

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

แบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ

AGE STRUCTURAL MODELS FOR LEPTOSPIROSIS



T117085



สาขา.....
เลขทะเบียน.....117085
วันเดือนปี..... 23 ส.ค. 2554



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2553

KMITL - 2010 - SC - M - 001 - 006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

AGE STRUCTURAL MODELS FOR LEPTOSPIROSIS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2010

KMITL - 2010 - SC - M - 001 - 006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2010

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ แบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ
AGE Structural Models for Leptospirosis
นักศึกษา นายทองอุ่น มั่นหมาย
รหัสประจำตัว 48067407
ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

| คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ | | ลายมือชื่อ | |
|--------------------------|--------------|---|---|
| ดร.ใจปอง | เกษมสุวรรณ |  |  |
| ผศ.ดร.พันธณี | พงศ์สัมพันธ์ |  |  |
| ดร.พรรมทิพย์ | ภัทรอินทากร |  |  |
| ดร.สุขุมล | สาริกะวนิช |  |  |

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 10 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2553 เวลา 11.30-13.30 น.
สถานที่สอบ ณ อาคารจุฬาราม 1 คณะวิทยาศาสตร์ ห้อง 219

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.คุณฉวี ธนะบริพัตร)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ ๕ เดือน ๕๑. พ.ศ. ๒๕๕๓

สำนักทะเบียนและประมวลผล สจล.
บันทึกส่งเล่มวิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์
วันที่ 11 เดือน ๕๑ พ.ศ. ๕๓
ลงชื่อ.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น หากมีการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

| | |
|-------------------|--|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์ | แบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ |
| นักศึกษา | นายทองอุ่น มั่นหมาย |
| รหัสประจำตัว | 48067407 |
| ปริญญา | วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต |
| สาขาวิชา | คณิตศาสตร์ประยุกต์ |
| พ.ศ. | 2553 |
| อาจารย์ที่ปรึกษา | ศศ.ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์ |

บทคัดย่อ

โรคเลปโตสไปโรซิสเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อแบคทีเรียเลปโตสไปรา (Leptospira) โรคนี้พบได้ทั่วโลก (ยกเว้นเขตขั้วโลก) ในเขตเมืองและชนบท ทั้งในประเทศที่พัฒนาแล้วและประเทศที่กำลังพัฒนา โดยเฉพาะประเทศไทย โรคนี้สามารถถูกถ่ายทอดเชื้อจากหนู ซึ่งคนติดต่อก็เชื้อโรคได้ 2 ทาง คือ ทางตรง โดยการสัมผัสหนูที่นำเชื้อเข้าสู่ร่างกายและทางอ้อม โดยเชื้อที่ปนในน้ำในดิน เข้าสู่คนทางผิวหนังหรือเยื่อบุที่ตา ปาก จมูก ข้อมูลของผู้ป่วยที่เป็น โรคเลปโตสไปโรซิส ทำให้พบว่า โรคนี้เป็นในผู้ใหญ่มากกว่าในเด็ก การระบาดของโรคได้นำมาศึกษา โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และมีการแบ่งโครงสร้างอายุออกเป็น 2 กลุ่ม คือ เด็กและผู้ใหญ่ แล้วทำการสร้างสมการสำหรับประชากรแต่ละกลุ่มอายุ มีทั้งประชากรของคนและหนู จากนั้นนำวิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลอง ได้ถูกนำมาแสดง เพื่อใช้ในการสนับสนุนการทำนายเชิงทฤษฎีในการศึกษาการลดการระบาดของโรค

คำสำคัญ : โรคเลปโตสไปโรซิส, การจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน

| | |
|-----------------------|---|
| Thesis Title | Age Structural Models for Leptospirosis |
| Student | Mr.Thong – oon Manmai |
| Student ID | 48067407 |
| Degree | Master of Science |
| Program | Applied Mathematics |
| Year | 2010 |
| Thesis Advisor | Asst.Prof.Dr.Puntani Pongsumpun |

ABSTRACT

Leptospirosis is a bacterial disease caused by spirochetes of the genus *Leptospira*. This disease occurs worldwide (except the poles of the earth), urban and rural areas, developed and developing countries, especially in Thailand. It can be transmitted to the human by rats through direct and indirect ways. Human can be infected by either touching the infected rats or contacting with water, soil containing urine from the infected rats through skin, eyes and nose. The data of the people who are infected with this disease indicates that most of the patients are adults. Transmission of this disease is studied through the mathematical model. The population is separated into human and rat. The human is divided into two classes namely children and adult. The model equation is constructed for each class. The standard dynamical modeling method is then used for analyzing the behaviors of solutions. In addition, the conditions of the parameters for the disease free and endemic states are obtained. Numerical solutions are shown to support the theoretical predictions. The results of this study guide the way to decrease the disease outbreak.

Keywords : leptospirosis, standard dynamical modeling

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือจากอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.พันธ์ พงศ์สัมพันธ์ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้ ให้โอกาส ให้กำลังใจและประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้าตลอดมา

ขอขอบพระคุณ ดร.พรหมทิพย์ ภัทรอินทากร, ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ และดร.สุขุมล สารีกะวณิช กรรมการสอบหัวข้อและโครงร่างวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ความกรุณาและคำชี้แนะจนในที่สุดวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบคุณ อาจารย์สราวุธ ดันดีวัฒน์, อาจารย์เวชชัย สังข์สาย, ผศ.อรพรรณ ธรรมมา, ผศ.ชื่นชม พงษ์สวัสดิ์, อาจารย์สุภาวดี สุขชีพ, อาจารย์สุกัญญา สมพร้อม, อาจารย์ปิยพร สีสันต์, อาจารย์อนงค์นาฏ สระแก้ว, อาจารย์สิรินภา ประกอบดี, อาจารย์รุจิรา คงนุ้ย, อาจารย์สุขพัทธ์ แผนสมบูรณ์, คุณครูศุภใจ จิงวิเศษพงศ์, คุณครูทิพวรรณ เกษคำ, คุณครูสิริภานต์ ติมพาลี, คุณครูอรุณี บัววัด, คุณครูณรงค์ พลภักดี, คุณครูสุวรรณรัช นัตถิปัญญาและคุณครูจวารัตน์ ละอองสุวรรณ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้ข้อเสนอแนะและให้กำลังใจเสมอมา

ขอขอบคุณ คุณเอโมทัย กิตติธรรมการณ เพื่อคนที่คอยให้ความช่วยเหลือการทำวิทยานิพนธ์ สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบให้กับบิดามารดา ซึ่งเป็นที่รักและเคารพอย่างยิ่งและพี่ๆ ที่มีได้กล่าวถึง โดยให้การสนับสนุนเรื่องการเรียนตลอดมาตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทความรู้และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

ทองอุ่น มั่นหมาย

สารบัญ

| | หน้า |
|---|-----------|
| บทคัดย่อภาษาไทย | I |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ | II |
| กิตติกรรมประกาศ..... | III |
| สารบัญ | IV |
| สารบัญตาราง | VI |
| สารบัญรูป | VII |
| บทที่ 1 บทนำ..... | 1 |
| 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ | 1 |
| 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย..... | 1 |
| 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย | 2 |
| 1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย..... | 2 |
| 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ..... | 2 |
| บทที่ 2 นิยาม ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... | 3 |
| 2.1 ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง | 3 |
| 2.2 ฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ | 3 |
| 2.3 จาโคเบียนเมทริกซ์..... | 3 |
| 2.4 จุดสมดุล | 3 |
| 2.5 การหาผลเฉลยจุดสมดุลของระบบ | 6 |
| 2.6 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคติดเชื้อ | 7 |
| 2.7 โรคเลปโตสไปโรซิส..... | 9 |
| 2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... | 14 |
| บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย | 16 |
| 3.1 การวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ..... | 16 |
| 3.2 การสร้างแบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ..... | 17 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

| | หน้า |
|--|------------|
| บทที่ 4 ผลงานวิจัย | 24 |
| 4.1 แบบจำลองที่ 1 | 24 |
| 4.2 แบบจำลองที่ 2 | 40 |
| 4.3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข | 56 |
| บทที่ 5 บทสรุปผลและข้อเสนอแนะ | 96 |
| เอกสารอ้างอิง | 103 |
| ภาคผนวก | 105 |
| ภาคผนวก ก ตัวอย่างคำสั่ง Mathematica ของแบบจำลอง | 106 |
| ภาคผนวก ข ผลงานทางวิชาการ | 126 |
| ประวัติผู้วิจัย | 133 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

| ตารางที่ | หน้า |
|---|------|
| 3.1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและหนู | 17 |
| 4.3.1 ค่าพารามิเตอร์และอัตราของข้อมูลของคนและหนูแบบจำลองที่ 1 | 56 |
| 4.3.2 ระยะเวลา ณ จุดสมดุล S I S I และ I แบบจำลองที่ 1 | 61 |
| 4.3.3 ค่าพารามิเตอร์และอัตราของข้อมูลของคนและหนูแบบจำลองที่ 2 | 62 |
| 4.3.4 ระยะเวลา ณ จุดสมดุล S I S I และ I แบบจำลองที่ 2 | 61 |



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

| รูปที่ | หน้า |
|--|------|
| 2.6.1 แผนภาพแบบจำลอง SIR | 8 |
| 2.7.1 การระบาดของโรคหนูเป็นพาหะ / โรคเลปโตสไปโรซิส ปี 1970 – 1998 | 10 |
| 2.7.2 โครงสร้างของเชื้อแบคทีเรียก่อโรคเลปโตสไปรา | 10 |
| 2.7.3 วงจรชีวิตของหนู | 11 |
| 2.7.4 แสดงวงจรการแพร่ระบาดของเชื้อเลปโตสไปรา | 12 |
| 2.7.5 การกระจายของผู้ป่วยเลปโตสไปโรซิสรายจังหวัด ปี 2539 – 2545 | 14 |
| 3.1 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรด้านคนแบ่งตามภาค ปี พ.ศ. 2543 | 16 |
| 3.2 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรที่ป่วยเป็น โรคเลปโตสไปโรซิสแบบจำลองที่ 1 | 18 |
| 3.3 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรที่ป่วยเป็น โรคเลปโตสไปโรซิสแบบจำลองที่ 2 | 19 |
| 3.4 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของหนู | 21 |
| 4.3.1 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อ การติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับ เวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค เมื่ออัตราการถ่ายเทเชื้อจากหนูไปหนู (γ) เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 1 | 57 |
| 4.3.2 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อ การติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับ เวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายเทเชื้อจากหนู ไปหนู (γ) เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 1 | 58 |
| 4.3.3 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อ การติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับ เวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายเทเชื้อจากหนู ไปหนู (γ) เท่ากับ 0.00001 ของแบบจำลองที่ 1 | 59 |
| 4.3.4 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อ การติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับ เวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายเทเชื้อจากหนู ไปหนู (γ) เท่ากับ 0.0001 ของแบบจำลองที่ 1 | 60 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญรูป (ต่อ)

| รูปที่ | หน้า |
|--|------|
| 4.3.5 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค เมื่ออัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู (γ) เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 2..... | 63 |
| 4.3.6 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู (γ) เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 2..... | 64 |
| 4.3.7 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู (γ) เท่ากับ 0.00001 ของแบบจำลองที่ 2..... | 65 |
| 4.3.8 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่ออัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู (γ) เท่ากับ 0.0001 ของแบบจำลองที่ 2..... | 66 |
| 4.3.9 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1..... | 68 |
| 4.3.10 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 2..... | 69 |
| 4.3.11 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1..... | 70 |
| 4.3.12 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 2..... | 71 |
| 4.3.13 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1..... | 74 |
| 4.3.14 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1..... | 75 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

| รูปที่ | หน้า |
|--|------|
| 4.3.15 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1..... | 76 |
| 4.3.16 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1..... | 77 |
| 4.3.17 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1..... | 78 |
| 4.3.18 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2..... | 79 |
| 4.3.19 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2..... | 80 |
| 4.3.20 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2..... | 81 |
| 4.3.21 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2..... | 82 |
| 4.3.22 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2..... | 83 |
| 4.3.23 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อโรคเลปโตสไปโรจิตเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัวของแบบจำลองที่ 1 | 84 |
| 4.3.24 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อโรคเลปโตสไปโรจิตเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัวของแบบจำลองที่ 1 ในรูปแบบสองมิติ | 85 |
| 4.3.25 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อโรคเลปโตสไปโรจิตเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัวของแบบจำลองที่ 1 ในรูปแบบสามมิติ | 86 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่

หน้า

| | | |
|--------|---|----|
| 4.3.26 | กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว ของแบบจำลองที่ 2 | 88 |
| 4.3.27 | กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว ของแบบจำลองที่ 2 ในรูปแบบสองมิติ | 89 |
| 4.3.28 | กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว ของแบบจำลองที่ 2 ในรูปแบบสามมิติ | 90 |
| 4.3.29 | กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง เมื่อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นของแบบจำลองที่ 1 | 92 |
| 4.3.30 | กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อ โรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง เมื่อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นของแบบจำลองที่ 2 | 93 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

โรคเลปโตสไปโรซิสเป็นปัญหาสาธารณสุขที่สำคัญในประเทศไทย เนื่องจากมีการพบเชื้อนี้แพร่กระจายอยู่ทั่วไปในทุกภูมิภาค ประกอบกับประเทศไทยเป็นประเทศเกษตรกรรม มีสภาพดินที่ชุ่มชื้นและน้ำขังเหมาะกับการแพร่กระจายของเชื้อเป็นอย่างดี นอกจากนี้ยังมีรังโรคที่ชุกชุมอีกด้วย ดังนั้นควรเฝ้าระวังโรคอย่างต่อเนื่อง ให้ความรู้แก่ประชาชนและบุคลากรทางการแพทย์จะนำไปสู่การควบคุมป้องกันที่ได้ผลและช่วยให้แพทย์สามารถให้การวินิจฉัย ดูแลผู้ป่วยได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมต่อไป [6]

ด้วยการเล็งเห็นความสำคัญของชีวิตและทรัพย์สินของประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคนี้ ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาจากข้อมูลของผู้ป่วยที่ได้รวบรวมมาจากกระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 – 2549 พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคเลปโตสไปโรซิส เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของสำนักโรคระบาดวิทยาและกรมควบคุมโรคที่นำโดยสัตว์ฟันแทะ กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาอัตราการเพิ่มและการลดของจำนวนผู้ป่วยในแต่ละปี แต่ละภูมิภาคและแต่ละจังหวัดตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 – 2549
2. เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคเลปโตสไปโรซิส แล้วใช้เป็นตัวบ่งชี้วัดสำหรับการคาดการณ์จำนวนผู้ป่วยในแต่ละปี อีกทั้งยังใช้เป็นแนวทางหาวิธีการป้องกันโรคและลดจำนวนผู้ป่วยต่อไป
3. เพื่อหาว่าอัตราการเกิดโรคของจำนวนผู้ป่วยในช่วงใดมากที่สุดและน้อยที่สุดตามข้อมูลที่ถูกรวบรวมไว้
4. เพื่อใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวัง ของทางสำนักโรคระบาดวิทยาและกรมควบคุมโรคที่นำโดยสัตว์ฟันแทะ กระทรวงสาธารณสุข

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

วิเคราะห์จำนวนผู้ป่วยสำหรับแต่ละช่วงอายุในแต่ละปี แต่ละภูมิภาคและแต่ละจังหวัด ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 – 2549 เพื่อสร้างเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคเลปโตสไปโรซิส พร้อมทั้งกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่

1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 รวบรวมข้อมูลสถิติการเกิดโรคโดยแยกตามอายุประชากรทั้งหมดของประเทศไทย

ขั้นตอนที่ 3 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคเลปโตสไปโรซิส

ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ว่าปัจจัยใดบ้างที่สามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้

ขั้นตอนที่ 5 ทดสอบแบบจำลองที่ได้ว่ามีความเหมาะสมหรือไม่

ขั้นตอนที่ 6 พัฒนาแบบจำลองที่ได้ใหม่ถ้าแบบจำลองยังคงไม่เหมาะสม

ขั้นตอนที่ 7 สรุปผลที่ได้จากการทดสอบแบบจำลองและเสนอแนะแนวทางการพัฒนาแบบจำลองต่อไปในอนาคต

ขั้นตอนที่ 8 เขียนวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เสนอแนวทางใหม่ในการลดการระบาดของโรคเลปโตสไปโรซิส
2. เป็นแนวทางการวิจัยสำหรับผู้ที่มีความสนใจเกี่ยวกับวิธีการควบคุมการระบาดของโรคควบคู่ไปกับแนวความคิดเกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

นิยาม ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะ

นิยาม 2.1.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n , X เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ใน \mathbb{R}^n , X เรียกว่าเป็นเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ $AX = \lambda X$ สำหรับบางค่าสเกลาร์ โดยที่ λ สเกลาร์ λ เรียกว่า ค่าเฉพาะของ A (Eigenvalue)

2.2 พังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ

นิยาม 2.2.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n , $\det(A - \lambda I_n)$ เรียกว่า พังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial) และสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

2.3 จาคอบีเยนเมทริกซ์

นิยาม 2.3.1 ให้ $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของ x โดยที่ $f(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)]^T$ ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)$ เทียบกับ x จะเรียกว่า จาคอบีเยนเมทริกซ์ (Jacobian matrix) หรือ จาคอบีเยนของ $f(x)$ นิยามโดย

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2.4 จุดสมดุล

นิยาม 2.4.1 จุด $X_e \in \mathbb{R}^n$ เป็น จุดสมดุล (Equilibrium point) ของ

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \tag{2.1}$$

ถ้า $f(t, X_e) = 0$ สำหรับทุกๆ $t \geq t^*$

ถ้า X_e เป็นจุดสมดุลของ (2.1) ที่ t^* แล้ว X_e เป็นจุดสมดุลสำหรับทุกๆ $\tau \geq t^*$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.4.2 จุดสมดุค $X=0$ ของสมการ (2.1) มีเสถียรภาพ ถ้าสำหรับทุกๆ $\delta > 0$ และ $t_0 \in \mathbb{R}^+$ มี $\omega(\delta, t_0) > 0$ ซึ่งทำให้ $|u(t, t_0, \gamma)| < \delta$ สำหรับทุกๆ $t \geq t_0$ เมื่อ $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$ และ $u(t, \gamma)$ เป็นคำตอบของสมการ (2.1)

นิยาม 2.4.3 จุดสมดุค $X=0$ ของสมการ (2.1) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically stable)

- ถ้า
- 1) จุดสมดุค $X=0$ ของสมการ (2.1) มีเสถียรภาพ และ
 - 2) สำหรับทุกๆ $t_0 \geq 0$ มี $\varepsilon(t_0) > 0$ ซึ่งทำให้ $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0$ เมื่อ $|\gamma| < \varepsilon$

นิยาม 2.4.4 จุดสมดุค $X=0$ ของสมการ (2.1) ไม่มีเสถียรภาพ ถ้าไม่มีเสถียรภาพในกรณีนี้มี $t_0 \geq 0$ และลำดับ $\gamma_m \rightarrow 0$ ของจุดเริ่มต้นและลำดับ t_m ซึ่ง $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$ สำหรับทุกๆ $m, t_m \geq 0$

โดยทั่วไปมีการพิจารณาระบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งสองสมการ มาใช้ดังนี้

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X, Y) \quad (2.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = g_2(X, Y) \quad (2.3)$$

เมื่อ g_1 และ g_2 เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นและให้ (\bar{X}, \bar{Y}) เป็นจุดสมดุค แล้ว

$$g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$$

จัดผลเฉลยให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$X(t) = \bar{X} + x(t)$$

(2.4)

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t) \quad (2.5)$$

วิธีการนี้เรียกว่า เพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation) ของจุดสมดุค จากนั้นแทน (2.4) และ (2.5) ใน

(2.2) และ (2.3) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d}{dt}(\bar{X} + x) = g_1(\bar{X} + x, \bar{Y} + y)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y} + y) = g_2(\bar{X} + x, \bar{Y} + y)$$

ต่อไปกระจายอนุพันธ์ทางซ้ายและกระจาย g_1, g_2 ทางขวาโดยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดสมดุล (\bar{X}, \bar{Y}) แล้วจะได้ว่า

$$\frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} = g_1(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{11}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{12}(\bar{X}, \bar{Y})y + \text{พจน์ของอันดับ } x^2, y^2, xy \text{ และอันดับที่สูงขึ้น} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{21}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{22}(\bar{X}, \bar{Y})y + \text{พจน์ของอันดับ } x^2, y^2, xy \text{ และอันดับที่สูงขึ้น} \quad (2.7)$$

เมื่อ $g_1(\bar{X}, \bar{Y})$ เป็น $\frac{\partial g_1}{\partial t}$ ถูกคำนวณที่ (\bar{X}, \bar{Y}) และในทำนองเดียวกันสำหรับ $g_1(\bar{X}, \bar{Y}), g_2(\bar{X}, \bar{Y}), g_{21}(\bar{X}, \bar{Y})$ และพจน์อื่นๆ ด้วย

โดยนิยามของจุดสมดุลได้ว่า $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0, \frac{d\bar{Y}}{dt} = 0, g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ และ $g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ ดังนั้นจาก (2.6) และ (2.7) จะได้ว่า

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

นิยาม J เป็นจาโคเบียนเมทริกซ์ของสมการ (2.2) และ (2.3) และกำหนดโดย

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $\alpha = a_{11} + a_{22}$, $\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ และ $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ เรียกว่า ดิสคริมิแนนต์ (Discriminant) แล้วสมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$

ดังนั้น ค่าเฉพาะจะอยู่ในรูปของ $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$ ซึ่งระบบเชิงเส้น สามารถมีจุดสมมูลได้มากกว่าหนึ่งจุดหรือมีจุดเป็น $(0,0)$ ถ้า $\beta = \det J \neq 0$

ทฤษฎีบท 2.4.1 จุดสมมูล $X=0$ ของสมการ (2.1) มีเสถียรภาพ ถ้าค่าเฉพาะของ J ทั้งหมดมีส่วนจริงเป็นลบและทุกๆ ค่าเฉพาะของ J ซึ่งมีส่วนจริงเป็นศูนย์และศูนย์ตัวนี้เป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของ J

2.5 การหาผลเฉลยจุดสมมูลของระบบ

2.5.1 แบบจำลองจุดสมมูลของระบบเชิงเส้นชนิดไม่ต่อเนื่อง สมการผลต่างไม่เชิงเส้น คือ สมการที่อยู่ในรูปของ

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots)$$

เมื่อ x_n คือ ค่าของ x ในลำดับที่ n และ f เป็นฟังก์ชันของการทำซ้ำๆ กัน

ผลเฉลยจุดสมมูลของระบบ ซึ่งเมื่อ \bar{x} ถูกกำหนดให้ค่าสัมพัทธ์ได้อย่างชัดเจน คือ

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x}$$

ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงในลำดับที่ n ถึงลำดับที่ $n+1$ จากสมการที่อยู่ในรูป $x_{n+1} = f(x_n)$ จะได้รูปแบบความสัมพันธ์ที่เข้าใจได้ง่ายขึ้นอีก คือ

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

และนำมาอ้างอิงเช่นเดียวกับ จุดตรึง (Fixed point) ของฟังก์ชัน f

นิยาม 2.5.1 จุด x เป็น จุดตรึง ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f(x) = x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.2 แบบจำลองจุดสมดุลของระบบสมการชนิดต่อเนื่อง

การหาจุดสมดุลของระบบ หาได้โดยพิจารณาแบบจำลองที่มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{dX_1}{dt} = F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

⋮

$$\frac{dX_n}{dt} = F_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

(2.8)

ผลเฉลยจุดสมดุลของระบบสมการนี้ สามารถหาได้จากการจัดให้สมการทุกสมการของ (2.8) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$F_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

$$F_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

$$F_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0$$

2.6 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคติดเชื้อ

การสร้างแบบจำลอง SIR มีรูปแบบดังนี้

| | | | |
|-----|---|---|--|
| ให้ | N | = | จำนวนของประชากร |
| | S | = | จำนวนของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อของประชากร |
| | I | = | จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ของประชากร |
| | R | = | จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ของประชากร |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย $\beta, \nu, \gamma, \delta$ และ α เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นค่าคงที่ ดังนี้

- β = อัตราของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อของประชากรแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ (สามารถถ่ายทอดเชื้อได้)
- ν = อัตราของผู้ที่ติดเชื้อ (สามารถถ่ายทอดเชื้อได้) แล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้
- δ = อัตราการตายของประชากร
- α = อัตราการเกิดของประชากร

- เมื่อ βSI = จำนวนของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและ (สามารถถ่ายทอดเชื้อได้)
- νI = จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้แล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้
- δS = จำนวนของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต
- δI = จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เสียชีวิต
- δR = จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ที่เสียชีวิต
- αN = จำนวนของผู้ที่เกิดใหม่

ดังนั้น นำมาเขียนโครงสร้างได้ดังนี้



รูปที่ 2.6.1 แผนภาพแบบจำลอง SIR

อธิบายรายละเอียดของแบบจำลองได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา

= จำนวนของผู้ที่เกิดใหม่ - จำนวนของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ - จำนวนของผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการเปลี่ยนแปลงของผู้ที่ติดเชื้อ (สามารถถ่ายทอดเชื้อได้) เทียบกับเวลา

- = จำนวนผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้
- จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้แล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้
 - จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เสียชีวิต

อัตราการเปลี่ยนแปลงของผู้ที่ฟื้นไข้เทียบกับเวลา

- = จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้แล้วไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้
- จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ที่เสียชีวิต

นำมาเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \alpha N - \beta SI - \delta S,$$

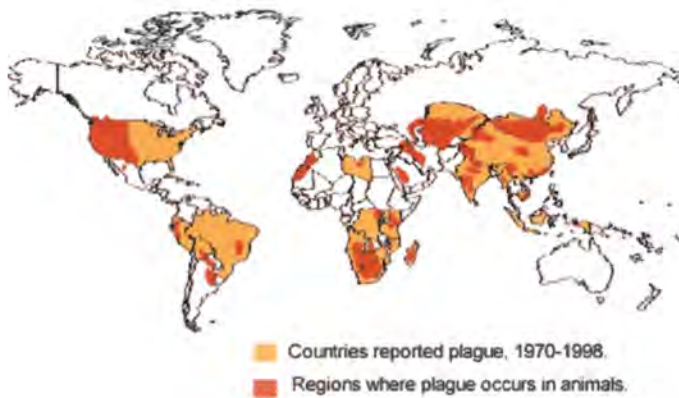
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I - \delta I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \nu I - \delta R$$

2.7 โรคเลปโตสไปโรซิส

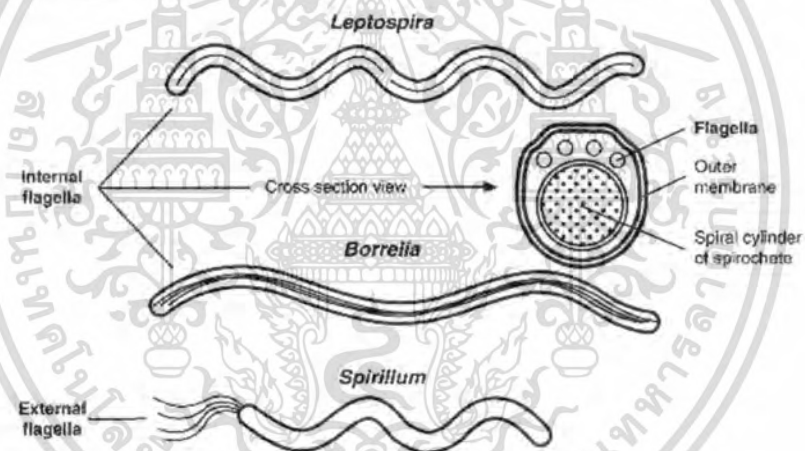
ปี 1883 มีผู้ป่วยเป็นคณงานทำงานในท่อระบายน้ำ ผู้ป่วย 4 ราย ล้วนมีอาการรุนแรง มีไข้สูง คีซ่าน เลือดออกและไตวาย ต่อมาอีก 3 ปี นายแพทย์เวล รายงานลักษณะอาการของผู้ป่วย ในวารสารทางการแพทย์เป็นครั้งแรก ครั้งนั้นจึงเรียกชื่อโรค ตามชื่อของท่านว่า Weil's disease ต่อมาผู้ที่ค้นพบเชื้อโรคที่เป็นสาเหตุของโรคนี้เป็นแพทย์ชาวญี่ปุ่น ชื่อโอนาคา ค้นพบเมื่อปี 1916 เรียกชื่อเชื้อแบคทีเรียดังกล่าวว่า เลปโตสไปรา (Leptospira) และเรียกชื่อโรคว่า เลปโตสไปโรซิส (Leptospirosis) [18]

World Distribution of Plague, 1998



รูปที่ 2.7.1 การระบาดของโรคหนูเป็นพาหะ / โรคเลปโตสไปโรซิส ปี 1970 – 1998 [17]

2.7.1 แบคทีเรียก่อโรค



รูปที่ 2.7.2 โครงสร้างของเชื้อแบคทีเรียก่อโรคเลปโตสไปรา [13]

เชื้อที่ทำให้เกิดโรคเลปโตสไปโรซิสมิ 7 สายพันธุ์ ได้แก่ *Leptospira interrogans*, *Leptospira kirschneri*, *Leptospira noguchii*, *Leptospira borgpetersenii*, *Leptospira santarosai*, *Leptospira weilii* และ *Leptospira inadai*

สายพันธุ์ที่คนเป็นมากที่สุดและตายมากที่สุด คือ *Leptospira interrogans* และชนิดที่คนเป็นมากที่สุด คือ ชนิดอิกเทอร์โรฮีโมราเจีย (*Icterohemorrhagia*) และชนิดปัตตาเวีย (*Bataviae*) [7,8]

2.7.2 แหล่งรังโรค

ทั้งสัตว์ป่าและสัตว์เลี้ยงหลายชนิดเป็นแหล่งรังโรค ซึ่งเชื้อแต่ละชนิด (serovars) มักมีสัตว์ที่เป็นแหล่งรังโรคหลัก เช่น หนู (*L. icterohemorrhagiae* และ *L. copenhageni*) จากการสำรวจสัตว์ในกรุงเทพฯ เมื่อปี 2508 พบว่าหนูท่อติดเชื้อ 66% พบว่าหนูทุกติดเชื้อ 40% และสุนัข ติดเชื้อ 8% แสดงว่าหนูเป็นตัวแพร่เชื้อหลักที่สำคัญ [20]

2.7.3 วงจรชีวิตหนู

โดยธรรมชาติหนูจะมีอายุประมาณ 1 ปี เมื่อมีอายุ 2 เดือนขึ้นไป ก็สามารถผสมพันธุ์ได้แล้ว ระยะตั้งท้องประมาณ 21 วัน และหลังจากคลอดลูกแล้ว ภายใน 24 ชั่วโมง หนูเพศเมียจะสามารถผสมพันธุ์ได้อีกและประมาณ 21 วัน ลูกหนูจะหย่านมจากแม่ จากนั้นเมื่อมีอายุ 2 เดือนขึ้นไป หนูก็สามารถผสมพันธุ์ได้อีก ดังนั้นมันจึงสามารถออกลูกได้ปีละไม่น้อยกว่า 4-6 ครอก ครอกละประมาณ 4-10 ตัว [16]

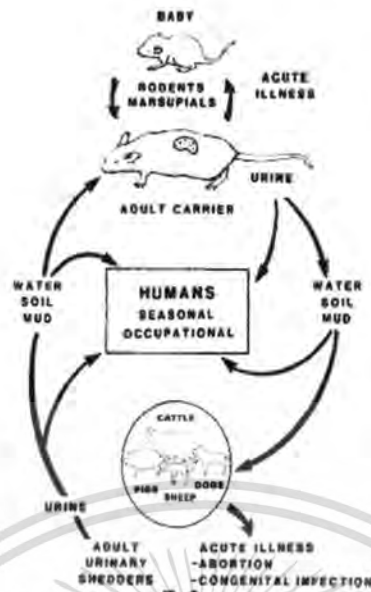


รูปที่ 2.7.3 วงจรชีวิตของหนู

2.7.4 การแพร่ระบาดของโรค

โรคนี้พบได้ทั่วโลกแต่พบในเขตเมืองร้อนได้บ่อยกว่า คนติดต่อเชื้อโรคได้ 2 ทาง คือ

1. ทางตรง โดยการสัมผัสสัตว์ที่นำเชื้อระหว่างสัตว์ต่อสัตว์หรือคนต่อคนโดยเพศสัมพันธ์
2. ทางอ้อม โดยเชื้อที่ปนในน้ำ ในดินเข้าสู่คนทางผิวหนัง เยื่อบุที่ตา ปาก จมูก



รูปที่ 2.7.4 แสดงวงจรการแพร่ระบาดของเชื้อเลปโตสไปรา [7]

2.7.5 อาการแสดงของโรค

โรคนี้มีระยะฟักตัว โดยเฉลี่ย 5 – 14 วัน ผู้ที่ได้รับเชื้อเลปโตสไปราจำนวนหนึ่งไม่มีอาการทางคลินิก (Subclinical infection) ส่วนผู้ป่วยที่มีอาการทางคลินิกแบ่งเป็น 2 ระยะ

ระยะแรก (Leptospiremic phase) เป็นระยะ 4 – 7 วันแรกของการดำเนินโรค ซึ่งสามารถแยกเชื้อเลปโตสไปราได้จากเลือดและน้ำไขสันหลัง ผู้ป่วยจะมีอาการไข้สูงแบบทันทีทันใด ปวดศีรษะ ปวดเมื่อยกล้ามเนื้อมาก โดยเฉพาะกล้ามเนื้อหลังน่องและต้นคอและมีคลื่นไส้ อาเจียน อารมณ์ตาแดง ซึ่งเป็นผลจากการที่เส้นเลือดในเยื่อตาขยายตัวโดยไม่มีอาการอักเสบเป็นหนอง มักพบใน 3 วันแรกของโรคและเป็นอยู่ได้นานถึง 1 สัปดาห์ อาจพบมีอาการคอแข็ง ความดันโลหิตตก การตรวจร่างกายอื่นที่อาจพบได้แต่ไม่บ่อย ได้แก่ ผื่น คอแดง ต่อมทอนซิลโต ตับม้ามโต

