

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
ด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ

PROGRAM DEVELOPMENT OF CONJUGATE HEAT TRANSFER ANALYSIS
WITH AN UNSTRUCTURE FINITE VOLUME METHOD



T117114



กพ.
ภา 4930
2553

เลขหมู่.....**117114**
เลขทะเบียน.....
ในเดือนปี **23** ส.พ. 2554

b.....12333797
i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2553

KMITL-2010-EN-D-058-136

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**PROGRAM DEVELOPMENT OF CONJUGATE HEAT TRANSFER ANALYSIS
WITH AN UNSTRUCTURE FINITE VOLUME METHOD**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING IN MECHANICAL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2010
KMITL-2010-EN-D-058-136**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2010

FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ
นักศึกษา	นายภาสกร เวสสะโกศล
รหัสประจำตัว	47060101
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
พ.ศ.	2553
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.จรรูวัตร เจริญสุข

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยแนวทางของระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับกริดที่ไร้ระเบียบรูปสามเหลี่ยมเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสองมิติที่สภาวะคงตัว ในที่นี้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตหมายถึง การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นแบบควบคู่กันระหว่าง การนำความร้อนในของแข็ง และการพาความร้อนในของไหล ในส่วนของการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในของไหลจะถูกวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมไร้ระเบียบร่วมกับวิธีสตรีมไลน์อัฟวินด์ ในส่วนของการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในของแข็งจะถูกวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมไร้ระเบียบซึ่งได้มาจากการใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างแบบโดเมนย่อย การคำนวณตัวแปรต่างๆ ได้แก่ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ สามารถกระทำได้โดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่มีอันดับเท่ากันและใช้กริดชุดเดียวกันได้ ส่งผลให้มีสามารถเข้าใจขั้นตอนการประดิษฐ์สมการปริมาตรสี่เหลี่ยมได้โดยง่าย อีกทั้งยังเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณได้ด้วยการคำนวณแบบแยกกัน กล่าวคือตัวแปรความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิถูกคำนวณไม่พร้อมกัน การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กระทำโดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำก่อนนำ โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในวิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดไร้ระเบียบในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตอย่างแม่นยำได้แก่ การถ่ายเทความร้อนภายในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีผนังนำความร้อน และการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมซึ่งมีผนังนำความร้อน

Thesis Title Program development of conjugate heat transfer analysis with an unstructure finite volume method

Student Mr. Passakorn Vessakosol

Student ID. 47060101

Degree Doctor of Engineering

Program Mechanical Engineering

Year 2010

Thesis Advisor Associate Professor Dr. Jarruwat Chroensuk

ABSTRACT

This dissertation concerns with the development of computer program based on an unstructured triangular finite volume method for the analysis of steady laminar two-dimensional conjugate heat transfer. The conjugate heat transfer problems are the problems that heat conduction in a solid is coupled with the heat convection in viscous fluid flow. The viscous thermal flow in the fluid region is calculated by the unstructured finite volume formulation with a streamline upwind technique which similar to the Streamline Upwind Petrov-Galerkin that was mostly used in the finite element formulation. The heat conduction in the solid region is calculated by the unstructured finite volume formulation which is derived from the sub-domain weighted residual method. The solution algorithm presented in this dissertation uses equal order interpolation functions for the velocity, pressure and temperature. This approach can reduce the complexity in deriving the finite volume equations. A segregated solution algorithm is also employed to increase the computational efficiency by computing the velocities, pressure and temperature separately. A finite volume computer program was developed and verified by using the examples that have exact solutions before it is used in solving the conjugate heat transfer problems. Conjugate heat transfer solutions of the selected problems illustrate the predictive capability of the unstructured finite volume in conjugate heat transfer analysis, i.e. heat transfer in counter-flow heat exchanger, free convection in a square enclosure with a vertical conducting wall and free convection in a cavity between a circular cylinder and a square enclosure with a horizontal conducting wall.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.จรรวดี เจริญสุข อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้เวลา คำแนะนำ ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลทั่วไป และ CFD ตลอดจนกำลังใจที่สำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้มีส่วนในการอนุมัติทุนสนับสนุนงานวิจัยจากศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ (MTEC) สังกัดสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ ภายใต้ research grant no. MT-B-52-MAC-22-189-G และ ขอกราบขอบพระคุณความรู้และคำแนะนำที่ได้รับจากคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานวิจัยให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดาและมารดา ที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด บุญกุศล หรือคุณความดีใดๆ ที่เกิดจากเนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขออุทิศให้คุณพ่อสอาด เวสสะ โกศล

ภาสกร เวสสะ โกศล

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	XV
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	5
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	5
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	6
1.5 วิธีดำเนินงานวิจัย.....	6
1.6 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
บทที่ 2 สมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง.....	9
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล.....	9
2.1.1 กฏอนุรักษ์มวล.....	9
2.1.2 กฏอนุรักษ์โมเมนตัม.....	11
2.1.3 กฏอนุรักษ์พลังงาน.....	13
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการนำความร้อนในของแข็ง.....	18
บทที่ 3 ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง.....	21
3.1 การนำความร้อนในหนึ่งมิติ.....	21
3.2 การนำความร้อนในสองมิติ.....	25

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหล.....	46
4.1 ปัญหาการพาและการแพร่กระจาย.....	47
4.1.1 FLO scheme.....	54
4.1.2 MAW scheme.....	57
4.1.3 SUCV scheme.....	60
4.2 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการไหลไม่อัดตัวแบบหนืด.....	62
4.2.1 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x	63
4.2.2 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y	64
4.2.3 สมการ CVFEM สำหรับการหาผลเฉลยของความดัน.....	66
4.2.4 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์พลังงาน.....	67
4.2.5 เงื่อนไขขอบเขต.....	68
4.2.6 ขั้นตอนวิธีสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาการไหล.....	72
4.2.7 ขั้นตอนวิธีสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต.....	73
บทที่ 5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	75
5.1 ลักษณะของโปรแกรม SUCV.....	75
5.2 รายละเอียดของโปรแกรม SUCV.....	77
5.3 ลักษณะของไฟล์นำเข้าข้อมูลสู่โปรแกรม SUCV.....	77
5.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม SUCV ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ...	83
บทที่ 6 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	86
6.1 การนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	88
6.2 การนำความร้อนภายในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสามารถผลิตความร้อนได้เอง.....	91
6.3 การไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	94
6.4 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	98

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.5 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกร่วมศูนย์	102
6.6 การพาความร้อนแบบบังคับในช่องทางไหล.....	106
6.7 การพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน.....	109
6.8 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในcounter-flow heat exchanger	113
6.9 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีผนังนำความร้อน	116
6.10 การพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมซึ่งมีผนังนำความร้อน.....	121
บทที่ 7 บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ.....	127
7.1 บทสรุป.....	127
7.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์.....	129
7.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	129
บรรณานุกรม.....	131
ภาคผนวก.....	135
ภาคผนวก ก. รายละเอียดของโปรแกรม SUCV	136
ภาคผนวก ข. โปรแกรม Pre-processor และ Post-processor	157
ภาคผนวก ค. บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	172
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	200

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 การเปรียบเทียบระหว่างอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) ที่ได้จากคำตอบแม่นยำตรงและคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี Cell-centered และ Vertex-centered เมื่อจุดต่อภายในวัสดุทั้งสองชนิดมีระยะห่างเท่ากัน.....	25
3.2 การเปรียบเทียบระหว่างอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) ที่ได้จากคำตอบแม่นยำตรงและคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี Cell-centered และ Vertex-centered เมื่อจุดต่อภายในวัสดุทั้งสองชนิดมีระยะห่างไม่เท่ากัน.....	25
3.3 ฟังก์ชันรูปร่างและค่าความลาดชันของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับพิกัด ξ และ η	33
3.4 จุดอินทิเกรตบนพื้นผิวที่ล้อมรอบจุดต่อต่างๆบนพิกัด $\xi - \eta$	38
4.1 สัมประสิทธิ์ในสมการพื้นฐานรูปทั่วไปของการไหล.....	46
6.1 นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของทรงกระบอกกร้อน.....	113
ข1 พิกัดของรูปร่างสี่เหลี่ยมจัตุรัส (5 จุด).....	159
ข2 พิกัดของรูปร่างวงกลม (6 จุด).....	159
ข3 พิกัดของจุดต่อ ความเร็ว และอุณหภูมิ.....	168
ข4 ความสัมพันธ์ของจุดต่อและเซลล์.....	169

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต.....	9
2.2 มวลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมในของไหล	10
2.3 แรงที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมในของไหล	11
2.4 การถ่ายเทความร้อนผ่านปริมาตรควบคุมในของไหล	14
2.5 งานภายนอกที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมในของไหล	16
2.6 การถ่ายเทความร้อนผ่านปริมาตรควบคุมในของแข็ง.....	20
3.1 ปริมาตรควบคุมหนึ่งมิติสำหรับจุดต่อ P ในปัญหาการแพร่กระจาย.....	21
3.2 (ก) รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของ Composite wall (ข) Cell-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างเท่ากัน) (ค) Vertex-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างเท่ากัน) (ง) Cell-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมี ระยะห่างไม่เท่ากัน) (จ) Vertex-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างไม่เท่ากัน)	23
3.3 การคำนวณแบบ Cell-centered โดยใช้ปริมาตรควบคุมที่มีรูปร่าง (ก) สี่เหลี่ยมมุมฉาก (ข) สามเหลี่ยม.....	26
3.4 การคำนวณแบบ Cell-centered โดยใช้ปริมาตรควบคุมที่มีรูปร่าง (ก) สี่เหลี่ยมมุมฉาก (ข) สามเหลี่ยม.....	27
3.5 ปริมาตรควบคุมสำหรับวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบจุดยอดของเซลล์ (ก) ตัวอย่างของปัญหาและปริมาตรควบคุม (ข) ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อภายใน โดเมน (ค) ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อที่ขอบเขตของปัญหา	28
3.6 เซลล์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ (ก) การประมาณค่าภายในเซลล์ (ข) ตำแหน่งของจุดที่ใช้ในการอินทิเกรตภายในเซลล์	31
3.7 (ก) เซลล์สามเหลี่ยมทั่วไป (ข) เซลล์ตันฉบับ.....	32
3.8 การอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x)$ บนระยะทาง x (ก) ค่าที่แท้จริงของอินทิกรัล (ข) การประมาณค่าของอินทิกรัลด้วย Midpoint rule.....	33
3.9 ปริมาตรควบคุมย่อยและพื้นที่ผิวที่เกี่ยวข้องกับ (ก) จุดต่อหมายเลข 1 (ข) จุดต่อหมายเลข 2 (ค) จุดต่อหมายเลข 3.....	35

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.10 จุดอินทิเกรตบนพื้นผิวที่ล้อมรอบ (ก) จุดต่อที่ 1 (ข) จุดต่อที่ 2 (ค) จุดต่อที่ 3 สำหรับเซลล์คั่นแบบ	38
3.11 (ก) ปริมาตรควบคุมรอบจุดต่อ i (ข) ปริมาตรควบคุมย่อยจาก 6 เซลล์ที่อยู่ล้อมรอบจุดต่อ i	39
3.12 เงื่อนไขขอบเขตประเภทฟลักซ์ความร้อนคงที่	42
3.13 เงื่อนไขขอบเขตประเภทการพาความร้อน	43
3.14 ระบบสมการและเมทริกซ์ของระบบ	43
3.15 การกำจัดแบบเกาส์สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3×3	44
4.1 ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อ P ในปัญหาการพาและแพร่กระจาย	48
4.2 (ก) เงื่อนไขต่างๆของปัญหา (ข) การคำนวณด้วยวิธี Cell-centered (ค) การคำนวณด้วยวิธี Vertex-centered	49
4.3 (ก) Central differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางบวกของ x (ข) Central differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางลบของ x (ค) Upwind differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางบวกของ x (ง) Upwind differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางลบของ x	51
4.4 ผลเฉลยของ ϕ ที่ได้จากคำตอบแม่นยำและ Central differencing scheme ในกรณี (ก) $Pe = 0.2$ (Cell-centered) (ข) $Pe = 0.2$ (Vertex-centered) (ค) $Pe = 5.0$ (Cell-centered) (ง) $Pe = 5.0$ (Vertex-centered)	52
4.5 ผลเฉลยแม่นยำของ ϕ ในกรณี $Pe = 5$ และคำตอบจาก Upwind scheme สำหรับ (ก) Cell-centered (ข) Vertex-centered	53
4.6 ระยะเวลาต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการหาขนาดของเซลล์สามเหลี่ยม	54
4.7 ระบบพิกัดภายในเซลล์สำหรับ FLO upwind scheme	55
4.8 การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร ϕ ที่จุดต่างๆภายในเซลล์สำหรับ FLO scheme เมื่อ (ก) ความเร็วเฉลี่ยพุ่งเข้าหาจุดต่อหมายเลข 1 (ข) ความเร็วเฉลี่ยเคลื่อนออกจากจุดต่อหมายเลข 1	57
4.9 กรณีต่างๆในการใช้ MAW scheme สำหรับ (ก) ϕ_r (ข) ϕ_s (ค) ϕ_t	60
4.10 เงื่อนไขที่ทางเข้าสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ (ง) ความดัน	69

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.11 เงื่อนไขที่ทางออกสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ (ง) ความดัน	70
4.12 เงื่อนไขที่แกนสมมาตรสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ	71
4.13 เงื่อนไขที่ผนังสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ	72
4.14 แผนผังการแก้ปัญหาตามขั้นตอนวิธีแบบ SIMPLER	73
4.15 (ก) โดเมนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต	
(ข) ปริมาตรควบคุมบริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล	74
5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม SUCV	77
5.2 ตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างหมายเลขจุดต่อกับหมายเลขของเซลล์สามเหลี่ยม	80
5.3 หมายเลขจุดต่อบริเวณทางออกของการไหล	81
5.4 หมายเลขจุดต่อบริเวณทางเข้าและขอบสมมาตรของการไหล	82
5.5 รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย	83
5.6 การพิมพ์ข้อมูล error ของตัวแปรต่างๆ บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ขณะใช้โปรแกรม SUCV	84
5.7 ผลลัพธ์ที่ปรากฏอยู่ในไฟล์ผลลัพธ์	85
6.1 ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส	
(ก) รูปร่างของปัญหาทั้งหมด (ข) รูปร่างของปัญหาที่ลดขนาดลง	88
6.2 รูปร่างเซลล์สามเหลี่ยมสำหรับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	89
6.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิในแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ได้จาก	
(ก) ผลเฉลยแม่นยำตรง (ข) ผลลัพธ์จากวิธี CVFEM	90
6.4 การเปรียบเทียบระหว่างผลลัพธ์ของวิธี CVFEM และผลเฉลยแม่นยำตรง สำหรับอุณหภูมิตามระยะทาง y ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นสี่เหลี่ยม ($x = 5\text{ m}$)	90
6.5 ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการนำความร้อนภายในแผ่นวัสดุที่ผลิตความร้อนขึ้นเองได้	91
6.6 (ก) แบบจำลอง CVFEM ประกอบด้วย 961 จุดต่อและ 1800 เซลล์	
(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี CVFEM	92
6.7 (ก) แบบจำลอง CVFEM ประกอบด้วย 2601 จุดต่อและ 5000 เซลล์	
(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี CVFEM	93

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.8 รูปร่างของอุณหภูมิตามแนวแกน s ที่ได้จากการคำนวณด้วย CVFEM และ ผลเฉลยแม่นยำตรง	94
6.9 รูปร่างปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ	95
6.10 แบบจำลองของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบและเงื่อนไขขอบเขต	95
6.11 เวกเตอร์ของความเร็วยภายในช่องแคบสำหรับกรณี (ก) $Re = 100$ (ข) $Re = 400$	96
6.12 ความดันภายในช่องแคบสำหรับกรณี (ก) $Re = 100$ (ข) $Re = 400$	96
6.13 (ก) รูปร่างความเร็ว u ที่ $x = 0.5$ (ข) รูปร่างความเร็ว v ที่ $y = 0.5$ สำหรับ $Re = 100$	97
6.14 (ก) รูปร่างความเร็ว u ที่ $x = 0.5$ (ข) รูปร่างความเร็ว v ที่ $y = 0.5$ สำหรับ $Re = 400$	97
6.15 รูปร่างแบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	98
6.16 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Pr = 0.71$ และ $Ra = 10^4$ (ก) เวกเตอร์ความเร็ว (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิไร้มิติ.....	99
6.17 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Pr = 0.71$ และ $Ra = 10^5$ (ก) เวกเตอร์ความเร็ว (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิไร้มิติ	100
6.18 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด (ก) ความเร็วไร้มิติ (ข) อุณหภูมิไร้มิติ.....	101
6.19 รูปร่างปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุด ศูนย์กลางร่วมกัน.....	103
6.20 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มี จุดศูนย์กลางร่วมกัน (ก) เงื่อนไขขอบเขต (ข) รูปร่างของ Mesh	103
6.21 (ก) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิไร้มิติ (ข) รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อน แบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ในกรณีที่ $Pr = 0.7$ และ $Ra = 3000$	104
6.22 (ก) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิไร้มิติ (ข) รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อน แบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ในกรณีที่ $Pr = 0.7$ และ $Ra = 10000$	104
6.23 การนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านใน	105
6.24 รูปร่างของปัญหาการไหลผ่านช่องการไหล.....	106

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.25 แบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านช่องการไหล.....	106
6.26 รูปร่างของความเร็ว u ที่ทางออก ($x = 10$).....	108
6.27 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x ต่างๆ.....	108
6.28 เส้นชั้นของขนาดความเร็วภายในช่องการไหล.....	108
6.29 การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในช่องการไหล.....	108
6.30 รูปร่างของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกอื่น.....	109
6.31 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกอื่น (ก) Mesh โดยรวม (ข) Mesh บริเวณใกล้ผิวของทรงกระบอก.....	110
6.32 รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกอื่น ในกรณี (ก) $Re = 10$ (ข) $Re = 20$ (ค) $Re = 30$ (ง) $Re = 40$	111
6.33 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกอื่น ในกรณี (ก) $Re = 10$ (ข) $Re = 20$ (ค) $Re = 30$ (ง) $Re = 40$	111
6.34 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆบนผิวทรงกระบอกในกรณี $Re = 40$	112
6.35 รูปร่างของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน.....	113
6.36 แบบจำลองของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์ในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน แบบไหลสวนทางกัน.....	114
6.37 การกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์ของอุปกรณ์ แลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทางกัน ในกรณี (ก) $K = 1$ (ข) $K = 5$ (ค) $K = 10$	114
6.38 อุณหภูมิในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า K ตั้งแต่ 1 ถึง 10.....	115
6.39 รูปร่างของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลของผนัง นำความร้อน.....	117
6.40 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลของ ผนังนำความร้อน.....	117
6.41 การไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย เมื่อ $Ra = 10^3$ (ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ $K = 1$ (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 1$ (ค) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 10$	118

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.42 การไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปีครูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย เมื่อ $Ra = 10^5$ (ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ $K = 1$ (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 1$ (ค) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 10$	119
6.43 การเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติที่ได้จากวิธี CVFEM และวิธีของ Hribersek และ Kubn [38] สำหรับ $Ra = 10^5$ ที่ $K = 1$ และ 10	120
6.44 รูปร่างปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปีครูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลของผนังกันความร้อน	121
6.45 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปีครูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลกระทบของผนังกันความร้อน.....	122
6.46 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิภายใน โดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^3$	123
6.47 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิภายใน โดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^4$	124
6.48 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิภายใน โดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^5$	125
6.49 เส้นกระแสการไหล (Streamline) และเส้นชั้นอุณหภูมิภายใน โดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^4$ จากผลลัพธ์ของ Dong และ Li [39]	126
ข1 การติดต่อกับผู้ใช้งานของโปรแกรม AUTOMESH2D.....	158
ข2 ขั้นตอนก่อนการสร้างรูปของโดเมน.....	159
ข3 การให้นิยามรูปร่างของปัญหา.....	160
ข4 หน้าที่ของส่วนประกอบต่างๆของไดอะล็อกซ์ที่อยู่ซ้ายมือของ โปรแกรม AUTOMESH2D	160
ข5 ข้อมูลสำหรับการสร้างเซลล์.....	161
ข6 การสร้างเซลล์ตามเงื่อนไขของจำนวนเซลล์ที่ยึดถือตามความหนา.....	162
ข7 ไดอะล็อกซ์แสดงข้อมูลของการสร้างเซลล์	162
ข8 ทูลบาร์ของโปรแกรม AUTOMESH2D.....	162
ข9 การกำหนดความหนาแน่นของเซลล์โดยผู้ใช้.....	169
ข10 การใช้ Density window.....	163
ข11 ตัวอย่างของการใช้ Density window.....	164
ข12 Density window ที่ไม่มีส่วนใดอยู่บนขอบเขตของรูปร่าง.....	164

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
ข13 ไคอะล็อกซ์ที่เกิดขึ้นหลังจากกดปุ่ม Read Mesh	165
ข14 ไคอะล็อกซ์ชื่อ User-defined Mesh Density.....	166
ข15 density points ที่ผู้ใช้กำหนดขึ้นมา.....	167
ข16 การเก็บจุดต่อที่ขอบเขตค่าเดิมเอาไว้สำหรับเซลล์ชุดใหม่.....	167
ข17 พารามิเตอร์ต่างๆในไคอะล็อกซ์ Mesh Control Parameter.....	168
ข18 ตัวอย่างไฟล์นำเข้าชื่อ “plate.dat” สำหรับ โปรแกรม tecplot 360.....	169
ข19 รูปแบบของข้อมูลรับเข้าของโปรแกรม FEPlot	170
ข20 ตัวอย่างของข้อมูลรับเข้าของโปรแกรม FEPlot	171
ข21 รูปร่างของโดเมนตัวอย่าง.....	171

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่, เมตริกซ์สัมประสิทธิ์
a	ความเร่ง, ตัวแปรความสูงของช่องการไหล
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเซลล์สามเหลี่ยม
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเซลล์สามเหลี่ยม
c	ค่าการจุความร้อนจำเพาะ
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเซลล์สามเหลี่ยม
E	พลังงานรวม
ε	ค่าความผิดพลาด
F	แรง
g	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
h	ขนาดของเซลล์
K	อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งกับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
L	ตัวแปรของระยะทาง, ความยาวคุณลักษณะสำหรับเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์
m	มวล
N	ฟังก์ชันรูปร่าง
Nu	นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉพาะบริเวณ (Local Nusselt number)
Nu_m	นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ย (Average Nusselt number)
n	เวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวควบคุม
Pe	เพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)
Pr	พรันด์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl number)
p	ความดัน
Q	ความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในของแข็ง
q_x	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนในแนวแกน x
q_y	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนในแนวแกน y

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

R	เวกเตอร์ภาวะ
Ra	เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number)
Re	เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number)
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิอ้างอิงหรือเริ่มต้น
t	เวลา
u	ความเร็วในแนวแกน x
\hat{u}	Pseudo-velocity ในแนวแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
\hat{v}	Pseudo-velocity ในแนวแกน y
x	ระยะทางในแนวนอน
y	ระยะทางในแนวตั้ง
Γ	ขอบของปัญหา, สัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย
Ω	โดเมนของปัญหา
ϕ	ตัวแปรอิสระ
μ	ความหนืดจลนศาสตร์
ν	ความหนืดพลศาสตร์
β	สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of thermal expansion)
θ	ระยะขจัดเชิงมุม
ρ	ความหนาแน่นของของไหล
σ	ความเค้นตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในอดีตที่ผ่านมา การศึกษาปัญหาทางพลศาสตร์ของไหล และการถ่ายเทความร้อน ด้วยวิธีการทางทฤษฎีส่วนใหญ่ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง หรือแคลคูลัส ในการหาผลเฉลย ซึ่งไม่ใช่เรื่องง่ายเลยที่จะสามารถหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ย่อยของการอนุรักษ์มวล สมการของการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการของการอนุรักษ์พลังงาน รวมถึงเงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างที่หลากหลายของปัญหา ทำให้การศึกษาพฤติกรรมของไหลและการถ่ายเทความร้อนส่วนใหญ่ในช่วงเวลาที่ผ่านมา ผู้วิจัยได้มุ่งเน้นไปที่การทดลอง แต่ข้อเสียที่เห็นได้ชัดของการทดลองคือ มีค่าใช้จ่ายในการดำเนินงานที่ค่อนข้างสูง ตั้งแต่ค่าครุภัณฑ์เกี่ยวกับโครงสร้างของอุปกรณ์ทดลอง ค่าใช้จ่ายในการประกอบสร้างชุดทดลอง ค่าใช้จ่ายสำหรับเครื่องมือวัดคุณภาพสูง ค่าไฟฟ้า หรือค่าเชื้อเพลิงในระหว่างทำการทดลอง และอื่นๆ และอาจต้องใช้เวลาอันยาวนานในการทำการทดลอง และรวบรวมข้อมูล แม้แนวทางการทดลองจะเสียเวลาและค่าใช้จ่ายเป็นอย่างมาก นักออกแบบส่วนมากในอดีตได้อาศัยผลที่ได้จากการทดลองเป็นหลัก นักวิจัยอีกส่วนหนึ่งที่ยึดมั่นอยู่กับการหาคำตอบด้วยทฤษฎีได้พยายามคิดค้นอีกแนวทางหนึ่งในการหาผลเฉลย นั่นคือ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ซึ่งประมาณค่าของผลลัพธ์จากสมการอนุพันธ์ย่อย และเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ของปัญหา โดยการเปลี่ยนสมการอนุพันธ์ของระบบให้เป็นระบบสมการพีชคณิตสำหรับจุดต่อต่างๆ ซึ่งถูกกำหนดขึ้นมาด้วยจุด กริดของปัญหา ผลลัพธ์จากแนวทางนี้ได้มาจากการแก้ระบบสมการแบบเมตริกซ์ เราอาจกล่าวได้ว่าการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเหมาะสมกับการแก้ปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางในช่วงที่ผ่านมา สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งคือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ทำการประมาณค่าของอนุพันธ์ในสมการ โดยตรง กล่าวคือ เปลี่ยนค่าของอนุพันธ์ให้เป็นอัตราส่วนของผลต่างของตัวแปรต่างๆที่เกี่ยวข้อง ระเบียบวิธีนี้ง่ายแก่การศึกษาและทำความเข้าใจ รวมไปถึงสามารถนำไปประดิษฐ์เป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ได้สะดวก แต่ยังมีข้อเสียที่สำคัญคือ กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ได้ไม่สะดวกนัก และไม่เหมาะสมกับปัญหาที่มีรูปร่างที่ซับซ้อน เช่น ปัญหาที่มีลักษณะเรียวแหลม โค้งเว้า โค้งนูน โค้งงอ หรือ มีรูปร่างเล็กๆน้อยๆ ที่อยู่ภายในรูปร่างของปัญหา เป็นต้น สาเหตุดังกล่าวมีส่วนทำให้เกิดการคิดค้นระเบียบวิธีที่มีชื่อว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) ซึ่ง

สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และความซับซ้อนทางรูปร่างของปัญหาได้ ระเบียบวิธีนี้แก้สมการอนุพันธ์โดยอ้อมด้วยการหาคำตอบจากสมการอินทิกรัลของสมการอนุพันธ์ตามหลักการของฟังก์ชันแปรผัน (Variational formulation) หรือหลักการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted residual formulation) แต่ปัญหาคำนวณที่ระเบียบวิธีนี้เข้าไปมีส่วนร่วมในช่วงแรก จะเป็นปัญหาการวิเคราะห์โครงสร้าง (Structural analysis) ดังนั้นองค์ความรู้ที่ปรากฏอยู่ในเนื้อหาของงานวิจัยด้านการไหลและการถ่ายเทความร้อนจึงมีอยู่ค่อนข้างน้อยเมื่อเทียบกับองค์ความรู้ในงานวิจัยด้านความแข็งแรงของวัสดุ กลุ่มสุดท้ายคือ ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม (Finite volume method) ระเบียบวิธีนี้แก้สมการอนุพันธ์แบบอ้อม โดยใช้หลักการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างคล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แต่แตกต่างกันที่ลักษณะฟังก์ชันที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักเพื่อการอินทิเกรตสมการของเศษตกค้าง ส่วนใหญ่แล้ว ระเบียบวิธีนี้ได้ถูกนำไปใช้ในปัญหาคำนวณพลศาสตร์ของไหล และการถ่ายเทความร้อน เทคนิคต่างๆที่เคยใช้อย่างได้ผลกับระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมก็สามารถใช้ได้กับระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมเช่นกัน หากนำระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมนี้ไปประยุกต์กับปัญหาที่สร้างเส้นกริดแบบตั้งฉากจะได้คำตอบที่ไม่แตกต่างไปจากคำตอบจากระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม ปัจจุบันนี้ ผู้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์จากระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมกำลังให้ความสนใจเป็นอย่างมากกับการหาคำตอบที่ไม่ยึดติดกับกริดตั้งฉากโดยพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับกริดไร้ระเบียบ

สำหรับงานวิจัยด้านการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล (Computational fluid dynamics) หรือ CFD ในหัวข้อการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับกริดไร้ระเบียบ สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภทหลัก ดังนี้ 1) Staggered body-fitted mesh method 2) Cell-centered method และ 3) Vertex-centered method วิธีต่างๆถูกแบ่งประเภทตามแนวคิดในการแก้ปัญหาพจน์การพา ที่ปรากฏอยู่ในสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ที่ใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของการไหลโดยทั่วไป วิธีที่หนึ่งคือ Staggered body-fitted mesh method ใช้ค่าองค์ประกอบความเร็วที่ตำแหน่งกึ่งกลางพื้นผิวควบคุม (face) แต่ใช้ค่าความดันที่ตำแหน่งกึ่งกลางปริมาตรควบคุมมาคำนวณพจน์ต่างๆในสมการอินทิกรัลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เทคนิคนี้ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาการสั่น (oscillation) และการลู่เข้า (convergence) ของผลลัพธ์เมื่อทำการวิเคราะห์การไหลที่มีค่าเรย์โนลด์ส นัมเบอร์ (Reynolds number) สูง แม้ว่าวิธีนี้จะใช้ได้ดี แต่มีหลายปัญหาเช่น ความยุ่งยากในการพัฒนาเป็นโปรแกรมสำเร็จรูป โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าต้องการพัฒนาไปสู่การหาผลเฉลยของการไหลในสามมิติ และปัญหาในการสร้างกริดให้มีรูปทรงที่ดีแบบไม่ตั้งฉากกันบนพื้นฐานของ Body-fitted mesh ซึ่งถือได้ว่าเป็นกริดที่มีระเบียบชนิดหนึ่ง กล่าวคือ ในปัญหาสองมิติ แต่ละปริมาตรควบคุมจะมีจำนวนพื้นผิวควบคุมที่แน่นอนคือ 4 ด้านเท่านั้น ในบางปัญหาอาจมีรูปร่างที่ไม่สามารถสร้างกริดแบบ Body-fitted mesh ได้เลย

วิธีที่สองคือ Cell-centered method ใช้ค่าองค์ประกอบความเร็วและความดันที่ตำแหน่งเดียวกันคือ จุดกึ่งกลางของปริมาตรควบคุม มาคำนวณพจน์ต่างๆในสมการอินทิกรัลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ข้อแตกต่างจากวิธีที่หนึ่งคือ วิธี Cell-centered method จะอาศัยการประมาณค่าภายในเพื่อให้ได้มาซึ่ง องค์ประกอบของความเร็วหรือความลาดชันของความเร็วที่ตำแหน่งพื้นผิวควบคุม และนำไปใช้ในการคำนวณพจน์ต่างๆในสมการอินทิกรัล รูปร่างของปริมาตรควบคุมคือ รูปร่างของเอลิเมนต์ และพื้นผิวควบคุมจะหมายถึงขอบต่างๆของเอลิเมนต์ วิธี Cell-centered method ได้รับความนิยมสูงมากในโปรแกรมคำนวณพลศาสตร์ของไหลเชิงพาณิชย์ อาทิ FLUENT และ StarCD แต่ปัญหาหนึ่งที่พบเห็นในวิธี Cell-centered method สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต คือ การใช้วิธี Harmonic mean ในการคำนวณคุณสมบัติที่รอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล เนื่องจากที่ตำแหน่งรอยต่อนั้นไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นของแข็งหรือของไหล ด้วยเหตุนี้ก่อนที่จะยอมรับคำตอบจากวิธีนี้สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ผู้วิเคราะห์จะต้องตรวจสอบการอนุรักษ์พลังงานความร้อนที่บริเวณรอยต่อและการอนุรักษ์พลังงานความร้อนโดยรวมของปัญหาเสมอ ความแม่นยำของการประมาณค่าคุณสมบัติที่รอยต่อด้วยวิธี Harmonic mean จะลดลงถ้าระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางเซลล์ของแข็งและจุดกึ่งกลางเซลล์ของไหลที่ติดกับรอยต่อนั้นมีขนาดไม่เท่ากัน

วิธีสุดท้ายคือ Vertex-centered method หรืออีกชื่อหนึ่งคือ Control Volume Finite Element Method (CVFEM) เป็นวิธีที่ขยายแนวคิดมาจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนหลักการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์กิน (Galerkin) แต่ระเบียบวิธี CVFEM ใช้การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบโดเมนย่อย (Sub-domain) แล้วเปลี่ยนสมการอินทิกรัลรอบปริมาตรควบคุมให้เป็นสมการอินทิกรัลรอบพื้นผิวควบคุม ด้วยทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) วิธีนี้ใช้ค่าองค์ประกอบความเร็วและความดันที่ตำแหน่งเดียวกันคือ ที่จุดยอดของเอลิเมนต์ ในกรณีของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ค่าตัวแปรทั้งหลายจะอยู่ที่ตำแหน่งจุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์ รูปร่างของปริมาตรควบคุม ไม่ได้หมายถึงรูปร่างของเอลิเมนต์ และพื้นผิวควบคุมก็ไม่ได้หมายถึงขอบของเอลิเมนต์เช่นกัน นิยามของปริมาตรควบคุมและพื้นผิวควบคุมจำเป็นจะต้องสร้างขึ้นใหม่ แม้ว่าวิธีนี้จะเป็นที่รู้จักในแวดวงที่ไม่มากนัก แต่สามารถนำไปใช้ได้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตโดยไม่ต้องอาศัยหลักการ Harmonic mean

ปัญหาในการวิเคราะห์การไหลด้วยวิธีปริมาตรสลับเนื่องที่เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปแล้ว คือการใช้ฟังก์ชันรูปร่างในการประมาณค่าฟังก์ชันต่างๆที่จุดอินทิเกรตรอบพื้นผิวควบคุมเพียงอย่างเดียว ซึ่งถูกใช้ได้เป็นอย่างดีในปัญหาการนำความร้อนนั้นไม่สามารถให้คำตอบที่ถูกต้องและแม่นยำเนื่องจากข้อจำกัดของค่าเพกเลตน์เบอร์ (Peclet number) ค่าเพกเลตน์เบอร์คืออัตราส่วนระหว่างพจน์การพาและพจน์การแพร่ของตัวแปรที่กำลังสนใจ ถ้าค่าเพกเลตน์เบอร์มี

ค่ามากจะส่งผลให้การคำนวณนั้นต้องใช้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กลงสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์หรือลดระยะทางระหว่างจุดต่อของวิธีผลต่างสลับเนื่อง ทำให้ขนาดของเมตริกซ์ที่จะต้องใช้ในการคำนวณมีจำนวนมากรวมทั้งต้องใช้ระยะเวลาในการคำนวณมากด้วย วิธีที่ใช้ในการเพิ่มเสถียรภาพและประสิทธิผลในการหาคำตอบของการไหลคือ การใช้วิธีอัปวินด์ในการแก้ปัญหาพจน์การพา

