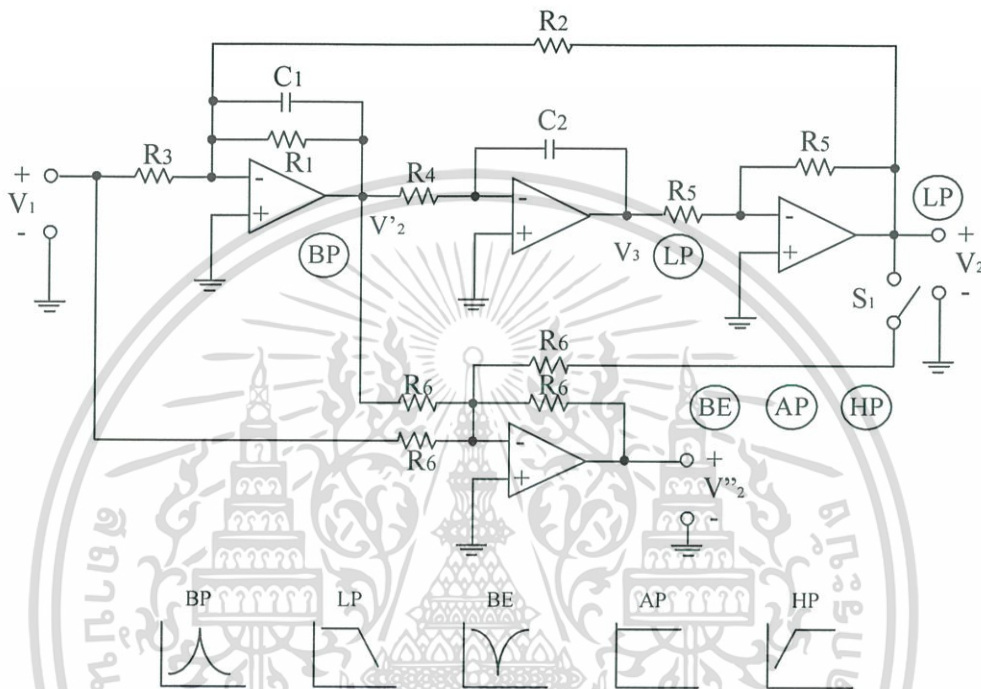
$$\frac{V_2'}{V_3} \times \frac{V_3}{V_2} \times \frac{V_2}{V_1} = -\frac{V_2}{V_1} \quad (4.12)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{V_2'}{V_1} = \frac{(-1/R_3 C_1)s}{s^2 + (1/R_1 C_1)s + 1/R_2 R_4 C_1 C_2} \quad (4.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยในส่วนนี้ค่า $\frac{V_2'}{V_1}$ นั้นคือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองแบบแถบความถี่ผ่าน โดยจากรูปที่ 4.2 จากการศึกษาจะพบว่าค่า R_2 สามารถปรับค่าของ ω_0 และ R_1 นั้นสามารถปรับค่าของ Q โดยไม่เปลี่ยนค่า ω_0 และสุดท้าย R_3 สามารถเป็นการปรับค่าการออกแบบของ H หรือเกนสำหรับวงจร นอกจากจะปรับ ω_0 และ Q ซึ่งสามารถนำไปพิจารณาเพื่อให้มีค่าเอาต์พุตให้สามารถออกมากกว่านี้ได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 วงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดท์ที่ให้ค่าผลตอบสนอง 5 แบบ

โดยจะนำสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองไบควอดท์ทั่วไปมาพิจารณาจากรูปที่ 4.3 จะได้

$$T(s) = \frac{V_2'}{V_1} = \frac{s^2 + (1/R_1C_1 - 1/R_3C_1)s + 1/R_2R_4C_1C_2}{s^2 + (1/R_1C_1)s + 1/R_2R_4C_1C_2} \quad (4.14)$$

เขียนสมการ (4.14) กระชับได้ดังสมการ (4.15)

$$T(s) = \frac{k_1s^2 + k_2(\omega_0/Q)s + k_3\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} \quad (4.15)$$

โดยที่ค่าคงที่ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ± 1 หรือ 0 ทำให้สามารถนำมาเขียนเป็นแต่ละกรณีได้ดังตารางที่ 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 กรณีต่างๆเมื่อ k_1 , k_2 และ k_3 เป็นค่า ± 1 หรือ 0

Case	k_1	k_2	k_3	Name
a	0	0	1	Low-pass
b	1	0	0	High-pass
c	0	1	0	Band-pass
d	1	0	1	Band-stop
e*	1	-1	1	All-pass
f*	0	1	1	Low-pass
g*	1	1	0	Band-pass

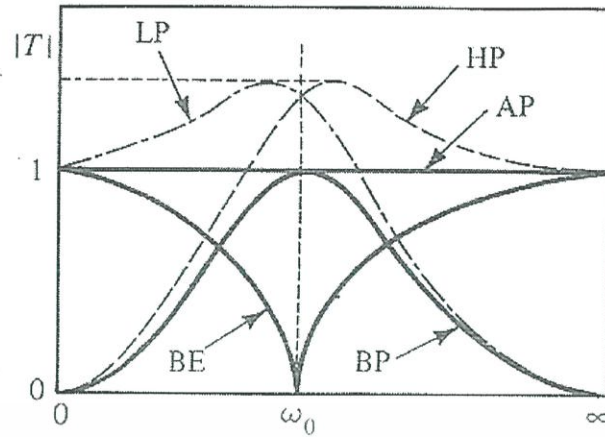
*No realizations were considered

ตารางที่ 4.2 มาตรฐานของค่าผลตอบสนองอันดับ 2 ของวงจรกรองแบบไบควอด

	Frequency response	Poles/zeros	Name
$T_{LP} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Lowpass
$T_{BP} = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Bandpass
$T_{BE} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Bandstop "notch"
$T_{HP} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Highpass
$T_{AP} = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$			Allpass

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแบบไบควอด

ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอด มุมเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ต่ำผ่านคือ

$$\theta_{LP} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega/Q}{1-\omega^2}\right) \quad (4.16)$$

โดยแทน $\omega_0 = 1$ ในสมการที่ (4.17) ที่มาจากรูปสมการทั่วไปนั่นเอง

$$\theta_{LP} = -\tan^{-1}\left(\frac{(\omega/Q)(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) \quad (4.17)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนที่แทน $s = j\omega$

$$T(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (4.18)$$

เมื่อมี θ_1 เป็นมุมของ $N(j\omega)$, ϕ เป็นมุมของ $D(j\omega)$ ก็เป็นมุมของโพลและ θ เป็นมุมของ $T(j\omega)$ และนั่นคือ

$$\theta = \theta_1 - \phi \quad (4.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อโพลของทั้ง 5 ชนิดของผลตอบสนองวงจรรองเหมือนกันดังตารางที่ 4.2 ที่ผ่านมาและ ϕ_1 ก็เหมือนกันของผลตอบสนองทั้งหมดโดยทั่วไปนั่นคือ $-\theta_{LP}$ ดังนั้นจึงสามารถหา θ_1 ของผลตอบสนองทั้ง 5 ได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรรองสัญญาณแบบไบควอด

Name	$N(s)$	$N(j\omega)$	Plot of $\phi_1(\omega)$
Low-pass	ω_0^2	ω_0^2	
Band-pass	$(\frac{\omega_0}{Q})s$	$j(\frac{\omega_0\omega}{Q})$	
Band-stop	$s^2 + \omega_0^2$	$s^2 + \omega_0^2$	
High-pass	s^2	$-\omega^2$	

โดยความแตกต่างสำหรับ $N(s)$ ที่กำหนดไว้ในตารางที่ 4.3 ในกรณีแถบความถี่ผ่าน (Band-pass) หาได้จาก $N(s) = (\omega_0 / Q)s$ ซึ่ง $N(j\omega) = j(\omega_0\omega / Q)$ และ j เป็นตัวบอกว่าเป็นมุมของเฟสของ $+90^\circ$ ดังนั้น

$$\theta_{BP} = \theta_{LP} + 90^\circ \tag{4.20}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับในกรณีความถี่สูงผ่าน (High-pass) $N(s) = s^2$ และ $N(j\omega) = -\omega^2$ ซึ่งแสดงถึงมุมของเฟสคือ 180° ที่แสดงในสมการที่ (4.21)

$$\theta_{HP} = \theta_{LP} + 180^\circ \tag{4.21}$$

สำหรับฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรผ่านทุกความถี่ (All-pass) มีมุมของ $N(j\omega)$ เหมือนกับมุมของ $D(j\omega)$ และซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับในกรณีแบบความถี่ต่ำผ่านดังแสดงในสมการที่ (4.22)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

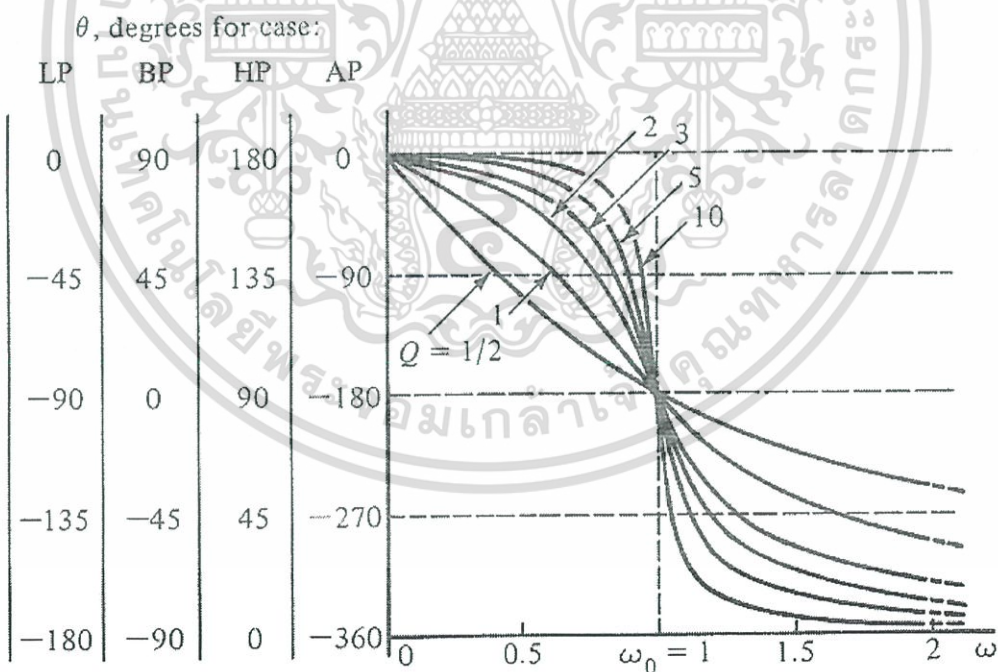
$$\theta_{AP} = 2\theta_{LP} \quad (4.22)$$

จากสมการที่ (4.22) ผ่านมานั้นและจากการพล็อตกราฟของรูปที่ 4.5 ด้านล่างทำให้ดูเหมือนว่ามุมเฟสของทั้งสามกรณีคือ แถบความถี่ผ่าน (Band-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) และวงจรผ่านทุกความถี่ (All-pass) มีลักษณะเดียวกับกรณีของความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) โดยทำการบวกมุมเข้าไปและในกรณีของวงจรผ่านทุกความถี่ (All-pass) เพิ่มเป็นสองเท่าของความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) เช่นนั้นแล้วทำให้การหาฟังก์ชันวงจรกรองแบบแถบความถี่หูดมี $N(j\omega)$ คือ

$$N(j\omega) = -\omega^2 + \omega_0^2 \quad (4.23)$$

ซึ่งเป็นบวกสำหรับ $\omega < \omega_0$ และเป็นลบสำหรับ $\omega > \omega_0$ เฟสเปลี่ยนแปลงจากการ 0° ถึง 180° เมื่อ $\omega = \omega_0$ ดังสมการที่ (4.24)

$$\theta_{BE} = \theta_{LP} + 0^\circ \text{ or } 180^\circ \quad (4.24)$$



รูปที่ 4.5 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแบบไบควอด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วงจรกรองสัญญาณแบบไบควอดคั้งที่ผ่านมาเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานซึ่งการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบไบควอดค้อมีฟังก์ชันถ่ายโอนในเอสโดเมน(S-Domain) และสามารถทำการสร้าง (Implementation) ด้วยอุปกรณ์ที่ทำงานในลักษณะของวงจรถอดโดยใช้ อุปกรณ์จำพวก Opamps หรืออื่นๆ ในขณะที่วงจรกรองสัญญาณเชิงเลข ที่สามารถทำการสร้างด้วย อุปกรณ์ที่เป็นวงจรถอด ซึ่งถ้าจะถามข้อดีของวงจรที่นำเสนอเทียบกับใน วงจรกรองสัญญาณแบบไบควอดค้อมีที่เป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน ก็ตามคำจำกัดความที่มีการบ่งบอกถึงข้อดีข้อเสีย ระหว่างการประมวลผลสัญญาณเชิงอุปมาน (Analog signal processing) และการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข (Digital signal processing)

4.2 วิธีการแปลงความถี่ด้วยเทคนิคตัวแปรไบควอดค้อมี

พิจารณาจากฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดค้อมีที่ใช้เป็นต้นแบบ จากวงจรกรองสัญญาณทั้ง 5 สมการ(จากเอกสารอ้างอิงที่ [6] , [7]) คือ วงจรกรองแบบความถี่ต่ำผ่าน วงจรกรองแบบความถี่สูงผ่าน วงจรกรองแบบแถบความถี่ต่ำผ่าน วงจรกรองแบบจำกัดแถบความถี่และวงจรกรองแบบผ่านทุกความถี่ได้ดังนี้

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบความถี่ต่ำผ่าน

$$H_{LP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.25)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบความถี่สูงผ่าน

$$H_{HP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.26)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบแถบความถี่ต่ำผ่าน

$$H_{BP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.27)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบกำจัดแถบความถี่

$$H_{BS}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.28)$$

โดยจะเห็นว่าฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณแบบกำจัดแถบความถี่ เกิดจากผลรวมของวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่านกับวงจรกรองสัญญาณแบบความถี่สูงผ่าน ดังสมการต่อไปนี้

$$H_{BS}(s) = H_{LP}(s) + H_{HP}(s) \quad (4.29)$$

$$H_{BS}(s) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} + \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.30)$$

$$H_{BS}(s) = \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.31)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบผ่านทุกความถี่

$$H_{AP}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.32)$$

และจากฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองแบบผ่านทุกความถี่ เกิดจากการนำฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณแบบกำจัดแถบความถี่ ลบกับฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่าน ซึ่งเป็นการพิจารณาโดยใช้คณิตศาสตร์เข้าช่วยจะได้ดังสมการที่ (4.33)

$$H_{AP}(s) = H_{BS}(s) + [-H_{BP}(s)] \quad (4.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{AP}(s) = \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} + \left[-\frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \right] \quad (4.34)$$

$$H_{AP}(s) = \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.35)$$

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการไบควอด สำหรับวงจรรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน วงจรรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน วงจรรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน วงจรรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่ และวงจรรองสัญญาณผ่านทุกความถี่ จากสมการ (4.25), (4.26), (4.27), (4.28) และ (4.35) ตามลำดับ จะเห็นว่าทั้งหมดมีตำแหน่งโพลเดียวกันตามสมการของตัวส่วน และมีตำแหน่งของซีโรที่ต่างกันตามสมการของตัวเศษ โดยสมการทั้งหมดเราสามารถที่จะปรับปรุงให้อยู่ในรูปของสมการเดียวและสามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์บางค่าเท่านั้น ซึ่งจะทำให้เราได้รับผลตอบแทนของความถี่ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขได้ตามต้องการ โดยสมการไบควอดพารามตริกสามารถกำหนดให้อยู่ในรูปของสมการฟังก์ชันถ่ายโอน ได้ดังนี้

$$H_{Bi}(s) = \frac{\alpha\Omega_0^2 + \beta\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + \gamma s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.36)$$

โดยตารางที่ 4.4 ได้แสดงการกำหนดค่าพารามิเตอร์ α, β, γ สำหรับนำไปเลือกใช้ในการออกแบบวงจรรองสัญญาณที่ให้เอาต์พุตแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.4 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ของวงจรรองสัญญาณแบบต่างๆ

ประเภทของวงจรรองสัญญาณ	α	β	γ
วงจรรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน	1	0	0
วงจรรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน	0	0	1
วงจรรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน	0	1	0
วงจรรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่	1	0	1
วงจรรองสัญญาณผ่านทุกความถี่	1	-1	1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเราได้เลือกใช้ค่า Q ในสมการที่ (4.36) ให้มีค่าเท่ากับ 0.707 ทำให้สมการนี้จะกลายมาเป็นค่าบัตเตอร์เวิร์ทโพลีโนเมียล ดังนั้นเราสามารถที่จะใช้เทคนิคที่ได้นำเสนอนี้ออกแบบและทำการเปรียบเทียบผลที่ได้กับการออกแบบที่ผ่านมาในเอกสารอ้างอิงที่ [5] ในเงื่อนไขของการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบบัตเตอร์เวิร์ท นอกจากนี้เรายังสามารถนำเทคนิคนี้ ใช้ในการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในอันดับ n ที่สูงขึ้นไป และยังสามารถนำใช้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน และแบบความถี่สูงผ่าน ในอันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ (Odd order)

พิจารณารูปแบบมาตรฐานของฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ทที่ใช้เป็นต้นแบบ จากเอกสารอ้างอิงที่ [7] ได้ดังนี้

$$H_n(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (4.37)$$

จากสมการที่ (4.37) เราสามารถที่จะแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป Cascade form ได้ดังนี้

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{a_{2i} s^2 + a_{1i} s + a_{0i}} \quad (4.38)$$

โดยที่ค่าอันดับ n เป็นจำนวนคู่ และผลโพลีโนเมียลของตัวส่วนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Factored form จากเอกสารอ้างอิงที่ [7], [9] ได้ตามตารางที่ 4.5 ดังนี้

ตารางที่ 4.5 โพลีโนเมียลของตัวส่วนที่อยู่ในรูป Factored form ที่อันดับ n เป็นจำนวนคู่

อันดับ n	โพลีโนเมียลของตัวส่วน
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76536s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3986s + 1)(s^2 + 1.1110s + 1)(s^2 + 1.6630s + 1)(s^2 + 1.9622s + 1)$

การออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบ วงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน และแบบความถี่สูงผ่านอันดับที่ n โดยที่ n มีค่าอันดับเป็นจำนวนคี่ (Odd order) จากสมการที่ (4.37) เราสามารถที่จะแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป Cascade form ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_n(s) = \frac{1}{(s+1)} \prod_{i=1, n \neq 1}^{(n-1)/2} \frac{1}{a_{2i}s^2 + a_{1i}s + a_0} \quad (4.39)$$

โดยที่ค่าอันดับ n เป็นจำนวนคี่ และผลโพลิโนเมียลของตัวส่วนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Factored form จากเอกสารอ้างอิงที่ [7],[9] ได้ตามตารางที่ 4.6 ดังนี้

ตารางที่ 4.6 โพลิโนเมียลของตัวส่วนที่อยู่ในรูป Factored form ที่อันดับ n เป็นจำนวนคี่

อันดับ n	โพลิโนเมียลของตัวส่วน
3	$(s+1)(s^2 + s + 1)$
5	$(s+1)(s^2 + 0.618034s + 1)(s^2 + 1.618034s + 1)$
7	$(s+1)(s^2 + 0.445042s + 1)(s^2 + 1.24698s + 1)(s^2 + 1.80194s + 1)$
9	$(s+1)(s^2 + 0.34729s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.53208s + 1)(s^2 + 1.87938s + 1)$

กรณีที่เราเลือกวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทต้นแบบอันดับ $n = 4$ จากสมการที่ 4.38 เราจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในรูป Cascade form ดังนี้

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.76536s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1.84776s + 1)} \quad (4.40)$$

และจากสมการไบควอดพาราเมตริก (4.36) เราสามารถใช้การกำหนดค่าพารามิเตอร์ α, β, γ ตามตารางที่ 4.4 เพื่อแปลงค่าความถี่ให้อยู่ในรูปของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดอันดับ 4 ที่ให้เอาท์พุทแบบต่างๆ ได้ดังนี้

$$H_{LP}(s) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2} \times \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2} \quad (4.41)$$

$$H_{HP}(s) = \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2} \times \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2} \quad (4.42)$$

$$H_{BP}(s) = \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2} \times \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2} \quad (4.43)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{BS}(s) = \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2} \times \frac{\Omega_0^2 + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2} \quad (4.44)$$

$$H_{AP}(s) = \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)s + s^2} \times \frac{\Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)s + s^2} \quad (4.45)$$

สำหรับกรณีที่เราเลือกวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทต้นแบบอันดับ $n = 3$ จากสมการที่ 4.39 เราจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในรูป Cascade form ดังนี้

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} \times \frac{1}{(s^2 + s + 1)} \quad (4.46)$$

และสามารถแปลงค่าความถี่ให้อยู่ในรูปของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอตอันดับ 3 ที่ให้เอาต์พุตแบบแถบความถี่ต่ำผ่าน และแบบแถบความถี่สูงผ่าน โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ α, β, γ ได้ดังนี้

$$H_{LP}(s) = \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 + s)} \times \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.47)$$

$$H_{HP}(s) = \frac{s}{(\Omega_0 + s)} \times \frac{s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2} \quad (4.48)$$

โดยที่ Q (Quality factor) คือค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณค่า Bandwidth (BW) ซึ่งหาค่าได้จาก

$$BW = \frac{\Omega_0}{Q} \quad (4.49)$$

Ω_0 และ Q เป็นค่าคงที่ในการออกแบบ ใช้ในการคำนวณหาค่าแบนด์วิดท์ ดังนั้นเมื่อค่า Q เปลี่ยนแปลง เป็นผลให้ค่ารัศมีของโพล (r) เปลี่ยนตามไปด้วย และผลของการเปลี่ยนค่า Q คือเมื่อค่า Q มีค่ามากจะได้ BW ที่แคบ (Narrower BW) สำหรับวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่าน และทำให้เกิด Overshoot ในกรณีของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน และวงจรกรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อค่า $Q = 0.707$ ซึ่งเป็นค่าที่ดีที่สุดที่ทำให้ ผลตอบสนองทางขนาด (Amplitude response) จะเป็น “Maximally flat” และการทำออร์เมตไลซ์ของตัวส่วนของ $H(s)$ จะเหมือนกันกับอันดับ 2 บัตเตอร์เวิร์ท โพลีโนเมียล (Butterworth polynomial) คือ

$$s^2 + \sqrt{2}s + 1 \quad (4.50)$$

ค่า Q ที่อันดับต่างๆ ได้มาจากตำแหน่งของโพล ตามสมการโพลีโนเมียลในเทอมของตัวส่วน จากฟังก์ชันถ่ายโอนวงจรรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทที่ใช้เป็นต้นแบบจากเอกสารอ้างอิงที่ [7] สามารถแสดงให้เห็นได้ตามตารางที่ 4.7 และ 4.8 ดังนี้

ตารางที่ 4.7 ค่า Q ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่อันดับค่า n เป็นจำนวนคู่

ค่า Q	อันดับ	2^{nd}	4^{th}	6^{th}	8^{th}
	Q_1		0.71	0.54	0.52
Q_2			1.31	0.71	0.60
Q_3				1.93	0.90
Q_4					2.56

ตารางที่ 4.8 ค่า Q ของวงจรรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่

ค่า Q^*	อันดับ	3^{th}	5^{th}	7^{th}	9^{th}
	Q_1		1.00	0.62	0.55
Q_2			1.62	0.80	0.65
Q_3				2.24	1.00
Q_4					2.88

ดังนั้นการออกแบบวงจรรองสัญญาณในอันดับ n ที่สูงขึ้น เราสามารถนำเทคนิคที่ได้ นำเสนอนี้ไปใช้ในการออกแบบเพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบบัตเตอร์เวิร์ท จากวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดที่ใช้เป็นต้นแบบ

4.3 ทฤษฎีทวินาม (The Binomial theorem)