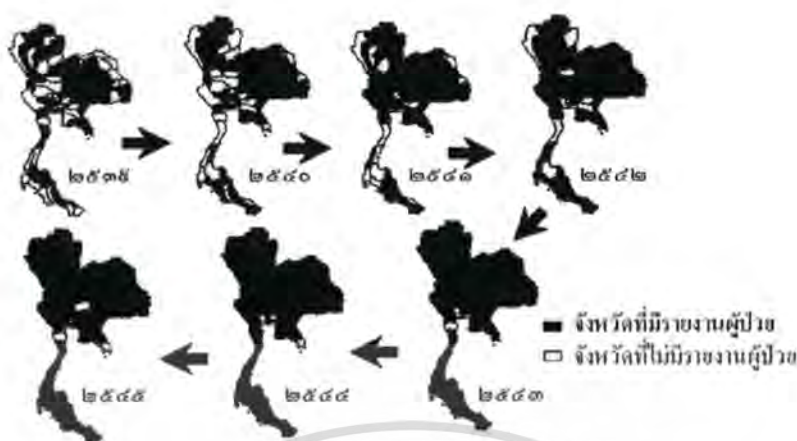
ระยะที่สอง (Immune phase) ในรายที่อาการไม่รุนแรงหลังจากมีไข้ประมาณ 1 สัปดาห์ จะมีช่วงที่ไข้ลงประมาณ 1–2 วัน แล้วกลับมีไข้ขึ้นใหม่เข้าสู่ระยะที่สองนี้ ทำให้ผู้ป่วยมักมีอาการปวดหัว ซึ่งไม่ค่อยตอบสนองต่อการกินยาแก้ปวด อาจมีอาการสับสน ไข้ต่ำๆ คลื่นไส้ อาเจียนแต่ไม่รุนแรง เยื่อหุ้มสมองอักเสบ ม่านตาอักเสบ ผื่นและพบหน้าที่ของตับและไตผิดปกติ ในผู้ป่วยซึ่งมีอาการรุนแรงจะมีไข้สูงลอยและมีอาการหรืออาการแสดงของระยะนี้ตั้งแต่ปลายสัปดาห์แรกของโรค โดยไม่มีช่วงที่ไข้ลดลง ระยะนี้อาจกินเวลาดังแต่ 4 ถึง 30 วัน จะตรวจพบเชื้อในเลือดและน้ำไขสันหลังได้ใน 1–2 วันแรกของระยะนี้เท่านั้น หลังจากนั้นจะตรวจพบเชื้อได้ในปัสสาวะและน้ำหล่อเลี้ยงลูกตาดังกล่าวแล้ว โดยเชื่อว่าจะออกมาในปัสสาวะนาน 1–3 สัปดาห์

ร่างกายผู้ป่วยจะมีภูมิคุ้มกันเชื้อโรคแตกต่างกันไป ส่วนใหญ่ตรวจพบเชื้อภายใน 10 วัน และเชื้อจะอยู่ได้นานถึง 0.5 – 20 ปี (สำหรับการติดเชื้อครั้งเดียว) ในประชากรทั้งคนและสัตว์ ถ้ามีการได้รับเชื้อบ่อยๆ หรือมีการติดเชื้อซ้ำๆ จะสามารถพบแอนติบอดีระดับสูงๆ ได้นานๆ โดยไม่มีอาการเกิดขึ้น

2.7.6 โรคเลปโตสไปโรซิสในประเทศไทย

ในประเทศไทยมีรายงานผู้ป่วยโรคเลปโตสไปโรซิสครั้งแรกจำนวน 4 ราย (เสียชีวิต 2 ราย) เมื่อปี พ.ศ. 2486 ซึ่งเกิดน้ำท่วมกรุงเทพฯ ครั้งใหญ่ โดยนายแพทย์ใช้ ยูนิพันธ์ ที่โรงพยาบาลศิริราช หลังจากนั้นมามีรายงานพบผู้ป่วยโรคนี้ได้ทุกภาคของประเทศ โดยภาคใต้มีอัตราป่วยสูงสุดและภาคกลางต่ำสุด แต่ทั้งนี้ที่ผ่านมามีผู้ป่วยที่ได้รับการวินิจฉัยและการรักษา โดยเพียงปีละ 55 – 272 รายเท่านั้นและเสียชีวิตไม่เกิน 15 รายต่อปี และพบการระบาดสองครั้งเมื่อมี พ.ศ. 2526 ซึ่งเกิดน้ำท่วมกรุงเทพมหานครและช่วงปลายปี พ.ศ. 2531 เนื่องจากเกิดอุทกภัยที่ภาคใต้ตอนบน

เริ่มมีรายงานการระบาดของโรคเลปโตสไปโรซิสในประเทศไทยตั้งแต่ปี พ.ศ. 2539 การระบาดเกิดในช่วงฤดูฝนตั้งแต่เดือนกรกฎาคมถึงเดือนตุลาคมติดต่อกันมาทุกปีจนถึงปัจจุบัน โดยมีรายงานอัตราป่วยต่อแสนประชากรในบางจังหวัด อาทิเช่น ขอนแก่น หนองบัวลำภู เพิ่มขึ้นจากน้อยกว่า 0.1 เป็น 2.7 และ 4.1 เป็นต้น และอุบัติการณ์ของโรคมียังมีแนวโน้มเพิ่มสูงขึ้นอย่างต่อเนื่องในขณะนี้ โดยเริ่มมีรายงานผู้ป่วยทั้งสิ้น 358 ราย จาก 38 จังหวัด ในปี พ.ศ. 2539 แล้วเพิ่มมากขึ้นเป็น 2,334 รายจาก 48 จังหวัด ในปี พ.ศ. 2540 และ 2,230 รายจาก 59 จังหวัด ในปี พ.ศ. 2541 หลังจากนั้นมามีรายงานเพิ่มขึ้นเป็น 5,933 รายจาก 60 จังหวัดในปี พ.ศ. 2542 ที่ผ่านมามีแนวโน้มที่จะมีผู้ป่วยเพิ่มมากขึ้นอีกในปี พ.ศ. 2543 นี้ เนื่องจากเกิดภาวะฝนตกและน้ำท่วมที่รุนแรงตั้งแต่เดือนเมษายนที่ผ่านมา ทำให้มีรายงานผู้ป่วยมากถึง 5,576 รายแล้วในขณะนี้ (ณ วันที่ 30 สิงหาคม 2543 : กองระบาดวิทยา สำนักงานปลัดกระทรวงสาธารณสุข) ผู้ป่วยร้อยละ 90 พบที่จังหวัดต่างๆ ทางภาคตะวันออกเฉียงเหนือ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่จังหวัดบุรีรัมย์ ขอนแก่น สุรินทร์ ชัยภูมิ มหาสารคาม นครราชสีมา เลย กาฬสินธุ์และร้อยเอ็ด และขณะนี้เริ่มมีรายงานพบผู้ป่วยมากขึ้นทางภาคเหนือ เช่น จังหวัดแพร่ เพชรบูรณ์ เป็นต้น เช่นกันตั้งแต่ปี พ.ศ. 2542 ที่ผ่านมา ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีการแพร่กระจายของโรคเพิ่มขึ้นตลอดเวลาในขณะนี้ ดังแสดงในรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.7.5 การกระจายของผู้ป่วยเอดส์ไปโรซีสรายจังหวัด ปี 2539 – 2545

ในการสำรวจที่ผ่านมาพบว่าอายุ 15 ปีขึ้นไปคิดเชื่อมากกว่า อายุต่ำกว่า 15 ปี อันเนื่องมาจากว่าผู้ป่วยอายุ 15 ปีขึ้นไป ส่วนใหญ่เป็นชาวนา พร้อมทั้งได้สัมผัสเชื่อมากกว่าช่วงอายุต่ำกว่า 15 ปี และร้อยละ 80 เป็นเพศชายและยังพบว่ามีการแพร่กระจายของเชื้อในสัตว์และสิ่งแวดล้อมอย่างกว้างขวาง ตรวจพบเชื้อ โซโรไวรัสใหม่ๆ ซึ่งไม่เคยมีรายงานในประเทศไทยมาก่อน หลายชนิด เช่น bratislava , pyrogenes และ seijroe เป็นต้น นอกจากนั้นยังพบว่าผู้ป่วยจำนวนหนึ่งมีอาการและอาการทางคลินิกที่รุนแรงทำให้อัตราตายในบางโรงพยาบาลสูงถึงร้อยละ 15-20 ทำให้โรคเอดส์ไปโรซีสเป็นปัญหาสำคัญทางสาธารณสุขของประเทศไทยในขณะนี้

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Puntani Pongsumpun (2004) ได้นำวิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (Stand dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของแบบจำลอง (SIR) ทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก แล้วแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียร ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค การลดอัตราการเกิดและการลดจำนวนของยุงเป็นตัวอย่างของแนวทางที่ช่วยในการควบคุมการระบาดของโรค [18]

J Holt (2006) สร้างแบบจำลอง (SIR) คณิตศาสตร์สำหรับโรคเอดส์ไปโรซีสของประชากรคนของประเทศแทนซาเนียในแอฟริกา ระหว่างเดือนมกราคมและเมษายน พ.ศ. 2550 ผลงานวิจัย คือ สภาพภูมิอากาศ ฤดูกาล (ฤดูฝน) จำนวนของหนูมีผลกระทบต่ออัตราการระบาดของโรคในคนและการลดการระบาดของโรคโดยวิธีการควบคุมการขยายพันธุ์ของหนู [18]

ทรัพย์สินชัย เอกอัมทรัพย์และคณะ (2006) ใช้ทฤษฎีความเสถียร (Steady state) มาสร้างแบบจำลอง (SIR) ทางคณิตศาสตร์ตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมาลาเรียและสร้างโปรแกรมการวิเคราะห์เชิงกราฟ ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมาลาเรียและกราฟในการมาวิเคราะห์แบบจำลองเพื่อใช้ในการลดการระบาดของโรค [10]

Wannapong Triampo (2007) ได้นำแบบจำลอง SIR มาใช้เกี่ยวกับโรคเลปโตสไปโรซิสในประเทศไทย พ.ศ. 2543 และ 2544 ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ แบบจำลอง SIR สอดคล้องกับหลักการที่เป็นจริงโดยทำให้ทราบว่าอัตราการระบาดของโรคจากพาหะไปยังประชากรของคนนั้นขึ้นอยู่กับปริมาณของฝนที่ตก [22]



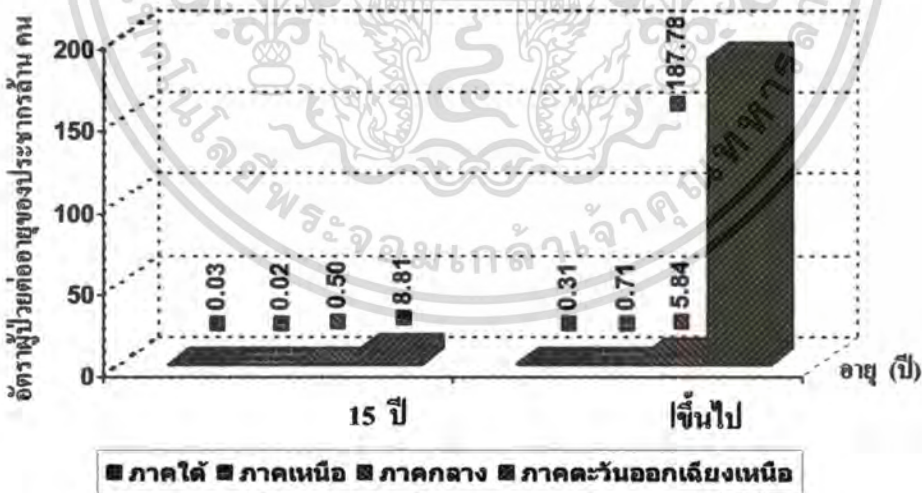
บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 การวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

แบ่งประเทศไทยออกเป็น 4 ภาค ได้แก่ ภาคเหนือ, ภาคกลาง, ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ และภาคใต้ ส่วนภาคอื่นไม่มีรายงานผู้ป่วย จากนั้นนำสถิติผู้ป่วยในแต่ละปีตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 – 2549 ที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลของสำนักกระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข มาคำนวณวิเคราะห์ ผลปรากฏว่าในระยะเวลา 10 ปี จำนวนผู้ป่วยและอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคน สูงที่สุดคือ ปี พ.ศ. 2543 มีจำนวนผู้ป่วย 14,285 และมีอัตราผู้ป่วย 231.26 ต่อประชากรล้านคน รองลงมาคือ ปี พ.ศ. 2544 มีจำนวนผู้ป่วย 10,217 และมีอัตราผู้ป่วย 164.54 ต่อประชากรล้านคน และมีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนลดลงตามลำดับปี พ.ศ. ดังนี้ พ.ศ. 2545, 2542, 2546, 2549, 2547, 2548, 2540 และ 2541 โดยมีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนตามลำดับ คือ 109.73, 98.74, 78.84, 62.93, 51.16, 46.11, 38.38 และ 36.22 [11]

ดังนั้นจึงได้นำ ปี พ.ศ. 2543 มาพิจารณาเนื่องจากผู้ป่วยมากที่สุด โดยแบ่งพิจารณาเป็นรายภาคโดยแบ่งเป็น 2 ช่วงอายุ ดังนี้ ผู้ป่วยเป็นเด็กอายุต่ำกว่า 15 ปี และผู้ป่วยเป็นผู้ใหญ่ตั้งแต่ อายุ 15 ปีขึ้นไป ซึ่งแสดงได้ด้วยกราฟอัตราจำนวนผู้ป่วยได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 กราฟของอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนแบ่งตามภาค ปี พ.ศ. 2543

จากกราฟจะเห็นว่า พบผู้ป่วยมากที่สุดในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ รองลงมา ภาคกลาง ภาคเหนือและภาคใต้ตามลำดับ และจะเห็นชัดเจนว่ากลุ่มอายุของผู้ป่วยตั้งแต่ 15 ปีขึ้นไป ป่วยมากกว่ากลุ่มอายุต่ำกว่า 15 ปี ดังนั้นแสดงว่า ผู้ป่วยที่เป็นผู้ใหญ่มากกว่าผู้ป่วยที่เป็นเด็ก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นับญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อพิจารณาแต่ละภาคตามจังหวัดที่มีผู้ป่วยมากที่สุดมีผลดังนี้

ภาคใต้ จังหวัดที่มีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนมากที่สุด โดยแบ่งตามอายุ ได้แก่ จังหวัดนครศรีธรรมราช มีผู้ป่วย 12 คน คิดเป็นอัตราผู้ป่วย 0.19 ต่อประชากรล้านคน

ภาคเหนือ จังหวัดที่มีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนมากที่สุด โดยแบ่งตามอายุ ได้แก่ จังหวัดแพร่ มีผู้ป่วย 15 คน คิดเป็นอัตราผู้ป่วย 0.24 ต่อประชากรล้านคน

ภาคกลาง จังหวัดที่มีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนมากที่สุด โดยแบ่งตามอายุ ได้แก่ จังหวัดสระแก้ว มีผู้ป่วย 133 คน คิดเป็นอัตราผู้ป่วย 2.15 ต่อประชากรล้านคน

ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ จังหวัดที่มีอัตราผู้ป่วยต่อประชากรล้านคนมากที่สุด โดยแบ่งตามอายุ ได้แก่ จังหวัดบุรีรัมย์ มีผู้ป่วย 3,169 คน คิดเป็นอัตราผู้ป่วย 51.30 ต่อประชากรล้านคน

3.2 การสร้างแบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ

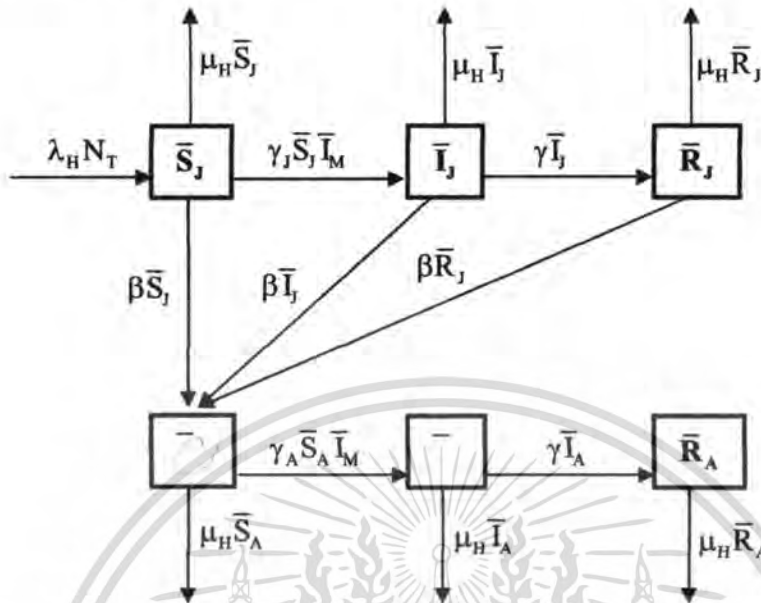
พิจารณาการสร้างแบบจำลองของคนและหนู ดังนี้

ตารางที่ 3.1 สัญลักษณ์แทนข้อความของแบบจำลองของคนและหนู

| ข้อความ | สัญลักษณ์ | ข้อความ | สัญลักษณ์ |
|-------------------------------------|-------------|-------------------------------------|-------------|
| อัตราการเกิดของคน | λ_H | จำนวนผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ | \bar{I}_A |
| อัตราการตายของคน | μ_H | จำนวนผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้ | \bar{R}_A |
| จำนวนประชากรทั้งหมด | N_T | อัตราการเกิดของหนู | λ_M |
| จำนวนเด็กทั้งหมด | N_J | อัตราการตายของหนู | μ_M |
| จำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมด | N_A | จำนวนหนูทั้งหมด | N_M |
| อัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ | β | จำนวนหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ | \bar{S}_M |
| อัตราการฟื้นไข้ของคน | γ | จำนวนหนูที่ติดเชื้อ | \bar{I}_M |
| จำนวนเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ | \bar{S}_J | อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปเด็ก | γ_J |
| จำนวนเด็กที่ติดเชื้อ | \bar{I}_J | อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปผู้ใหญ่ | γ_A |
| จำนวนเด็กที่ฟื้นไข้ | \bar{R}_J | อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู | γ_M |
| จำนวนผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ | \bar{S}_A | | |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1 แบบจำลองสำหรับโรคเอดส์ไปโรซิซจำแนกตามอายุของคน แบบจำลองที่ 1



รูปที่ 3.2 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรที่ป่วยเป็นโรคเอดส์ไปโรซิซแบบจำลองที่ 1

อธิบายรายละเอียดของแบบจำลองได้ดังนี้

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่เกิดใหม่ - จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต - จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ - จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ - จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อที่เสียชีวิต - จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ - จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่พ้นไข

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่พ้นไข ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่พ้นไข - จำนวนของผู้ที่พ้นไขเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ - จำนวนของผู้ที่พ้นไขที่เสียชีวิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

$$= \text{จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็ก ไปเป็นผู้ใหญ่} + \text{จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็ก ไปเป็นผู้ใหญ่} + \text{จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้เปลี่ยนแปลงจากเด็ก ไปเป็นผู้ใหญ่} - \text{จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยน ไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ} - \text{จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต}$$

การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

$$= \text{จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยน ไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ} - \text{จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อที่เสียชีวิต} - \text{จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยน ไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้}$$

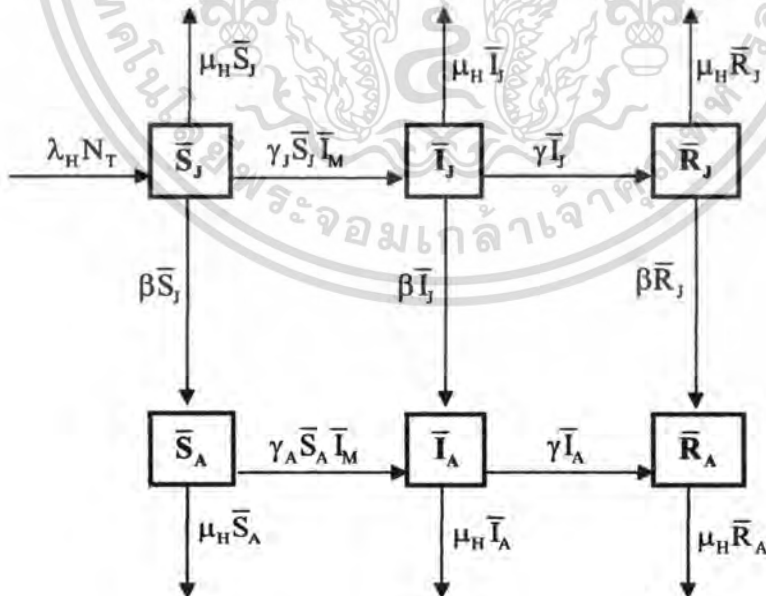
การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้ ณ เวลาใดๆ

$$= \text{จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยน ไปเป็นผู้ที่ฟื้น ไข้} - \text{จำนวนของผู้ที่ฟื้น ไข้ที่เสียชีวิต}$$

ต่อไปได้มีการพิจารณาแบบจำลอง โดยที่ให้ประชากรมีการเติบโตจากเด็ก ไปผู้ใหญ่

โดยที่ชนิดของประชากรไม่เปลี่ยนแปลง

3.2.2 แบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุของคน แบบจำลองที่ 2



รูปที่ 3.3 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของประชากรที่ป่วยเป็นโรคเลปโตสไปโรซิส แบบจำลองที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อธิบายรายละเอียดของแบบจำลอง ได้ดังนี้

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่เกิดใหม่ – จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต – จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ – จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ – จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อที่เสียชีวิต – จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ – จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้

การเปลี่ยนแปลงของเด็กที่ฟื้นไข้ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้ – จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้เปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ – จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ที่เสียชีวิต

การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ – จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ – จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต

การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

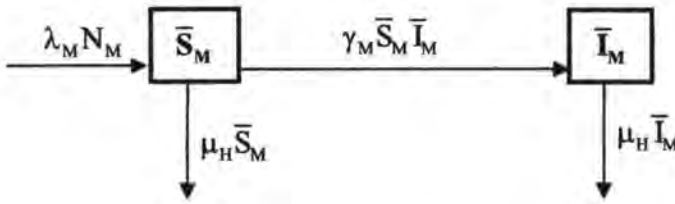
= จำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ติดเชื้อ + จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อจากเด็กเปลี่ยนไปเป็นผู้ใหญ่ – จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อที่เสียชีวิต – จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้

การเปลี่ยนแปลงของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ฟื้นไข้ + จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้จากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่ – จำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ที่เสียชีวิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 แบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุของหนู



รูปที่ 3.4 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองของหนู

อธิบายรายละเอียดของแบบจำลอง ได้ดังนี้

การเปลี่ยนแปลงของหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของหนูที่เกิดใหม่ - จำนวนของหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อที่เสียชีวิต - จำนวนของหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นหนูที่ติดเชื้อ

การเปลี่ยนแปลงของหนูที่ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ

= จำนวนของหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแล้วเปลี่ยนไปเป็นหนูที่ติดเชื้อ - จำนวนของหนูที่ติดเชื้อที่เสียชีวิต

ข้อสังเกต จากแบบจำลอง ลูกศรที่ชี้เข้ามีค่าเป็นบวก และลูกศรที่ชี้ออกมีค่าเป็นลบ

จากแผนภาพแสดงแนวคิดเบื้องต้น นำมาเขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

การเปลี่ยนแปลงของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 1

$$\frac{d\bar{S}_I}{dt} = \lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_I - \gamma_I \bar{S}_I \bar{I}_M - \beta \bar{S}_I$$

$$\frac{d\bar{S}_A}{dt} = \beta \bar{S}_I + \beta \bar{I}_I + \beta \bar{R}_I - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A$$

$$\frac{d\bar{S}_M}{dt} = \lambda_M N_M - \mu_M \bar{S}_M - \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเปลี่ยนแปลงของผู้ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 1

$$\frac{d\bar{I}_J}{dt} = \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J$$

$$\frac{d\bar{I}_A}{dt} = \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_A - \gamma \bar{I}_A$$

$$\frac{d\bar{I}_M}{dt} = \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M$$

การเปลี่ยนแปลงของผู้ที่ฟื้นไข้ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 1

$$\frac{d\bar{R}_J}{dt} = \gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J$$

$$\frac{d\bar{R}_A}{dt} = \gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{R}_A$$

และสามเงื่อนไข ดังนี้

$$N_J = \bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J, \quad N_A = \bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A \quad \text{และ} \quad N_M = \bar{S}_M + \bar{I}_M$$

การเปลี่ยนแปลงของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 2

$$\frac{d\bar{S}_J}{dt} = \lambda_H N_T - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J - \mu_H \bar{S}_J$$

$$\frac{d\bar{S}_A}{dt} = \beta \bar{S}_J - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A$$

$$\frac{d\bar{S}_M}{dt} = \lambda_M N_M - \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{S}_M$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเปลี่ยนแปลงของผู้ติดเชื้อ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 2

$$\frac{d\bar{I}_J}{dt} = \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \gamma \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \mu_H \bar{I}_J$$

$$\frac{d\bar{I}_A}{dt} = \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M + \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{I}_A$$

$$\frac{d\bar{I}_M}{dt} = \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M$$

การเปลี่ยนแปลงของผู้ที่ฟื้นไข้ ณ เวลาใดๆ ทั้งหมด แบบจำลองที่ 2

$$\frac{d\bar{R}_J}{dt} = \gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J$$

$$\frac{d\bar{R}_A}{dt} = \gamma \bar{I}_A + \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_A$$

และสามเงื่อนไข ดังนี้

$$N_J = \bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J, \quad N_A = \bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A \quad \text{และ} \quad N_M = \bar{S}_M + \bar{I}_M$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลงานวิจัย

สมมติว่าจำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่และแต่ละกลุ่มของประชากร (เด็กและผู้ใหญ่) เป็นค่าคงที่เช่นเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = 0, \quad \frac{dN_J}{dt} = 0, \quad \frac{dN_A}{dt} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{dN_M}{dt} = 0$$

4.1 แบบจำลองที่ 1

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{dN_T}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J + \bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A) \\ &= (\lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_J - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J) + (\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J) \\ &\quad + (\gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J) + (\beta \bar{S}_J + \beta \bar{I}_J + \beta \bar{R}_J - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A) \\ &\quad + (\gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_A - \gamma \bar{I}_A) + (\gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{R}_A) \\ &= (\lambda_H - \mu_H) N_T \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \lambda_H = \mu_H$$

สรุปผลสมการ i) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายต่อประชากรของคนมีค่าเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \frac{dN_J}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J) \\
 &= (\lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_J - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J) + (\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J) \\
 &\quad + (\gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J) \\
 &= \mu_H N_T - (\mu_H + \beta) N_J \quad (\text{เนื่องจาก } \lambda_H = \mu_H) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \frac{N_T}{N_J} = \frac{\mu_H + \beta}{\mu_H}$$

สรุปผลสมการ ii) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนประชากรคนทั้งหมดต่อจำนวนเด็กมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการตายของคนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } \frac{dN_A}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A) \\
 &= (\beta \bar{S}_J + \beta \bar{I}_J + \beta \bar{R}_J - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A) + (\gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_A - \gamma \bar{I}_A) \\
 &\quad + (\gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{R}_A) \\
 &= \beta N_J - \mu_H N_A \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \frac{N_A}{N_J} = \frac{\beta}{\mu_H}$$

สรุปผลสมการ iii) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมดต่อจำนวนเด็กทั้งหมดมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \frac{dN_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_M + \bar{I}_M) \\
 &= (\lambda_M N_M - \mu_M \bar{S}_M - \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M) + (\gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M) \\
 &= \lambda_M N_M - \mu_M N_M \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \lambda_M = \mu_M$$

สรุปผลสมการ iv) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายของประชากรของหนูมีค่าเท่ากัน

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 S_J &= \frac{S_J}{N_J}, & I_J &= \frac{I_J}{N_J}, & R_J &= \frac{R_J}{N_J} \\
 S_A &= \frac{S_A}{N_A}, & I_A &= \frac{I_A}{N_A}, & R_A &= \frac{R_A}{N_A} \\
 S_M &= \frac{S_M}{N_M}, & I_M &= \frac{I_M}{N_M}
 \end{aligned}$$

แล้วเราหาสมการได้ดังนี้

หา $\frac{dS_J}{dt}$ จะได้ว่า

$$S_J = \frac{\bar{S}_J}{N_J}$$

$$\frac{d}{dt}(S_J N_J) = \frac{d\bar{S}_J}{dt}$$

$$N_J \frac{dS_J}{dt} = \frac{d\bar{S}_J}{dt}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_J - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J \\
 \frac{dS_J}{dt} &= \frac{\lambda_H N_T}{N_J} - \frac{\mu_H \bar{S}_J}{N_J} - \frac{\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M}{N_J} - \frac{\beta \bar{S}_J}{N_J} \\
 &= (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M
 \end{aligned}$$

หา $\frac{dI_J}{dt}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 I_J &= \frac{\bar{I}_J}{N_J} \\
 \frac{d}{dt}(I_J N_J) &= \frac{d\bar{I}_J}{dt} \\
 N_J \frac{dI_J}{dt} &= \frac{d\bar{I}_J}{dt} \\
 &= \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J \\
 \frac{dI_J}{dt} &= \frac{\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M}{N_J} - \frac{\mu_H \bar{I}_J}{N_J} - \frac{\beta \bar{I}_J}{N_J} - \frac{\gamma \bar{I}_J}{N_J} \\
 &= \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J
 \end{aligned}$$

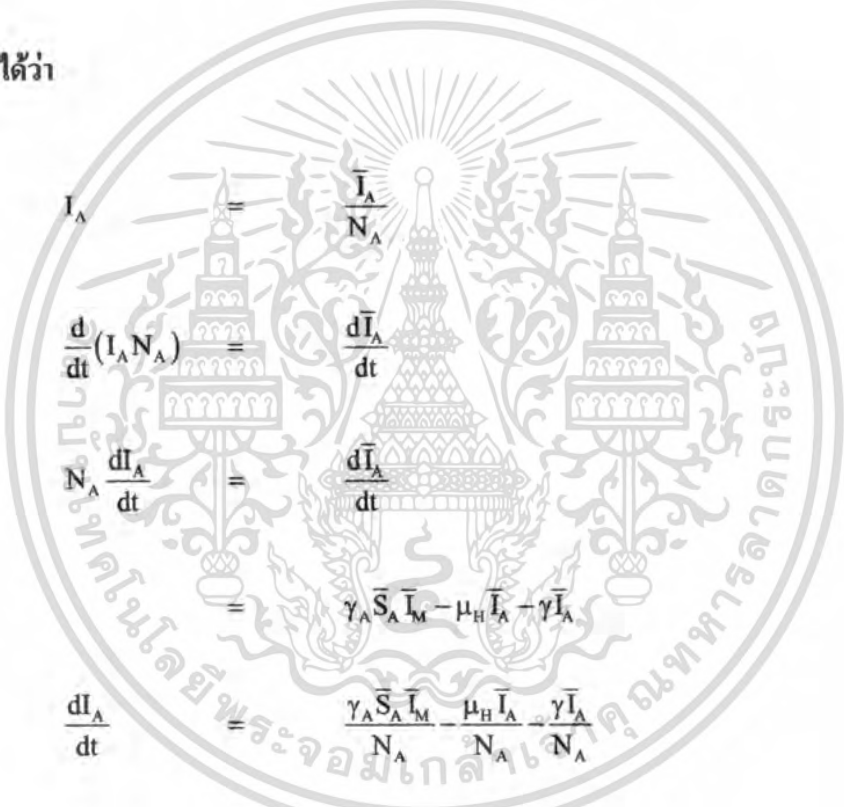
หา $\frac{dS_A}{dt}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 S_A &= \frac{\bar{S}_A}{N_A} \\
 \frac{d}{dt}(S_A N_A) &= \frac{d\bar{S}_A}{dt}
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 N_A \frac{dS_A}{dt} &= \frac{d\bar{S}_A}{dt} \\
 &= \beta\bar{S}_J + \beta\bar{I}_J + \beta\bar{R}_J - \gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M - \mu_H\bar{S}_A \\
 \frac{dS_A}{dt} &= \frac{\beta\bar{S}_J}{N_A} + \frac{\beta\bar{I}_J}{N_A} + \frac{\beta\bar{R}_J}{N_A} - \frac{\gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M}{N_A} - \frac{\mu_H\bar{S}_A}{N_A} \\
 &= \mu_H(1-S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M
 \end{aligned}$$

หา $\frac{dI_A}{dt}$ จะได้ว่า



$$\begin{aligned}
 I_A &= \frac{\bar{I}_A}{N_A} \\
 \frac{d}{dt}(I_A N_A) &= \frac{d\bar{I}_A}{dt} \\
 N_A \frac{dI_A}{dt} &= \frac{d\bar{I}_A}{dt} \\
 &= \gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M - \mu_H\bar{I}_A - \gamma\bar{I}_A \\
 \frac{dI_A}{dt} &= \frac{\gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M}{N_A} - \frac{\mu_H\bar{I}_A}{N_A} - \frac{\gamma\bar{I}_A}{N_A} \\
 &= \gamma_A S_A I_M N_M - (\mu_H + \gamma) I_A
 \end{aligned}$$

หา $\frac{dI_M}{dt}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 I_M &= \frac{\bar{I}_M}{N_M} \\
 \frac{d}{dt}(I_M N_M) &= \frac{d\bar{I}_M}{dt}
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 N_M \frac{dI_M}{dt} &= \frac{d\bar{I}_M}{dt} \\
 &= \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M \\
 \frac{dI_M}{dt} &= \frac{\gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M}{N_M} - \frac{\mu_M \bar{I}_M}{N_M} \\
 &= \gamma_M S_M I_M N_M - \mu_M I_M \\
 &= (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2 \quad \text{เมื่อ } S_M = 1 - I_M
 \end{aligned}$$

แล้วเราจะได้สามเงื่อนไขใหม่ดังนี้

$$S_J + I_J + R_J = 1, \quad S_A + I_A + R_A = 1 \quad \text{และ} \quad S_M + I_M = 1$$

เราได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{dS_J}{dt} = (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M$$

$$\frac{dI_J}{dt} = \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J$$

$$\frac{dS_A}{dt} = \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M$$

$$\frac{dI_A}{dt} = \gamma_A S_A I_M N_M - (\mu_H + \gamma) I_A$$

$$\frac{dI_M}{dt} = (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2$$

โดยที่ $S_J + I_J + R_J = 1$, $S_A + I_A + R_A = 1$ และ $S_M + I_M = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดสมดุล $(S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ หาได้จากการจัดหาค่าสมการข้างบนให้เท่ากับศูนย์

$$(\mu_H + \beta)(1 - S_J^*) - \gamma_J S_J^* I_M^* N_M = 0$$

$$S_J^* = \frac{\mu_H + \beta}{(\mu_H + \beta + \gamma_J N_M I_M^*)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma_J N_M I_M^*}{\mu_H + \beta}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_1 = \frac{\gamma_J N_M}{\mu_H + \beta}$$

$$\gamma_J S_J^* I_M^* N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J^* = 0$$

$$I_J^* = \frac{\gamma_J N_M I_M^* (\mu_H + \beta)}{(\mu_H + \beta + \gamma_J N_M I_M^*) (\mu_H + \beta + \gamma)}$$

$$= \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_1 I_M^*) \left(1 + \frac{\gamma}{\mu_H + \beta}\right)}$$

$$= \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_2 = \frac{\gamma}{(\mu_H + \beta)}$$

$$\mu_H (1 - S_A^*) - \gamma_A S_A^* I_M^* N_M = 0$$

$$S_A^* = \frac{\mu_H}{(\mu_H + \gamma_A N_M I_M^*)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma_A N_M I_M^*}{\mu_H}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_3 = \frac{\gamma_A N_M}{\mu_H}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma_A S_A^* I_M^* N_M - (\mu_H + \gamma) I_A^* = 0$$

$$I_A^* = \frac{\gamma_A S_A^* I_M^* N_M}{(\mu_H + \gamma)}$$

$$= \frac{\alpha_3 \mu_H I_M^*}{(\mu_H + \gamma)(1 + \alpha_3 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \gamma_A N_M = \alpha_3 \mu_H$$

$$= \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_4 = \frac{\gamma}{\mu_H}$$

$$(\gamma_M N_M - \mu_M) I_M^* - \gamma_M N_M (I_M^*)^2 = 0$$

กำหนดให้ $a_1 = \gamma_M N_M - \mu_M$ และ $a_2 = -\gamma_M N_M$ แล้วเราจะได้ว่า $a_2 (I_M^*)^2 + a_1 I_M^* = 0$