วิธีอัปวินด์ที่นิยมใช้ใน CVFEM นั้นแบ่งได้เป็นสองวิธีหลักๆ วิธีแรกคือ FLow-Oriented upwind scheme (FLO) ใช้การประมาณค่าภายในด้วยฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล (Exponential interpolation) และระบบพิกัดภายในเอลิเมนต์ (Local coordinate system) ที่ถูกสร้างขึ้นจากแกนพิกัดที่ขนานและตั้งฉากกับทิศทางการไหล เพื่อถ่วงน้ำหนักของพจน์การพาให้กับตัวแปรเกี่ยวข้องที่อยู่ต้นทางการไหล (Upstream direction) ให้มากขึ้น ข้อเสียประการหนึ่งของวิธี FLO คือมีเสถียรภาพต่ำ ถ้าถูกนำไปใช้ในปัญหาที่มีค่าเพคเลตนามเบอร์ของเอลิเมนต์ (element Peclet number) สูง วิธี FLO สามารถให้ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพีชคณิตที่เป็นลบได้ ซึ่งอาจจะส่งผลให้การเข้าสู่ผลลัพธ์เป็นไปได้ยาก ข้อเสียอีกประการหนึ่งของวิธี FLO คือ รูปร่างของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีมุมทู่ (obtuse-angle triangular element) จะส่งผลให้ไม่เกิดการเข้าสู่ผลลัพธ์ได้เช่นกัน สำหรับวิธีที่สองคือ MAAss-Weighted skew upwind scheme (MAW) เป็นวิธีที่ให้ความถูกต้องเพียงอันดับที่หนึ่งในมิติของระยะทาง แต่มีเสถียรภาพมากกว่าวิธี FLO สำหรับการคำนวณการไหลในปัญหาที่มีรูปร่างอย่างง่าย วิธี MAW มีความแม่นยำที่พอยอมรับได้ แต่ถ้ารูปร่างของเมช (mesh) ไม่ขนานกับทิศทางการไหล ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความแม่นยำลดลงอย่างมาก ซึ่งเป็นผลมาจากความหนืดเทียม (Artificial viscosity) ที่แฝงอยู่ในวิธี MAW นอกเหนือจากวิธีอัปวินด์ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น วิธีอัปวินด์อีกวิธีหนึ่งสามารถสร้างขึ้นได้จากการประยุกต์แนวคิดของวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์พีทروفกาเลอร์กิน (Streamline Upwind Petrov Galerkin) หรือ SUPG ซึ่งนิยมใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณในระเบียบวิธี CVFEM เรียกชื่อว่าวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์คอมโทรลวอลุ่ม (Streamline Upwind Control Volume) หรือ SUCV รายละเอียดของวิธีนี้จะกล่าวถึงในบทต่อไป

ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะดำเนินงานวิจัยด้านการคำนวณที่เน้นการทำนายการถ่ายเทความร้อนซึ่งเกิดขึ้นแบบควบคู่กัน กล่าวคือ การนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหล รวมถึงตัวแปรต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการไหลได้แก่ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ระเบียบวิธี CVFEM ถูกพัฒนาขึ้นสำหรับกริดไร้ระเบียบโดยอาศัย การประมาณค่าฟังก์ชันภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มาปรับใช้ให้เหมาะสมกับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสลับเนื่อง การหาคำตอบเชิงตัวเลขของการไหลในงานวิจัยนี้ จะใช้กริดเพียงชุดเดียวสำหรับทุกตัวแปร ได้แก่ ความเร็วทั้งสองแนวแกน ความดัน และอุณหภูมิ เพื่อให้ง่ายต่อการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณ การเตรียมข้อมูลรูปร่างของปัญหาเข้าสู่โปรแกรมคำนวณ และการส่งข้อมูลผลลัพธ์สู่การแสดงผลแบบกราฟฟิกส์ นอกจากนี้ การแก้

ระบบสมการจะใช้วิธีกระทำซ้ำ และ แยกการคำนวณแต่ละตัวแปรออกจากกัน (Segregated Solution Method) เพื่อความรวดเร็วในการคำนวณ และประหยัดหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ ลำดับสุดท้ายคือ การทดสอบความถูกต้องและแม่นยำของระเบียบวิธีจากงานวิจัยนี้ ด้วยการเลือกปัญหาแบบอย่างที่มีผลเฉลยแม่นยำ และปัญหาที่มีผลการคำนวณเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีอื่นเพื่อทำการเปรียบเทียบ และเพื่อให้เกิดความมั่นใจว่าเทคนิคที่ถูกนำเสนอในงานวิจัยนี้ สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาในทางปฏิบัติที่มีความซับซ้อนและหลากหลายยิ่งขึ้นต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 ประดิษฐ์วิธีสตรึมไลน์อัปวินด์สำหรับ Control Volume Finite Element Method ซึ่งอ้างอิงกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาคงตัวไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ในสถานะคงตัว
- 1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งในของแข็งและของไหล
- 1.2.3 ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่เกิดขึ้นเนื่องจากการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ผ่านของแข็งที่มีอุณหภูมิแตกต่างไปจากอุณหภูมิของของไหล
- 1.2.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถทำนายการถ่ายเทความร้อน 3 แบบ ได้แก่
 - 1) อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนภายในของไหล ซึ่งเป็นผลมาจากการพาความร้อน
 - 2) อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนบริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล
 - 3) อุณหภูมิและฟลักซ์ความร้อนภายในของแข็ง ซึ่งเป็นผลมาจากการนำความร้อน
- 1.2.5 ศึกษาและประยุกต์การหาผลเฉลยแบบแยกส่วน (Segregated algorithm) ร่วมกับการคำนวณเมตริกซ์แบบกระทำซ้ำ (Iterative method) โดยแยกการคำนวณความเร็ว อุณหภูมิ และความดันออกจากกัน เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการหาผลเฉลย

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการศึกษาที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ ได้แก่

- 1.3.1 ศึกษาพฤติกรรมกรไหลชนิดอัดตัวไม่ได้ในสถานะคงตัวในสองมิติ
- 1.3.2 ลักษณะการไหลที่พิจารณาเป็นการไหลแบบราบเรียบ
- 1.3.3 พัฒนาวีธีสตรึมไลน์อัปวินด์สำหรับ Control Volume Finite Element Method ที่อ้างอิงกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ
- 1.3.4 ศึกษาการถ่ายเทความร้อนทั้งในของไหลและของแข็งในสองมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 1.3.5 ไม่พิจารณาผลของอุณหภูมิที่มีต่อคุณสมบัติของของแข็งและของไหล ได้แก่ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน ความหนืด ค่าของความจุความร้อนจำเพาะ เป็นต้น ยกเว้นปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ ซึ่งสมมุติให้การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหลภายในโดเมนเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ
- 1.3.6 ไม่พิจารณาผลของอุณหภูมิที่มีต่อการเคลื่อนตัวของของแข็งอันเนื่องมาจากความเค้น ดังนั้น กริดที่ใช้ (ทั้งภายในของแข็งและของไหล) จะไม่เปลี่ยนแปลงตลอดการคำนวณ

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

- 1.4.1 มีความเข้าใจถึงการแก้ปัญหาพจน์การพาสำหรับ Control Volume Finite Element Method ด้วยวิธีสตริมไลน์อัปวินด์บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ
- 1.4.2 เพิ่มพูนความรู้ความเข้าใจในศาสตร์ทางวิศวกรรมเครื่องกล ได้แก่ พลศาสตร์ของไหล และการถ่ายเทความร้อน อันเป็นแนวทางพื้นฐานที่สำคัญและเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัยระดับสูงต่อไป
- 1.4.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถทำนายลักษณะการไหลแบบราบเรียบ ชนิดอัดตัวไม่ได้ การกระจายของอุณหภูมิ และฟลักซ์ความร้อนทั้งในของไหลและของแข็งได้
- 1.4.4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถพัฒนาให้มีศักยภาพสูงขึ้นได้ กล่าวคือ ใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากขึ้น ใช้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน และหลากหลายมากขึ้น ใช้กับปัญหาที่มีสมการควบคุมที่มีพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นเข้ามาเกี่ยวข้องมากขึ้น
- 1.4.5 ความรู้ ความเข้าใจที่ได้จากงานวิจัยนี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาพฤติกรรมการไหลอื่นๆ เช่น การไหลแบบราบเรียบในสภาวะไม่คงตัว หรือการไหลแบบปั่นป่วน เป็นต้น

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

- 1.5.1 ศึกษาหลักการและทฤษฎีด้านการถ่ายเทความร้อน พลศาสตร์ของไหล และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้
- 1.5.2 ศึกษาและประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อการวิเคราะห์การนำความร้อนในของแข็งด้วย Control Volume Finite Element Method (CVFEM) โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ
- 1.5.3 ศึกษาและประดิษฐ์วิธีสตริมไลน์อัปวินด์สำหรับระเบียบวิธี CVFEM

- 1.5.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาการไหลแบบราบเรียบชนิดอัดตัวไม่ได้ 2 รูปแบบ ได้แก่ การไหลที่ไม่มีอุณหภูมิเกี่ยวข้อง และการไหลที่มีอุณหภูมิเกี่ยวข้องด้วย
- 1.5.5 ศึกษาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็ง
- 1.5.6 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
- 1.5.7 ทดสอบความถูกต้องของวิธีที่นำเสนอทั้งหมดข้างต้น ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ และปัญหาที่มีความซับซ้อน
- 1.5.8 จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ และสรุปผล

1.6 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- 1.6.1 G.D., Raithby [1] พัฒนาวิธีการอัปวินด์สำหรับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จากเดิมที่จะเกิดค่าความผิดพลาดเป็นอย่างมากเมื่อการไหลไม่อยู่ในแนวของกริดที่สร้างขึ้น
- 1.6.2 A.N., Brooks และ T.J.R., Hughes [2] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ เพทราฟกาเลอร์คินสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้น วิธีดังกล่าวได้ทำการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกร้างโดยใช้ทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วในการทำให้ฟังก์ชันดังกล่าวมีการถ่วงน้ำหนักไปในแนวของการไหล โดยที่วิธีการดังกล่าวสามารถให้ความถูกต้องในอันดับ 2 แต่ยังคงให้ผลคำตอบที่มีการสั่นอยู่บ้างในบางปัญหา
- 1.6.3 Y.A., Hassan และคณะ [3] ปรับปรุงวิธีอัปวินด์สำหรับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องของ Raithby, G. D. ให้มีเสถียรภาพและมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น
- 1.6.4 J.G., Rice และ R.J., Schnipke [4] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นวิธีที่ทำการคำนวณพจน์การพาในทิศทางของการไหลโดยตรง และใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นชนิดสี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ วิธีการดังกล่าวให้ความถูกต้องในอันดับ 1 แต่ให้เมตริกซ์ของพจน์การพาที่มีค่าในแนวทแยงมุมหลักที่เหมาะสม ทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพมากยิ่งขึ้น
- 1.6.5 J.G., Rice และ R.J., Schnipke [5] นำวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดอัดตัวไม่ได้ และเสนอขั้นตอนการคำนวณแบบแยกส่วนระหว่างความเร็วและความดัน ทำให้สามารถหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วและใช้หน่วยความจำน้อยลง
- 1.6.6 N., Wansophark และ P., Dechaumphai [6] พัฒนาวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ พร้อมกับเทคนิคการปรับขนาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

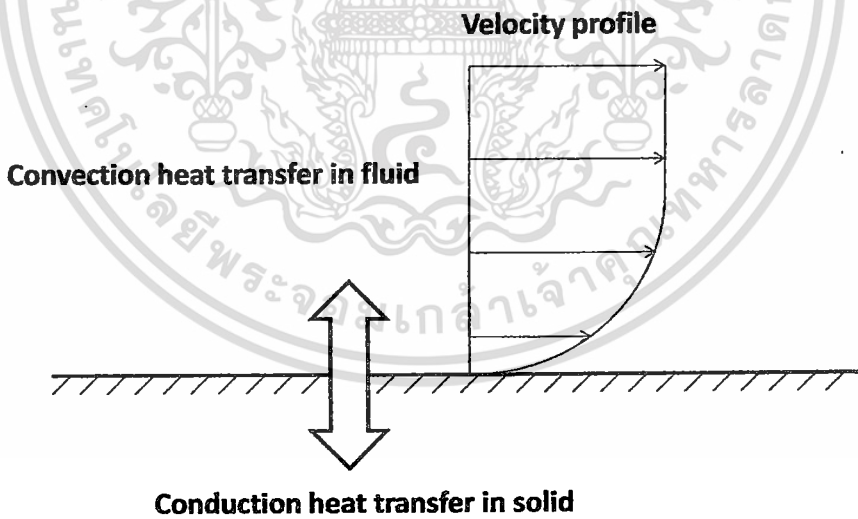
อัตโนมัติ แล้วประยุกต์วิธีดังกล่าวกับการวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่งชนิดอัตโนมัติไม่ได้

- 1.6.7 N., Wansophark และ P., Dechaumphai [7] พัฒนาวิธีสตรึมไลน์อัปวินด์แบบโดยตรงสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่งชนิดอัตโนมัติ ที่มีอุณหภูมิเกี่ยวข้อง
- 1.6.8 N., Wansophark และคณะ [8] พัฒนาวิธีสตรึมไลน์อัปวินด์-พีทروفกาเลอร์คิน สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
- 1.6.9 C.R., Swaminathan และคณะ [9] กล่าวถึงวิธีประยุกต์ระเบียบวิธีคอนโทรลวอลลุ่มไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณปัญหาการไหล และการถ่ายเทความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิด โดยการปรับค่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักสำหรับการอินทิเกรตภายในปริมาตรควบคุมเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับการใช้วิธีสตรึมไลน์อัปวินด์พีทروفกาเลอร์คินในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.6.10 ยศกร ประทุมวัลย์ [10] คำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมที่ยึดถือการใช้กึ่งกลางเซลล์เป็นหลัก หรือ วิธี Cell-centered โดยพิจารณาเฉพาะรูปร่างเซลล์สี่เหลี่ยมซึ่งแต่ละเซลล์จะมีพื้นที่จำนวน 4 พื้นผิวเท่านั้น แม้ว่าวิธีนี้จะง่ายต่อการพัฒนาเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่ไม่เหมาะที่จะนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน
- 1.6.11 อธิพงษ์ มาลาทิพย์ [11] วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ วิธีสตรึมไลน์อัปวินด์-พีทروفกาเลอร์คินถูกนำไปใช้ในส่วนของการคำนวณการไหล ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิภายในของไหล สามารถใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่มีอันดับเท่ากันได้ และสามารถคำนวณตัวแปรต่างๆแบบแยกกันได้
- 1.6.12 นิพนธ์ วรรณโสภากย์ [12] คำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต และนำผลที่ได้ไปคำนวณเพิ่มเติมสำหรับความเค้นภายในของแข็ง ขั้นตอนของการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหลโดยรวมเหมือนกับขั้นตอนที่อธิพงษ์ มาลาทิพย์นำมาใช้ แตกต่างกันตรงที่วิธีสตรึมไลน์อัปวินด์ และเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณคือเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อที่มีอันดับในการประมาณค่าที่สูงกว่า เอลิเมนต์ที่อธิพงษ์ [11] ใช้

บทที่ 2

สมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่กำลังพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ คือ ปัญหาที่จะต้องทำการคำนวณไปพร้อมๆกัน ระหว่างการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งกับการถ่ายเทความร้อนภายในของไหลดังรูปที่ 2.1 ถ้าอุณหภูมิภายในของไหลสูงกว่าอุณหภูมิภายในของแข็ง ทำให้เกิดการถ่ายเทความร้อนพัดพาจากของไหลสู่ของแข็งที่อยู่หนึ่ง ในทางกลับกัน หากอุณหภูมิภายในของแข็งสูงกว่าอุณหภูมิภายในของไหล ทำให้เกิดการถ่ายเทความร้อนแพร่กระจายออกจากของแข็งที่อยู่หนึ่งสู่ของไหลที่กำลังเคลื่อนที่ ดังนั้นสมการพื้นฐานสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตแบ่งออกได้เป็นสองส่วน ได้แก่ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อนภายในของไหลและของแข็ง ตัวแปรไม่ทราบค่าของการคำนวณการถ่ายเทความร้อนภายในของไหลในสองมิติได้แก่ ความเร็วในแนวแกน x ความเร็วในแนวแกน y ความดันและอุณหภูมิ ในขณะที่ตัวแปรไม่ทราบค่าของการคำนวณการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งมีเพียงตัวแปรเดียวคือ อุณหภูมิ รายละเอียดของสมการพื้นฐานต่างๆและตัวแปรที่เกี่ยวข้องสำหรับการถ่ายเทความร้อนภายในของไหลและของแข็งจะถูกกล่าวถึงในหัวข้อที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ



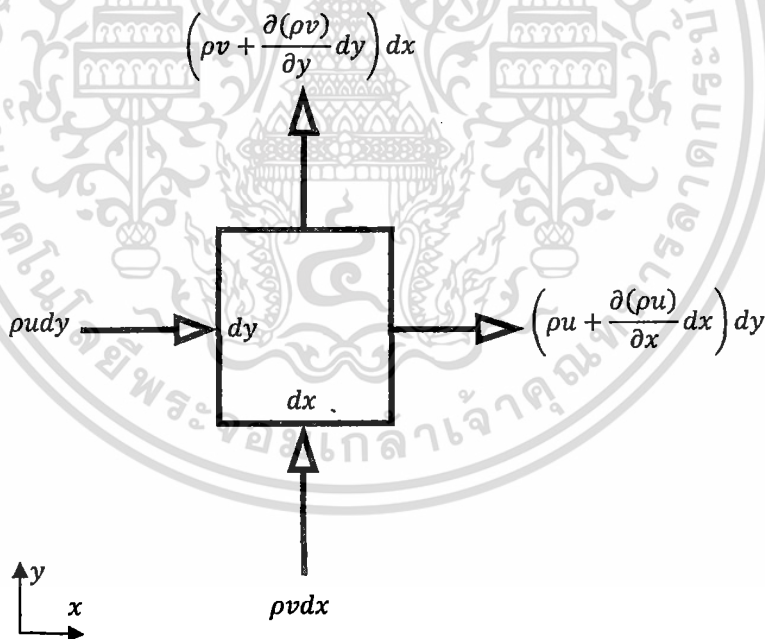
รูปที่ 2.1 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหล

ในหัวข้อนี้กล่าวถึง กฎอนุรักษ์ที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนของของไหล และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อนของของไหลที่มีสมมติฐานว่า เป็นของไหลที่สอดคล้องกับกฎของนิวตัน หรือของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian) ของไหลนี้ไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible) การไหลเกิดขึ้นในสภาวะคงตัว (steady state) และเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar) นอกจากนี้ การไหลถูกพิจารณาในสองมิติเท่านั้น กฎอนุรักษ์ที่ถูกกล่าวถึงในหัวข้อนี้มีทั้งหมด 3 กฎได้แก่ กฎอนุรักษ์มวล (conservation of mass) กฎอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และกฎอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) [13]

2.1.1 กฎอนุรักษ์มวล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลในสองมิติสามารถเขียนขึ้นได้ โดยการพิจารณาความสมดุลของมวลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมหนึ่งภายในของไหลกว้าง dx หน่วย ยาว dy หน่วย และลึก 1 หน่วย ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 มวลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมในของไหล

กฎอนุรักษ์มวล สามารถสรุปได้ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในปริมาตรควบคุม เท่ากับ อัตราการไหลเข้าสู่สุทธิของมวลของไหลสู่ปริมาตรควบคุม

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dy) &= \rho u dy - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy + \rho v dx \\ &\quad - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

โดย ρ แทนความหนาแน่นของของไหล

u แทนความเร็วในแนวแกน x

v แทนความเร็วในแนวแกน y

t แทนเวลา

หลังจากจัดรูปสมการที่ (2.1) ใหม่จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

สำหรับการไหลอัดตัวไม่ได้ ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ที่ทำให้สมการที่ (2.2) ลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

2.1.2 กฎอนุรักษ์โมเมนตัม

กฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งเป็นกฎอนุรักษ์โมเมนตัมที่ได้กล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคของไหล มีค่าเท่ากับ ผลรวมของแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลนั้น [14] ดังนั้นเมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมหนึ่งภายในของไหลกว้าง dx หน่วย ยาว dy หน่วยและลึก 1 หน่วยดังรูปที่

2.3

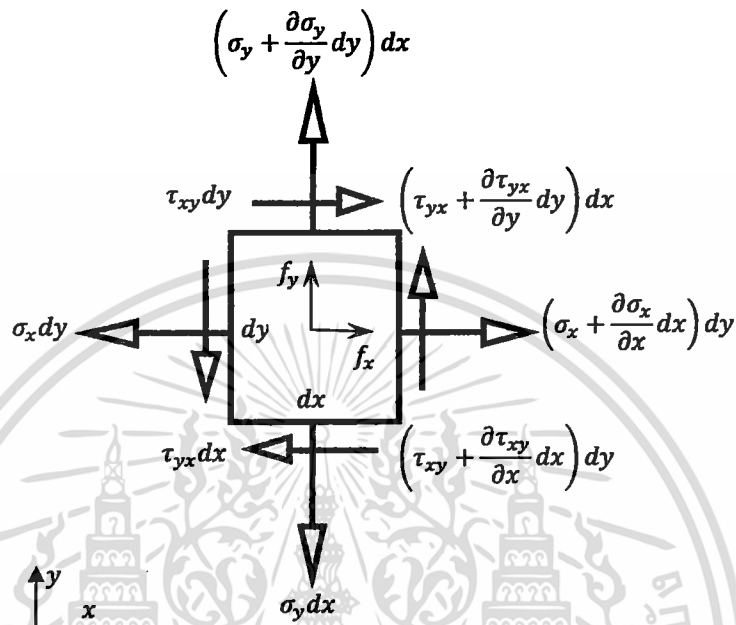
สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทาง x สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \rho dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\sigma_x dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{yx} dx \\ &\quad + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + f_x dx dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

โดย σ_x แทนความเค้นตั้งฉากในทิศทาง x บนระนาบ x

τ_{yx} แทนความเค้นเฉือนในทิศทาง x บนระนาบ y

f_x แทนแรงวัตถุ (Body force) ในทิศทาง x ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของของไหล



รูปที่ 2.3 แรงที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมในของไหล

เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.4) ใหม่จะได้

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x \quad (2.5)$$

สมการอนุพันธ์สำหรับกฎอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทาง y สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho dx dy \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\sigma_y dx + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + f_y dx dy \quad (2.6)$$

โดย σ_y แทนความเค้นตั้งฉากในทิศทาง y บนระนาบ y

τ_{xy} แทนความเค้นเฉือนในทิศทาง y บนระนาบ x

f_y แทนแรงวัตถุ (Body force) ในทิศทาง y ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของของไหล

เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.6) ใหม่จะได้

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y \quad (2.7)$$

สำหรับการไหลในสองมิติ ความเค้นที่กระทำบนปริมาตรของไหลนิวโทเนียน (Newtonian fluid) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.8a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.8b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.8c)$$

ด้วยสมมติฐานของการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ จากสมการที่ (2.3) ทำให้นิยามของความเค้นลดรูปเป็น

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.9a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.9b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.9c)$$

แรงวัตถุที่เกี่ยวข้องกับการไหลในที่นี้เป็นแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (Gravity force) และแรงลอยตัว (Buoyant force) ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิที่จุดต่างๆของการไหล ของไหลที่มีอุณหภูมิสูงจะลอยตัวขึ้นแต่ของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำจะเคลื่อนตัวลงไปสู่ด้านล่าง ในการจำลองแรงลอยตัวนี้ สมการบูซซิเนสก์ (Boussinesq approximation) [15] ได้ถูกนำมาใช้ทำให้

$$f_x = \rho g_x - \rho g_x \beta (T - T_0) = \rho g_x (1 - \beta (T - T_0)) \quad (2.10a)$$

$$f_y = \rho g_y - \rho g_y \beta (T - T_0) = \rho g_y (1 - \beta (T - T_0)) \quad (2.10b)$$

โดย g_x แทนความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกในแนวแกนบวกของ x

g_y แทนความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลกในแนวแกนบวกของ y

β แทนค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (Coefficient of thermal expansion) ของของไหล

T_0 แทนอุณหภูมิต่ำสุดภายในโดเมนของของไหลที่ใช้อ้างอิงว่าเป็นอุณหภูมิที่ของไหลไม่เกิดการลอยตัว

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสำหรับการไหลอัดตัวไม่ได้ที่สภาวะคงตัวสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) \quad (2.11a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) \quad (2.11b)$$

2.1.3 กฎอนุรักษ์พลังงาน

กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ซึ่งเป็นกฎอนุรักษ์พลังงานได้กล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานของปริมาตรของไหล มีค่าเท่ากับ อัตราการเพิ่มความร้อนบวกกับอัตราของงานที่กระทำต่อปริมาตรของไหล สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับกฎอนุรักษ์พลังงานสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.12)$$

โดย E แทนพลังงานรวมของของไหล

Q แทนความร้อนที่ให้แก่ของไหล

W แทนงานที่กระทำต่อของไหล

นิยามของพลังงานรวม E คือ

$$E = \rho dx dy \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \vec{f} \cdot \vec{r} \right) \quad (2.13)$$

โดย $\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j}$ แทนเวกเตอร์ของแรงวัตถุ

i แทนพลังงานภายในของของไหลต่อหน่วยมวล

\vec{r} แทนเวกเตอร์ระยะทางของตำแหน่งกึ่งกลางปริมาตรของไหลเทียบกับจุดอ้างอิงของพิกัด

พจน์แรกในวงเล็บของสมการที่ (2.13) คือ พจน์ของพลังงานภายในจำเพาะของของไหล พจน์ที่สองของสมการที่ (2.13) คือ พจน์ของพลังงานจลน์จำเพาะ และพจน์สุดท้ายของสมการที่ (2.13) คือ พจน์ของพลังงานศักย์จำเพาะซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากแรงวัตถุภายในของไหล ดังนั้นอัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานรวมของของไหลมีค่าเท่ากับ

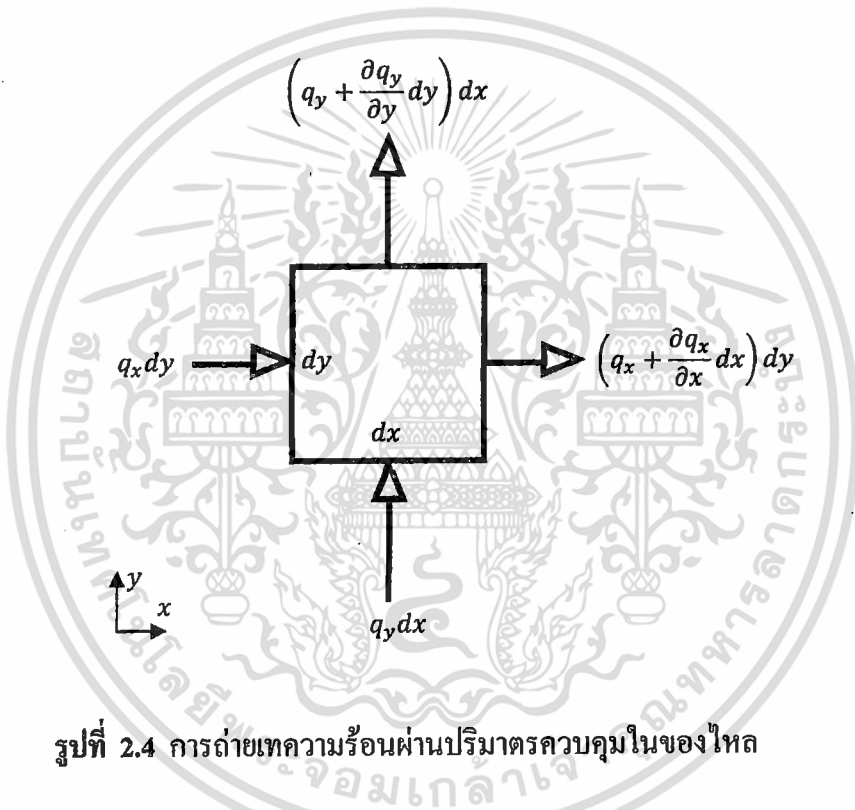
$$\frac{dE}{dt} = \rho dx dy \frac{d}{dt} \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \vec{f} \cdot \vec{r} \right) \quad (2.14)$$

เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงระยะทางเทียบกับเวลาคือ ความเร็ว ดังสมการ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (2.15)$$

ทำให้อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานรวมของของไหลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dE}{dt} = \rho dx dy \left[\frac{d}{dt} \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) - (f_x u + f_y v) \right] \quad (2.16)$$



รูปที่ 2.4 การถ่ายเทความร้อนผ่านปริมาตรควบคุมในของไหล

จากรูปที่ 2.4 อัตราสุทธิของความร้อนที่เพิ่มให้แก่ปริมาตรของไหลมีค่าเท่ากับ

$$\frac{dQ}{dt} = q_x dy - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + q_y dx - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \quad (2.17)$$

โดย q_x แทนฟลักซ์ความร้อน (ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) ที่ไหลผ่านระนาบ x

q_y แทนฟลักซ์ความร้อน (ความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) ที่ไหลผ่านระนาบ y

จากกฎของฟูเรียร์ ฟลักซ์ความร้อนมีความเกี่ยวข้องกับความลาดชันของอุณหภูมิ ดังสมการ

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.18a)$$

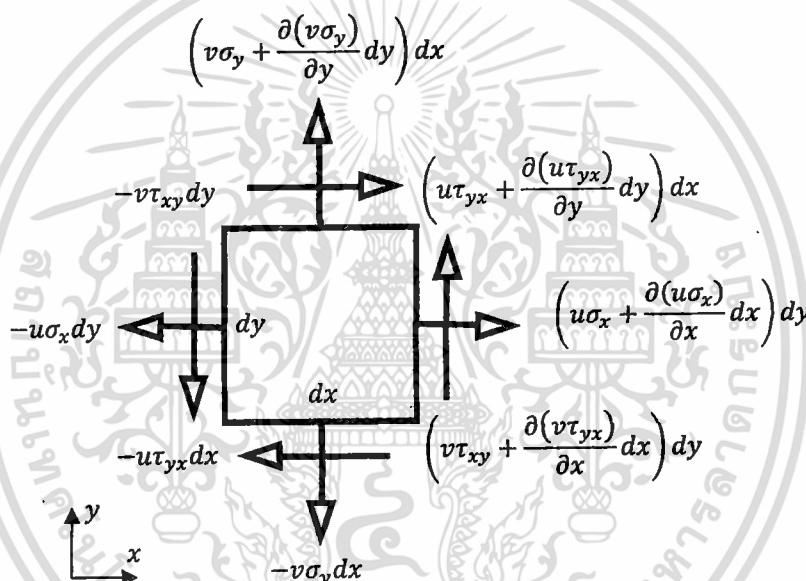
$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.18b)$$

โดย k แทนค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนสำหรับของไหล

T แทนอุณหภูมิของของไหล

เมื่อแทนค่าของฟลักซ์ความร้อนลงไปในสมการที่ (2.17) จะได้

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dx dy \quad (2.19)$$



รูปที่ 2.5 งานภายนอกที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมในของไหล

จากรูปที่ 2.5 อัตราสุทธิของงานที่กระทำต่อปริมาตรของไหลคือ

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \left(-u\sigma_x - v\tau_{xy} + \left(u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right) + \left(v\tau_{xy} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} dx \right) \right) dy \\ & + \left(-u\tau_{yx} - v\sigma_y + \left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right) + \left(v\sigma_y + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} dy \right) \right) dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.20) ให้ง่ายขึ้นจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนทฤษฎีบทกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.21)$$

แทนสมการที่ (2.17), (2.20) และ (2.22) ลงในสมการที่ (2.12) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับการอนุรักษ์พลังงานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{d}{dt} \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) - (f_x u + f_y v) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

หรือ

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho(f_x u + f_y v) \\ &+ \left(\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

พจน์ที่อยู่ด้านขวามือของสมการที่ (2.23) สามารถกระจายออกมาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right) &= \rho \left(\frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) \\ &+ \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

แทนค่าจากสมการที่ (2.24) ลงในสมการที่ (2.23) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho v \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \left(\rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \\ &+ v \left(\rho f_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.25)$$

สมการที่ (2.25) สามารถจัดรูปลงได้ ด้วยการใส่สมการของการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองแนวแกนได้ดังนี้

$$\rho \left(\frac{\partial i}{\partial t} + u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.26)$$

พลังงานภายในจำเพาะของไหลที่ใช้ในที่นี้มีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิของของไหลดังสมการ

$$i = i_0 + c(T - T_{av}) \quad (2.27)$$

โดย i_0 แทนพลังงานภายในจำเพาะของของไหลที่อุณหภูมิเฉลี่ย ซึ่งมีค่าคงที่

T_{av} แทนอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล ซึ่งมีค่าคงที่

c แทนค่าความจุความร้อนจำเพาะของของไหลเมื่อปริมาตรคงที่

ดังนั้นสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับการอนุรักษ์พลังงานของการไหลคือ

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.28)$$

เมื่อแทนค่าของความเค้นต่างๆที่นิยามไว้ในสมการที่ (2.9a) ถึง (2.9c) ลงไปในสมการที่ (2.28) จะได้

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Phi \quad (2.29)$$

โดย Φ แทนฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) ซึ่งในกรณีนี้มีค่าดังสมการ

$$\Phi = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.30)$$

ในกรณีการไหลอัดตัวไม่ได้และสภาวะคงตัว สมการอนุรักษ์พลังงานสามารถเขียนใหม่เป็น

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi \quad (2.31)$$

พจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (2.31) แทนการกระจายของพลังงานความหนืดซึ่งเป็นผลมาจากความหนืดของของไหล ที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจากอัตราการสูญเสียพลังงานกลไปเป็นพลังงานความร้อน สำหรับการไหลความเร็วต่ำ พจน์นี้มีค่าน้อยสามารถละทิ้งได้ ทำให้สมการของการอนุรักษ์พลังงานสามารถลดรูปลงได้เป็น

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.32)$$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง

ภายในปริมาตรของแข็งมีการไหลเข้าและออกของพลังงานเฉพาะส่วนของความร้อนเท่านั้น ไม่มีพลังงานกลใดๆเข้ามาเกี่ยวข้องดังรูปที่ 2.6 ดังนั้นกฎอนุรักษ์พลังงานจึงเป็นกฎเดียวที่ใช้กับการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง นอกจากนี้ในงานวิจัยนี้มีสมมติฐานว่า การนำความร้อนเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบเดียวเท่านั้นที่เกิดขึ้นในของแข็ง การไหลของความร้อนผ่านปริมาตรของแข็งนั้นคล้ายกับการไหลของความร้อนผ่านปริมาตรของไหล ยกเว้นกรณีของแข็งนั้นอาจสามารถผลิตความร้อนได้เองด้วยขนาด Q วัตต์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

สมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy = q_x dy - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + q_y dx - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx + Q dx dy \quad (2.33)$$

จากกฎของฟูเรียร์

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.34a)$$

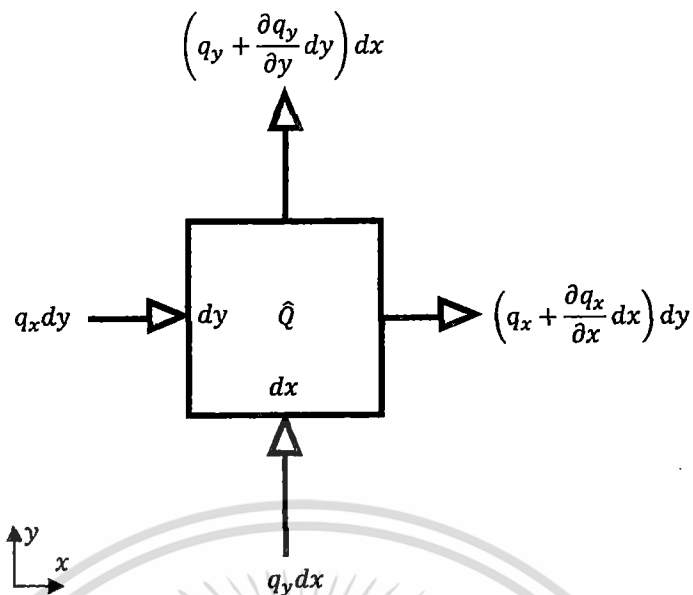
$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.34b)$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.34a) และ (2.34b) ลงในสมการที่ (2.33) จะได้