ทวินามหรือไบโนเมียล คือสมการพีชคณิตที่มีเทอม 2 เทอมเช่น $(a+b)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงสมการทั่วไปที่เรียกว่า ทฤษฎีทวินามสำหรับการยกกำลังทวินามเริ่มต้นจากการคูณ หรือการกระจายกำลัง $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็มบวกใดๆ เช่น $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ จะได้ผลลัพธ์ในรูปผลรวมของพจน์ต่างๆดังแสดงในตารางที่ 4.9 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.9 การกระจายเลขชี้กำลัง

n	$(a+b)^n$	ผลที่ได้จากการกระจายกำลัง
0	$(a+b)^0$	1
1	$(a+b)^1$	$a+b$
2	$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
3	$(a+b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4	$(a+b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5	$(a+b)^5$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

จะเห็นว่าแถวล่างในตารางเริ่มต้นด้วยเทอม a^5 เมื่อพิจารณาเป็น a^5b^0 เทอมที่ตามหลังมามีเลขชี้กำลังของ a ลดลงเทอมละ 1 และเลขชี้กำลังของ b เพิ่มขึ้นเทอมละ 1 จนมีเลขชี้กำลังเป็น 5 สำหรับในแถวอื่นๆก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน อันดับต่อไปเป็นการพิจารณาสัมประสิทธิ์และการหาค่าสัมประสิทธิ์

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \quad (4.51)$$

สังเกตว่าสมการ (4.51) มีทวินาม 5 ตัวและเทอมที่อยู่ในรูปแบบที่ได้รับการขยายเป็นผลลัพธ์ของผลคูณของเทอมในทวินาม เช่นการหา a^3b^2 ในรูปการขยายของ $(a+b)^n$ นั้นโดยจะต้องคูณเทอม a จากทวินาม 3 ตัวกับเทอม b อื่นๆ จากทวินาม 2 ตัวกรณีนี้หาแฟกเตอร์ a ได้ $\binom{5}{3}$ วิธี ซึ่งก็คือจำนวนวิธีที่เลือกทวินาม 3 ตัวจากทวินาม 5 ตัวในทำนองเดียวกัน ในการหาแฟกเตอร์ b ทำได้ $\binom{5}{2}$ วิธี ซึ่งก็คือ จำนวนวิธีที่เลือกทวินาม 2 ตัวจากทวินาม 5 ตัว กรณีเช่นนี้พิสูจน์ได้ว่า

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10 \text{ และจาก } (a+b)^n \text{ ทำให้สรุปได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม } a^{n-k} b^k \text{ คือ } \binom{n}{k}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ $\binom{n}{n-k}$ จากคำอธิบายเหล่านี้ทำให้ทราบว่า ทฤษฎีทวินาม เป็นทฤษฎีสำหรับการขยาย $(a+b)^n$ ให้อยู่รูปผลบวก อีกหนึ่งทฤษฎีทวินาม โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^3 b^3 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n \\ &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^3 b^3 + \dots + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}\quad (4.52)$$

นอกจากนี้ยังเรียก $\binom{n}{k}$ ว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficient) มีอีกวิธีหนึ่งที่ใช้คำนวณสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(A+B)^n$ เมื่อ $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ และจัดแถวสามเหลี่ยมในตารางที่ 4.10 ที่เรียกว่าสามเหลี่ยมของปาสคาลดังนี้

ตารางที่ 4.10 สามเหลี่ยมของปาสคาล

n	สัมประสิทธิ์ทวินาม					
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

สิ่งที่ควรทราบในการกระจาย $(a+b)^n$ มีดังนี้

1. ผลรวมของการกระจายมี $n+1$ พจน์เสมอ
2. ผลรวมของกำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์ต้องเท่ากับ n
3. กำลังของ a ในพจน์แรกจะเริ่มจาก n แล้วลดลงไปที่ละ 1 ในแต่ละพจน์ถัดไปจนกระทั่งถึง 0
4. กำลังของ b ในพจน์แรกจะเริ่มจาก 0 แล้วเพิ่มไปที่ละ 1 ในแต่ละพจน์ถัดไปจนกระทั่งถึง n
5. สัมประสิทธิ์ของพจน์แรกเริ่มจาก $\binom{n}{0}$ และพจน์ถัดไปเป็น $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ ไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง

ที่สุดท้ายเป็น $\binom{n}{n}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. ถ้าแทน $a = 1$ และ $b = 1$ ไปในสมการที่ (4.52) จะได้ลักษณะที่สำคัญคือ

$$2^n = \binom{n}{1}a + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \quad (4.53)$$

7. พจน์ที่ $k = T_k = \binom{n}{k+1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$ แต่เพื่อความสะดวกจึงนิยมใช้พจน์ที่ $k+1$ ดังสมการที่ (4.54)

$$k+1 = T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (4.54)$$

8. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $c < k < n$ แล้ว $C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k}$

9. $C_{k,k} = C_{k+1,k} + C_{n+2,k} + \dots + C_{n,k} = C_{n+1,k+1}$

4.4 การแปลงไบลิเนียร์ด้วยการดำเนินการปาสคาลเมตริกส์

โดยแท้จริงแล้วยังมีหลักการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ อีกเช่น วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และวิธีผลต่างสืบเนื่องไปหน้า แต่สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ก็เพราะว่าเป็นเทคนิคที่ได้รับความสนใจมากเป็นพิเศษเพราะการแมป (Mapping) จะป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one mapping) ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม ซึ่งการสร้างปาสคาลเมตริกส์ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformation) ได้มาจากทฤษฎีทวินาม (Binomial theorem) และสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (4.55) ดังนี้

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (4.55)$$

เมื่อ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficients) โดยที่ $k \leq n$

จากความสัมพันธ์ระหว่างระนาบเอส (s plane) และระนาบแซด (z plane) ด้วยหลักการวิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม (Bilinear transformation) ที่มีคุณสมบัติดังสมการที่ (4.56) นี้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (4.56)$$

เมื่อได้ทำการพิจารณาวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมาน ที่เขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนได้ ตามสมการที่ (4.57) โดยในกรณีนี้ ได้ให้อันดับของตัวเศษและส่วนเท่ากันดังนี้

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i s^i}{\sum_{i=0}^N B_i s^i} \quad (4.57)$$

โดยที่ A_i และ B_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่และ N คือจำนวนอันดับ (Order)

เมื่อทำการแทนค่าสมการที่ (4.56) ลงในสมการสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานที่สมการที่ (4.57) ก็จะได้สมการฟังก์ชันถ่ายโอนวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขตั้งสมการ (4.58)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} \quad (4.58)$$

โดยที่ a_i และ b_i เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.57) และ (4.58) จะได้ว่า

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^i}{\sum_{i=0}^N B_i \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^i} = \frac{\sum_{i=0}^N A_i (1 - z^{-1})^i (1 + z^{-1})^{N-i}}{\sum_{i=0}^N B_i (1 - z^{-1})^i (1 + z^{-1})^{N-i}} \quad (4.59)$$

ในสมการที่ (4.59) ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะตัวเศษในเทอมของทฤษฎีทวินาม (Binomial theorem) เท่านั้น เพราะการกระจายตัวส่วนก็เหมือนกันดังนั้นสามารถกระจายทางคณิตศาสตร์ได้ตามสมการที่ (6.60) ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
(1-z^{-1})^i(1+z^{-1})^{N-i} &= 1 + \left[-\binom{i}{1} + \binom{N-i}{1} \right] z^{-1} + \left[\binom{i}{2} - \binom{N-i}{1} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{2} \right] z^{-2} \\
&\quad + \left[-\binom{i}{3} + \binom{N-i}{1} \binom{i}{2} - \binom{N-i}{2} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{3} \right] z^{-3} \\
&\quad + \left[\binom{i}{4} - \binom{N-i}{1} \binom{i}{3} + \binom{N-i}{2} \binom{i}{2} - \binom{N-i}{3} \binom{i}{1} + \binom{N-i}{4} \right] z^{-4} \\
&\quad + \dots + \left[\binom{i}{k} (-1)^k + \sum_{n=1}^{k-1} \binom{N-i}{n} \binom{i}{k-n} (-1)^{k-n} + \binom{N-i}{k} \right] z^{-k} \quad (4.60)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (4.60) สามารถนำมาเขียนสมการใหม่เพื่อให้รูปกระชับได้ดังสมการที่ (4.61) คือ

$$\sum_{i=0}^N A_i (1-z^{-1})^i (1+z^{-1})^{N-i} = \sum_{i=0}^N A_i \left[\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k z^{-k} \sum_{k=0}^{N-i} \binom{N-i}{k} z^{-k} \right] \quad (4.61)$$

จัดรูปสมการที่ (4.61) และเปลี่ยนตัวแปรครรขนิใหม่จะให้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.62)

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^N A_i [P_{i,j}] z^{-i} \quad (4.62)$$

เมื่อกำหนดให้ $[P_{i,j}]$ เป็นปาสกาลเมตริกซ์ (Pascal matrix)

$$\begin{aligned}
P_{i,j} &= \sum_{n=0}^i \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} ; i, j = 0, 1, \dots, N \\
&= \binom{j}{i} (-1)^i + \sum_{n=1}^{i-1} \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} + \binom{N-j}{i} \quad (4.63)
\end{aligned}$$

โดยที่ i, j คือจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์

ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์ของวงจกรองสัญญาณเชิงเลข คำนวณได้จากผลคูณระหว่างปาสกาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) กับค่าสัมประสิทธิ์ของวงจกรองสัญญาณเชิงอุปมานได้ดังสมการที่ (4.64)

$$[a_i] = [P_{i,j}] [A_i] \quad (4.64)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากสมการไปควอดที่ใช้ มีฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานอันดับที่ 2 ดังนั้นสามารถหาสมาชิกของปาสคาลเมตริกส์ที่สัมพันธ์กับอันดับของวงจรกรองได้ดังนี้

$$P_{i,j} = \sum_{n=0}^i \binom{N-j}{n} \binom{j}{i-n} (-1)^{i-n} \quad \text{เมื่อ } i, j = 0, 1, \dots, N \quad (4.65)$$

จากสมการ (4.65) สามารถนำมาพิจารณาให้ง่ายขึ้น โดยเริ่มแรกพิจารณาที่แถวแรกและคอลัมน์แรก ก่อนที่จะคำนวณสมาชิกที่เหลือดังนี้

1. สามารถหาขนาดของปาสคาลเมตริกส์ได้จาก $(N+1) \times (N+1)$
2. พิจารณาแถวแรกจากสมการ $P_{0,j} = 1$ นั่นคือแถวแรกของปาสคาลเมตริกส์จะมีค่าเป็น 1 ทุกคอลัมน์ของแถวแรก
3. พิจารณาคอลัมน์แรกได้จากสมการ $P_{i,0} = \binom{N}{i}$ นั่นคือเช่น $P_{0,0} = 1, P_{1,0} = 2, P_{2,0} = 1$ เป็นต้น
4. แล้วมาเริ่มพิจารณาสมาชิกที่เหลือของปาสคาลเมตริกส์จากสมการ (4.66) ดังนี้

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1} - P_{i-1,j} \quad (4.66)$$

เช่นสมาชิกที่ $P_{1,1}, P_{1,2}, P_{2,1}$ และ $P_{2,2}$ ของปาสคาลเมตริกส์ นั่นคือ

$$P_{1,1} = P_{0,1} - P_{0,0} - P_{1,0} = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$P_{1,2} = P_{0,2} - P_{0,1} - P_{1,1} = 1 - 2 - 0 = -1$$

$$P_{2,1} = P_{1,1} - P_{1,0} - P_{2,0} = 0 - 1 - 1 = -2$$

$$P_{2,2} = P_{1,2} - P_{1,1} - P_{2,1} = -1 - 0 - (-2) = 1$$

ดังนั้นสามารถหาค่าปาสคาลเมตริกส์อันดับ 2 จะได้ดังสมการที่ (4.68)

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} P_{0,0} = 1 & P_{0,1} = 1 & P_{0,2} = 1 \\ P_{1,0} = 2 & P_{1,1} = 0 & P_{1,2} = -2 \\ P_{2,0} = 1 & P_{2,1} = -1 & P_{2,2} = 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad i, j = 0, 1, \dots, N = 2 \quad (4.67)$$

ดังนั้นจะได้สมการของปาสคาลเมตริกส์อันดับ 2 ที่มีขนาด (3×3) ดังสมการที่ (4.68)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = 0, 1, 2 \quad (4.68)$$

4.5 การแปลง S-Z โดเมนด้วยตัวดำเนินการโพลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์

เนื่องจากสมการไบควอดที่ใช้เป็นต้นแบบ มีฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานอันดับที่ 2 ดังนั้นสามารถหาสมาชิกของปาสคาลเมตริกส์ที่สัมพันธ์กับอันดับของวงจรรองสัญญาณจากสมการ (4.68)

สำหรับการแปลง S-Z โดเมน เราจะพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรรองสัญญาณไบควอด โดยเริ่มพิจารณาที่ ฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมาน (Analog transfer function) ดังสมการที่ (4.69)

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2}{B_0 + B_1s + B_2s^2} \quad (4.69)$$

และฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเลข (Digital Transfer Function) ดังสมการที่ (4.70)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (4.70)$$

ใช้ “การแปลงโพลิเนียร์” สำหรับการแปลงระนาบ s ไป z จะใช้สมการที่ (4.71) ด้านล่างนี้ สำหรับการแทนค่าใน ฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมานสมการที่ (4.69) ในการสร้างปาสคาลเมตริกส์

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (4.71)$$

โดยนำมาทำการสร้างสมการเมตริกส์เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลข จะได้สมการสำหรับการแปลงโพลิเนียร์ด้วยปาสคาลเมตริกส์ คูณกับเมตริกส์สัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมาน ทำให้ได้สมการในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขของตัวเศษดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

และการหาค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขสำหรับการแปลงตัวส่วนคือ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

เนื่องจากฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองเชิงอุปมาน $H(s)$ ของทั้ง 5 วงจรมีตัวส่วนที่เหมือนกัน หรือมีตำแหน่งโพลเดียวกัน ดังนั้นสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวส่วน $D(z)$ ของทั้งห้าวงจรใน Z โดเมนเพียงสมการเมตริกซ์สมการเดียวก็คือจากฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมาน $H_{LP}(s)$, $H_{HP}(s)$, $H_{BP}(s)$, $H_{BS}(s)$ และ $H_{AP}(s)$ ซึ่งตัวส่วนที่เหมือนกันคือ

$$D(s) = \Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2 \quad (4.74)$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (4.74) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

สำหรับตัวเลขของฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงอุปมาน $H_{LP}(s)$, $H_{HP}(s)$, $H_{BP}(s)$, $H_{BS}(s)$ และ $H_{AP}(s)$ แต่ละตัวอย่างซึ่งมีความแตกต่างกัน สามารถนำมาสมการของตัวเลขมาพิจารณาดังนี้

$$N_{LP}(s) = \Omega_0^2 + 0s + 0s^2 \quad (4.76)$$

$$N_{HP}(s) = 0 + 0s + 1s^2 \quad (4.77)$$

$$N_{BP}(s) = 0 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + 0s^2 \quad (4.78)$$

$$N_{BS}(s) = \Omega_0^2 + 0s + 1s^2 \quad (4.79)$$

$$N_{AP}(s) = \Omega_0^2 - \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2 \quad (4.80)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้นจากสมการ (4.76) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

จากสมการ (4.77) ก็สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

จากสมการ (4.78) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

จากสมการ (4.79) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

และจากสมการ (4.80) สามารถนำมาเขียนในรูปสมการเมตริกส์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 ตัวอย่างและผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ

ตัวอย่างการออกแบบเป็นการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไบควอดไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข ด้วยเทคนิคตัวแปรไบควอดโดยใช้ตัวดำเนินการโบลีเนียน์ปาสกาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ซึ่งได้นำมาใช้ออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน แถบความถี่ผ่าน กำจัดแถบความถี่ และผ่านทุกความถี่ ที่อันดับต่างๆ แบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่มีค่าอันดับ n เป็นจำนวนคู่ (Even order) และการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน ที่อันดับต่างๆแบบบัตเตอร์เวิร์ท ที่มีค่าอันดับ n เป็นจำนวนคี่ (Odd order)

4.6.1 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับที่ $n = 2$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไบควอด ที่ใช้เป็นต้นแบบ อันดับค่า n เป็นจำนวนคู่ ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับ 2 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$ และ $Q = 0.707$

ในการออกแบบวงจรกรองไบควอดนั้น จะเป็นการกำหนดค่าของ Q และ Ω_0 ดังนั้น พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ในโดเมนอนาล็อก (Ω) และความถี่ในโดเมนดิจิทัล (ω) จากสมการที่ (3.24) ด้านล่าง

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$

เมื่อ

$$T_s = \frac{1}{f_s} \text{ และ } \omega_0 = 2\pi f_0$$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right)$$

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s}$$

จากสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการไบควอดพาราเมตริก (4.36)

$$H_{Bi}(s) = \frac{\alpha\Omega_0^2 + \beta\left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + \gamma s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right)s + s^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษานั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัดสมการทั้งตัวเศษและส่วนให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6.1.1 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21004 \\ -0.23632 \\ 0.55364 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านคือ

$$H_{LP}(z) = \frac{0.2747 + 0.5494z^{-1} + 0.2747z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

4.6.1.2 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 2 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21004 \\ -0.23632 \\ 0.55364 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{HP}(z) = \frac{0.2747 - 0.6230z^{-1} + 0.3115z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

4.6.1.3 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 2

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.3282 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3282 \\ 0 \\ -1.3282 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21004 \\ -0.23632 \\ 0.55364 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนลำดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านคือ

$$H_{BP}(z) = \frac{0.4138 - 0.4138z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

4.6.1.4 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 2

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.88184 \\ -0.23632 \\ 1.88184 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21004 \\ -0.23632 \\ 0.55364 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนลำดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบก้ำจัดแถบความถี่คือ

$$H_{BS}(z) = \frac{0.5862 - 0.0736z^{-1} + 0.5862z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.1.5 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 2 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ -1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55536 \\ -0.23632 \\ 3.21004 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.3282 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21004 \\ -0.23632 \\ 0.55364 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนลำดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่คือ

$$H_{AP}(z) = \frac{0.1725 - 0.0736z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

4.6.2 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขลำดับที่ $n = 4$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไปควอดต์ ที่ใช้เป็นต้นแบบ อันดับค่า n เป็นจำนวนคู่ ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับดับ 4 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$, $Q_1 = 0.541$, $Q_2 = 1.306$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right) \\ \Omega_0 &= \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการไปควอดพารามเมตริกซึ่งจัดให้อยู่ในรูป Cascade form

$$H_{Bi}(s) = H_{Bi1}(s)H_{Bi2}(s)$$

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วนให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไปลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_2 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6.2.1 กรณีการออกแบของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61764 \\ -0.23632 \\ 0.14604 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP1}(z)$ คือ

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.2385 + 0.4769z^{-1} + 0.2385z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60094 \\ -0.23632 \\ 1.16274 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP2}(z)$ คือ

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.3393 + 0.6787z^{-1} + 0.3393z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4 คือ

$$H_{LP}(z) = \frac{0.2435 + 0.4871z^{-1} + 0.2435z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}} \times \frac{0.3393 + 0.6787z^{-1} + 0.3393z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

$$H_{LP}(z) = \frac{0.0826 + 0.3306z^{-1} + 0.4959z^{-2} + 0.3306z^{-3} + 0.0826z^{-4}}{1 - 0.1562z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.0328z^{-3} + 0.0177z^{-4}}$$

4.6.2.2 กรณีการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 4 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{BP1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61764 \\ -0.23632 \\ 0.14604 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP1}(z)$ คือ

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.2762 - 0.5524z^{-1} + 0.2762z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60094 \\ -0.23632 \\ 1.16274 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP2}(z)$ คือ

$$H_{HP2}(z) = \frac{0.3848 - 0.7696z^{-1} + 0.3848z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 4 คือ

$$H_{HP}(z) = \frac{0.2762 - 0.5524z^{-1} + 0.2762z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}} \times \frac{0.3848 - 0.7696z^{-1} + 0.3848z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{0.1063 - 0.4251z^{-1} + 0.6377z^{-2} - 0.4251z^{-3} + 0.1063z^{-4}}{1 - 0.1562z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.0328z^{-3} + 0.0177z^{-4}}$$

4.6.2.3 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 4

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7358 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7358 \\ 0 \\ -1.7358 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61764 \\ -0.23632 \\ 0.14604 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่าน $H_{BP1}(z)$ คือ

$$H_{BP1}(z) = \frac{0.4803 - 0.4803z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7191 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7191 \\ 0 \\ -0.7191 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60094 \\ -0.23632 \\ 1.16274 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่าน $H_{BP2}(z)$ คือ

$$H_{BP2}(z) = \frac{0.2758 - 0.2758z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 4 คือ

$$H_{BP}(z) = \frac{0.4803 - 0.4803z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}} \times \frac{0.2758 - 0.2758z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

$$H_{BP}(z) = \frac{0.1325 - 0.2650z^{-2} + 0.1325z^{-4}}{1 - 0.1562z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.0328z^{-3} + 0.0177z^{-4}}$$

4.6.2.4 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 4

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.88184 \\ -0.23632 \\ 1.18884 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61764 \\ -0.23632 \\ 0.14604 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่ $H_{BS1}(z)$ คือ

$$H_{BS1}(z) = \frac{0.5197 - 0.0653z^{-1} + 0.5197z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B12}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.88184 \\ -0.23632 \\ 1.88184 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60094 \\ -0.23632 \\ 1.16274 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่ $H_{BS2}(z)$ คือ

$$H_{BS2}(z) = \frac{0.7242 - 0.0909z^{-1} + 0.7242z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 4 คือ

$$H_{BS}(z) = \frac{0.5197 - 0.0653z^{-1} + 0.5197z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}} \times \frac{0.7242 - 0.0909z^{-1} + 0.7242z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

$$H_{BS}(z) = \frac{0.3764 - 0.0945z^{-1} + 0.7587z^{-2} - 0.0945z^{-3} + 0.3764z^{-4}}{1 - 0.1562z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.0328z^{-3} + 0.0177z^{-4}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.2.5 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 4 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{B1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ -1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14604 \\ -0.23632 \\ 3.61764 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.7358 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.61764 \\ -0.23632 \\ 0.14604 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่ $H_{AP1}(z)$ คือ

$$H_{AP1}(z) = \frac{0.0394 - 0.0653z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ -0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1627 \\ -0.23632 \\ 2.60094 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 0.7191 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.60094 \\ -0.23632 \\ 1.16274 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่ $H_{AP2}(z)$ คือ

$$H_{AP2}(z) = \frac{0.4483 - 0.0909z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 4 คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{AP}(z) = \frac{0.0394 - 0.0653z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0653z^{-1} + 0.0394z^{-2}} \times \frac{0.4483 - 0.0909z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0909z^{-1} + 0.4483z^{-2}}$$

$$H_{AP}(z) = \frac{0.0177 - 0.0328z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.1562z^{-3} + z^{-4}}{1 - 0.1562z^{-1} + 0.4937z^{-2} - 0.0328z^{-3} + 0.0177z^{-4}}$$

4.6.3 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขลำดับที่ $n = 6$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไบควอด ที่ใช้ต้นแบบอันดับค่า n เป็นจำนวนคู่ ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับคี่ 6 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$, $Q_1 = 0.517$, $Q_2 = 0.707$, $Q_3 = 1.932$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right)$$

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s}$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการไบควอดพาราเมตริกซึ่งจัดให้อยู่ในรูป Cascade form

$$H_{Bi}(s) = H_{Bi1}(s)H_{Bi2}(s)H_{Bi3}(s)$$

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วนให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วนให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_2 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงโพลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_3 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6.3.1 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6982 \\ -0.2364 \\ 0.0654 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP1}(z)$ คือ

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.2385 + 0.4769z^{-1} + 0.2385z^{-2}}{1 - 0.639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2101 \\ -0.2364 \\ 0.5535 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP2}(z)$ คือ