ผลเฉลยของสมการนี้ คือ $I_M^* (a_2 I_M^* + a_1) = 0$ ดังนั้น $I_M^* = 0$ และ

$$I_M^* = \frac{-a_1}{a_2} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$$

สำหรับ $I_M^* = 0$ จะได้ว่า $S_j^* = 1$, $I_j^* = 0$, $S_A^* = 1$ และ $I_A^* = 0$

สำหรับ $I_M^* = \frac{-a_1}{a_2} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$ จะได้ว่า

$$S_j^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_j^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดสมดุลของระบบนี้ คือ

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และ

2) จุดสมดุลสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 = (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ เมื่อ

$$S_J^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_J^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_M^* = \frac{1 - \mu_M}{\gamma_M N_M}$$

กำหนดให้

$$X(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M$$

$$Y(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J$$

$$Z(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M$$

$$U(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \gamma_A S_A I_M N_M - (\mu_H + \gamma) I_A$$

$$V(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาโคเบียนเมทริกซ์ของแต่ละจุดสมดุล คือ

$$J = \begin{bmatrix} X_S & X_I & X_S & X_I & X_I \\ Y_S & Y_I & Y_S & Y_I & Y_I \\ Z_S & Z_I & Z_S & Z_I & Z_I \\ U_S & U_I & U_S & U_I & U_I \\ V_S & V_I & V_S & V_I & V_I \end{bmatrix}_{(S, I, S, I, I)}$$

โดยสมาชิกของจาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$X_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M I_M^*$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\gamma_J N_M S_J^*$$

$$Y_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_J N_M I_M^*$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \beta + \gamma)$$

$$Y_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_J N_M S_J^*$$

$$Z_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Z_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^*$$

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\gamma_A N_M S_A^*$$

$$U_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$U_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_A N_M I_M^*$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \gamma)$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_A N_M S_A^*$$

$$V_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I_M^*)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเราสามารถเขียนเป็น

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M I_M^* & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M S_I^* \\ \gamma_I N_M I_M^* & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_I N_M S_I^* \\ 0 & 0 & -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* & 0 & -\gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & \gamma_A N_M I_M^* & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I_M^*) \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะจะสามารถหาได้โดยการหาผลเฉลยจากสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\det(J - \lambda I_5) = 0$$

เมื่อ I_5 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$

จาโคเบียนเมทริกซ์ J ของระบบนี้หาได้จากจุดสมดุลเหล่านี้คือ

$$J_E = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_I N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_E - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma_I N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H - \lambda & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu_H + \gamma) - \lambda & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_E - \lambda I_5) = \begin{vmatrix} -(\mu_H + \beta) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma_I N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H - \lambda & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu_H + \gamma) - \lambda & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= [-(\mu_H + \beta) - \lambda][-(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda][-\mu_H - \lambda][-(\mu_H + \gamma) - \lambda][-(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda]$$

$$= 0$$

แก้สมการหาค่าเงาจะจึงได้ดังนี้

$$-(\mu_H + \beta) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \beta$$

$$-(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \beta - \gamma$$

$$-\mu_H - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H$$

$$-(\mu_H + \gamma) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \gamma$$

$$(\gamma_M N_M - \mu_M) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_M + \gamma_M N_M \quad (\lambda \text{ เป็นลบเมื่อ } \gamma_M N_M < \mu_M)$$

จากค่าเงาจะจึงทั้ง 5 ค่า มีค่าเป็นลบ แสดงว่า จุดสมดุลมีเสถียรภาพ

ดังนั้น จุดสมดุลสภาวะไร้โรค คือ ค่าเสถียรเฉพาะสำหรับ $R_0 < 1$ $\left(R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M} \right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) จุดสมดุลสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ เมื่อ

$$S_J^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_J^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_M^* = \frac{-(\mu_M - \gamma_M N_M)}{\gamma_M N_M}$$

$$I = \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$$

$$J_E = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M I_M^* & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M S_J^* \\ \gamma_J N_M I_M^* & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M S_J^* \\ 0 & 0 & -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* & 0 & -\gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & \gamma_A N_M I_M^* & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I^*) \end{bmatrix}$$

ค่าจะจงสามารถหาได้โดยการหาผลเฉลยจากสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\det(J_E - \lambda I_5) = 0$$

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma N S \\ \gamma N I & -(\mu + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma N S \\ 0 & 0 & -\mu - \gamma N I - \lambda & 0 & -\gamma N S \\ 0 & 0 & \gamma N I & -(\mu + \gamma) - \lambda & \gamma N S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma N S \\ \gamma N I & -(\mu + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma N S \\ 0 & 0 & -\mu - \gamma N I - \lambda & 0 & -\gamma N S \\ 0 & 0 & \gamma N I & -(\mu + \gamma) - \lambda & \gamma N S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= [-(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda][-(\mu + \beta + \gamma) - \lambda][-\mu - \gamma N I - \lambda][-(\mu + \gamma) - \lambda][-\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda]$$

$$= 0$$

จะได้ค่าเฉพาะดังนี้

$$\begin{aligned} -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M I_M^* - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N I \\ & = -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right) \\ & = -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M + \frac{\mu_M \gamma_I}{\gamma_M} \\ -(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = -(\mu_H + \beta + \gamma) \\ -(\mu_H + \gamma) - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = -(\mu_H + \gamma) \\ -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* \\ & = -\mu_H - \gamma_A N_M \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right) \\ & = -\mu_H - \gamma_A N_M + \frac{\mu_M \gamma_A}{\gamma_M} \\ -\mu_M - \gamma_M N_M (2I_M^* - 1) - \lambda = 0 & \Leftrightarrow \lambda = -\mu_M - \gamma_M N_M (2I_M^* - 1) \\ & = -\mu_M - \gamma_M N_M \left[2 \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M \left[2 - \frac{2\mu_M}{\gamma_M N_M} - 1 \right]$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M \left[1 - \frac{2\mu_M}{\gamma_M N_M} \right]$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M + \left(\frac{2\mu_M \gamma_M N_M}{\gamma_M N_M} \right)$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M + 2\mu_M$$

$$= -\gamma_M N_M + \mu_M$$

จากค่าเจาะจง $\lambda = -(\mu + \beta) - \gamma N + \frac{\mu \gamma}{\gamma}$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\frac{\mu \gamma}{\gamma} < (\mu + \beta) + \gamma N$

จากค่าเจาะจง $\lambda = -\mu - \gamma N + \frac{\mu \gamma}{\gamma}$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\frac{\mu \gamma}{\gamma} < \mu + \gamma N$

จากค่าเจาะจง $\lambda = -\gamma_M N_M + \mu_M$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\mu_M < \gamma_M N_M$

และค่าเจาะจงที่เหลือมีค่าเป็นลบอยู่แล้ว แสดงว่า จุดสมดุลมีเสถียรภาพ

ดังนั้น จุดสมดุลสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง คือ ค่าเสถียรเฉพาะสำหรับ $R_0 > 1$ $\left(R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M} \right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 แบบจำลองที่ 2

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \frac{dN_T}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J + \bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A) \\
 &= (\lambda_H N_T - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J - \mu_H \bar{S}_J) + (\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \gamma \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \mu_H \bar{I}_J) \\
 &\quad + (\gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J) + (\beta \bar{S}_J - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A) \\
 &\quad + (\gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M + \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{I}_A) + (\gamma \bar{I}_A + \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_A)
 \end{aligned}$$

$$= (\lambda_H - \mu_H) N_T$$

$$= 0$$

เมื่อ λ_H

$$= \mu_H$$

สรุปผลสมการ i) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายต่อประชากรของคนมีค่า

เท่ากัน

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \frac{dN_J}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_J + \bar{I}_J + \bar{R}_J) \\
 &= (\lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_J - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J) + (\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J) \\
 &\quad + (\gamma \bar{I}_J - \beta \bar{R}_J - \mu_H \bar{R}_J)
 \end{aligned}$$

$$= \mu_H N_T - (\mu_H + \beta) N_J \quad (\text{เนื่องจาก } \lambda_H = \mu_H)$$

$$= 0$$

$$\text{เมื่อ } \frac{N_T}{N_J} = \frac{\mu_H + \beta}{\mu_H}$$

สรุปผลสมการ ii) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนประชากรคนทั้งหมดต่อจำนวนเด็กมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการตายของคนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } \frac{dN_A}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_A + \bar{I}_A + \bar{R}_A) \\
 &= (\beta\bar{S}_I - \gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M - \mu_H\bar{S}_A) + (\gamma_A\bar{S}_A\bar{I}_M + \beta\bar{I}_I - \gamma\bar{I}_A - \mu_H\bar{I}_A) \\
 &\quad + (\gamma\bar{I}_A + \beta\bar{R}_I - \mu_H\bar{R}_A) \\
 &= \beta N_I - \mu_H N_A \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \frac{N_A}{N_I} = \frac{\beta}{\mu_H}$$

สรุปผลสมการ iii) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมดต่อจำนวนเด็กทั้งหมดมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \frac{dN_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(\bar{S}_M + \bar{I}_M) \\
 &= (\lambda_M N_M - \mu_M \bar{S}_M - \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M) + (\gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M) \\
 &= \lambda_M N_M - \mu_M N_M \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \lambda_M = \mu_M$$

สรุปผลสมการ iv) ได้ว่าค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายของประชากรของหนูมีค่าเท่ากัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้

$$S_J = \frac{\bar{S}_J}{N_J}, \quad I_J = \frac{\bar{I}_J}{N_J}, \quad R_J = \frac{\bar{R}_J}{N_J}$$

$$S_A = \frac{\bar{S}_A}{N_A}, \quad I_A = \frac{\bar{I}_A}{N_A}, \quad R_A = \frac{\bar{R}_A}{N_A}$$

$$S_M = \frac{\bar{S}_M}{N_M}, \quad I_M = \frac{\bar{I}_M}{N_M}$$

แล้วเราหาสมการได้ดังนี้

หา $\frac{dS_J}{dt}$ จะได้ว่า



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S_J N_J) &= \frac{d\bar{S}_J}{dt} \\ N_J \frac{dS_J}{dt} &= \frac{d\bar{S}_J}{dt} \\ &= \lambda_H N_T - \mu_H \bar{S}_J - \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \beta \bar{S}_J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_J}{dt} &= \frac{\lambda_H N_T}{N_J} - \frac{\mu_H \bar{S}_J}{N_J} - \frac{\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M}{N_J} - \frac{\beta \bar{S}_J}{N_J} \\ &= (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา $\frac{dI_J}{dt}$ จะได้ว่า

$$I_J = \frac{\bar{I}_J}{N_J}$$

$$\frac{d}{dt}(I_J N_J) = \frac{d\bar{I}_J}{dt}$$

$$N_J \frac{dI_J}{dt} = \frac{d\bar{I}_J}{dt}$$

$$= \gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M - \mu_H \bar{I}_J - \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_J$$

$$\frac{dI_J}{dt} = \frac{\gamma_J \bar{S}_J \bar{I}_M \bar{I}_J}{N_J} - \frac{\mu_H \bar{I}_J}{N_J} - \frac{\beta \bar{I}_J}{N_J} - \frac{\gamma \bar{I}_J}{N_J}$$

$$= \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J$$

หา $\frac{dS_A}{dt}$ จะได้ว่า

$$S_A = \frac{\bar{S}_A}{N_A}$$

$$\frac{d}{dt}(S_A N_A) = \frac{d\bar{S}_A}{dt}$$

$$N_A \frac{dS_A}{dt} = \frac{d\bar{S}_A}{dt}$$

$$= \beta \bar{S}_J + \beta \bar{I}_J + \beta \bar{R}_J - \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M - \mu_H \bar{S}_A$$

$$\frac{dS_A}{dt} = \frac{\beta \bar{S}_J}{N_A} + \frac{\beta \bar{I}_J}{N_A} + \frac{\beta \bar{R}_J}{N_A} - \frac{\gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M}{N_A} - \frac{\mu_H \bar{S}_A}{N_A}$$

$$= \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หา $\frac{dI_A}{dt}$ จะได้ว่า

$$I_A = \frac{\bar{I}_A}{N_A}$$

$$\frac{d}{dt}(I_A N_A) = \frac{d\bar{I}_A}{dt}$$

$$N_A \frac{dI_A}{dt} = \frac{d\bar{I}_A}{dt}$$

$$= \gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M + \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{I}_A$$

$$\frac{dI_A}{dt} = \frac{\gamma_A \bar{S}_A \bar{I}_M + \beta \bar{I}_J - \gamma \bar{I}_A - \mu_H \bar{I}_A}{N_A}$$

$$= \gamma_A S_A I_M N_M + \mu_H I_J - (\gamma + \mu_H) I_A$$

หา $\frac{dI_M}{dt}$ จะได้ว่า

$$I_M = \frac{\bar{I}_M}{N_M}$$

$$\frac{d}{dt}(I_M N_M) = \frac{d\bar{I}_M}{dt}$$

$$N_M \frac{dI_M}{dt} = \frac{d\bar{I}_M}{dt}$$

$$= \gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M$$

$$\frac{dI_M}{dt} = \frac{\gamma_M \bar{S}_M \bar{I}_M - \mu_M \bar{I}_M}{N_M}$$

$$= \gamma_M S_M I_M N_M - \mu_M I_M$$

$$= (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2 \quad \text{เมื่อ } S_M = 1 - I_M$$

แล้วเราจะได้สามเงื่อนไขใหม่ดังนี้

$$S_J + I_J + R_J = 1, \quad S_A + I_A + R_A = 1 \quad \text{และ} \quad S_M + I_M = 1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{dS_J}{dt} = (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M$$

$$\frac{dI_J}{dt} = \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J$$

$$\frac{dS_A}{dt} = \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M$$

$$\frac{dI_A}{dt} = \gamma_A S_A I_M N_M + \mu_H I_J - (\gamma + \mu_H) I_A$$

$$\frac{dI_M}{dt} = (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2$$

โดยที่ $S_J + I_J + R_J = 1$, $S_A + I_A + R_A = 1$ และ $S_M + I_M = 1$

$$(\mu_H + \beta)(1 - S_J^*) - \gamma_J S_J^* I_M^* N_M = 0$$

$$S_J^* = \frac{\mu_H + \beta}{(\mu_H + \beta + \gamma_J N_M I_M^*)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma_J N_M I_M^*}{\mu_H + \beta}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_1 = \frac{\gamma_J N_M}{\mu_H + \beta}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma_J S_J^* I_M^* N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J^* = 0$$

$$I_J^* = \gamma_J N_M I_M^* \frac{\mu_H + \beta}{(\mu_H + \beta + \gamma_J N_M I_M^*)} \frac{1}{(\mu_H + \beta + \gamma)}$$

$$= \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_1 I_M^*) \left(1 + \frac{\gamma}{(\mu_H + \beta)}\right)}$$

$$= \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_2 = \frac{\gamma}{(\mu_H + \beta)}$$

$$\mu_H (1 - S_A^*) - \gamma_A S_A^* I_M^* N_M = 0$$

$$S_A^* = \frac{\mu_H}{(\mu_H + \gamma_A N_M I_M^*)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma_A N_M I_M^*}{\mu_H}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)} \quad \text{เมื่อ } \alpha_3 = \frac{\gamma_A N_M}{\mu_H}$$

$$\gamma_A S_A^* I_M^* N_M + \mu_H I_J^* - (\mu_H + \gamma) I_A^* = 0$$

$$-(\mu_H + \gamma) I_A^* = -(\gamma_A S_A^* I_M^* N_M + \mu_H I_J^*)$$

$$= \frac{-(\gamma_A S_A^* I_M^* N_M + \mu_H I_J^*)}{-(\mu_H + \gamma)}$$

$$= \frac{\gamma_A N_M I_M^* \left(\frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}\right) + \mu_H \left(\frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}\right)}{\mu_H + \gamma}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \left(\frac{\alpha_4}{1+\alpha_3 I_M^*} + \frac{\alpha_5}{1+\alpha_1 I_M^*} \right) I_M^* \quad \text{เมื่อ } \alpha_4 = \frac{\gamma_A N_M}{\mu_H + \gamma} \quad \text{และ}$$

$$\alpha_5 = \frac{\mu_H \alpha_1}{(\mu_H + \gamma)(1+\alpha_2)}$$

$$(\gamma_M N_M - \mu_M) I_M^* - \gamma_M N_M (I_M^*)^2 = 0$$

กำหนดให้ $a_1 = \gamma_M N_M - \mu_M$ และ $a_2 = -\gamma_M N_M$ แล้วเราจะได้ว่า $a_2 (I_M^*)^2 + a_1 I_M^* = 0$

ผลเฉลยของสมการนี้ คือ $I_M^* (a_2 I_M^* + a_1) = 0$ ดังนั้น $I_M^* = 0$ และ

$$I_M^* = \frac{-a_1}{a_2} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$$

สำหรับ $I_M^* = 0$ จะได้ว่า $S_I^* = 1$, $I_I^* = 0$, $S_A^* = 1$ และ $I_A^* = 0$

สำหรับ $I_M^* = \frac{-a_1}{a_2} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$ จะได้ว่า

$$S_I^* = \frac{1}{(1+\alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_I^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1+\alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \left(\frac{\alpha_4}{1+\alpha_3 I_M^*} + \frac{\alpha_5}{1+\alpha_1 I_M^*} \right) I_M^*$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดสมดุลของระบบนี้ คือ

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และ

2) จุดสมดุลสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 = (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ เมื่อ

$$S_J^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_J^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \left(\frac{\alpha_4}{1 + \alpha_3 I_M^*} + \frac{\alpha_5}{1 + \alpha_1 I_M^*} \right) I_M^*$$

$$I_M^* = \frac{1 - \mu_M}{\gamma_M N_M}$$

กำหนดให้

$$X(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M$$

$$Y(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J$$

$$Z(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M$$

$$U(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = \gamma_A S_A I_M N_M + \mu_H I_J - (\mu_H + \gamma) I_A$$

$$V(S_J, I_J, S_A, I_A, I_M) = (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาโคเบียนเมทริกซ์ของแต่ละจุดสมดุล คือ

$$J = \begin{bmatrix} X_S & X_I & X_S & X_I & X_I \\ Y_S & Y_I & Y_S & Y_I & Y_I \\ Z_S & Z_I & Z_S & Z_I & Z_I \\ U_S & U_I & U_S & U_I & U_I \\ V_S & V_I & V_S & V_I & V_I \end{bmatrix}_{(S, I, S, I, I)}$$

โดยสมาชิกของจาโคเบียนเมทริกซ์ คือ

$$X_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M I_M^*$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$X_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\gamma_J N_M S_J^*$$

$$Y_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_J N_M I_M^*$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \beta + \gamma)$$

$$Y_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Y_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_J N_M S_J^*$$

$$Z_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Z_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^*$$

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$Z_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\gamma_A N_M S_A^*$$

$$U_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \mu_H$$

$$U_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_A N_M I_M^*$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -(\mu_H + \gamma)$$

$$U_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = \gamma_A N_M S_A^*$$

$$V_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_S (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = 0$$

$$V_I (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) = -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I_M^*)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเราสามารถเขียนเป็น

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M I_M^* & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M S_J^* \\ \gamma_J N_M I_M^* & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M S_J^* \\ 0 & 0 & -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* & 0 & -\gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & \mu_H & \gamma_A N_M I_M^* & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I_M^*) \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะจึงสามารถหาได้โดยการหาค่าผลเฉลยจากสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\det(J - \lambda I_5) = 0$$

เมื่อ I_5 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5

$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$

จาโคเบียนเมทริกซ์ J ของระบบนี้หาได้จากจุดสมดุลเหล่านี้คือ

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & \mu_H & 0 & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_E - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma_I N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H - \lambda & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & \mu_H & 0 & -(\mu_H + \gamma) - \lambda & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J_E - \lambda I_5) = \begin{vmatrix} -(\mu_H + \beta) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma_I N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma_I N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H - \lambda & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & \mu_H & 0 & -(\mu_H + \gamma) - \lambda & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= [-(\mu_H + \beta) - \lambda][-(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda][-\mu_H - \lambda][-(\mu_H + \gamma) - \lambda][-(\mu_M - \gamma_M N_M) - \lambda]$$

$$= 0$$

แก้สมการหาค่าเงาจงได้ดังนี้

$$-(\mu_H + \beta) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \beta$$

$$-(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \beta - \gamma$$

$$-\mu_H - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H$$

$$-(\mu_H + \gamma) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_H - \gamma$$

$$(\gamma_M N_M - \mu_M) - \lambda = 0$$

 \Leftrightarrow

$$\lambda = -\mu_M + \gamma_M N_M \quad (\lambda \text{ เป็นลบเมื่อ } \gamma_M N_M < \mu_M)$$

จากค่าเงาจงทั้ง 5 ค่า มีค่าเป็นลบ แสดงว่า จุดสมดุลมีเสถียรภาพ

ดังนั้น จุดสมดุลสภาวะไร้โรค คือ ค่าเสถียรเฉพาะสำหรับ $R_0 < 1$ $\left(R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M} \right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) จุดสมดุลสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ เมื่อ

$$S_J^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$I_J^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}$$

$$I_A^* = \left(\frac{\alpha_4}{1 + \alpha_3 I_M^*} + \frac{\alpha_5}{1 + \alpha_1 I_M^*} \right) I_M^*$$

$$I_M^* = \frac{-(\mu_M - \gamma_M N_M)}{\gamma_M N_M}$$

$$1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$$

$$J_E = \begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M I_M^* & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M S_J^* \\ \gamma_J N_M I_M^* & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M S_J^* \\ 0 & 0 & -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* & 0 & -\gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & \mu_H & \gamma_A N_M I_M^* & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - 2I_M^*) \end{bmatrix}$$

ค่าเงาะจงสามารถหาได้โดยการหาผลเฉลยจากสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$\det(J_E - \lambda I_5) = 0$$

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} -(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma N S \\ \gamma N I & -(\mu + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma N S \\ 0 & 0 & -\mu - \gamma N I - \lambda & 0 & -\gamma N S \\ 0 & \mu & \gamma N I & -(\mu + \gamma) - \lambda & \gamma N S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\gamma N S \\ \gamma N I & -(\mu + \beta + \gamma) - \lambda & 0 & 0 & \gamma N S \\ 0 & 0 & -\mu - \gamma N I - \lambda & 0 & -\gamma N S \\ 0 & \mu & \gamma N I & -(\mu + \gamma) - \lambda & \gamma N S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= [-(\mu + \beta) - \gamma N I - \lambda][-(\mu + \beta + \gamma) - \lambda][-\mu - \gamma N I - \lambda][-(\mu + \gamma) - \lambda][-\mu - \gamma N (2I - 1) - \lambda]$$

$$= 0$$

จะได้ค่าเฉพาะดังนี้

$$-(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M I_M^* - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N I$$

$$= -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right)$$

$$= -(\mu_H + \beta) - \gamma_I N_M + \frac{\mu_M \gamma_I}{\gamma_M}$$

$$-(\mu_H + \beta + \gamma) - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -(\mu_H + \beta + \gamma)$$

$$-(\mu_H + \gamma) - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -(\mu_H + \gamma)$$

$$-\mu_H - \gamma_A N_M I_M^* - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\mu_H - \gamma_A N_M I_M^*$$

$$= -\mu_H - \gamma_A N_M \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right)$$

$$= -\mu_H - \gamma_A N_M + \frac{\mu_M \gamma_A}{\gamma_M}$$

$$-\mu_M - \gamma_M N_M (2I_M^* - 1) - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\mu_M - \gamma_M N_M (2I_M^* - 1)$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M \left[2 \left(1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}\right) - 1\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M \left[2 - \frac{2\mu_M}{\gamma_M N_M} - 1 \right]$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M \left[1 - \frac{2\mu_M}{\gamma_M N_M} \right]$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M + \left(\frac{2\mu_M \gamma_M N_M}{\gamma_M N_M} \right)$$

$$= -\mu_M - \gamma_M N_M + 2\mu_M$$

$$= -\gamma_M N_M + \mu_M$$

จากค่าเงาจะจง $\lambda = -(\mu + \beta) - \gamma N + \frac{\mu \gamma}{\gamma}$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\frac{\mu \gamma}{\gamma} < (\mu + \beta) + \gamma N$

จากค่าเงาจะจง $\lambda = -\mu - \gamma N + \frac{\mu \gamma}{\gamma}$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\frac{\mu \gamma}{\gamma} < \mu + \gamma N$

จากค่าเงาจะจง $\lambda = -\gamma_M N_M + \mu_M$ จะมีค่าเป็นลบเมื่อ $\mu_M < \gamma_M N_M$

และค่าเงาจะจงที่เหลือมีค่าเป็นลบอยู่แล้ว แสดงว่า จุดสมดุลมีเสถียรภาพ

ดังนั้น จุดสมดุลสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง คือ ค่าเสถียรเฉพาะสำหรับ $R_0 > 1$ $\left(R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M} \right)$

4.3 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

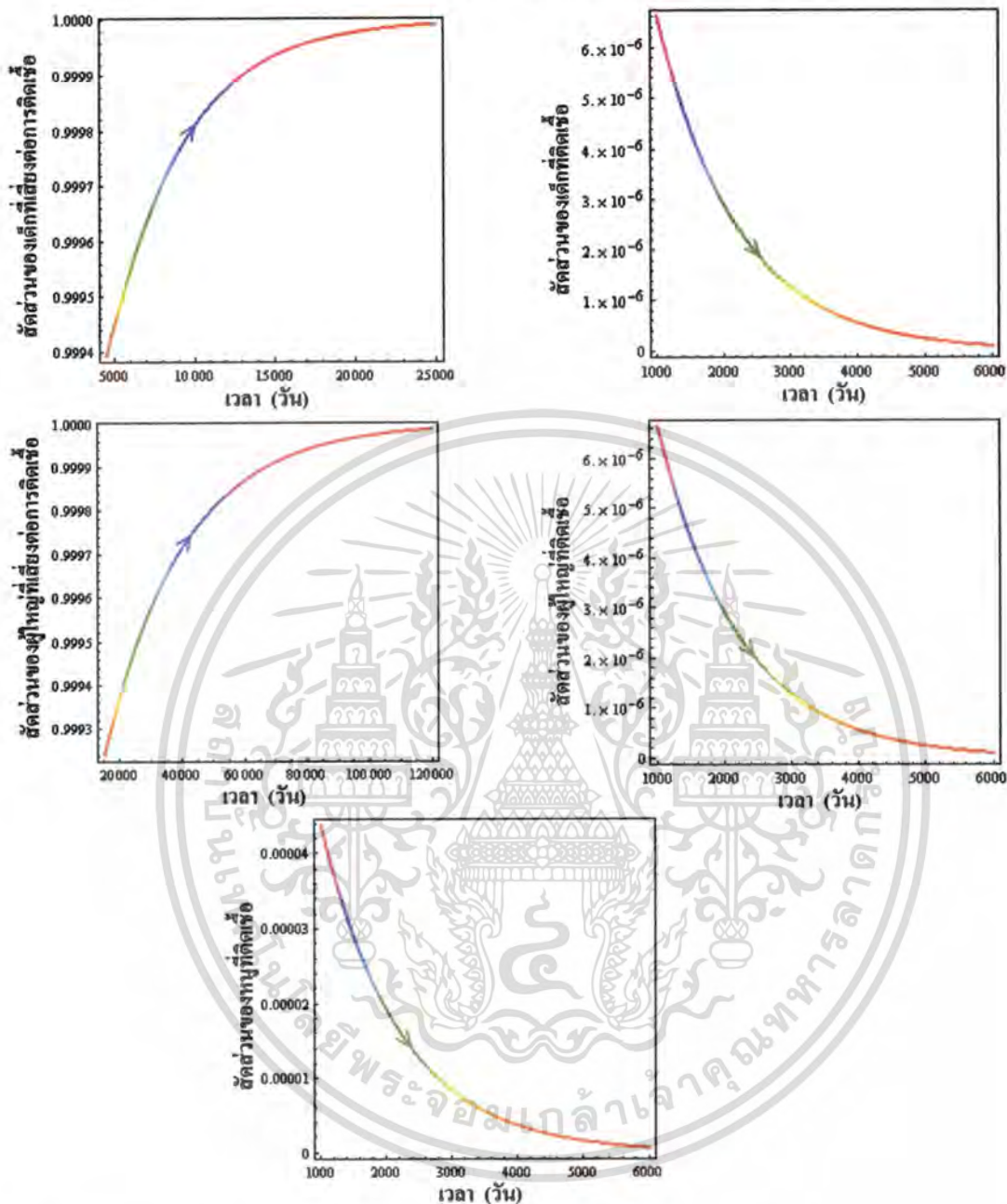
หัวข้อนี้เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงตัวเลข โดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจ เก็บข้อมูลเชิงสถิติในชีวิตจริงเกี่ยวกับการระบาดของโรคเลปโตสไปซิส ในการติดเชื้อของเด็ก ผู้ใหญ่ และหนู ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.3.1 ค่าพารามิเตอร์และอัตราของข้อมูลของคนและหนู แบบจำลองที่ 1 [18, 22, 24]

| ข้อความ | สัญลักษณ์ | พารามิเตอร์ | หน่วย |
|---|------------|------------------------------|--------|
| อัตราการเกิดของคน | μ_H | $\frac{1}{(365 \times 70)}$ | ต่อวัน |
| โดยที่อายุของคนเฉลี่ย 70 ปี | | | |
| อัตราการตายของหนู | μ_M | $\frac{1}{(365 \times 1.5)}$ | ต่อวัน |
| โดยที่อายุของหนูเฉลี่ย 1.5 ปี | | | |
| อัตราการฟื้นไข้ของคน | γ | $\frac{1}{15}$ | ต่อวัน |
| โดยที่คนฟื้นไข้เฉลี่ย 15 วัน | | | |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปเด็ก | γ_J | 0.001 | ต่อวัน |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปผู้ใหญ่ | γ_A | 0.001 | ต่อวัน |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู | γ_M | 0.000001 | ต่อวัน |
| อัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ | β | $\frac{1}{15 \times 365}$ | ต่อวัน |
| จำนวนเด็กทั้งหมด | N_J | 3000 | คน |
| จำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมด | N_A | 7000 | คน |
| จำนวนหนูทั้งหมด | N_M | 100 | ตัว |
| สภาวะไร้โรค ($R_0 < 1$) | | | |
| จำนวนหนูทั้งหมด | N_M | 50000 | ตัว |
| สภาวะโรคระบาดอย่างแท้จริง ($R_0 > 1$) | | | |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการศึกษาเมื่อนำพารามิเตอร์ดังกล่าวมาคำนวณแล้ว ทำให้ได้กราฟ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.3.1 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 1

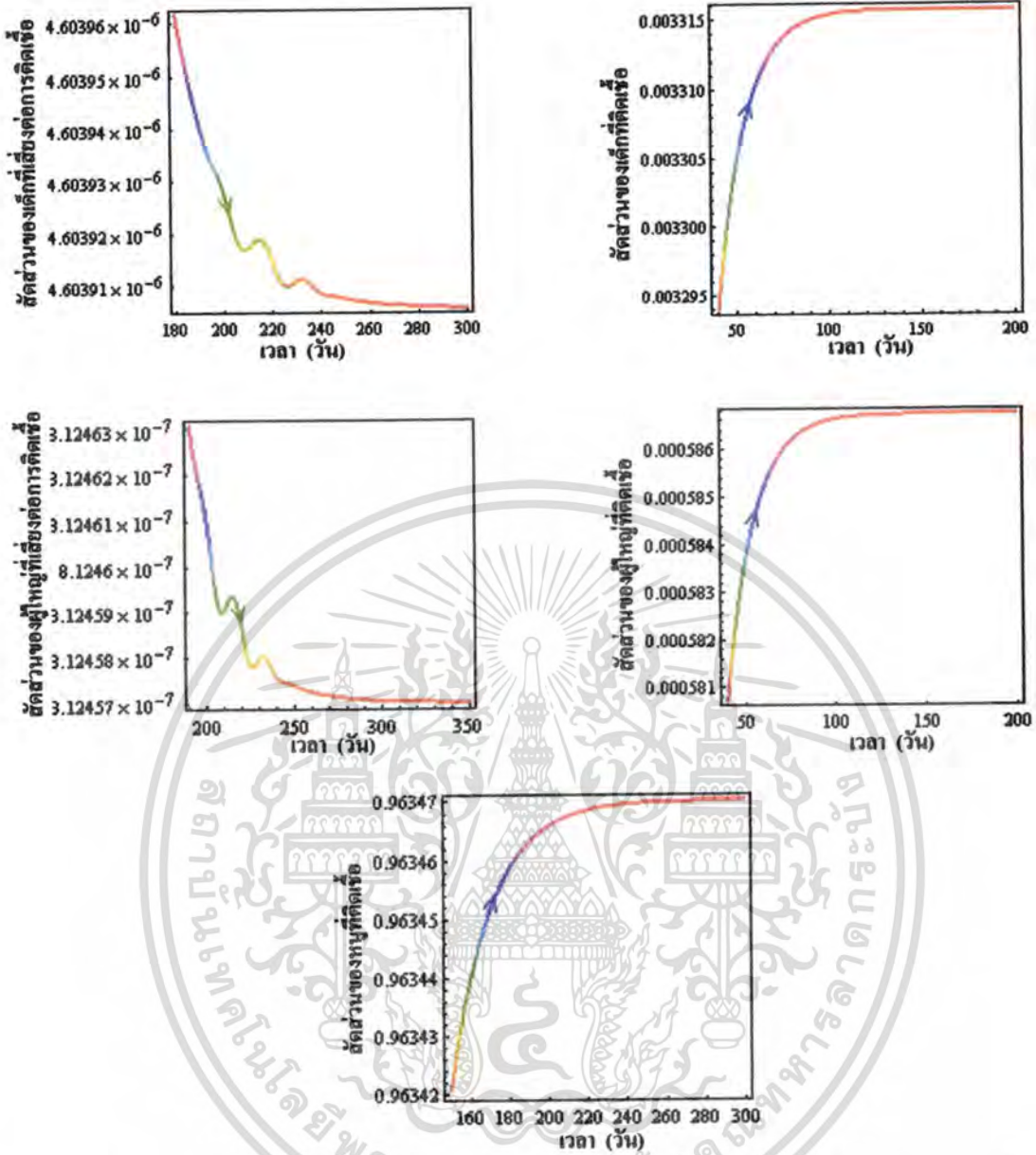
จากรูปที่ 4.3.1 พบว่า ได้อธิบาย S^*, I^*, S_A^*, I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$

โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.000001$,

$\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 100$, $R_0 = 0.05475$ จากกราฟทำให้ได้จุดสมดุล

ในสภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$

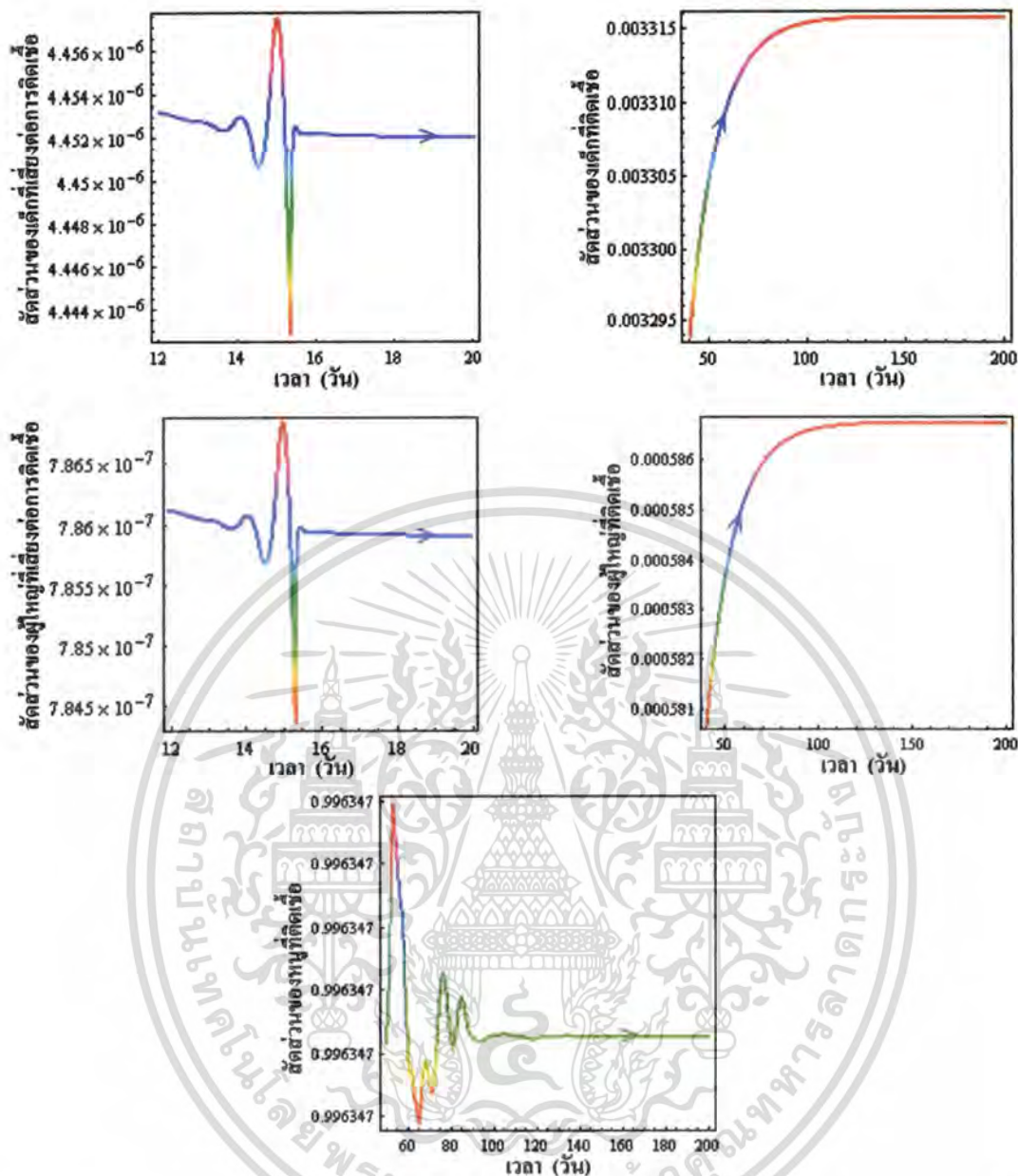
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.2 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างแท้จริง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.2 ได้อธิบาย S^*, I^*, S_A^*, I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.000001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 27.375$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S^*, I^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างแท้จริง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.000586739, 0.96347031)$

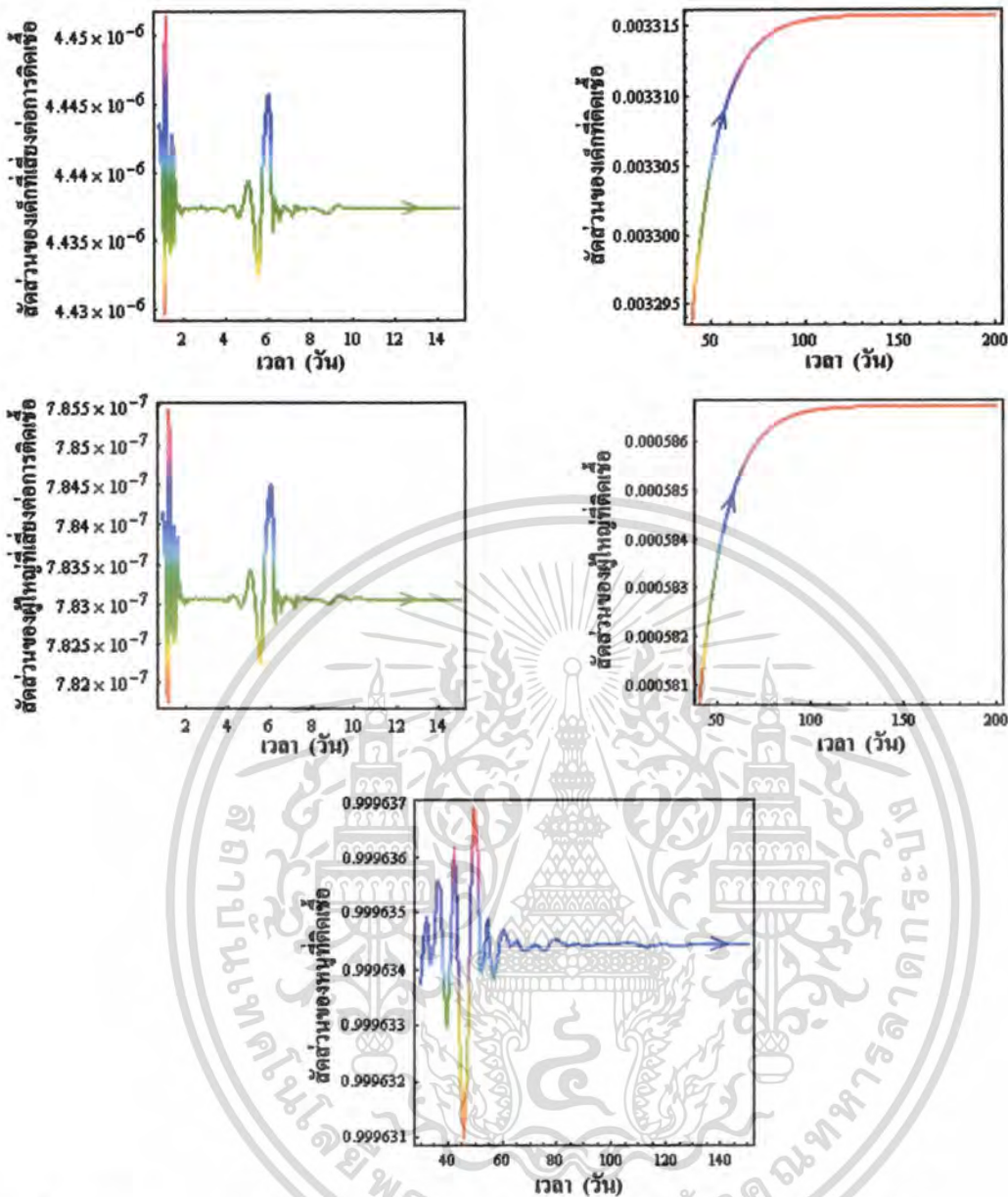
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.3 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.00001 ของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.3 ได้อธิบาย S_t^* , I_t^* , S_A^* , I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.00001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 273.75$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S_t^*, I_t^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.000586739, 0.9963470)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.4 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนุ่ที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างเร็วริง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.0001 ของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.4 ได้อธิบาย S_J^* , I_J^* , S_A^* , I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_J = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเร็วริง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3.1 สรุปผลได้ว่า ในสภาวะไร้โรคสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 1 เมื่อเทียบกับเวลา 25,000 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 1 เมื่อเทียบกับเวลา 120,000 วัน นั่นแสดงว่า เด็กและผู้ใหญ่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแต่ยังไม่มีการติดเชื้อโรค ต้องใช้ระยะเวลาบางส่วน เด็ก ผู้ใหญ่และหนู ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 0 เมื่อเทียบกับเวลา 6,000 วัน นั่นแสดงว่า เด็ก ผู้ใหญ่และหนูไม่มีการติดเชื้อโรค มีระยะเวลาที่น้อยกว่าผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ โดยที่ จุดสมดุลในสภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) คือ 0.05475

จากรูปที่ 4.3.2 – 4.3.4 ได้มีการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) ดังนี้ รูปที่ 4.3.2 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.000001 รูปที่ 4.3.3 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.00001 รูปที่ 4.3.4 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.0001 ซึ่งมีค่าลดลงเรื่อยๆ โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่นๆ มีค่าคงเดิม ผลปรากฏว่า รูปที่ 4.3.2 ได้ผลเฉลย ($S'_j, I'_j, S'_A, I'_A, I'_M$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.000586739, 0.96347031)$ รูปที่ 4.3.3 ได้ผลเฉลย ($S'_j, I'_j, S'_A, I'_A, I'_M$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.000586739, 0.9963470)$ รูปที่ 4.3.4 ได้ผลเฉลย ($S'_j, I'_j, S'_A, I'_A, I'_M$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.000004437, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$ จะเห็นว่า S'_j และ S'_A มีค่าลดลง I'_j และ I'_A มีค่าคงเดิม I'_M มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.2 คือ 27.375 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.3 คือ 273.75 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.4 คือ 2,737.5 จะเห็นว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ จากข้อมูลดังกล่าวทำให้ทราบว่า เมื่อลดค่าอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) ส่งผลให้เวลาที่เข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้น โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.3.2 4.3.3 และ 4.3.4 ดังนี้

ตารางที่ 4.3.2 ระยะเวลา ณ จุดสมดุล S'_j, I'_j, S'_A, I'_A และ I'_M แบบจำลองที่ 1

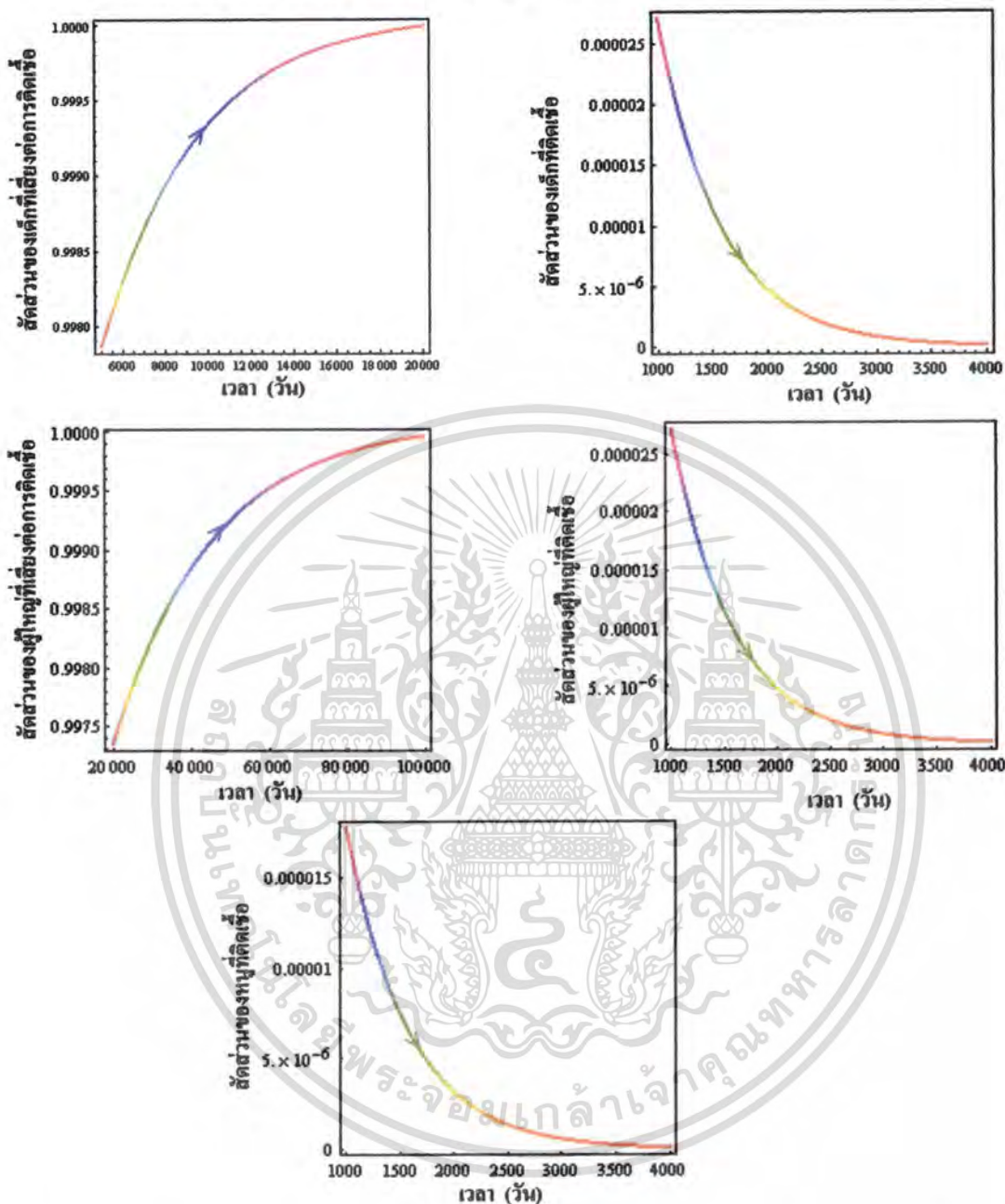
| จุดสมดุล | รูปที่ 4.3.2 | รูปที่ 4.3.3 | รูปที่ 4.3.4 |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) |
| S'_j | 300 | 20 | 12 |
| I'_j | 200 | 200 | 200 |
| S'_A | 350 | 20 | 12 |
| I'_A | 200 | 200 | 200 |
| I'_M | 300 | 200 | 140 |

ตารางที่ 4.3.3 ค่าพารามิเตอร์และอัตราของข้อมูลของคนและหนู แบบจำลองที่ 2 [18, 22, 24]

| ข้อความ | สัญลักษณ์ | พารามิเตอร์ | หน่วย |
|--|------------|------------------------------|--------|
| อัตราการเกิดของคน | μ_H | $\frac{1}{365 \times 70}$ | ต่อวัน |
| โดยที่อายุของคนเฉลี่ย 70 ปี | | | |
| อัตราการตายของหนู | μ_M | $\frac{1}{(365 \times 1.5)}$ | ต่อวัน |
| โดยที่อายุของหนูเฉลี่ย 1.5 ปี | | | |
| อัตราการฟื้นไข้ของคน | γ | $\frac{1}{15}$ | ต่อวัน |
| โดยที่คนฟื้นไข้เฉลี่ย 15 วัน | | | |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปเด็ก | γ_J | 0.001 | ต่อวัน |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปผู้ใหญ่ | γ_A | 0.001 | ต่อวัน |
| อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู | γ_M | 0.000001 | ต่อวัน |
| อัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ | β | $\frac{1}{15 \times 365}$ | ต่อวัน |
| จำนวนเด็กทั้งหมด | N_J | 3000 | คน |
| จำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมด | N_A | 7000 | คน |
| จำนวนหนูทั้งหมด | N_M | 100 | ตัว |
| สถานะไร้โรค ($R_0 < 1$) | | | |
| จำนวนหนูทั้งหมด | N_M | 50000 | ตัว |
| สถานะโรคระบาดอย่างเรื้อรัง ($R_0 > 1$) | | | |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการศึกษาเมื่อนำพารามิเตอร์ดังกล่าวมาคำนวณแล้ว ทำให้ได้กราฟ ดังต่อไปนี้



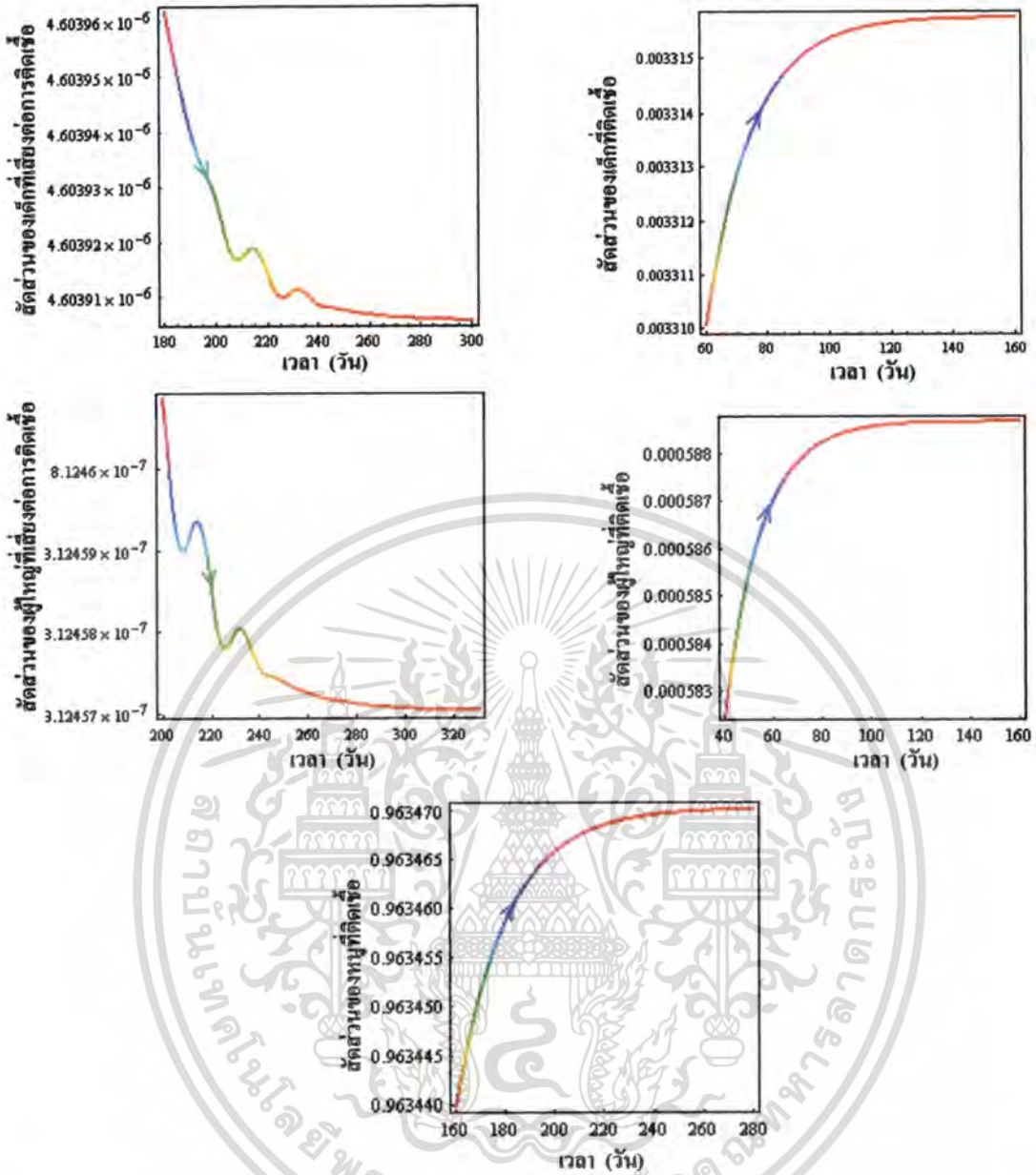
รูปที่ 4.3.5 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะไร้โรค เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.5 ได้อธิบาย $S^*_j, I^*_j, S^*_A, I^*_A$ และ I^*_M ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$ โดยที่

$$\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}, \mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}, \gamma = \frac{1}{15}, \gamma_j = 0.001, \gamma_A = 0.001, \gamma_M = 0.000001, \beta = \frac{1}{365 \times 15}, N_j = 3000, N_A = 7000, N_M = 100, R_0 = 0.05475$$

ในสภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$

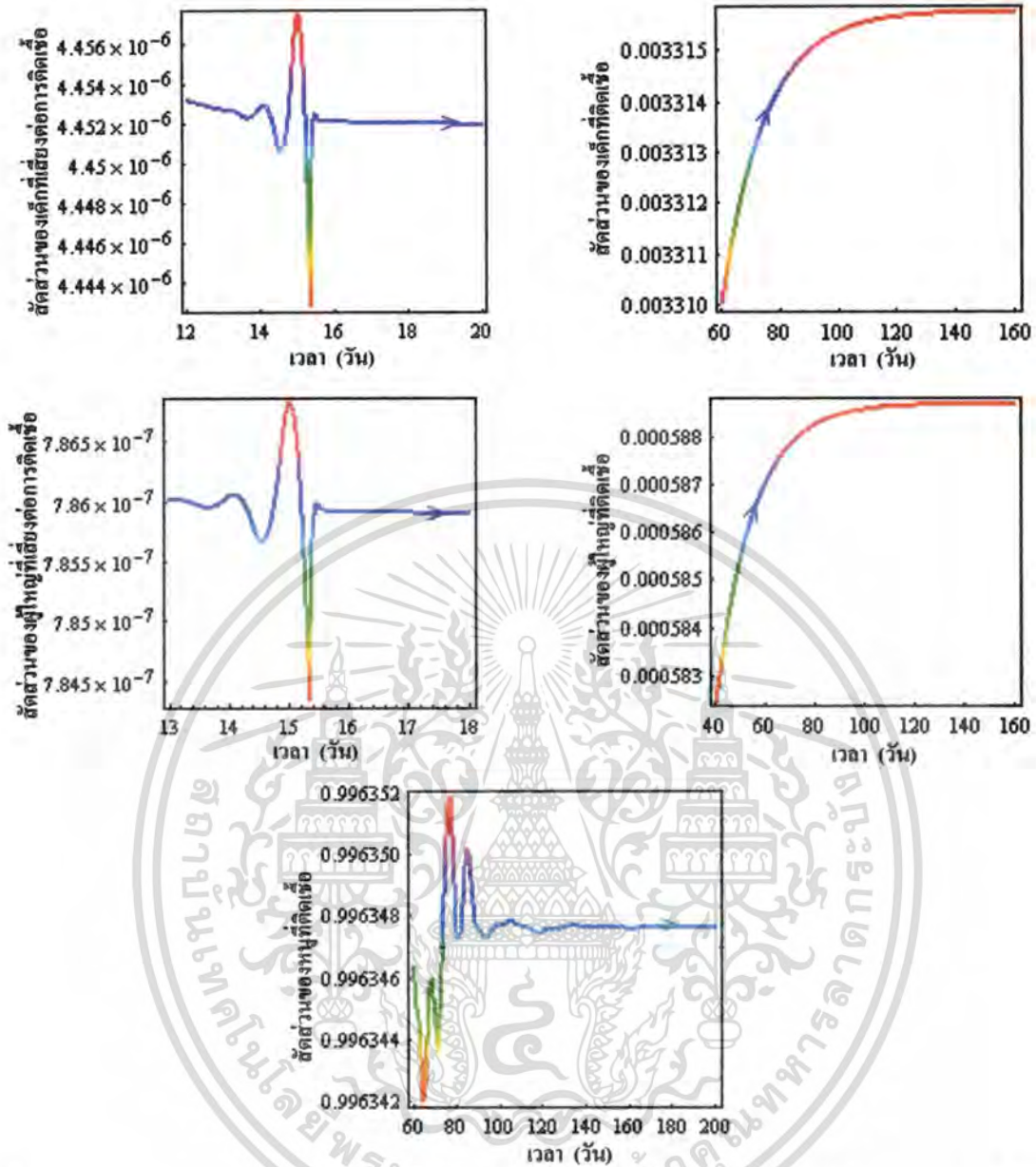
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสำนักงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.6 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.000001 ของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.6 ได้อธิบาย S^*, I^*, S_A^*, I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.000001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 27.375$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S^*, I^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.000588684, 0.96347031)$

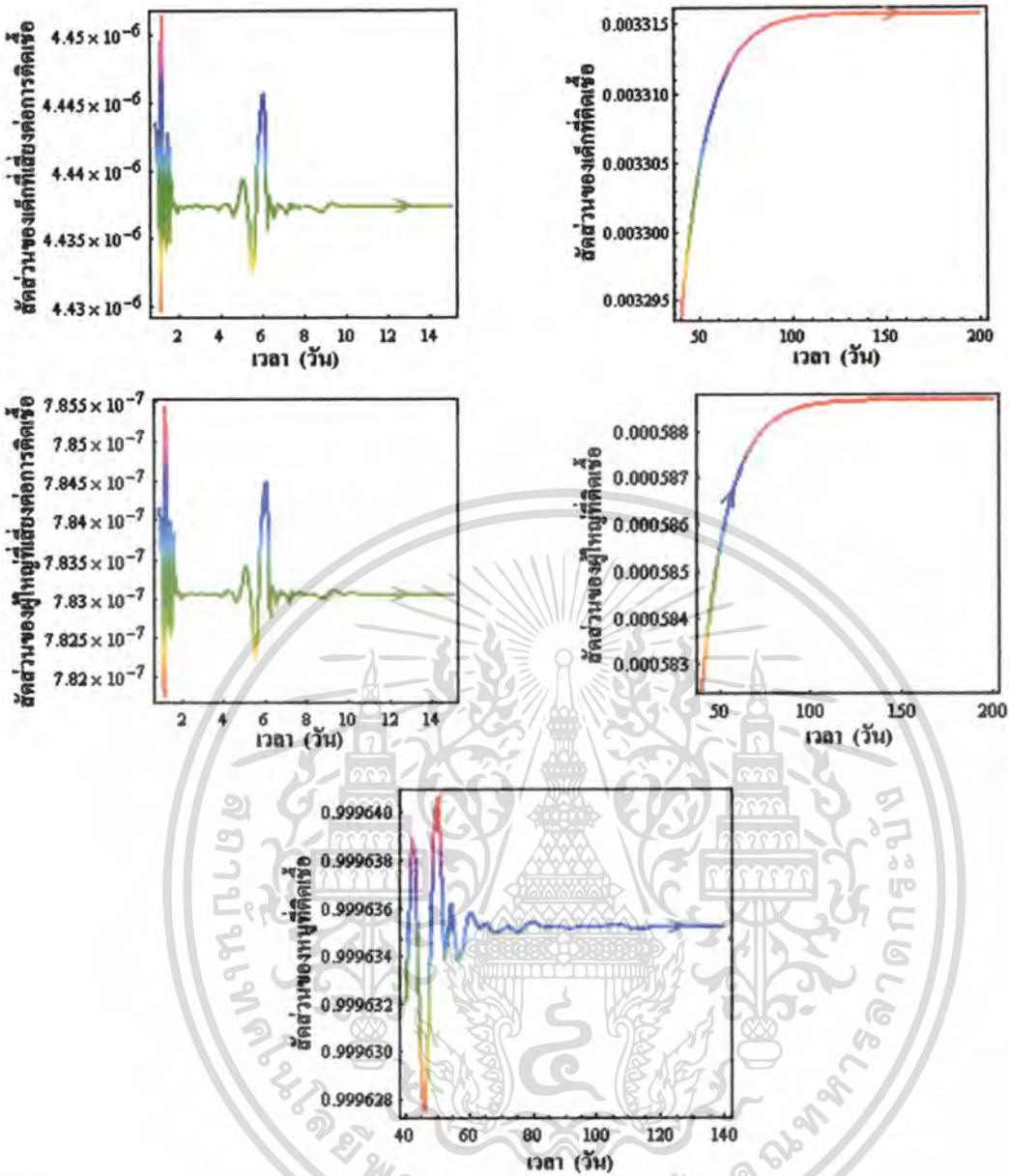
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.7 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างเร็วรั้ง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.00001 ของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.7 ได้อธิบาย S_j^* , I_j^* , S_A^* , I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_j = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.00001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_j = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 273.75$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S_j^*, I_j^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.00058868, 0.9963470)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.8 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเร็วจริง เมื่อ γ_M เท่ากับ 0.0001 ของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.8 ได้อธิบาย S_J^* , I_J^* , S_A^* , I_A^* และ I_M^* ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_J = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ จากกราฟทำให้ได้ผลเฉลย $(S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาดอย่างเร็วจริง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3.5 สรุปผลได้ว่า ในสภาวะไร้โรค สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 1 เมื่อเทียบกับเวลา 20,000 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 1 เมื่อเทียบกับเวลา 100,000 วัน นั่นแสดงว่า เด็กและผู้ใหญ่เสี่ยงต่อการติดเชื้อแต่ยังไม่มีการติดเชื้อโรค ต้องใช้ระยะเวลามาก ส่วนเด็ก ผู้ใหญ่และหนู ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่ค่า 0 เมื่อเทียบกับเวลา 4,000 วัน นั่นแสดงว่า เด็ก ผู้ใหญ่และหนูไม่มีการติดเชื้อโรค มีระยะเวลาที่น้อยกว่าผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ โดยที่ จุดสมดุลในสภาวะไร้โรค $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) คือ 0.05475

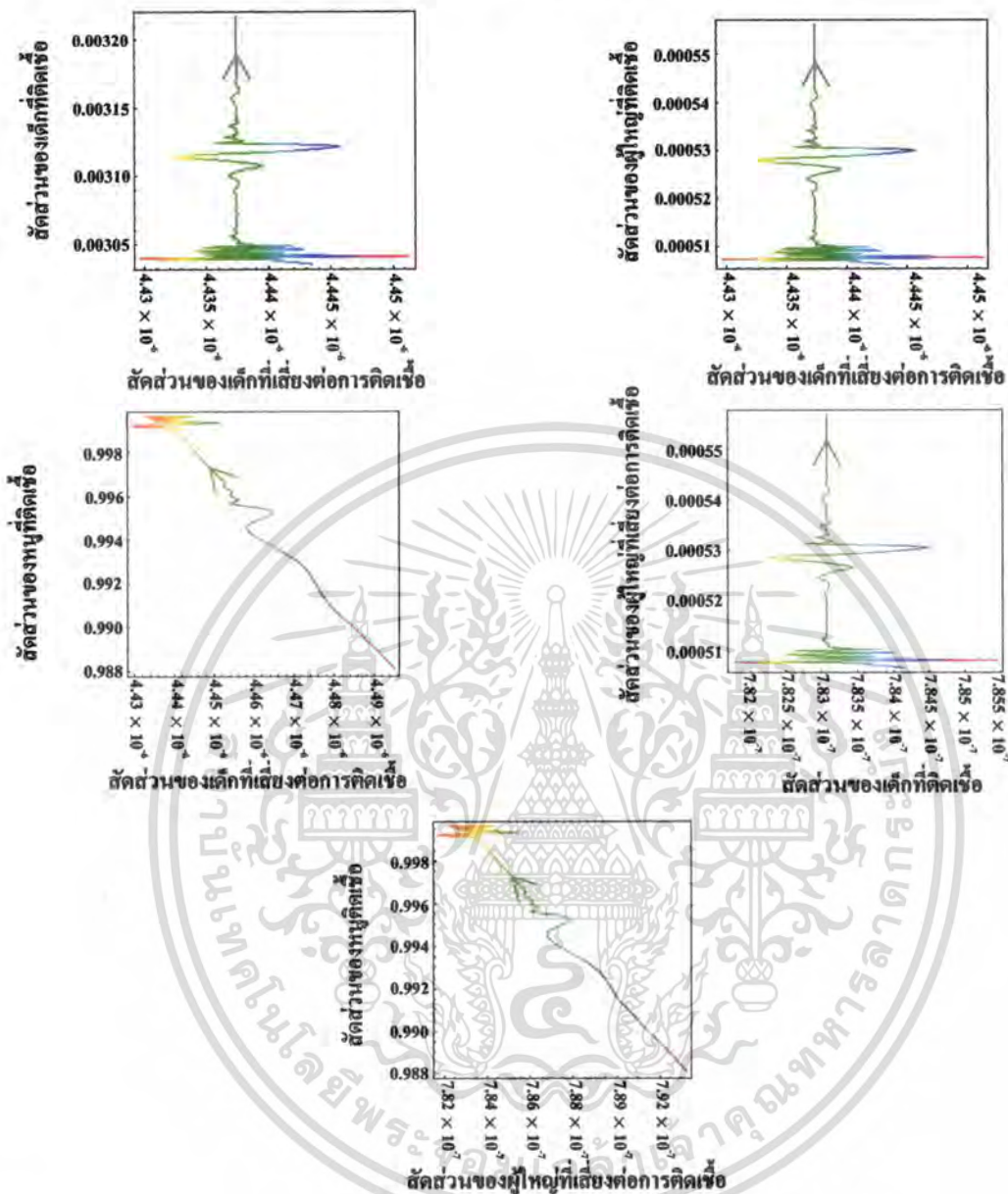
จากรูปที่ 4.3.6 – 4.3.8 สรุปผลได้ว่า ได้มีการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) ดังนี้ รูปที่ 4.3.6 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.000001 รูปที่ 4.3.7 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.00001 รูปที่ 4.3.8 อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) คือ 0.0001 ซึ่งมีค่าลดลงเรื่อยๆ โดยที่ค่าพารามิเตอร์อื่นๆ มีค่าคงเดิม ผลปรากฏว่า รูปที่ 4.3.6 ได้ผลเฉลย ($S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.00058868, 0.96347031)$ รูปที่ 4.3.7 ได้ผลเฉลย ($S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.00058868, 0.9963470)$ รูปที่ 4.3.8 ได้ผลเฉลย ($S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*$) ซึ่งจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.000004437, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$ จะเห็นว่า S_J^* และ S_A^* มีค่าลดลง I_J^* และ I_A^* มีค่าคงเดิม I_M^* มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.6 คือ 27.375 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.7 คือ 273.75 ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) ของรูปที่ 4.3.8 คือ 2,737.5 จะเห็นว่า ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ จากข้อมูลดังกล่าวทำให้ทราบว่า เมื่อลดค่าอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปยังหนู (γ_M) ส่งผลให้เวลาที่เข้าสู่จุดสมดุลเร็วขึ้น โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.3.6, 4.3.7 และ 4.3.8 ดังนี้