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \quad (2.35)$$

ที่สภาวะคงตัว สมการการนำความร้อนในของแข็งสามารถลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (2.36)$$



รูปที่ 2.6 การถ่ายเทความร้อนผ่านปริมาตรควบคุมในของแข็ง



บทที่ 3

ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง

สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง

ความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการ discretized จากระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องสำหรับปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติ ถือเป็นพื้นฐานสำคัญของการพิจารณาปัญหาการนำความร้อนในสองและสามมิติต่อไป ดังนั้นในหัวข้อที่ 3.1 จะกล่าวถึงปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติและกระบวนการต่างๆในการหาคำตอบเชิงตัวเลข และในหัวข้อที่ 3.2 เป็นเนื้อหาของที่ได้มาซึ่งสมการ discretized จากการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องไว้ระเบียบ สำหรับปัญหาการนำความร้อนแบบสองมิติ รวมทั้งการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต และการแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบเชิงตัวเลข

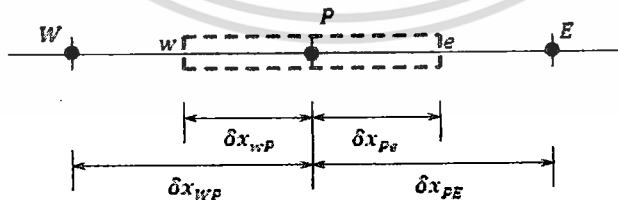
3.1 การนำความร้อนในหนึ่งมิติ

สมการสำหรับปัญหาการนำความร้อนหรือการแพร่กระจายในหนึ่งมิติ ได้มาจากการละทิ้งพจน์การพา พจน์การแพร่กระจายในแกน y ของสมการที่ (2.36) จากบทที่ 2 ผลที่ได้คือ

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV + \int \dot{Q} dV = 0 \quad (3.1)$$

ด้วยทฤษฎีบทของเกาส์ ทำให้เขียนสมการที่ (3.1) ใหม่ได้ดังนี้

$$\int k \frac{\partial T}{\partial x} n_x dA + \int \dot{Q} dV = 0 \quad (3.2)$$



รูปที่ 3.1 ปริมาตรควบคุมหนึ่งมิติสำหรับจุดต่อ P ในปัญหาการแพร่กระจาย

จากรูปที่ 3.1 พื้นผิวของปริมาตรควบคุมหนึ่งมิติมี 2 พื้นผิวได้แก่ พื้นผิว w และ e ซึ่งมี n_x เท่ากับ -1 และ 1 ตามลำดับ ดังนั้น

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + \dot{Q}_p \Delta V_p = 0 \quad (3.3)$$

โดย \dot{Q}_p แทนปริมาณความร้อนขนาดคงที่ซึ่งสามารถได้ภายในวัสดุต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

ΔV_p แทนขนาดของปริมาตรควบคุมซึ่งมีค่าเท่ากับ $\delta x_{wp} + \delta x_{pe}$ คูณกับความยาว 1 หน่วยและความลึก 1 หน่วย

ปัญหาของการแพร่กระจายแบบหนึ่งมิติที่นำมาพิจารณาคือ การนำความร้อนผ่าน Composite wall Composite wall คือ ผนังที่ประกอบขึ้นจากการซ้อนกันของวัสดุหลายชนิด ในที่นี้มีวัสดุเพียง 2 ชนิดได้แก่ A และ B รูปร่างของ Composite wall แสดงไว้ในรูปที่ 3.2 (ก) จุดประสงค์ของตัวอย่างนี้คือเพื่อแสดงให้เห็นถึงการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบ Cell-centered และ Vertex-centered ปริมาตรควบคุมสำหรับวิธี Cell-centered และ Vertex-centered แสดงไว้ในรูปที่ 3.2(ข) และ 3.2(ค) ตามลำดับ วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบ Cell-centered ใช้กึ่งกลางเซลล์เป็นจุดอ้างอิงของการคำนวณ ในขณะที่วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบ Vertex-centered ใช้จุดยอดของเซลล์เป็นจุดอ้างอิงของการคำนวณ

อุณหภูมิที่ด้านนอกและด้านในของผนังกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 100°C และ 20°C ตามลำดับ ความหนาของวัสดุ A และ B เท่ากับ 0.5 เมตร ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุ A และ B เท่ากับ 1 และ $0.5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ตามลำดับ ไม่มีการผลิตพลังงานความร้อนภายในผนัง ($\dot{Q} = 0$)

คำตอบแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้คือ

$$T(x) = \begin{cases} 100 - (160/3)x & ; 0 \leq x < 0.5 \\ 20 + (320/3)(1-x) & ; 0.5 \leq x < 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

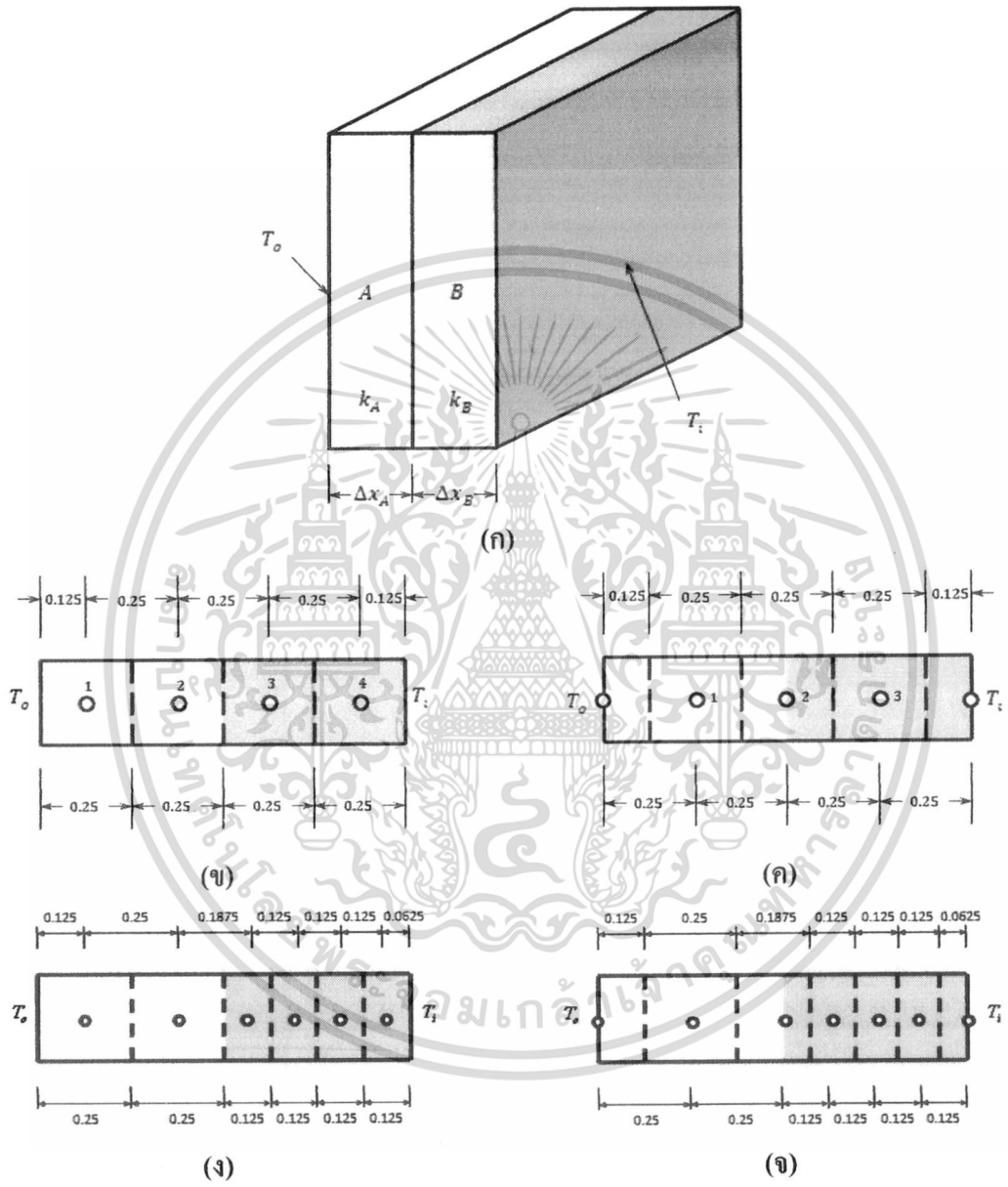
การอินทิเกรตสมการอนุรักษ์พลังงานรอบพื้นผิวปริมาตรควบคุมของจุด P ทำให้

$$\left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(kA \frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = 0 \quad (3.5)$$

โดย A แทนพื้นที่หน้าตัดของการแพร่กระจายความร้อน ในปัญหานี้ $A_e = A_w = A$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W}$$
(3.6)



รูปที่ 3.2 (ก) รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของ Composite wall

- (ข) Cell-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างเท่ากัน) (ค) Vertex-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างเท่ากัน) (ง) Cell-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างไม่เท่ากัน) (จ) Vertex-centered mesh (จุดต่อภายในวัสดุทั้งสองมีระยะห่างไม่เท่ากัน)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในวิธี Cell-centered ความหนาทั้งหมดของผนังถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกันขนาด $\delta x = 0.25 \text{ m}$ โดยมี 2 เซลล์อยู่ในวัสดุ A และอีก 2 เซลล์อยู่ในวัสดุ B รอยต่อระหว่างวัสดุ A และวัสดุ B เป็นพื้นผิวที่สอดคล้องกับพื้นผิว e ของปริมาตรควบคุมหมายเลข 2 และพื้นผิว w ของปริมาตรควบคุมหมายเลข 3 ซึ่งไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นพื้นผิวที่ควรจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุใดในการคำนวณ ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องใช้การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนบริเวณรอยต่อด้วยสมการ Harmonic mean ดังต่อไปนี้เพื่อให้คำตอบจากวิธี Cell-centered มีความแม่นยำ

$$k_{AB} = 2k_A k_B / (k_A + k_B) \quad (3.7)$$

สมการ discretised สำหรับจุดต่อทั้ง 4 จุดต่อเมื่อใช้วิธี Cell-centered คือ

$$\begin{aligned} \frac{k_A}{\delta x} (T_1 - T_2) - \frac{2k_A}{\delta x} (T_o - T_1) &= 0 \\ \frac{k_{AB}}{\delta x} (T_2 - T_3) - \frac{k_A}{\delta x} (T_1 - T_2) &= 0 \\ \frac{k_B}{\delta x} (T_3 - T_4) - \frac{k_{AB}}{\delta x} (T_2 - T_3) &= 0 \\ \frac{2k_B}{\delta x} (T_4 - T_i) - \frac{k_B}{\delta x} (T_3 - T_4) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ในวิธี Vertex-centered ระยะทางระหว่างจุดต่อต่างๆในโดเมนมีขนาด $\delta x = 0.25 \text{ m}$ ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อหมายเลข 1 อยู่ในวัสดุ A อย่างสมบูรณ์ ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อหมายเลข 3 อยู่ในวัสดุ B อย่างสมบูรณ์ ตำแหน่งรอยต่อคือตำแหน่งของจุดต่อหมายเลข 2 ซึ่งมีพื้นผิว w อยู่ในวัสดุ A และพื้นผิว e อยู่ในวัสดุ B วิธีนี้ไม่จำเป็นต้องใช้ค่า k_{AB} เนื่องจากไม่มีส่วนใดของพื้นผิวที่เป็นรอยต่อของทั้งสองวัสดุ

สมการ discretised สำหรับจุดต่อทั้ง 3 จุดต่อเมื่อใช้วิธี Vertex-centered คือ

$$\begin{aligned} \frac{k_A}{\delta x} (T_1 - T_2) - \frac{k_A}{\delta x} (T_o - T_1) &= 0 \\ \frac{k_B}{\delta x} (T_2 - T_3) - \frac{k_A}{\delta x} (T_1 - T_2) &= 0 \\ \frac{k_B}{\delta x} (T_3 - T_i) - \frac{k_B}{\delta x} (T_2 - T_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

อุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี Cell-centered และวิธี Vertex-centered มีความแม่นยำมาก เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับอุณหภูมิที่ได้จากคำตอบแม่นยำตรง ดังตารางที่ 3.1 เมื่อระยะห่างของจุดต่อในสองวัสดุมีขนาดเท่ากัน แต่อุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี Cell-centered จะคลาดเคลื่อนจากคำตอบแม่นยำตรงมากกว่าวิธี Vertex-Centered ถ้าระยะห่างของจุดต่อในสองวัสดุไม่เท่ากันดังแสดงไว้ในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบระหว่างอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) ที่ได้จากค่าตอบแม่นยำและค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี Cell-centered และ Vertex-centered เมื่อจุดต่อภายในวัสดุทั้งสองชนิดมีระยะห่างเท่ากัน

$x(m)$	ค่าตอบแม่นยำ	ค่าตอบจากวิธี Cell-centered (รูปที่ 3.2 (ข))	ค่าตอบจากวิธี Vertex-centered (รูปที่ 3.2 (ค))
0.125	93.3333	93.3333	-
0.25	86.6667	-	86.6667
0.375	80.0000	80.0000	-
0.5	73.3333	-	73.3333
0.625	60.0000	60.0000	-
0.75	46.6667	-	46.6667
0.875	33.3333	33.3333	-

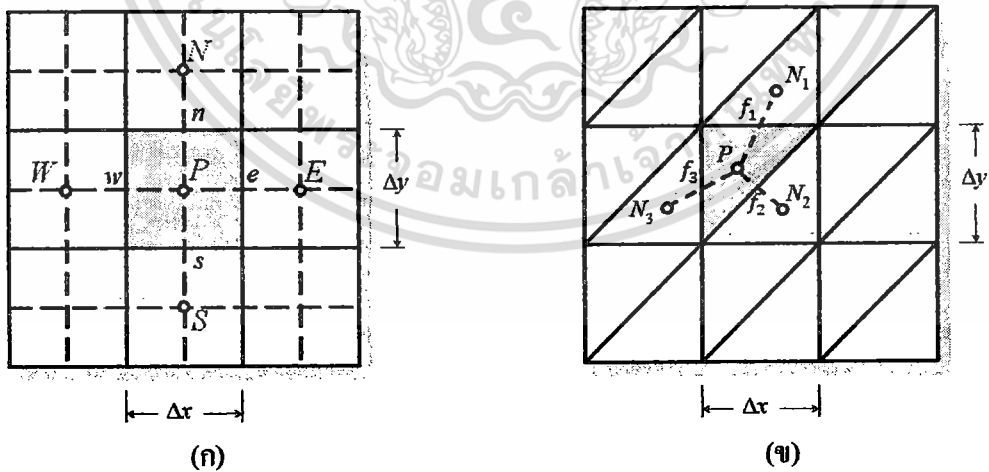
ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบระหว่างอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) ที่ได้จากค่าตอบแม่นยำและค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธี Cell-centered และ Vertex-centered เมื่อจุดต่อภายในวัสดุทั้งสองชนิดมีระยะห่างไม่เท่ากัน

$x(m)$	ค่าตอบแม่นยำ	ค่าตอบจากวิธี Cell-centered (รูปที่ 3.2 (ง))	ค่าตอบจากวิธี Vertex-centered (รูปที่ 3.2 (จ))
0.125	93.3333	93.4694	-
0.25	86.6667	-	86.6667
0.375	80.0000	80.4082	-
0.5	73.3333	-	73.3333
0.625	60.0000	-	60.0000
0.6875	53.3333	52.6531	-
0.75	46.6667	-	46.6667
0.8125	40.0000	39.5918	-
0.875	33.3333	-	33.3333

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

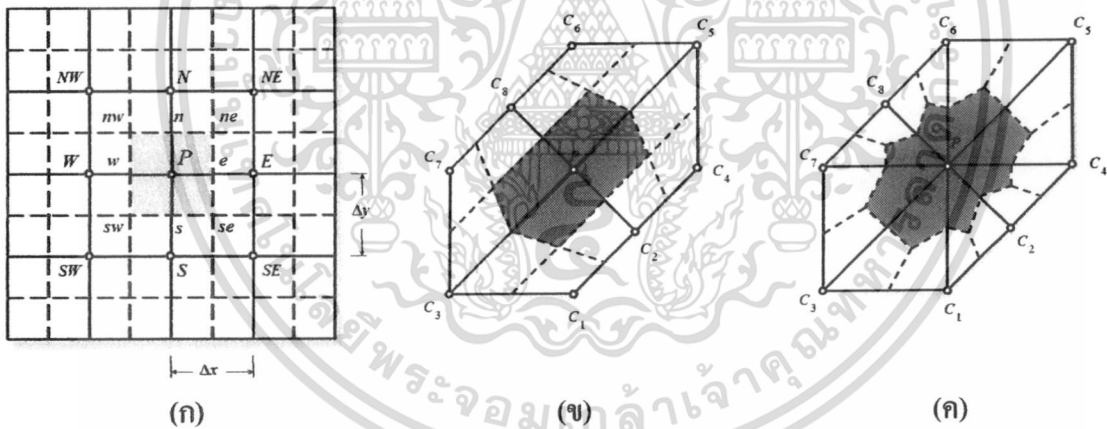
3.2 การนำความร้อนในสองมิติ

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 3.1 เกี่ยวกับชนิดของระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาการนำความร้อนในหนึ่งมิติว่ามีอยู่ 2 ชนิดได้แก่ ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบ Cell-centered และ Vertex-centered การคำนวณด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบกึ่งกลางเซลล์ (Cell-centered) สำหรับปัญหาสองมิติ มีตำแหน่งของจุดคำนวณอยู่ที่กึ่งกลางของเซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 3.3 หากพิจารณาการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกมาเป็นเซลล์เล็ก ๆ จำนวนมาก ด้วยกริดจากแบบมีระเบียบ (structured orthogonal grid) ดังรูปที่ 3.3(ก) เซลล์และปริมาตรควบคุมมีรูปร่างเดียวกันคือ สี่เหลี่ยมมุมฉาก ปริมาตรควบคุมในรูปนี้มีความกว้างเท่ากับ Δx หน่วย และมีความยาวเท่ากับ Δy หน่วย เส้นประผ่านกึ่งกลางของปริมาตรควบคุมต่างๆ ในทิศทาง x และ y จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของเซลล์ และปริมาตรควบคุม อาณาเขตของปริมาตรควบคุมที่กำลังพิจารณาคือบริเวณที่มีสี่เหลี่ยม และมี 4 จุดที่ล้อมรอบจุด P ในทิศเหนือ ใต้ ตะวันออกและตะวันตกได้แก่จุด N, S, E และ W ตามลำดับ ด้านที่เชื่อมต่อระหว่างจุด P และจุดทั้ง 4 เข้าด้วยกัน ได้แก่ n, s, e และ w ตามลำดับ ในขณะที่ การแบ่งรูปร่างของปัญหาด้วยกริดสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบก็สามารถทำได้เช่นกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.3(ข) จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของเซลล์ เซลล์หรือปริมาตรควบคุมรูปร่างสามเหลี่ยมภายในโดเมนมีจุด 3 จุดล้อมรอบจุด P ได้แก่ N_1, N_2 และ N_3 ด้านที่กั้นระหว่างจุด P และจุดทั้งสามได้แก่ f_1, f_2 และ f_3 ตามลำดับ เส้นประคือเส้นที่ผ่านจุดกึ่งกลางของเซลล์ที่กำลังพิจารณา หรือจุด P และจุดกึ่งกลางของเซลล์ทั้งสามที่อยู่ล้อมรอบ



รูปที่ 3.3 การคำนวณแบบ cell-centered โดยใช้ปริมาตรควบคุมที่มีรูปร่าง (ก) สี่เหลี่ยมมุมฉาก (ข) สามเหลี่ยม

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบจุดยอดของเซลล์ (Vertex-centered) มีตำแหน่งของจุดคำนวณอยู่ที่จุดยอดของเซลล์ ปริมาตรควบคุมถูกสร้างขึ้นล้อมรอบจุดยอดของเซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 3.4(ก) โดเมนของปัญหาถูกแบ่งออกมาเป็นเซลล์เล็กๆจำนวน 16 เซลล์ แต่ละเซลล์มีความกว้างเท่ากับ Δx หน่วย และยาวเท่ากับ Δy หน่วย เส้นประผ่านกึ่งกลางของปริมาตรควบคุมต่างๆในทิศทาง x และ y ตำแหน่งของจุด P หรือจุดกึ่งกลางของปริมาตรควบคุมอยู่ที่จุดยอดของเซลล์ อาณาเขตของปริมาตรควบคุมในรูปนี้คือ บริเวณสี่เหลี่ยมที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นประซึ่งแตกต่างจากการคำนวณแบบกึ่งกลางเซลล์ ซึ่งอาณาเขตของปริมาตรควบคุมถูกปิดล้อมด้วยเส้นเต็ม จำนวนจุดและจำนวนด้านที่อยู่ล้อมรอบปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับ 8 และ 8 ซึ่งเท่ากับสองเท่าของจำนวนจุดและจำนวนด้านที่ใช้ในการคำนวณแบบกึ่งกลางเซลล์ ข้อสังเกตสำหรับการคำนวณแบบจุดยอดเซลล์นี้คือ จุด P และจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่ล้อมรอบจะไม่มีด้าน มากึ่งกลางระหว่างกัน ดังเช่นที่ปรากฏให้เห็นอย่างชัดเจนในการคำนวณแบบกึ่งกลางเซลล์ การแบ่งรูปร่างด้วยกริดที่ไร้ระเบียบสามารถทำได้ด้วยเซลล์สี่เหลี่ยมทั่วไปหรือเซลล์สามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3.4 (ข) และ 3.4 (ค) ตามลำดับ



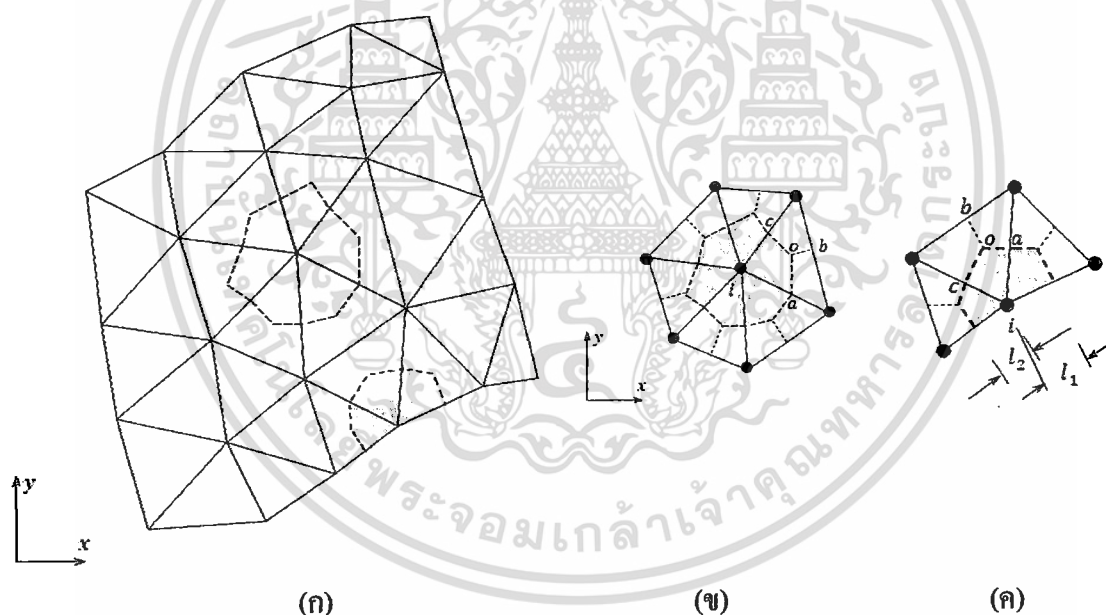
รูปที่ 3.4 การคำนวณแบบ Vertex-centered โดยใช้ปริมาตรควบคุมซึ่งสร้างจาก

(ก) เซลล์สี่เหลี่ยมมุมฉาก (ข) เซลล์สี่เหลี่ยมทั่วไป (ค) เซลล์สามเหลี่ยม

รูปที่ 3.4 (ข) แสดงการแบ่งรูปร่างปัญหาออกเป็นเซลล์สี่เหลี่ยมจำนวน 4 เซลล์ที่ไร้ระเบียบ ปริมาตรควบคุมถูกสร้างขึ้นจาก การลากเส้นประจากกึ่งกลางด้านของเซลล์มาเชื่อมต่อกับกึ่งกลางเซลล์สี่เหลี่ยมต่างๆที่อยู่ล้อมรอบจุด P เซลล์รูปร่างสามเหลี่ยมที่อยู่ล้อมรอบจุด P ในรูปที่ 3.4 (ค) สามารถสร้างปริมาตรควบคุมได้ด้วยหลักการเช่นเดียวกันกับเซลล์รูปร่างสี่เหลี่ยม ถ้าจำนวนเซลล์ที่

ล้อมรอบจุด P มีจำนวนมาก จำนวนจุดและด้านที่เกี่ยวข้องกับจุด P จะมีค่ามากขึ้น แต่ถ้าเป็นการคำนวณแบบกึ่งกลางเซลล์ จำนวนจุดและด้านที่เกี่ยวข้องกับจุด P มีค่าที่แน่นอน กล่าวคือ ถ้าใช้เซลล์สามเหลี่ยมจะมี 3 จุดและ 3 ด้านเท่านั้นที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณของจุด P

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบจุดยอดของเซลล์ ตำแหน่งที่ใช้ในการคำนวณตำแหน่งกึ่งกลางของพื้นผิว ซึ่งอยู่ภายในเซลล์สามเหลี่ยมใดๆที่ล้อมรอบจุดต่อที่กำลังพิจารณา ปริมาตรควบคุมทั้งหมดถูกแสดงไว้ในรูปที่ 3.5(ก) ปริมาตรควบคุมส่วนหนึ่งอยู่ในโดเมนของปัญหา ดังแสดงในรูปที่ 3.5(ข) ปริมาตรควบคุมนี้จะถูกเรียกว่าปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อภายในโดเมน ในขณะที่ปริมาตรควบคุมส่วนนี้อาจถูกกำหนดให้รับหรือปลดปล่อยฟลักซ์ความร้อน ถ้าเขตความร้อนด้วยการพา หรืออาจถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่ ปริมาตรควบคุมนี้จะถูกเรียกว่า ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อที่ขอบเขต รูปที่ 3.5(ค) แสดงปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อที่ขอบเขต



รูปที่ 3.5 ปริมาตรควบคุมสำหรับวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบจุดยอดของเซลล์

- (ก) ตัวอย่างของปัญหาและปริมาตรควบคุม (ข) ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อภายใน โดเมน
(ค) ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อที่ขอบเขตของปัญหา

สมการสำหรับปัญหาการแพร่กระจายในสองมิติได้มาจาก การตั้งพจน์การพาของสมการที่ (3.2) ดังนี้

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dV + \int \bar{Q} dV = 0 \quad (3.10)$$

ด้วยทฤษฎีบทของเกาส์ ทำให้พจน์การแพร่กระจายในวงเล็บปีกกาด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.10) เป็น

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dV = \int \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \quad (3.11)$$

โดย n_x และ n_y แทนทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิวของปริมาตรควบคุมตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

หลังจากแทนสมการ (3.11) ลงในสมการ (3.10) จะได้

$$\int \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA + \int \bar{Q} dV = 0 \quad (3.12)$$

ถ้าสมมติว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์แหล่งกำเนิดมีค่าคงที่ หรือ $\bar{Q} = \bar{S}$ ทำให้

$$\int \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA + \bar{S}_i \Delta V_i = 0 \quad (3.13)$$

โดย ΔV_i แทนขนาดของปริมาตรควบคุมรอบจุดต่อ i

ดังนั้นรูปสมการทั่วไปของปัญหาการแพร่กระจายคือ

$$\sum_{k=1}^{ns} \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_k \Delta A_k + \bar{S}_i \Delta V_i = 0 \quad (3.14)$$

โดย ΔA แทนขนาดพื้นที่ผิวแต่ละด้านของปริมาตรควบคุม

ns แทนจำนวนพื้นที่ผิวที่ประกอบขึ้นมาเป็นปริมาตรควบคุม

การประมาณค่าของตัวแปรอุณหภูมิ T ที่ตำแหน่งใดๆ ภายในเซลล์สามเหลี่ยมหนึ่งซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 3.6 สามารถกระทำได้โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape function) [16]

$$T(x, y) = N_1(x, y)T_1 + N_2(x, y)T_2 + N_3(x, y)T_3 \quad (3.15)$$

โดย $N_i(x, y); i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันรูปร่างสำหรับเซลล์สามเหลี่ยม สามารถคำนวณได้เมื่อระบุพิกัด (x, y) ภายในเซลล์ แล้วคำนวณด้วยสมการด้านล่างนี้

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2\Omega} (a_1 + b_1x + c_1y) \quad (3.16a)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2\Omega} (a_2 + b_2x + c_2y) \quad (3.16b)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2\Omega} (a_3 + b_3x + c_3y) \quad (3.16c)$$

โดย Ω แทนขนาดเซลล์สามเหลี่ยม สามารถคำนวณได้หากทราบค่าพิกัดของจุดต่อทั้งสาม ข้อสังเกตหนึ่งสำหรับรูปที่ 3.6 คือหมายเลขของจุดต่อ เรียงต่อกันแบบทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของเซลล์สามเหลี่ยมนี้คือ

$$\Omega = \frac{1}{2} [x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (3.17)$$

ค่าคงที่ต่างๆ ในสมการที่ (3.16a) ถึง (3.16c) สามารถคำนวณด้วยสูตรต่อไปนี้

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad (3.18a)$$

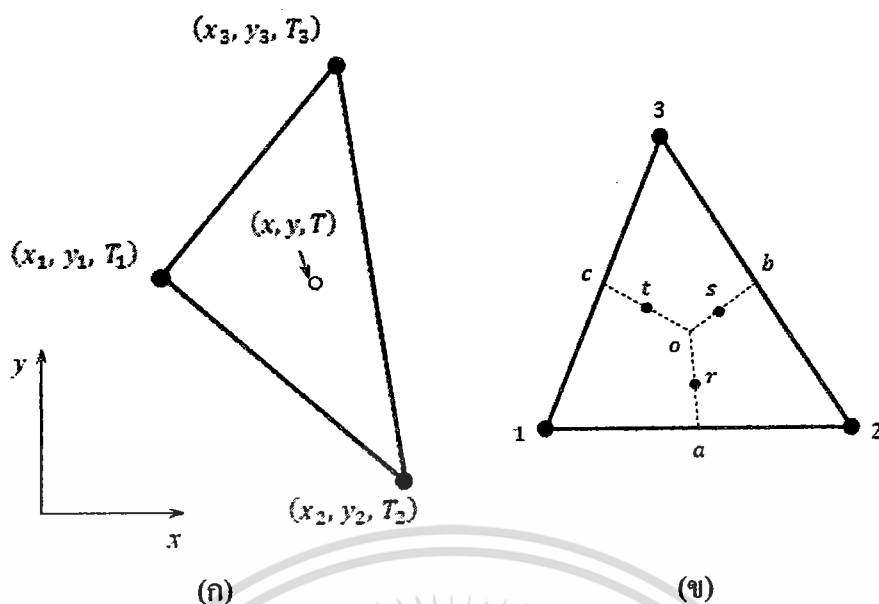
$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad (3.18b)$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad (3.18c)$$

ความลาดชันของอุณหภูมิ T ในทิศทาง x และ y ณ ตำแหน่งใดๆ ภายในเซลล์สามเหลี่ยม หาได้จาก

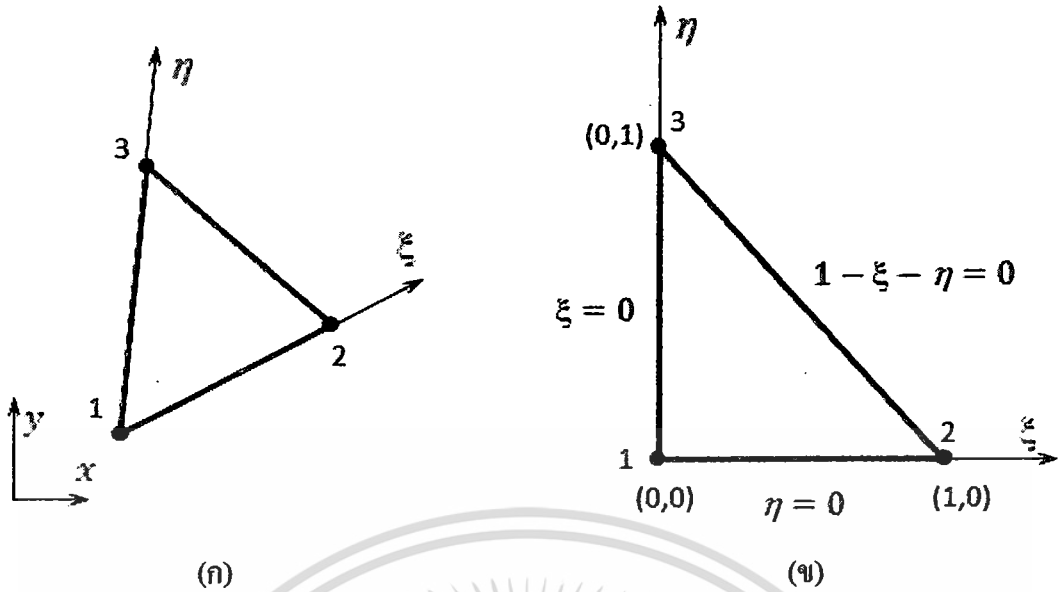
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} T_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} T_3 = \frac{1}{2\Omega} (b_1T_1 + b_2T_2 + b_3T_3) \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} T_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} T_3 = \frac{1}{2\Omega} (c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3) \quad (3.19b)$$



รูปที่ 3.6 เซลล์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ (ก) การประมาณค่าภายในเซลล์
(ข) ตำแหน่งของจุดที่ใช้ในการอินทิเกรตภายในเซลล์

แม้ว่าการประมาณค่าของอุณหภูมิและความลาดชันของอุณหภูมิภายในเซลล์ ด้วยฟังก์ชันรูปร่างที่นิยามด้วยสมการที่ (3.16) ถึง (3.18) จะพร้อมสำหรับการประดิษฐ์เป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ การหาค่าของอุณหภูมิและความลาดชันของอุณหภูมิที่ปรากฏอยู่ในงานวิจัยนี้ มิได้ใช้สมการดังกล่าว แต่ได้ประยุกต์หลักการของ isoparametric element [17, 18] เพื่อประโยชน์ในการใช้งานกับเซลล์ที่มีรูปร่างและอันดับที่หลากหลายมากขึ้นในอนาคต เช่น เซลล์สามเหลี่ยมหกจุดต่อ เป็นต้น ด้วยหลักการของ isoparametric element ค่าของอุณหภูมิที่จุดใดๆ ในเซลล์สามเหลี่ยมสามารถคำนวณได้จากการ mapping ระหว่างเซลล์สามเหลี่ยมทั่วไปซึ่งอ้างอิงกับพิกัด $x - y$ กับเซลล์ต้นฉบับ (Master element) ซึ่งอ้างอิงกับพิกัด $\xi - \eta$ ดังรูปที่ 3.7 ค่าฟังก์ชันรูปร่างบนพิกัด $\xi - \eta$ และค่าความลาดชันของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับพิกัด ξ และ η แสดงไว้ในตารางที่ 3.2



รูปที่ 3.7 (ก) เซลล์สามเหลี่ยมทั่วไป (ข) เซลล์ต้นฉบับ

ค่าของฟังก์ชันรูปร่างสามารถทราบได้ทันทีถ้ากำหนดค่าของพิกัด ξ และ η ในขณะที่ถ้าความลาดชันของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับแกน x และ y สามารถคำนวณได้ด้วยกฎลูกโซ่