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.2747 + 0.5494z^{-1} + 0.2747z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88184 \\ 1.76368 \\ 0.88184 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3679 \\ -0.2364 \\ 1.3957 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP3}(z)$ คือ

$$H_{LP3}(z) = \frac{0.3724 + 0.7448z^{-1} + 0.3724z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6 คือ

$$H_{LP}(z) = \frac{0.2385 + 0.4769z^{-1} + 0.2385z^{-2}}{1 - 0.639z^{-1} + 0.0177z^{-2}} \times \frac{0.2747 + 0.5494z^{-1} + 0.2747z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}} \times \frac{0.3724 + 0.7448z^{-1} + 0.3724z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

$$H_{LP}(z) = \frac{0.0244 + 0.1464z^{-1} + 0.3659z^{-2} + 0.4879z^{-3} + 0.3659z^{-4} + 0.1464z^{-5} + 0.0244z^{-6}}{1 - 0.2373z^{-1} + 0.7981z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.1191z^{-4} - 0.0076z^{-5} + 0.0018z^{-6}}$$

4.6.3.2 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 6

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6982 \\ -0.2364 \\ 0.0654 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP1}(z)$ คือ

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.2704 - 0.5408z^{-1} + 0.2704z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

และ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2101 \\ -0.2364 \\ 0.5535 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP2}(z)$ คือ

$$H_{HP2}(z) = \frac{0.3115 - 0.6230z^{-1} + 0.3115z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ คือ

และ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3679 \\ -0.2364 \\ 1.3957 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP3}(z)$ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{HP3}(z) = \frac{0.4223 - 0.8446z^{-1} + 0.4223z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 6 คือ

$$H_{HP}(z) = \frac{0.2704 - 0.5408z^{-1} + 0.2704z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}} \times \frac{0.3115 - 0.6230z^{-1} + 0.3115z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}} \times \frac{0.4223 - 0.8446z^{-1} + 0.4223z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{0.0356 - 0.2134z^{-1} + 0.5336z^{-2} - 0.7115z^{-3} + 0.5336z^{-4} - 0.2134z^{-5} + 0.0356z^{-6}}{1 - 0.2373z^{-1} + 0.7981z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.1191z^{-4} - 0.0076z^{-5} + 0.0018z^{-6}}$$

4.6.3.3 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 6

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8164 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8164 \\ 0 \\ -1.8164 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6982 \\ -0.2364 \\ 0.0654 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่าน $H_{BP1}(z)$ คือ

$$H_{BP1}(z) = \frac{0.4911 - 0.4911z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.3283 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3283 \\ 0 \\ -1.3283 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2101 \\ -0.2364 \\ 0.5535 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่าน $H_{BP2}(z)$ คือ

$$H_{BP2}(z) = \frac{0.4138 - 0.4138z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ คือ

และ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4861 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4861 \\ 0 \\ -0.4861 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3679 \\ -0.2364 \\ 1.3957 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่าน $H_{BP3}(z)$ คือ

$$H_{BP3}(z) = \frac{0.2053 - 0.2053z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบแถบความถี่ผ่านอันดับ 6 คือ

$$H_{BP}(z) = \frac{0.4911 - 0.4911z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}} \times \frac{0.4138 - 0.4138z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}} \times \frac{0.2053 - 0.2053z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

$$H_{BP}(z) = \frac{0.0417 - 0.1251z^{-2} + 0.1251z^{-4} - 0.0417z^{-6}}{1 - 0.2373z^{-1} + 0.7981z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.1191z^{-4} - 0.0076z^{-5} + 0.0018z^{-6}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.3.4 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 6 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{B1}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8818 \\ -0.2364 \\ 1.8818 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6982 \\ -0.2364 \\ 0.0654 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่ $H_{BS1}(z)$ คือ

$$H_{BS1}(z) = \frac{0.5089 - 0.0639z^{-1} + 0.5089z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B2}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8818 \\ -0.2364 \\ 1.8818 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2101 \\ -0.2364 \\ 0.5535 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่ $H_{BS2}(z)$ คือ

$$H_{BS2}(z) = \frac{0.5862 - 0.0736z^{-1} + 0.5862z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B3}(s)$ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8818 \\ -0.2364 \\ 1.8818 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3679 \\ -0.2364 \\ 1.3957 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่ $H_{BS3}(z)$ คือ

$$H_{BS3}(z) = \frac{0.7947 - 0.0998z^{-1} + 0.7947z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบกำจัดแถบความถี่อันดับ 6 คือ

$$H_{BS}(z) = \frac{0.5089 - 0.0639z^{-1} + 0.5089z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}} \times \frac{0.5862 - 0.0736z^{-1} + 0.5862z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}} \times \frac{0.7947 - 0.0998z^{-1} + 0.7947z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

$$H_{BS}(z) = \frac{0.2371 - 0.0893z^{-1} + 7224z^{-2} - 0.1791z^{-3} + 0.7224z^{-4} - 0.0893z^{-5} - 0.2371z^{-6}}{1 - 0.2373z^{-1} + 0.7981z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.1191z^{-4} - 0.0076z^{-5} + 0.0018z^{-6}}$$

4.6.3.5 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 6

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{B1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ -1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0654 \\ -0.2364 \\ 3.6982 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.8164 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6982 \\ -0.2364 \\ 0.0654 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่ $H_{AP1}(z)$ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{AP1}(z) = \frac{0.0177 - 0.0639z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B12}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ -1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5535 \\ -0.2364 \\ 3.2101 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 1.3283 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2101 \\ -0.2364 \\ 0.5535 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่ $H_{AP2}(z)$ คือ

$$H_{AP2}(z) = \frac{0.1725 - 0.0736z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B13}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ -\Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ -0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3957 \\ -0.2364 \\ 2.3679 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8818 \\ 0.4861 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3679 \\ -0.2364 \\ 1.3957 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่ $H_{AP3}(z)$ คือ

$$H_{AP3}(z) = \frac{0.5859 - 0.0998z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบผ่านทุกความถี่อันดับ 6 คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{AP}(z) = \frac{0.0177 - 0.0639z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0639z^{-1} + 0.0177z^{-2}} \times \frac{0.1725 - 0.0736z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0736z^{-1} + 0.1725z^{-2}} \times \frac{0.5859 - 0.0998z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.0998z^{-1} + 0.5895z^{-2}}$$

$$H_{AP}(z) = \frac{0.0018 - 0.0076z^{-1} + 0.1191z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.7981z^{-4} - 0.2373z^{-5} + z^{-6}}{1 - 0.2373z^{-1} + 0.7981z^{-2} - 0.1128z^{-3} + 0.1191z^{-4} - 0.0076z^{-5} + 0.0018z^{-6}}$$

4.6.4 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขลำดับที่ $n = 3$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการไบควอดต ที่ใช้เป็นตัวแบบอันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับ 3 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$ และ $Q = 1$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right)$$

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s}$$

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณแบบบัตเตอร์เวิร์ท

$$H_n(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}$$

สามารถที่จะแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป Cascade form ได้ดังนี้

$$H_n(s) = \frac{1}{(s+1)} \prod_{i=1, n \neq 1}^{(n-1)/2} \frac{1}{a_{2i} s^2 + a_{1i} s + a_0}$$

สำหรับกรณีที่เราเลือกวงจรกรองสัญญาณบัตเตอร์เวิร์ทต้นแบบอันดับ $n = 3$ เราจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนในรูป Cascade form ดังนี้

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} \times \frac{1}{(s^2 + s + 1)} \quad (4.46)$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการไบควอดตพาราเมตริกซึ่งจัดให้อยู่ในรูป Cascade form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{Bi}(s) = H_{Bi1}(s)H_{Bi2}(s)$$

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0 \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6.4.1 กรณีการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0.9391 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP1}(s)$ คือ

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.821 \\ -0.2362 \\ 0.9428 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP2}(s)$ คือ

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.3126 + 0.6252z^{-1} + 0.3126z^{-2}}{1 - 0.0837z^{-1} + 0.3342z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3 คือ

$$H_{LP}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}} \times \frac{0.3126 + 0.6252z^{-1} + 0.3126z^{-2}}{1 - 0.0837z^{-1} + 0.3342z^{-2}}$$

$$H_{LP}(z) = \frac{0.1514 + 0.4542z^{-1} + 0.4542z^{-2} + 0.1514z^{-3}}{1 - 0.1152z^{-1} + 0.3368z^{-2} - 0.0105z^{-3}}$$

4.6.4.2 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 3

จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bil}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP1}(s)$ คือ

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในเทอมของ $H_{B12}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.821 \\ -0.2362 \\ 0.9428 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP2}(s)$ คือ

$$H_{HP2}(z) = \frac{0.3545 - 0.7090z^{-1} + 0.3545z^{-2}}{1 - 0.0838z^{-1} + 0.3342z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 3 คือ

$$H_{HP}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}} \times \frac{0.3545 - 0.7090z^{-1} + 0.3545z^{-2}}{1 - 0.0838z^{-1} + 0.3342z^{-2}}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{0.1828 - 0.5485z^{-1} + 0.5485z^{-2} + 0.1.828z^{-3}}{1 - 0.1152z^{-1} + 0.3368z^{-2} - 0.0105z^{-3}}$$

4.6.5 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในลำดับที่ $n = 5$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการ ไบควอดต ที่ใช้เป็นต้นแบบ อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับ 5 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$ และ $Q_1 = 0.62$, $Q_2 = 1.62$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right)$$

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s}$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการไบควอดตพารามตริกซึ่งจัดให้อยู่ในรูป Cascade form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{Bi}(s) = H_{Bi1}(s)H_{Bi2}(s)H_{Bi3}$$

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_2 \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.6.5.1 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0.9391 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP1}(s)$ คือ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

ในเทอมของ $H_{B12}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.5147 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3966 \\ -0.2362 \\ 0.3672 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP2}(s)$ คือ

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.2596 + 0.5193z^{-1} + 0.2596z^{-2}}{1 - 0.0695z^{-1} + 0.1081z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B13}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.5797 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4616 \\ -0.2362 \\ 1.3022 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP3}(s)$ คือ

$$H_{LP3}(z) = \frac{0.3583 + 0.7165z^{-1} + 0.3583z^{-2}}{1 - 0.0960z^{-1} + 0.5290z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5 คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{LP}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}} \times \frac{0.2596 + 0.5193z^{-1} + 0.2596z^{-2}}{1 - 0.0695z^{-1} + 0.1081z^{-2}} \times \frac{0.3583 + 0.7165z^{-1} + 0.3583z^{-2}}{1 - 0.0960z^{-1} + 0.5290z^{-2}}$$

$$H_{LP}(z) = \frac{0.0450 + 0.2252z^{-1} + 0.4505z^{-2} + 0.4505z^{-3} + 0.2252z^{-4} + 0.0450z^{-5}}{1 - 0.1970z^{-1} + 0.6490z^{-2} - 0.0674z^{-3} + 0.0587z^{-4} - 0.0018z^{-5}}$$

4.6.5.2 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 5 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{B1}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP1}(s)$ คือ

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

ในเทอมของ $H_{B2}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.5147 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3966 \\ -0.2362 \\ 0.3672 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP2}(s)$ คือ

$$H_{HP2}(z) = \frac{0.2944 - 0.5888z^{-1} + 0.2944z^{-2}}{1 - 0.0695z^{-1} + 0.1081z^{-2}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในเทอมของ $H_{B3}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.5797 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4616 \\ -0.2362 \\ 1.3022 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP3}(s)$ คือ

$$H_{HP3}(z) = \frac{0.4063 - 0.8125z^{-1} + 0.4063z^{-2}}{1 - 0.0960z^{-1} + 0.5290z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 5 คือ

$$H_{HP}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1} + 0.2944 - 0.5888z^{-1} + 0.2944z^{-2}}{1 - 0.0314z^{-1} + 0.1081z^{-2}} \times \frac{0.4063 - 0.8125z^{-1} + 0.4063z^{-2}}{1 - 0.0960z^{-1} + 0.5290z^{-2}}$$

$$H_{HP}(z) = \frac{0.0617 - 0.03084z^{-1} + 0.6169z^{-2} - 0.6169z^{-3} + 0.03084z^{-4} - 0.0617z^{-5}}{1 - 0.1970z^{-1} + 0.6490z^{-2} - 0.0674z^{-3} + 0.0587z^{-4} - 0.0018z^{-5}}$$

4.6.6 ตัวอย่างการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขลำดับที่ $n = 7$

พิจารณาการแปลงวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานจากสมการ ไบควอด ที่ใช้เป็นต้นแบบ อันดับค่า n เป็นจำนวนคี่ไปเป็นวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขอันดับ 7 โดยกำหนดให้ $f_0 = 60\text{Hz}$, $f_s = 250\text{Hz}$ และ $Q_1 = 0.55$, $Q_2 = 0.80$, $Q_3 = 2.24$

ดังนั้นจะได้

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_0}{f_s}\right)$$

$$\Omega_0 = \tan\left(\frac{60\pi}{250}\right) = 0.9391 \text{ rad/s}$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของสมการ ไบควอดพารามตริกซึ่งจัดให้อยู่ในรูป Cascade form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{Bi}(s) = H_{Bi1}(s)H_{Bi2}(s)H_{Bi3}H_{Bi4}$$

ในเทอมของ $H_{Bi1}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0 \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_1 \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_2 \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ในเทอมของ $H_{Bi4}(s)$ สามารถจัดสมการทั้งตัวเศษและส่วน ให้อยู่ในรูปสำหรับการแปลงไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\Omega_0^2 \\ \beta\Omega_0/Q_3 \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.6.1 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{B1}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0.9391 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP1}(s)$ คือ

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

ในเทอมของ $H_{B2}(s)$ คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix} \\ \text{และ} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7075 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5894 \\ -0.2362 \\ 0.1744 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP2}(s)$ คือ

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.2457 + 0.4914z^{-1} + 0.2457z^{-2}}{1 - 0.0658z^{-1} + 0.0485z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{B3}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ
$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.1738 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0557 \\ -0.2362 \\ 0.7081 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP3}(s)$ คือ

$$H_{LP3}(z) = \frac{0.2886 + 0.5773z^{-1} + 0.28866z^{-2}}{1 - 0.0773z^{-1} + 0.2317z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi4}(s)$ คือ

และ
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7638 \\ 0.8819 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.4192 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3011 \\ -0.2362 \\ 1.4627 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน $H_{LP4}(s)$ คือ

$$H_{LP4}(z) = \frac{0.3833 + 0.7665z^{-1} + 0.3833z^{-2}}{1 - 0.1026z^{-1} + 0.6356z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7 คือ

$$H_{LP}(z) = \frac{0.4843 + 0.4843z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}} \times \frac{0.2457 + 0.4914z^{-1} + 0.2457z^{-2}}{1 - 0.0658z^{-1} + 0.0485z^{-2}}$$

$$\times \frac{0.2886 + 0.5773z^{-1} + 0.28866z^{-2}}{1 - 0.0773z^{-1} + 0.2317z^{-2}} \times \frac{0.3833 + 0.7665z^{-1} + 0.3833z^{-2}}{1 - 0.1026z^{-1} + 0.6356z^{-2}}$$

$$H_{LP}(z) = \frac{0.0132 + 0.0921z^{-1} + 0.2763z^{-2} + 0.4606z^{-3} + 0.4606z^{-4} + 0.2763z^{-5} + 0.0921z^{-6} - 0.0132z^{-7}}{1 - 0.2773z^{-1} + 0.9435z^{-2} - 0.1687z^{-3} + 0.1990z^{-4} - 0.0194z^{-5} + 0.0076z^{-6} - 0.0002z^{-7}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.5.2 กรณีการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 7 จากตารางที่ 4.4 สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ เพราะฉะนั้น

ในเทอมของ $H_{BP1}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9391 \\ -0.0609 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP1}(s)$ คือ

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi2}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.7075 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5894 \\ -0.2362 \\ 0.1744 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP2}(s)$ คือ

$$H_{HP2}(z) = \frac{0.2786 - 0.5572z^{-1} + 0.2786z^{-2}}{1 - 0.0658z^{-1} + 0.0486z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{Bi3}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 1.1738 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0557 \\ -0.2362 \\ 0.7081 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP3}(s)$ คือ

$$H_{HP3}(z) = \frac{0.3273 - 0.6545z^{-1} + 0.3273z^{-2}}{1 - 0.0773z^{-1} + 0.2317z^{-2}}$$

ในเทอมของ $H_{BI4}(s)$ คือ

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \Omega_0/Q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8819 \\ 0.4192 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3011 \\ -0.2362 \\ 1.4627 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่าน $H_{HP4}(s)$ คือ

$$H_{HP4}(z) = \frac{0.4346 - 0.8692z^{-1} + 0.4346z^{-2}}{1 - 0.1027z^{-1} + 0.6356z^{-2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่สูงผ่านอันดับ 7 คือ

$$H_{HP}(z) = \frac{0.5157 - 0.5157z^{-1}}{1 - 0.0314z^{-1}} \times \frac{0.2786 - 0.5572z^{-1} + 0.2786z^{-2}}{1 - 0.0658z^{-1} + 0.0486z^{-2}}$$

$$\times \frac{0.3273 - 0.6545z^{-1} + 0.3273z^{-2}}{1 - 0.0773z^{-1} + 0.2317z^{-2}} \times \frac{0.4346 - 0.8692z^{-1} + 0.4346z^{-2}}{1 - 0.1027z^{-1} + 0.6356z^{-2}}$$

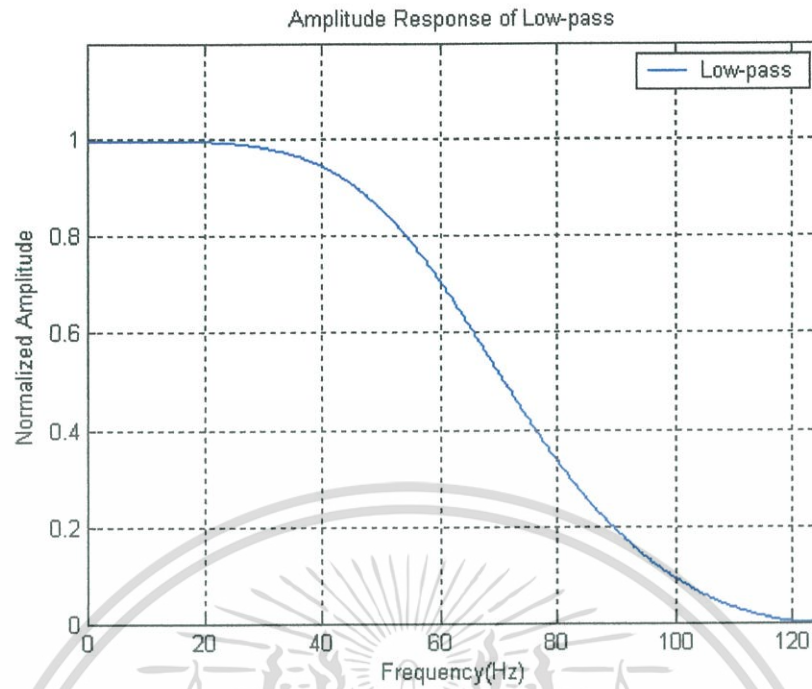
$$H_{HP}(z) = \frac{0.0204 - 0.1430z^{-1} + 0.4291z^{-2} - 0.7152z^{-3} + 0.7152z^{-4} - 0.4291z^{-5} + 0.1430z^{-6} - 0.0204z^{-7}}{1 - 0.2773z^{-1} + 0.9435z^{-2} - 0.1687z^{-3} + 0.1990z^{-4} - 0.0194z^{-5} + 0.0076z^{-6} - 0.0002z^{-7}}$$

จากผลการออกแบบวงจรกรองสัญญาณ เราสามารถนำค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากคำนวณมา

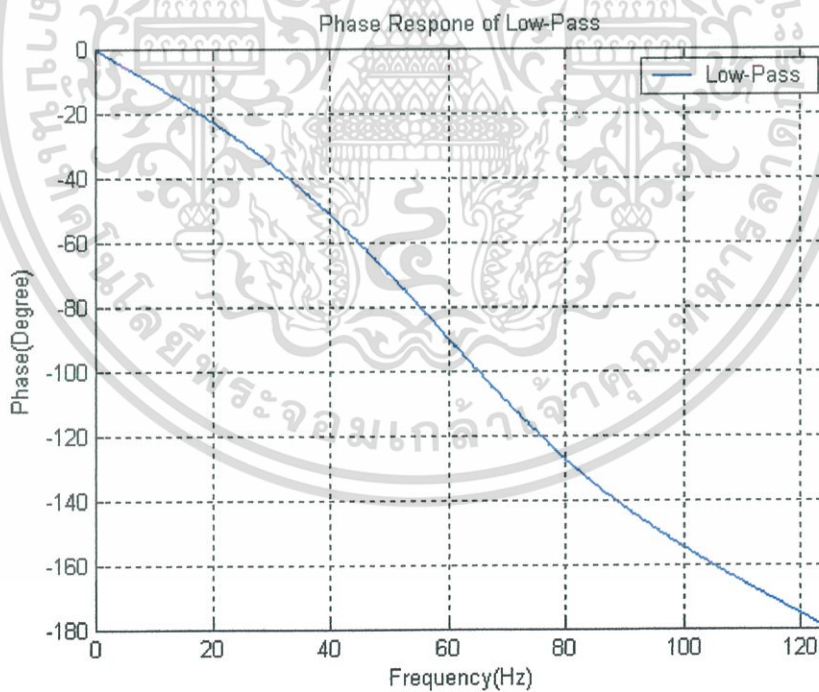
วิเคราะห์และจำลองผล เพื่อดูผลตอบสนองทางขนาดโดยใช้โปรแกรม MATLAB ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