ตารางที่ 4.3.4 ระยะเวลา ณ จุดสมดุล S_J^* , I_J^* , S_A^* , I_A^* และ I_M^* แบบจำลองที่ 2

| จุดสมดุล | รูปที่ 4.3.6 | รูปที่ 4.3.7 | รูปที่ 4.3.8 |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) | เข้าสู่ ณ เวลา (วัน) |
| S_J^* | 300 | 18 | 12 |
| I_J^* | 160 | 160 | 160 |
| S_A^* | 320 | 18 | 12 |
| I_A^* | 160 | 160 | 150 |
| I_M^* | 280 | 180 | 140 |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในแบบจำลองที่ 1

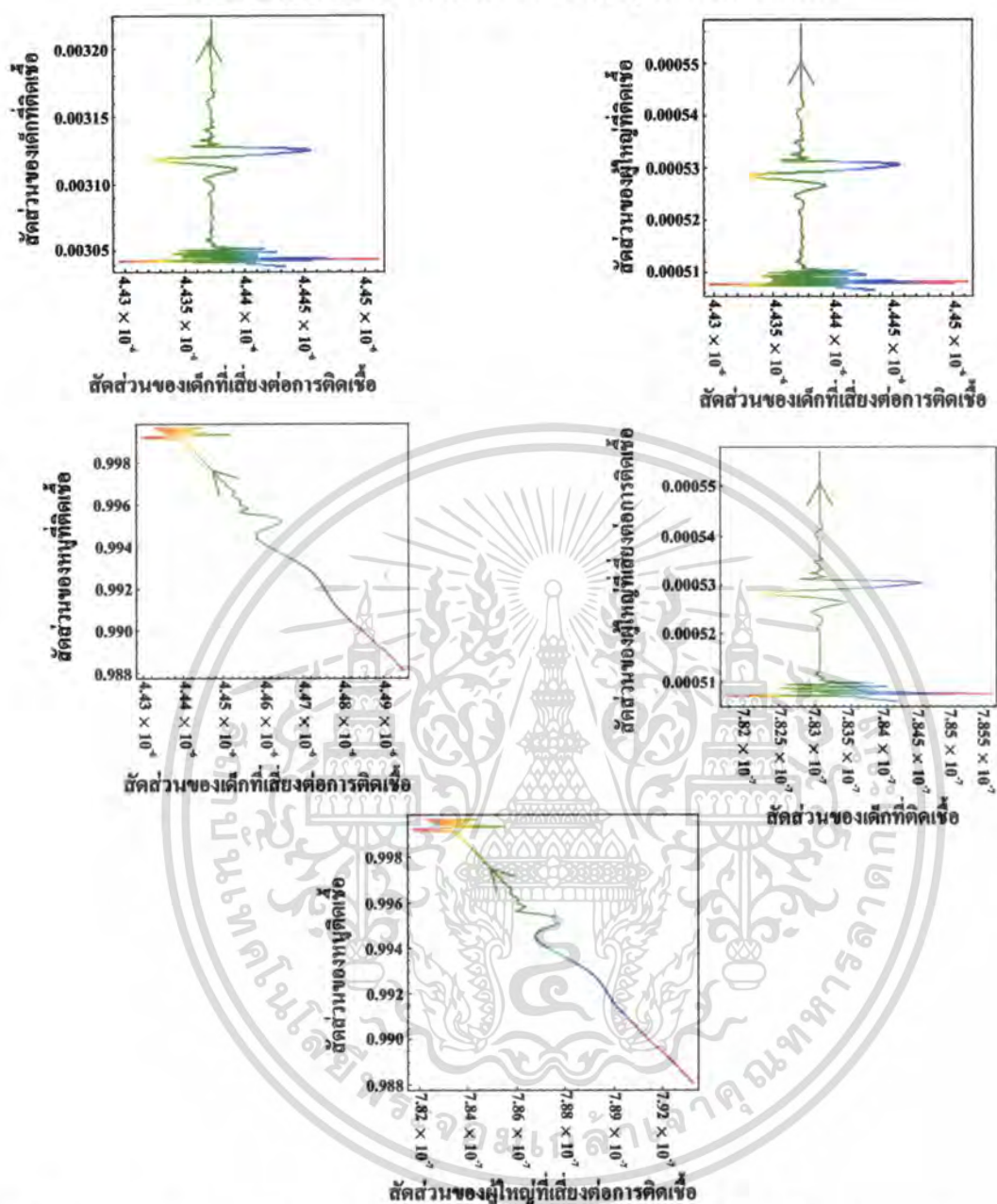


รูปที่ 4.3.9 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาคอย่างเร็วของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.9 ได้อธิบาย (S_j^*, I_j^*) , (S_j^*, I_A^*) , (S_j^*, I_M^*) , (I_j^*, S_A^*) และ (S_A^*, I_M^*) , ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งมีจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเร็ว $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในแบบจำลองที่ 2

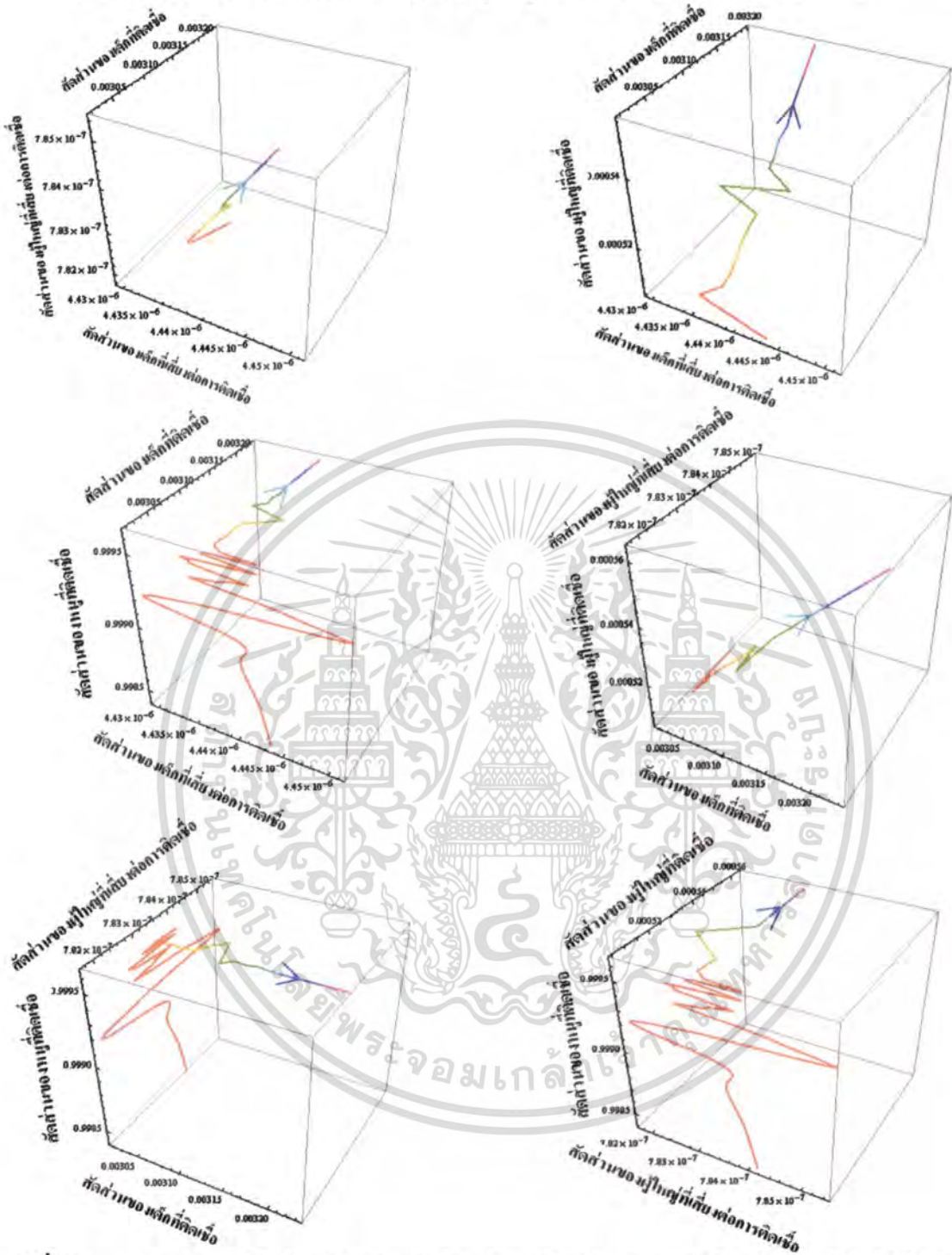


รูปที่ 4.3.10 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิสในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.10 ได้อธิบาย (S_j^*, I_j^*) , (S_j^*, I_A^*) , (S_j^*, I_M^*) , (I_j^*, S_A^*) และ (S_A^*, I_M^*) , ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_j = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_j = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งมีจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

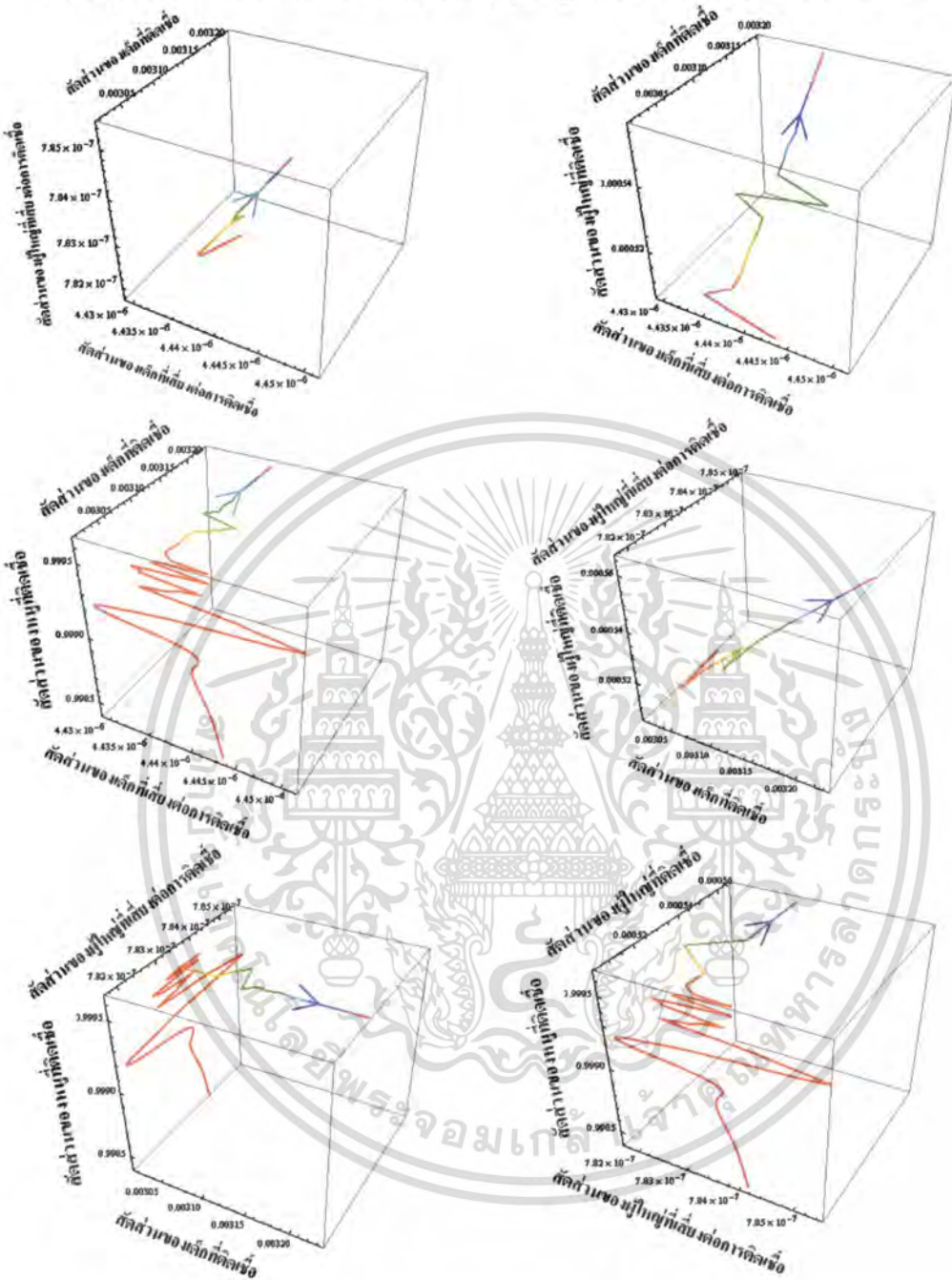
กราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติ ของแบบจำลองที่ 1



รูปที่ 4.3.11 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.11 ได้อธิบาย (S_j^*, I_j^*, S_A^*) , (S_j^*, I_j^*, I_A^*) , (S_j^*, I_j^*, I_M^*) , (I_j^*, S_A^*, I_A^*) , (I_j^*, S_A^*, I_M^*) และ (S_A^*, I_A^*, I_M^*) ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งมีจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$ เอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติ ของแบบจำลองที่ 2



รูปที่ 4.3.12 กราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.12 ได้อธิบาย (S_J^*, I_J^*, S_A^*) , (S_J^*, I_J^*, I_A^*) , (S_J^*, I_J^*, I_M^*) , (I_J^*, S_A^*, I_A^*) , (I_J^*, S_A^*, I_M^*) และ (S_A^*, I_A^*, I_M^*) ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_J = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งมีจุดสมดุลในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตให้ใช้ซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต

จากรูปที่ 4.3.9 เป็นการแสดงกราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1 โดยพิจารณาจากซ้ายไปขวา ดังต่อไปนี้ กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.0000046039, 0.00331576), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00000445199, 0.000586739), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00000445199, 0.9963470), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00331576, 0.000000785648) และกราฟระหว่างสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.000000785648, 0.9963470)

จากรูปที่ 4.3.10 เป็นการแสดงกราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2 โดยพิจารณาจากซ้ายไปขวา เช่นเดียวกัน มีความแตกต่างกันของกราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00000445199, 0.00058868) นอกเหนือจากนั้นเหมือนกัน

จากรูปที่ 4.3.11 เป็นการแสดงกราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1 โดยพิจารณาจากซ้ายไปขวา ดังต่อไปนี้ กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อและสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000785648), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อและสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.0000046039, 0.00331576, 0.000586739), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อและสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.0000046039, 0.00331576, 0.9963470), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00331576, 0.000000785648, 0.000586739), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00331576, 0.000000785648, 0.9963470) และกราฟระหว่างสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.000000785648, 0.000586739, 0.9963470)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3.12 เป็นการแสดงกราฟระหว่างสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2 โดยพิจารณาจากซ้ายไปขวาเช่นเดียวกัน มีความแตกต่างกันของกราฟ 3 กราฟ ดังนี้ กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อและสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.0000046039, 0.00331576, 0.00058868), กราฟระหว่างสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.00331576, 0.000000785648, 0.00058868) และกราฟระหว่างสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ กราฟจะลู่เข้าสู่จุดสมมูล (0.000000785648, 0.00058868, 0.9963470)

จากรูปที่ 4.3.9 – 4.3.12 ความแตกต่างกันของสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ โดยแบบจำลองที่ 1 สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ คือ 0.000586739 แบบจำลองที่ 2 สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ คือ 0.00058868 เมื่อมีการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 ผลปรากฏว่าแบบจำลองที่ 2 ลู่เข้าสู่จุดสมมูลในเวลาที่เร็วกว่าแบบจำลองที่ 1 แสดงว่าแบบจำลองที่ 2 ลดการระบาดของโรคได้เร็วกว่า

ในหัวข้อต่อไปนี้จะอธิบายถึงค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) โดย $R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M}$

หมายความว่า สัดส่วนระหว่างอัตราการถ่ายทอดเชื้อไปยังหนูคูณด้วยจำนวนหนูทั้งหมดต่ออัตราการตายของหนู จากการนำค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมาวิเคราะห์ในข้อมูล ทำให้ทราบว่า เมื่อมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ($R_0 < 1$) จุดสมมูลจะอยู่ในสภาวะไร้โรค คือ $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหนึ่ง ($R_0 > 1$) จุดสมมูลจะอยู่ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง คือ

$$E_2 = (S_1^*, I_1^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*) \text{ แบบจำลองที่ 1 คือ } S_1^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}, I_1^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)},$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)}, I_A^* = \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)}, I_M^* = \frac{-(\mu_M - \gamma_M N_M)}{\gamma_M N_M} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M} \text{ หรือ } 1 - \frac{1}{R_0}$$

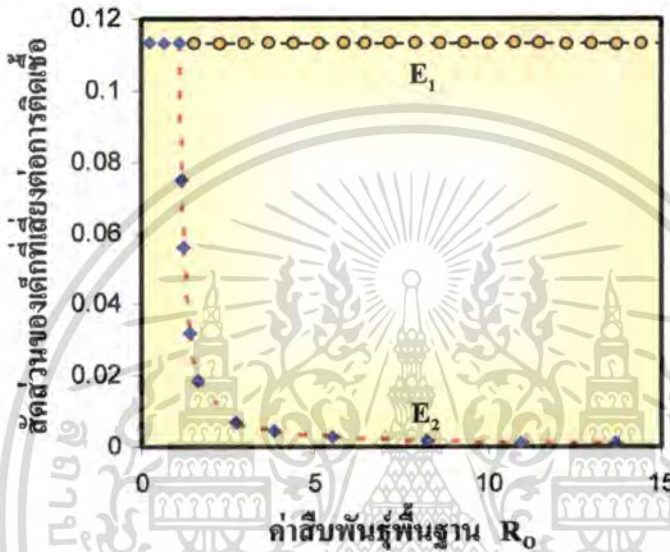
$$\text{แบบจำลองที่ 2 คือ } S_1^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)}, I_1^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)}, S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)},$$

$$I_A^* = \left(\frac{\alpha_4}{1 + \alpha_3 I_M^*} + \frac{\alpha_5}{1 + \alpha_1 I_M^*} \right) I_M^*, I_M^* = \frac{-(\mu_M - \gamma_M N_M)}{\gamma_M N_M} = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M} = 1 - \frac{1}{R_0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

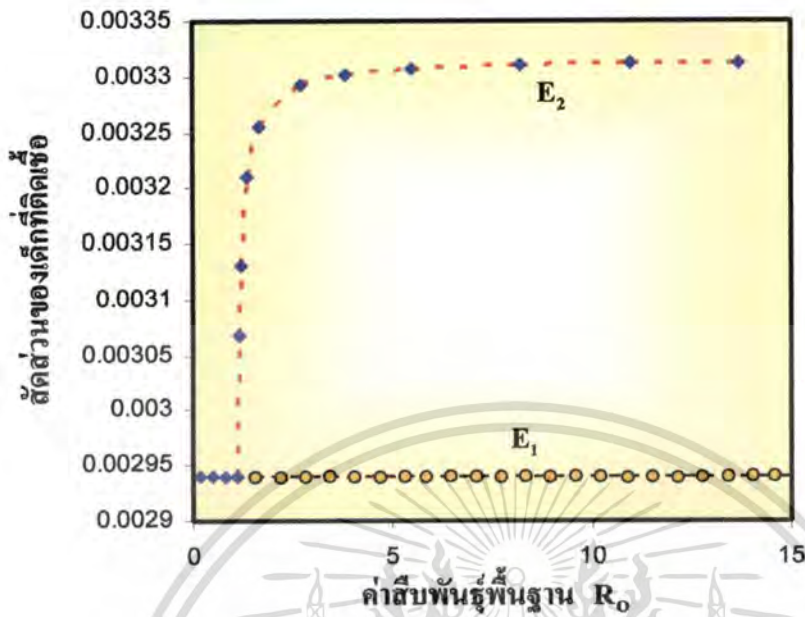
กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปซิสในสภาวะไร้โรค และระบาคอย่างเรื้องรังของแบบจำลองที่ 1

กำหนดให้  แทน ผลเฉลยที่ไม่เสถียร
 แทน ผลเฉลยที่เสถียร



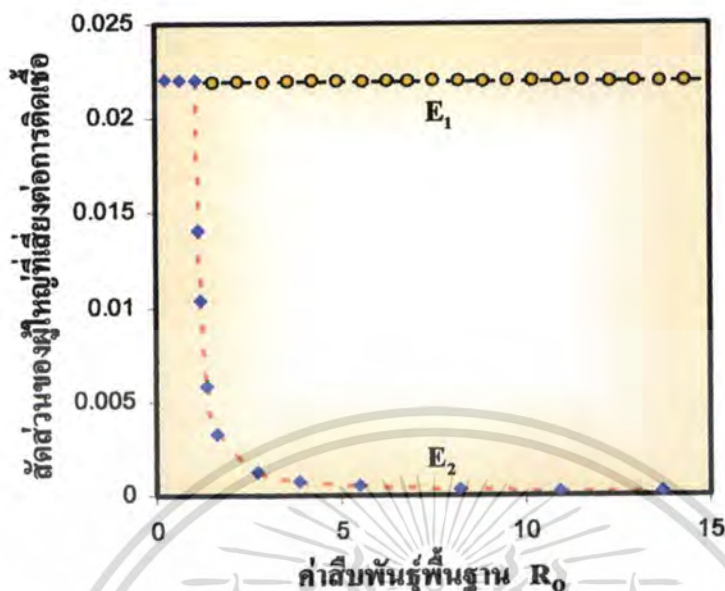
รูปที่ 4.3.13 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปซิสในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้องรังของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.13 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.113 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้องรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0 นั่นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าน้อยลง



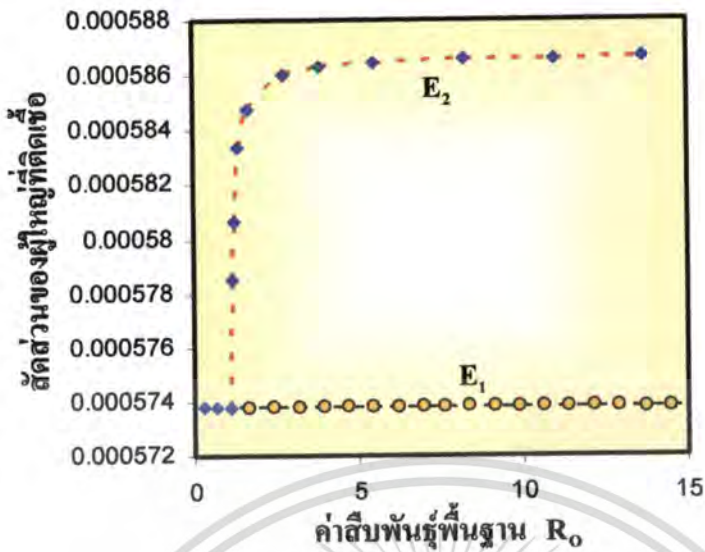
รูปที่ 4.3.14 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิต ในสถานะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.14 สรุปได้ว่า ในสถานะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.002939 ในทางกลับกัน ในสถานะระบาดอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.0033126 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้น



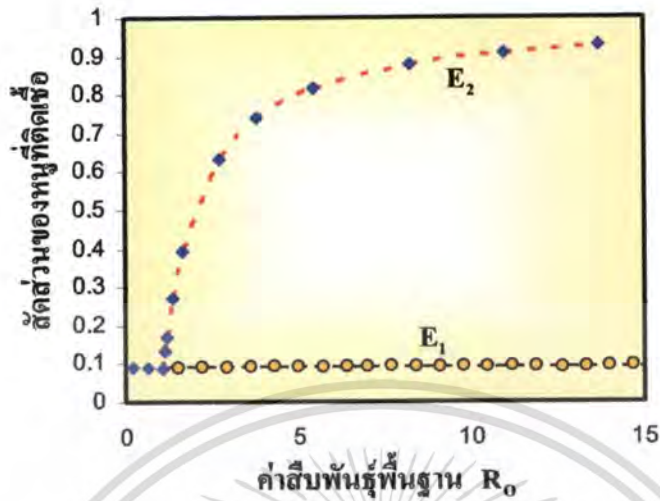
รูปที่ 4.3.15 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรค เบทโตสไปซิสในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1

จากรูปที่ 4.3.15 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.0220588 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าน้อยลง



รูปที่ 4.3.16 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อของโรค
เลปโตสไปริสในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1

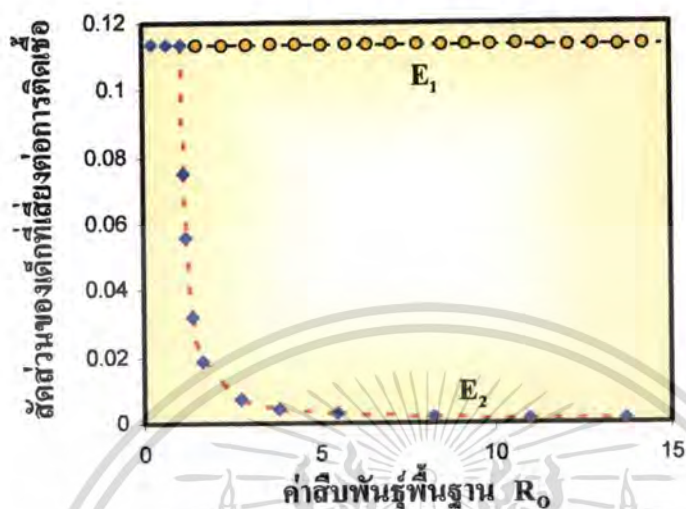
จากรูปที่ 4.3.16 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000573797 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000586641 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้น



รูปที่ 4.3.17 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปซิส ในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1

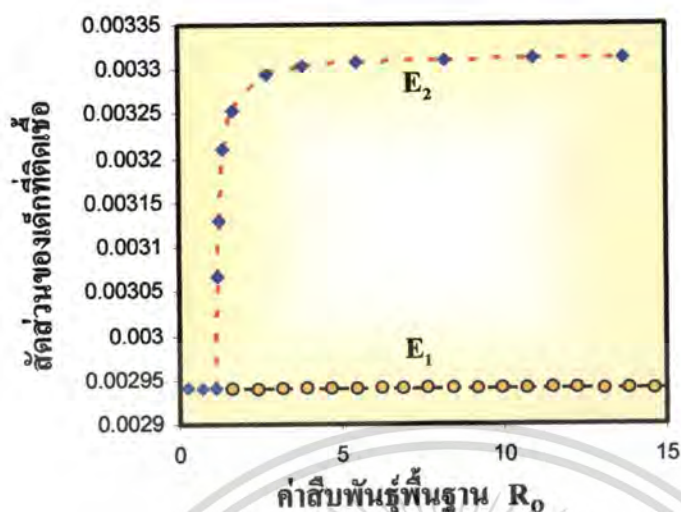
จากรูปที่ 4.3.17 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.086758 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.926941 นั่นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้น

ต่อไปจะเป็นการพิจารณาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เทียบกับสัดส่วนต่างๆ รวมทั้งจุดสมมูล E_1 และ E_2 ของแบบจำลองที่ 2 ซึ่งได้ผลดังต่อไปนี้



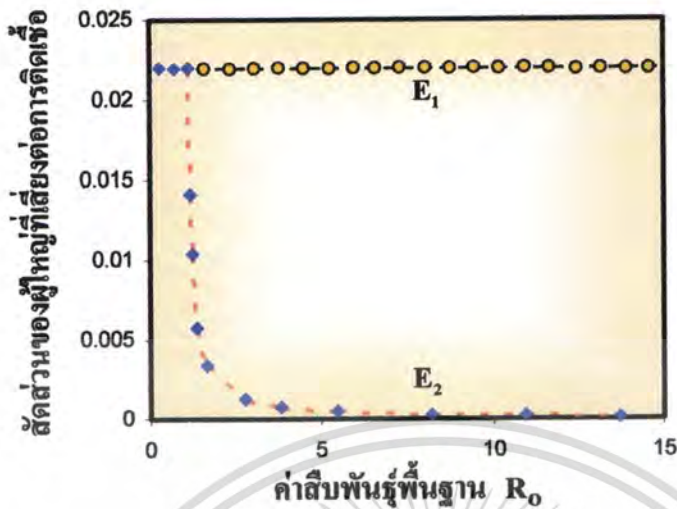
รูปที่ 4.3.18 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรคเลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบอดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.18 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมมูล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.113 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบอดอย่างเรื้อรังจุดสมมูล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าน้อยลง



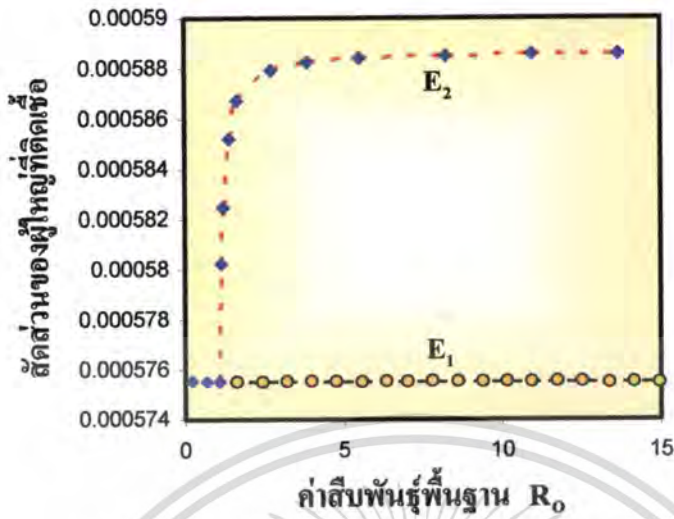
รูปที่ 4.3.19 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กติดเชื้อของโรคเลปโตสไปซิส ในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.19 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.002939 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.0033126 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้น



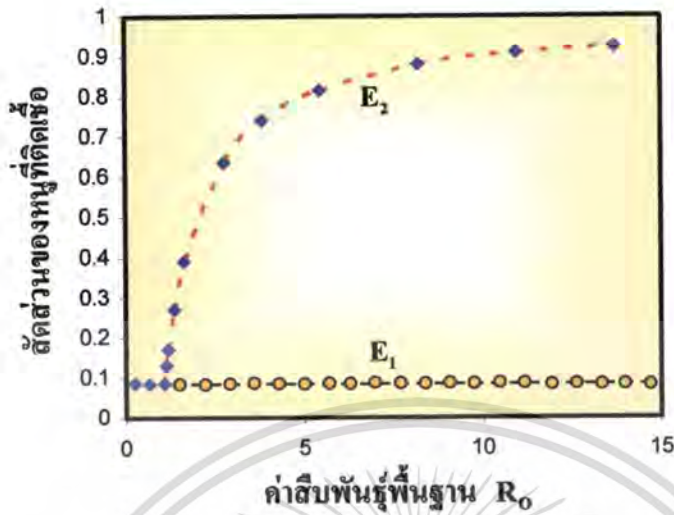
รูปที่ 4.3.20 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อของโรค เลปโตสไปจิตในสถานะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.20 สรุปได้ว่า ในสถานะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.0220588 ในทางกลับกัน ในสถานะระบาดอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าน้อยลง



รูปที่ 4.3.21 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อของโรค เลปโตสไปจิตในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.21 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000575522 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000588584 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้น

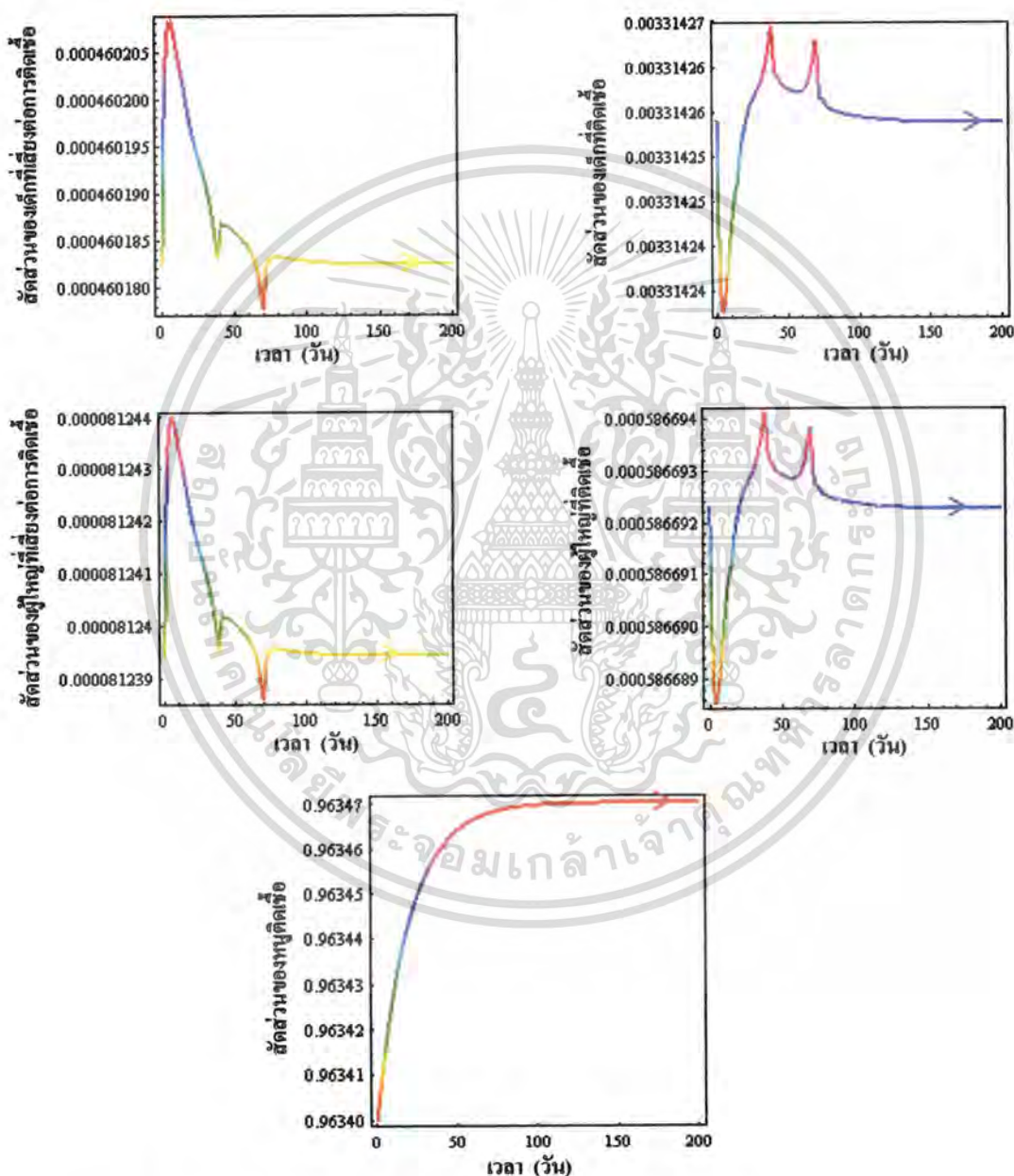


รูปที่ 4.3.22 กราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปซิส ในสภาวะไร้โรคและระบาคอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 2