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.21)$$

ถ้าเขียนในรูปแบบเมตริกซ์จะได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

เมื่อ $[J]$ แทน Jacobian matrix ซึ่งองค์ประกอบต่างๆภายในเมตริกซ์คำนวณจากพิกัด $x - y$ และความลาดชันต่างๆในตารางที่ 3.2 ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (3.23)$$

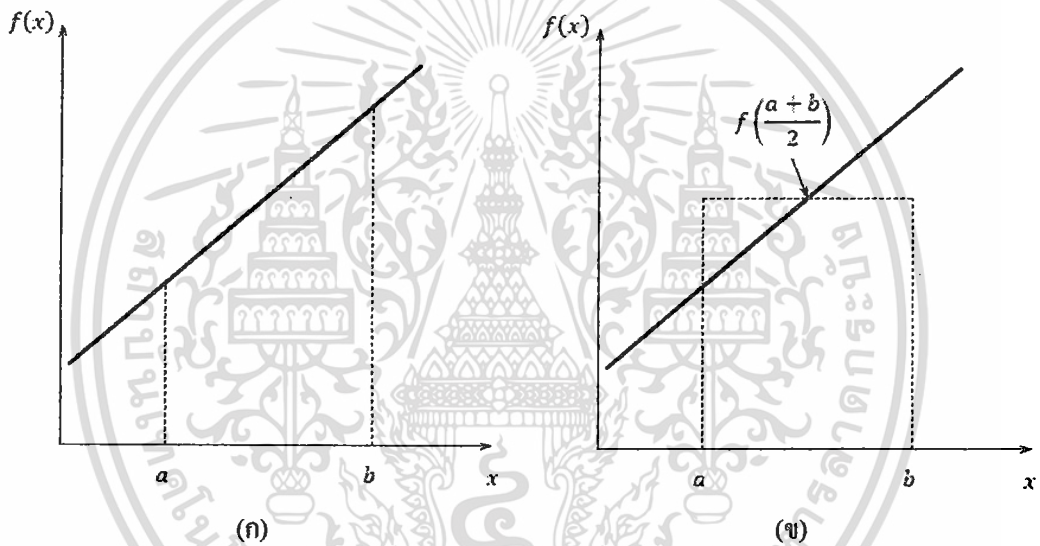
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ และ $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ สามารถหาได้จากหลักการผกผันของเมตริกซ์ (inversion)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [U]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

ตารางที่ 3.2 ฟังก์ชันรูปร่างและค่าความลาดชันของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับพิกัด ξ และ η

i	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	ξ	1	0
3	η	0	1



รูปที่ 3.8 การอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x)$ บนระยะทาง x (ก) ค่าที่แท้จริงของอินทิกรัล

(ข) การประมาณค่าของอินทิกรัลด้วย Midpoint rule

การหาค่าของพจน์อินทิกรัลด้วยวิธีเชิงตัวเลข สำหรับทุกพื้นผิวของปริมาตรควบคุมกระทำโดยวิธี Midpoint rule ตัวอย่างต่อไปนี่คือการหาปริมาณของอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงเส้นบนระยะทาง x ดังรูปที่ 3.8 ค่าอินทิกรัลสามารถประมาณค่าได้ด้วยสมการอย่างง่ายดังนี้

$$\int_a^b f(x) dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad (3.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้น จะเห็นได้ว่า ไม่มีความผิดพลาดในการประมาณค่าอินทิกรัลจากวิธี Midpoint rule เลย วิธี Midpoint rule มีความแม่นยำลดลงเมื่อฟังก์ชัน $f(x)$ นั้นไม่ใช่ฟังก์ชันเชิงเส้น

หากพิจารณาการหาอินทิกรัลบนเส้นตรงซึ่งเขียนด้วยวิธี Midpoint rule จุดที่ใช้ในการสร้างพื้นผิวของปริมาตรควบคุมย่อยได้แก่จุด a ซึ่งเป็นกึ่งกลางด้านที่เชื่อมต่อกันระหว่างจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 จุด b ซึ่งเป็นกึ่งกลางด้านที่เชื่อมต่อกันระหว่างจุดต่อหมายเลข 2 และ 3 จุด c ซึ่งเป็นกึ่งกลางด้านที่เชื่อมต่อกันระหว่างจุดต่อภายในหมายเลข 3 และ 1 และจุด o ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางเซลล์สามเหลี่ยม สามารถหาค่าได้จากสูตรอย่างง่ายทางพีชคณิตดังต่อไปนี้

$$(x_a, y_a) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (3.26a)$$

$$(x_b, y_b) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \quad (3.26b)$$

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2} \right) \quad (3.26c)$$

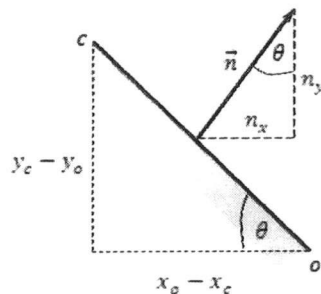
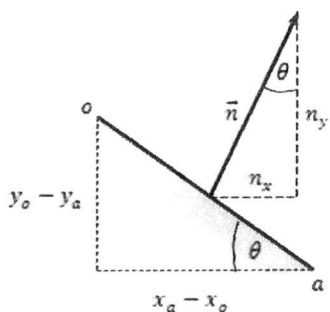
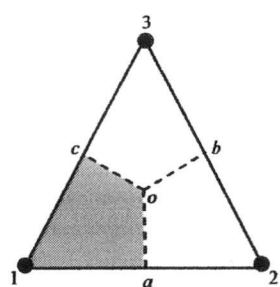
$$(x_o, y_o) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (3.26d)$$

สำหรับตำแหน่งของจุดที่ใช้สำหรับการหาค่าของอินทิกรัลได้แก่จุด r, s และ t หาได้จาก

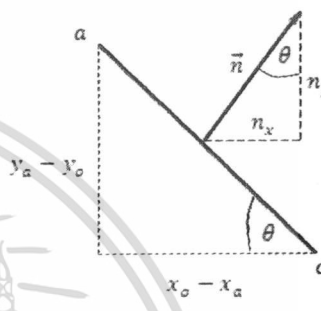
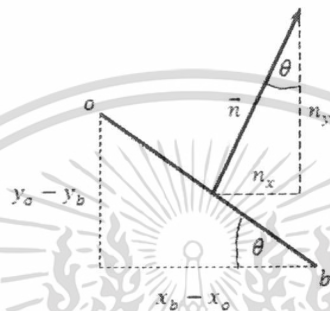
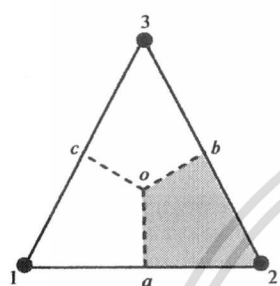
$$(x_r, y_r) = \left(\frac{x_o + x_a}{2}, \frac{y_o + y_a}{2} \right) \quad (3.27a)$$

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{x_o + x_b}{2}, \frac{y_o + y_b}{2} \right) \quad (3.27b)$$

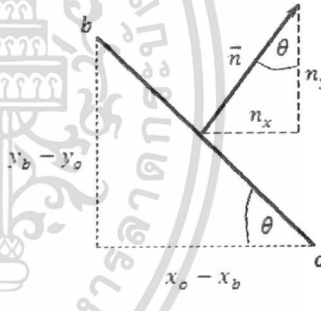
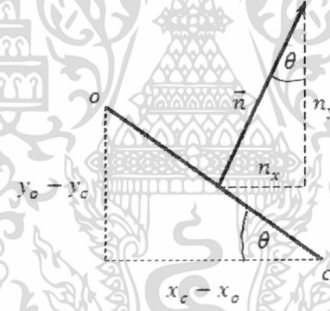
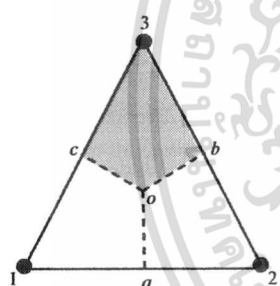
$$(x_t, y_t) = \left(\frac{x_o + x_c}{2}, \frac{y_o + y_c}{2} \right) \quad (3.27c)$$



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 3.9 ปริมาตรควบคุมย่อยและพื้นที่ผิวที่เกี่ยวข้องกับ

(ก) จุดต่อหมายเลข 1 (ข) จุดต่อหมายเลข 2 (ค) จุดต่อหมายเลข 3

จากรูปที่ 3.9 ค่าโดยประมาณของอินทิกรัลบนพื้นผิวต่างๆ สำหรับปริมาตรควบคุมย่อยรอบจุดต่อภายในหมายเลข 1 ของเซลล์สามเหลี่ยมคือ

$$\int_a^o f(A)dA \approx f(x_r, y_r)\Delta A_{ao} \tag{3.28a}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_o^c f(A) dA \approx f(x_t, y_t) \Delta A_{oc} \quad (3.28b)$$

สำหรับปริมาตรควบคุมย่อยรอบจุดต่อภายในหมายเลข 2 ของเซลล์สามเหลี่ยมคือ

$$\int_b^o f(A) dA \approx f(x_s, y_s) \Delta A_{bo} \quad (3.29a)$$

$$\int_o^a f(A) dA \approx f(x_r, y_r) \Delta A_{oa} \quad (3.29b)$$

สำหรับปริมาตรควบคุมย่อยรอบจุดต่อภายในหมายเลข 3 ของเซลล์สามเหลี่ยมคือ

$$\int_c^o f(A) dA \approx f(x_t, y_t) \Delta A_{co} \quad (3.30a)$$

$$\int_o^b f(A) dA \approx f(x_s, y_s) \Delta A_{ob} \quad (3.30b)$$

โดย ΔA_{ao} และ ΔA_{oa} แทนขนาดของพื้นที่ ao , $\Delta A_{ao} = \Delta A_{oa} = \sqrt{(x_o - x_a)^2 + (y_o - y_a)^2}$

ΔA_{ob} และ ΔA_{ob} แทนขนาดของพื้นที่ bo , $\Delta A_{bo} = \Delta A_{ob} = \sqrt{(x_o - x_b)^2 + (y_o - y_b)^2}$

ΔA_{co} และ ΔA_{oc} แทนขนาดของพื้นที่ co , $\Delta A_{co} = \Delta A_{oc} = \sqrt{(x_o - x_c)^2 + (y_o - y_c)^2}$

นอกจากนั้น รูปที่ 3.9 ได้แสดงถึงพื้นผิวที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมย่อยรอบจุดต่อหมายเลข 1, 2 และ 3 รวมทั้งแสดงเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของพื้นผิวบนปริมาตรควบคุมย่อยเหล่านั้น ข้อสังเกตหนึ่งสำหรับรูปที่ 3.6 คือ การกล่าวอ้างถึงพื้นผิวสำหรับแต่ละปริมาตรควบคุมย่อย จะใช้ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเสมอ

หากพิจารณาเฉพาะพื้นผิวบนปริมาตรควบคุมย่อยสำหรับจุดต่อหมายเลข 1 ของเซลล์ [17] จะได้ว่า

$$\int_a^o \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ao} (y_o - y_a) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ao} (x_a - x_o) \quad (3.31a)$$

$$\int_o^c \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{oc} (y_c - y_o) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{oc} (x_o - x_c) \quad (3.31b)$$

เมื่อ n_x และ n_y คำนวณได้จากตรีโกณมิติ

สำหรับพื้นที่ ao :

$$n_x = \frac{y_o - y_a}{\Delta A_{ao}}, \quad n_y = \frac{x_a - x_o}{\Delta A_{ao}} \quad (3.32)$$

สำหรับพื้นที่ oc :

$$n_x = \frac{y_c - y_o}{\Delta A_{oc}}, \quad n_y = \frac{x_o - x_c}{\Delta A_{oc}} \quad (3.33)$$

สำหรับปริมาตรควบคุมย่อยสำหรับจุดต่อหมายเลข 2 ของเซลล์

$$\int_b^o \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{bo} (y_o - y_b) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{bo} (x_b - x_o) \quad (3.34a)$$

$$\int_o^a \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{oa} (y_a - y_o) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{oa} (x_o - x_a) \quad (3.34b)$$

เมื่อ n_x และ n_y คำนวณได้จากตรีโกณมิติ

สำหรับพื้นที่ bo :

$$n_x = \frac{y_o - y_b}{\Delta A_{bo}}, \quad n_y = \frac{x_b - x_o}{\Delta A_{bo}} \quad (3.35)$$

สำหรับพื้นที่ oa :

$$n_x = \frac{y_a - y_o}{\Delta A_{oa}}, \quad n_y = \frac{x_o - x_a}{\Delta A_{oa}} \quad (3.36)$$

สำหรับปริมาตรควบคุมย่อยสำหรับจุดต่อหมายเลข 3 ของเซลล์

$$\int_c^o \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{co} (y_o - y_c) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{co} (x_c - x_o) \quad (3.37a)$$

$$\int_o^b \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} dA \approx \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ob} (y_b - y_o) + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ob} (x_o - x_b) \quad (3.37b)$$

เมื่อ n_x และ n_y คำนวณได้จากตรีโกณมิติ

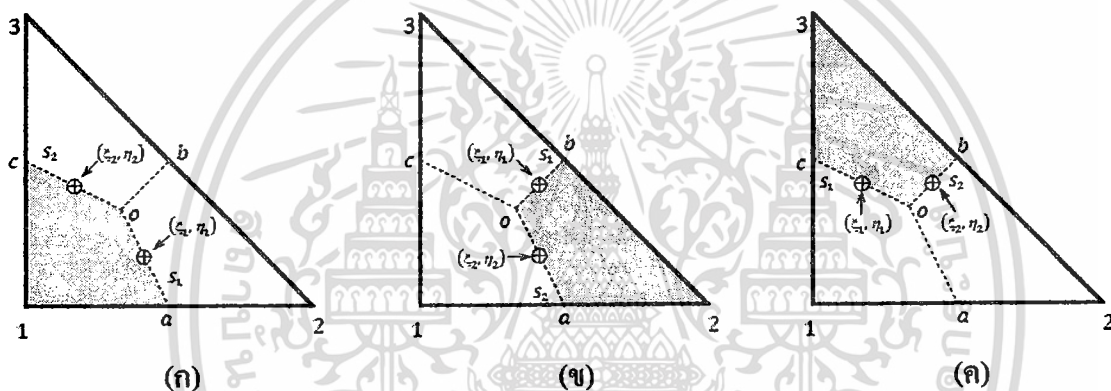
สำหรับพื้นที่ co :

$$n_x = \frac{y_o - y_c}{\Delta A_{co}}, \quad n_y = \frac{x_c - x_o}{\Delta A_{co}} \tag{3.38}$$

สำหรับพื้นที่ ob :

$$n_x = \frac{y_b - y_o}{\Delta A_{ob}}, \quad n_y = \frac{x_o - x_b}{\Delta A_{ob}} \tag{3.39}$$

การคำนวณค่าอินทิกรัลต่างๆเหล่านี้สามารถกระทำได้โดยอาศัยพิกัด $\xi - \eta$ จุดอินทิเกรตต่างๆของแต่ละพื้นที่ของปริมาตรควบคุมย่อยได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.10 และตารางที่ 3.3



รูปที่ 3.10 จุดอินทิเกรตบนพื้นที่ล้อมรอบ (ก) จุดต่อที่ 1 (ข) จุดต่อที่ 2 (ค) จุดต่อที่ 3 สำหรับเซลล์ต้นแบบ

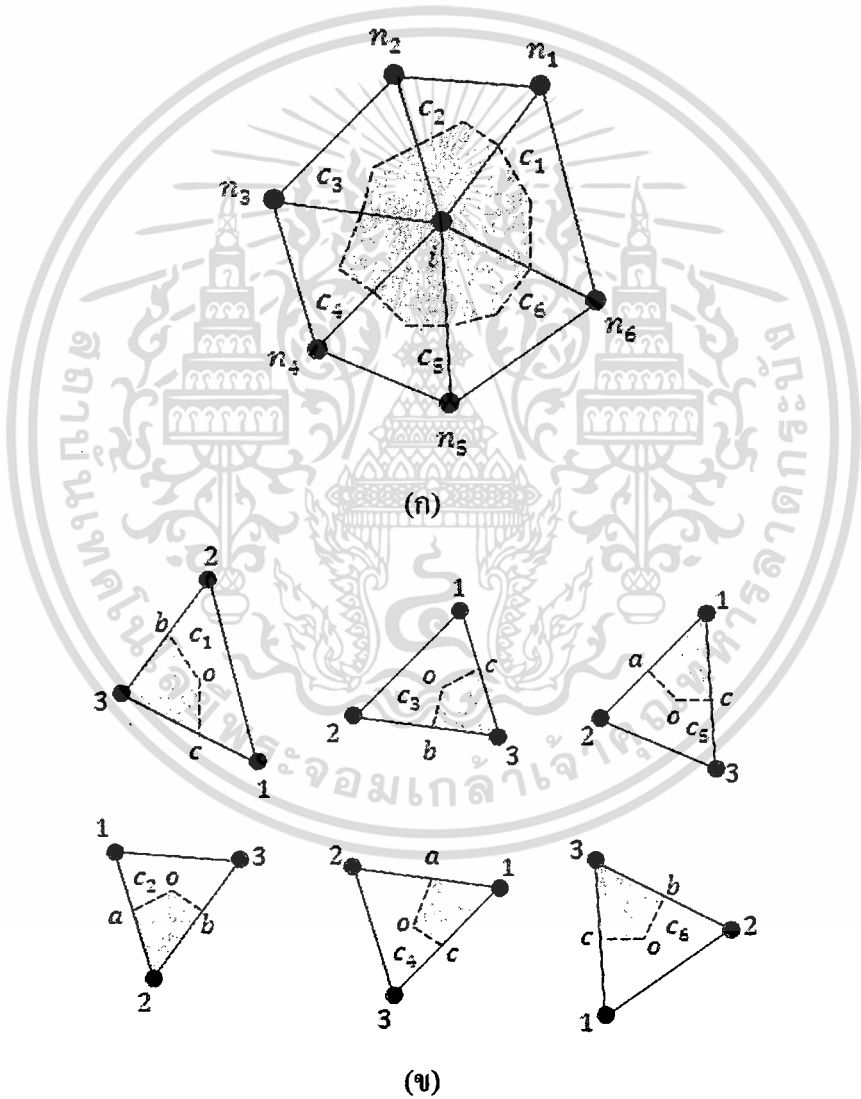
ตารางที่ 3.3 จุดอินทิเกรตบนพื้นที่ล้อมรอบจุดต่อต่างๆบนพิกัด $\xi - \eta$

Face\Node	1	2	3
S_1	(5/12, 1/6)	(5/12, 5/12)	(1/6, 5/12)
S_2	(1/6, 5/12)	(5/12, 1/6)	(5/12, 5/12)

สมมุติว่า ปริมาตรควบคุมหนึ่งเกิดจากการรวมกันของปริมาตรควบคุมย่อย จากเซลล์สามเหลี่ยมต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.11(ก) หากพิจารณาในรายละเอียดแต่ละปริมาตรควบคุมย่อยที่เกี่ยวข้องกับแต่ละเซลล์ในรูปที่ 3.11(ข) พบว่า ค่าของอินทิกรัลของพจน์การแพร่กระจายสำหรับ

ปริมาตรควบคุมรอบจุดต่อ i มีค่าเท่ากับผลรวมระหว่างอินทิกรัลบน 12 พื้นผิวจาก 6 เซลล์ ได้แก่ พื้นผิว co และ ob ของเซลล์ c_1 อินทิกรัลบนพื้นผิว bo และ oa ของเซลล์ c_2 อินทิกรัลบนพื้นผิว co และ ob ของเซลล์ c_3 อินทิกรัลบนพื้นผิว ao และ oc ของเซลล์ c_4 อินทิกรัลบนพื้นผิว ao และ oc ของเซลล์ c_5 อินทิกรัลบนพื้นผิว co และ ob ของเซลล์ c_6 รูปที่ 3.11 (ก) แสดงหมายเลขจุดต่อภายในเซลล์เริ่มจาก 1 ถึง 3 ดังนั้นในการอ้างอิงถึงหมายเลขจุดต่อของปัญหาจำเป็นต้องมีการสร้างฐานข้อมูลที่ใช้เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างหมายเลขเซลล์ของปัญหา หมายเลขจุดต่อของปัญหา และหมายเลขจุดต่อภายในเซลล์ วิธีการนี้ถูกใช้อย่างแพร่หลายในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในหัวข้อที่เกี่ยวกับ

Node-Element Connectivity



รูปที่ 3.11 (ก) ปริมาตรควบคุมรอบจุดต่อ i (ข) ปริมาตรควบคุมย่อยจาก 6 เซลล์ที่อยู่ล้อมรอบจุดต่อ i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พจน์แรกในด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.14) สามารถกระจายออกมาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{ns} \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_k \Delta A_k \\
 &= \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{co}^{c_1} \Delta A_{co}^{c_1} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{ob}^{c_1} \Delta A_{ob}^{c_1} \\
 &+ \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{bo}^{c_2} \Delta A_{bo}^{c_2} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{oa}^{c_2} \Delta A_{oa}^{c_2} \\
 &+ \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{co}^{c_3} \Delta A_{co}^{c_3} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{ob}^{c_3} \Delta A_{ob}^{c_3} \\
 &+ \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{ao}^{c_4} \Delta A_{ao}^{c_4} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{oc}^{c_4} \Delta A_{oc}^{c_4} \\
 &+ \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{ao}^{c_5} \Delta A_{ao}^{c_5} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{oc}^{c_5} \Delta A_{oc}^{c_5} \\
 &+ \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{co}^{c_6} \Delta A_{co}^{c_6} + \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\}_{ob}^{c_6} \Delta A_{ob}^{c_6} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

จากรูปที่ 3.11 (ข) พบว่าจุดต่อ i ที่ถูกอ้างอิงว่าเป็นหมายเลขจุดต่อของปัญหานั้นตรงกับหมายเลขจุดต่อภายในเซลล์ชื่อ 3, 2, 3, 1, 1 และ 3 สำหรับเซลล์ชื่อ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 และ c_6 ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.19a) สำหรับความลาดชันของตัวแปร T ในทิศทาง x สมการที่ (3.19b) สำหรับความลาดชันของตัวแปร T ในทิศทาง y สมการต่างๆสำหรับ n_x และ n_y ของพื้นผิวที่เกี่ยวข้องทำให้สามารถเขียนค่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร T ที่จุดต่อ i ได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 a_{ii}^T = k & \left(\frac{b_3(y_o - y_c) + c_3(x_c - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_1} + \left(\frac{b_3(y_b - y_o) + c_3(x_o - x_b)}{2\Omega} \right)_{c_1} \\
 & \left(\frac{b_2(y_o - y_b) + c_2(x_b - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_2} + \left(\frac{b_2(y_a - y_o) + c_2(x_o - x_a)}{2\Omega} \right)_{c_2} \\
 & \left(\frac{b_3(y_o - y_c) + c_3(x_c - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_3} + \left(\frac{b_3(y_b - y_o) + c_3(x_o - x_b)}{2\Omega} \right)_{c_3} \\
 & \left(\frac{b_1(y_o - y_a) + c_3(x_a - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_4} + \left(\frac{b_1(y_c - y_o) + c_1(x_o - x_c)}{2\Omega} \right)_{c_4}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{b_1(y_o - y_a) + c_1(x_a - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_5} + \left(\frac{b_1(y_c - y_o) + c_1(x_o - x_c)}{2\Omega} \right)_{c_5} \\ & \left(\frac{b_3(y_o - y_c) + c_3(x_c - x_o)}{2\Omega} \right)_{c_6} + \left(\frac{b_3(y_b - y_o) + c_3(x_o - x_b)}{2\Omega} \right)_{c_6} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

พจน์อินทิกรัลของแหล่งกำเนิดสำหรับปริมาตรควบคุมรอบจุดต่อ i มีค่าเท่ากับ

$$\bar{S}\Delta V_i = \frac{\bar{S}}{3}(\Delta V_{c_1} + \Delta V_{c_2} + \Delta V_{c_3} + \Delta V_{c_4} + \Delta V_{c_5} + \Delta V_{c_6}) \quad (3.42)$$

เนื่องจากขนาดปริมาตรของเซลล์สามเหลี่ยม สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาในสองมิติ มีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างขนาดพื้นที่หน้าตัดของแต่ละเซลล์และความหนา 1 หน่วย ในกรณีการวิเคราะห์ปัญหาสองมิติ ดังนั้นปริมาตรของเซลล์รอบจุดต่อ i คำนวณได้โดยอาศัยสมการที่ (3.17) ทำให้สามารถเขียนสมการที่ (3.42) ได้ดังนี้

$$\bar{S}\Delta V_i = \frac{\bar{S}}{3}(\Omega_{c_1} + \Omega_{c_2} + \Omega_{c_3} + \Omega_{c_4} + \Omega_{c_5} + \Omega_{c_6}) \quad (3.43)$$

หลังจากทำการรวบรวมค่าของพจน์อินทิกรัลต่างๆจากสมการที่ (3.40) และ (3.43) จัดรูปสมการพีชคณิตสำหรับจุดต่อ i ใหม่จะทำให้สามารถเขียนสมการพีชคณิตสำหรับจุดต่อ i ในโดเมนได้ดังนี้

$$a_{ii}^T T_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 a_{ij}^T T_j + b_i^T \quad (3.44)$$

โดย a_{ij}^T แทนค่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร T_j สำหรับจุดต่อหมายเลข j ซึ่งอยู่ล้อมรอบจุดต่อหมายเลข i
 b_i^T แทนพจน์ที่ไม่ได้เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร T_i ซึ่งในที่นี้คือ $-\bar{S}_i \Delta V_i$

การหาคำตอบเชิงตัวเลขสามารถเกิดขึ้นได้ถ้ามีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และใช้เทคนิคการหาคำตอบของเมตริกซ์ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อนแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภทได้แก่

1. อุณหภูมิคงที่

$$T = \bar{T} \quad (3.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ฟลักซ์ความร้อนคงที่

$$-\left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right) = \bar{q} \quad (3.46)$$

3. การพาความร้อน

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y\right) = h(T - T_\infty) \quad (3.47)$$

โดย T แทนค่าอุณหภูมิที่กำหนดให้แกขอบเขตของปัญหา

\bar{q} แทนค่าฟลักซ์ความร้อนที่กำหนดไว้ที่ขอบเขตของปัญหา, $\bar{q} = \bar{q}_x n_x + \bar{q}_y n_y$

h แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน

T_∞ แทนอุณหภูมิของของไหลที่อยู่แวดล้อมโดเมนของปัญหา

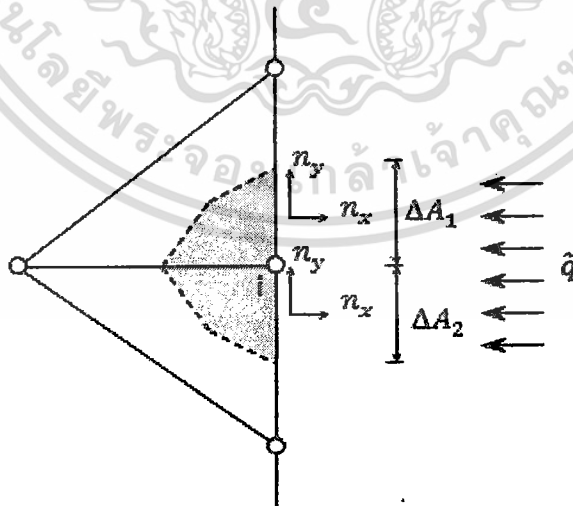
การกำหนดเงื่อนไขที่หนึ่งกระทำได้ด้วยการกำหนดค่า a_{ii} ที่จุดต่อนั้นให้เท่ากับ 1 และค่าที่อยู่

ด้านขวาของสมการที่ (3.44) มีค่าเท่ากับ T รูปที่ 3.12 แสดงปริมาตรควบคุมที่มีขอบเขตประเภท ฟลักซ์ความร้อนคงที่ ถ้าฟลักซ์ความร้อนมีทิศทางพุ่งเข้าสู่โดเมนให้มีค่าเป็นบวก ความร้อนทั้งหมดที่

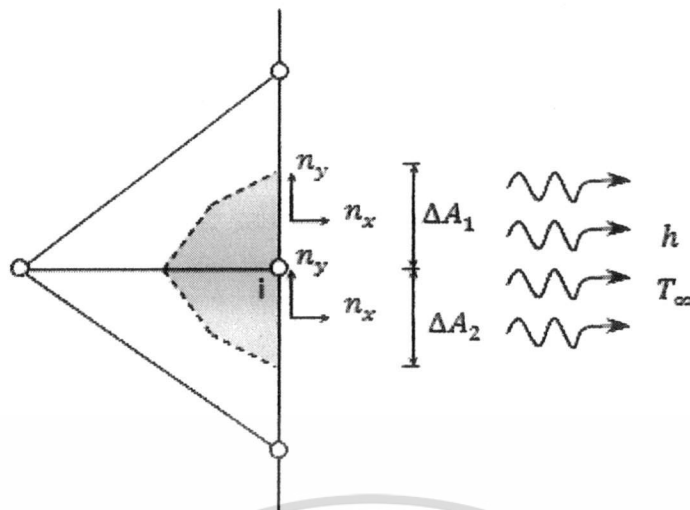
ต้องเพิ่มเข้าไปที่ด้านขวาของสมการที่ (3.44) คือ $\{(\bar{q}_x n_x + \bar{q}_y n_y) \Delta A\}_1 + \{(\bar{q}_x n_x + \bar{q}_y n_y) \Delta A\}_2$ รูปที่ 3.13 แสดงปริมาตรควบคุมที่มีขอบเขตประเภทการพาความร้อน ถ้าการพาความร้อนนั้นเป็นการถ่ายเท

ความร้อนออกจากโดเมนให้คิดว่ามีค่าเป็นบวก ความร้อนที่เพิ่มเข้าไปที่ด้านขวามือของสมการที่ (3.44) คือ $\{(hT_\infty n_x + hT_\infty n_y) \Delta A\}_1 + \{(hT_\infty n_x + hT_\infty n_y) \Delta A\}_2$ และสัมประสิทธิ์ a_{ii} หน้าตัวแปร T ของ

จุดต่อ i ต้องบวกเข้ากับ $\{(hn_x + hn_y) \Delta A\}_1 + \{(hn_x + hn_y) \Delta A\}_2$



รูปที่ 3.12 เงื่อนไขขอบเขตประเภทฟลักซ์ความร้อนคงที่



รูปที่ 3.13 เส้นใจขอบเขตประเภทการพาความร้อน

วิธีการแก้ระบบสมการพีชคณิตสำหรับตัวแปรไม่ทราบค่าของปัญหาซึ่งก็คือ อุณหภูมิ สามารถกระทำได้ 2 วิธีได้แก่

1. วิธีการ โดยตรง (Direct method)
2. วิธีการทำซ้ำ (Iterative method)

วิธีการโดยตรงหนึ่งที่น่าิยมใช้ในการแก้ระบบสมการขนาดเล็ก [17] คือ วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination method) มีหลักการหาคำตอบอยู่ 2 ขั้นตอน [18] ดังนี้ ขั้นตอนที่หนึ่ง ทำการจัดรูปสมการเพื่อลดตัวแปรไม่ทราบค่าออกทีละหนึ่งตัวแปร จนกระทั่งเหลือสมการหนึ่งที่มีหนึ่งตัวแปร ขั้นตอนนี้เรียกว่า Forward Elimination ขั้นตอนที่สองคือการแก้สมการที่มีตัวแปรเดียวแล้วแทนกลับไปสู่สมการอื่นเพื่อหาตัวแปรอื่นที่เหลืออยู่ ขั้นตอนนี้เรียกว่า Back substitution รูปที่ 3.14 แสดงระบบสมการและเมตริกซ์ของระบบ รูปที่ 3.15 แสดงขั้นตอนของวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3
 \end{pmatrix}$$

รูปที่ 3.14 ระบบสมการและเมตริกซ์ของระบบ

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right] \\
 \downarrow \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right] \quad \text{Forward elimination} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{l} x_3 = b''_3/a''_3 \\ x_2 = (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 = (b_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11} \end{array} \quad \text{Back substitution}
 \end{array}$$

รูปที่ 3.15 การกำจัดแบบเกาส์สำหรับเมทริกซ์ขนาด 3x3

แม้ว่าวิธีนี้จะใช้ได้ผลกับเมทริกซ์สัมประสิทธิ์แบบสมมาตร และไม่สามมาตร แต่ไม่เหมาะสมกับการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่เพราะ ต้องใช้หน่วยความจำจำนวนมาก และมีจำนวนครั้งในการกำจัดตัวแปรที่มาก ทำให้เสียค่าใช้จ่ายมากในการหาคำตอบด้วยวิธีนี้ วิธีที่ดีกว่าคือ วิธีกระทำซ้ำ ซึ่งมีอยู่มากมายหลายวิธี แต่วิธีที่เลือกใช้คือ วิธีเกาส์ไซเคิล (Gauss-Seidel method) เริ่มต้นจากการเขียนระบบสมการ 3 ตัวแปรที่แสดงในรูปที่ 3.14 ดังนี้

$$x_1^j = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{j-1} - a_{13}x_3^{j-1}}{a_{11}} \quad (3.48a)$$

$$x_2^j = \frac{b_2 - a_{21}x_1^j - a_{23}x_3^{j-1}}{a_{22}} \quad (3.48b)$$

$$x_3^j = \frac{b_3 - a_{31}x_1^j - a_{32}x_2^j}{a_{33}} \quad (3.48c)$$

เมื่อ j และ $j-1$ แทนการกระทำซ้ำปัจจุบันและครั้งก่อนหน้า

ต่อมาเป็นการเดาค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปร x_1^0 , x_2^0 และ x_3^0 ค่าเริ่มต้นที่ง่ายที่สุดคือ ศูนย์ ต่อจากนั้นเป็นการใส่ค่าเริ่มต้นนั้นลงในสมการที่ (3.48a) ได้ $x_1^1 = b_1/a_{11}$ ทำการคำนวณค่า x_2 ใหม่ หรือ x_2^1 จากสมการที่ (3.48b) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ $b_2, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ ร่วมกับตัวแปร x_1^1 และ x_2^0 ทำการคำนวณค่า x_3 ใหม่หรือ x_3^1 จากสมการที่ (3.48c) ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ $b_3, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ ร่วมกับตัวแปร x_1^1 และ x_2^1 นี่ถือเป็นการสิ้นสุดของการกระทำซ้ำครั้งที่หนึ่ง กระบวนการคำนวณเกิดขึ้นซ้ำแต่เปลี่ยน j จาก 1 ไปเป็น 2 แล้วกลับไปทำสมการที่ (3.48a) ตามด้วยสมการที่ (3.48b) และ (3.48c) ตามลำดับ

การคำนวณสิ้นสุดลงก็ต่อเมื่อคำตอบเข้าสู่ค่าเดิม หรืออยู่ในเกณฑ์ของการยอมรับได้ซึ่งแสดงไว้ด้วยค่า ε_s สำหรับทุกค่าของ x_i ดังสมการ

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| \times 100\% \leq \varepsilon_s \quad (3.49)$$

หมายความว่า การยอมรับว่าการคำนวณนั้นเข้าสู่คำตอบแล้วเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $\varepsilon_{a,1}$, $\varepsilon_{a,2}$ และ $\varepsilon_{a,3}$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ ε_s

วิธีนี้ให้คำตอบที่รวดเร็วกว่าวิธีการโดยตรงถ้าต้องแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ แต่มีข้อจำกัดได้แก่ ค่าสัมประสิทธิ์ที่แนวทแยงมุมต้องไม่เท่ากับศูนย์ ($a_{ii} \neq 0$) และควรออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ไม่ต้องจองพื้นที่หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ เพื่อเก็บองค์ประกอบทั้งหมดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ มิฉะนั้นการใช้วิธีนี้การคำนวณจะไม่เกิดประสิทธิภาพสูงสุดทั้งในเรื่องของความเร็วในการคำนวณและการประหยัดหน่วยความจำ เนื่องจากเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ส่วนใหญ่จะเป็นเมทริกซ์แบบ sparse ซึ่งค่าองค์ประกอบส่วนใหญ่ในเมทริกซ์คือ เลข 0 การแก้ปัญหาเมทริกซ์ด้วยวิธีการโดยตรงและวิธีกระทำซ้ำ สามารถค้นหาเพิ่มเติมได้ในเอกสารหมายเลข [19]