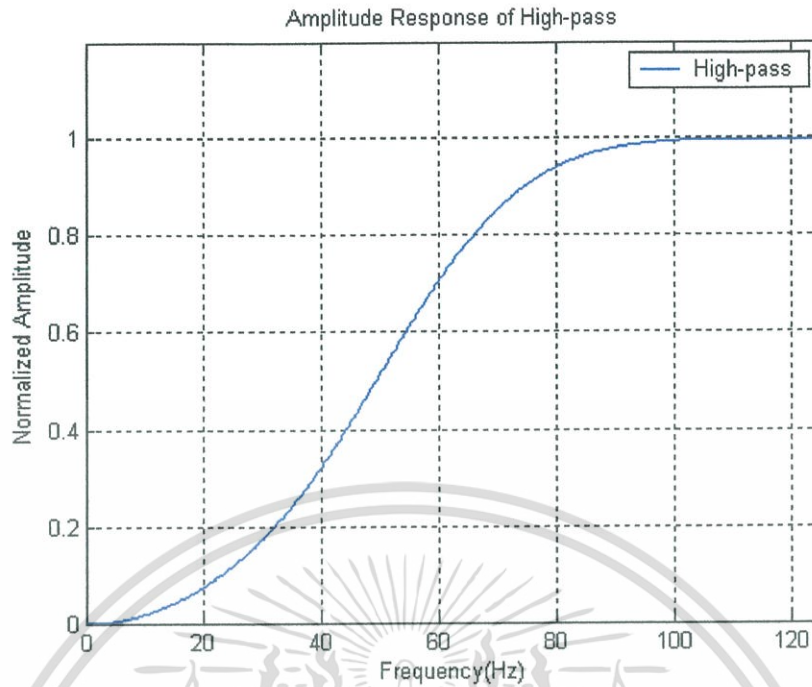


รูปที่ 4.6 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2

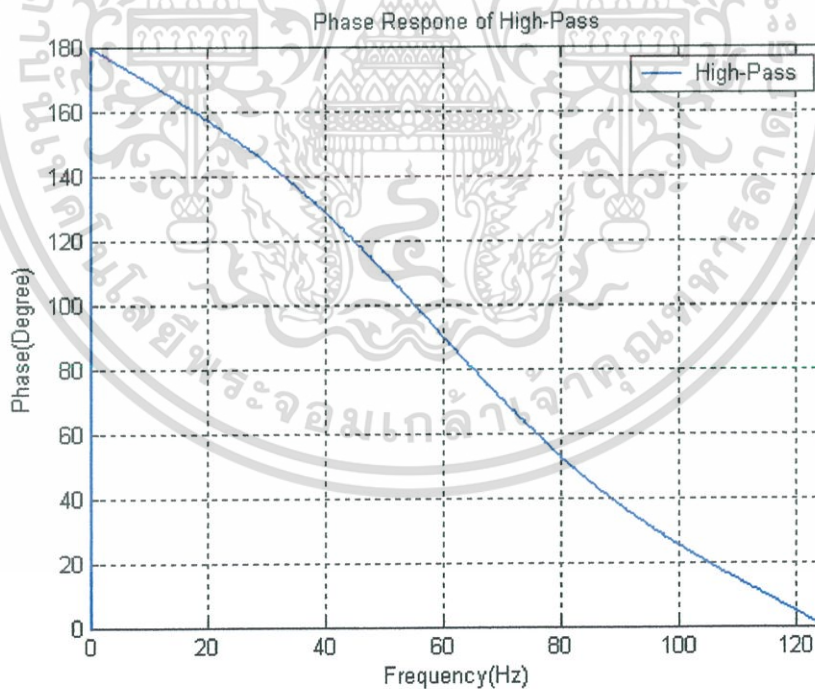


รูปที่ 4.7 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

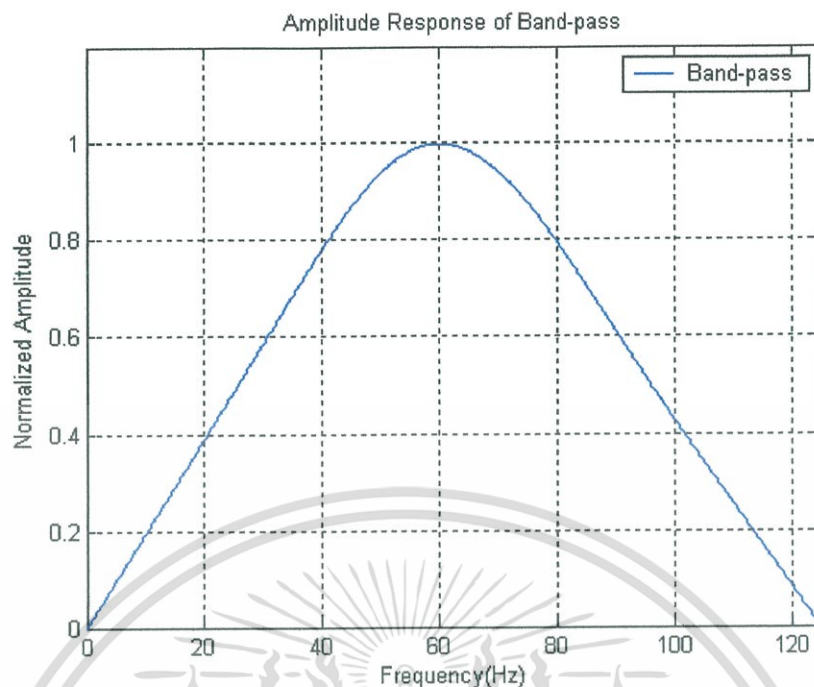


รูปที่ 4.8 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 2

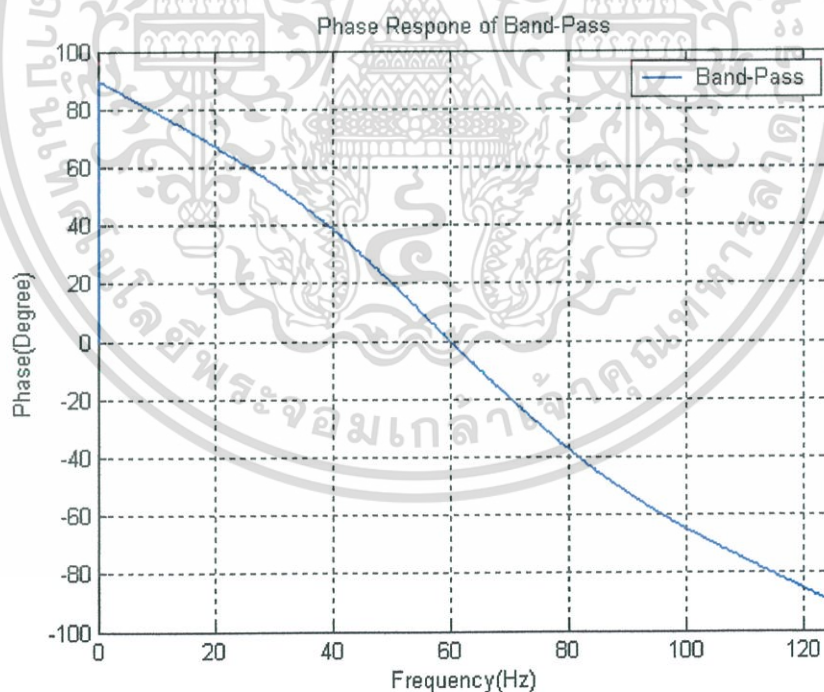


รูปที่ 4.9 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

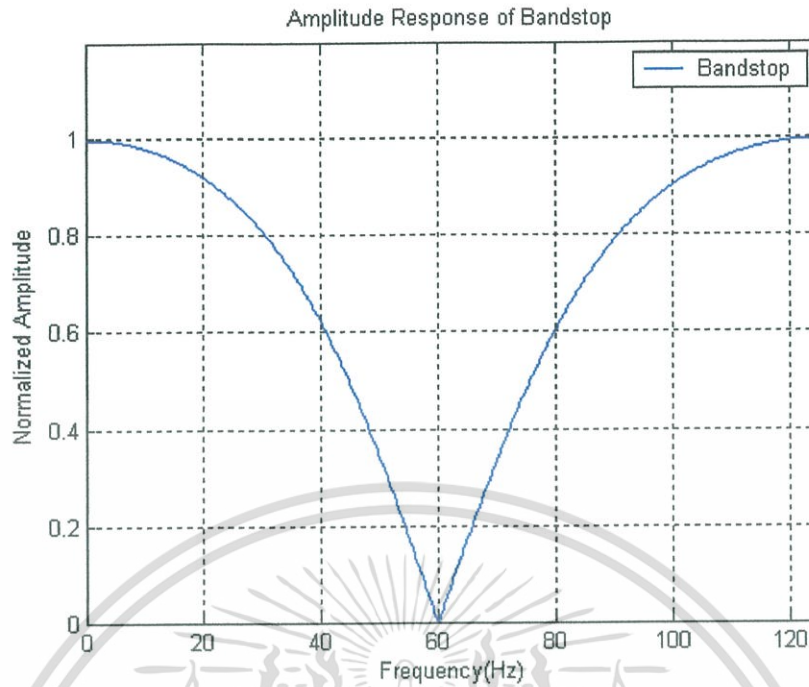


รูปที่ 4.10 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 2

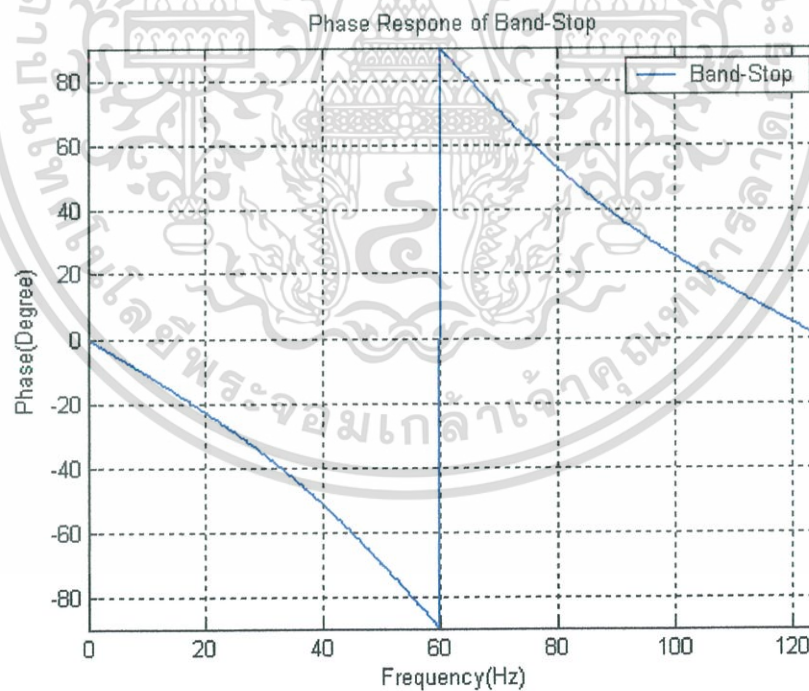


รูปที่ 4.11 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

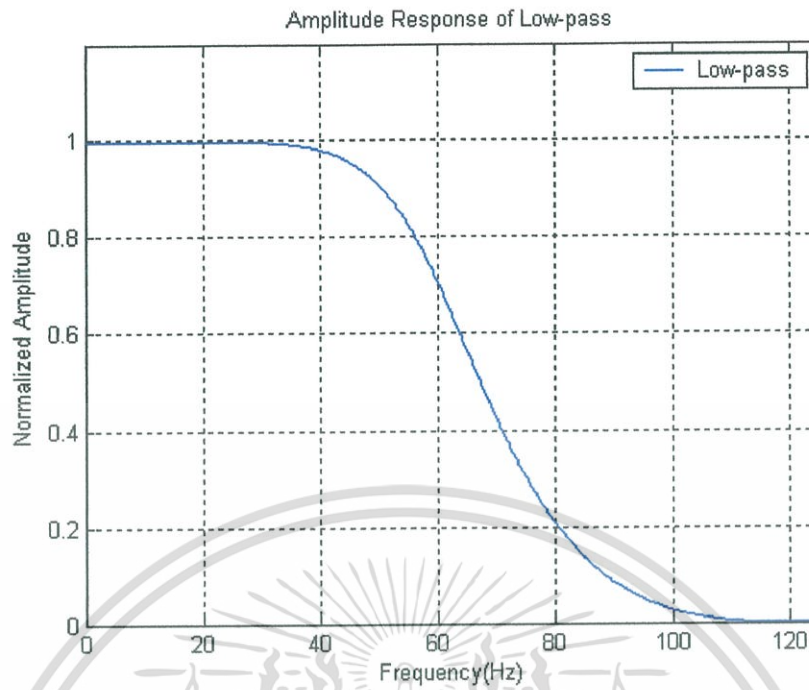


รูปที่ 4.12 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่อันดับ 2

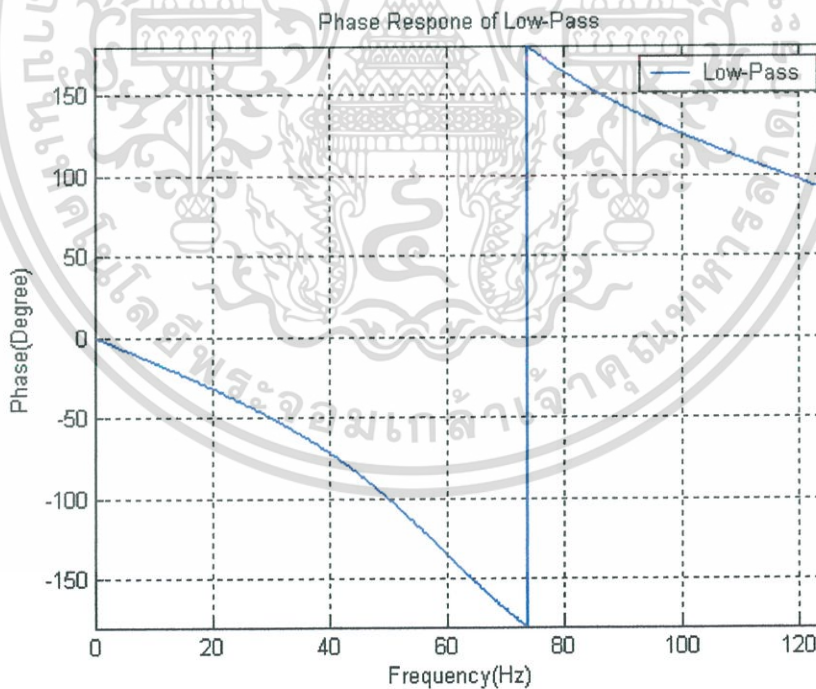


รูปที่ 4.13 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่อันดับ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