จากรูปที่ 4.3.22 สรุปได้ว่า ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุล (E_1) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.086758 ในทางกลับกัน ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรังจุดสมดุล (E_2) จะเสถียร เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) มีค่ามากกว่าหนึ่ง และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.926941 นั้นหมายความว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อมีค่ามากขึ้นด้วย

เมื่อพิจารณาทั้งสองแบบจำลอง พบว่ามีความแตกต่างกันระหว่างรูปที่ 4.3.16 (แบบจำลองที่ 1) และรูปที่ 4.3.21 (แบบจำลองที่ 2) โดยมีรายละเอียดดังนี้ แบบจำลองที่ 1 สภาวะไร้โรค สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000573797 ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000586641 แต่แบบจำลองที่ 2 สภาวะไร้โรค สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000575522 และสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000588584 รูปอื่นๆ ระหว่างแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 มีค่าเท่ากัน จากความแตกต่างดังกล่าวทำให้ทราบว่าแบบจำลองที่ 2 เข้าสู่จุดสมดุลในเวลาที่รวดเร็วกว่าในแบบจำลองที่ 1 จึงทำให้แบบจำลองที่ 2 ลดการระบาดของโรคได้ดีกว่าแบบจำลองที่ 1

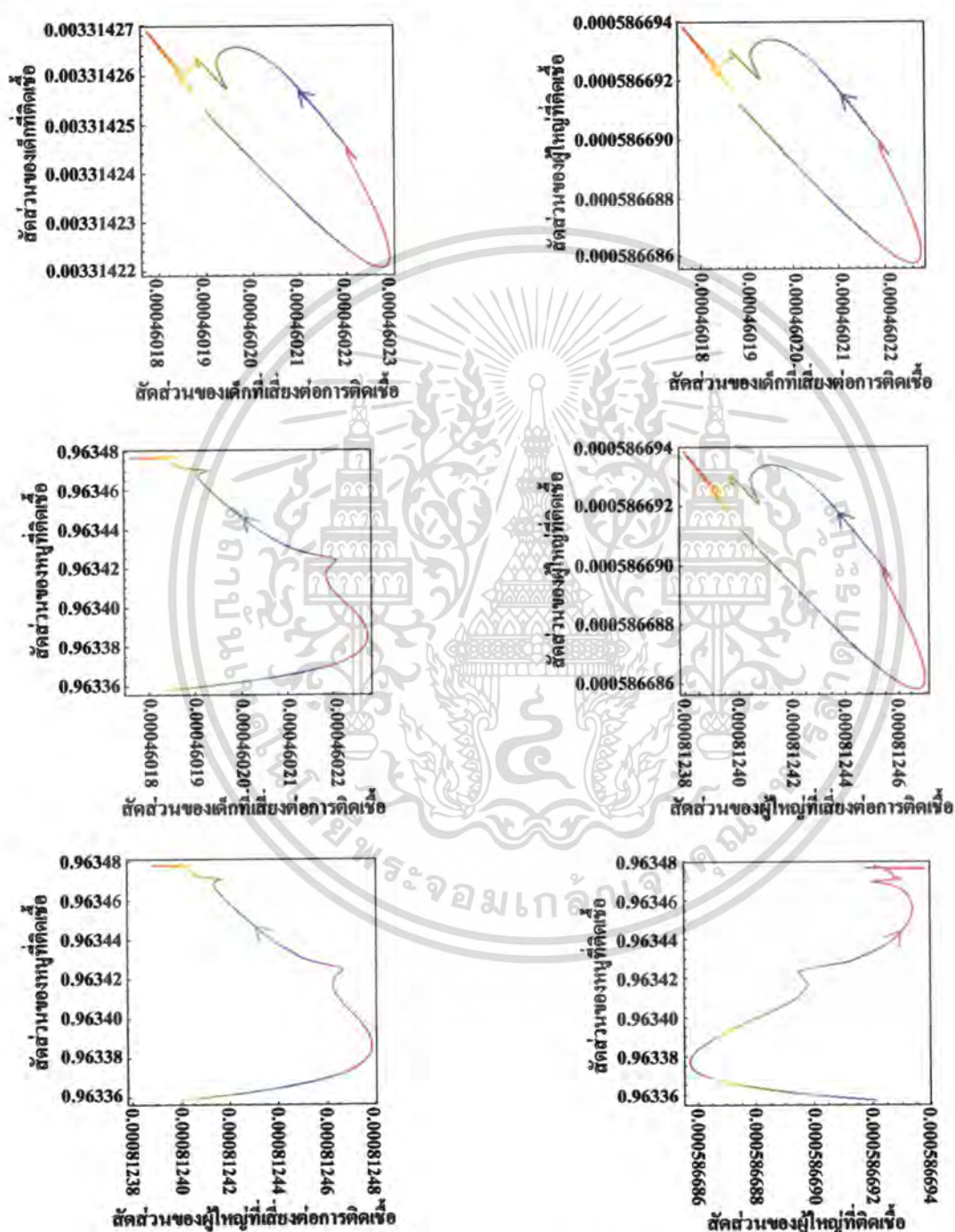
หัวข้อต่อไปนี้ มีการศึกษาเพิ่มเติมในแบบจำลองที่ 1 เมื่อกำหนดให้จำนวนหนู (N_M) เท่ากับ 500 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 27.375 เพื่อสังเกตความแตกต่างระหว่างจำนวนหนู 50,000 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 2737.5 โดยที่ค่าอื่นๆ เท่ากัน ดังนี้ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, จากการนำมาวิเคราะห์ได้ผลดังนี้



รูปที่ 4.3.23 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 1

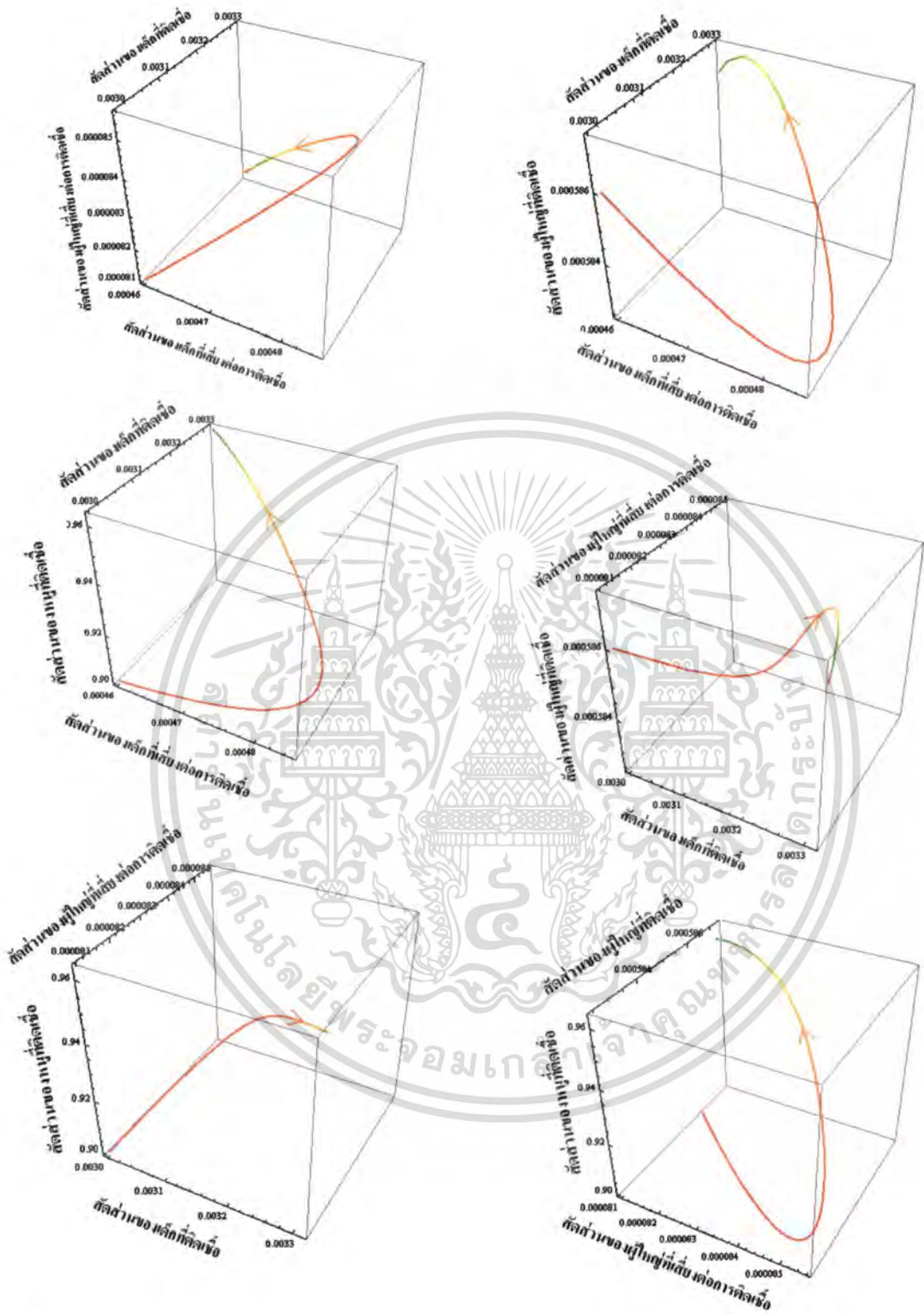
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำกราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.23 มาสร้างรูปแบบสองมิติได้ดังนี้



รูปที่ 4.3.24 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 1 ในรูปแบบสองมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตเห็นชอบให้เผยแพร่เป็นการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.25 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 1 ในรูปแบบสามมิติ

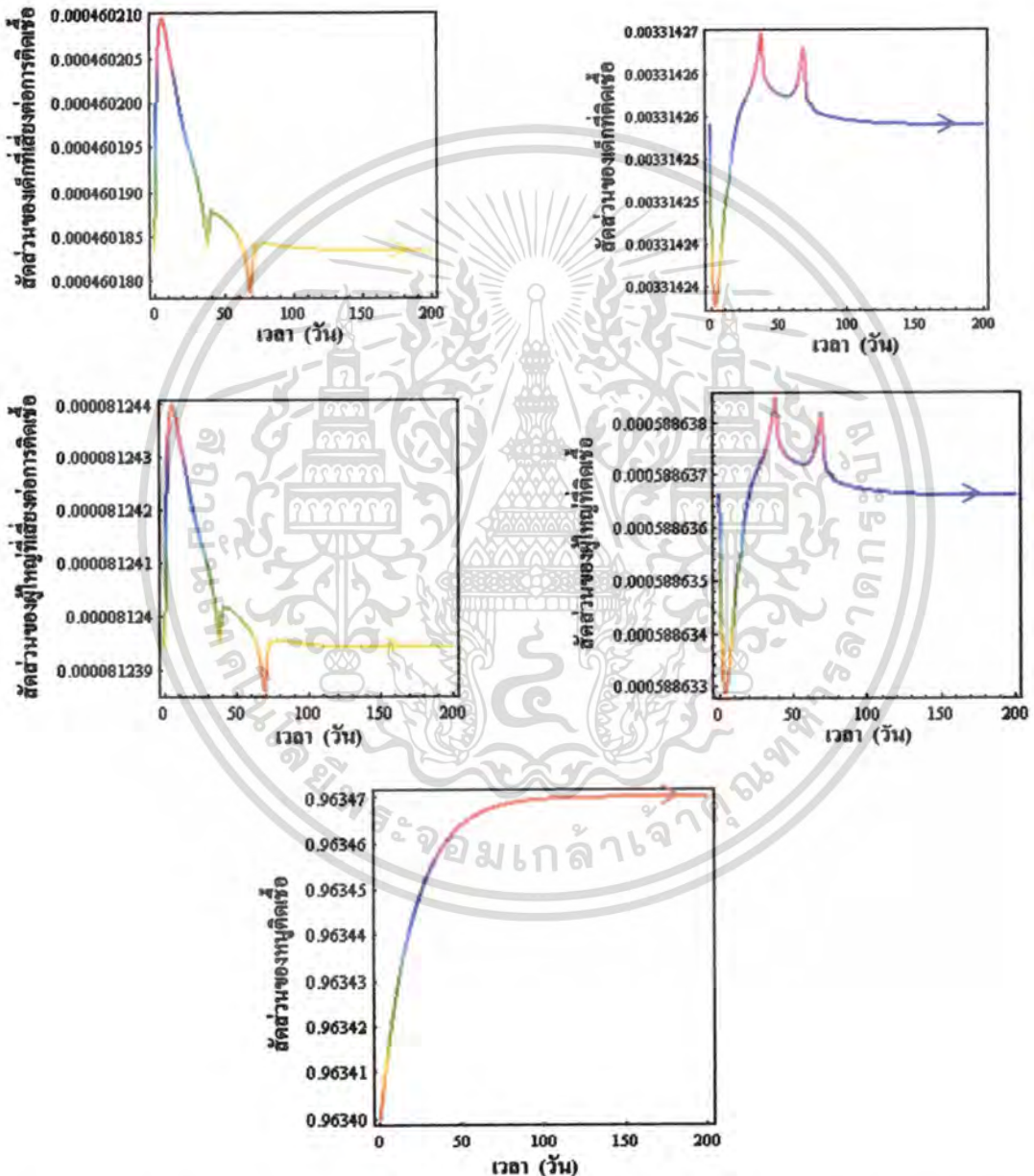
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3.23 – 4.3.25 ถ้ากำหนดจำนวนหนู 500 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 27.375 จุดสมมูล คือ (0.000460180, 0.003314253, 0.000081239, 0.000586692, 0.963470) ซึ่งจะเสถียร ณ เวลา 200 วัน เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.3.8 – 4.3.10 กำหนดจำนวนหนู 50000 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 2737.5 จุดสมมูล คือ (0.0000044437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347) สัตว์ส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัตว์ส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, สัตว์ส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัตว์ส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, และสัตว์ส่วนของหนูที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 140 วัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อจำนวนหนูเพิ่มมากขึ้น จุดสมมูลจะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้น และค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

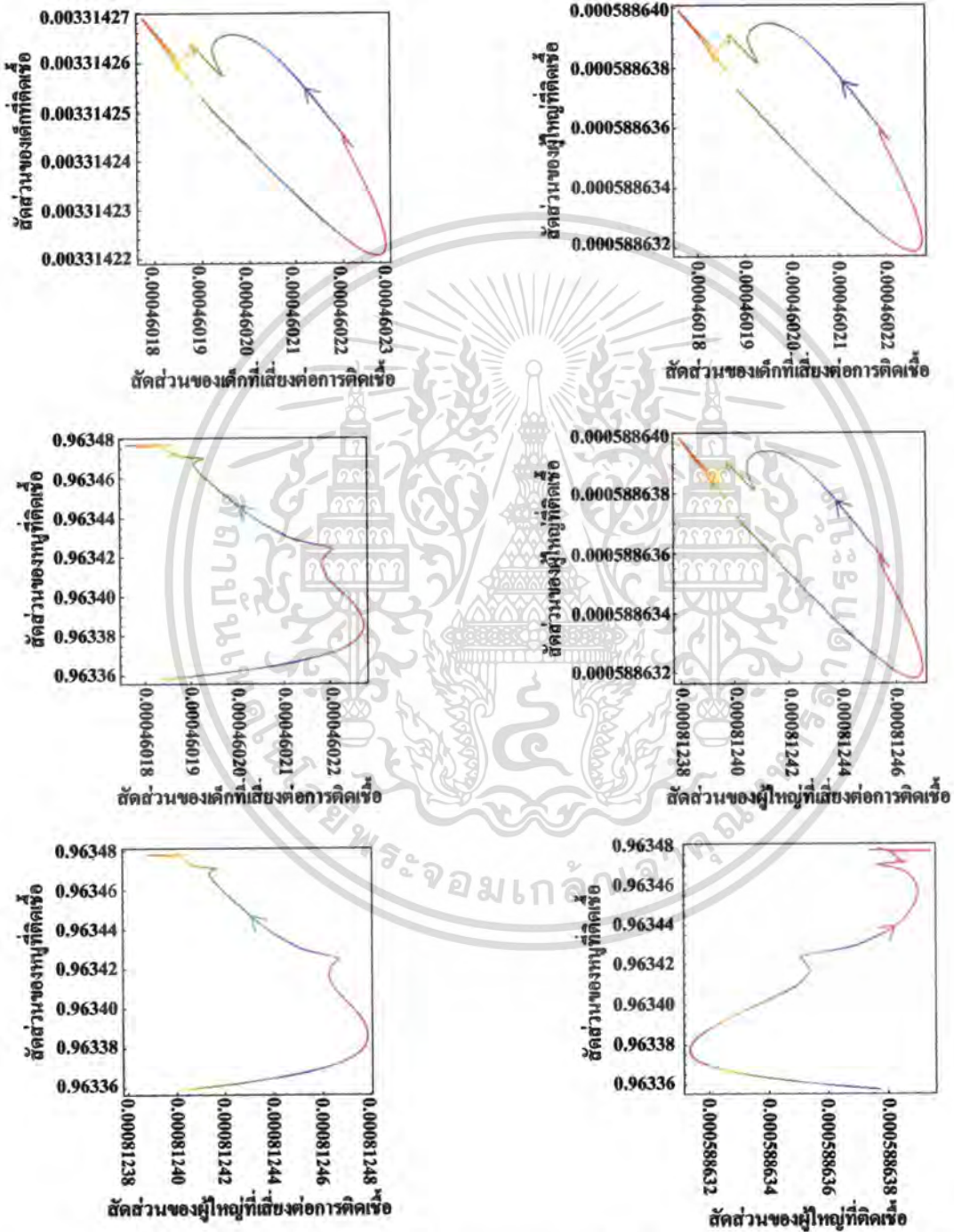
หัวข้อต่อไปนี้ มีการศึกษาเพิ่มเติมในแบบจำลองที่ 2 เมื่อกำหนดให้จำนวนหนู (N_M) เท่ากับ 500 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 27.375 เพื่อสังเกตความแตกต่างระหว่างจำนวนหนู 50,000 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 2737.5 โดยที่ค่าอื่นๆ เท่ากัน ดังนี้ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ผลและสร้างกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 4.3.26 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 2

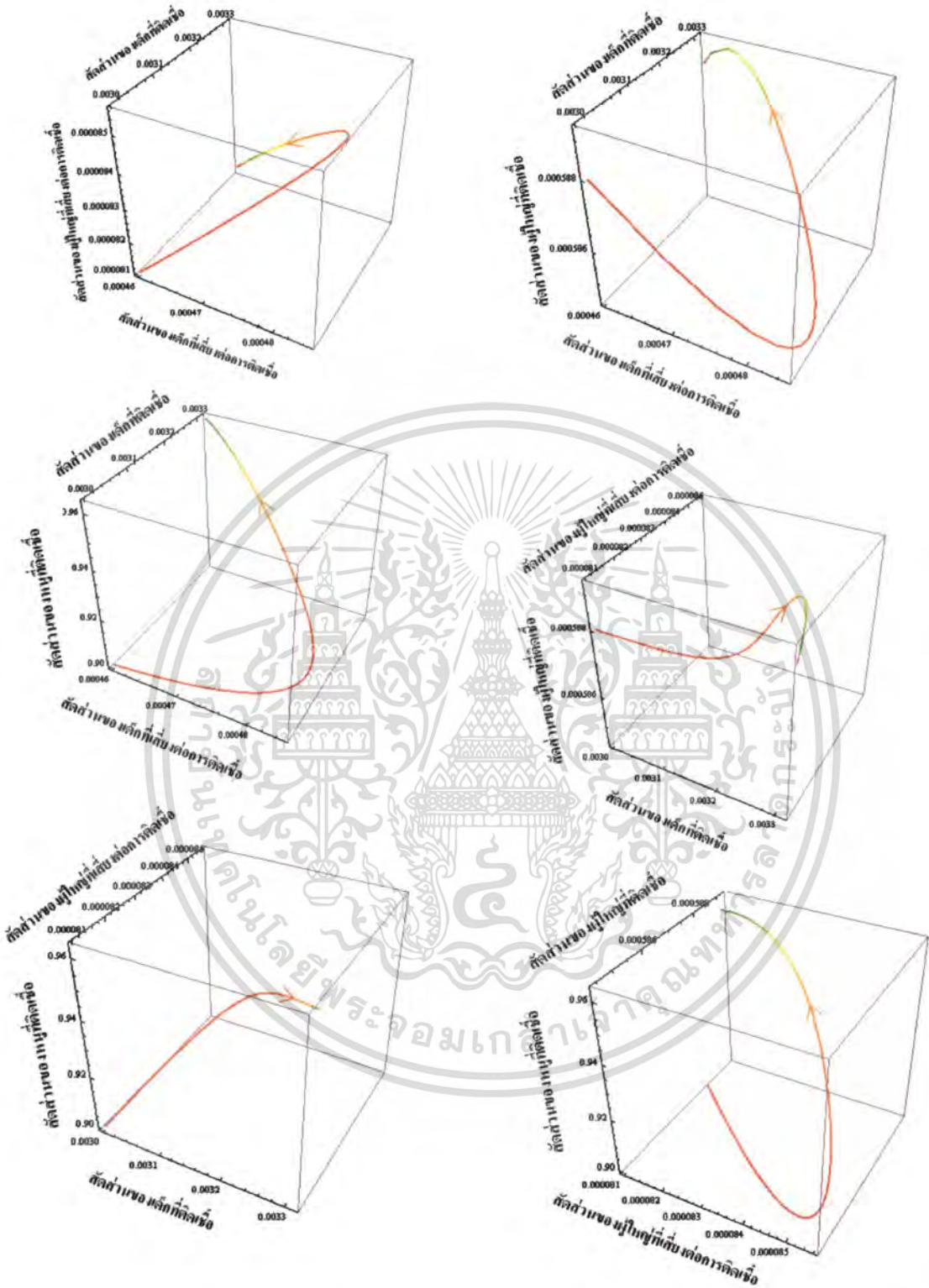
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำกราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยที่จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.26 มาสร้างรูปแบบสองมิติได้ดังนี้



รูปที่ 4.3.27 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 2 ในรูปแบบสองมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของงานวิจัยของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี โดยผู้จัดทำเห็นชอบที่จะเผยแพร่เอกสารนี้เป็นการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.28 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน) ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จำนวนหนู 500 ตัว แบบจำลองที่ 2 ในรูปแบบสามมิติ

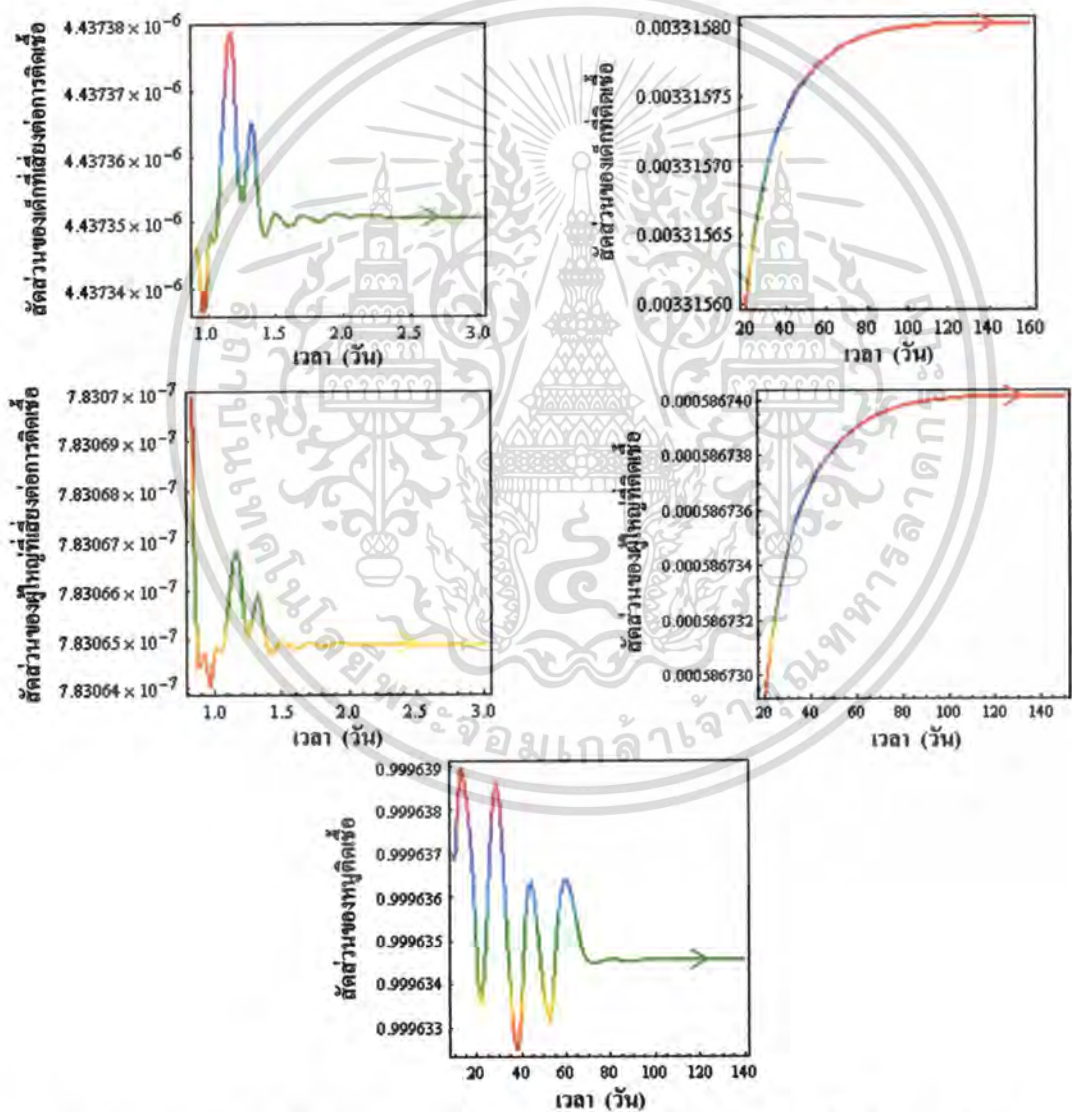
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.3.26 – 4.3.28 ถ้ากำหนดจำนวนหนู 500 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 27.375 จุดสมมูล คือ (0.000460180, 0.003314253, 0.000081239, 0.000586692, 0.963470) ซึ่งจะเสถียร ณ เวลา 200 วัน เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.3.8 – 4.3.10 กำหนดจำนวนหนู 50000 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 2737.5 จุดสมมูล คือ (0.0000044437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347) สัตว์ส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัตว์ส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, สัตว์ส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัตว์ส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, และสัตว์ส่วนของหนูที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 140 วัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อจำนวนหนูเพิ่มมากขึ้น จุดสมมูลจะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้น และค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อสุดท้าย นำเสนอเกี่ยวกับการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น ($S_I[0], I_I[0], S_A[0], I_A[0], I_M[0]$) ของแต่ละสัดส่วนของแบบจำลองที่ 1 ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.000004 เป็น 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.003 เป็น 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.00000078 เป็น 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.0005 เป็น 0.0005867 และ สัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.9 เป็น 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N_M = 50000$ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ผลและสร้างกราฟได้ดังนี้

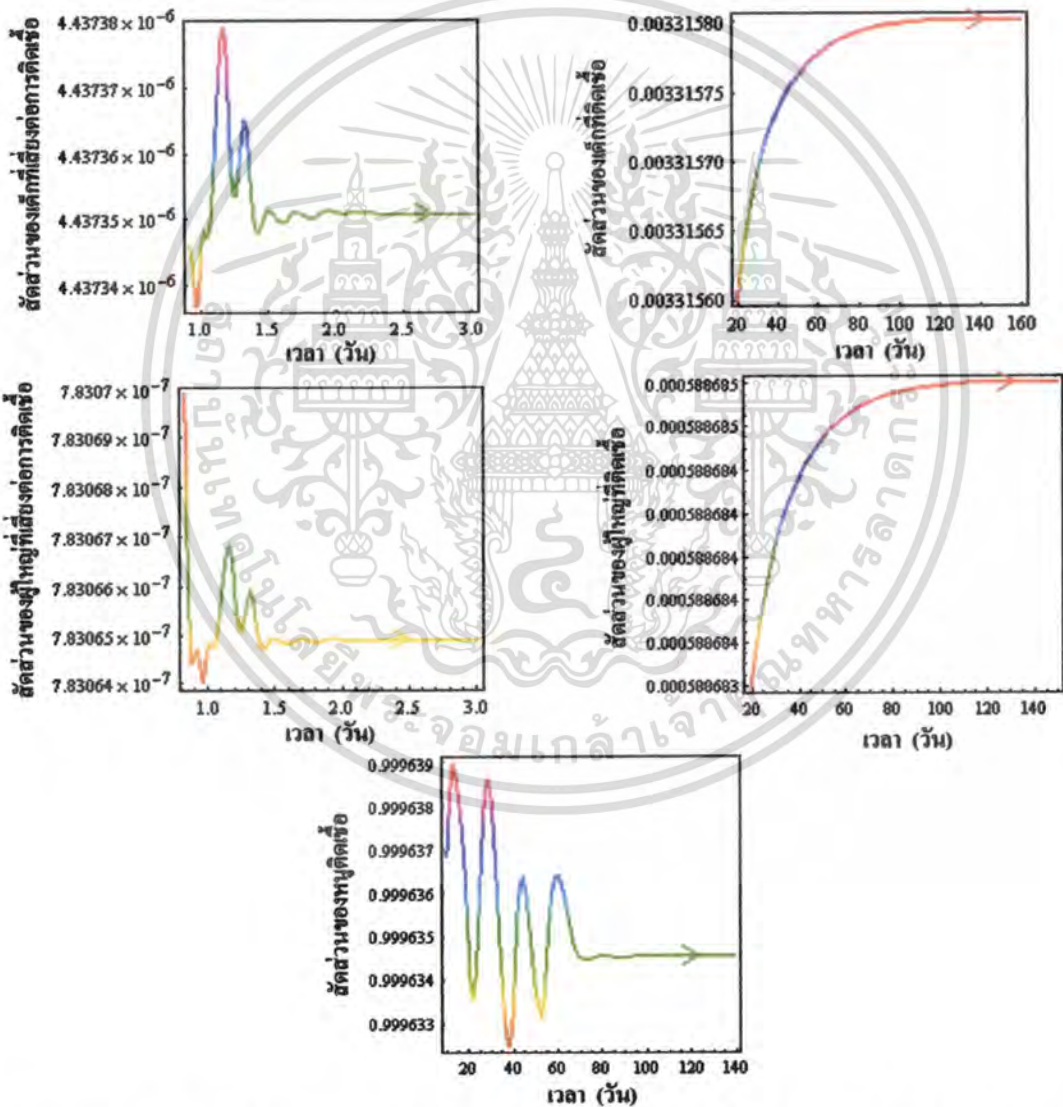


รูปที่ 4.3.29 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน)

ในสภาวะระบาดอย่างเร็วจริง เมื่อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นของแบบจำลองที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบจำลองที่ 2 เปลี่ยนค่าเริ่มต้น ($S_I[0], I_I[0], S_A[0], I_A[0], I_M[0]$) ดังต่อไปนี้
 สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.000004 เป็น 0.00000437, สัดส่วนของ
 เด็กที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.003 เป็น 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ
 เปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.00000078 เป็น 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้น
 จาก 0.0005 เป็น 0.00058886 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.9 เป็น 0.9996
 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$,
 $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N_M = 50000$ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ผลและสร้างกราฟ
 ได้ดังนี้



รูปที่ 4.3.30 กราฟแสดงสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสเทียบกับเวลา (วัน)

ในสภาวะระบาคอย่างเรื้อรัง เมื่อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นของแบบจำลองที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.4 หน้าที่ 60 มีค่าเริ่มต้น ($S_I[0]$, $I_I[0]$, $S_A[0]$, $I_A[0]$, $I_M[0]$) ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.000004, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9 แบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.29 หน้าที่ 92 มีค่าเริ่มต้น ($S_I[0]$, $I_I[0]$, $S_A[0]$, $I_A[0]$, $I_M[0]$) เปลี่ยนแปลงค่าเพิ่มมากขึ้นและเข้าใกล้จุดสมดุลมากขึ้น ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005867 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N_M = 50000$ ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.4 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.29 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 160 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 120 วัน ความแตกต่างจากการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น คือ เมื่อค่าเริ่มต้นเพิ่มขึ้นเข้าใกล้จุดสมดุล สัดส่วนต่างๆ จะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้นเช่นเดียวกัน และจะทำให้ผลการระบาดของโรคได้รวดเร็วขึ้นด้วย

ในทำนองเดียวกัน แบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.8 หน้าที่ 66 มีค่าเริ่มต้น ($S_I[0]$, $I_I[0]$, $S_A[0]$, $I_A[0]$, $I_M[0]$) ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.000004, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9 แบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.30 หน้าที่ 93 มีค่าเริ่มต้น ($S_I[0]$, $I_I[0]$, $S_A[0]$, $I_A[0]$, $I_M[0]$) เปลี่ยนแปลงค่าเพิ่มมากขึ้นและเข้าใกล้จุดสมดุลมากขึ้น ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.00058886 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N_M = 50000$ ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.8 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.30 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 160 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 120 วัน ความแตกต่างจากการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น คือ เมื่อค่าเริ่มต้นเพิ่มขึ้นเข้าใกล้จุดสมดุล สัดส่วนต่างๆ จะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้นเช่นเดียวกัน และจะทำให้ลดการระบาดของโรคได้รวดเร็วขึ้นด้วย

เมื่อทำการวิเคราะห์แบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.29 และในรูปที่ 4.3.30 พบว่า จะมีระยะเวลาของการเสถียรที่ใกล้เคียงกัน แต่ความแตกต่างที่เห็นได้ชัด ก็คือ สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อแบบจำลองที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.000586740 และแบบจำลองที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.000588685 ซึ่งแบบจำลองที่ 2 มีค่ามากกว่า ทำให้มีการเสถียรที่รวดเร็วกว่า จึงส่งผลให้มีการลดการระบาดของโรคได้รวดเร็วกว่าแบบจำลองที่ 1

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

วิทยานิพนธ์นี้ ได้เสนอรายละเอียดของเชื้อโรคเลปโตสไปโรซิสและได้นำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับการติดเชื้อโรค จากนั้นก็พิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำเสนอเชื้อโรคนี้อธิบายแบบจำลองในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

แบบจำลองนี้ เราได้สมมติประชากรของคน ประชากรของหนู อัตราการเกิดและตาย ทั้งของคนและหนู อัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ อัตราการฟื้นไข้ของคน อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปเด็ก อัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปผู้ใหญ่ และอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากหนูไปหนู เป็นค่าคงที่ ซึ่งได้นำข้อมูลจากสำนักกระบาดวิทยาและกรมควบคุมโรคที่นำโดยสัตว์ฟันแทะ กระทรวงสาธารณสุข ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 – 2549 และข้อมูลจากเว็บไซต์ขององค์การอนามัยโลก (WHO) [25] ซึ่งในแบบจำลองได้พัฒนามาจากแบบจำลอง SIR [26]