บทที่ 4

ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง สำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหล

สมการพื้นฐานทั้งหมดในการวิเคราะห์การไหลที่มีการถ่ายเทความร้อน ซึ่งได้อธิบายไว้อย่างละเอียดในบทที่ 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของตัวแปรใดๆ ϕ ได้ดังนี้

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi)}_{\text{convection term}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{source term}} \quad (4.1)$$

โดยรายละเอียดของแต่ละสมการสำหรับการไหลไม่อัดตัวแบบหนึ่งมิติที่สภาวะคงตัว แสดงไว้ในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 สัมประสิทธิ์ในสมการพื้นฐานรูปทั่วไปของการไหล

สมการ	ϕ	Γ	S_ϕ
อนุรักษ์มวล	1	0	0
อนุรักษ์โมเมนตัมแกน x	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$
อนุรักษ์โมเมนตัมแกน y	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$
อนุรักษ์พลังงาน	cT	k/c	0

สมการที่ (4.1) จึงถือเป็นสมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐานสำหรับทุกสมการในการวิเคราะห์การไหลที่จะต้องทำความเข้าใจเป็นอันดับแรก ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องถูกใช้ในการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิตที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีการทางเมตริกซ์ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า Discretization สมการที่ (4.1) ถูกนำมาอินทิเกรต ตลอดปริมาตรควบคุม V ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right\} dV = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right\} dV + \int S_\phi dV \quad (4.2)$$

พจน์ที่อยู่ในวงเล็บปีกกาที่ด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.2) แทนฟลักซ์การพาสุทธิ (Net convective flux) มีชื่อเรียกว่า พจน์การพา (Convective term) พจน์ที่อยู่ในวงเล็บปีกกาที่ด้านขวามือของสมการที่ (4.2) แทน ฟลักซ์การแพร่กระจายสุทธิ (Net diffusive flux) มีชื่อเรียกว่า พจน์การแพร่ (Diffusive term) และ พจน์สุดท้ายที่ด้านขวามือของสมการที่ (4.2) แทนพจน์ของการเพิ่มขึ้นหรือการลดลงของตัวแปร ϕ มีชื่อเรียกว่าพจน์แหล่งกำเนิด (Source term) ถ้าละทิ้งพจน์การพา ปัญหาการไหลนี้จะถูกเรียกว่า ปัญหาของการแพร่กระจาย ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทที่ 3 ปัญหาการพาและการแพร่กระจาย ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อที่ 4.2 โดยไม่ได้กล่าวถึงความลาดชันของความดันที่ปรากฏขึ้นในสมการอนุพันธ์โมเมนต์ หัวข้อที่ 4.3 นำเสนอระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องสำหรับการวิเคราะห์การไหลซึ่งมีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้นทั้งแบบบังคับและแบบอิสระ

4.1 ปัญหาการพาและการแพร่กระจาย

ปัญหาการพาและการแพร่กระจายสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย ถ้าเริ่มต้นด้วยการศึกษาดูตัวอย่างการไหลในหนึ่งมิติ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 สมการบังคับของการไหลสำหรับการพาและการแพร่กระจายในหนึ่งมิติที่สภาวะอยู่ตัว และ ไม่มีพจน์แหล่งกำเนิด คือ

$$\frac{d}{dx} (\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (4.3)$$

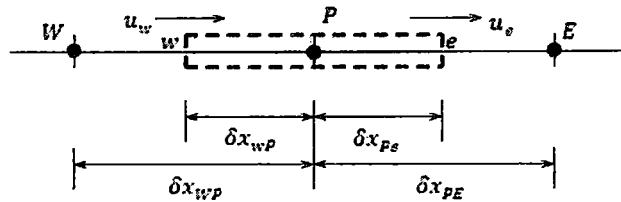
โดย ρ แทนความหนาแน่นของของไหล

Γ แทนสัมประสิทธิ์การแพร่

u แทนความเร็วในแนวแกน x

การไหลนี้จะต้องเป็นไปตามกฎอนุรักษ์มวลด้วย เพราะฉะนั้น

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (4.4)$$



รูปที่ 4.1 ปริมาตรควบคุมสำหรับจุดต่อ P ในปัญหาการพาและแพร่กระจาย

พิจารณาปริมาตรควบคุมหนึ่งมิติในรูปที่ 4.1 ของจุดต่อ P ซึ่งมีจุดต่อรอบข้าง ได้แก่ จุดต่อ W และ E พื้นผิวรอบข้างคือพื้นผิว w และ e เมื่อทำการอินทิเกรตสมการที่ (4.3) ตลอดปริมาตรควบคุมที่มีความยาวในมิติของแกน y และ z เท่ากับ 1 หน่วย จะได้

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (4.5)$$

และเมื่อทำการอินทิเกรตสมการที่ (4.4) จะได้

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (4.6)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการ discretized สำหรับกริดที่มีการพาและการแพร่กระจาย จำเป็นที่จะต้องนิยามตัวแปรขึ้นมา 2 ตัวแปร ได้แก่ F และ D เพื่อแทนฟลักซ์มวลการพา (Convective mass flux) ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ และความเป็นสื่อในการแพร่กระจาย (Diffusion conductance) ที่พื้นผิว ตามลำดับ

$$F = \rho u, \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (4.7)$$

ค่าของตัวแปร F และ D ที่พื้นผิวของปริมาตรควบคุมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$F_w = (\rho u)_w, \quad F_e = (\rho u)_e \quad (4.8a)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}, \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (4.8b)$$

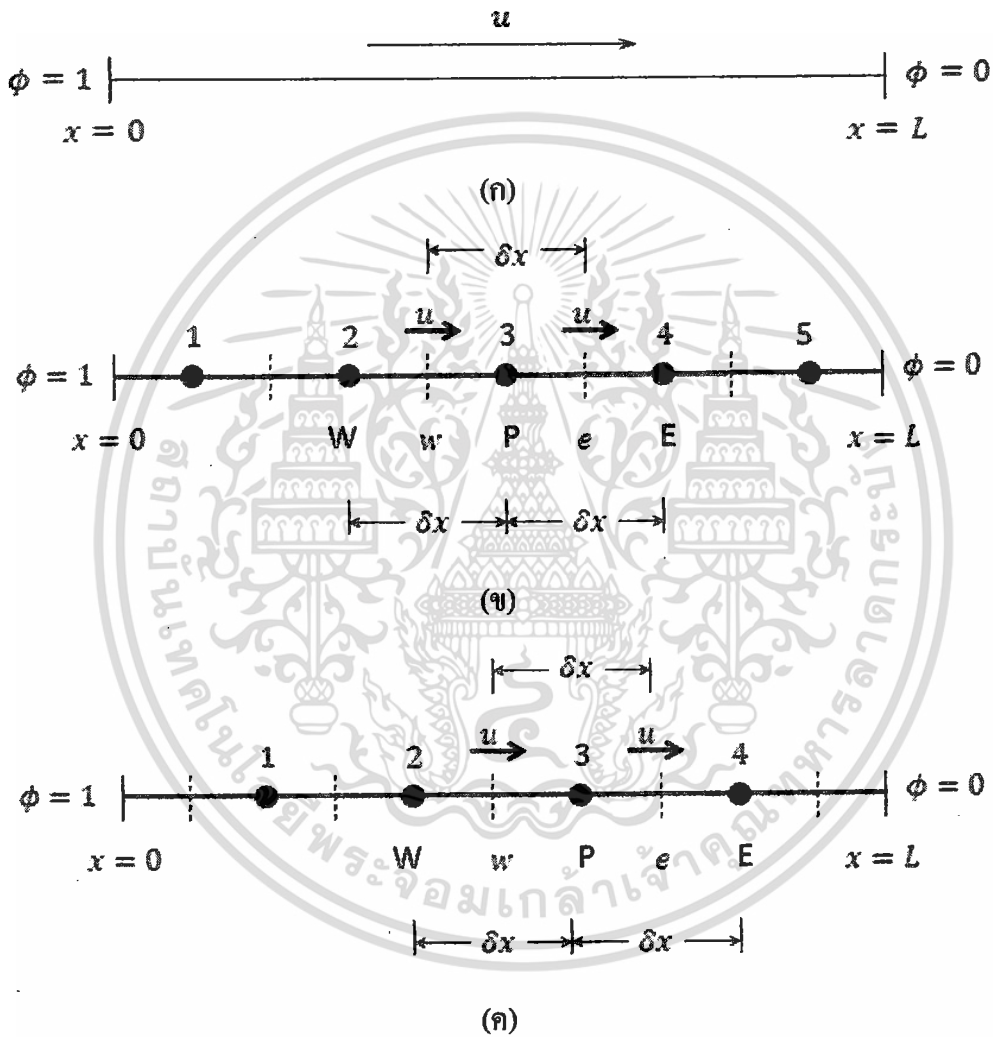
สมมติให้ $A_e = A_w = A$ ถ้าใช้วิธี Central differencing ในการประมาณค่าสำหรับพจน์การแพร่กระจาย ในด้านขวามือของสมการที่ (4.5) สมการที่ได้คือ

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{4.9}$$

และสมการสำหรับการอนุรักษ์มวลสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$F_e - F_w = 0 \tag{4.10}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 ปัญหาการพาและการแพร่กระจายผ่าน โดเมนการไหลแบบหนึ่งมิติ



รูปที่ 4.2 (ก) เส้นใจต่างๆของปัญหา (ข) การคำนวณด้วยวิธี Cell-centered
(ค) การคำนวณด้วยวิธี Vertex-centered

โดเมนหนึ่งมิติในรูปที่ 4.2(ก) เกิดการพาและการแพร่กระจายของตัวแปร ϕ เป็นไปตามสมการที่ (4.3) เส้นใจขอบเขตที่ทางเข้า ($x = 0$) คือ $\phi = 1$ ในขณะที่เส้นใจขอบเขตที่ทางออก ($x = L$) คือ

$\phi = 0$ ความยาวของโดเมนคือ $L = 1 \text{ m}$ ความหนาแน่นของของไหลคือ $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายคือ $\Gamma = 0.1 \text{ kg/(m/s)}$ การสร้างสมการพีชคณิตสำหรับสมการการไหลในตัวอย่างนี้มี 2 วิธีคือ Cell-centered method และ Vertex-centered method โดเมนถูกแบ่งออกเป็น 5 เซลล์เท่าๆกัน โดยแต่ละเซลล์มีความยาวเท่ากับ δx ดังนั้นระยะห่างของพื้นผิวทางด้านซ้ายมือ (w) ถึงพื้นผิวทางด้านขวามือ (e) ของเซลล์คือ δx เช่นกัน จุดคำนวณของวิธี Cell-centered คือจุดกึ่งกลางของเซลล์แต่จุดคำนวณของวิธี Vertex-centered คือจุดยอดของเซลล์ ดังนั้นสำหรับปัญหานี้ จุดคำนวณของวิธี Cell-centered มีทั้งหมด 5 จุดในขณะที่จุดคำนวณของวิธี Vertex-centered มีทั้งหมด 4 จุด ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2 (ข) และ (ค)

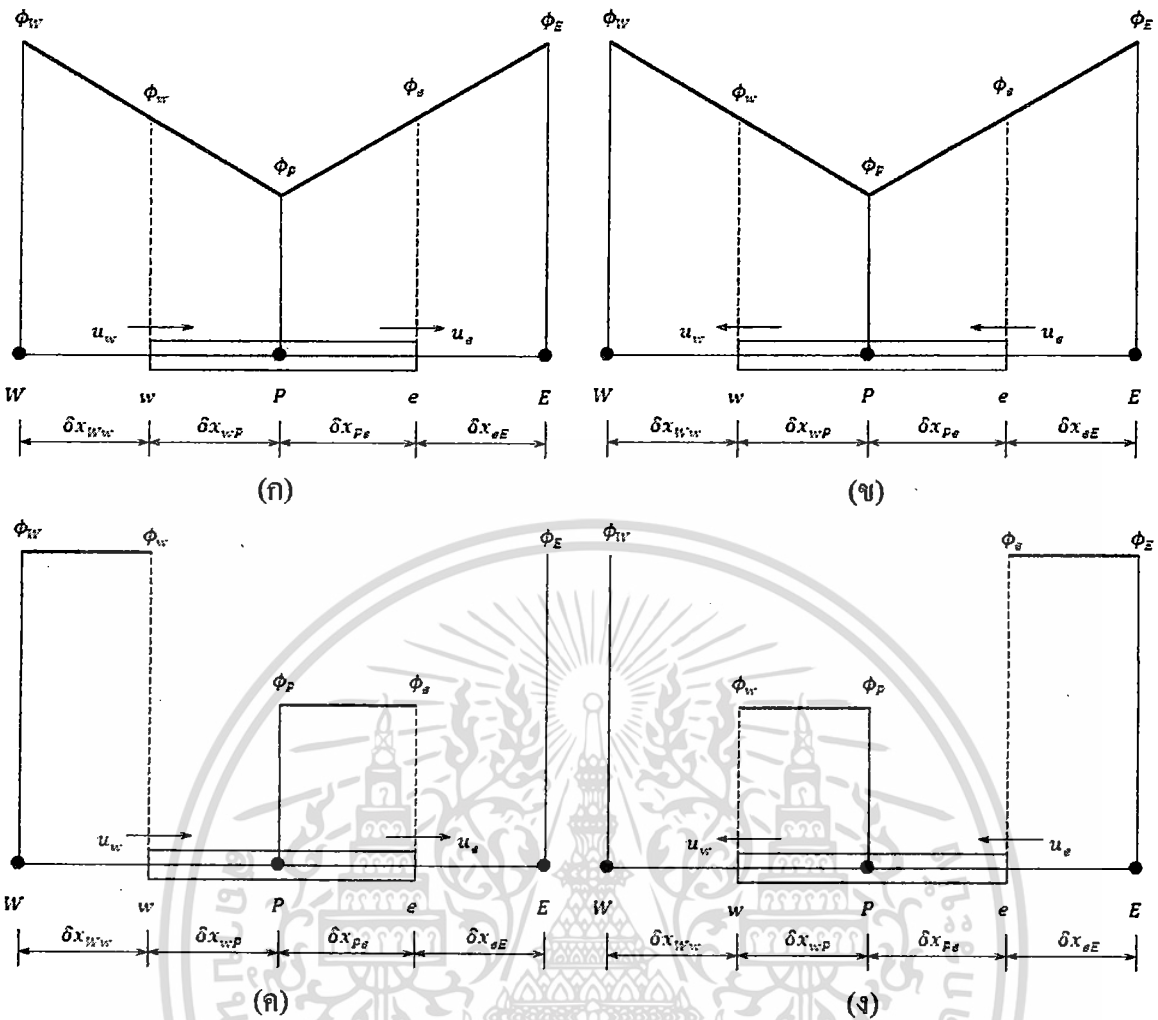
คำตอบแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้คือ

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1} \quad (4.11)$$

ตัวแปรไร้มิติชื่อว่า Peclet number หรือ Pe มีนิยามว่าเป็นอัตราส่วนระหว่างมวลการพาต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่หน้าตัดและความเป็นสื่อในการแพร่กระจาย (Diffusion conductance) ดังสมการ

$$Pe = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} = \frac{F}{D} \quad (4.12)$$

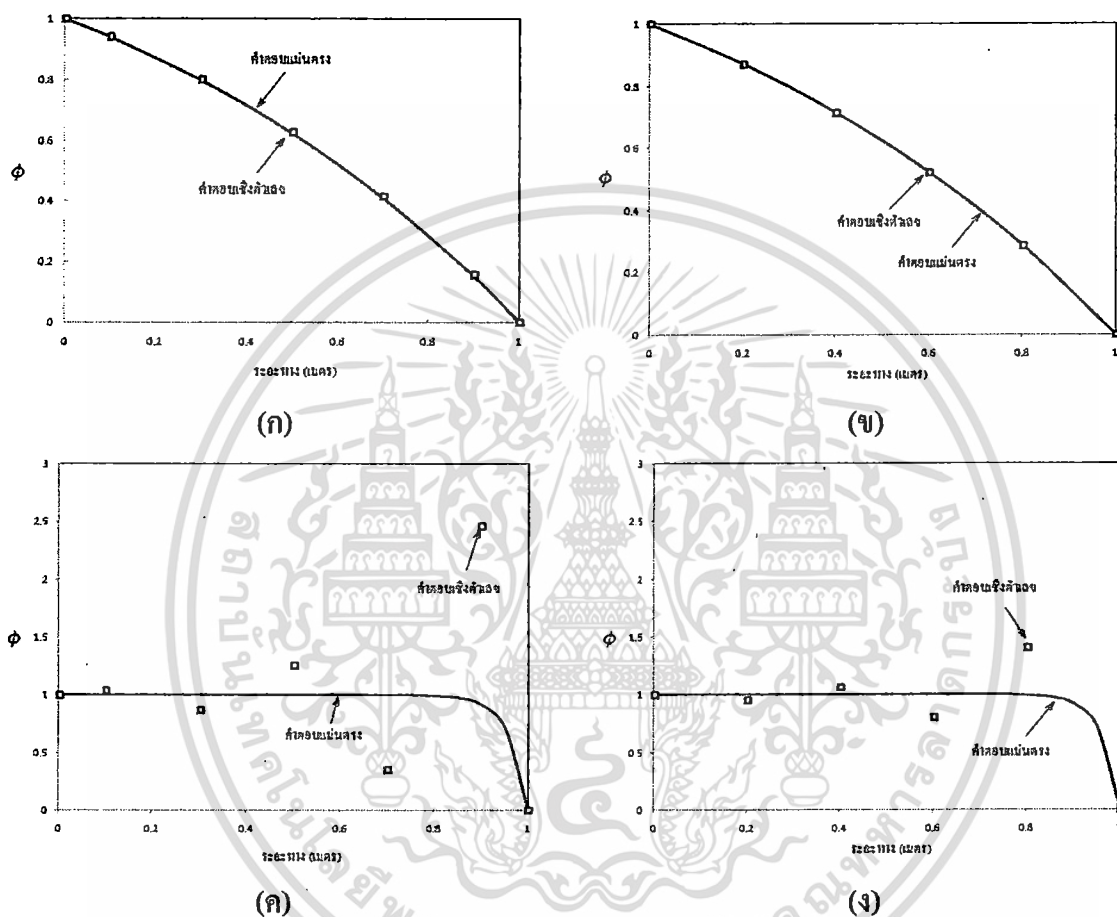
ถ้าความเร็ว u มีค่าเท่ากับ 0.1 m/s จะส่งผลให้ค่า $Pe = 0.2$ คำตอบที่ได้จากการใช้ Central differencing scheme มีความแม่นยำมากเมื่อเทียบกับคำตอบแม่นยำ ตัวอย่างของวิธี Central differencing scheme คือ ค่า ϕ ที่พื้นผิว w ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ ϕ ตรงกึ่งกลางของเซลล์หมายเลข 2 และ 3 ในขณะที่ถ้าความเร็วเพิ่มขึ้นเป็น $u = 2.5 \text{ m/s}$ หรือ $Pe = 5$ คำตอบที่ได้จาก Central differencing scheme จะมีความผิดพลาดมากจากคำตอบแม่นยำในลักษณะที่แกว่งไปมา และคำตอบเชิงตัวเลขไม่อยู่ภายในเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา $0 \leq \phi \leq 1$ ดังรูปที่ 4.2 ไม่ว่าจะใช้วิธี Cell-centered (Versteeg และ Malalasekera [20]) หรือ Cell-vertexed จะเห็นได้ว่า ค่า Peclet number (Pe) เป็นตัวแปรสำคัญที่กำหนดความแม่นยำในการคำนวณของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาการพาและการแพร่กระจาย ความผิดพลาดของคำตอบที่ $Pe = 5$ สามารถลดลงได้ด้วยการใช้ Upwind scheme โดยไม่ต้องเพิ่มจำนวนของการแบ่งเซลล์



รูปที่ 4.3 (ก) Central differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางบวกของ x
 (ข) Central differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางลบของ x
 (ค) Upwind differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางบวกของ x
 (ง) Upwind differencing scheme เมื่อความเร็วอยู่ในทิศทางลบของ x

ตัวอย่างของวิธี Upwind scheme คือ ค่า ϕ ที่พื้นผิว w ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่า ϕ ที่กึ่งกลางของเซลล์หมายเลข 2 ซึ่งถือเป็นต้นทางของการไหลก่อนเข้าสู่พื้นผิว w ผลเฉลยที่ได้จากการใช้ Upwind scheme ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.3 แม้ว่า Upwind scheme จะช่วยลดความผิดพลาดแบบแกว่งไปมาได้ ในปัญหาที่มีค่า Pe สูง แต่ก็ยังคงปรากฏความผิดพลาดเล็กน้อยบริเวณใกล้ปลายทางออกของการไหล สำหรับปัญหาการพาและการแพร่กระจายในหนึ่งมิติ ค่า $Pe = 2$ ถือเป็นเกณฑ์ที่บอกให้ทราบว่าจำเป็นต้องใช้ Upwind scheme แล้ว กล่าวคือ ถ้าค่า $Pe < 2$ การคำนวณด้วย Central differencing scheme สามารถให้คำตอบที่แม่นยำได้โดยไม่ต้องเปลี่ยนไปเป็น Upwind scheme แต่ถ้า $Pe \geq 2$

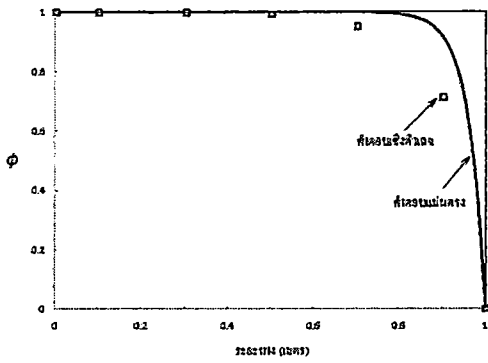
ควรเปลี่ยน การคำนวณให้มาใช้ Upwind scheme เพื่อความถูกต้องและแม่นยำของคำตอบ หรือถ้า ต้องการใช้ Central differencing scheme ก็ควรปรับลดขนาดของเซลล์ δx ลงจากเดิมเพื่อให้ค่า $Pe < 2$ แต่วิธีสุดท้ายนี้ส่งผลให้ต้องทำการคำนวณกับจำนวนจุดต่อที่มากขึ้น ใช้หน่วยความจำของ คอมพิวเตอร์มากขึ้น และใช้ระยะเวลานานขึ้นในการหาคำตอบ ดังนั้นการใช้ Upwind scheme จึงเป็น แนวทางที่เหมาะสมในการคำนวณเพราะ ไม่จำเป็นจะต้องใช้จุดต่อจำนวนมากหาก Pe มีค่าสูง



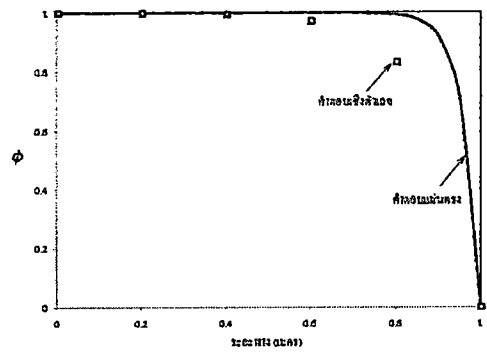
รูปที่ 4.4 ผลเฉลยของ ϕ ที่ได้จากการคำนวณเขตนครวและ Central differencing scheme ในกรณี

(ก) $Pe = 0.2$ (Cell-centered) (ข) $Pe = 0.2$ (Vertex-centered)

(ค) $Pe = 5.0$ (Cell-centered) (ง) $Pe = 5.0$ (Vertex-centered)



(ก)



(ข)

รูปที่ 4.5 ผลเฉลยแม่นยำตรงของ ϕ ในกรณี $Pe = 5$ และคำตอบจาก Upwind scheme สำหรับ

(ก) Cell-centered (ข) Vertex-centered

สมการอนุรักษ์สำหรับปัญหาการพาและการแพร่กระจายของตัวแปร ϕ ในสองมิติ คือ

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right\} dV = \int S_\phi dV \quad (4.13)$$

สมการที่ (4.13) เทียบเท่ากับสมการที่ได้จากวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted residual method) ซึ่งใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเท่ากับ 1 ตลอดปริมาตรควบคุม โดยกำหนดให้อินทิกรัลของผลคูณระหว่างฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักกับสมการบังคับของการไหลตลอดปริมาตรควบคุมมีค่าเท่ากับศูนย์

ถ้าใช้ทฤษฎีบทของเกาส์สำหรับพจน์ที่อยู่ในวงเล็บปีกกาของสมการที่ (4.13) จะได้

$$\int \left[\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x + \left(\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y \right] dA = \int S_\phi dV \quad (4.14)$$

ค่า Pe สำหรับปัญหาสองมิติมีนิยามว่า

$$Pe = \frac{\rho |U| h}{2\Gamma} \quad (4.15)$$

โดย $|U|$ แทนขนาดความเร็วเฉลี่ยที่ตำแหน่งกึ่งกลางเซลล์สามเหลี่ยม, $|U| = \sqrt{u^2 + v^2}$

h แทนขนาดของเซลล์สามเหลี่ยมในทิศทางเดียวกับความเร็วของของไหล, $h = |h_1| + |h_2|$

h_1 แทนขนาดของระยะ h_x ที่ฉายลงบนเวกเตอร์ความเร็ว U , $h_1 = (u h_{ex} + v h_{ey}) / |U|$

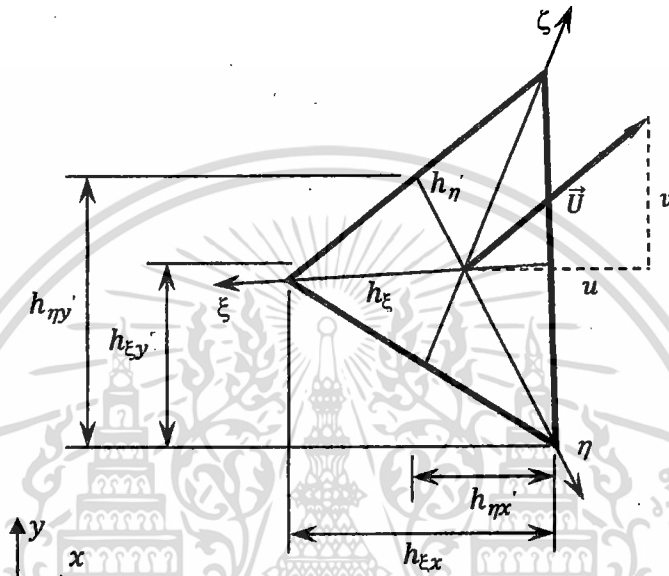
h_2 แทนขนาดของระยะ h_y ที่ฉายลงบนเวกเตอร์ความเร็ว U , $h_2 = (u h_{yx} + v h_{yy}) / |U|$

$h_{\xi x}$ และ $h_{\xi y}$ แทนขนาดภาพฉายของ h_{ξ} บนแกน x และ y

$h_{\eta x}$ และ $h_{\eta y}$ แทนขนาดภาพฉายของ h_{η} บนแกน x และ y

h_{ξ} แทนระยะทางในทิศทางของเส้น ξ ซึ่งลากจากกึ่งกลางด้าน 2-3 ไปยังจุดต่อหมายเลข 1

h_{η} แทนระยะทางในทิศทางของเส้น η ซึ่งลากจากกึ่งกลางด้าน 3-1 ไปยังจุดต่อหมายเลข 2



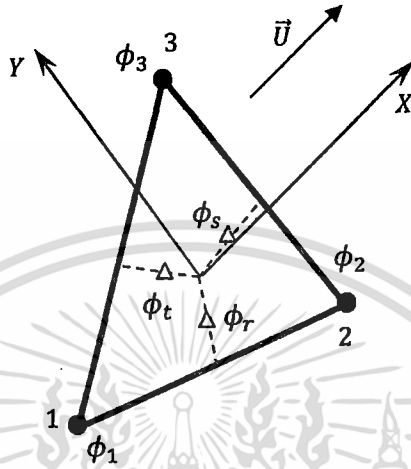
รูปที่ 4.6 ระยะทางต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการหาขนาดของเซลล์สามเหลี่ยม

ถ้า Pe มีค่าต่ำ การคำนวณค่าของตัวแปร ϕ สามารถกระทำได้ด้วยเช่นเดียวกับปัญหาที่มีการแพร่กระจายเพียงอย่างเดียว แต่เมื่อ Pe มีค่าสูง จำเป็นต้องใช้ Upwind scheme เพื่อกำจัดการแกว่ง (Wiggles) ของผลลัพธ์จากวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม Upwind scheme ถูกนิยมใช้ในระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมแบบจุดยอดของเซลล์หรือ CVFEM ได้แก่ 1) FLO (Flow Oriented) 2) MAW (Mass Weighted) และ SUCV (Streamline Upwind Control Volume)

4.1.1 FLO scheme

เทคนิคของ FLO ถูกเสนอไว้โดย Baliga และ Patankar [17] ฟังก์ชันประมาณค่าภายในที่ใช้ใน Flow-Oriented Upwind scheme ถูกนิยามด้วยระบบพิกัดใหม่ภายในเซลล์ (X, Y) จุดกำเนิดของ

พิกัดอยู่ที่จุดกึ่งกลางของเซลล์ และแกน X หันไปในทิศทางเดียวกับความเร็วเฉลี่ยของเซลล์ \vec{U} ดังรูปที่ 4.7 ค่าของตัวแปร ϕ ที่ตำแหน่งของจุดอินทิเกรตได้แก่จุด r, s และ t สามารถคำนวณอย่างชัดเจนตามสมการที่จะกล่าวถึงต่อไป



รูปที่ 4.7 ระบบพิกัดภายในเซลล์สำหรับ FLO upwind scheme

เทคนิคของ FLO กำหนดไว้ว่า ถ้าค่า Peclet number ของเซลล์ (Pe_{Δ}) มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10^{-6} ค่าของตัวแปร ϕ เปลี่ยนแปลงแบบเส้นตรงทั้งในทิศทางเดียวกับความเร็วเฉลี่ยและในทิศทางตั้งฉากตามระยะทางภายในเซลล์ คำนวณได้จาก

$$\phi = A + BX + CY \quad (4.16)$$

จากรูปที่ 4.7 พิกัดภายในเซลล์ (X, Y) สัมพันธ์กับพิกัดของโดเมน (x, y) ดังนี้

$$X = (x - x_0) \frac{u}{|U|} + (y - y_0) \frac{v}{|U|} \quad (4.17a)$$

$$Y = (x - x_0) \frac{-v}{|U|} + (y - y_0) \frac{u}{|U|} \quad (4.17b)$$

ถ้าค่าของ Pe_{Δ} มากกว่า 10^{-6} ตัวแปร ϕ เปลี่ยนแปลงแบบเอกโปเนนเชียลในทิศทางของเวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ย แต่ในทิศทางที่ตั้งฉากกับความเร็วเฉลี่ยตัวแปร ϕ เปลี่ยนแปลงแบบเส้นตรงบนพิกัด (ξ, η) ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

$$\phi = A + B\xi + CY \quad (4.18)$$

โดย

$$\xi = \frac{L_\Delta}{Pe_\Delta} \left\{ \exp \left[\frac{Pe_\Delta(X - X_{\max})}{L_\Delta} \right] - 1 \right\} \quad (4.19)$$

$$Pe_\Delta = \frac{\rho l U L_\Delta}{\Gamma_\phi} \quad (4.20)$$

$$L_\Delta = \sqrt{(x_{\max} - x_{\min})^2 + (y_{\max} - y_{\min})^2} \quad (4.21)$$

$$X_{\max} = \max(X_1, X_2, X_3) \quad (4.22)$$

$$X_{\min} = \min(X_1, X_2, X_3) \quad (4.23)$$

$$x_{\max} = \max(x_1, x_2, x_3) \quad (4.24)$$

$$x_{\min} = \min(x_1, x_2, x_3) \quad (4.25)$$

$$y_{\max} = \max(y_1, y_2, y_3) \quad (4.26)$$

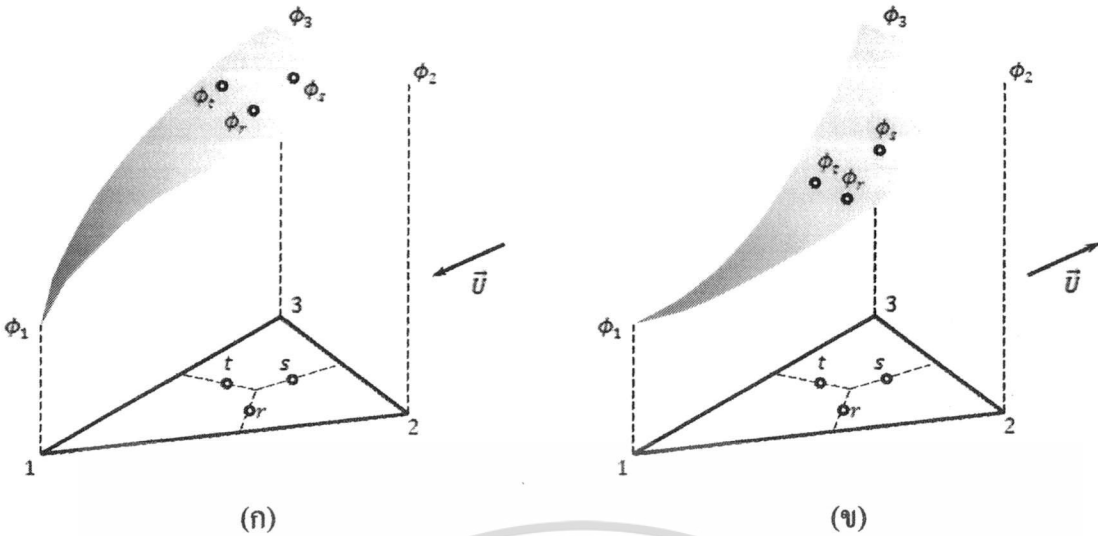
$$y_{\min} = \min(y_1, y_2, y_3) \quad (4.27)$$

A, B, C แทนสัมประสิทธิ์ที่คำนวณจาก

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & Y_1 \\ 1 & \xi_2 & Y_2 \\ 1 & \xi_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร ϕ แบบเอกโปเนนเชียลตามทิศทางของความเร็วเฉลี่ยที่พุ่งเข้าและพุ่งออกจากจุดต่อหมายเลข 1 ของเซลล์ได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 4.8(ก) และ (ข) ตามลำดับ ค่าของ ϕ_r, ϕ_s และ ϕ_t มีความเกี่ยวข้องกับ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_s \\ \phi_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_r & Y_r \\ 1 & \xi_s & Y_s \\ 1 & \xi_t & Y_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_r & Y_r \\ 1 & \xi_s & Y_s \\ 1 & \xi_t & Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & Y_1 \\ 1 & \xi_2 & Y_2 \\ 1 & \xi_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$



รูปที่ 4.8 การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร ϕ ที่จุดต่างๆภายในเซลล์สำหรับ FLO scheme เมื่อ

- (ก) ความเร็วเฉลี่ยพุ่งเข้าหาจุดต่อหมายเลข 1
- (ข) ความเร็วเฉลี่ยเคลื่อนออกจากจุดต่อหมายเลข 1