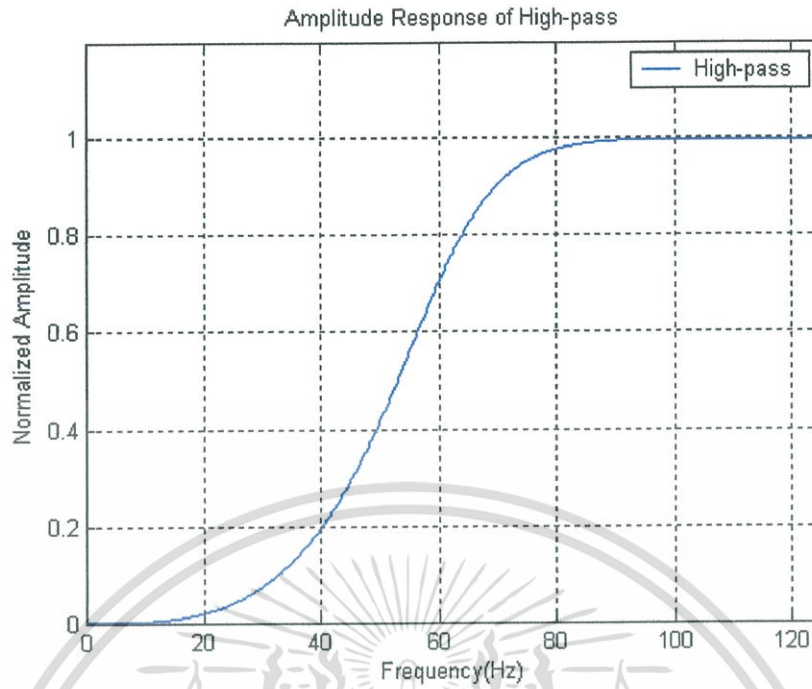


รูปที่ 4.14 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3

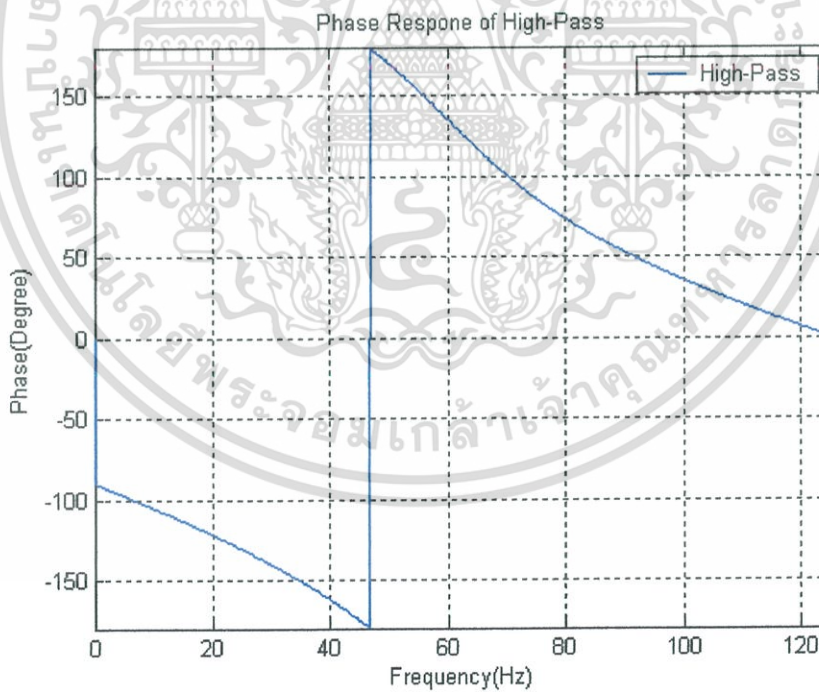


รูปที่ 4.15 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

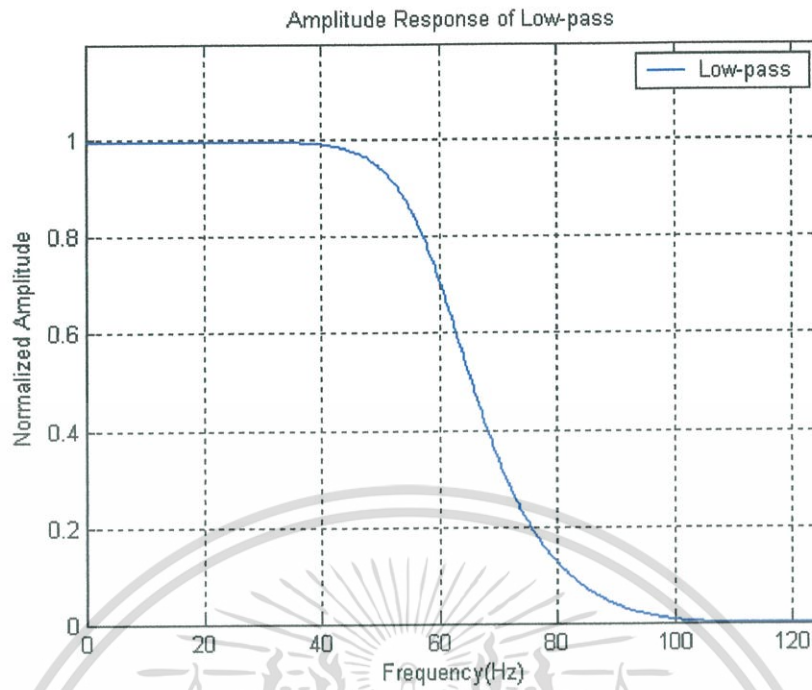


รูปที่ 4.16 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 3

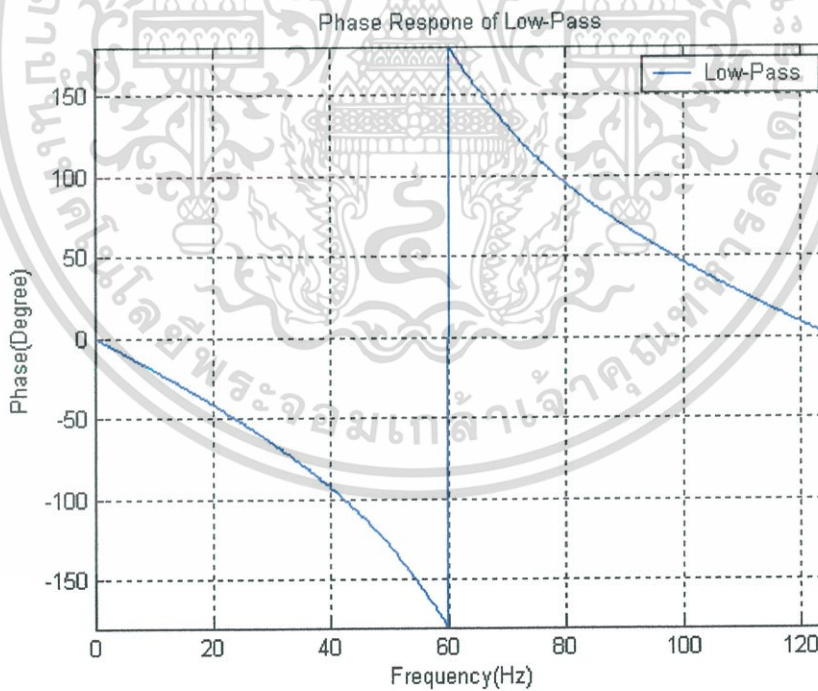


รูปที่ 4.17 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

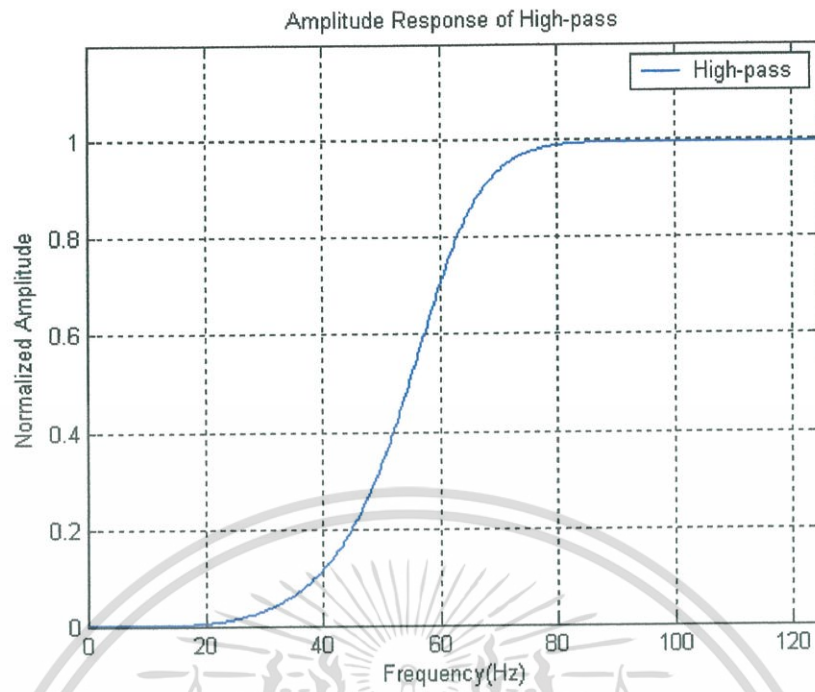


รูปที่ 4.18 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

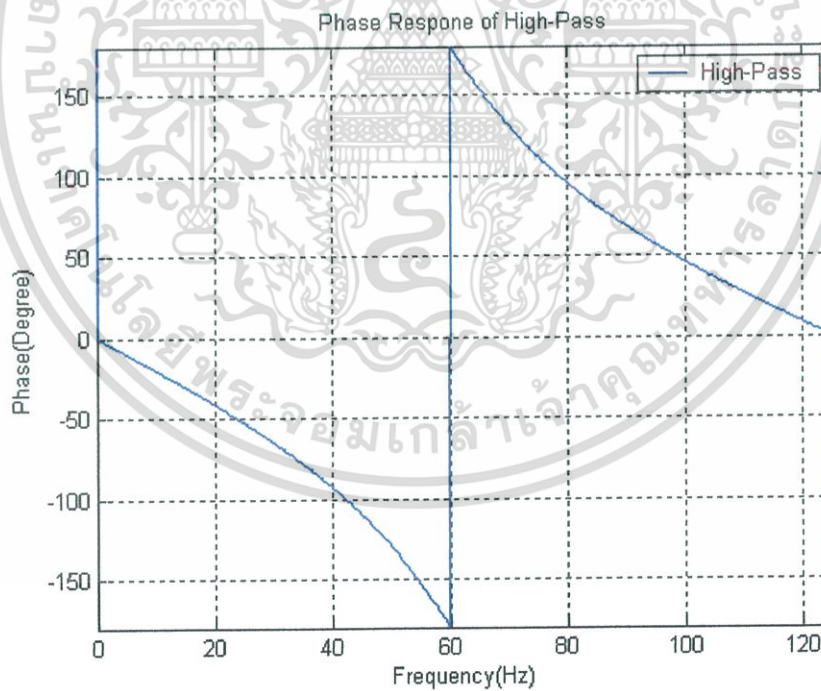


รูปที่ 4.19 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

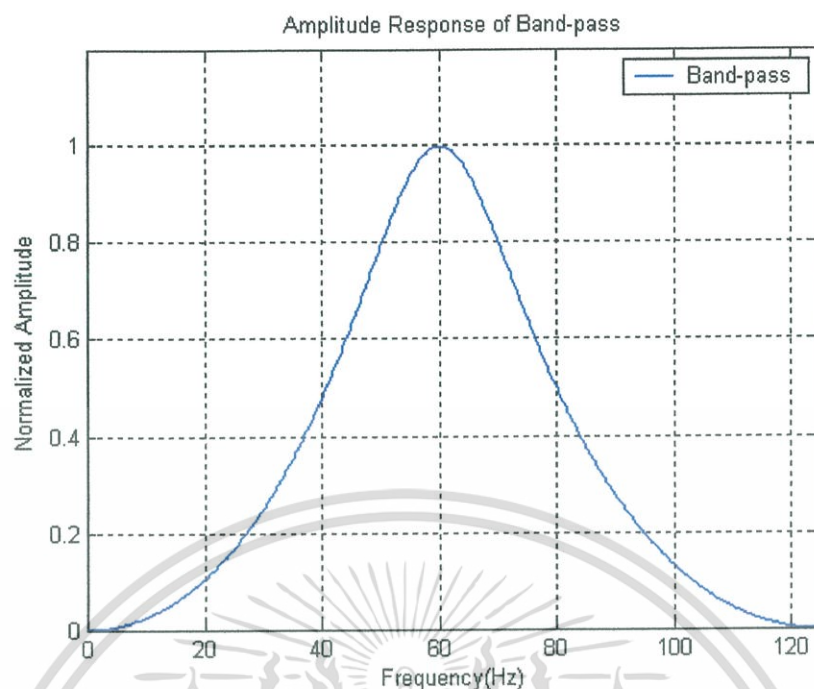


รูปที่ 4.20 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 4

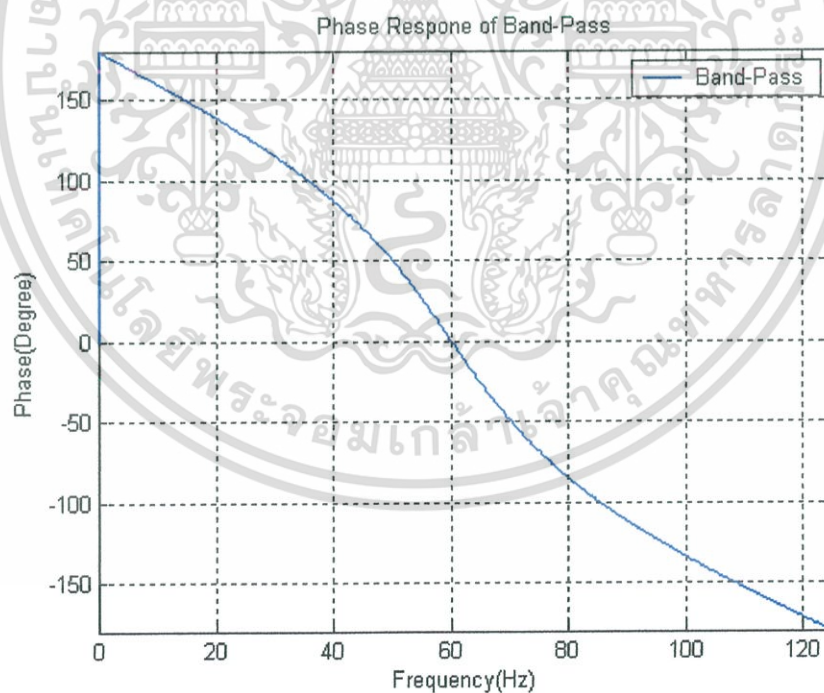


รูปที่ 4.21 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

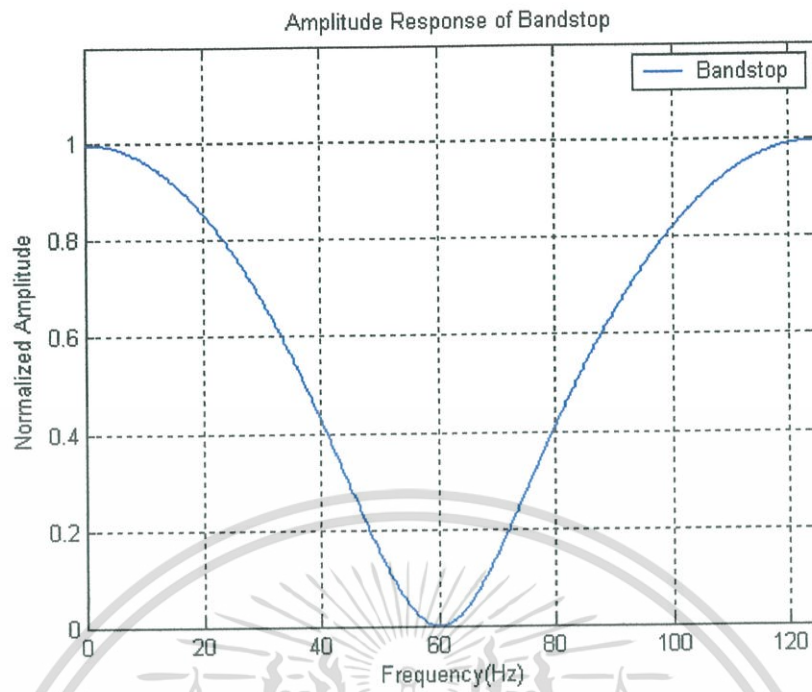


รูปที่ 4.22 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 4

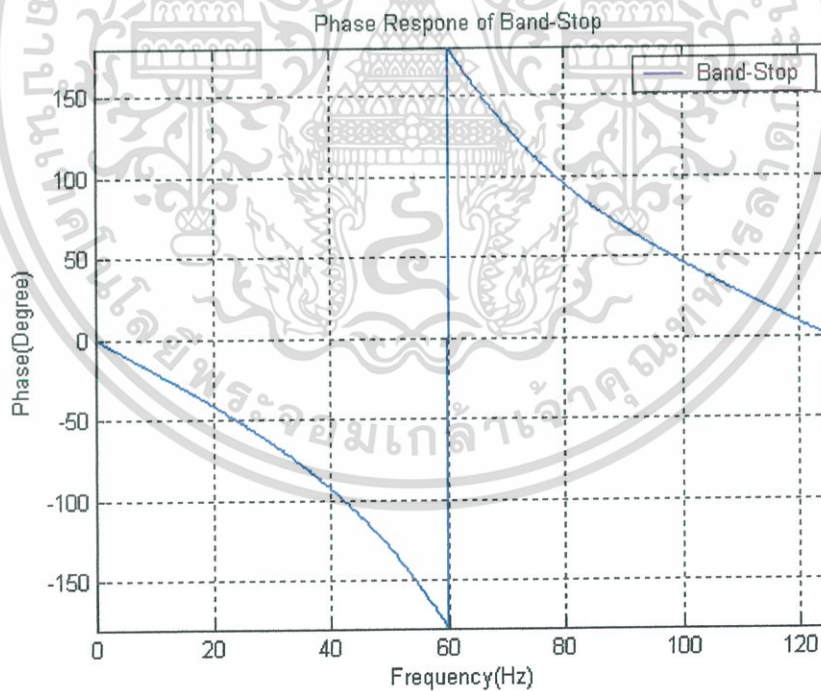


รูปที่ 4.23 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

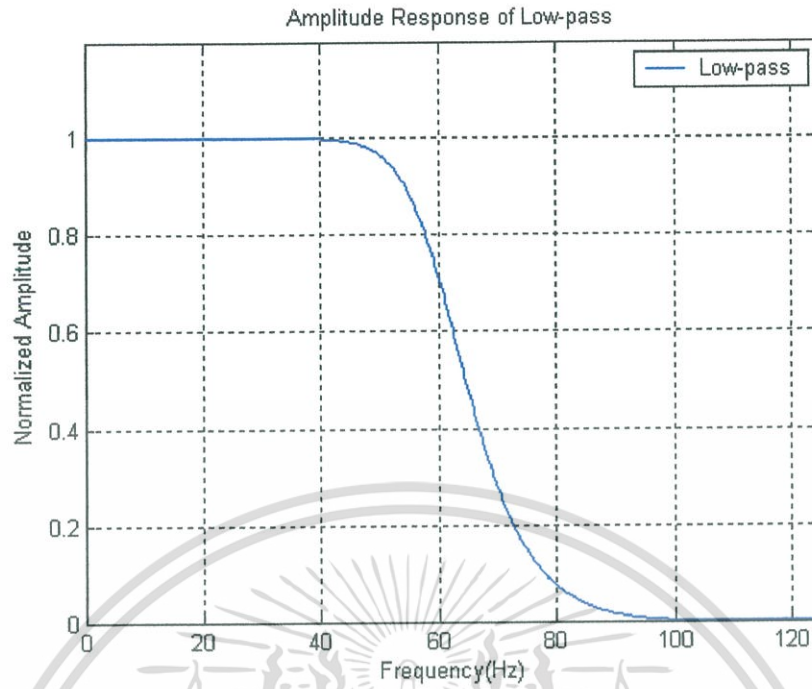


รูปที่ 4.24 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่อันดับ 4

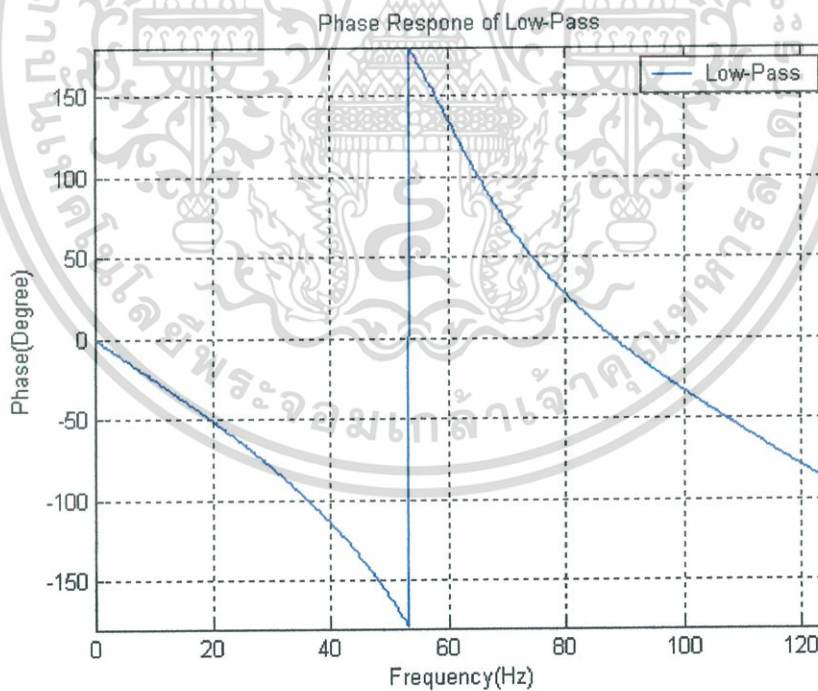


รูปที่ 4.25 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณกำจัดแถบความถี่อันดับ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