จากนั้นได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับอธิบายการระบาดของโรคเลปโตสไปโรซิส ในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน ได้กำหนดแบบจำลองของสมการเชิงอนุพันธ์ในเทอร์มของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ที่ติดเชื้อและผู้ที่มีไข้ในประชากรของคน โดยแบ่งเป็นกลุ่มของเด็กและผู้ใหญ่ ส่วนหนูจะแบ่งออกเป็นหนูที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและติดเชื้อ เราใช้วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) หาจุดสมดุล จาโคเบียนเมทริกซ์และค่าเจาะจง [12] ซึ่งได้เงื่อนไขสำหรับความเสถียรภายในของแต่ละจุดสมดุลและนำการจำลองเชิงตัวเลขมาแสดงเพื่อยืนยันผลลัพธ์

แต่ละแบบจำลองจะมีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) บ่งบอกว่าแบบจำลองอยู่ในสภาวะใด ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ($R_0 < 1$) แบบจำลองจะอยู่ในสภาวะไร้โรคและในสภาวะระบาดอย่างเร็วจริงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานจะมีค่ามากกว่าหนึ่ง ($R_0 > 1$) โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสามารถแสดงให้เห็นว่าสภาวะไร้โรคจะเสถียรภายใน เมื่อ $R_0 \leq 1$ สำหรับ $R_0 > 1$ เราจะพบว่า จะเสถียรภายในอย่างเร็วจริง ในสภาวะระบาดอย่างเร็วจริง เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ลงในตัวแปร จะพบว่ามีแกว่งกวัดไปสู่จุดสมดุล ($S^*, I^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*$) ทั้งนี้จะได้มีการจำลองเชิงตัวเลขยืนยันผลลัพธ์นี้ (บทที่ 2)

แบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 (บทที่ 3) ประกอบด้วยแปดสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น เราได้ศึกษาการระบาดของโรคเลปโตสไปโรซิสที่แพร่เชื้อโดยหนู ซึ่งใช้พื้นฐานของแบบจำลอง SIR และในที่นี้แบบจำลองของคนมีการแบ่งออกเป็นเด็กและผู้ใหญ่ โดยที่กำหนดให้

เด็กมีอายุต่ำกว่าสิบห้าปีและผู้ใหญ่มีอายุมากกว่าหรือเท่ากับสิบห้าปี จากการศึกษาได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน คือ $R_0 = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M}$

บทที่ 4 เป็นการแสดงผลการวิจัยของแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 จากการศึกษาวิเคราะห์ข้อมูล จะพบว่า ค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายต่อประชากรของคนมีค่าเท่ากัน ($\lambda_H = \mu_H$) ค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนประชากรคนทั้งหมดต่อจำนวนเด็กมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการตายของคนกับอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน ($\frac{N_T}{N_J} = \frac{\mu_H + \beta}{\mu_H}$) ค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างจำนวนผู้ใหญ่ทั้งหมดต่อจำนวนเด็กทั้งหมดมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างผลรวมของอัตราการเปลี่ยนแปลงจากเด็กไปผู้ใหญ่ต่ออัตราการตายของคน ($\frac{N_A}{N_J} = \frac{\beta}{\mu_H}$) ค่าคงที่ของอัตราการเกิดและการตายของประชากรของหนู

มีค่าเท่ากัน ($\lambda_M = \mu_M$) ต่อไปจัดระบบสมการจากแปดสมการให้คงเหลือเพียงห้าสมการ เพื่อให้สะดวกในการนำไปใช้ จากนั้นหาจุดสมดุล ($S^*_J, I^*_J, S^*_A, I^*_A, I^*_M$) โดยการจัดห้าสมการนั้นให้เท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการหาจุดสมดุล ซึ่งแบบจำลองที่ 1 ในสภาวะไร้โรคจะได้จุดสมดุล $E = (1, 0, 1, 0, 0)$ และ ($R_0 < 1$) สภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จะได้จุดสมดุล $E_2 = (S^*_J, I^*_J, S^*_A, I^*_A, I^*_M)$ และ ($R_0 > 1$)

โดยที่ $S^*_J = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*_M)}$, $I^*_J = \frac{\alpha_1 I^*_M}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I^*_M)}$, $S^*_A = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I^*_M)}$, $I^*_A = \frac{\alpha_3 I^*_M}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I^*_M)}$ และ $I^*_M = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M}$ แบบจำลองที่ 2 ในสภาวะไร้โรคจะได้จุดสมดุล $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ และ

ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง จะได้จุดสมดุล $E_2 = (S^*_J, I^*_J, S^*_A, I^*_A, I^*_M)$ โดยที่ $S^*_J = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*_M)}$, $I = \frac{\alpha I}{(1 + \alpha)(1 + \alpha I)}$, $S = \frac{1}{(1 + \alpha I)}$, $I = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha I} + \frac{\alpha}{1 + \alpha I} \right) I$ และ $I = 1 - \frac{\mu}{\gamma N}$

จากการพิจารณาจุดสมดุลทั้งสองแบบจำลอง พบว่า จุดสมดุลที่แตกต่างกันคือ I^*_A จุดสมดุลที่เหลือมีค่าเท่ากันทั้งหมด ต่อไปนำแต่ละจุดสมดุลมาสร้างให้อยู่ในรูปแบบจาโคเบียนเมทริกซ์ จากนั้นคำนวณหาค่าเจาะจง แล้วพิจารณาว่าค่าเจาะจงที่คำนวณได้มีค่าเป็นลบทั้งหมดหรือไม่ ถ้ามีค่าเป็นลบทั้งหมด แสดงว่าจุดสมดุลมีความเสถียร จากการวิเคราะห์ทั้งสองแบบจำลอง จะมีค่าเป็นลบทั้งหมด ก็ต่อเมื่อ $\gamma_M N_M < \mu_M$

ต่อมานำผลดังกล่าวมาวิเคราะห์เชิงตัวเลข หัวข้อแรกทำการวิเคราะห์ โดยกำหนดให้ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 100$, $R_0 = 0.05475$ แต่ค่าที่แตกต่างกันคือ $\gamma_M = 0.000001$, $\gamma_M = 0.00001$ และ $\gamma_M = 0.0001$ ผลปรากฏว่า ในแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 ในสภาวะไร้โรคจุดสมดุลมีค่าเท่ากัน คือ $E_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ ในรูปที่ 4.3.1 หน้าที่ 57 และ รูปที่ 4.3.5 หน้าที่ 63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง เมื่อกำหนด $\gamma_M = 0.000001$ จะได้ $R_0 = 27.375$ ในแบบจำลองที่ 1 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.000586739, 0.96347031)$ แบบจำลองที่ 2 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.0000046039, 0.00331576, 0.000000812457, 0.000588684, 0.96347031)$ เมื่อกำหนด $\gamma_M = 0.00001$ จะได้ $R_0 = 273.75$ ในแบบจำลองที่ 1 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.000586739, 0.9963470)$ แบบจำลองที่ 2 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.00000445199, 0.00331576, 0.000000785648, 0.00058868, 0.9963470)$ เมื่อกำหนด $\gamma_M = 0.0001$ จะได้ $R_0 = 2737.5$ ในแบบจำลองที่ 1 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$ แบบจำลองที่ 2 จุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง $E = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$ จากข้อมูลเบื้องต้น สรุปได้ว่าค่าที่แตกต่างกัน คือ สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ (I_A^*) นอกจากนั้นมีค่าเท่ากัน เมื่อพิจารณาถึงความเสถียรของจุดสมมูล พบว่า แบบจำลองที่ 2 เสถียร ณ เวลาที่เร็วกว่า ส่งผลให้แบบจำลองที่ 2 ลดการระบาดของโรคได้ดีกว่าแบบจำลองที่ 1

หัวข้อต่อมา ได้สร้างกราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ของโรคเลปโตสไปโรจิตในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 จะได้ $(S_J^*, I_J^*), (S_J^*, I_A^*), (S_J^*, I_M^*), (I_J^*, S_A^*)$ และ $(S_A^*, I_M^*), (S_A^*, I_A^*), (I_J^*, S_A^*, I_A^*), (I_J^*, S_A^*, I_M^*)$ และ (S_A^*, I_A^*, I_M^*) , ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งมีจุดสมมูลในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้ง ซึ่งพบว่าในแบบจำลองที่ 1 $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$ แบบจำลองที่ 2 $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$ ค่าที่แตกต่างกัน คือ สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ (I_A^*) ดังในรูปที่ 4.3.9 และ 4.3.10

หัวข้อต่อมา ได้สร้างกราฟแสดงสัดส่วนเทียบกับสัดส่วนต่างๆ ในรูปแบบสามมิติของโรคเลปโตสไปโรจิต ในสภาวะระบาดอย่างเร็วรั้งของแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 จะได้ $(S_J^*, I_J^*, S_A^*), (S_J^*, I_J^*, I_A^*), (S_J^*, I_J^*, I_M^*), (I_J^*, S_A^*, I_A^*), (I_J^*, S_A^*, I_M^*)$ และ (S_A^*, I_A^*, I_M^*) , ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, $N_M = 50000$, $R_0 = 2737.5$ ซึ่งพบว่าในแบบจำลองที่ 1 $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.0005867, 0.9996347)$ แบบจำลองที่ 2 $E_2 = (0.000004437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347)$ ค่าที่แตกต่างกัน คือ สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ (I_A^*) ดังในรูปที่ 4.3.11 และ 4.3.12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อต่อมา สร้างกราฟแสดงค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อและหนูที่ติดเชื้อของโรคเลปโตสไปโรซิสในสภาวะไร้โรคและระบาดอย่างเรื้อรังของแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 เมื่อพิจารณาทั้งสองแบบจำลอง พบว่ามีความแตกต่างกันระหว่างรูปที่ 4.3.16 (แบบจำลองที่ 1) และรูปที่ 4.3.21 (แบบจำลองที่ 2) โดยมีรายละเอียดดังนี้ แบบจำลองที่ 1 สภาวะไร้โรค สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000573797 ในสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000586641 แต่แบบจำลองที่ 2 สภาวะไร้โรค สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเท่ากับ 0.000575522 และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อมีค่าเข้าใกล้ 0.000588584 รูปอื่นๆ ระหว่างแบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 มีค่าเท่ากัน จากความแตกต่างดังกล่าวทำให้ทราบว่าแบบจำลองที่ 2 เข้าสู่จุดสมดุลในเวลาที่รวดเร็วกว่าในแบบจำลองที่ 1 จึงทำให้แบบจำลองที่ 2 ลดการระบาดของโรคได้ดีกว่าแบบจำลองที่ 1

หัวข้อต่อมา มีการศึกษาเพิ่มเติมในแบบจำลองที่ 1 เมื่อกำหนดให้จำนวนหนู (N_M) เท่ากับ 500 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 27.375 เพื่อสังเกตความแตกต่างระหว่างจำนวนหนู 50,000 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 2737.5 โดยที่ค่าอื่นๆ เท่ากัน ดังนี้ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$, จากการนำมาวิเคราะห์ พบว่า จากรูปที่ 4.3.23 – 4.3.25 ถ้ากำหนดจำนวนหนู 500 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 27.375 จุดสมดุล คือ (0.000460180, 0.003314253, 0.000081239, 0.000586692, 0.963470) ซึ่งจะเสถียร ณ เวลา 200 วัน เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.3.8 – 4.3.10 กำหนดจำนวนหนู 50000 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 2737.5 จุดสมดุล คือ (0.0000044437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347) สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 140 วัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อจำนวนหนูเพิ่มมากขึ้น จุดสมดุลจะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้น และค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย

หัวข้อต่อมา มีการศึกษาเพิ่มเติมในแบบจำลองที่ 2 เมื่อกำหนดให้จำนวนหนู (N_M) เท่ากับ 500 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 27.375 เพื่อสังเกตความแตกต่างระหว่างจำนวนหนู 50,000 ตัว มีค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (R_0) เท่ากับ 2737.5 โดยที่ค่าอื่นๆ เท่ากัน ดังนี้ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_J = 3000$, $N_A = 7000$ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ผลและสร้างกราฟ พบว่า จากรูปที่ 4.3.26 – 4.3.28 ถ้ากำหนดจำนวนหนู 500 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 27.375 จุดสมดุล คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(0.000460180, 0.003314253, 0.000081239, 0.000586692, 0.963470) ซึ่งจะเสถียร ณ เวลา 200 วัน เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.3.8 – 4.3.10 กำหนดจำนวนหนู 50000 ตัว จะได้ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเท่ากับ 2737.5 จุดสมมูล คือ (0.0000044437, 0.00331576, 0.000000783, 0.00058868, 0.9996347) สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 14 วัน, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 180 วัน, และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อ จะเสถียร ณ เวลา 140 วัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เมื่อจำนวนหนูเพิ่มมากขึ้น จุดสมมูลจะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้น และค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย

หัวข้อสุดท้าย นำเสนอเกี่ยวกับการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) ของแต่ละสัดส่วนของแบบจำลองที่ 1 ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.000004 เป็น 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.003 เป็น 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.00000078 เป็น 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.0005 เป็น 0.0005867 และ สัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.9 เป็น 0.9996 และแบบจำลองที่ 2 เปลี่ยนค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.000004 เป็น 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.003 เป็น 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.00000078 เป็น 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.0005 เป็น 0.00058886 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเปลี่ยนค่าเริ่มต้นจาก 0.9 เป็น 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N = 50000$ ซึ่งนำมาวิเคราะห์ผลและสร้างกราฟ พบว่า จากแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.4 หน้าที่ 60 มีค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.000004, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005 และ สัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9 แบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.29 หน้าที่ 92 มีค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) เปลี่ยนแปลงค่าเพิ่มมากขึ้นและเข้าใกล้จุดสมมูลมากขึ้น ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005867 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$N_A = 7000$ และ $N = 50000$ ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.4 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 1 ในรูปที่ 4.3.29 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 160 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 120 วัน ความแตกต่างจากการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น คือ เมื่อค่าเริ่มต้นเพิ่มขึ้นเข้าใกล้จุดสมดุล สัดส่วนต่างๆ จะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้นเช่นเดียวกัน และจะทำให้ลดการระบาดของโรคได้รวดเร็วขึ้นด้วย

ในทำนองเดียวกัน แบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.8 หน้าที่ 66 มีค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.000004, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.0005 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9 แบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.30 หน้าที่ 93 มีค่าเริ่มต้น ($S [0], I [0], S [0], I [0], I [0]$) เปลี่ยนแปลงค่าเพิ่มมากขึ้นและเข้าใกล้จุดสมดุลมากขึ้น ดังต่อไปนี้ สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000437, สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.003315, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเท่ากับ 0.00000078306, สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.00058886 และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อเท่ากับ 0.9996 โดยที่ $\mu_H = \frac{1}{365 \times 70}$, $\mu_M = \frac{1}{365 \times 1.5}$, $\gamma = \frac{1}{15}$, $\gamma_I = 0.001$, $\gamma_A = 0.001$, $\gamma_M = 0.0001$, $\beta = \frac{1}{365 \times 15}$, $N_I = 3000$, $N_A = 7000$ และ $N = 50000$ ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.8 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 14 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 200 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน ผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.30 จะได้ว่า สัดส่วนของเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 160 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 3 วัน สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 140 วัน และสัดส่วนของหนูที่ติดเชื้อจะเข้าสู่จุดสมดุล ณ เวลา 120 วัน ความแตกต่างจากการเปลี่ยนค่าเริ่มต้น คือ เมื่อค่าเริ่มต้นเพิ่มขึ้นเข้าใกล้จุดสมดุล

สัดส่วนต่างๆ จะเสถียร ณ เวลาที่เร็วขึ้นเช่นเดียวกัน และจะทำให้ลดการระบาดของโรคได้รวดเร็วขึ้นด้วย

เมื่อทำการวิเคราะห์แบบจำลองที่ 1 และแบบจำลองที่ 2 ในรูปที่ 4.3.29 และในรูปที่ 4.3.30 พบว่า ระยะเวลาของการเสถียรที่ใกล้เคียงกัน แต่ความแตกต่างที่เห็นได้ชัดก็คือ สัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อแบบจำลองที่ 1 มีค่าเท่ากับ 0.000586740 และแบบจำลองที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.000588685

การสร้างแบบจำลองสำหรับโรคเลปโตสไปโรซิสจำแนกตามอายุ มีการเปรียบเทียบทั้งสองแบบจำลองให้เห็นความแตกต่างของแต่ละแบบจำลองและเสนอแนะแนวทางในการลดการระบาดของโรค ทั้งนี้ผู้ที่สนใจจะพัฒนาแบบจำลองนี้ให้สมบูรณ์มากกว่าก็ได้ โดยการกำหนดให้จำนวนประชากรไม่คงที่หรือสามารถสร้างแบบจำลองอื่นๆ ที่นอกเหนือจากนี้ และเอกสารเล่มนี้ยังมีตัวอย่างการเขียนคำสั่ง โดยใช้โปรแกรม Mathematica [14] ให้ศึกษาอีกด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

- [1] วราลักษณ์ ตั้งคณะกุล. **เลปโตสไปโรซิส, ประเทศไทย.** วารสารวิชาการสาธารณสุข 2548 ; 10 : 299 – 308.
- [2] วราลักษณ์ ตั้งคณะกุล, ชวนพิศ สุทธีนนท์. **คะแนนทางเวชกรรมของผู้ป่วยที่สงสัยเป็นโรคเลปโตสไปโรซิสกับการตรวจภูมิคุ้มกัน.** วารสารวิชาการสาธารณสุข 2543 ; 9 : 532.
- [3] เสาวภา พรศิริพงษ์และคณะ. **ความรู้เกี่ยวกับเลปโตสไปโรซิสในประชากรกลุ่มเสี่ยง.** วารสารวิชาการสาธารณสุข 2543 ; 10 : 253.
- [4] คณะกรรมการจัดทำแนวทางการตรวจวินิจฉัยรักษา. **แนวทางการวินิจฉัยและการรักษาโรคเลปโตสไปโรซิส.** [Online]. Available : [http : // med_sakolhospital. tripod. Com / leptoh. html](http://med_sakolhospital.tripod.com/leptoh.html)
- [6] ศิริลักษณ์ อนันต์ฉวีศิริ. **โรคเลปโตสไปโรซิส (Leptospirosis).** ภาควิชาอายุรศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 2549 ; หน้า 10
- [7] สุรศักดิ์ วงศ์รัตนชีวิน. **Leptospirosis (โรคลีหนู).** คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 2546 ; หน้า 4 – 5.
- [8] เสาวภา พรศิริพงษ์และคณะ. **วิถีชีวิตเสี่ยงต่อโรคเลปโตสไปโรซิส จังหวัดนครราชสีมา.** วารสารวิชาการสาธารณสุข 2544 ; 104 – 5 : 115.
- [9] **คู่มือวิชาการโรคเลปโตสไปโรซิส (Leptospirosis) 2541,** กองควบคุมโรคติดต่อทั่วไป กรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุข ISBN : 974 – 7897 – 90 – 3.
- [10] ทรัพย์สินชัย เอกอิมทรัพย์และคณะ. **แบบจำลองตามอายุสำหรับการระบาดของโรคมลาเรีย.** ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2549.
- [11] วิชัย โชควิวัฒน์. **คู่มือวิชาการโรคเลปโตสไปโรซิส.** กรมควบคุมโรคติดต่อ กระทรวงสาธารณสุข กรุงเทพฯ 2542.
- [12] ราชบัณฑิตยสถาน. **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : ราชบัณฑิตยสถาน 2549.
- [13] วรวิณี เจริญศิริ. **ศูนย์ข้อมูลคุณภาพกรุงเทพ.** [Online]. Available : [www.bangkokhealth. com](http://www.bangkokhealth.com) 2546.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [14] คำรง ทิพย์โยธา. คณิตศาสตร์ปรัณัย เล่มที่ 28 : คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD MATHEMATICA MATLAB MAPLE. ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2546
- [15] บั๊ต บี กอน. 2543. การบริการป้องกันและกำจัดหนู. [Online]. Available : [http : // bugbegone. co. th / rat. html](http://bugbegone.co.th/rat.html)
- [16] Edelstein – Keshet, Leah. **Mathematical models in biology**, Random House of Canada 1988.
- [17] Uncyclopedai. 2541. **Word distribution of plague**. [Online]. Available : [http : // webserv. co. collinctx. us](http://webserv.co.collinctx.us).
- [18] J.Holt, S. Davis and H. Leirs. **A model of Leptospirosis infection in African rodent to determine risk to humans : Seasonal fluctuations and the impact of rodent control**. Issue 20 September 2006, Pages 218 – 225.
- [19] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas. **Analysis of a dengue disease transmission model**. Nacional Autonoma de Mexico, 1998.
- [20] Puntani Pongsumpun. **Transmission Model for Dengue virus infection in Thailand**. Faculty of Graduate Studies Mahidol University 2004.
- [21] Russell C. Johnson, **Medical Microbiology**, Texas Medical Branch at Galveston 1996.
- [22] Wannapong, Triampo, D. Baowan, I.M.Tang, N.Nuttavut, J Wong – Ekkabut, and G. Douchchawee. **A Simple Deterministic Model for the Spread of Leptospirosis in Thailand**. International Journal of Biomedical Sciences, Vol. 2, 2007, pp. 1306 – 1216
- [23] Leptospirosis. **The 15th International Congress of Agricultural Medicine and Rural Health**. July 20 – 23, 2003 Ayudhaya, Thailand.
- [24] P.Pongsumpun, T.Mnamai and R.Kongnuy. **Age Structural Transmission Model for Leptospirosis**. The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)
- [25] **Leptospirosis**. [Online]. Available : www.who.int/csr/don/en.com 2002.
- [26] Grant Boquet and Brandy Stigler. **A Discrete Study of the SIR Model**. May 7, 2004.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NM := 500;
 NJ := 3000;
 NA := 7000;
 MM := 1 / (365 * 1.5);
 MH := 1 / (365 * 70);
 GM := 0.0001;
 GJ := 0.001;
 GA := 0.001;
 G := 1 / 15;
 B := 1 / (15 * 365);
 RO := (GM * NM) / MM // N;
 RO

27.375

L1 := (GJ * NM) / (MH + B) // N;

L1

2254.41

L2 := G / (MH + B) // N;

L2

300.588

L3 := (GA * NM) / MH // N;

L3

12775.

L4 := G / MH // N

L4

1703.33



```
MatrixForm[{{-(MH + B) - GJ*NM*IM, 0, 0, 0, -GJ*NM*SJ},
  {GJ*NM*IM, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*SJ},
  {0, 0, -MH - GA*NM*IM, 0, -GA*NM*SA},
  {0, 0, GA*NM*IM, -(MH + G), GA*NM*SA},
  {0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*IM)}}]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{76650} - 0.5 \text{ IM} & 0 & 0 & 0 & -0.5 \text{ SJ} \\ 0.5 \text{ IM} & -\frac{1709}{25550} & 0 & 0 & 0.5 \text{ SJ} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{25550} - 0.5 \text{ IM} & 0 & -0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0.5 \text{ IM} & -\frac{5113}{76650} & 0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00182648 + 0.05 (1 \end{pmatrix}$$

```
Solve[{{(MH + B) * (1 - SJ) - GJ*SJ*IM*NM = 0,
  GJ*SJ*IM*NM - (MH + B + G) * IJ = 0,
  MH * (1 - SA) - GA*SA*IM*NM = 0,
  GA*SA*IM*NM - (MH + G) * IA = 0,
  (GM*NM - MM) * IM - GM*NM * (IM)^2 = 0},
  {SJ, IJ, SA, IA, IM}]
{{IJ -> 0., IA -> 0., SJ -> 1., SA -> 1., IM -> 0.},
  {IJ -> 0.00331425, IA -> 0.000586692,
  SJ -> 0.000460181, SA -> 0.0000812392, IM -> 0.96347}}]
```

```
Sjj := 0.0004601808239943203` ;
Ijj := 0.0033142533501057335` ;
Saa := 0.00008123916811091855` ;
Iaa := 0.0005866920169168134` ; Imm := 0.9634703196347032` ;
```

```
CharacteristicPolynomial[
  {{-(MH + B) - GJ*NM*Imm, 0, 0, 0, -GJ*NM*Sjj},
  {GJ*NM*Imm, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*Sjj},
  {0, 0, -MH - GA*NM*Imm, 0, -GA*NM*Saa},
  {0, 0, GA*NM*Imm, -(MH + G), GA*NM*Saa},
  {0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*Imm)}], lamda]
-0.0000499086 - 0.0027375 lamda -
0.0529227 lamda^2 - 0.418267 lamda^3 - 1.1455 lamda^4 - lamda^5
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solve[-0.000057799148312198975` - 0.0030774061744990658` lamda -
 0.05797305524634999` lamda² - 0.446839252743194` lamda³ -
 1.1854807566862362` lamda⁴ - lamda⁵ = 0, lamda]

{lamda → -0.50013}, {lamda → -0.499948}, {lamda → -0.0668885},
 {lamda → -0.0667058}, {lamda → -0.0518082}}

H1 := (MH + B) * (1 - SJ) - (GJ * SJ * IM * NM) / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),
 RO → (GM * NM) / MM,
 L1 → (GJ * NM) / (MH + B),
 L2 → G / (MH + B),
 L3 → (GA * NM) / MH};

H2 := GJ * SJ * IM * NM - (MH + B + G) * IJ / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B),$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH);$
H3 := $MH * (1 - SA) - GA * SA * IM * NM / .$
 { $NM \rightarrow 500,$
 $NJ \rightarrow 3000,$
 $NA \rightarrow 7000,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5),$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70),$
 $GM \rightarrow 0.0001,$
 $GJ \rightarrow 0.001,$
 $GA \rightarrow 0.001,$
 $G \rightarrow 1 / 15,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365),$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B),$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH};$
H4 := $GA * SA * IM * NM - (MH + G) * IA / .$
 { $NM \rightarrow 500,$
 $NJ \rightarrow 3000,$
 $NA \rightarrow 7000,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5),$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70),$
 $GM \rightarrow 0.0001,$
 $GJ \rightarrow 0.001,$
 $GA \rightarrow 0.001,$
 $G \rightarrow 1 / 15,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365),$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$
 $H5 := (GM * NM - MM) * IM - GM * NM * (IM) ^ 2 / .$
 $\{ NM \rightarrow 500 ,$
 $NJ \rightarrow 3000 ,$
 $NA \rightarrow 7000 ,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5) ,$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70) ,$
 $GM \rightarrow 0.0001 ,$
 $GJ \rightarrow 0.001 ,$
 $GA \rightarrow 0.001 ,$
 $G \rightarrow 1 / 15 ,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365) ,$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM ,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B) ,$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$

H1

$$\frac{17 (1 - SJ)}{76\ 650} - 0.5 IM SJ$$

H2

$$- \frac{1709 IJ}{25\ 550} + 0.5 IM SJ$$

H3

$$\frac{1 - SA}{25\ 550} - 0.5 IM SA$$

H4

$$- \frac{5113 IA}{76\ 650} + 0.5 IM SA$$



H5

$$0.0481735 \text{ IM} - 0.05 \text{ IM}^2$$

$$s = \text{NDSolve}\left[\left\{\begin{aligned} \text{SJ}'[t] &= \frac{17(1 - \text{SJ}[t])}{76650} - 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SJ}[t], \\ \text{IJ}'[t] &= -\frac{1709 \text{ IJ}[t]}{25550} + 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SJ}[t], \\ \text{SA}'[t] &= \frac{1 - \text{SA}[t]}{25550} - 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SA}[t], \\ \text{IA}'[t] &= -\frac{5113 \text{ IA}[t]}{76650} + 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SA}[t], \\ \text{IM}'[t] &= 0.048173515981735165 \text{ IM}[t] - 0.05 \text{ IM}[t]^2, \\ \text{SJ}[0] &= 0.0004601808239943203, \text{ IJ}[0] = \\ &0.0033142533501057335, \text{ SA}[0] = 0.00008123916811091855, \\ \text{IA}[0] &= 0.0005866920169168134, \text{ IM}[0] = 0.9634 \end{aligned}\right\}, \right. \\ \left. \{\text{SJ}, \text{IJ}, \text{SA}, \text{IA}, \text{IM}\}, \{t, 500000\}\right]$$

```
Plot[Evaluate[SJ[t] /. s], {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue,
Frame -> True, PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
Plot[Evaluate[IJ[t] /. s], {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue,
Frame -> True, PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
Plot[Evaluate[SA[t] /. s], {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue,
Frame -> True, PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
Plot[Evaluate[IA[t] /. s], {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue,
Frame -> True, PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
Plot[Evaluate[IM[t] /. s], {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue,
Frame -> True, PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NM := 500;
 NJ := 3000;
 NA := 7000;
 MM := 1 / (365 * 1.5);
 ME := 1 / (365 * 70);
 GM := 0.0001;
 GJ := 0.001;
 GA := 0.001;
 G := 1 / 15;
 B := 1 / (15 * 365);
 RO := (GM * NM) / MM // N;
 RO

27.375

L1 := (GJ * NM) / (ME + B) // N;

L1

2254.41

L2 := G / (ME + B) // N;

L2

300.588

L3 := (GA * NM) / ME // N;

L3

12775.

L4 := G / ME // N

L4

1703.33



```
MatrixForm[{{-(MH + B) - GJ*NM*IM, 0, 0, 0, -GJ*NM*SJ},
{GJ*NM*IM, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*SJ},
{0, 0, -MH - GA*NM*IM, 0, -GA*NM*SA},
{0, 0, GA*NM*IM, -(MH + G), GA*NM*SA},
{0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*IM)}}]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{76650} - 0.5 \text{ IM} & 0 & 0 & 0 & -0.5 \text{ SJ} \\ 0.5 \text{ IM} & -\frac{1709}{25550} & 0 & 0 & 0.5 \text{ SJ} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{25550} - 0.5 \text{ IM} & 0 & -0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0.5 \text{ IM} & -\frac{5113}{76650} & 0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00182648 + 0.05 (1 \end{pmatrix}$$

```
Solve[{(MH + B) * (1 - SJ) - GJ*SJ*IM*NM = 0,
GJ*SJ*IM*NM - (MH + B + G) * IJ = 0,
MH * (1 - SA) - GA*SA*IM*NM = 0,
GA*SA*IM*NM - (MH + G) * IA = 0,
(GM*NM - MM) * IM - GM*NM*(IM)^2 = 0},
{SJ, IJ, SA, IA, IM}]
```

```
{{IJ -> 0., IA -> 0., SJ -> 1., SA -> 1., IM -> 0.},
{IJ -> 0.00331425, IA -> 0.000586692,
SJ -> 0.000460181, SA -> 0.0000812392, IM -> 0.96347}}]
```

```
Sjj := 0.0004601808239943203` ;
Ijj := 0.0033142533501057335` ;
Saa := 0.00008123916811091855` ;
Iaa := 0.0005866920169168134` ; Imm := 0.9634703196347032` ;
```

```
CharacteristicPolynomial[
{{-(MH + B) - GJ*NM*Imm, 0, 0, 0, -GJ*NM*Sjj},
{GJ*NM*Imm, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*Sjj},
{0, 0, -MH - GA*NM*Imm, 0, -GA*NM*Saa},
{0, 0, GA*NM*Imm, -(MH + G), GA*NM*Saa},
{0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*Imm)}}, lamda]
-0.0000499086 - 0.0027375 lamda -
0.0529227 lamda^2 - 0.418267 lamda^3 - 1.1455 lamda^4 - lamda^5
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solve[-0.000057799148312198975` - 0.0030774061744990658` lamda -
 0.05797305524634999` lamda² - 0.446839252743194` lamda³ -
 1.1854807566862362` lamda⁴ - lamda⁵ = 0, lamda]

{lamda → -0.50013}, {lamda → -0.499948}, {lamda → -0.0668885},
 {lamda → -0.0667058}, {lamda → -0.0518082}}

H1 := (MH + B) * (1 - SJ) - (GJ * SJ * IM * NM) / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),
 RO → (GM * NM) / MM,
 L1 → (GJ * NM) / (MH + B),
 L2 → G / (MH + B),
 L3 → (GA * NM) / MH};

H2 := GJ * SJ * IM * NM - (MH + B + G) * IJ / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B),$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH};$
H3 := MH * (1 - SA) - GA * SA * IM * NM / .
 {NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),
 RO → (GM * NM) / MM,
 L1 → (GJ * NM) / (MH + B),
 L2 → G / (MH + B),
 L3 → (GA * NM) / MH};
H4 := GA * SA * IM * NM - (MH + G) * IA / .
 {NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),
 RO → (GM * NM) / MM,
 L1 → (GJ * NM) / (MH + B),

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$
 $H5 := (GM * NM - MM) * IM - GM * NM * (IM) ^ 2 / .$
 $\{ NM \rightarrow 500 ,$
 $NJ \rightarrow 3000 ,$
 $NA \rightarrow 7000 ,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5) ,$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70) ,$
 $GM \rightarrow 0.0001 ,$
 $GJ \rightarrow 0.001 ,$
 $GA \rightarrow 0.001 ,$
 $G \rightarrow 1 / 15 ,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365) ,$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM ,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B) ,$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$

H1

$$\frac{17 (1 - SJ)}{76650} - 0.5 IM SJ$$

H2

$$- \frac{1709 IJ}{25550} + 0.5 IM SJ$$

H3

$$\frac{1 - SA}{25550} - 0.5 IM SA$$

H4

$$- \frac{5113 IA}{76650} + 0.5 IM SA$$



H5

0.0481735 IM - 0.05 IM²

```
s = NDSolve[{{SJ'[t] =  $\frac{17(1 - SJ[t])}{76650} - 0.5 \text{ IM}[t] SJ[t]$ ,
  IJ'[t] ==  $-\frac{1709 IJ[t]}{25550} + 0.5 \text{ IM}[t] SJ[t]$ ,
  SA'[t] =  $\frac{1 - SA[t]}{25550} - 0.5 \text{ IM}[t] SA[t]$ ,
  IA'[t] =  $-\frac{5113 IA[t]}{76650} + 0.5 \text{ IM}[t] SA[t]$ ,
  IM'[t] =  $0.048173515981735165 \text{ IM}[t] - 0.05 \text{ IM}[t]^2$ ,
  SJ[0] = 0.0004601808239943203, IJ[0] =
  0.0033142533501057335, SA[0] = 0.00008123916811091855,
  IA[0] = 0.0005866920169168134, IM[0] = 0.96335},
  {SJ, IJ, SA, IA, IM}, {t, 500000}]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{SJ[t], IJ[t]} /. s],
  {t, 0.2, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
  PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
  FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{SJ[t], SA[t]} /. s],
  {t, 0.2, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
  PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
  FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{SJ[t], IA[t]} /. s],
  {t, 0.2, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
  PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
  FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{SJ[t], IM[t]} /. s],
  {t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
  PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
  FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
  PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
ParametricPlot[Evaluate[{SA[t], IA[t]} /. s],
{t, 0.2, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{SA[t], IM[t]} /. s],
{t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{IA[t], IM[t]} /. s],
{t, 0, 200}, ColorFunction -> Hue, Frame -> True,
PlotStyle -> Thick, PlotRangeClipping -> True,
FrameTicks -> {{Automatic, None}, {Automatic, None}},
PlotRange -> All, AspectRatio -> 1]
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NM := 500;
NJ := 3000;
NA := 7000;
MM := 1 / (365 * 1.5);
MH := 1 / (365 * 70);
GM := 0.0001;
GJ := 0.001;
GA := 0.001;
G := 1 / 15;
B := 1 / (15 * 365);
RO := (GM * NM) / MM // N;
RO

27.375

L1 := (GJ * NM) / (MH + B) // N;

L1

2254.41

L2 := G / (MH + B) // N;

L2

300.588

L3 := (GA + NM) / MH // N;

L3

12775.