4.1.2 MAW scheme

เทคนิคของ MAW ถูกเสนอไว้โดย Masson และคณะ [21] และได้ถูกอธิบายไว้ในเอกสารของ Baliga และ Atabaki [22] ค่าของตัวแปร ϕ ที่จุดอินทิเกรตทั้งสามของเซลล์ได้แก่จุด r, s และ t มีความสัมพันธ์กับอัตราการไหลโดยมวลที่ตำแหน่งนั้นๆ ได้แก่ \dot{m}_r, \dot{m}_s และ \dot{m}_t สมการสำหรับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ϕ ที่จุด r, s และ t กับตัวแปร ϕ ที่จุดยอดทั้งสามของเซลล์ คือ

$$\phi_r = \begin{cases} f_p \phi_t + (1 - f_p) \phi_1 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_t}{\dot{m}_r}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_r < 0 \\ f_p \phi_s + (1 - f_p) \phi_2 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_s}{\dot{m}_r}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_r > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\phi_s = \begin{cases} f_p \phi_r + (1 - f_p) \phi_2 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_s}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_s < 0 \\ f_p \phi_t + (1 - f_p) \phi_3 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_t}{\dot{m}_s}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_s > 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\phi_t = \begin{cases} f_p \phi_s + (1 - f_p) \phi_3 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_s}{\dot{m}_t}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_t < 0 \\ f_p \phi_r + (1 - f_p) \phi_1 & \text{where } f_p = \min \left[\max \left(\frac{\dot{m}_r}{\dot{m}_t}, 0 \right), 1 \right] \text{ if } \dot{m}_t > 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติว่าตัวแปร ϕ เปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นตลอดทั้งเซลล์ 123 ดังนั้น อัตราการไหลโดยมวลที่จุด r , s และ t มีนิยามว่า

$$\dot{m}_r = \int_0^a \rho(\vec{U}_r \cdot \vec{n}_{oa}) ds = \frac{\rho}{2} [(u_o + u_a)(y_a - y_o) - (v_o + v_a)(x_a - x_o)] \quad (4.33)$$

$$\dot{m}_s = \int_0^b \rho(\vec{U}_s \cdot \vec{n}_{ob}) ds = \frac{\rho}{2} [(u_o + u_b)(y_b - y_o) - (v_o + v_b)(x_b - x_o)] \quad (4.34)$$

$$\dot{m}_t = \int_0^c \rho(\vec{U}_t \cdot \vec{n}_{oc}) ds = \frac{\rho}{2} [(u_o + u_c)(y_c - y_o) - (v_o + v_c)(x_c - x_o)] \quad (4.35)$$

สมการที่ (4.30) ถึง (4.32) แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ϕ ที่จุดอินทิเกรตทั้งสาม และค่าตัวแปร ϕ ที่จุดยอดทั้งสามแบบนัย ซึ่งไม่พร้อมที่จะนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนั้นสมการดังกล่าวจำเป็นต้องเขียนใหม่เพื่อให้เกิดความชัดเจนเพียงพอ ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_r \\ \phi_s \\ \phi_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

ค่าคงที่ต่างๆภายในเมตริกซ์ที่อยู่ในสมการ (4.36) เปลี่ยนแปลงตามเงื่อนไขที่อยู่ในสมการ (4.30) ถึง (4.32) ยกตัวอย่างเช่น เงื่อนไขที่หนึ่ง ($\dot{m}_r < 0$) ของสมการ (4.30) ทำให้ $a_{12} = 0$, $a_{13} = -f_p$, $b_{11} = 1 - f_p$ และ $b_{12} = 0$ เป็นต้น ค่าคงที่ทั้งหมดภายในเมตริกซ์ถูกเติมให้เต็มตามกลุ่มของเงื่อนไขของฟลักซ์มวลการไหลซึ่งถูกจำแนกเอาไว้เป็นกลุ่มที่มีความสอดคล้องกันในเชิงกายภาพ

ความสัมพันธ์ที่ชัดเจนระหว่างค่าตัวแปร ϕ ที่จุดอินทิเกรตทั้งสามและค่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร ϕ ที่จุดยอดทั้งสามของเซลล์สามารถหาได้จาก

$$\begin{Bmatrix} \phi_r \\ \phi_s \\ \phi_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

หากพิจารณาเฉพาะเซลล์ 123 ในรูปที่ 4.9 อินทิกรัลสำหรับการพาและการแพร่กระจายของปริมาตรควบคุมย่อย 1aoc ภายในเซลล์ 123 คือ

$$\left\{ \int \vec{j} \cdot \vec{n} dA + \int S_\phi dV \right\}_{1aoc} = \int_a^o \vec{j} \cdot \vec{n} dA + \int_o^c \vec{j} \cdot \vec{n} dA + S_\phi V_{1aoc} \quad (4.38)$$

โดย \vec{j} แทนผลรวมระหว่าง ฟลักซ์การพา (\vec{j}_c) และฟลักซ์การแพร่กระจาย (\vec{j}_D) หรือ $\vec{j} = \vec{j}_c + \vec{j}_D$

v_{1aoc} แทนปริมาตรความคุมย่อยที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $1, a, o$ และ c

ฟลักซ์การแพร่กระจายตลอดพื้นผิวของปริมาตรความคุมย่อยสามารถคำนวณได้จากขั้นตอนที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 ฟลักซ์ของการแพร่กระจายเท่ากับ

$$\begin{aligned} \int_a^o \vec{j}_D \cdot \vec{n} dA &= \int_a^o -\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y\right) dA \\ &= \frac{\Gamma_\phi}{2\Omega} \{(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3)(y_a - y_o) + (c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3)(x_o - x_a)\} \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_o^c \vec{j}_D \cdot \vec{n} dA &= \int_o^c -\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y\right) dA \\ &= \frac{\Gamma_\phi}{2\Omega} \{(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3)(y_o - y_c) + (c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3)(x_c - x_o)\} \quad (4.40) \end{aligned}$$

ฟลักซ์การพาตลอดพื้นผิวของปริมาตรความคุมย่อยมีค่าดังนี้

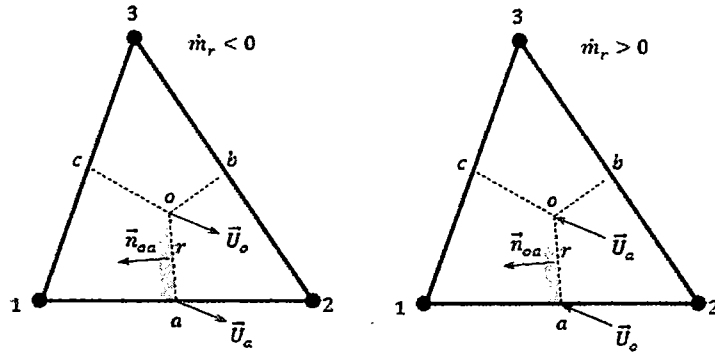
$$\begin{aligned} \int_a^o \vec{j}_C \cdot \vec{n} dA &= \int_a^o (\rho u \phi n_x + \rho v \phi n_y) dA \\ &= -\dot{m}_r \phi_r = -\rho [u_r (y_a - y_o) + v_r (x_a - x_o)] \phi_r \quad (4.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_o^c \vec{j}_C \cdot \vec{n} dA &= \int_o^c (\rho u \phi n_x + \rho v \phi n_y) dA \\ &= \dot{m}_t \phi_t = \rho [u_t (y_c - y_o) - v_t (x_c - x_o)] \phi_t \quad (4.42) \end{aligned}$$

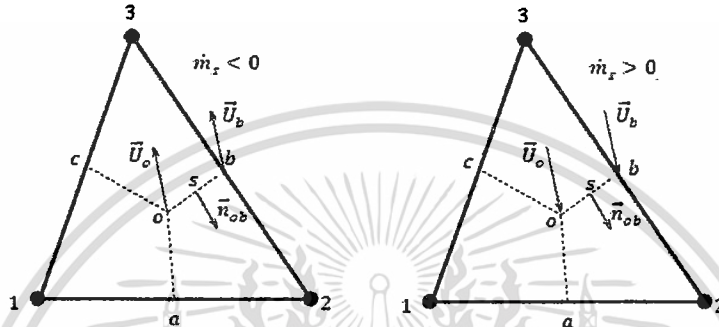
โดย u_r, v_r, u_t และ v_t คำนวณจากการประมาณค่าแบบเชิงเส้นดังนี้

$$u_r = \frac{1}{2}(u_a + u_o), \quad v_r = \frac{1}{2}(v_a + v_o), \quad u_t = \frac{1}{2}(u_o + u_c), \quad v_t = \frac{1}{2}(v_o + v_c) \quad (4.43)$$

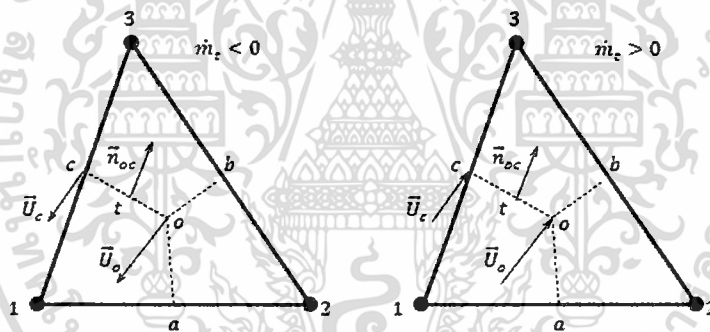
เมื่อรวบรวมพจน์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการพาและการแพร่กระจาย จากทุกเซลล์รอบๆปริมาตรควบคุม จะทำให้คำนวณค่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร ϕ ของจุดต่อได้ รวมทั้งค่าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร ϕ ของจุดต่ออื่นๆที่ล้อมรอบได้ทั้งหมด



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 4.9 กรณีต่างๆในการใช้ MAW scheme สำหรับ (ก) ϕ_r (ข) ϕ_s (ค) ϕ_t

4.1.3 SUCV scheme

เทคนิคของ SUCV ถูกเสนอไว้โดย Swaminathan และคณะ [9] และได้อธิบายไว้โดย Comini และคณะ [23] การสร้างสมการสำหรับระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องด้วยเทคนิคนี้กระทำโดยการปรับค่าของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักในสมการที่ (4.2) ให้มีค่าเปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น $1 - \gamma$ สำหรับทุกพจน์ยกเว้นพจน์ของการแพร่กระจาย ผลที่ได้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int (1-\gamma) \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right] dA - \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dA = \int (1-\gamma) S_\phi dV \quad (4.44)$$

โดย γ เป็นค่าคงที่สำหรับแต่ละเซลล์ ซึ่งคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้ [9, 24]

$$\gamma = \frac{\alpha h}{2|U|} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \tilde{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.45)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเกาส์เปลี่ยนสมการที่ (4.44) ให้เป็น

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \left(\rho u \phi - \tilde{k} u \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right) \right) n_x \right. \\ & \quad \left. + \left(\rho v \phi - \tilde{k} v \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right) \right) n_y \right\} dA \\ & \quad - \int \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] dA = \int (1-\gamma) S_\phi dV \end{aligned} \quad (4.46)$$

ความลาดชันของ ϕ ในแนวแกน x และ y สามารถหาได้จาก

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j \quad (4.48)$$

และ α เป็นค่าสัมประสิทธิ์ในสมการที่ (4.45) ที่เปลี่ยนแปลงตาม Pe (Peclet number) ดังเงื่อนไข

$$\alpha = \begin{cases} 0 & 0 \leq Pe \leq 0.001 \\ \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} & 0.001 < Pe \leq 100 \\ 1 & Pe > 100 \end{cases} \quad (4.49)$$

ค่าเพกเลตน์เบอร์ (Pe) ซึ่งจะถูกใช้ในสมการที่ (4.49) มีนิยามว่า

$$Pe = \begin{cases} \frac{\rho |U| h}{2\mu} & \text{สำหรับสมการโมเมนตัม} \\ \frac{\rho c |U| h}{2k} & \text{สำหรับสมการพลังงาน} \end{cases} \quad (4.50)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมา นำฟังก์ชันการประมาณภายในของตัวแปร ϕ และความลาดชันของตัวแปร ϕ ในแนวแกน x และ y แทนลงในสมการที่ (4.45) จะได้

$$[A^\phi]\{\phi\} = R_i^\phi \quad (4.51)$$

โดย $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์ของ ϕ ที่ทุกจุดต่อซึ่งเกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมหมายเลข i

$$[A^\phi] = \sum_k (J_x^\phi n_x + J_y^\phi n_y)_k \Delta A_k \quad (4.52)$$

$$J_x^\phi = \rho u \left[N_j - \tilde{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \Gamma_\phi \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (4.53)$$

$$J_y^\phi = \rho v \left[N_j - \tilde{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \Gamma_\phi \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (4.54)$$

$$R_i^\phi = (1 - \gamma) S_i V_i \quad (4.55)$$

ขั้นตอนสุดท้ายในการหาคำตอบเชิงตัวเลข คือ การกำหนดเงื่อนไขให้กับจุดต่อที่อยู่บริเวณขอบเขตของปัญหา และใช้วิธีการทางเมตริกซ์ในการแก้ระบบสมการที่ได้รับจากระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องสำหรับจุดต่อต่างๆที่ไม่ทราบค่าซึ่งได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3

4.2 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการไหลไม่อัดตัวแบบหนืด

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลไม่อัดตัวแบบหนืดที่สภาวะอยู่ตัว ครอบคลุมถึงการถ่ายเทความร้อนภายในของไหล สามารถสรุปได้ดังนี้

1. สมการการไหลต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.56)$$

2. สมการโมเมนตัม

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) \quad (4.58)$$

3. สมการพลังงาน

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4.59)$$

4.2.1 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x

การประดิษฐ์สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x กระทำได้โดยการคูณสมการโมเมนตัมในแนวแกน x ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W ผลที่ได้คือ

$$\int W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.60)$$

เลือกใช้ $W = 1$ สำหรับพจน์ของความหนืด แต่ในขณะเดียวกันให้เลือกใช้ $W = 1 - \gamma$ สำหรับพจน์อื่นนอกเหนือจากความหนืด

$$\int (1 - \gamma) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) \right\} d\Omega - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.61)$$

เนื่องจาก

$$u = \sum_{j=1}^3 N_j u_j, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \quad (4.62)$$

และเมื่อใช้ทฤษฎีบทของเกาส์เปลี่ยน volume integral เป็น surface integral เฉพาะในส่วนที่เกี่ยวข้องกับพจน์การพาและการแพร่ ทำให้ได้สมการ discretized สำหรับความเร็ว u ในทุกจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมหมายเลข i ดังนี้

$$[A^u]\{u\} = R_i^u \quad (4.63)$$

โดย

$$[A^u] = \sum_k \left(\{J_x^u n_x + J_y^u n_y\}_k \Delta A_k \right) \quad (4.64)$$

$$J_x^u = \rho u \left[N_j - \bar{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \mu \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (4.65)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$J_y^u = \rho v \left[N_j - \tilde{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \mu \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (4.66)$$

$$R_i^u = (1 - \gamma) \left\{ - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) \right\} \Omega_i \quad (4.67)$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$ แทนความลาดชันเฉลี่ยของความดันในทิศทาง x ซึ่งได้มาจากจุดอินทิเกรต

\bar{T} แทนอุณหภูมิเฉลี่ยที่ได้จากอุณหภูมิของจุดอินทิเกรตรอบปริมาตรควบคุม i

เมื่อทำการย้ายพจน์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับความเร็ว u_i ของปริมาตรควบคุม i ไปไว้ที่ด้านขวาของสมการ จะสามารถจัดรูปของสมการที่ (4.63) ใหม่ได้ดังนี้

$$A_{ii}^u u_i = - \sum_{j \neq i} A_{ij}^u u_j + f_i^u - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) ((1 - \gamma) \Omega_i) \quad (4.68)$$

โดย

$$u_i = \hat{u}_i - d_i^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.69)$$

$$f_i^u = \rho g_x (1 - \beta(T - T_0)) (1 - \gamma) \Omega_i \quad (4.70)$$

$$\hat{u}_i = \frac{\sum_{j \neq i} A_{ij}^u u_j + f_i^u}{A_{ii}^u} \quad (4.71)$$

$$d_i^u = \frac{(1 - \gamma) \Omega_i}{A_{ii}^u} \quad (4.72)$$

ตัวแปร \hat{u}_i และ d_i^u จะปรากฏอีกครั้งหนึ่งในสมการของความดัน ในหัวข้อที่ 4.3.3

4.2.2 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y

สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทาง y สามารถประดิษฐ์ได้ในลักษณะเดียวกันกับขั้นตอนที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น เริ่มต้นจากการคูณฟังก์ชันน้ำหนักกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทาง y ดังนี้

$$\int W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.73)$$

เลือกใช้ $W = 1$ สำหรับพจน์ของความหนืด ในขณะที่เดียวกันให้เลือกใช้ $W = 1 - \gamma$ สำหรับพจน์อื่น นอกเหนือจากพจน์ของความหนืด

$$\int (1 - \gamma) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) \right\} d\Omega - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.74)$$

เนื่องจาก

$$v = \sum_{j=1}^3 N_j v_j, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \quad (4.75)$$

และเมื่อใช้ Gauss's Theorem ในการเปลี่ยน volume integral เป็น surface integral เฉพาะในส่วนที่เกี่ยวข้องกับพจน์การพาและการแพร่ ทำให้ได้สมการ discretized สำหรับความเร็ว v ในทุกจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมหมายเลข i ดังนี้

$$[A^v] \{v\} = R_i^v \quad (4.76)$$

โดย

$$[A^v] = \sum_k \left(\{J_x^v n_x + J_y^v n_y\}_k \Delta A_k \right) \quad (4.77)$$

$$J_x^v = \rho u \left[N_j - \bar{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \mu \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (4.78)$$

$$J_y^v = \rho v \left[N_j - \bar{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - \mu \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (4.79)$$

$$R_i^v = (1 - \gamma) \left\{ - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) \right\} \Omega_i \quad (4.80)$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)$ แทนความลาดชันของความดันในทิศทาง y ซึ่งได้มาจากจุดอินทิเกรต

T แทนอุณหภูมิเฉลี่ยที่ได้จากอุณหภูมิของจุดอินทิเกรตที่อยู่โดยรอบปริมาตรควบคุม i

เมื่อทำการย้ายพจน์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับความเร็ว v_i ของปริมาตรควบคุม i ไปไว้ที่ด้านขวาของสมการ จะสามารถจัดรูปของสมการที่ (4.76) ใหม่ได้ดังนี้

$$A_{ii}^v v_i = - \sum_{j \neq i} A_{ij}^v v_j + f_i^v - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) ((1 - \gamma) \Omega_i) \quad (4.81)$$

โดย

$$v_i = \hat{v}_i - d_i^v \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (4.82)$$

$$f_i^v = \rho g_y (1 - \beta(T - T_0)) (1 - \gamma) \Omega_i \quad (4.83)$$

$$\hat{v}_i = \frac{\sum_{j \neq i} A_{ij}^v v_j + f_i^v}{A_{ii}^v} \quad (4.84)$$

$$d_i^v = \frac{(1 - \gamma) \Omega_i}{A_{ii}^v} \quad (4.85)$$

ตัวแปร \hat{v}_i และ d_i^v จะปรากฏอีกครั้งหนึ่งในสมการของความดัน ในหัวข้อที่ 4.3.3

4.2.3 สมการ CVFEM สำหรับการหาผลเฉลยของความดัน

การประดิษฐ์สมการ CVFEM เพื่อคำนวณความดัน เริ่มต้นจากการอินทิเกรตสมการอนุกรมมวล หรือสมการที่ (4.56) ตลอดปริมาตรควบคุม Ω ดังนี้

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (4.86)$$

ใช้ทฤษฎีบทของเกาส์เข้ากับสมการที่ (4.86) จะได้สมการอินทิกรัลรอบพื้นผิวควบคุม Γ ดังนี้

$$\int (u n_x + v n_y) d\Gamma = 0 \quad (4.87)$$

หากเขียน Surface integral ในรูปของผลบวกจากทุกพื้นผิวควบคุม จะได้

$$\sum_k \{u_e n_x^k + v_e n_y^k\} \Delta A_k = 0 \quad (4.88)$$

โดย u_e และ v_e แทนความเร็ว u เฉลี่ยและ v เฉลี่ยตามลำดับ ภายในแต่ละปริมาตรควบคุมย่อย (e) หรือส่วนหนึ่งของเซลล์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมนั้น สมการคำนวณสำหรับความเร็วทั้งสองคือ

$$u_e = (\hat{u})_e - (d^u)_e \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e \quad (4.89)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_e = (\hat{v})_e - (d^v)_e \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e \quad (4.90)$$

สังเกตเห็นได้ว่าสมการที่ (4.89) และ (4.90) มีความคล้ายคลึงกับสมการที่ (4.69) และ (4.82) หลังจากนั้นให้แทนค่า u_e และ v_e ลงในสมการที่ (4.88) ดังนี้

$$\sum_k \left\{ (d^u)^k \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e n_x^k + (d^v)^k \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e n_y^k \right\} \Delta A_k = \sum_k \{ \hat{u}^k n_x^k + \hat{v}^k n_y^k \} \Delta A_k \quad (4.91)$$

ความลาดชันของความดันในทิศทาง x และ y ในสมการที่ (4.91) คำนวณได้จาก

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial x} p_j, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial y} p_j \quad (4.92)$$

หลังจากแทนสมการที่ (4.92) ลงในสมการที่ (4.91) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้สมการความดันสำหรับปริมาตรควบคุม i ดังนี้

$$[A^p] \{p\} = R_i^p \quad (4.93)$$

โดย

$$[A^p] = \sum_k \left\{ \frac{\partial N_j}{\partial x} (d^u)^k n_x^k + \frac{\partial N_j}{\partial y} (d^v)^k n_y^k \right\} \Delta A_k \quad (4.94)$$

$$R_i^p = \sum_k \{ \hat{u}^k n_x^k + \hat{v}^k n_y^k \} \Delta A_k \quad (4.95)$$

4.2.4 สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์พลังงาน

การประดิษฐ์สมการ CVFEM สำหรับการอนุรักษ์พลังงาน เริ่มต้นจากการคูณฟังก์ชันน้ำหนักให้แก่สมการสำหรับการอนุรักษ์พลังงาน

$$\int W \left\{ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.96)$$

เลือกใช้ $W = 1$ สำหรับพจน์ของการแพร่ของความร้อน ในขณะที่เดียวกันให้เลือกใช้ $W = 1 - \gamma$ สำหรับพจน์อื่นนอกเหนือจากพจน์ของการแพร่ของความร้อน ดังนี้

$$\int (1 - \nu) \left\{ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} d\Omega - \int \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.97)$$

เนื่องจาก

$$T = \sum_{j=1}^3 N_j T_j, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j \quad (4.98)$$

และใช้ทฤษฎีบทของเกาส์เพื่อเปลี่ยน volume integral เป็น surface integral เฉพาะในส่วนที่เกี่ยวข้องกับพจน์การพาและการแพร่ ทำให้ได้สมการ discretized สำหรับอุณหภูมิ T ในทุกจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับปริมาตรควบคุมหมายเลข i ดังนี้

$$[A^T]\{T\} = R_i^T \quad (4.99)$$

โดย

$$[A^T] = \sum_k \left(J_x^T n_x + J_y^T n_y \right)_k \Delta A_k \quad (4.100)$$

$$J_x^T = \rho c u \left[N_j - \bar{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - k \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad (4.101)$$

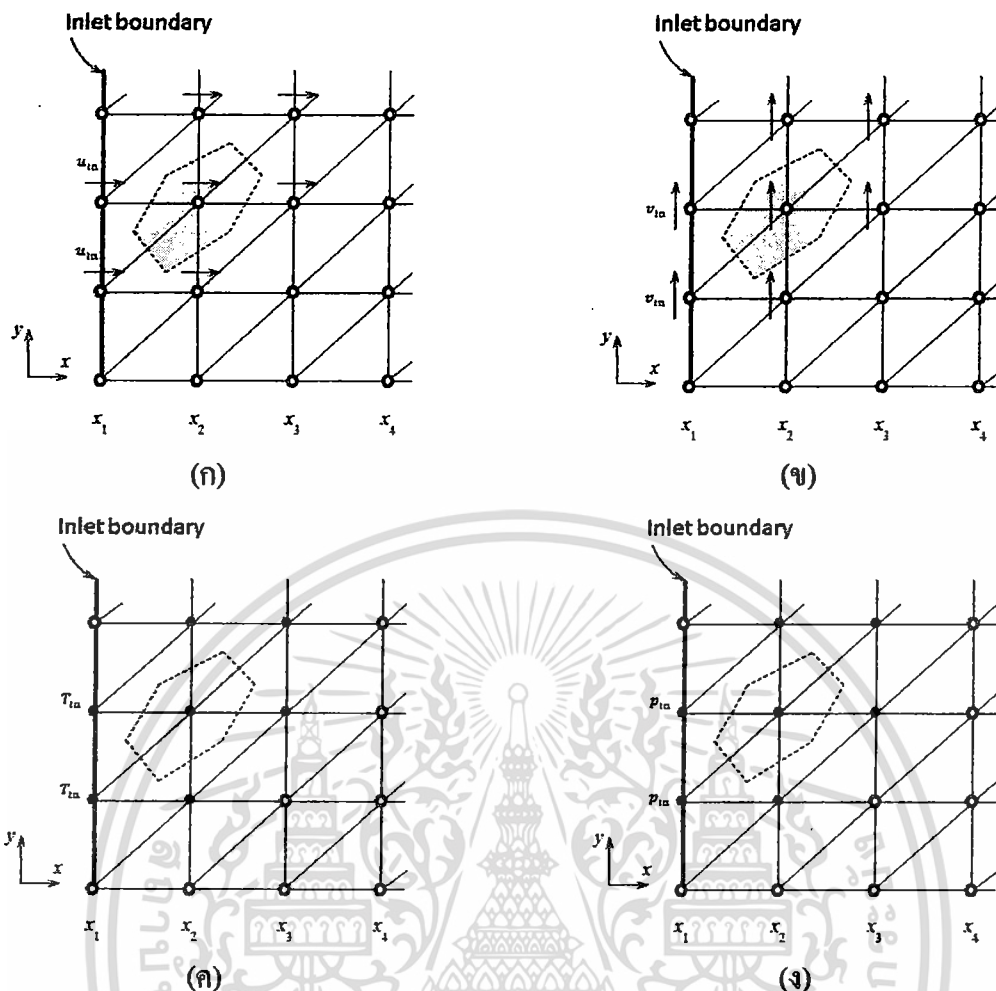
$$J_y^T = \rho c v \left[N_j - \bar{k} \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] - k \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad (4.102)$$

$$R_i^T = 0 \quad (4.103)$$

4.2.5 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตที่พิจารณาในงานวิจัยนี้มีหลายลักษณะดังนี้

1. **เงื่อนไขที่ทางเข้า** โดยทั่วไปเงื่อนไขที่ทางเข้า หมายถึง การกำหนดความเร็วที่จุดต่างๆบนหน้าตัดทางเข้า (Inlet velocity profile) ค่าความเร็วนี้อาจได้มาจากการกำหนดฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์เพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณเชิงวิเคราะห์ หรือ อาจเป็นค่าที่วัดได้จากการทดลองเมื่อนำผลเฉลยที่คำนวณได้สำหรับตัวแปรที่สนใจ มาเปรียบเทียบกับผลการทดลองจริง รูปที่ 4.10 แสดงปริมาตรควบคุมที่อยู่ใกล้กับทางเข้า ซึ่งเกี่ยวข้องกับ ความเร็ว u ความเร็ว v อุณหภูมิ และความดัน



รูปที่ 4.10 เงื่อนไขที่ทางเข้าสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ (ง) ความดัน

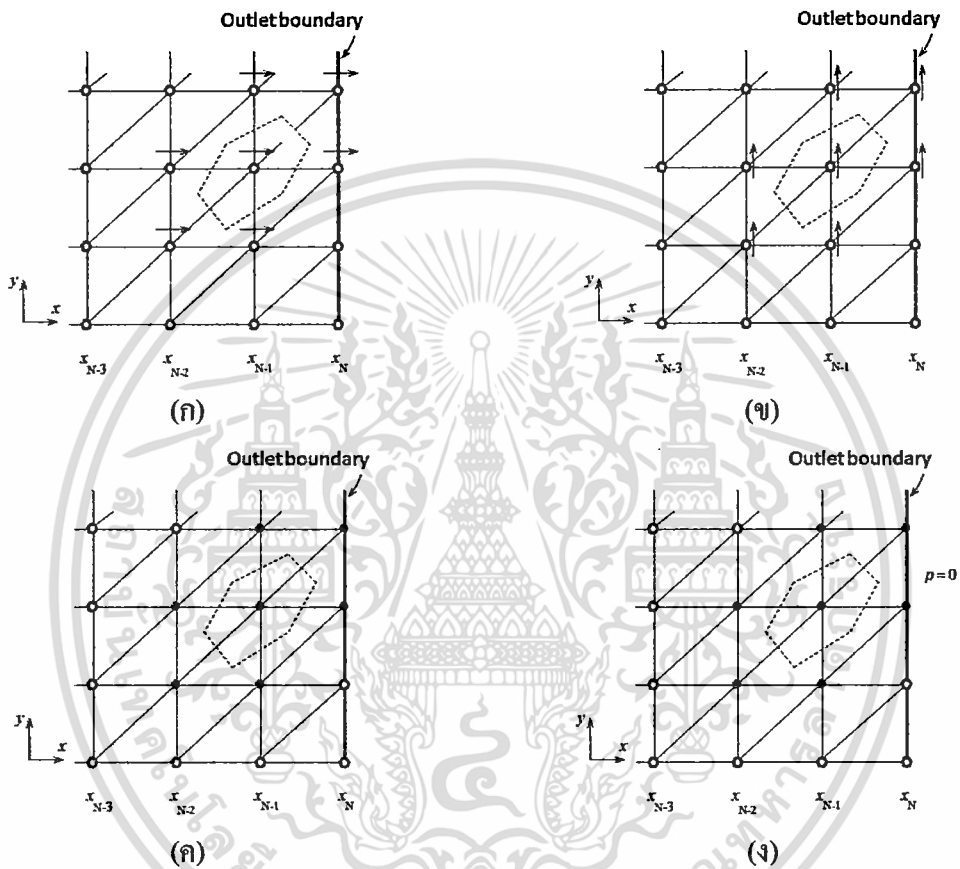
ความดันที่ทางเข้า p_{in} สำหรับรูปที่ 4.10 คำนวณได้ดังสมการประมาณค่าอย่างง่าย ดังนี้

$$p_{in} = p(x_1, y) = p(x_2, y) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=x_2} (x_2 - x_1) \tag{4.104}$$

2. เงื่อนไขที่ทางออก โดยปกติแล้ว ตัวแปรต่างๆที่หน้าตัดทางออกไม่ใช่สิ่งที่สามารถกำหนดค่าให้กับปัญหาได้ก่อนที่จะเริ่มทำการคำนวณ แต่ตัวแปรเหล่านั้นจะต้องคำนวณออกมาภายหลังจากการคำนวณไปแล้ว ซึ่งวิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้สามารถกำหนดค่าที่ถูกต้องให้กับเงื่อนไขที่ทางออกคือ สมมุติฐานของการไหลแบบพัฒนาตัวเต็มที่ (Fully developed flow) สำหรับการไหลซึ่งห่างจากบริเวณทางเข้ามากๆ การเปลี่ยนแปลงของความเร็วหรือตัวแปรที่ถูกพัฒามาโดยพลักซ์มวลของ

ของไหลจะมีค่าเกรเดียนต์ของความเร็วและอุณหภูมิเท่ากับศูนย์ ในทิศทางของความเร็วที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว (ทิศทางของ n) ดังนั้นเงื่อนไขของความเร็ว u ความเร็ว v และอุณหภูมิที่ทางออกคือ

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (4.104)$$



รูปที่ 4.11 เงื่อนไขที่ทางออกสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ (ง) ความดัน

รูปที่ 4.11 แสดงปริมาตรควบคุมของความเร็ว u ความเร็ว v และอุณหภูมิที่อยู่ใกล้กับทางออกของการไหล ดังนั้นสำหรับทางออกที่สอดคล้องกับรูปที่ 4.11 ซึ่งมีทิศทางของ n เป็นทิศทางเดียวกับพิกัด x ความเร็วทั้งสองแนวแกนและอุณหภูมิที่บริเวณทางออกนี้ซึ่งจะต้องเป็นเงื่อนไขให้กับการคำนวณของตัวแปรทั้งสามภายในโดเมนของปัญหา สามารถคำนวณได้จาก

$$u(x_N, y) = u(x_{N-1}, y), \quad v(x_N, y) = v(x_{N-1}, y), \quad T(x_N, y) = T(x_{N-1}, y) \quad (4.105)$$

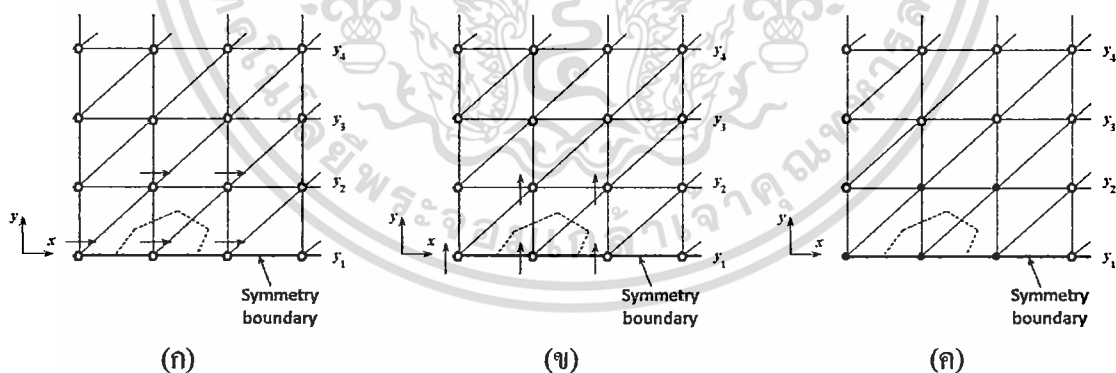
นอกจากนี้การกำหนดค่าความดันเป็นศูนย์ตลอดทั้งหน้าตัดทางออก ซึ่งเป็นสิ่งที่นิยมใช้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็ได้นำมาใช้ในงานวิจัยนี้เช่นกัน

3. **เงื่อนไขที่แกนสมมาตร** เงื่อนไขขอบเขตที่สามารถกล่าวได้ว่าเป็นเงื่อนไขแห่งความสมมาตรของปัญหาได้แก่ ขอบเขตที่ไม่มีกระแสไหลข้ามผ่านไปได้ และ ขอบเขตที่ไม่มีฟลักซ์ของปริมาณสเกลาร์ ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบนี้ ความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขตจะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์และกำหนดให้ค่าของตัวแปรอื่นๆซึ่งอยู่นอกขอบเขตของปัญหา เท่ากับค่าของตัวแปรนั้นๆที่จุดต่อภายในโดเมนซึ่งอยู่ใกล้กับขอบเขตของโดเมนมากที่สุด ยกตัวอย่างเช่น แกนสมมาตรในรูปที่ 4.12 ซึ่งมีทิศทางของ n เป็นทิศทางเดียวกันกับ y ดังนั้นเงื่อนไขของความเร็ว u ความเร็ว v และอุณหภูมิที่แกนสมมาตรคือ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4.106)$$

ค่าความเร็ว u และ อุณหภูมิที่อยู่บนขอบเขตนี้คำนวณได้จากค่าตัวแปรที่อยู่ภายในโดเมน แต่ความเร็ว v ถูกกำหนดค่าให้เป็นศูนย์ ดังสมการต่อไปนี้

$$u(x, y_1) = u(x, y_2), \quad v(x, y_1) = 0, \quad T(x, y_1) = T(x, y_2) \quad (4.107)$$



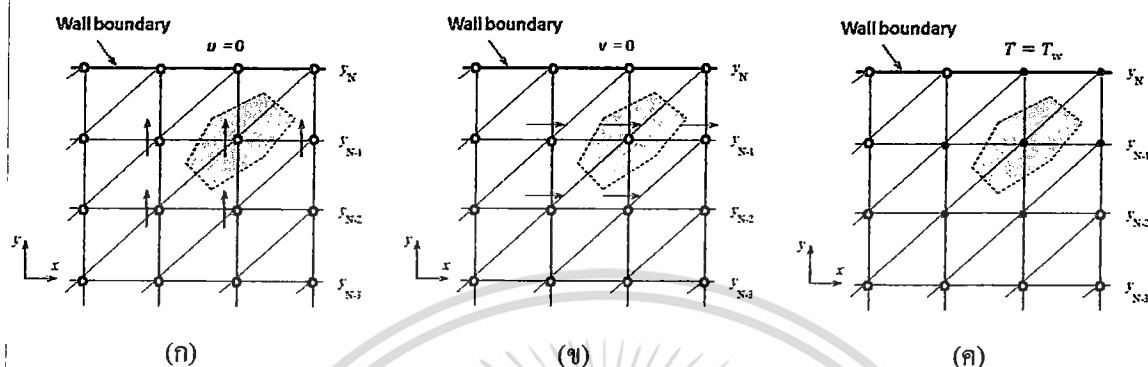
รูปที่ 4.12 เงื่อนไขที่แกนสมมาตรสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ

4. **เงื่อนไขที่ผนัง** ผนังเป็นขอบเขตที่ถูกนำมาใช้มากที่สุดให้กับ ปัญหาของไหลผ่านช่องแคบ ได้แก่ การไหลในท่อ การไหลของแม่น้ำลำคลอง เป็นต้น รูปที่ 4.13 แสดงปริมาณควบคุมบริเวณใกล้ผนังมากที่สุด สำหรับความเร็ว u , ความเร็ว v และอุณหภูมิ

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w \quad (4.108)$$

ความเร็วทั้งสองแนวแกน และอุณหภูมิที่ขอบเขตนี้สามารถคำนวณได้จาก

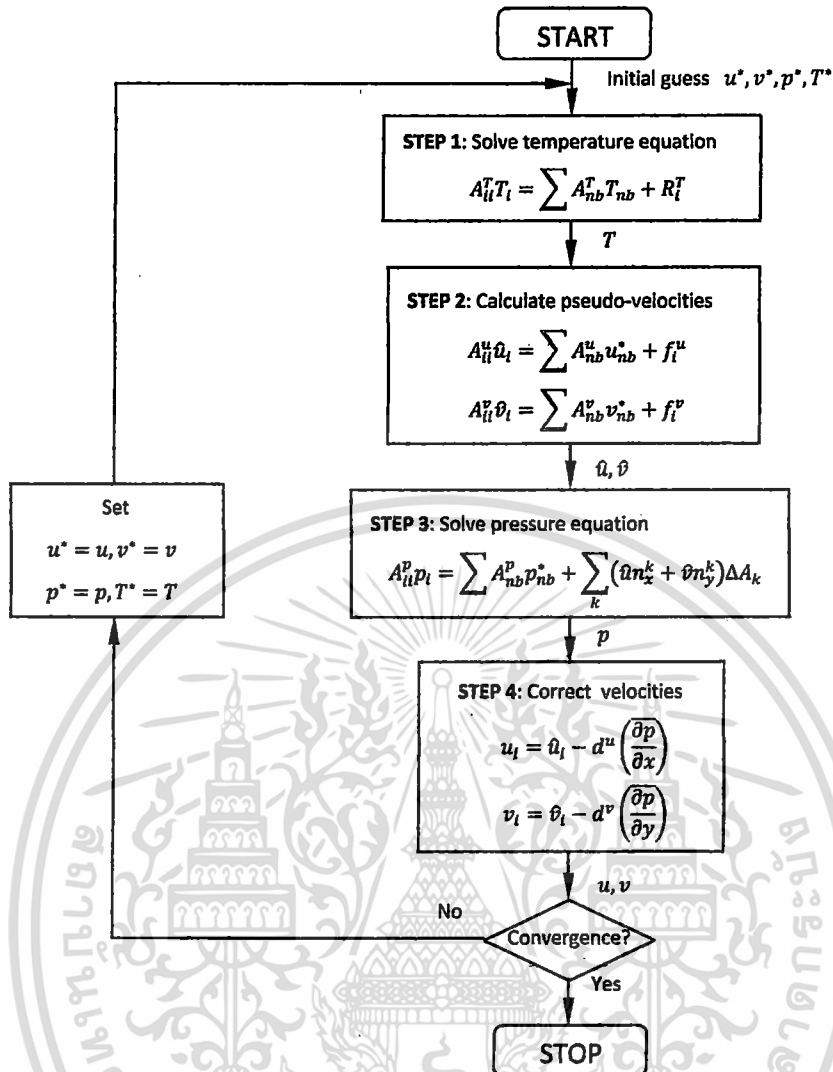
$$u(x, y_N) = 0, \quad v(x, y_N) = 0, \quad T(x, y_N) = T_w \quad (4.109)$$



รูปที่ 4.13 เงื่อนไขที่ผนังสำหรับ (ก) ความเร็ว u (ข) ความเร็ว v (ค) อุณหภูมิ

4.2.6 ขั้นตอนวิธีสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาการไหล

โดยสรุปแล้ว ปัญหาการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้นสามารถคำนวณแบบแยกกัน (segregated calculation) ได้ ตามขั้นตอนวิธีที่คล้ายกับ SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised) ซึ่งถูกนำเสนอไว้โดย Patankar [27] ในวิทยานิพนธ์นี้ได้จัดลำดับการคำนวณไว้ดังนี้ คำนวณอุณหภูมิเป็นอันดับแรก ตามด้วยการคำนวณ pseudo-velocities จากสมการโมเมนตัม ตามด้วยการคำนวณสมการสำหรับความดัน ต่อมาคือ การคำนวณค่าความเร็ว u และ v ขั้นตอนสุดท้ายของการกระทำซ้ำแต่ละครั้ง คือการตรวจสอบการลู่เข้าสู่คำตอบของตัวแปรทั้งหลายว่า ได้เกิดการลู่เข้าสู่คำตอบแล้วหรือไม่ ถ้าเกิดการลู่เข้าสู่คำตอบแล้ว ก็ให้หยุดการคำนวณและพิมพ์ผลลัพธ์ลงสู่ไฟล์ข้อมูล แต่ถ้ายังไม่ลู่เข้าสู่คำตอบ ให้ใช้กระบวนการ under-relaxation เพื่อปรับค่าเริ่มต้นของตัวแปรทั้งหลายให้กับการกระทำซ้ำครั้งใหม่ รายละเอียดเพิ่มเติมสำหรับขั้นตอนวิธีหาคำตอบสามารถค้นหาได้จากเอกสารอ้างอิง [28,29] สมการต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้พร้อมที่จะหาคำตอบด้วยวิธีเกาส์เซidel แต่ถ้าต้องการหาคำตอบด้วยวิธีอื่นที่ต้องการ จำเป็นที่จะต้องปรับแก้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนของการแก้สมการของแต่ละตัวแปรใหม่



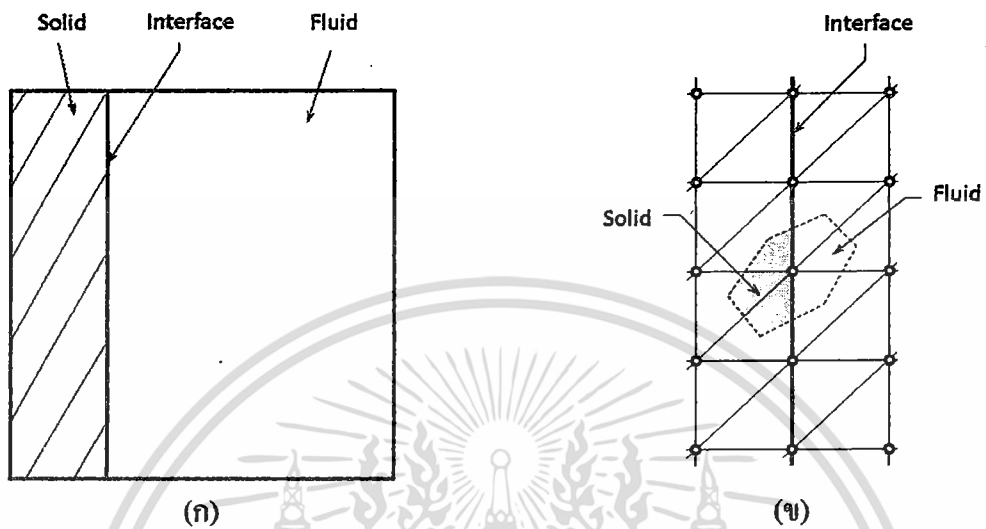
รูปที่ 4.14 แผนผังการแก้ปัญหาตามขั้นตอนวิธีแบบ SIMPLER

4.2.7 ขั้นตอนวิธีสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ในการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต การคำนวณในส่วนของคุณเร็วทั้งสองแนวแกน และความดันสำหรับจุดต่อที่อยู่ภายในของไหลสามารถกระทำได้เช่นเดียวกับ การคำนวณปัญหาการไหลแบบมีการถ่ายเทความร้อนร่วมอยู่ด้วยตามปกติ แต่ในส่วนของการคำนวณอุณหภูมิ จำเป็นจะต้องเพิ่มข้อมูลเกี่ยวกับคุณสมบัติเกี่ยวกับสสารของเซลล์เข้าไปด้วย รูปที่ 4.11 แสดงจุดต่อที่อยู่ในโดเมนซึ่งต้องการคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

ถ้าปริมาตรควบคุมใดมีส่วนหนึ่งอยู่ในเซลล์ของแข็ง หรือ บริเวณแรเงาของปริมาตรควบคุมในรูปที่ 4.11(ข) ก็จะนำเอาคุณสมบัติของของแข็งมาใช้ และใช้สมการของการนำความร้อนในของแข็ง

ร่วมอยู่ในการคำนวณอุณหภูมิ แต่ถ้ามีส่วนหนึ่งอยู่ในของไหลก็จะนำเอาคุณสมบัติของของไหลมาใช้ (บริเวณสีขาวของปริมาตรควบคุมในรูปที่ 4.11(ข)) และใช้สมการของการอนุรักษ์พลังงานในของไหลร่วมอยู่ในการคำนวณอุณหภูมิ



รูปที่ 4.15 (ก) โดเมนของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

(ข) ปริมาตรควบคุมบริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 5.1.3 คำนวณความเร็วในแนวแกน x ภายในของไหล โดยการสร้างสมการพีชคณิตสำหรับ คำนวณค่าของความเร็ว u จากสมการอนุพันธ์โมเมนต์ของของไหลในทิศทาง x และ จากเงื่อนไขขอบเขตต่างๆของความเร็ว u นอกจากนี้ในโปรแกรมย่อยต้องคำนวณ ค่าตัวแปร d^u ซึ่งจำเป็นต่อโปรแกรมย่อยสำหรับคำนวณความดันในลำดับต่อไป การดำเนินการในส่วนนี้กระทำโดยโปรแกรมย่อยชื่อว่า [SUBROUTINE SOLVE_U]
- 5.1.4 คำนวณความเร็วในแนวแกน y ภายในของไหล โดยสร้างสมการพีชคณิตสำหรับ คำนวณค่าของความเร็ว v จากสมการอนุพันธ์โมเมนต์ของของไหลในทิศทาง y และ จากเงื่อนไขขอบเขตต่างๆของความเร็ว v นอกจากนี้ในโปรแกรมย่อยนี้จะต้อง คำนวณค่าตัวแปร d^v ซึ่งจำเป็นต่อโปรแกรมย่อยสำหรับคำนวณความดันในลำดับ ต่อไป การดำเนินการในส่วนนี้กระทำโดยโปรแกรมย่อยชื่อว่า [SUBROUTINE SOLVE_V]
- 5.1.5 คำนวณความดันภายในของไหล โดยการสร้างสมการพีชคณิตของความดันที่จุดต่อ ต่างๆภายในของไหล กำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับความดัน และสุดท้ายทำการแก้ ระบบสมการด้วยวิธีเกาส์ไจเคิล ภายใต้เงื่อนไขของจำนวนครั้งในการกระทำซ้ำ และ พิกัดความเผื่อของคำตอบเชิงเลข (Numerical tolerance) การดำเนินการในส่วนนี้ กระทำโดยโปรแกรมย่อยชื่อว่า [SUBROUTINE SOLVE_P]
- 5.1.6 นำค่าความดันที่ได้จากข้อ 5.1.4 มาปรับแก้ค่าความเร็ว u และ v สำหรับสมการอนุพันธ์ โมเมนต์ของของไหลในทิศทาง x และ y ด้วยการเรียกโปรแกรมย่อยชื่อว่า [SUBROUTINE CORRECT_UV]
- 5.1.7 ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ โดยการเรียกโปรแกรมย่อยชื่อ [SUBROUTINE ERROR] โดยถ้าค่าความผิดพลาดของคำตอบ (error) มีค่าต่ำกว่าหรือเท่ากับเกณฑ์ที่ ยอมรับได้ ให้ดำเนินการต่อในข้อ 5.1.8 แต่ถ้าสูงกว่าเกณฑ์ดังกล่าวให้กลับไปทำใน ข้อ 5.1.2 ใหม่จนกระทั่งได้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าหรือเท่ากับเกณฑ์ที่ยอมรับได้ นั้น
- 5.1.8 พิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าความเร็วในทิศทาง x และ y ความดันและ อุณหภูมิ สำหรับทุกจุดต่อลงในไฟล์ขาออก (Output file) การทำงานดังกล่าวได้มา จากการเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE OUTPUT]

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม SUCV ถูกสรุปไว้ในรูปที่ 5.1

บทที่ 5

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

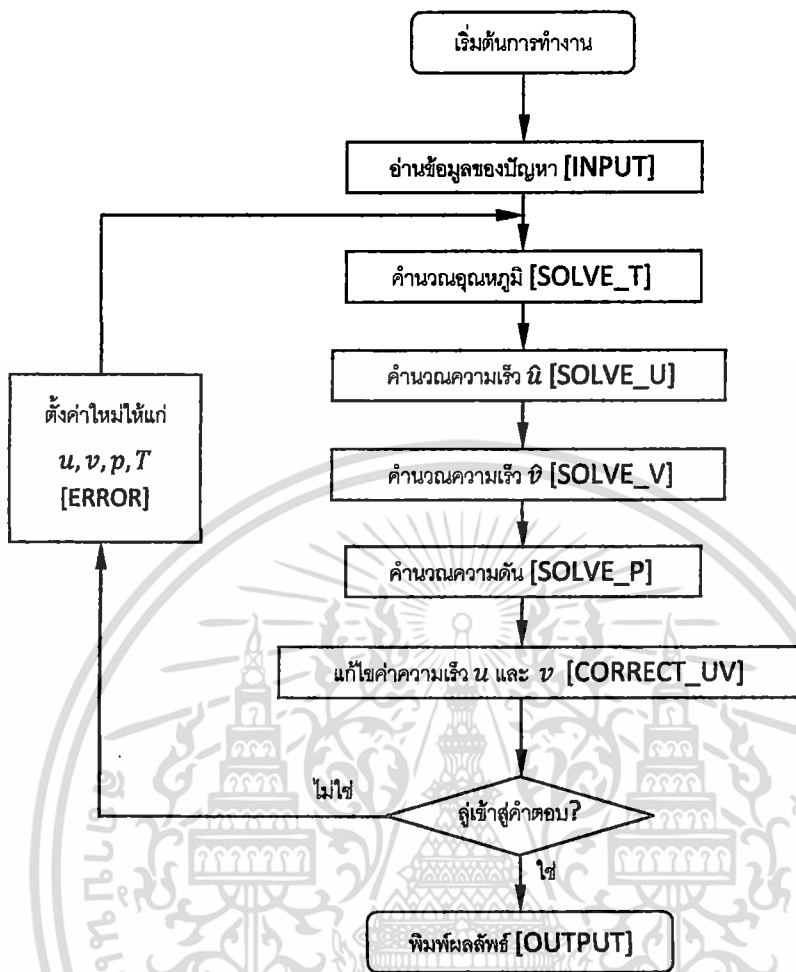
บทนี้นำเสนอการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จากสมการปริมาตรสี่เหลี่ยมต่างๆ ที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3 สำหรับการนำความร้อนในของแข็งที่สภาวะคงตัว และบทที่ 4 สำหรับการพาความร้อนในของไหลหนืดและอืดตัวไม่ได้ที่สภาวะคงตัว โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวถูกเขียนขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ผ่านการคอมไพล์ด้วยโปรแกรม Compaq Visual Fortran 6 การแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตสำหรับงานวิจัยนี้ ตั้งเป้าหมายไว้ว่า โปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นจะต้องสามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้ และง่ายต่อการทำความเข้าใจ โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า SUCV.f90 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 ลักษณะของโปรแกรม SUCV

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SUCV ประกอบด้วย โปรแกรมหลัก (Main program) และ โปรแกรมย่อย (Subroutine) โดยมีขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

5.1.1 เริ่มต้นการทำงาน โดยการอ่านเพิ่มข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input file) เช่นจำนวนจุดต่อและจำนวนเซลล์ทั้งหมดของปัญหา จำนวนจุดต่อที่ได้กำหนดให้เป็นเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแบบต่างๆ ค่าคุณสมบัติต่างๆ ได้แก่ ค่าความหนาแน่นของของแข็งและของไหล ค่าความหนืดของของไหล สัมประสิทธิ์การขยายตัวของของไหล สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งและของไหล ค่าปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองในของแข็ง ต่อจากนั้น จะอ่านค่าพิกัดของจุดต่อต่างๆ ค่าเริ่มต้นของตัวแปรต่างๆ ได้แก่ ความเร็วในทิศทาง x และ y ความดัน และอุณหภูมิ และสุดท้าย จะอ่านหมายเลขจุดต่อที่ประกอบกันขึ้นเป็นเซลล์ และชนิดของเซลล์ว่าเป็นเซลล์ที่อยู่ในของแข็งหรือของไหล โดยเรียกโปรแกรมย่อยนี้ว่า [SUBROUTINE INPUT]

5.1.2 คำนวณอุณหภูมิที่จุดต่อภายในของแข็งและของไหล โดยการสร้างสมการพีชคณิตสำหรับ อุณหภูมิภายในของแข็งและของไหล สำหรับเซลล์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับจุดต่อนั้น จะต้องได้รับการตรวจสอบว่าเป็นเซลล์ภายในของแข็งหรือของไหล เพื่อให้ใช้ค่าคุณสมบัติให้ถูกต้อง การดำเนินการในส่วนนี้กระทำโดยโปรแกรมย่อยชื่อว่า [SUBROUTINE SOLVE_T]



รูปที่ 5.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม SUCV

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม SUCV

รายละเอียดของโปรแกรม SUCV ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

5.3 ลักษณะของไฟล์นำเข้าข้อมูลสู่โปรแกรม SUCV

ลักษณะของข้อมูลนำเข้าสู่โปรแกรมวิเคราะห์การไหลแบบคอนจูเกต สามารถจำแนกออกเป็น 7 ส่วนย่อย ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่ต้องการเขียนอธิบายจุดประสงค์ และเงื่อนไขต่างๆ ของไฟล์เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่างๆ ที่มีจำนวนบรรทัดเท่ากับที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น: 2

CVFEM FOR CONJUGATE NATURAL CONVECTION IN A CAVITY:
Gr = 1000, Pr = 0.71, K = 1

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา พร้อมค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก ชื่อเรียกใน โปรแกรมที่ระบุถึง จำนวนจุดต่อในของไหล, จำนวนจุดต่อทั้งหมดในของแข็งและของไหล, จำนวนเซลล์, จำนวนเซลล์ที่อยู่บริเวณขอบเขต, จำนวนรอบของการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

บรรทัดต่อไป ตัวเลขสำหรับจำนวนจุดต่อในของไหล, จำนวนจุดต่อทั้งหมดในของแข็งและของไหล, จำนวนเซลล์, จำนวนเซลล์ที่อยู่บริเวณขอบเขต, จำนวนรอบของการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้

ตัวอย่างเช่น:

N_FLUID	NNODE	NELEM	NBOUN	NBPR	NBSYM	NITER	TOL
961	1147	2160	0	0	0	2000	1.00E-04

หมายเหตุ: NBOUN หมายถึง จำนวนจุดต่อที่ขอบเขตทางออก ถ้าเท่ากับ 0 ไม่ต้องป้อนข้อมูลส่วนที่ 6

NBPR หมายถึง จำนวนจุดต่อที่ขอบเขตทางเข้า ถ้าเท่ากับ 0 ไม่ต้องป้อนข้อมูลส่วนที่ 7

NBSYM หมายถึง จำนวนจุดต่อที่ขอบเขตสมมาตรถ้าเท่ากับ 0 ไม่ต้องป้อนข้อมูลส่วนที่ 8

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆของสสารที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

บรรทัดแรก ชื่อเรียกใน โปรแกรมที่ระบุถึงคุณสมบัติต่างๆ สำหรับของแข็งและของไหล

บรรทัดต่อไป ตัวเลขสำหรับค่าความหนาแน่นของของไหล (DEN), ความหนืดของของไหล (VIS), ค่าความจุความร้อนจำเพาะของของไหล (HCAP), สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของแข็ง (Ks), สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล (Kf), ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (G), สัมประสิทธิ์การขยายตัวของของไหล (BETA), อุณหภูมิอ้างอิงสำหรับพจน์ของแรงลอยตัวของของไหล (TREF), การผลิตความร้อนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในของแข็ง (QG), อุณหภูมิต่ำสุดของโดเมน (TMIN), อุณหภูมิสูงสุดของโดเมน (TMAX)

ตัวอย่างเช่น: DEN VIS HCAP Ks Kf G BETA TREF QG TMIN TMAX
1 0.118322 5.91608 10 1 10 0.05 20 0 20 60

หมายเหตุ: G เท่ากับ 0 หมายถึง ไม่คิดผลของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก, BETA เท่ากับ 0 หมายถึง การไหลที่ไม่มี การลอยตัวเนื่องจากผลต่างของอุณหภูมิภายในของไหล (ไม่ใช่ การพาความร้อนแบบอิสระ)

ส่วนที่ 4 ข้อมูลต่างๆของจุดต่อ

บรรทัดแรก ชื่อเรียกสำหรับข้อมูลต่างๆของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขสำหรับหมายเลขจุดต่อ, เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศทาง x , เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศทาง y , เงื่อนไขขอบเขตของความดัน, เงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิ, ตำแหน่งของจุดต่อในทิศทาง x , ตำแหน่งของจุดต่อในทิศทาง y , ค่าของความเร็วในทิศทาง x , ค่าของความเร็วในทิศทาง y , ค่าของความดัน และค่าของอุณหภูมิ

ยกตัวอย่างเช่น:

NODE	IBCU	IBCV	IBCP	IBCT	X	Y	U	V	P	T
1	T	T	F	0	0.00	0.00	0.00	51.52339		
2	T	T	F	0	0.0333333	0	0.00	-4.65E-02	50.09036	
3	T	T	F	0	0.0666667	0	0.00	-6.69E-02	48.65627	
	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
1145	T	T	T	F	-0.1	1	0.00	0.00	57.02897	
1146	T	T	T	F	-0.0666667	1	0.00	0.00	56.05028	
1147	T	T	T	F	-0.0333333	1	0.00	0.00	55.08154	

หมายเหตุ: เงื่อนไขขอบเขตของความเร็ว n มีชื่อเรียกว่า IBCU สามารถกำหนดค่าได้สองลักษณะได้แก่

IBCU = T จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าตามที่กำหนดไว้ในไฟล์นำเข้า และไม่ต้องทำการคำนวณใดๆต่อความเร็ว n ที่จุดต่อนั้น

IBCU = F จุดต่อนั้นจะต้องทำการคำนวณภายในโปรแกรมย่อยที่เกี่ยวข้อง

ถ้าจุดต่อใดเป็นของแข็ง ให้กำหนด IBCU = T และระบุค่าความเร็ว n ที่จุดต่อนั้นเป็นศูนย์ ตัวแปรอื่นๆได้แก่ IBCV ใช้สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับความเร็ว v , IBCP ใช้สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับความดัน และ IBCT ใช้สำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับอุณหภูมิ ตัวแปรเหล่านี้สามารถกำหนดได้สองลักษณะเช่นเดียวกับ

IBCU ยกตัวอย่างเช่น ถ้า $IBCP = T$ หมายความว่าจุดต่อนั้นถูกกำหนดให้เป็นค่าที่ขอบเขตของปัญหาแล้ว

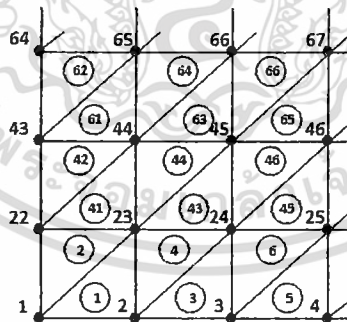
ส่วนที่ 5 ข้อมูลต่างๆของเซลล์

บรรทัดแรก ชื่อเรียกสำหรับข้อมูลของเซลล์และชนิดสูตรของเซลล์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขระบุหมายเลขของเซลล์, หมายเลขของจุดต่อทั้งสามของเซลล์ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา, ชนิดสูตรของเซลล์

ตัวอย่างเช่น:	CELL NO.	I	J	K	LTYPE
	1	1	2	23	T
	2	1	23	22	T
	3	2	3	24	T
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	1390	724	725	749	F
	1391	725	750	749	F
	1392	725	726	750	F

หมายเหตุ LTYPE คือ ตัวแปรที่กำหนดว่าเซลล์นั้นอยู่ในของแข็งหรือของไหล ถ้า $LTYPE = T$ หมายความว่า เซลล์อยู่ในของไหล และถ้า $LTYPE = F$ หมายความว่าเซลล์อยู่ในของแข็ง รูปที่ 5.2 แสดงตัวอย่างของหมายเลขจุดต่อกับหมายเลขของเซลล์สามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้องกัน สำหรับ โปรแกรมนี้กำหนดให้ระบุข้อมูลของเซลล์ที่อยู่ภายในของไหลให้เสร็จสิ้น ก่อนที่จะใส่ข้อมูลของเซลล์ที่อยู่ภายในของแข็ง



รูปที่ 5.2 ตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างหมายเลขจุดต่อกับหมายเลขของเซลล์สามเหลี่ยม

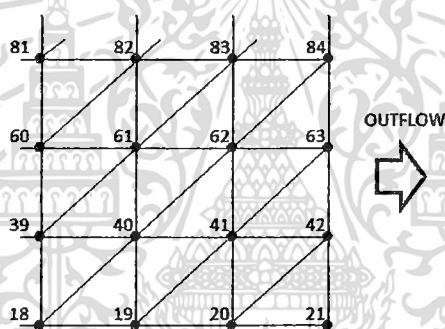
ส่วนที่ 6 จุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตทางออกของการไหล

บรรทัดแรก ชื่อเรียกสำหรับจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตทางออกของการไหล

บรรทัดต่อไป ตัวเลขระบุหมายเลขจุดต่อ, หมายเลขจุดต่อภายใน โดเมนและอยู่ใกล้กับทางออกมากที่สุด, หมายเลขจุดต่อที่ทางออก

ตัวอย่างเช่น:	NODE	IBIN	IBOU
	1	20	21
	2	41	42
	3	62	63
	⋮		⋮
	19	398	399
	20	419	420
	21	440	441

หมายเหตุ ถ้าในปัญหาไม่มีจุดต่อในส่วนนี้ ให้ใส่ค่า NBOUN เท่ากับ 0 และไม่ต้องใส่ข้อมูลในส่วนที่ 6 นี้ลงไปไฟล์นำเข้า เช่นตัวอย่างการไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ถ้าปัญหาการไหลนั้นมีการไหลเข้าและออก จำเป็นที่จะต้องใส่ข้อมูลในส่วนนี้ให้แก่ไฟล์นำเข้าด้วย รูปที่ 5.3 แสดงตัวอย่างของจุดต่อบางส่วนที่ทางออกของปัญหา



รูปที่ 5.3 หมายเลขจุดต่อบริเวณทางออกของการไหล

ส่วนที่ 7 จุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตทางเข้าของการไหล

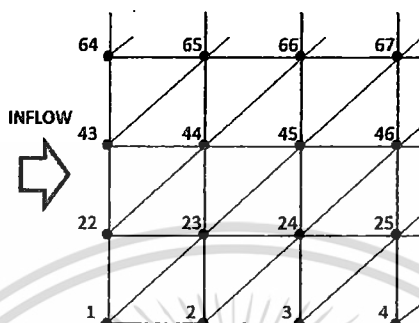
บรรทัดแรก ชื่อเรียกสำหรับจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตทางเข้าของการไหล

บรรทัดต่อไป ตัวเลขระบุหมายเลขจุดต่อ, หมายเลขจุดต่อภายใน โดเมน และอยู่ใกล้กับทางเข้ามากที่สุด, หมายเลขจุดต่อที่ทางเข้า

ตัวอย่างเช่น:	NODE	IBPO	IBPI
	1	1	2
	2	22	23
	3	43	44
	⋮		⋮
	20	400	401
	21	421	422

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ ถ้าปัญหาที่กำลังพิจารณาไม่มีจุดต่อในส่วนนี้ ให้ใส่ค่า NBPR เท่ากับ 0 และไม่ต้องใส่ข้อมูลในส่วนที่ 7 นี้ลงไปในไฟล์นำเข้า รูปที่ 5.4 แสดงตัวอย่างหมายเลขจุดต่อบางส่วนที่ทางเข้าของการไหล ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในการคำนวณค่าความดันที่จุดต่อซึ่งอยู่ตรงทางเข้าของปัญหา



รูปที่ 5.4 หมายเลขจุดต่อบริเวณทางเข้าและขอบสมมาตรของการไหล

ส่วนที่ 8 จุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตสมมาตรของการไหล

บรรทัดแรก ชื่อเรียกสำหรับจุดต่อที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตสมมาตรของการไหล

บรรทัดต่อไป ตัวเลขระบุหมายเลขจุดต่อ, หมายเลขจุดต่อภายในโดเมนและอยู่ใกล้กับขอบเขตสมมาตรมากที่สุด, หมายเลขจุดต่อที่ขอบเขตสมมาตร

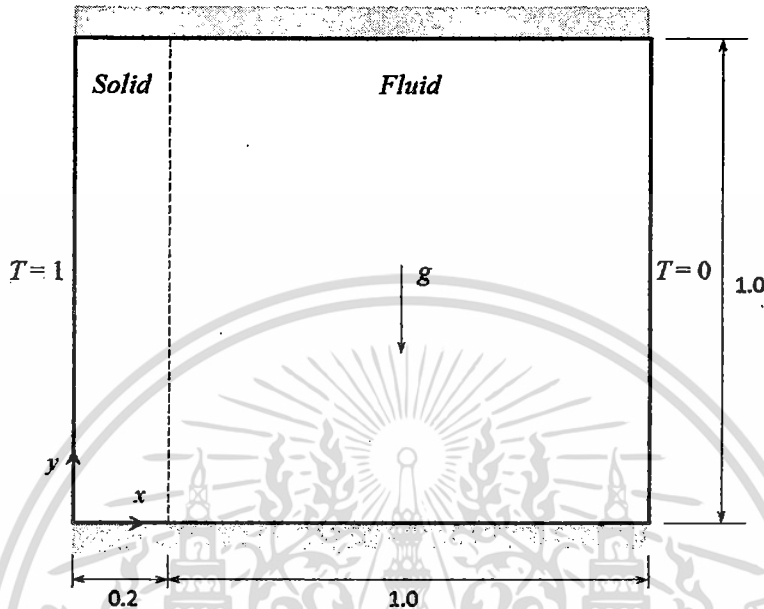
ตัวอย่างเช่น:

NODE	IBSI	IBSO
1	23	2
2	24	3
3	25	4
⋮	⋮	⋮
18	39	19
19	41	20
20	42	21

หมายเหตุ ถ้าในปัญหาไม่มีจุดต่อในส่วนนี้ ให้ใส่ค่า NBSYM เท่ากับ 0 และไม่ต้องใส่ข้อมูลในส่วนที่ 8 นี้ลงไปในไฟล์นำเข้า ตัวอย่างของหมายเลขจุดต่อบางส่วนที่ขอบเขตสมมาตรของการไหลบริเวณขอบด้านล่างของรูปที่ 5.4

5.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม SUCV ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต

เนื้อหาในหัวข้อนี้เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรม SUCV ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีผนังนำความร้อนแสดงไว้ในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย

ปัญหาดังกล่าวถูกวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SUCV โดยเริ่มจากการสร้างเซลล์รูปสามเหลี่ยมจำนวน 2160 เซลล์ จำนวนจุดต่อทั้งหมดในโดเมนคือ 1147 จุดต่อ โดยมี 961 จุดต่อที่ใช้ในการคำนวณต่างๆภายในของไหล ความร้อนไม่สามารถผ่านผนังด้านบนและด้านล่างของช่องปิดได้เนื่องจากมีการหุ้มฉนวนไว้ ผนังด้านซ้ายถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 0 ในขณะที่ผนังด้านขวาถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 1 IBCU และ IBCV ของจุดต่อที่อยู่ตรงผนังทั้งสองด้านจะถูกกำหนดค่าให้เป็น T หรือ TRUE ทั้งหมด IBCP สำหรับจุดต่อที่มุมล่างซ้ายของผนังถูกกำหนดให้เป็น T เพียงจุดเดียว IBCT สำหรับจุดต่อที่อยู่บนผนังด้านซ้ายและขวาถูกกำหนดให้เป็น T เนื่องจากปัญหานี้ไม่มีการไหลเข้าและออกจากโดเมนดังนั้น $NBOUN = NBPR = 0$ รวมทั้ง ไม่มีขอบเขตสมมาตรนั่นคือ $NBSYM = 0$ ดังนั้นไม่ต้องมีป้อนข้อมูลต่อจากข้อมูลความสัมพันธ์ระหว่างจุดต่อกับเซลล์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าการป้อนข้อมูลสิ้นสุดที่ข้อมูลส่วนที่ 5

การสร้างชุดเซลล์สามเหลี่ยมแบบเรียงเป็นระเบียบ (Structured mesh) สำหรับปัญหานี้ได้กระทำด้วยการใช้สูตรของโปรแกรม spreadsheet ชื่อว่า Microsoft Excel เมื่อผู้ใช้ระบุชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าได้อย่างถูกต้อง โปรแกรม SUCV จะแสดงข้อมูลของ error ของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณในแต่ละรอบของการกระทำซ้ำ ของ SIMPLER algorithm บนหน้าจอกอมพิวเตอร์

ผังรูปที่ 5.6

iter =	1	0.4933E-04	0.5301E-04	0.1799E-03	0.8762E-03
iter =	2	0.3755E-04	0.5661E-04	0.7156E-03	0.8253E-03
iter =	3	0.5420E-04	0.9186E-04	0.1109E-02	0.7930E-03
iter =	4	0.7433E-04	0.1322E-03	0.1330E-02	0.7722E-03
iter =	5	0.9396E-04	0.1692E-03	0.1472E-02	0.7584E-03
:	:	:	:	:	:
iter =	377	0.2266E-03	0.2552E-03	0.6212E-03	0.1253E-03
iter =	378	0.2249E-03	0.2536E-03	0.6189E-03	0.1249E-03
iter =	379	0.2231E-03	0.2520E-03	0.6153E-03	0.1245E-03
iter =	380	0.2214E-03	0.2504E-03	0.6133E-03	0.1242E-03
iter =	381	0.2197E-03	0.2489E-03	0.6121E-03	0.1238E-03
iter =	382	0.2180E-03	0.2473E-03	0.6082E-03	0.1234E-03
:	:	:	:	:	:
iter =	714	0.3877E-04	0.7283E-04	0.2176E-03	0.4856E-04
iter =	715	0.3863E-04	0.7265E-04	0.2176E-03	0.4843E-04
iter =	716	0.3854E-04	0.7245E-04	0.2159E-03	0.4830E-04
iter =	717	0.3842E-04	0.7227E-04	0.2157E-03	0.4817E-04
iter =	718	0.3831E-04	0.7207E-04	0.2150E-03	0.4804E-04
iter =	719	0.3819E-04	0.7187E-04	0.2154E-03	0.4790E-04
:	:	:	:	:	:
iter =	862	0.2581E-04	0.4875E-04	0.1494E-03	0.3238E-04
iter =	863	0.2577E-04	0.4861E-04	0.1495E-03	0.3229E-04
iter =	864	0.2566E-04	0.4849E-04	0.1483E-03	0.3220E-04
iter =	865	0.2560E-04	0.4835E-04	0.1479E-03	0.3211E-04
:	:	:	:	:	:
iter =	937	0.2101E-04	0.3969E-04	0.1222E-03	0.2636E-04
iter =	938	0.2097E-04	0.3956E-04	0.1214E-03	0.2629E-04
iter =	939	0.2092E-04	0.3945E-04	0.1222E-03	0.2622E-04
iter =	940	0.2087E-04	0.3932E-04	0.1225E-03	0.2615E-04
iter =	941	0.2077E-04	0.3926E-04	0.1213E-03	0.2608E-04
:	:	:	:	:	:
iter =	1010	0.1725E-04	0.3245E-04	0.1011E-03	0.2159E-04
iter =	1011	0.1717E-04	0.3237E-04	0.1025E-03	0.2154E-04
iter =	1012	0.1716E-04	0.3228E-04	0.1014E-03	0.2148E-04
iter =	1013	0.1710E-04	0.3218E-04	0.1005E-03	0.2142E-04
iter =	1014	0.1705E-04	0.3209E-04	0.9903E-04	0.2135E-04