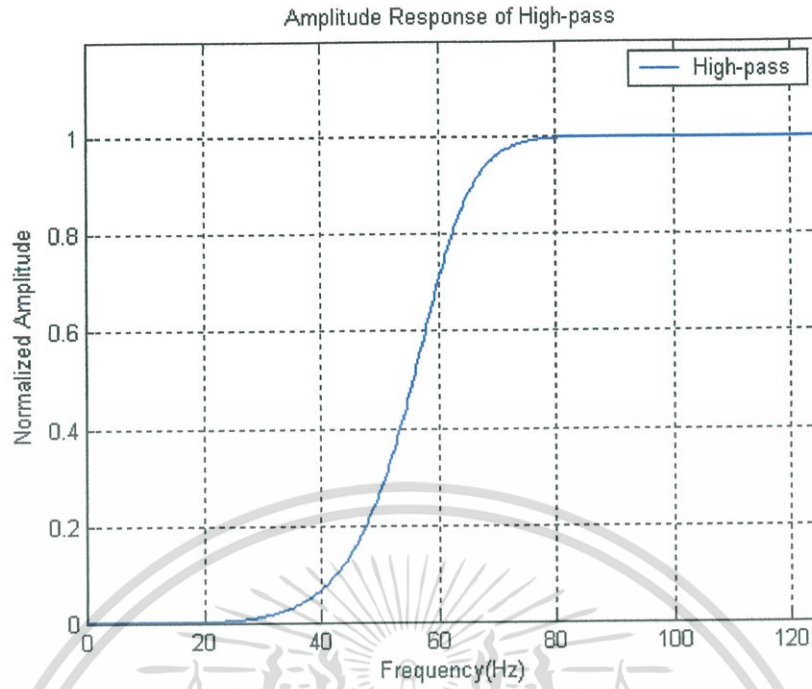


รูปที่ 4.26 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5

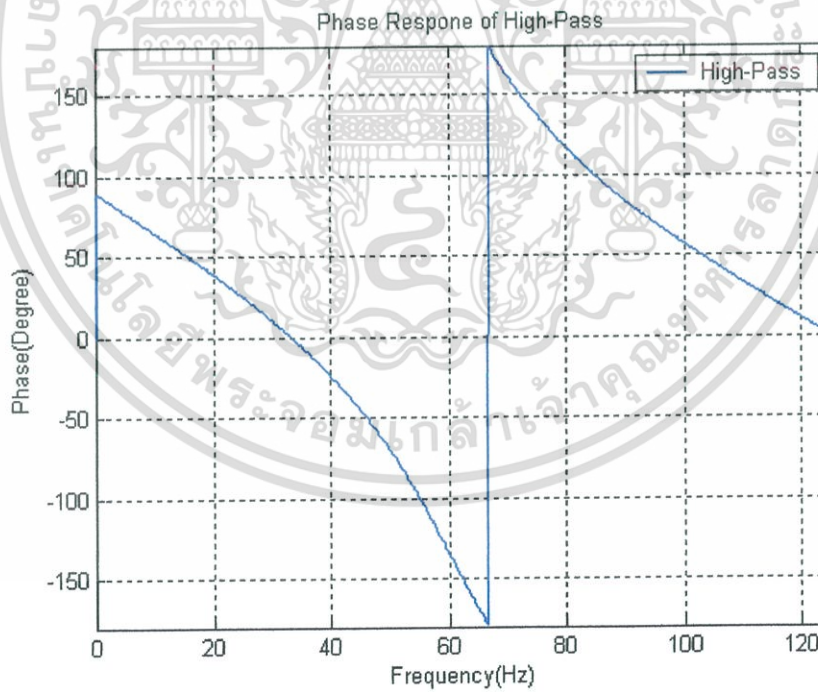


รูปที่ 4.27 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

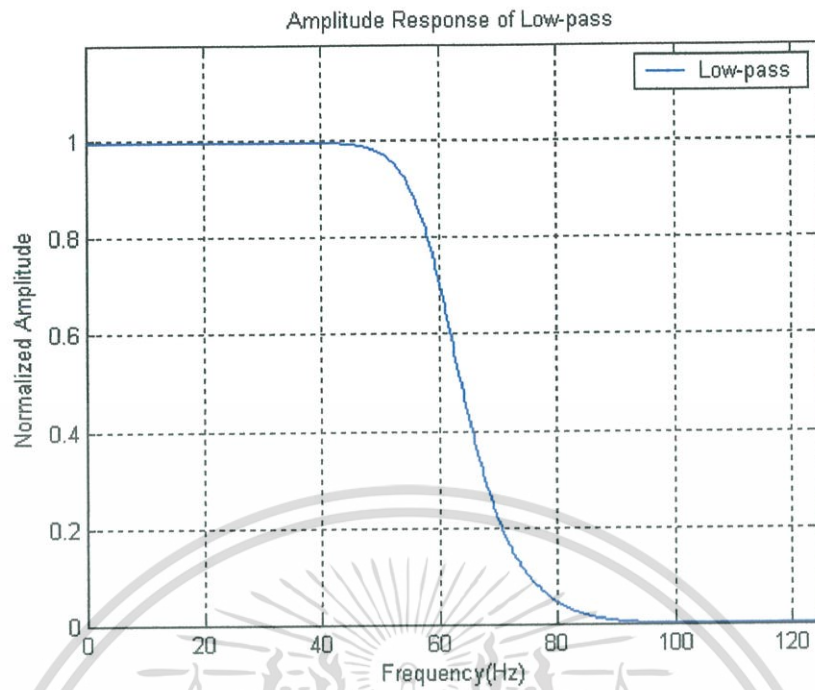


รูปที่ 4.28 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 5

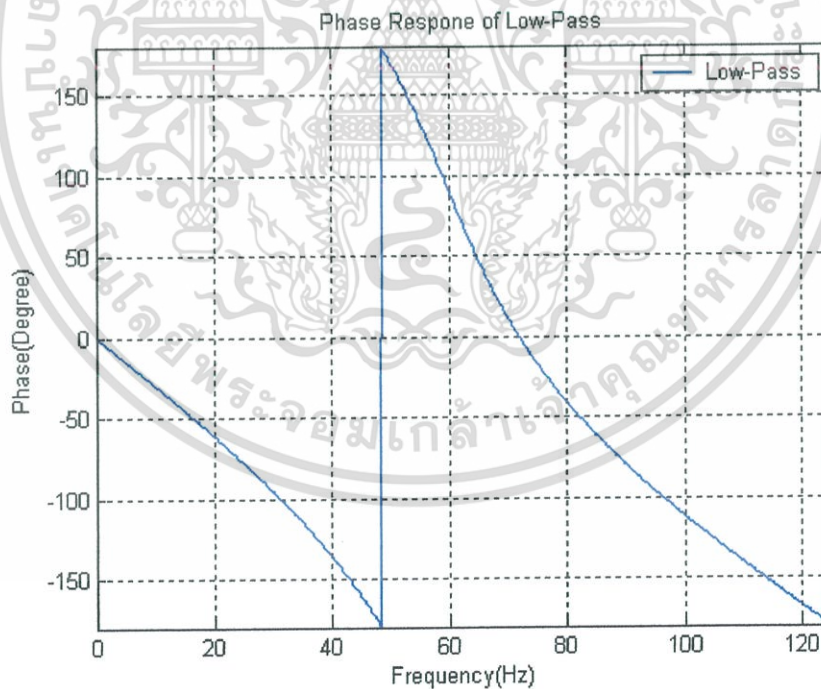


รูปที่ 4.29 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

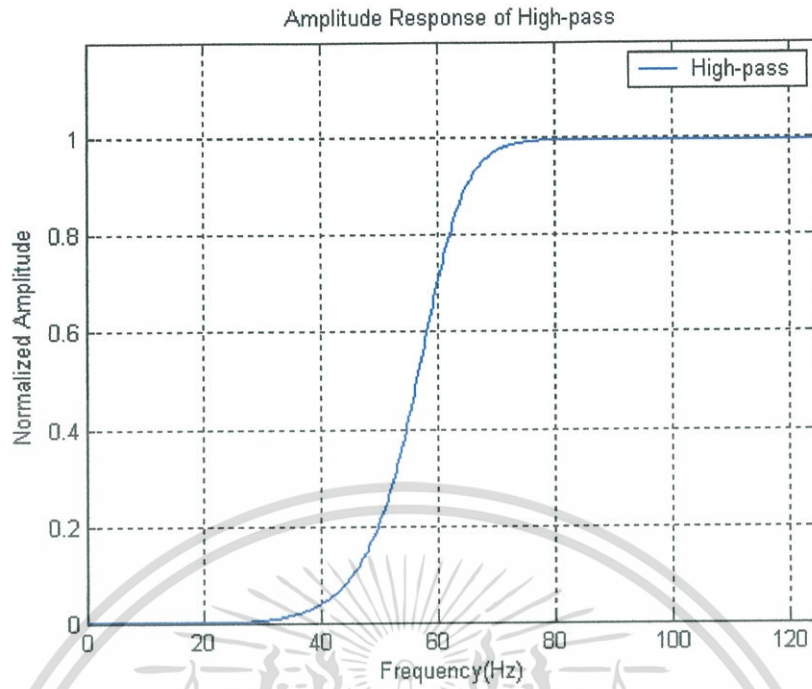


รูปที่ 4.30 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6

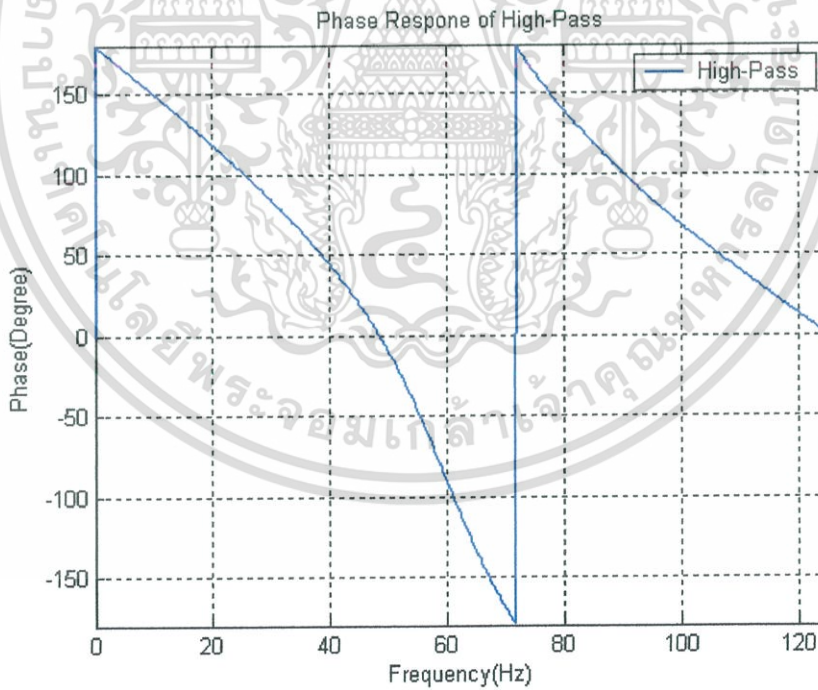


รูปที่ 4.31 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

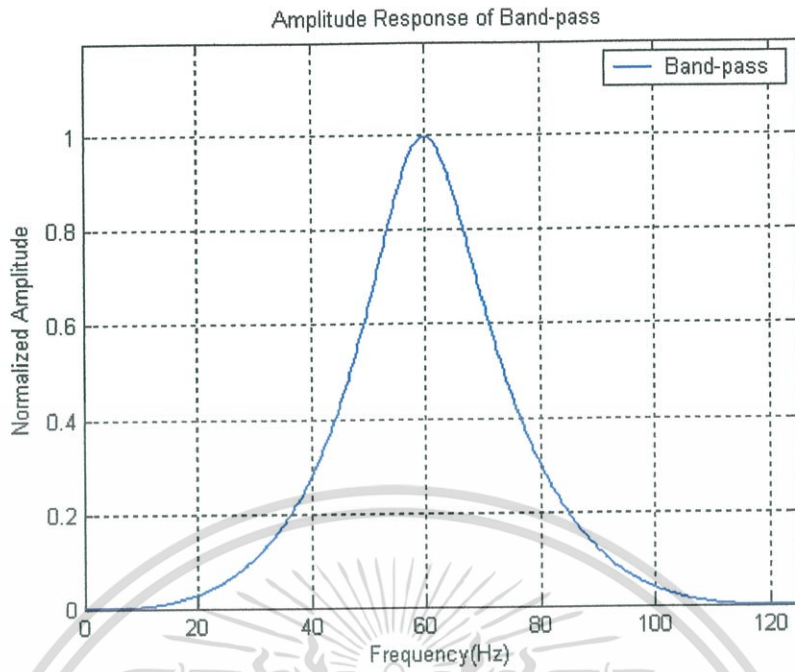


รูปที่ 4.32 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 6

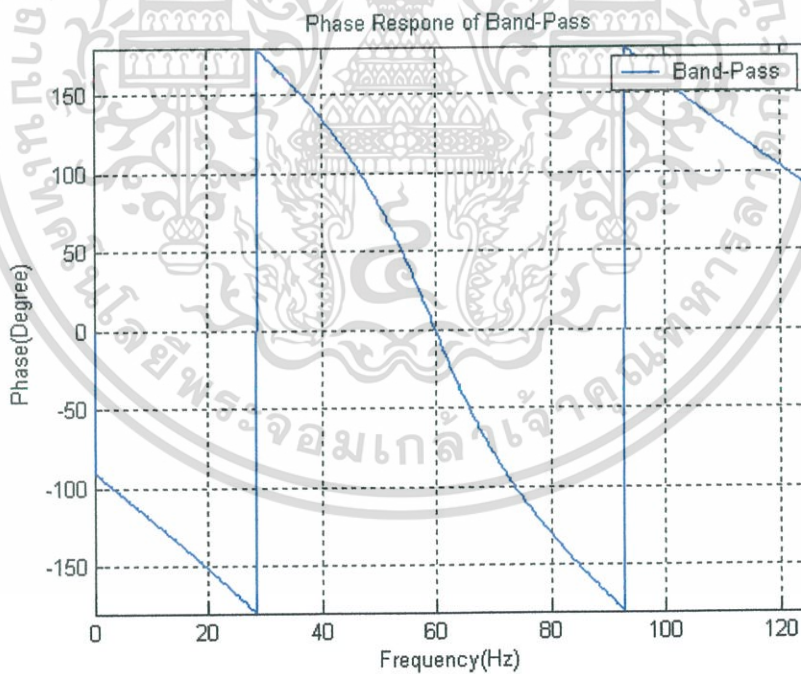


รูปที่ 4.33 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

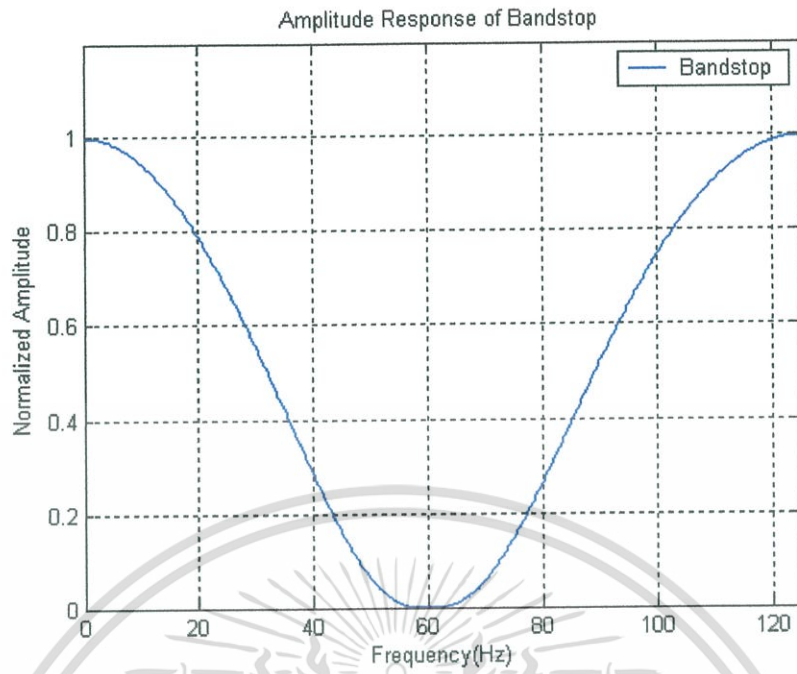


รูปที่ 4.34 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 6

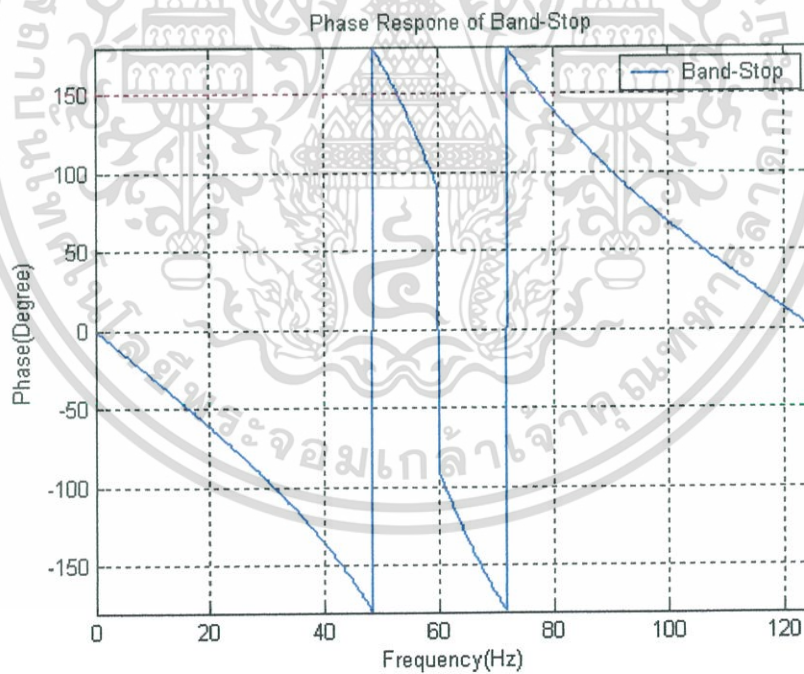


รูปที่ 4.35 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

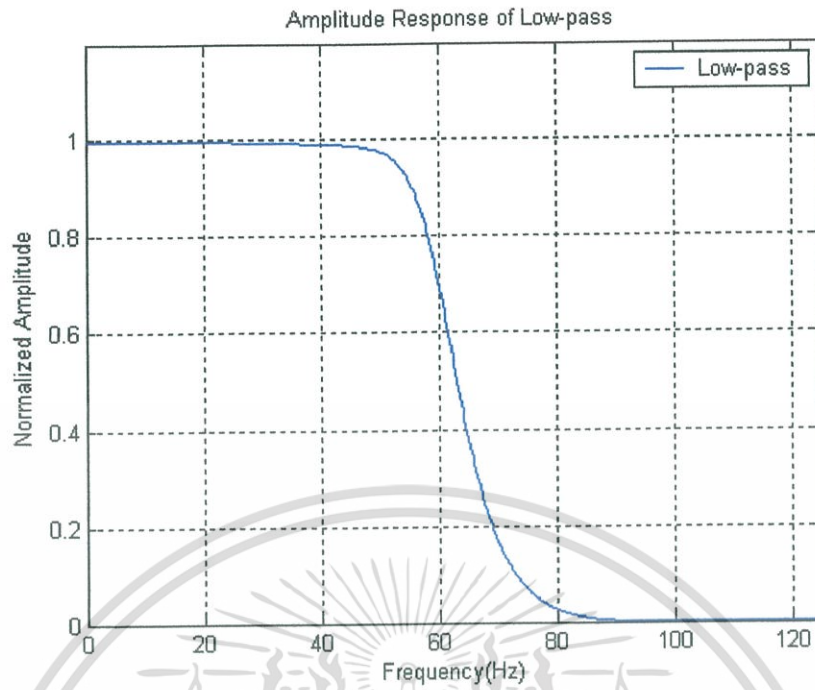


รูปที่ 4.36 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 6

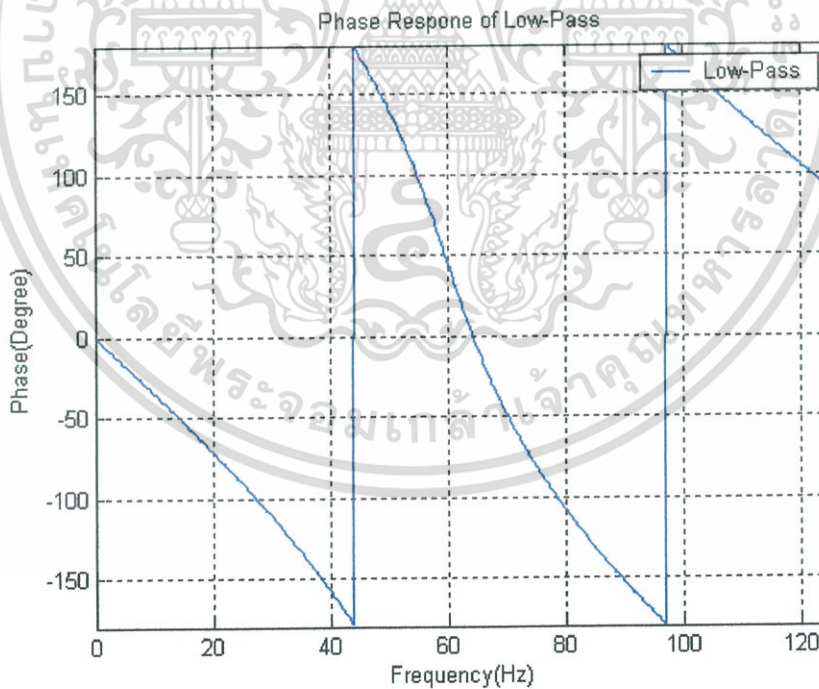


รูปที่ 4.37 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่อันดับ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

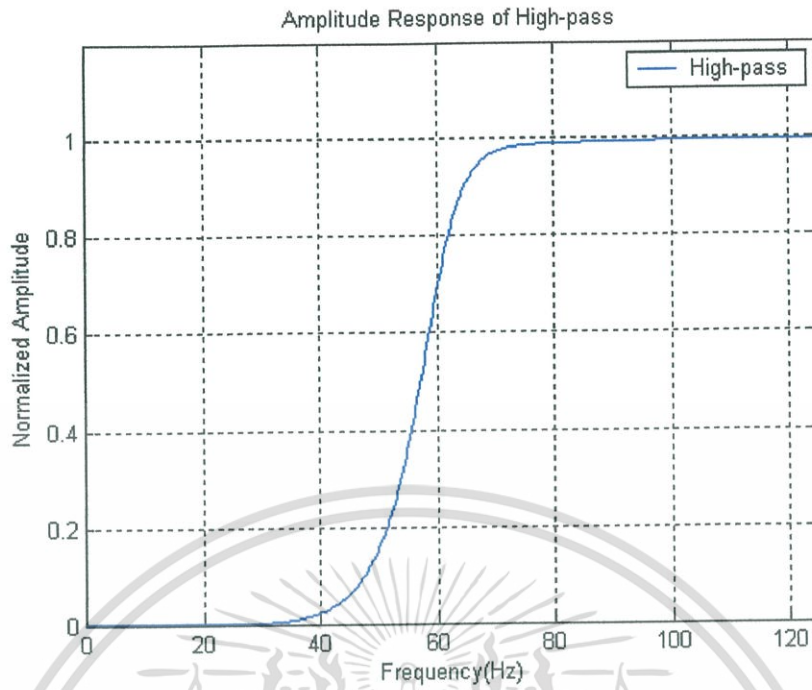


รูปที่ 4.38 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7

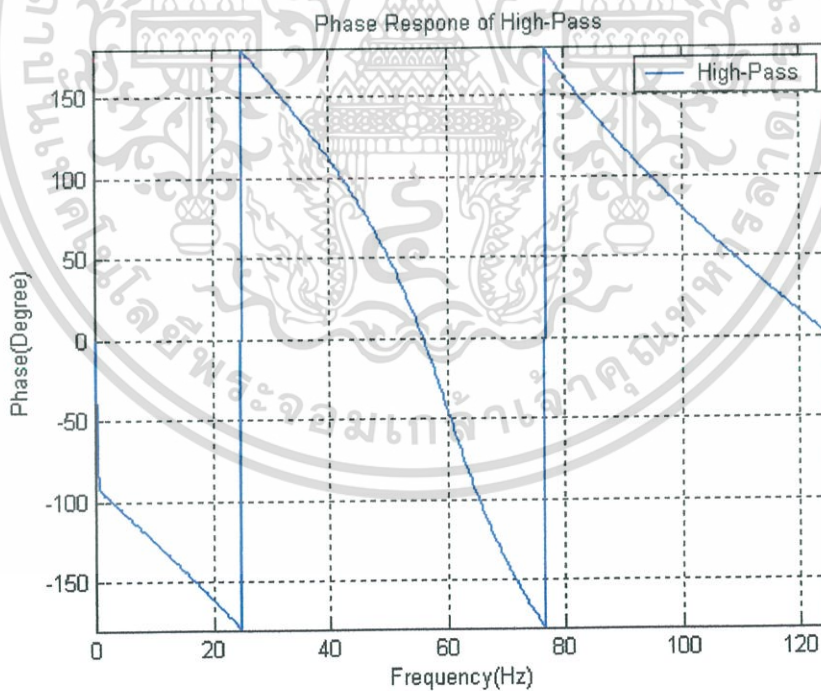


รูปที่ 4.39 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่านอันดับ 7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

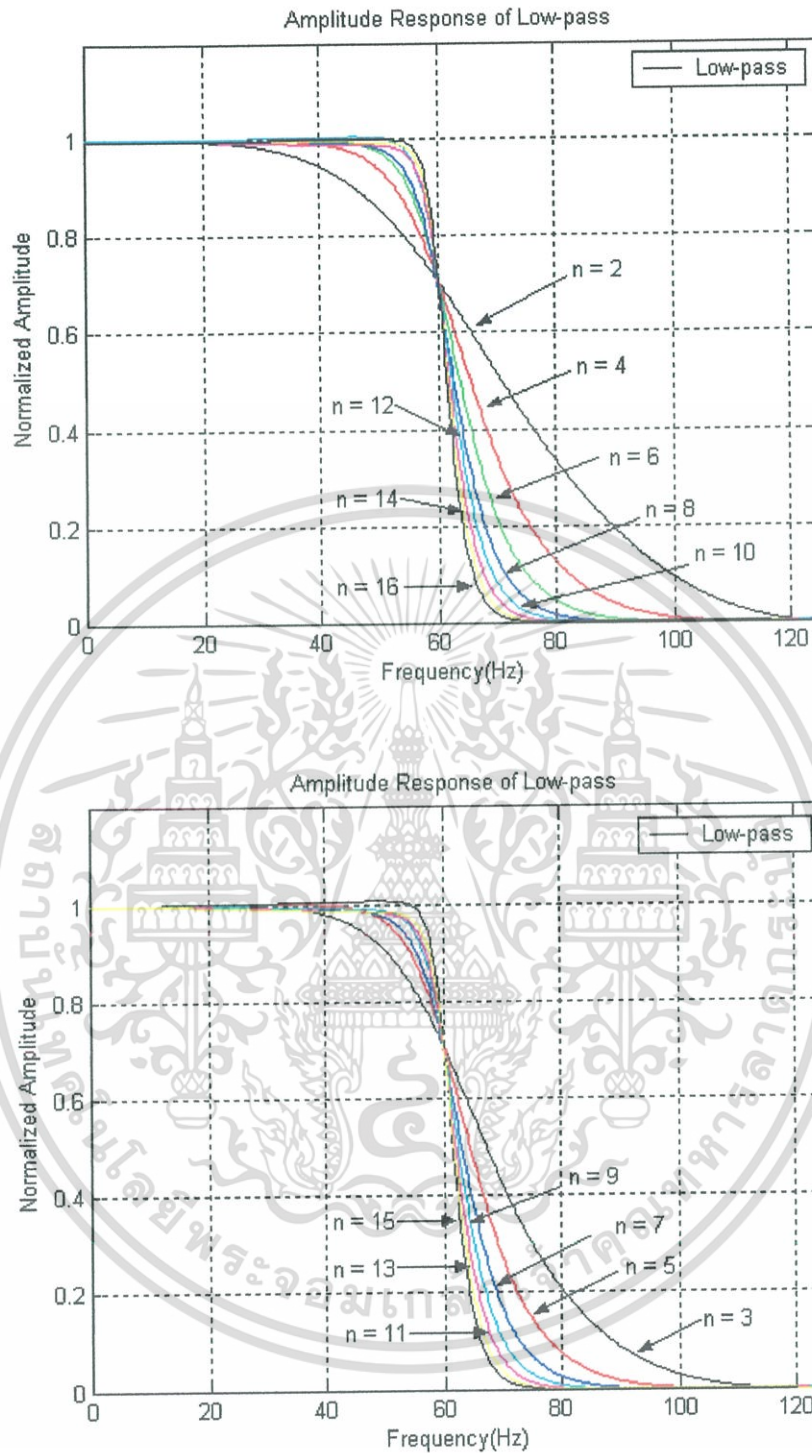


รูปที่ 4.40 ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 7



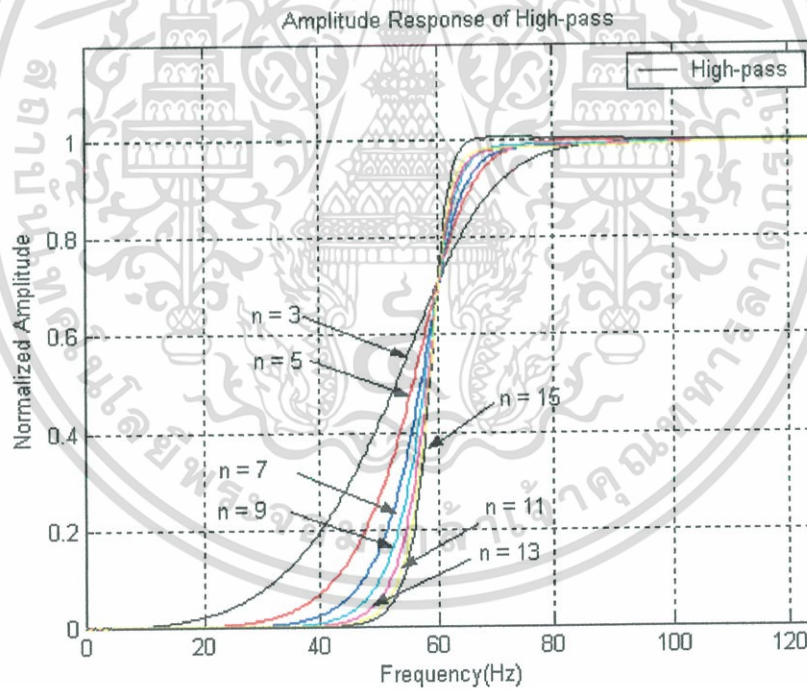
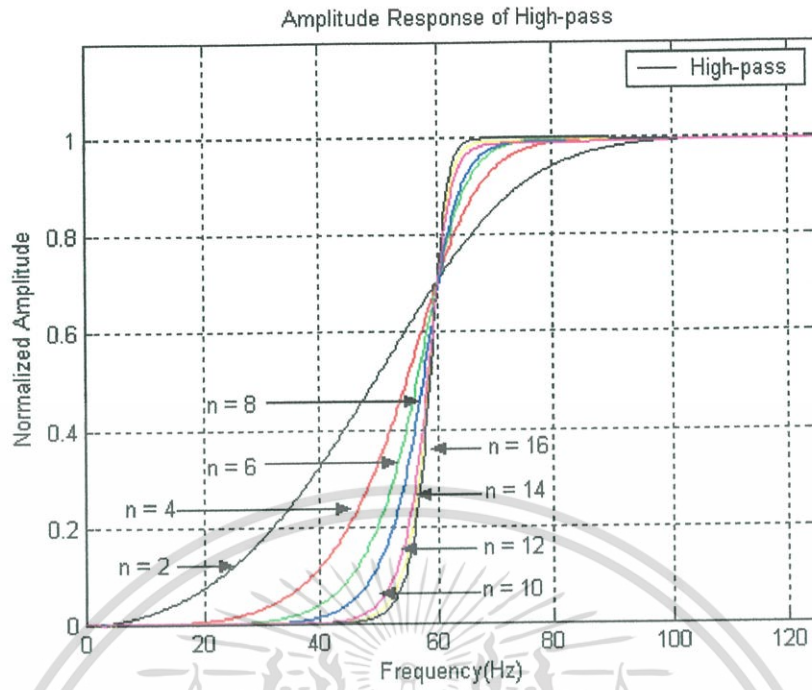
รูปที่ 4.41 ผลตอบสนองทางเฟสของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่านอันดับ 7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



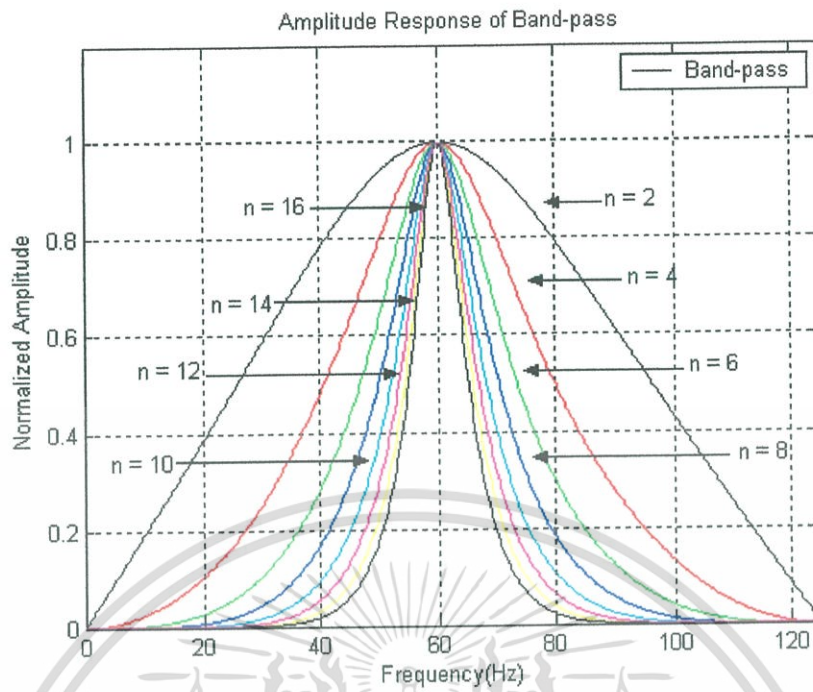
รูปที่ 4.42 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