L4 := G / MH // N

L4

1703.33



```
MatrixForm[{{-(MH + B) - GJ*NM*IM, 0, 0, 0, -GJ*NM*SJ},
{GJ*NM*IM, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*SJ},
{0, 0, -MH - GA*NM*IM, 0, -GA*NM*SA},
{0, 0, GA*NM*IM, -(MH + G), GA*NM*SA},
{0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*IM)}}]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{76650} - 0.5 \text{ IM} & 0 & 0 & 0 & -0.5 \text{ SJ} \\ 0.5 \text{ IM} & -\frac{1709}{25550} & 0 & 0 & 0.5 \text{ SJ} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{25550} - 0.5 \text{ IM} & 0 & -0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0.5 \text{ IM} & -\frac{5113}{76650} & 0.5 \text{ SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00182648 + 0.05 (1 \end{pmatrix}$$

```
Solve[{(MH + B) * (1 - SJ) - GJ*SJ*IM*NM = 0,
GJ*SJ*IM*NM - (MH + B + G) * IJ = 0,
MH * (1 - SA) - GA*SA*IM*NM = 0,
GA*SA*IM*NM - (MH + G) * IA = 0,
(GM*NM - MM) * IM - GM*NM * (IM)^2 = 0},
{SJ, IJ, SA, IA, IM}]
```

```
{{IJ -> 0., IA -> 0., SJ -> 1., SA -> 1., IM -> 0.},
{IJ -> 0.00331425, IA -> 0.000586692,
SJ -> 0.000460181, SA -> 0.0000812392, IM -> 0.96347}}
```

```
Sjj := 0.0004601808239943203` ;
Ijj := 0.0033142533501057335` ;
Saa := 0.00008123916811091855` ;
Iaa := 0.0005866920169168134` ; Imm := 0.9634703196347032` ;
```

```
CharacteristicPolynomial[
{{-(MH + B) - GJ*NM*Imm, 0, 0, 0, -GJ*NM*Sjj},
{GJ*NM*Imm, -(MH + B + G), 0, 0, GJ*NM*Sjj},
{0, 0, -MH - GA*NM*Imm, 0, -GA*NM*Saa},
{0, 0, GA*NM*Imm, -(MH + G), GA*NM*Saa},
{0, 0, 0, 0, -MM + GM*NM*(1 - 2*Imm)}], lamda]
-0.0000499086 - 0.0027375 lamda -
0.0529227 lamda^2 - 0.418267 lamda^3 - 1.1455 lamda^4 - lamda^5
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solve [-0.000057799148312198975` - 0.0030774061744990658` lamda -
 0.05797305524634999` lamda² - 0.446839252743194` lamda³ -
 1.1854807566862362` lamda⁴ - lamda⁵ = 0, lamda]

{{lamda → -0.50013}, {lamda → -0.499948}, {lamda → -0.0668885},
 {lamda → -0.0667058}, {lamda → -0.0518082}}

H1 := (MH + B) * (1 - SJ) - (GJ * SJ * IM * NM) / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),
 RO → (GM * NM) / MM,
 L1 → (GJ * NM) / (MH + B),
 L2 → G / (MH + B),
 L3 → (GA * NM) / MH};

H2 := GJ * SJ * IM * NM - (MH + B + G) * IJ / .

{NM → 500,
 NJ → 3000,
 NA → 7000,
 MM → 1 / (365 * 1.5),
 MH → 1 / (365 * 70),
 GM → 0.0001,
 GJ → 0.001,
 GA → 0.001,
 G → 1 / 15,
 B → 1 / (15 * 365),

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B),$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH};$
H3 := $MH * (1 - SA) - GA * SA * IM * NM / .$
 $(NM \rightarrow 500,$
 $NJ \rightarrow 3000,$
 $NA \rightarrow 7000,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5),$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70),$
 $GM \rightarrow 0.0001,$
 $GJ \rightarrow 0.001,$
 $GA \rightarrow 0.001,$
 $G \rightarrow 1 / 15,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365),$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B),$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH};$
H4 := $GA * SA * IM * NM - (MH + G) * IA / .$
 $(NM \rightarrow 500,$
 $NJ \rightarrow 3000,$
 $NA \rightarrow 7000,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5),$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70),$
 $GM \rightarrow 0.0001,$
 $GJ \rightarrow 0.001,$
 $GA \rightarrow 0.001,$
 $G \rightarrow 1 / 15,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365),$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B),$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$
 $H5 := (GM * NM - MM) * IM - GM * NM * (IM) ^ 2 / .$
 $\{ NM \rightarrow 500 ,$
 $NJ \rightarrow 3000 ,$
 $NA \rightarrow 7000 ,$
 $MM \rightarrow 1 / (365 * 1.5) ,$
 $MH \rightarrow 1 / (365 * 70) ,$
 $GM \rightarrow 0.0001 ,$
 $GJ \rightarrow 0.001 ,$
 $GA \rightarrow 0.001 ,$
 $G \rightarrow 1 / 15 ,$
 $B \rightarrow 1 / (15 * 365) ,$
 $RO \rightarrow (GM * NM) / MM ,$
 $L1 \rightarrow (GJ * NM) / (MH + B) ,$
 $L2 \rightarrow G / (MH + B) ,$
 $L3 \rightarrow (GA * NM) / MH ;$

H1

$$\frac{17 (1 - SJ)}{76\ 650} - 0.5 IM SJ$$

H2

$$- \frac{1709 IJ}{25\ 550} + 0.5 IM SJ$$

H3

$$\frac{1 - SA}{25\ 550} - 0.5 IM SA$$

H4

$$- \frac{5113 IA}{76\ 650} + 0.5 IM SA$$



H5

$$0.0481735 \text{ IM} - 0.05 \text{ IM}^2$$

$$s = \text{NDSolve} \left[\left\{ \text{SJ}'[t] = \frac{17(1 - \text{SJ}[t])}{76650} - 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SJ}[t], \right. \right.$$

$$\text{IJ}'[t] = -\frac{1709 \text{ IJ}[t]}{25550} + 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SJ}[t],$$

$$\text{SA}'[t] = \frac{1 - \text{SA}[t]}{25550} - 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SA}[t],$$

$$\text{IA}'[t] = -\frac{5113 \text{ IA}[t]}{76650} + 0.5 \text{ IM}[t] \text{ SA}[t],$$

$$\text{IM}'[t] = 0.048173515981735165 \text{ IM}[t] - 0.05 \text{ IM}[t]^2,$$

$$\text{SJ}[0] = 0.00046, \text{IJ}[0] = 0.003,$$

$$\text{SA}[0] = 0.000081, \text{IA}[0] = 0.000586, \text{IM}[0] = 0.9 \},$$

$$\{\text{SJ}, \text{IJ}, \text{SA}, \text{IA}, \text{IM}\}, \{t, 500000\}]$$

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{SJ}[t], \text{IJ}[t], \text{SA}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{SJ}[t], \text{IJ}[t], \text{IA}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{SJ}[t], \text{IJ}[t], \text{IM}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{IJ}[t], \text{SA}[t], \text{IA}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{IJ}[t], \text{SA}[t], \text{IM}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

`ParametricPlot3D[Evaluate[{\text{SA}[t], \text{IA}[t], \text{IM}[t]} /. s],
{t, 0, 200}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> All,
BoxRatios -> 1, ColorFunction -> (Hue[#4] &)]`

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



AGE STRUCTURAL TRANSMISSION MODEL FOR LEPTOSPIROSIS

P. Pongsumpun¹, T. Manmai², R. Kongnuy³,

^{1,2,3} Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand

ABSTRACT

Leptospirosis is a bacterial zoonotic disease caused by spirochaetes of the genus Leptospira that affects humans and a wide range of animals, including mammals, birds, amphibians, and reptiles. Illness can range from mild to severe. In this study, we use mathematical models to study the behavior of the transmission of Leptospire disease. This model is formulated by considering the rates of change for human and rats. The human is divided into juvenile and adult groups. Each group is separated into susceptible, infectious and recovered classes. The rat is separated into susceptible and infectious classes. The dynamical analysis method is used for analyzing this modified model. Two equilibrium points are found and the conditions for stability of these two equilibrium points are established. We confirm these results by using numerical results.

1. INTRODUCTION

Leptospirosis (also known as Weil's disease, canicola fever, canefield fever, nanukayami fever, 7-day fever and many more), an infectious disease that affects humans and animals is considered the most common zoonosis in the world [1]. Weil is credited with first described leptospirosis as a unique disease process in 1886, 30 years before Inada and colleagues identified the causal organism. The genus *Leptospira* belongs to the Leptospiraceae family of the order Spirochaetales. The nomenclature system used to organize leptospire, making review of the literature often confusing. The traditional system divided the genus into 2 species: the pathogenic *Leptospira interrogans* and the nonpathogenic *Leptospira biflexa*. These species were divided further into serogroups, serovars, and strains, based on shared antigens. *L. interrogans* include more than 250 serovars.

Symptoms of leptospirosis are high fever, headache, chills, muscle aches, conjunctivitis (red eyes), diarrhea, vomiting, and kidney or liver problems (which may include jaundice), anemia and, sometimes, rash. Symptoms may last from a few days to several weeks. Deaths may occur but they are rareness. For some cases, the infections can be mild and without obvious symptom

[2]-[6]. Most outbreaks are depending on season and these are often linked to environmental factors, to animals and to agricultural and occupational cycles [7].

Mathematical models used here (a deterministic model consisting of a set of differential equations) have a long tradition in the study of wildlife diseases. For the majority of models, the primary motivation is to predict the impact of intervention by either culling or vaccination and a universal motivation is a better understanding of the dynamics of infection [8]. In 2006, J.Holt and et al. introduced a mathematical model of infection in an African rodent of Tanzania [9]. Recently, W.Triampo and et al. considered a deterministic SIR (S = Susceptible, I = Infected, R = Recovered) model for the transmission of leptospirosis in the Thai population [10]. SIR model can be used to describe the transmission dynamics of many infectious diseases. Modification of the SIR model must make it applicable to a particular disease [11]. From the data of Leptospirosis cases during 1997 and 2006 [12], we pick the year which give the highest outbreak (year 2000) to see the age distribution of the disease. We can see that the most cases are adult humans as shown in figure 1.

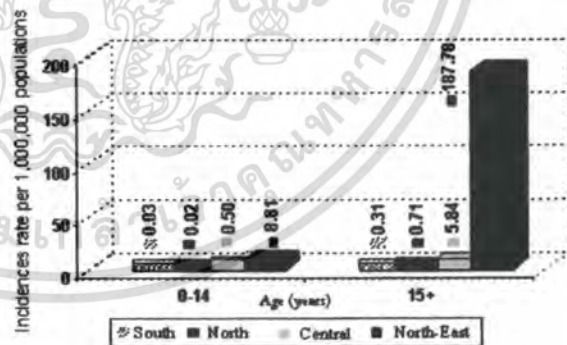


Figure 1. Reported cases of Leptospirosis per 1,000,000 population, Thailand, 2000.

In this paper, we modify the model of Leptospirosis by introducing the age structure of the human population into the SIR model.



2. MATHEMATICAL MODEL

In this study, the model is based on the following assumptions. The total human populations have constant sizes, which are classified into two groups, adult and juvenile populations. The human has constant size and it is divided into three classes, susceptible, infectious and recovered populations. The rat is divided into two groups, susceptible and infectious populations, with the rats never recover from the infection.

The model considers the rate of change for eight variables:

S'_A is the number of susceptible adult human,

I'_A is the number of infective adult human,

R'_A is the number of recovered adult human,

S'_J is the number of susceptible juvenile human,

I'_J is the number of infective juvenile human,

R'_J is the number of recovered juvenile human,

S'_M is the number of susceptible rat,

I'_M is the number of infective rat.

The rates of change for human and rat populations are given by

$$\begin{aligned} \frac{dS'_J}{dt} &= \lambda_H N_T - \mu_H S'_J - \gamma_J S'_J I'_M - \beta S'_J \\ \frac{dS'_A}{dt} &= \beta S'_J + \beta I'_J + \beta R'_J - \gamma_A S'_A I'_M - \mu_H S'_A \\ \frac{dS'_M}{dt} &= \lambda_M N_M - \mu_M S'_M - \gamma_M S'_M I'_M \\ \frac{dI'_J}{dt} &= \gamma_J S'_J I'_M - \mu_H I'_J - \beta I'_J - \gamma I'_J \\ \frac{dI'_A}{dt} &= \gamma_A S'_A I'_M - \mu_H I'_A - \gamma I'_A \\ \frac{dI'_M}{dt} &= \gamma_M S'_M I'_M - \mu_M I'_M \\ \frac{dR'_J}{dt} &= \gamma I'_J - \beta R'_J - \mu_H R'_J \\ \frac{dR'_A}{dt} &= \gamma I'_A - \mu_H R'_A \end{aligned} \quad (1)$$

where N_T is the number of the human population,

N_A is the number of the adult human,

N_J is the number of the juvenile human,

N_M is the number of rats,

λ_H is the constant birth rate of the human,

λ_M is the constant birth rate of rats,

μ_H is the constant death rate of the human,

μ_M is the constant death rate of rats,

β is the constant rate of population change from juvenile to adult,

γ is the constant rate at which an infected human recovers,

γ_A is the transmission probability from rat to adult,

γ_J is the transmission probability from rat to juvenile,

γ_M is the transmission probability from rat to rat,

with the three conditions

$$N_J = S'_J + I'_J + R'_J, N_A = S'_A + I'_A + R'_A \text{ and}$$

$$N_M = S'_M + I'_M. \quad (2)$$

The total population remains constant. Thus, there is no change of rate for each population. These indicate that

$$\frac{dN_T}{dt} = 0, \frac{dN_J}{dt} = 0, \frac{dN_A}{dt} = 0 \text{ and } \frac{dN_M}{dt} = 0.$$

We now normalize (1) by letting

$$S_J = \frac{S'_J}{N_J}, I_J = \frac{I'_J}{N_J}, R_J = \frac{R'_J}{N_J}, S_A = \frac{S'_A}{N_A}, I_A = \frac{I'_A}{N_A}$$

$$\text{and } R_A = \frac{R'_A}{N_A}, S_M = \frac{S'_M}{N_M} \text{ and } I_M = \frac{I'_M}{N_M}.$$

These give

$$\begin{aligned} \frac{dS_J}{dt} &= (\mu_H + \beta)(1 - S_J) - \gamma_J S_J I_M N_M \\ \frac{dI_J}{dt} &= \gamma_J S_J I_M N_M - (\mu_H + \beta + \gamma) I_J \\ \frac{dS_A}{dt} &= \mu_H (1 - S_A) - \gamma_A S_A I_M N_M \\ \frac{dI_A}{dt} &= \gamma_A S_A I_M N_M - (\mu_H + \gamma) I_A \\ \frac{dI_M}{dt} &= (\gamma_M N_M - \mu_M) I_M - \gamma_M N_M I_M^2 \end{aligned} \quad (3)$$

with the three conditions

$$S_J + I_J + R_J = 1, S_A + I_A + R_A = 1 \text{ and}$$

$$S_M + I_M = 1. \quad (4)$$

3. ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL

3.1 Analytical Results

The equilibrium points are found by setting the right side of (3) equal to zero. This gives

1) The disease free equilibrium point

$$E_1 = (1, 0, 1, 0, 0) \text{ and}$$

2) The endemic disease equilibrium point



$E_2 = (S_J^*, I_J^*, S_A^*, I_A^*, I_M^*)$ where

$$S_J^* = \frac{1}{(1 + \alpha_1 I_M^*)} \tag{5}$$

$$I_J^* = \frac{\alpha_1 I_M^*}{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 I_M^*)} \tag{6}$$

$$S_A^* = \frac{1}{(1 + \alpha_3 I_M^*)} \tag{7}$$

$$I_A^* = \frac{\alpha_3 I_M^*}{(1 + \alpha_4)(1 + \alpha_3 I_M^*)} \tag{8}$$

$$I_M^* = 1 - \frac{\mu_M}{\gamma_M N_M} \tag{9}$$

such that

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_J N_M}{\mu_H + \beta}, \alpha_2 = \frac{\gamma}{(\mu_H + \beta)}, \alpha_3 = \frac{\gamma_A N_M}{\mu_H}, \tag{10}$$

$$\gamma_A N_M = \alpha_3 \mu_H \text{ and } \alpha_4 = \frac{\gamma}{\mu_H}.$$

3.1.1 Disease Free State

The stability of each equilibrium point is determined from linearizing equations in (3) about the equilibrium point examining the eigenvalues of the resulting Jacobian matrix. We now consider the eigenvalues of the Jacobian matrix at each equilibrium point. If all eigenvalues for each equilibrium state have negative real parts then that equilibrium state is locally stable. The local stability of the disease free equilibrium E_1 is governed by the matrix

$$\begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M \\ 0 & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M \\ 0 & 0 & -\mu_H & 0 & -\gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_M - \gamma_M N_M) \end{bmatrix} \tag{11}$$

The eigenvalues are

$$\lambda_1 = -\mu_H - \beta, \lambda_2 = -\mu_H - \beta - \gamma, \lambda_3 = -\mu_H,$$

$$\lambda_4 = -\mu_H - \gamma, \lambda_5 = -\mu_M + \gamma_M N_M.$$

It can be easily seen that $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ and λ_4 have negative real parts. λ_5 has negative real part when $\gamma_M N_M < \mu_M$.

Therefore the disease free equilibrium point is locally stable for $B_A < 1$ ($B_A = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M}$).

3.1.2 Endemic Disease State

The local stability of the endemic equilibrium, E_2 is governed by the matrix

$$\begin{bmatrix} -(\mu_H + \beta - \gamma_J N_M) & 0 & 0 & 0 & -\gamma_J N_M S_J^* \\ \gamma_J N_M S_J^* & -(\mu_H + \beta + \gamma) & 0 & 0 & \gamma_J N_M S_J^* \\ 0 & 0 & -\mu_H - \gamma_J N_M S_J^* & 0 & -\gamma_J N_M S_J^* \\ 0 & 0 & \gamma_A N_M S_A^* & -(\mu_H + \gamma) & \gamma_A N_M S_A^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_M + \gamma_M N_M (1 - I_M^*) \end{bmatrix} \tag{12}$$

The eigenvalues are

$$\lambda_1 = -(\mu_H + \beta + \gamma),$$

$$\lambda_2 = -(\mu_H + \gamma),$$

$$\lambda_3 = -(\mu_H + \beta) - \gamma_J N_M + \frac{\mu_M \gamma_J}{\gamma_M},$$

$$\lambda_4 = -\mu_H - \gamma_A N_M + \frac{\mu_M \gamma_A}{\gamma_M},$$

$$\lambda_5 = -\gamma_M N_M + \mu_M.$$

It can be seen that λ_1 and λ_2 have negative real parts.

λ_3, λ_4 and λ_5 have negative real parts when $\frac{\mu_M \gamma_J}{\gamma_M} < (\mu_H + \beta) + \gamma_J N_M, \frac{\mu_M \gamma_A}{\gamma_M} < \mu_H + \gamma_A N_M$ and $\mu_M < \gamma_M N_M$ respectively.

Therefore the disease endemic equilibrium point is local stability for $B_A > 1$ ($B_A = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M}$).

3.2 Numerical Results

In this section, we are interested in the transmission of leptospirosis infection in juvenile and adult humans. Most parameters are determined by the real life observations. They are $\mu_H = 1/(365 \times 70)$ per day, corresponding to a life expectancy of 70 years; $\mu_M = 1/(365 \times 1.5)$ per day, corresponding to a mouse mean life of 1.5 years. The recovery rate should be equal 1/15 per day corresponding to a recovery 15 days of human. The transmission probabilities ($\gamma_J, \gamma_A, \gamma_M$) are chosen: $\gamma_J = 0.001, \gamma_A = 0.001$ and $\gamma_M = 0.0000001$. The equilibrium point would be the disease free equilibrium point (1,0,1,0,0) for $B_A < 1$ and the endemic equilibrium point (0.0197602, 0.918977, 0.000000788954, 0.00586739, 0.992172) for $B_A > 1$.

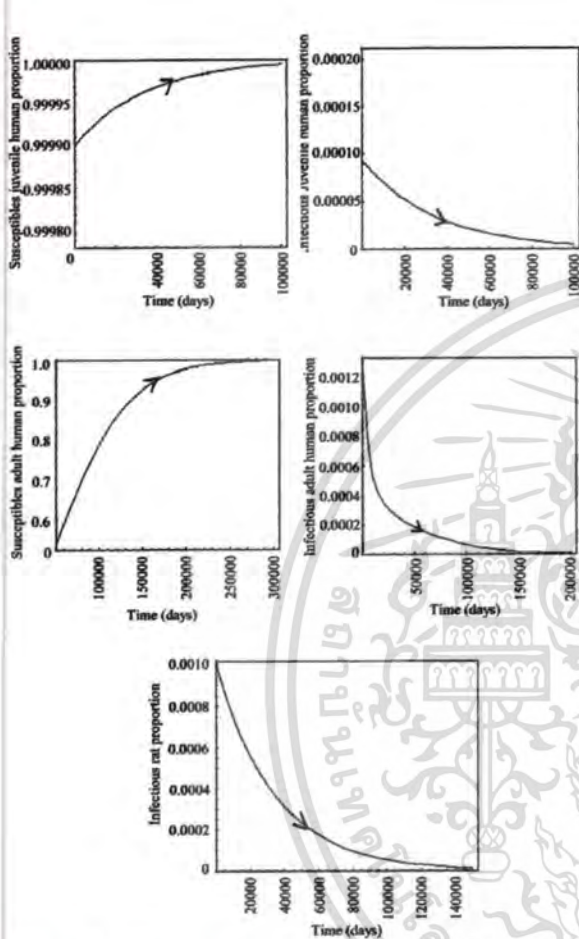


Figure 2. Time series of the susceptible juvenile human , infectious juvenile human , susceptible adult human , infectious adult human and infectious rat population. The values of the parameter are $\mu_H = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$, $\mu_M = 1/(365 \times 1.5) \text{ day}^{-1}$, $\gamma = 1/15 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J = 0.001$, $\gamma_M = 0.0000001$, $\gamma_A = 0.001$, $N_J = 3000$, $N_M = 100$, $N_A = 7000$, $\beta = 1$, $B_A = 0.005475$. The fractions of populations approach to the free disease equilibrium point.

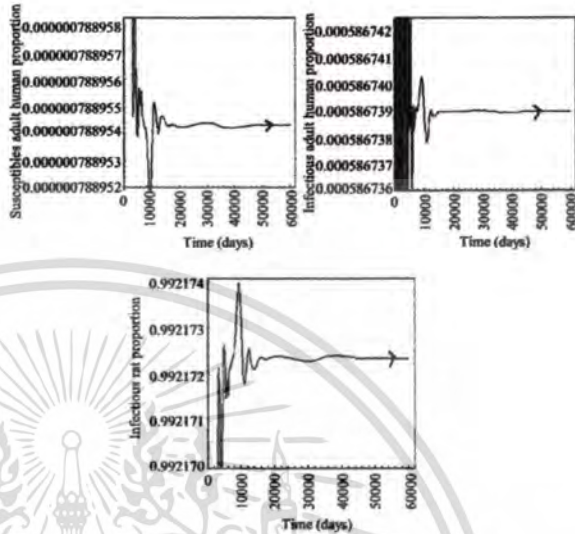
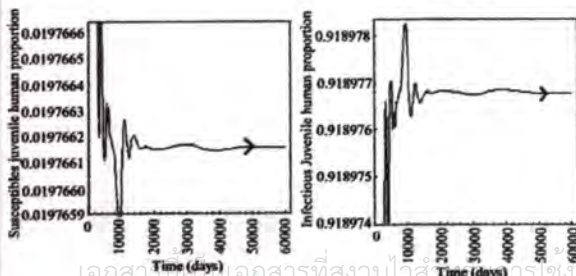


Figure 3. Time series of the susceptible juvenile human , infectious juvenile human , susceptible adult human , infectious adult human and infectious rat population. The values of the parameter are $\mu_H = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$, $\mu_M = 1/(365 \times 1.5) \text{ day}^{-1}$, $\gamma = 1/15 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J = 0.001$, $\gamma_M = 0.0000001$, $\gamma_A = 0.001$, $N_J = 3000$, $N_M = 50000$, $N_A = 7000$, $\beta = 1$, $B_A = 2.7375$. The fractions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point.

We show the time development of S_J, I_J, S_A, I_A, I_M . The value of $B_A = 0.005475$ less than 1, the numerical solutions are shown in figure 2. Figure 3 shows the numerical solutions for B_A greater than 1. We will see that the numerical solutions approach to the disease free equilibrium points for $B_A < 1$. The numerical solutions oscillate to the endemic equilibrium points for $B_A > 1$.

4. DISCUSSION AND CONCLUSION

The mathematical model which we analyze in this study, the juvenile, adult human and rat population are assumed to have constant sizes. The basic reproductive number of this disease is $B'_A = \sqrt{B_A}$ where $B_A = \frac{\gamma_M N_M}{\mu_M}$, it indicates the average number of secondary patients that one patient can produce if introduced into a susceptible person. After that, we consider the time series of juvenile, adult human and rat populations when the basic





reproductive numbers are difference. We show in figure 4.

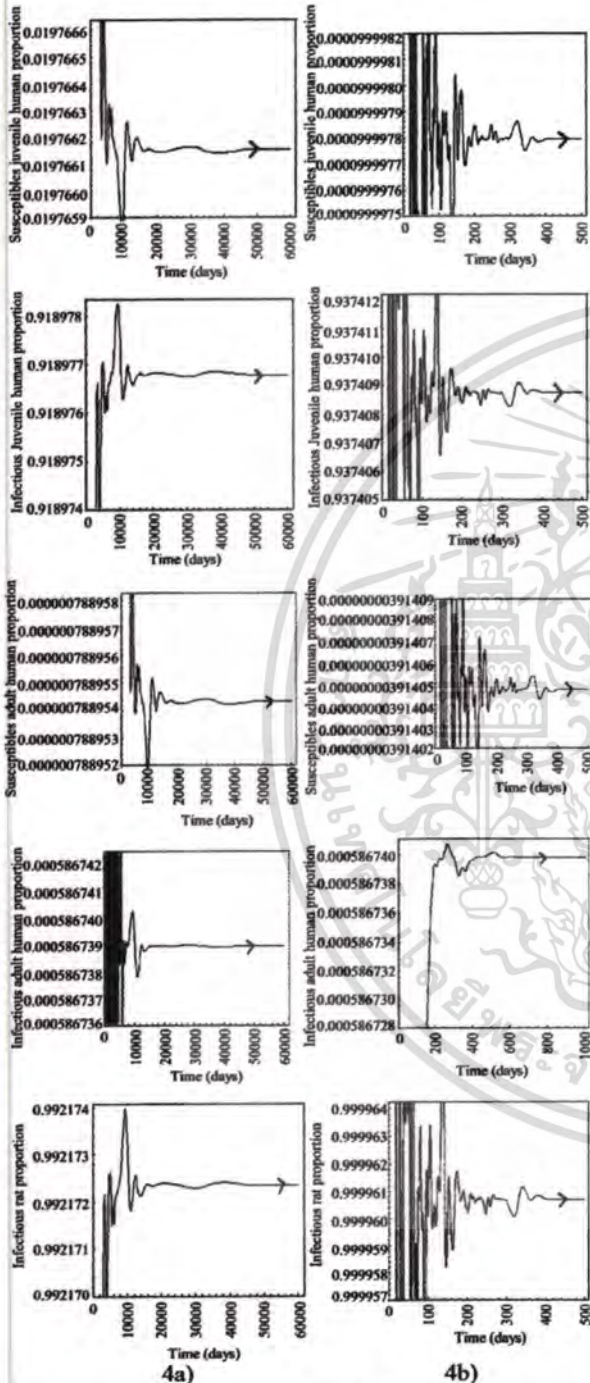
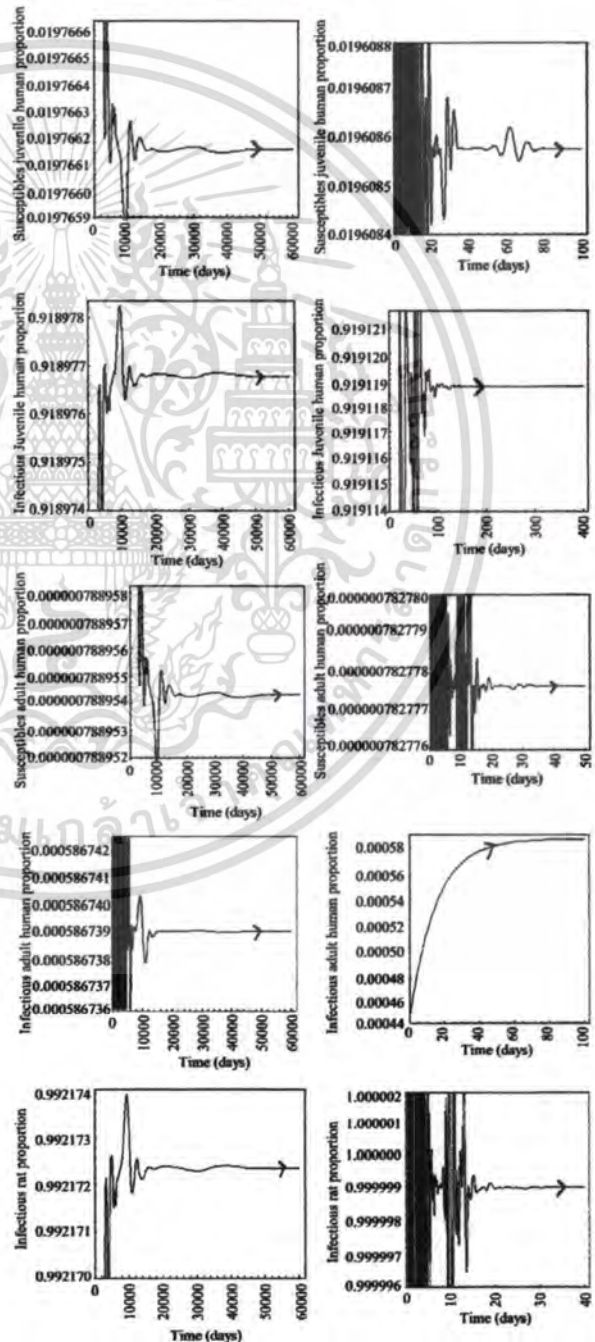


Figure 4. Time series of the susceptible juvenile human , infectious juvenile human, susceptible adult human, infectious adult human and infectious rat population, respectively for $B_A > 1$

- 4a) $B_A = 2.7375$, the fractions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point (0.0197602, 0.918977, 0.000000788954, 0.00586739, 0.992172)
- 4b) $B_A = 574.5$, the fractions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point (0.0000999978, 0.937409, 0.0000000391405, 0.00058674, 0.999961)

Moreover, we compare the endemic equilibrium point for the transmission probability from rat to rat are difference. We can see in figure 5.





5a)

5b)

Figure 5. Time series of the susceptible juvenile human, infectious juvenile human, susceptible adult human, infectious adult human and infectious rat population, respectively for the transmission probability from rat to rat are difference.

5a) $\gamma_J = 0.001, \gamma_A = 0.001, \gamma_M = 0.0000001$, the fractions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point (0.0197602, 0.918977, 0.000000788954, 0.00586739, 0.992172).

5b) $\gamma_J = 0.001, \gamma_A = 0.001, \gamma_M = 0.001$, the fractions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point (0.0196086, 0.919119, 0.000000782779, 0.00058674, 0.999999).

The transmission of leptospirosis for the different basic reproductive number, figure 4a) and figure 4b) equal to 2.7375 and 574.5, respectively. If the basic reproductive rate is higher, this means that one case can produce the greater number of secondary cases. The endemic equilibrium points for susceptible juvenile and susceptible adult humans decrease. The endemic equilibrium points for infectious juvenile, infectious adult humans and infectious rat increase.

From figure 5, we can see that the value of basic reproductive number where the transmission probability from rat to rat are high then this number is high too. The endemic equilibrium points for infectious juvenile, infectious adult humans and infectious rat increase.

REFERENCES

- [1] R. U. Palaniappan, S. Ramanujam, and Y. F. Chang, "Leptospirosis: pathogenesis, immunity, and diagnosis," *Curr Opin Infect Dis*, vol. 20, no. 3, pp. 284-92, 2007.
- [2] R. Inada, Y. Ido, and et al, "Etiology mode of infection and specific therapy of Weil's disease," *J Exp Med*, vol. 23, pp. 377-402, 1916.
- [3] R. C. Abdulkader, A. C. Seguro, P. S. Malheiro, and et al, "Peculiar electrolytic and hormonal abnormalities in acute renal failure due to leptospirosis," *Am J Trop Med Hyg*, vol. 51, no. 1, pp. 1-6, Jan 1996.
- [4] V. M. Arean, G. Sarasin, and J. H. Green, "The pathogenesis of leptospirosis: toxin production by leptospira icterohaemorrhagiae," *Am J Vet Res*, vol. 28, pp. 836-43, May 1964.
- [5] V. M. Arean, "Studies on the pathogenesis of leptospirosis. II, A clinicopathologic evaluation of hepatic and renal function in experimental leptospiral infections," *Lab Invest*, vol. 11, pp. 273-88, Apr 1962.

[6] S. Barkay, and H. Garzosi, "Leptospirosis and uveitis," *Ann Ophthalmol*, vol. 16, no. 2, pp. 164-8, 1984.

[7] S. Faine, "Guideline for control of leptospirosis," *World Health Organization Geneva*, vol. 67, pp.129, 1982

[8] Edelstein - Keshet, Leah, *Mathematical models inbiology*, Random House of Canada, 1988.

[9] J.Holt, S.Davis and H.Leirs, "A model of Leptospirosis infection in African rodent to determine risk to humans : Seasonal fluctuations and the impact of rodent control," *Journal*, vol. 99, pp. 218 - 225, October 2006.

[10] W. Triampo, D. Baowan, I. M. Tang, N. Nuttavut, J. Wong - Ekkabut and G. Doungchawee, "A Simple Deterministic Model for the Spread of Leptospirosis in Thailand," *International Journal of Biomedical Sciences*, vol 2, pp. 1306 - 1216, 2007.

[11] R. M. Anderson and R.M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[12] Division of Epidemiology, *Annual Epidemiological Surveillance Report*, Ministry of Public Health, Royal Thai Government, 1997-2006.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล

นายทองอุ่น มั่นหมาย

วัน เดือน ปีเกิด

3 กุมภาพันธ์ 2525

สถานที่เกิด

สุรินทร์

วุฒิการศึกษา

ครุศาสตรบัณฑิต

ปีการศึกษาที่จบ

2548



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้