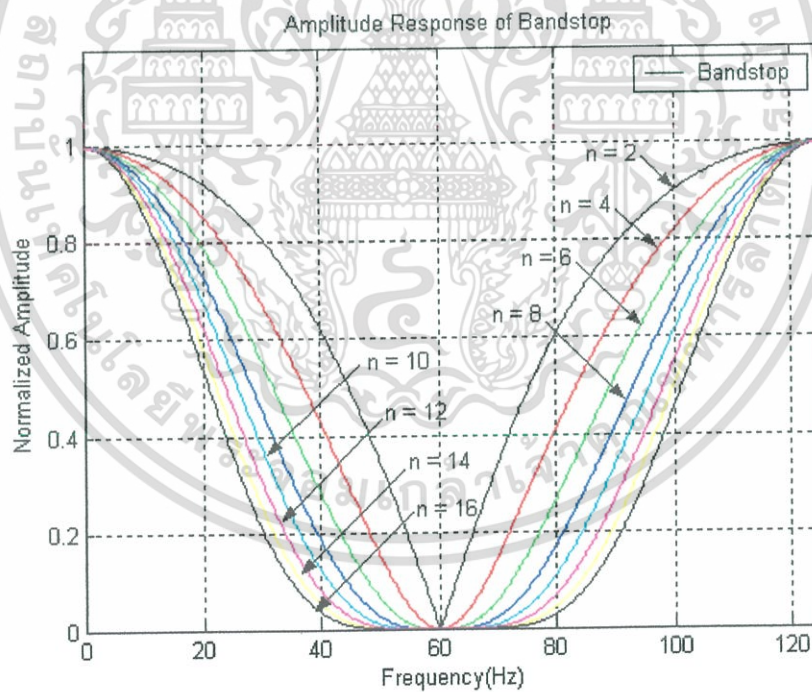


รูปที่ 4.43 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

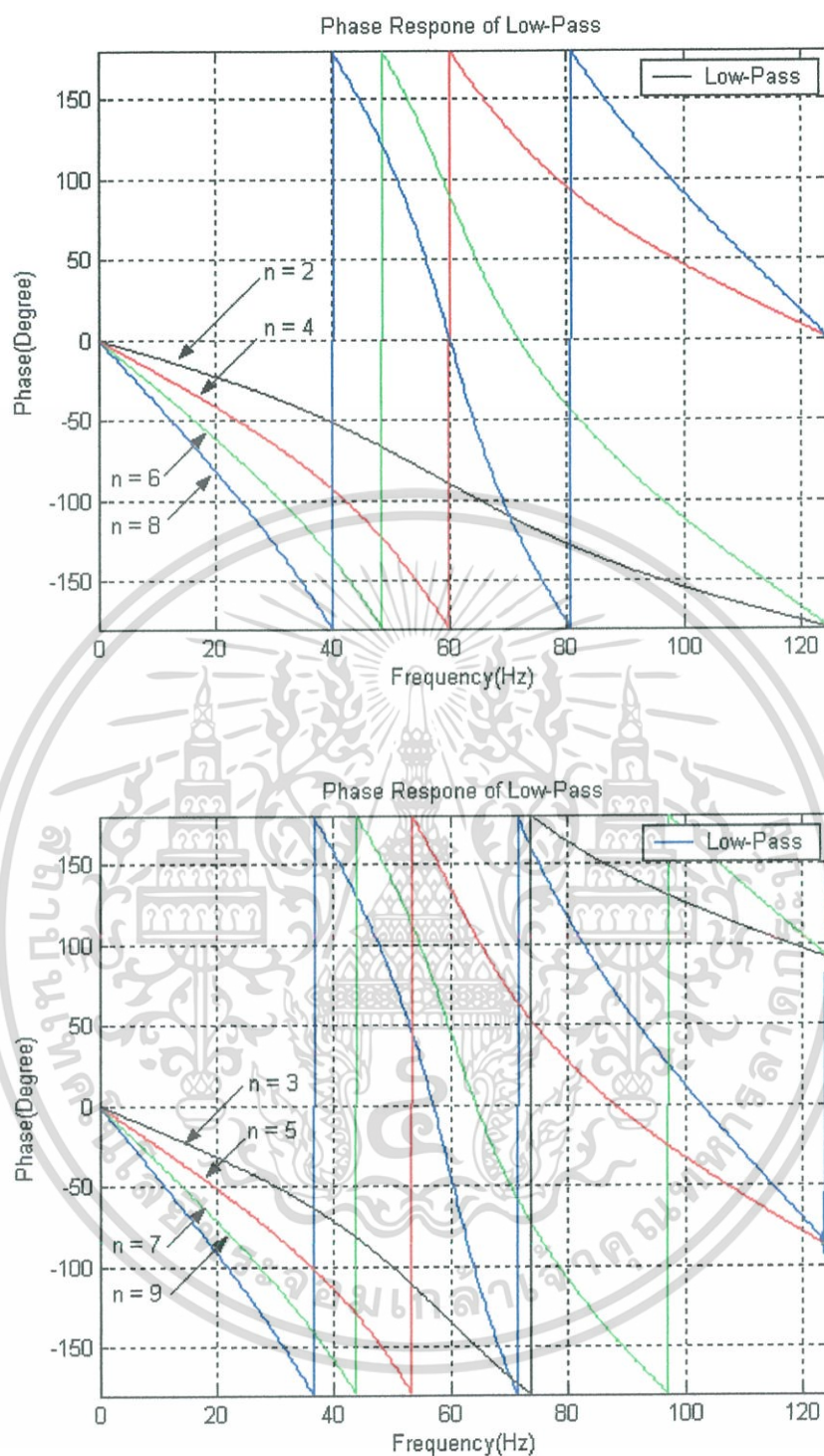


รูปที่ 4.44 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน



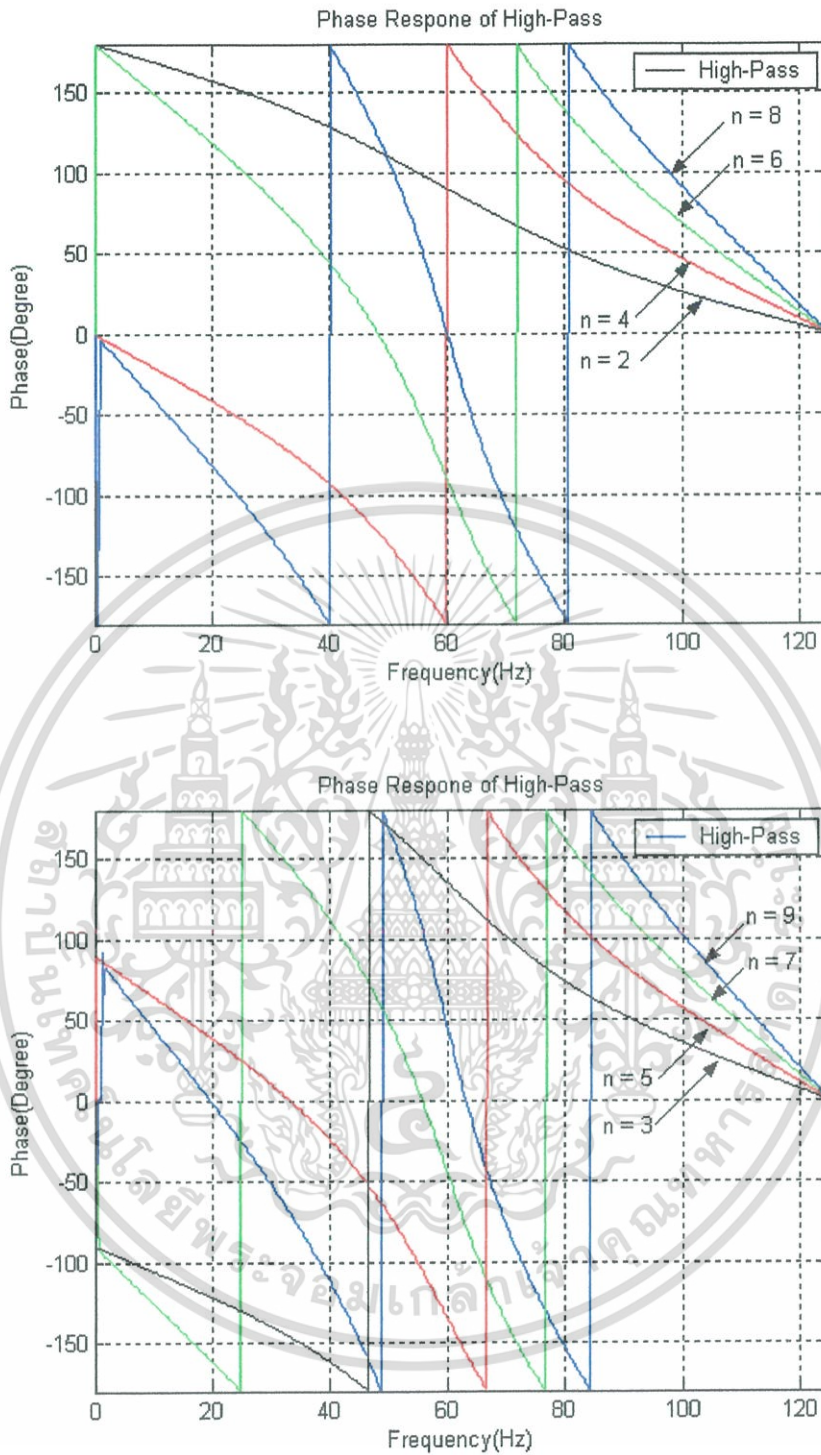
รูปที่ 4.45 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณ
ก้ำจัดแถบความถี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



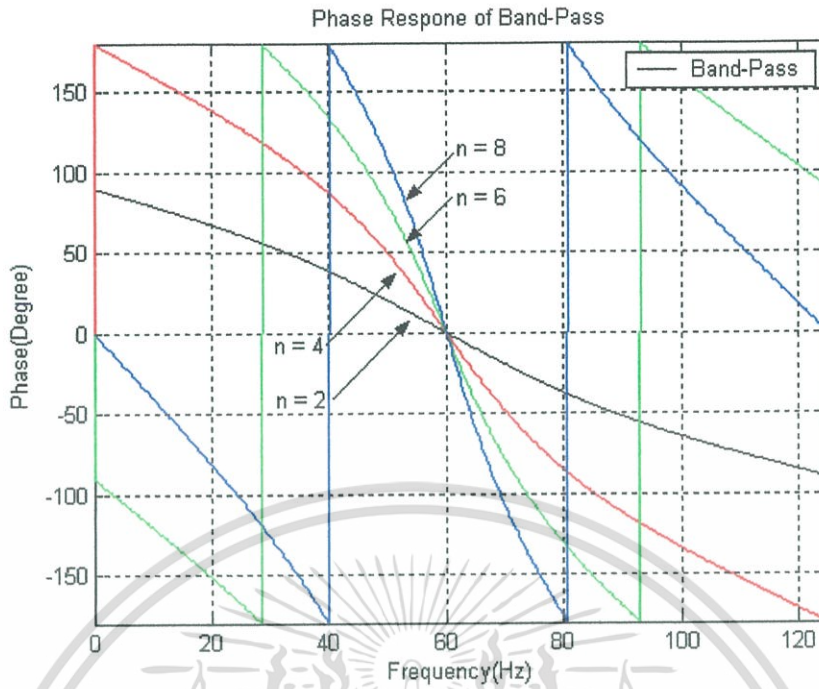
รูปที่ 4.46 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่ต่ำผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

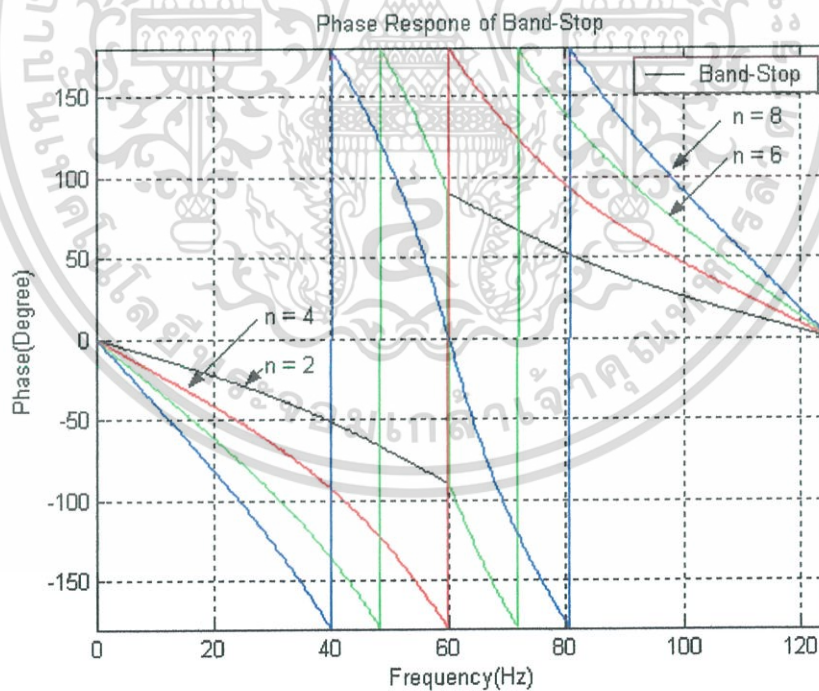


รูปที่ 4.47 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณความถี่สูงผ่าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

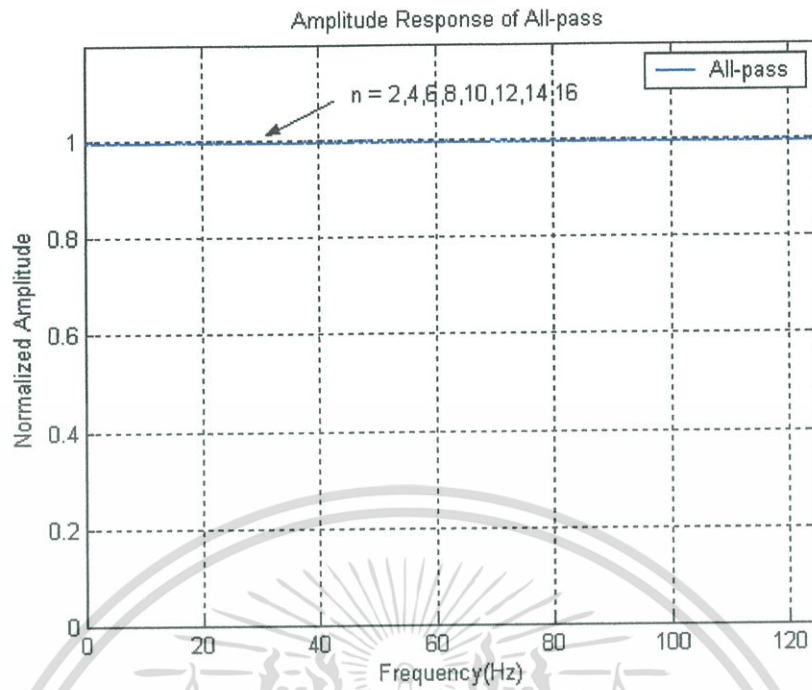


รูปที่ 4.48 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่าน

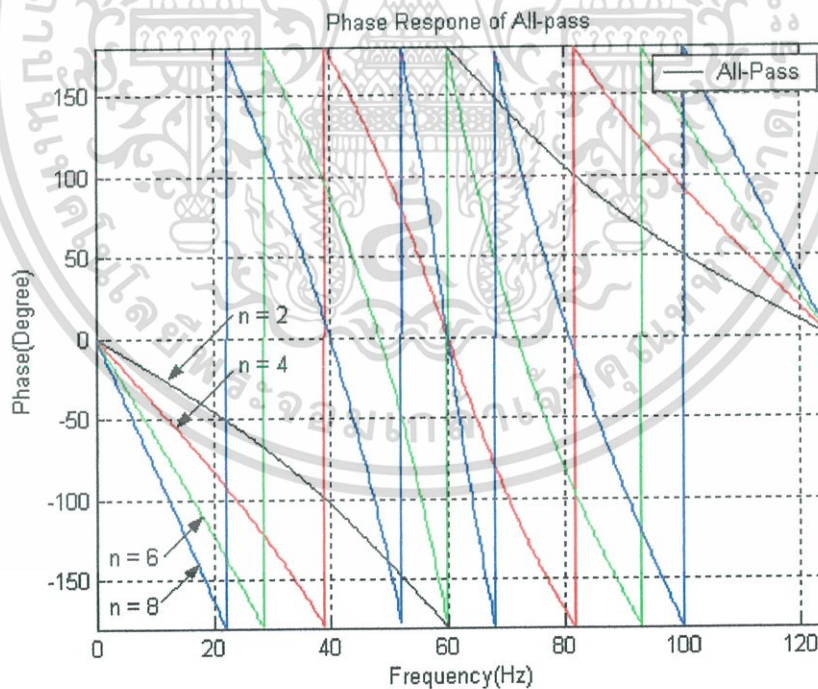


รูปที่ 4.49 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณก้ำจัดแถบความถี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.50 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางขนาดที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกแถบความถี่



รูปที่ 4.51 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางเฟสที่ค่า n ต่างๆ ของวงจรกรองสัญญาณผ่านทุกแถบความถี่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการออกแบบด้วยเทคนิคที่ได้นำเสนอมานี้ เมื่อเราเปรียบเทียบกับวิธีการออกแบบที่ผ่านมาในเอกสารอ้างอิงที่ [5] จะเห็นว่าสามารถลดความยุ่งยากในการออกแบบได้ เนื่องจากไม่ต้องใช้ชุดเมตริกส์สำหรับการแปลงความถี่ โดยวิธีการออกแบบนี้ เมื่อเปรียบเทียบตัวดำเนินการระหว่างสัมประสิทธิ์ จำนวนของการคูณและการบวกค่าสัมประสิทธิ์ระหว่างเวกเตอร์ ทั้งหมดใช้การคูณ 18 ครั้ง การบวก 12 ครั้ง สำหรับการออกแบบที่ผ่านมาใช้การคูณ 72 ครั้ง การบวก 48 ครั้ง กับการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขลำดับ 2 และใช้การคูณ 54 ครั้งการบวก 40 ครั้ง ขณะที่การออกแบบที่ผ่านมาใช้การคูณ 300 ครั้งการบวก 240 ครั้งสำหรับการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขลำดับ 4 และในอันดับอื่นๆ สามารถเปรียบเทียบผลการดำเนินการระหว่างสัมประสิทธิ์ได้ตามตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11 เปรียบเทียบผลการดำเนินการระหว่างสัมประสิทธิ์

วิธีการออกแบบ	ตัวดำเนินการ	อันดับ			
		2 nd	4 th	6 th	8 th
ตามเอกสารอ้างอิง ที่ [5]	การบวก	48	240	672	1440
	การคูณ	72	300	784	1620
ที่นำเสนอ	การบวก	12	40	88	154
	การคูณ	18	45	108	180

4.7 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทวินามหรือไบโนเมียลในการสร้างสามเหลี่ยมปาสคาลเพื่อนำไปสู่หลักการสร้างปาสคาลเมตริกส์ด้วยวิธีการ ไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการแปลงความถี่จากอนาล็อกโดเมน ไปเป็นดิจิตอลโดเมน โดยใช้ตัวดำเนินการไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกส์ ตัวอย่างการออกแบบและผลการออกแบบของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน แถบความถี่ผ่าน กำจัดแถบความถี่ และผ่านทุกแถบความถี่ ที่อันดับต่างๆ ค่า n เป็นอันดับคู่ (Even order) และตัวอย่างการออกแบบและผลการออกแบบของวงจรรองสัญญาณเชิงเลขแบบความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน ที่อันดับต่างๆ ค่า n เป็นอันดับคี่ (Odd order) ทำให้ผู้อ่านเกิดความรู้ความเข้าใจ และสามารถที่จะนำไปเลือกใช้ออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขที่ให้ผลตอบสนองทางความถี่แบบต่างๆ ที่ลำดับสูงๆ ได้อย่างไม่เกิดความยุ่งยากซับซ้อน ลดขั้นตอนในการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลข ซึ่งแต่ก่อนทำได้ยากและมีความซับซ้อนกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินการวิจัย

การดำเนินงานวิจัยเพื่อจัดทำขึ้นเป็นวิทยานิพนธ์ชุดนี้ เป็นการนำเสนอแนวทางการแปลง S-Z โดเมนโดยใช้การดำเนินการปาสคาลเมตริกซ์ ซึ่งมีการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB โดยเริ่มจากหาแนวทางหลักการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ที่สัมพันธ์กับวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม วิธีการคำนวณถูกจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์เพื่อลดความยุ่งยากซับซ้อน ช่วยให้ประหยัดเวลา เหมาะสำหรับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขในกรณีที่อันดับสูงๆ ขึ้นไป

ในการออกแบบเริ่มจาก ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับ 2 ของวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานแบบไบควอดที่ใช้เป็นต้นแบบ ซึ่งให้ผลตอบสนองทางความถี่แบบ ความถี่ต่ำผ่าน (Low-pass) ความถี่สูงผ่าน (High-pass) แถบความถี่ผ่าน (Band-pass) กำจัดแถบความถี่ (Band-stop) และผ่านทุกแถบความถี่ (All-pass) สมการฟังก์ชันถ่ายโอนของทั้ง 5 วงจรถูกปรับปรุงให้อยู่ในรูปของสมการไบควอดพารามेटริก ซึ่งเป็นรูปสมการเดียว และสามารถกำหนดเพียงค่าพารามิเตอร์ α, β, γ เท่านั้น นำมาซึ่งวงจรกรองสัญญาณที่ให้เอาต์พุตแบบต่างๆ จากนั้นใช้วิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม แปลงค่าสัมประสิทธิ์จาก S-Z โดเมนโดยไม่ต้องใช้การแทนค่าสัมประสิทธิ์โดยตรง แต่จะจัดการคำนวณให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ด้วยวิธีไบลิเนียร์ปาสคาลเมตริกซ์ โดยไม่ต้องใช้ชุดเมตริกซ์สำหรับแปลงค่าความถี่ นำมาซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขที่ให้คุณลักษณะทางเอาต์พุตเหมือนกันกับวงจรกรองสัญญาณที่ใช้เป็นต้นแบบ เมื่อไม่ใช้ชุดเมตริกซ์สำหรับแปลงค่าความถี่ส่งผลให้ตัวดำเนินการระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ลดลง ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ พร้อมตัวอย่างแสดงไว้ในบทที่ 4 แล้ว

เปรียบเทียบผลการวิจัยกับวิธีการออกแบบที่ผ่านมา [5] สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์และผลตอบสนองทางความถี่ที่เหมือนกัน ในกรณีของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลขแบบ ความถี่ต่ำผ่านและความถี่สูงผ่าน ที่อันดับค่า n ต่างๆ ด้วยขั้นตอนการคำนวณที่ง่ายกว่าไม่ยุ่งยากซับซ้อน และยังสามารถนำวิธีการเดียวกันนี้ ไปใช้กับการออกแบบวงจรกรองสัญญาณแบบ ผ่านทุกแถบความถี่ อันดับค่า n ต่างๆ เป็นจำนวนคู่ วงจรกรองสัญญาณแบบความถี่ต่ำผ่าน และความถี่สูงผ่าน ที่อันดับค่า n ต่าง ๆ เป็นจำนวนคี่ได้ สำหรับในกรณีของวงจรกรองสัญญาณแบบ แถบความถี่ผ่าน และกำจัดแถบความถี่ วิธีการนี้สามารถนำไปใช้ออกแบบได้ สามารถให้เอาต์พุตที่เหมือนกันกับวงจรกรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ แต่ไม่เหมือนกันกับการออกแบบที่ผ่านมา ด้วยคุณสมบัติของเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วงจรรองสัญญาณต้นแบบที่เราเลือกใช้ ใช้การกำหนดค่าความถี่ศูนย์กลาง(Ω_0) และค่า $Q = 0.707$ โดยเฉลี่ยค่า Q ไปตามอันดับที่สูงขึ้นดังตารางค่า Q ที่ 4.7 และ 4.8 โดยที่เราไม่สามารถกำหนดค่าความถี่คัตออฟ (Ω_1) และ (Ω_2) เหมือนกับการออกแบบที่ผ่านมาได้ ทำให้ค่าเอาต์พุตของวงจรรองทั้งสองแบบออกมาดังรูป ซึ่งตรงนี้ถือเป็นข้อจำกัดสำหรับการออกแบบวงจรรองสัญญาณด้วยวิธีนี้ ด้วยผลการออกแบบที่ได้มาจึงไม่เหมาะสำหรับนำไปใช้ออกแบบวงจรรองสัญญาณแบบแถบความถี่ผ่านและกำจัดแถบความถี่อันดับสูง ๆ แต่เหมาะสำหรับนำไปใช้ออกแบบวงจรรองสัญญาณแบบ ความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่าน และผ่านทุกความถี่ ที่อันดับค่า n ต่างๆ แทนดังคุณสมบัติของการออกแบบ ที่ได้กล่าวมา

การดำเนินงานวิจัยนี้เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าเสนอวิธีการแปลง S-Z โดเมนสำหรับนำไปใช้ออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลข ซึ่งมีข้อดีตรงที่มีการคำนวณที่ง่ายกว่าและไม่ต้องใช้ชุดเมตริกซ์สำหรับแปลงค่าความถี่ ช่วยให้ประหยัดเวลา เหมาะสำหรับนำไปใช้ออกแบบสร้างวงจรรองสัญญาณจริง

5.2 แนวทางการพัฒนา

ดังที่กล่าวไปข้างต้นว่าเนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ใช้แนวทางหลักการสร้างปาสคาลเมตริกซ์ (Pascal matrix) ด้วยวิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ในการออกแบบวงจรรองสัญญาณเชิงเลขโดยอิงจากวงจรรองสัญญาณเชิงอุปมานต้นแบบ แบบไบควอดและบัตเตอร์เวิร์ท โดยยังมีวงจรรองสัญญาณแบบอื่นที่นิยมใช้วิธีการไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ในการออกแบบวงจรรองสัญญาณ ซึ่งได้แก่วงจรรองสัญญาณแบบ เชปเชฟ อีลิปติก และอื่นๆ แท้จริงแล้วยังมีหลักการทรานส์ฟอร์มในรูปแบบต่างๆ อีกเช่น วิธีอิมพัลส์อินเวเรียนซ์ วิธีผลต่างสี่บเนื่องย้อนหลัง วิธีผลต่างสี่บเนื่องไปหน้า แต่สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีไบลิเนียร์ทรานส์ฟอร์ม ก็เพราะว่าเป็นเทคนิคที่ได้รับความสนใจมากเป็นพิเศษเพราะการแมป (Mapping) จะเป็นลักษณะหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One Mapping) ด้วยเหตุนี้จึงไม่มีปัญหาเกิดการเหลื่อม (Aliasing) ของสเปกตรัม

บรรณานุกรม

- [1] E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, Digital Signal Processing: A Practical Approach, Addison Wesley Publishers Ltd., 1993.
- [2] V. Biolkova and D. Biolk, "Generalized Pascal Matrix of First Order s-z Transforms," in Proc ICECS, Pafos, Cyprus, 1999.
- [3] B. Psenicka, F. Garcia-Ugalde and A. Herrera-Camacho, "The Bilinear Z Transform by Pascal Matrix and Its Application in the Design of Digital Filters" IEEE Signal Processing Letters, Vol. 9, No. 11, pp. 368-370, November 2002.
- [4] B. Psenicka and F. Garcia-Ugalde, "Z Transform From Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix" IEEE Signal Processing Letters, Vol. 11, No. 2, pp. 282-284, February 2004.
- [5] S. Chivapreecha, S. Sriyapong, S. Junnapiya and K. Dejhan, "Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation" Proc. IEEE International Symposium on Communications and Information Technology (ISCIT 2005), pp. 739-742, October 2005.
- [6] S. Chivapreecha, A. Jaruvarakul and K. Dejhan, "Modified Pascal Matrix for Biquad Digital Filter Design and Its Filter Structure Realization" Proc. The 4th international Colloquium on Signal Processing and Its Application (CSPA) 2008, Kuala Lumpur, Malaysia, March 2008.
- [7] M. E. Van Valkenburg, Analog Filter Design, Holt-Saunders International Editions : New York, 1982
- [8] R. Johnson Johnny, Introduction to digital signal processing, Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1989
- [9] C. Ludeman Lonnie, Fundamentals of digital signal processing, New York : John Wiley, 1987
- [10] Ashok Ambardar, Analog and digital signal processing, Boston : PWS, 1995
- [11] T. W. Parke, C. S. Burrus, Digital Filter Design : New York, 1987
- [12] การประมวลผลสัญญาณเชิงเลข ศ.ดร.วัลลภ สุระกำพลธร สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง พ.ศ.2533
- [13] การประมวลผลสัญญาณดิจิทัล ศ.ดร.ไพรัช รัชชพงษ์ ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม พ.ศ.2535

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [14] การประมวลผลสัญญาณเชิงเลขเบื้องต้น รศ.ดร.สมศักดิ์ ชุมช่วย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง พ.ศ.2545
- [15] พื้นฐานกรรมวิธีสัญญาณดิจิทัล รศ.ดร.ลัญจกร วุฒิสัทติกุลกิจ กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พ.ศ.2547
- [16] MATLAB การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรม รศ.ดร.ลัญจกร วุฒิสัทติกุลกิจ กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ.2547



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ก.

โปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการจำลองการทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%***** Proposed design technique *****
```

```
clc
fprintf('\n\n');
clear all

%-----Cutoff frequency(fc)-----
%-----Sampling Frequency (fs)-----
%-----Quality Factor (Q)-----

fc=input('Enter Cutoff Frequency (fc) =');
fs=input('Enter Sampling Frequency (fs) =');

format long
Q1=0.707
omega0=tan(pi*fc / fs);

%-----Pascal Mextrix [p]-----
P=[1 1 1;
    2 0 -2;
    1 -1 1];

%-----D(s)(T1)-----
B0=omega0^2;
B1=omega0/Q1;
B2=1;
Ds=P*[B0 B1 B2]';
b=Ds./Ds(1)

%-----Transfer Function Biquad Order 2 H(z)-----%
NsaLP=P*[B0 0 0]'/Ds(1)
NsaHP=P*[0 0 B2]'/Ds(1)
NsaBP=P*[0 B1 0]'/Ds(1)
NsaBS=P*[B0 0 B2]'/Ds(1)
NsaAP=P*[B0 -B1 B2]'/Ds(1)
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

%-----plot Amplitude Response-----%
%-----Lowpass-----
[h,q]=freqz(NsaLP,b,512,fs);
figure(1);
plot(q,abs(h),'b')
legend('Low-pass');
title('Amplitude Response of Low-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Normalized Amplitude');
axis([0 fs/2 0 1.2]);
grid on
hold on

%-----highpass-----
[h,q]=freqz(NsaHP,b,512,fs);
figure(2);
plot(q,abs(h),'b')
legend('High-pass');
title('Amplitude Response of High-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Normalized Amplitude');
axis([0 fs/2 0 1.2]);
grid on
hold on

%-----Bandpass-----
[h,q]=freqz(NsaBP,b,512,fs);
figure(3);
plot(q,abs(h),'b')
legend('Band-pass');
title('Amplitude Response of Band-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Normalized Amplitude');
axis([0 fs/2 0 1.2]);
grid on
hold on

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

%-----Bandstop-----
[h,q]=freqz(NsaBS,b,512,fs);
figure(4);
plot(q,abs(h),'b')
legend('Bandstop');
title('Amplitude Response of Bandstop');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Normalized Amplitude');
axis([0 fs/2 0 1.2]);
grid on
hold on

%-----Allpass-----
[h,q]=freqz(NsaAP,b,512,fs);
figure(5);
plot(q,abs(h),'b')
legend('All-pass');
title('Amplitude Response of All-pass');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Normalized Amplitude');
axis([0 fs/2 0 1.2]);
hold on
grid on

%-----Plot Phase Response-----
%----- Low-Pass-----
[hLP,q]=freqz(NsaLP,b,512,fs);
RadLP=angle(hLP);
DegLP=RadLP*180/pi;
figure(6);
plot(q,DegLP);
axis([0 fs/2 -180 0]);
legend ('Low-Pass');
title('Phase Response of Low-Pass');
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Degree)')

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

grid on
hold on

%----- High-Pass-----
[hHP,q]=freqz(NsaHP,b,512,fs);
RadHP=angle(hHP);
DegHP=RadHP*180/pi;
figure(7);
plot(q,DegHP);
axis([0 fs/2 0 180]);
legend ('High-Pass');
title('Phase Responce of High-Pass');
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Degree)')
grid on
hold on

%----- Band-Pass-----
[hBP,q]=freqz(NsaBP,b,512,fs);
RadBP=angle(hBP);
DegBP=RadBP*180/pi;
figure(8);
plot(q,DegBP);
axis([0 fs/2 -100 100]);
legend ('Band-Pass');
title('Phase Responce of Band-Pass');
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Degree)')
grid on
hold on

%----- Band-Stop-----
[hBS,q]=freqz(NsaBS,b,512,fs);
RadBS=angle(hBS);
DegBS=RadBS*180/pi;
figure(9);

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

plot(q,DegBS);
axis([0 fs/2 -90 90]);
legend('Band-Stop');
title('Phase Responce of Band-Stop');
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Degree)')

grid on
hold on

%----- All-Pass -----
[hAP,q]=freqz(NsaAP,b,512,fs);
RadAP=angle(hAP);
DegAP=RadAP*180/pi;
figure(10);
plot(q,DegAP);
axis([0 fs/2 -180 180]);
legend('All-Pass');
title('Phase Responce of All-pass');
xlabel('Frequency(Hz)')
ylabel('Phase(Degree)')

grid on
hold on

%-----Pole-Zero in Z-Plane-----
%-----Low-Pass-----
figure(11);
zplane(NsaLP,'b');
title('Low-pass');
legend('Zero','pole');

%-----High-Pass-----
figure(12);
zplane(NsaHP,'b');
title('High-pass');
legend('Zero','pole');

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
%-----Band-Pass-----
```

```
figure(13);
zplane(NsaBP,'b');
title('Band-pass');
legend('Zero','pole');
```

```
%-----Band-Stop-----
```

```
figure(14);
zplane(NsaBS,'b');
title('Band-Stop');
legend('Zero','pole');
```

```
%-----All-Pass-----
```

```
figure(15);
zplane(NsaAP,'b');
title('All-pass');
legend('Zero','pole');
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

1. Jetsarawoot Kreuakum, Sorawat Chivapreecha, Somyot Junnapiya, Naohiko Shimizu and Kobchai Dejhan, “Biquad-Parametric Technique for Digital Filter Design Using Bilinear Pascal Matrix Operation” International Conference on Control, Automation and Systems 2008 October. 14-17, 2008 in COEX, Seoul, Korea

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ICCAS 2008

International Conference on
Control, Automation and Systems

October 14(Tue.) - 17(Fri.), 2008
COEX, Seoul, Korea

Biquad-Parametric Technique for Digital Filter Design Using Bilinear Pascal Matrix Operation

Jetsarawoot Kreuakum¹, Sorawat Chivapreecha¹, Somyot Junnapiya¹,
 Naohiko Shimizu² and Kobchai Dejhan¹

¹Faculty of Engineering and Research Center for Communication and Information Technology
 King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
 Tel: +66-2326-4238, +66-2326-4242, Fax: +66-2326-4554

E-mail: sorawat@telecom.kmitl.ac.th

²Course of Embedded Technology, Tokai University Professional Graduate School, Japan

Abstract: This paper presents a design technique for digital filter design using Pascal matrix operation for s-z transformation. The s-z transformation that used is bilinear transformation, so the obtained Pascal matrix called bilinear Pascal matrix for s-z transformation. The standard analog transfer functions of biquad filter prototype are used to idea of proposed design. The proposed design technique can give various frequency characteristic of the obtained digital filter transfer function without any frequency transformation by s variables, only some setting of parameters that called biquad-parametric technique. This technique can reduce the computational complexity, which occurs from frequency transformation matrix in previous design method.

Keywords: Pascal Matrix, Bilinear Pascal Matrix, s-z Transformation, Biquad-Parametric

1. INTRODUCTION

The bilinear Pascal matrix for s-z transformation is the design method for IIR digital filter by mapping from analog transfer function prototype to desired digital transfer function. This method is very easy to transform from analog coefficients to digital coefficients using matrix operation as proposed in [1-3]. In addition to use s-z transformation by the Pascal matrix, our previous work [2] also use the frequency transformation matrix for frequency transformation from lowpass to lowpass, lowpass to highpass, lowpass to bandpass and lowpass to bandstop frequency characteristics.

In proposed biquad-parametric technique can perform the frequency transformation without using of any frequency transformation matrices. Using of standard biquadratic transfer function in analog domain, we can use the properties of biquad transfer function to setup some parameters to control the frequency characteristics to lowpass filtering, highpass, bandpass and bandstop filtering. Moreover, the allpass filtering can be obtained from this technique. Design examples and comparison between the previous design and proposed design technique will be shown. The Butterworth digital filter design will be considered for examples.

2. BILINEAR PASCAL MATRIX FOR S-Z TRANSFORMATION

Consider the 2nd order transfer functions in analog and digital domain, respectively.

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2}{B_0 + B_1s + B_2s^2} \text{ and } H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (1)$$

The important relationship between s-z transformation using bilinear transform is

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2)$$

Replace eq. (2) into analog transfer function in eq. (1) and using the binomial theorem as referred in [1-2]. Therefore, the relationship between analog coefficients and digital coefficients will be as follows,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

From eq. (3) shows the bilinear transform matrix for 2nd order systems. The details of higher order of bilinear Pascal matrix formulation are shown in [1-2].

3. THE PREVIOUS DESIGN METHOD

At first, the normalized analog transfer functions must be scaled the frequency by replacing as follows,

$$s = \frac{s}{\Omega_c} \text{ for lowpass to lowpass} \quad (4)$$

$$s = \frac{\Omega_c}{s} \text{ for lowpass to highpass} \quad (5)$$

$$s = \frac{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}}{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})} \text{ for lowpass to bandpass} \quad (6)$$

$$s = \frac{s(\Omega_{c2} - \Omega_{c1})}{s^2 + \Omega_{c1}\Omega_{c2}} \text{ for lowpass to bandstop} \quad (7)$$

Hence, apply bilinear transform by replacing variable s follow by eq. (2) in the new transfer function and using the relationship between analog frequency and digital frequency is

$$\Omega = \tan \frac{\omega T}{2} \quad (8)$$

For computation efficiency, the two transformations can be combined into one as follow,

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} / \tan \frac{\omega_c T}{2} = \cot \left(\frac{\omega_c T}{2} \right) \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

give $T=1/F_s$, and $\omega_c = 2\pi f_c$, it can be got

$$s = \cot\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = c \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

This is an example for analog lowpass to digital lowpass transfer function. For the others can be proved in the same manner which can be summarized as follows,

$$\text{LP} \Rightarrow \text{LP} \quad s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad ; c = \cot\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) \quad (9)$$

$$\text{LP} \Rightarrow \text{HP} \quad s = k \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad ; k = \tan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) \quad (10)$$

$$\text{LP} \Rightarrow \text{BP} \quad s = \hat{c} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \hat{k} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (11)$$

$$\text{LP} \Rightarrow \text{BS} \quad s = 1 / \hat{c} \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \hat{k} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (12)$$

where $\hat{k} = k_1 k_2$ and $\hat{c} = 1/k_2 - k_1$ by $k_1 = \tan(\pi f_{c1}/f_s)$ and $k_2 = \tan(\pi f_{c2}/f_s)$, respectively.

Therefore, in practical we have to use auxiliary matrix for frequency transformation before using the bilinear Pascal matrix for s-z transformation again to complete the design [2].

4. BIQUAD-PARAMETRIC TECHNIQUE FOR FREQUENCY TRANSFORMATION

The standard form in biquadratic equations for lowpass (LP), highpass (HP), bandpass (BP), bandstop (BS) and allpass (AP) filtering are shown in [3-4]

We can improve all equations to one equation and only some parameters setting, we can achieve the desired frequency response of the digital filter without using of frequency transformation matrix. The biquad-parametric equation can be defined as

$$H(s) = \frac{\alpha \Omega_0^2 + \beta \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s + \gamma s^2}{\Omega_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) s + s^2} \quad (13)$$

Table 1 shows the value for setup the parameters in order to determine the desired filtering output.

Table 1 Parameters Setting of Proposed Technique

Type	α	β	γ
Lowpass Filter Design (LP)	1	0	0
Bandpass Filter Design (BP)	0	1	0
Highpass Filter Design (HP)	0	0	1
Bandstop Filter Design (BS)	1	0	1
* Allpass Filter Design (AP)	1	-1	1

By determine the value of Q in eq. (13) is 0.707, this equation will become to Butterworth polynomial, so we can compare the results between proposed and previous design in this condition of Butterworth digital filter design.

In addition, we can use proposed technique to design the high order digital filter by consider the form of Butterworth transfer function in s-domain as shown in eq. (14)

$$H_n(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (14)$$

This can be factored into cascaded second order form as

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{a_{2i} s^2 + a_{1i} s + a_{0i}} \quad (15)$$

where n is even order

For example, $n = 4$, the 4th order biquad analog filter can be factorized by using following expressions

$$H_{LP}(s) = \frac{\Omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right) s + \Omega_0^2} \times \frac{\Omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right) s + \Omega_0^2} \quad (16)$$

$$H_{HP}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right) s + \Omega_0^2} \times \frac{s^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right) s + \Omega_0^2} \quad (17)$$

$$H_{BP}(s) = \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right)}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right) s + \Omega_0^2} \times \frac{\left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right) s + \Omega_0^2} \quad (18)$$

$$H_{BS}(s) = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_1}\right) s + \Omega_0^2} \times \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\Omega_0}{Q_2}\right) s + \Omega_0^2} \quad (19)$$

where each Q value should be used from Table 2. The separated from pole location that can be found in [4].

Table 2 shows the Q value for each of the Butterworth poles in order to definition of the Q value in each term

Table 2 Q value of Butterworth poles

Order	2 nd	4 th	6 th	8 th
Q_1	0.707	0.541	0.517	0.509
Q_2		1.306	0.707	0.601
Q_3			1.932	0.90
Q_4				2.508

5. DESIGN EXAMPLES

Consider to design of 2nd order Butterworth digital filter in 2 cases as lowpass filter and highpass filter with the cutoff frequency is 30 Hz and sampling is 250 Hz.

Biquad-Parametric: $\Omega_0 = \tan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) = 0.3959$ and all

cases are in the form

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \Omega_0^2 \\ \beta \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

only (α, β, γ) parameters setting can give the desired filter output as shown in table 1.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LP case: $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.3135 \\ 0.1568 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.56 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7168 \\ -1.6865 \\ 0.5967 \end{bmatrix}$$

Therefore, the digital transfer function is

$$H(z) = \frac{0.0913 + 0.1826z^{-1} + 0.0913z^{-2}}{1 - 0.9824z^{-1} + 0.3477z^{-2}} \quad (20)$$

HP case: $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.56 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7168 \\ -1.6865 \\ 0.5967 \end{bmatrix}$$

Therefore, the digital transfer function is

$$H(z) = \frac{0.5825 - 1.1650z^{-1} + 0.5825z^{-2}}{1 - 0.9824z^{-1} + 0.3477z^{-2}} \quad (21)$$

In case of high order digital filter design, consider to transfer function of 4th order Butterworth lowpass and high-pass analog filter in eq. (16) and (17) with the same cutoff frequency and sampling frequency.

Biquad-Parametric: $\Omega_0 = \tan \frac{\pi f_c}{f_s} = 0.3959, Q_1 = 0.54$

$Q_2 = 1.31$ and all cases are in the form

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \Omega_0^2 \\ \beta \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 \\ \left(\frac{\Omega_0}{Q}\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

LP case: $H_{LP}(s) = H_{LP1}(s).H_{LP2}(s); (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$

For transfer function of $H_{LP1}(s)$ term;

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.3135 \\ 0.1568 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.7331 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8899 \\ -1.6864 \\ 0.4237 \end{bmatrix}$$

The digital transfer function $H_{LP1}(z)$ is

$$H_{LP1}(z) = \frac{0.0829 + 0.1659z^{-1} + 0.0829z^{-2}}{1 - 0.8923z^{-1} + 0.2241z^{-2}}$$

For transfer function of $H_{LP2}(s)$ term;

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.3135 \\ 0.1568 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.3022 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4590 \\ -1.6864 \\ 0.8546 \end{bmatrix}$$

The digital transfer function $H_{LP2}(z)$ is

$$H_{LP2}(z) = \frac{0.1074 + 0.2149z^{-1} + 0.1074z^{-2}}{1 - 1.1559z^{-1} + 0.5857z^{-2}}$$

Therefore, the transfer function of 4th order digital lowpass filter is eq. (22), shown at the bottom of the last page

HP case: $H_{HP}(s) = H_{HP1}(s).H_{HP2}(s); (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$

For transfer function of $H_{HP1}(s)$ term;

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.7331 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8899 \\ -1.6864 \\ 0.4237 \end{bmatrix}$$

The digital transfer function $H_{HP1}(z)$ is

$$H_{HP1}(z) = \frac{0.5291 - 1.0582z^{-1} + 0.5291z^{-2}}{1 - 0.8923z^{-1} + 0.2241z^{-2}}$$

For transfer function of $H_{HP2}(s)$ term;

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1568 \\ 0.3022 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4590 \\ -1.6864 \\ 0.8546 \end{bmatrix}$$

The digital transfer function of $H_{HP2}(z)$ term is

$$H_{HS2}(z) = \frac{0.6854 - 1.3708z^{-1} + 0.6854z^{-2}}{1 - 1.1559z^{-1} + 0.5857z^{-2}}$$

Therefore, the transfer function of 4th order digital highpass filter is eq. (23), shown at the bottom of the last page

The transfer functions in eq. (20)-(23) are same as transfer functions that obtained from the previous design method. The amplitude responses correspond with these transfer functions are shown in Fig. 1 and 2 and also shown the higher order (6th and 8th) transfer function that use proposed design technique.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

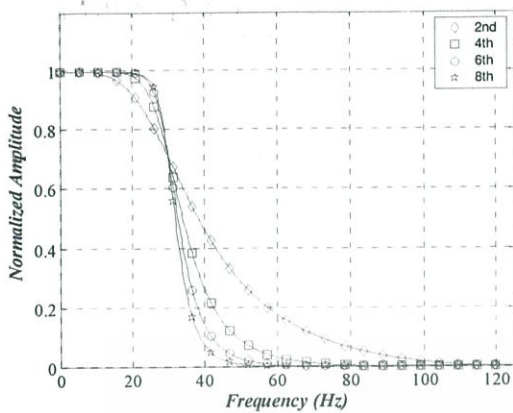


Figure 1. Amplitude Responses of 2nd, 4th, 6th, 8th order Digital Lowpass Filter

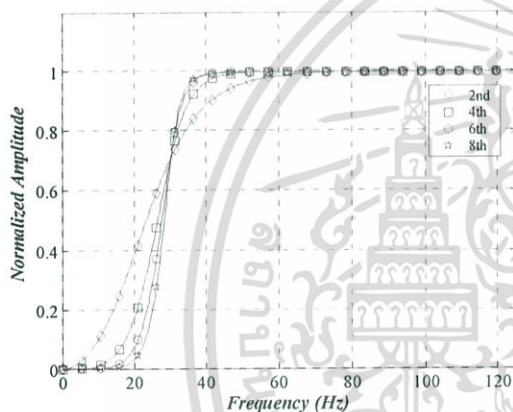


Figure 2. Amplitude Responses of 2nd, 4th, 6th, 8th order Digital Highpass Filter

In order to compare the computation complexity for 2nd order design, the previous design need 72 multiplications and 48 additions to compute the digital coefficients vectors while the proposed design technique need only 18 multiplications and 12 additions. The others order can be compared the computation complexity as shown in the Table 3.

Table 3 Comparison of Computation Complexity

Design	Order				
	Operator	2 nd	4 th	6 th	8 th
previous	addition	48	240	672	1440
	multiplication	72	300	784	1620
proposed	addition	12	40	88	154
	multiplication	18	54	108	180

Moreover, the different kind of Pascal matrix for s-z

$$H(z) = \frac{0.0829 + 0.1659z^{-1} + 0.0829z^{-2}}{1 - 0.8923z^{-1} + 0.2241z^{-2}} \cdot \frac{0.1074 + 0.2149z^{-1} + 0.1074z^{-2}}{1 - 1.1559z^{-1} + 0.5857z^{-2}} = \frac{0.0089 + 0.0356z^{-1} + 0.0535z^{-2} + 0.0356z^{-3} + 0.0089z^{-4}}{1 - 2.0482z^{-1} + 1.8412z^{-2} - 0.7820z^{-3} + 0.1315z^{-4}} \quad (22)$$

$$H(z) = \frac{0.5291 - 1.0582z^{-1} + 0.5291z^{-2}}{1 - 0.8923z^{-1} + 0.2241z^{-2}} \cdot \frac{0.6854 - 1.3708z^{-1} + 0.6854z^{-2}}{1 - 1.1559z^{-1} + 0.5857z^{-2}} = \frac{0.3627 - 1.4507z^{-1} + 2.1761z^{-2} - 1.4507z^{-3} + 0.3627z^{-4}}{1 - 2.0482z^{-1} + 1.8412z^{-2} - 0.7820z^{-3} + 0.1315z^{-4}} \quad (23)$$

transformation in case of HP transformation in previous design method [2] is not necessary in case of the biquad-parametric technique, the unique form of s-z Pascal matrix transformation is used in proposed design. Finally, we can improve the proposed design technique to automatic scaling the value of b_0 equals to 1 by insert the constant l into the right hand side (analog coefficients) vectors as follows,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha l \Omega_0^2 \\ \beta l (\frac{\Omega_0}{Q}) \\ \gamma l \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \Omega_0^2 \\ l (\frac{\Omega_0}{Q}) \\ l \end{bmatrix}$$

where
$$l = \frac{1}{\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0}{Q} + 1}$$

6. CONCLUSIONS

The proposed design technique can use to design the digital filter from analog transfer function prototype in the form of standard biquadratic transfer function into digital transfer function. The frequency characteristic of desired digital filter transfer function can be chosen from (α, β, γ) parameters setting. The proposed design technique can give results same as previous design method in case of LP and HP type with lower computational complexity. In case of BP and BS, this technique can work but still have some limitations (due to the property of biquad filter) when compared with previous design method.

REFERENCES

- [1] B. Psenicka and F. Garcia-Ugalde, "Z Transform From Lowpass to Bandpass by Pascal Matrix," IEEE Signal Processing Letters, Vol. 1, No. 2, pp. 282-284, Febuary 2004.
- [2] S. Chivapreecha, S. Sriyapong, S. Junnapiya and K. Dejhan, "Bilinear s-z with Frequency Transformation Using Pascal Matrix Operation," Proc. IEEE International Symposium on Communications and Information Technology (ISCIT 2005), pp. 739-742, October 2005.
- [3] S. Chivapreecha, A. Jarurarakul and K. Dejhan, "Modified Pascal Matrix for Biquad Digital Filter Design and Its Filter Structure Realization," Proc. The 4th international Colloquium on Signal Processing and Its Application (CSPA) 2008, Kuala Lumpur, Malaysia, March 2008.
- [4] M. E. Van Valkenburg, Analog Filter Design, Holt-Saunders International Editions : New York, 1982.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายเจษฎาวุฒิ เครือคำ
วัน เดือน ปีเกิด	26 กุมภาพันธ์ 2523 ที่จังหวัดลำปาง
ที่อยู่	129 หมู่ 2 ต.พระบาท อ.เมือง จังหวัดลำปาง 52000
ประวัติการศึกษา	2546 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรม และอุปกรณ์การแพทย์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2553 วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ความชำนาญเฉพาะทาง	Computer Network
ประสบการณ์การทำงาน	ตำแหน่ง Information Security Engineer บริษัท Universal Communication Systems Co. Ltd.,
2550 - ปัจจุบัน	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้