รูปที่ 5.6 การพิมพ์ข้อมูล error ของตัวแปรต่างๆ บนหน้าจอกอมพิวเตอร์ขณะใช้โปรแกรม SUCV

ผลลัพธ์ของความเร็วทั้งสองแนวแกน ความดัน และอุณหภูมิของทุกจุดต่อในโดเมนจะถูกพิมพ์ลงในไฟล์คำตอบดังแสดงในรูปที่ 5.7

1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	58.84468
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-6.0674373E-02	56.88665
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-8.1321001E-02	54.93930
4	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-4.3501735E-02	53.00924
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	5.0171196E-02	51.10523
:	:	:	:	:
266	-0.5227561	-0.1292992	1.904208	33.02788
267	-0.5013648	-0.1800765	1.997377	32.00423
268	-0.4724487	-0.2284175	2.090609	31.00219
269	-0.4364918	-0.2731324	2.181272	30.01446
270	-0.3941568	-0.3127045	2.266485	29.03463
:	:	:	:	:
531	3.8277473E-02	0.4947442	1.738211	55.04300
532	6.0075182E-02	0.5589727	1.730032	53.69511
533	8.2320005E-02	0.5870638	1.708299	52.36946
534	0.1036173	0.5860558	1.674851	51.07110
535	0.1230346	0.5620514	1.632227	49.80377
:	:	:	:	:
841	7.2742842E-02	7.3596351E-02	3.455035	56.47644
842	0.1182143	8.4192418E-02	3.443070	55.52475
843	0.1680607	8.9081280E-02	3.404572	54.57891
844	0.2195084	8.9339405E-02	3.339901	53.63600
845	0.2702420	8.5951015E-02	3.250705	52.69234
:	:	:	:	:
1142	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	60.00000
1143	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	59.89524
1144	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	59.79099
1145	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	59.68774
1146	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	59.58595
1147	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	59.48611

รูปที่ 5.7 ผลลัพธ์ที่ปรากฏอยู่ในไฟล์ผลลัพธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้ เป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งแบ่งออกได้เป็นสองส่วนหลักได้แก่ การนำความร้อนในของแข็ง และการพาความร้อนในของไหล การตรวจสอบในส่วนของการนำความร้อนในของแข็งได้ถูกแสดงไว้ตัวอย่างที่ 6.1 และ 6.2 การตรวจสอบในส่วนของการพาความร้อนในของไหลได้ถูกแสดงไว้ในตัวอย่างที่ 6.3 ถึง 6.7 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้รับการตรวจสอบด้วยตัวอย่างที่ 6.8 ถึง 6.10 ในการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิธี CVFEM กับ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีอื่นๆ หรือ ผลการทดลองในปัญหาเดียวกัน จะต้องใช้พารามิเตอร์ไร้มิติที่มีค่าเท่ากัน ดังนั้นนิยามโดยทั่วไปของพารามิเตอร์ไร้มิติที่ต้องใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนจะต้องกล่าวถึงเป็นอันดับแรก

พารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนภายในของไหลได้แก่

1. เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ (Reynolds number, Re)
2. พรันเทิลนัมเบอร์ (Prandtl number, Pr)
3. เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number, Ra)
4. นัสเซิลท์นัมเบอร์ (Nusselt number, Nu)

เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ระบุว่าการไหลนั้นเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือแบบปั่นป่วน ในการพาความร้อนแบบบังคับ (Forced convection) เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์มีความหมายทางกายภาพว่า เป็นอัตราส่วนของแรงเฉื่อย (Inertia force) กับแรงเนื่องจากความหนืด (Viscous force) [30] ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (6.1)$$

โดย ρ แทนความหนาแน่นของของไหล

U แทนความเร็วของของไหลที่ทางเข้า

L แทนความยาวคุณลักษณะ (Characteristic length) ในโดเมนของการไหล

μ แทนความหนืดพลศาสตร์ของของไหล

ν แทนความหนืดจลนศาสตร์ของของไหล

พริ้นด์เทิลนัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ระบุความแตกต่างของการไหล ในปรากฏการณ์การพาความร้อนแบบอิสระและแบบบังคับ พริ้นด์เทิลนัมเบอร์มีความหมายทางกายภาพว่า เป็นอัตราส่วนของการแพร่กระจายของโมเมนตัม (Momentum diffusivity) ในชั้นขอบเขตของความเร็ว (Velocity boundary layer) ก็กับการแพร่กระจายของพลังงานความร้อน (Thermal diffusivity) ในชั้นขอบเขตของอุณหภูมิ (Thermal boundary layer) [30] ซึ่งหาได้จากสมการ

$$Pr = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (6.2)$$

โดย c แทนความร้อนจำเพาะของของไหล

k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล

α แทนการแพร่กระจายเชิงความร้อน (Thermal diffusivity) ของของไหลซึ่งเป็นอัตราส่วนของการนำความร้อนและความสามารถในการจุความร้อน [30] ดังสมการ

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (6.3)$$

เรย์เลห์นัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ระบุรูปแบบการไหล ว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือแบบปั่นป่วนในปรากฏการณ์การพาความร้อนแบบอิสระ เรย์เลห์นัมเบอร์มีความหมายทางกายภาพ ว่าเป็นอัตราส่วนของการลอยตัวกับแรงเนื่องจากความหนืด ซึ่งหาได้จากสมการ

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (6.4)$$

โดย g แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

β แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนของของไหล

ΔT แทนผลต่างของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหล

นัสเซลท์นัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้วัดปริมาณการถ่ายเทความร้อน โดยการพาความร้อนจากพื้นผิวที่พิจารณา ซึ่งหาค่าได้จาก

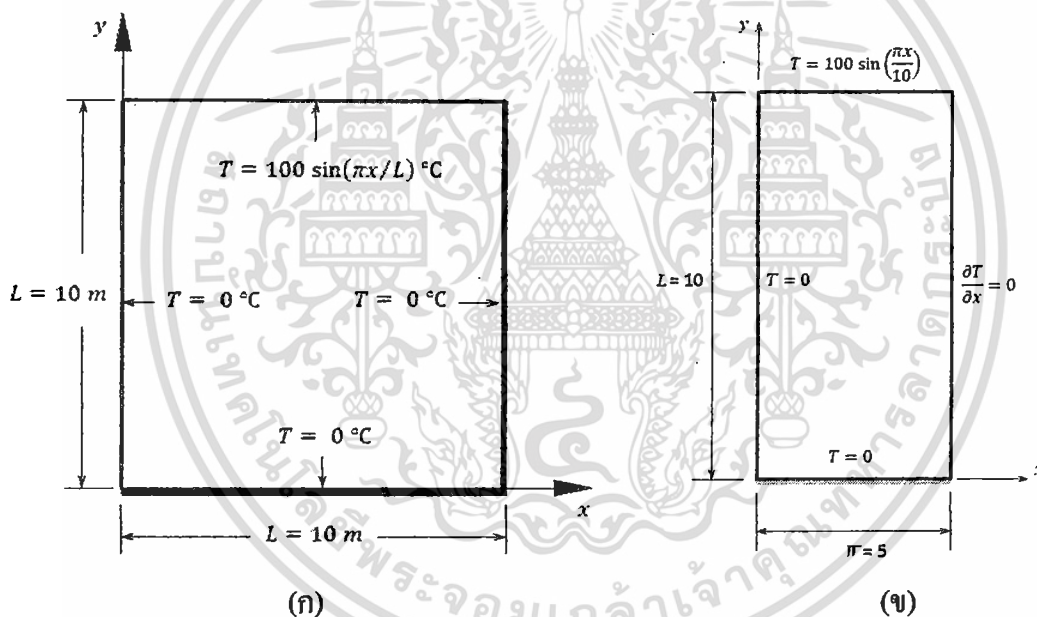
$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (6.5)$$

โดย h แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (Convection heat transfer coefficient) ของของไหล

6.1 การนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Heat conduction in a square plate) [18]

สำหรับปัญหานี้เป็นตัวอย่างการจำลองปัญหาการนำความร้อนด้วยวิธี CVFEM โดยมีลักษณะของปัญหาเป็นการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $L = 10\text{ m}$ แสดงไว้ในรูปที่ 5.1 เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านบน ($y = 10\text{ m}$) มีอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันดังนี้ $T = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)^\circ\text{C}$ ในขณะที่ผนังทั้งสามด้านที่เหลือถูกกำหนดให้มีอุณหภูมิเป็น 0°C ไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในแผ่นสี่เหลี่ยม ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแผ่นวัสดุคือ $1\text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$ คำนึงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหานี้คือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6.6)$$



รูปที่ 6.1 ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

(ก) รูปร่างของปัญหาทั้งหมด (ข) รูปร่างของปัญหาที่ลดขนาดลง

สมการสำหรับเงื่อนไขขอบเขตได้แก่

$$T(0, y) = 0 \quad (6.7a)$$

$$T(10, y) = 0 \quad (6.7b)$$

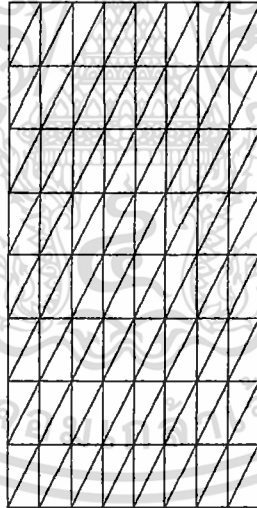
$$T(x, 0) = 0 \quad (6.7c)$$

$$T(x, 10) = 100 \sin(\pi x/10) \quad (6.7d)$$

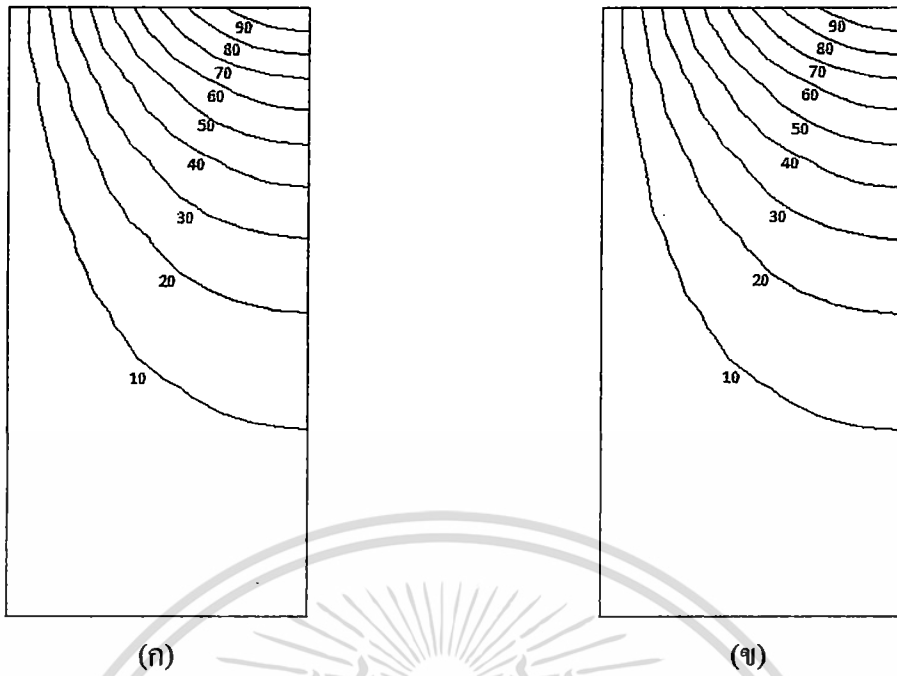
ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้คือ

$$T(x, y) = 100 \frac{\sin(\pi x/10) \sinh(\pi y/10)}{\sinh(\pi)} \quad (6.8)$$

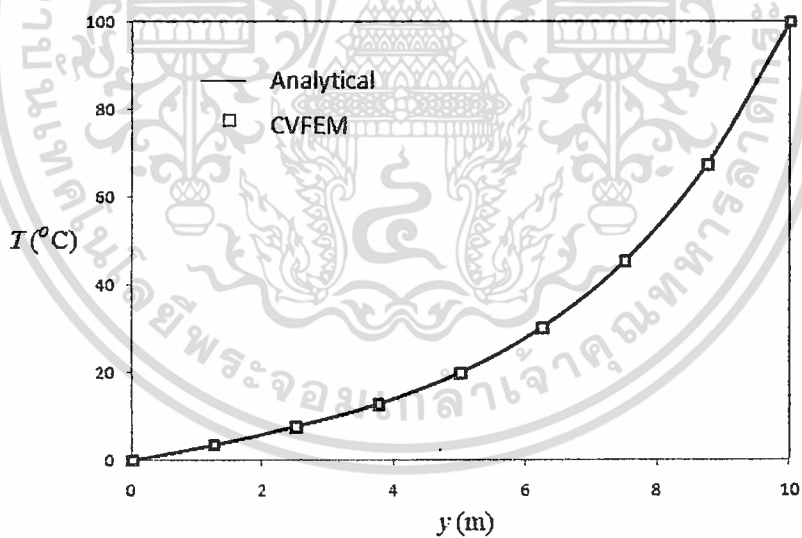
ปัญหานี้มีลักษณะที่สมมาตรรอบแกน $x = 5 \text{ m}$ ทำให้สามารถลดขนาดการคำนวณลงมาจากรูป 6.1(ก) กลายเป็นรูป 6.2(ข) เซลล์สามเหลี่ยมจำนวน 128 เซลล์ ประกอบด้วยจุดต่อจำนวน 81 จุดต่อ ซึ่งใช้ในการคำนวณของวิธี CVFEM ได้แสดงในรูปที่ 6.2 ผลลัพธ์ของการกระจายตัวของอุณหภูมิซึ่งได้จากวิธี CVFEM แสดงไว้ในรูปที่ 6.3 รูปที่ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำและวิธี CVFEM ที่ตำแหน่ง y ต่างๆ ที่ระยะ $x = 5 \text{ m}$ จะเห็นได้ว่า คำตอบทั้งสองมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีแม้ว่าจำนวนจุดต่อที่ใช้ในการคำนวณจะไม่มากนัก



รูปที่ 6.2 รูปร่างเซลล์สามเหลี่ยมสำหรับแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปที่ 6.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิในแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ได้จาก
(ก) ผลเฉลยแม่นยำตรง (ข) ผลลัพธ์จากวิธี CVFEM



รูปที่ 6.4 การเปรียบเทียบระหว่างผลลัพธ์ของวิธี CVFEM และผลเฉลยแม่นยำตรง
สำหรับอุณหภูมิตามระยะทาง y ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นสี่เหลี่ยม ($x = 5$ m)

6.2 การนำความร้อนภายในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสามารถผลิตความร้อนได้เอง [11]

โดเมนของปัญหาในตัวอย่างนี้ คือ แผ่นวัสดุกว้าง 1 หน่วยและยาว 1 หน่วย มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเป็นค่าคงที่ ($k = 1$) สามารถผลิตความร้อนขึ้นได้เอง สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการนำความร้อนภายในของแข็งนี้คือ

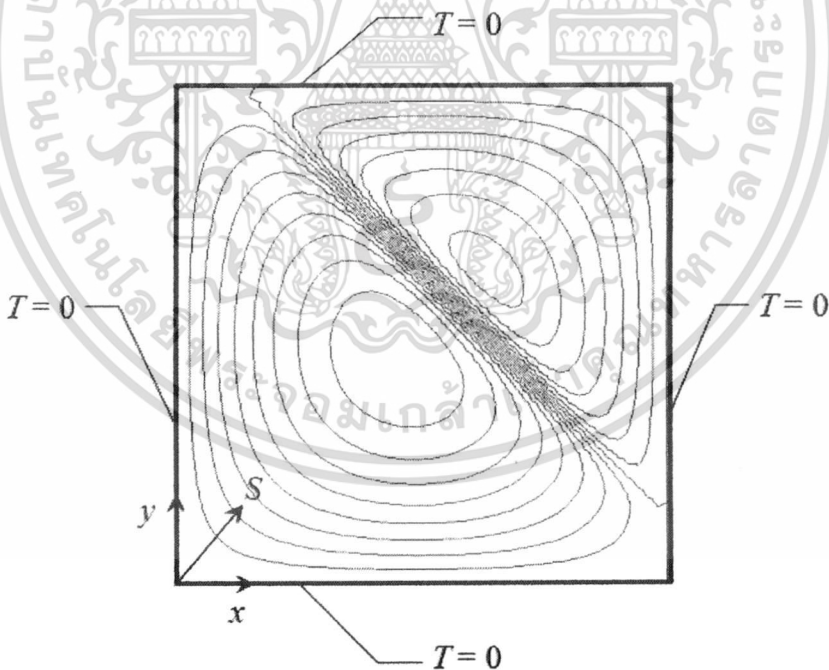
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k} \quad (6.11)$$

โดย

$$\begin{aligned} \frac{Q}{k} = 2y(1-y) & \left[\tan^{-1}\beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2\beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \\ & + 2x(1-x) \left[\tan^{-1}\beta - \frac{\alpha(1-2y)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2\beta y(1-y)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

และ

$$\beta = \alpha \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - 0.8 \right) \quad (6.13)$$



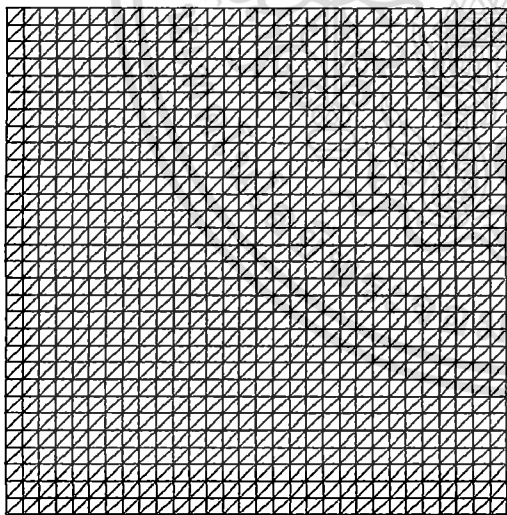
รูปที่ 6.5 ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการนำความร้อนภายในแผ่นวัสดุที่ผลิตความร้อนขึ้นเองได้

เงื่อนไขขอบเขตที่ด้านทั้ง 4 ของแผ่นวัสดุเป็นเงื่อนไขของการกำหนดอุณหภูมิคงที่เท่ากับศูนย์ ผลเฉลยแม่นยำสำหรับปัญหาการกระจายอุณหภูมิในแผ่นวัสดุนี้แสดงไว้ในรูปที่ 6.5 และสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

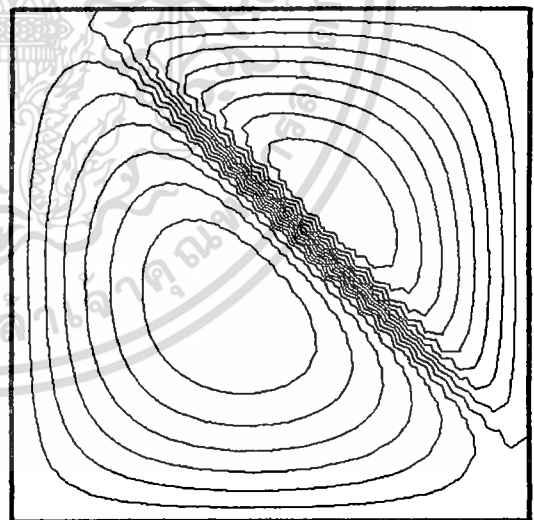
$$T(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)\tan^{-1}\beta \quad (6.14)$$

โดยที่ α เป็นค่าคงที่สำหรับสมการที่ (6.13) ที่กำหนดความชันของการเปลี่ยนแปลงจากอุณหภูมิต่ำในบริเวณด้านล่างซ้ายของแผ่นวัสดุไปสู่อุณหภูมิสูงในบริเวณด้านบนขวาบน ถ้าสังเกตจากรูปที่ 6.5 จะพบว่าบริเวณที่มีความชันของอุณหภูมิมากที่สุดคือ บริเวณที่มีเส้นชั้นของอุณหภูมิเป็นจำนวนมากเบียดชิดกัน สำหรับตัวอย่างนี้ α มีค่าเท่ากับ 50 เส้นชั้นอุณหภูมิต่ำสุดและสูงสุดสำหรับรูปที่ 6.5 คือ -0.08 หน่วยและ 0.07 หน่วย ตามลำดับ แต่ละชั้นของอุณหภูมิห่างกันเท่ากับ 0.01 หน่วย

ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนสำหรับตัวอย่างนี้ด้วยวิธี CVFEM เซลล์สามเหลี่ยมชุดแรกที่เลือกใช้ประกอบด้วย 961 จุดต่อและ 1800 เซลล์ ดังรูปที่ 6.6 (ก) การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากวิธี CVFEM ด้วย Mesh ชุดแรก อยู่ในรูปที่ 6.6 (ข) แม้ว่าวิธี CVFEM จะสามารถคำนวณอุณหภูมิภายในโดเมนได้ แต่ยังคงพบที่มีความคลาดเคลื่อน (Error) ไปจากคำตอบแบบแม่นยำอยู่พอสมควร สังเกตจากรูปร่างของเส้นชั้นอุณหภูมิตั้งบริเวณซึ่งความลาดชันสูง มีความราบเรียบน้อยกว่าคำตอบแบบแม่นยำ โดยเฉพาะในแนวทแยงจากมุมซ้ายบนถึงมุมขวาล่าง



(ก)

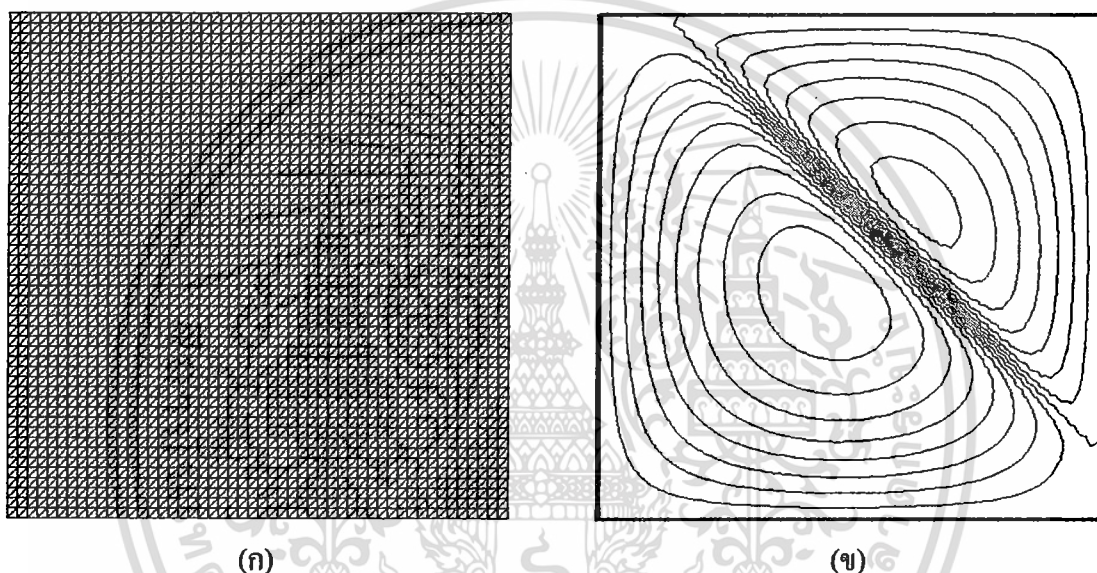


(ข)

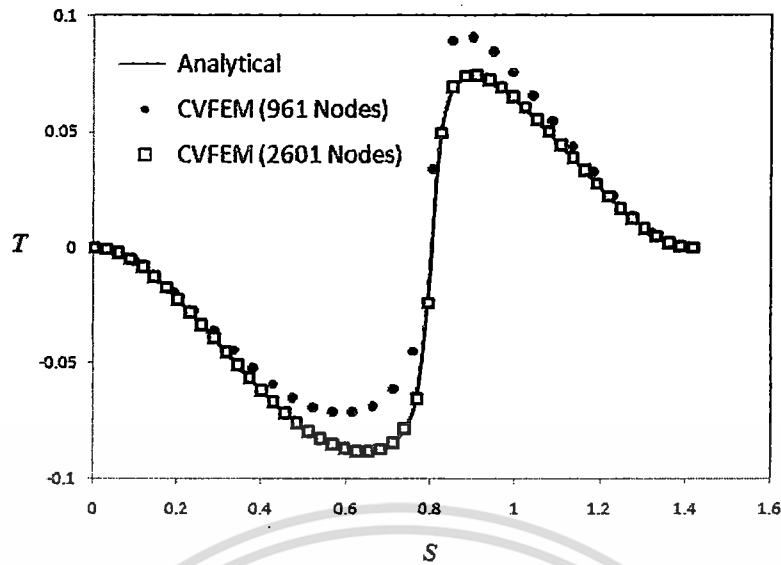
รูปที่ 6.6 (ก) แบบจำลอง CVFEM ประกอบด้วย 961 จุดต่อและ 1800 เซลล์

(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิตั้งคำนวณได้จากวิธี CVFEM

เพื่อให้ได้คำตอบที่คลาดเคลื่อนน้อยลง เซลล์สามเหลี่ยมชุดที่สองที่มีจำนวนจุดต่อและเซลล์มากขึ้น โดยมีจำนวน 2601 จุดต่อและ 5000 เซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 6.7 (ก) ได้ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา อุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี CVFEM ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.7 (ข) เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 6.5 กับ 6.7 (ข) พบว่าความแตกต่างของการกระจายอุณหภูมิมีน้อยมาก และเส้นชั้นอุณหภูมิที่ได้จากเซลล์ชุดที่สองนี้มีลักษณะของการแกว่งไปมาน้อยกว่าเซลล์ชุดแรกมาก เมื่อพิจารณาเฉพาะอุณหภูมิที่อยู่ตามแนวแกน S ในรูปที่ 6.8 พบว่า อุณหภูมิที่คำนวณได้จากเซลล์ชุดที่สองตรงกับคำตอบแม่นยำอย่างมาก ในขณะที่อุณหภูมิที่คำนวณได้จากเซลล์ชุดแรกมีค่าต่ำกว่าคำตอบแม่นยำในบริเวณ $0 < S < \sqrt{2}/2$ และสูงกว่าคำตอบแม่นยำในบริเวณ $\sqrt{2}/2 \leq S < \sqrt{2}$



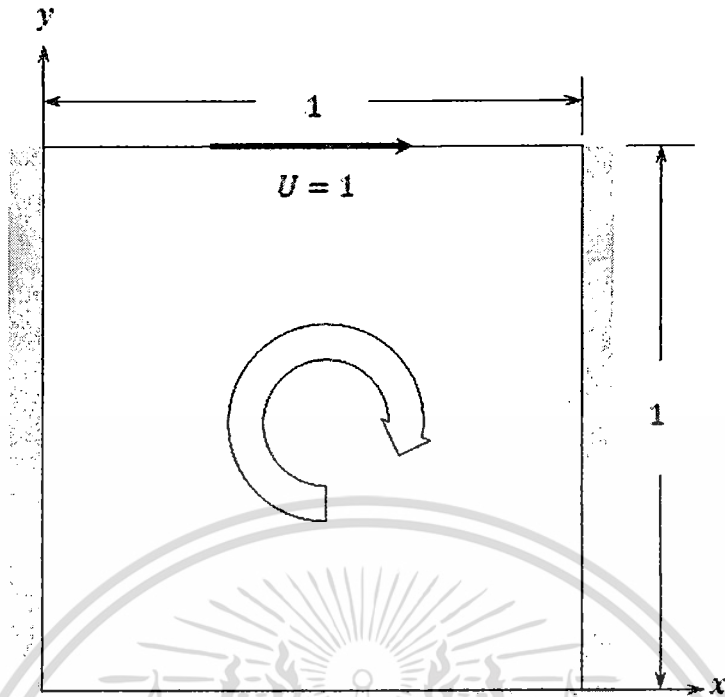
รูปที่ 6.7 (ก) แบบจำลอง CVFEM ประกอบด้วย 2601 จุดต่อและ 5000 เซลล์
(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธี CVFEM



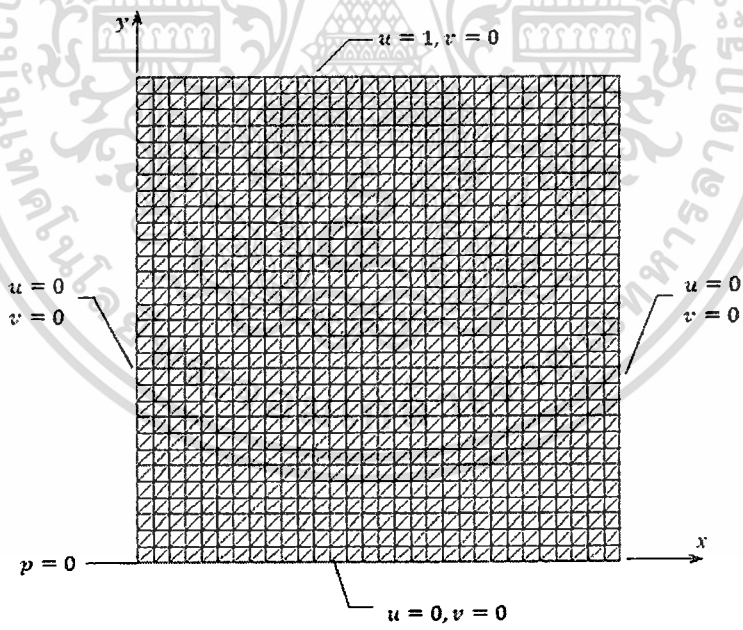
รูปที่ 6.8 รูปร่างของอุณหภูมิตามแนวแกน s ที่ได้จากการคำนวณด้วย CVFEM และผลเฉลยแม่นยำ

6.3 การไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Lid-driven cavity flow) [9,11]

การไหลหมุนวนช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วยถูกใช้สำหรับทดสอบการคำนวณค่าความดัน ความเร็ว u และ v โดยไม่มีฟลักซ์มวลเข้าและออกจากโดเมน ขอบด้านบนของช่องปิดถูกกำหนดให้มีเฉพาะความเร็วในทิศทาง x ขนาดเท่ากับ 1 หน่วย ในสามด้านที่เหลือ เป็นขอบเขตแบบผนังซึ่งต้องกำหนดให้ค่าความเร็วทั้งสองแนวแกนมีค่าเท่ากับศูนย์ การไหลที่สอดคล้องกับความ เป็นจริงคือการไหลในทิศทางตามเข็มนาฬิกาดังรูปที่ 6.9 เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา และรูปร่าง Mesh ที่ใช้ในการคำนวณซึ่งประกอบด้วย 961 จุดต่อ 1800 เซลล์ แสดงอยู่ในรูปที่ 6.10 ขนาดของ ความเร็วทั้งสองแนวแกน และความดันภายในโดเมนเปลี่ยนแปลงไปตามค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ ซึ่งมี นิยามเป็นไปตามสมการที่ (6.1) ค่าคงที่สำหรับการไหลนี้คือ $\rho = 1$, $U = 1$ และ $L = 1$



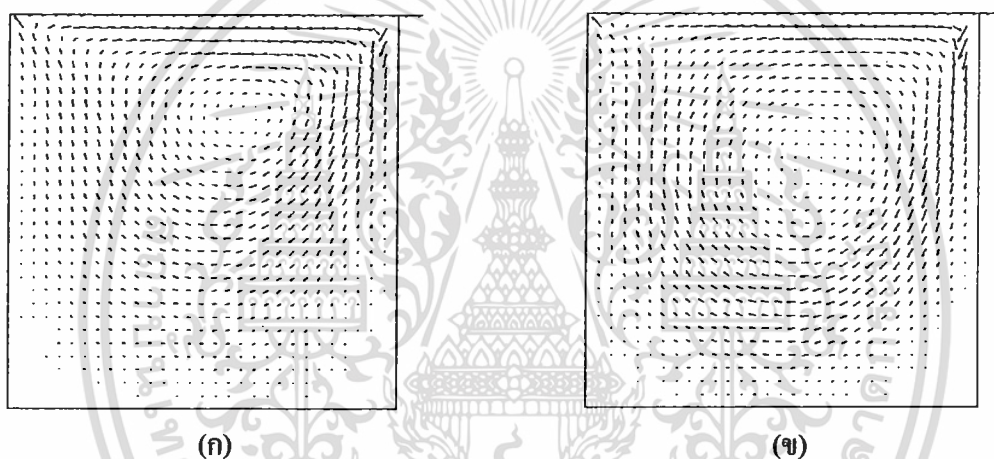
รูปที่ 6.9 รูปร่างปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ



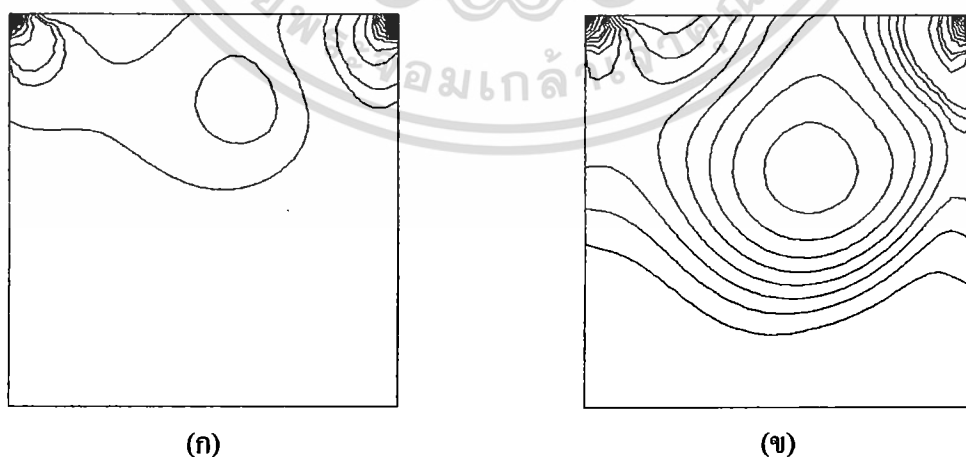
รูปที่ 6.10 แบบจำลองของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบและเงื่อนไขขอบเขต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การตรวจสอบความแม่นยำของวิธี CVFEM ได้กระทำไว้สำหรับค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สองค่า ได้แก่ 100 และ 400 รูปที่ 6.11 (ก) และ 6.11 (ข) แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในช่องเปิดที่เงื่อนไขของ $Re = 100$ และ $Re = 400$ ตามลำดับ การกระจายตัวของความดันในช่องเปิดสำหรับกรณี $Re = 100$ และ $Re = 400$ ถูกแสดงอยู่ในรูปที่ 6.12 (ก) และ 6.12 (ข) ตามลำดับ ความดันต่ำสุดและสูงสุดภายในช่องเปิดสำหรับกรณี $Re = 100$ คือ -2.16 และ 3.33 หน่วยตามลำดับ ในขณะที่ความดันต่ำสุดและสูงสุดภายในช่องเปิดสำหรับกรณี $Re = 400$ คือ -0.65 และ 1.74 หน่วยตามลำดับ เส้น contour ของความดันที่แสดงอยู่ในรูปที่ 6.12 (ก) และ 6.12 (ข) เป็นเส้นที่ได้จากการแบ่งช่วงความดันระหว่างค่าต่ำสุดและสูงสุดแบบสม่ำเสมอจำนวน 50 ระดับ

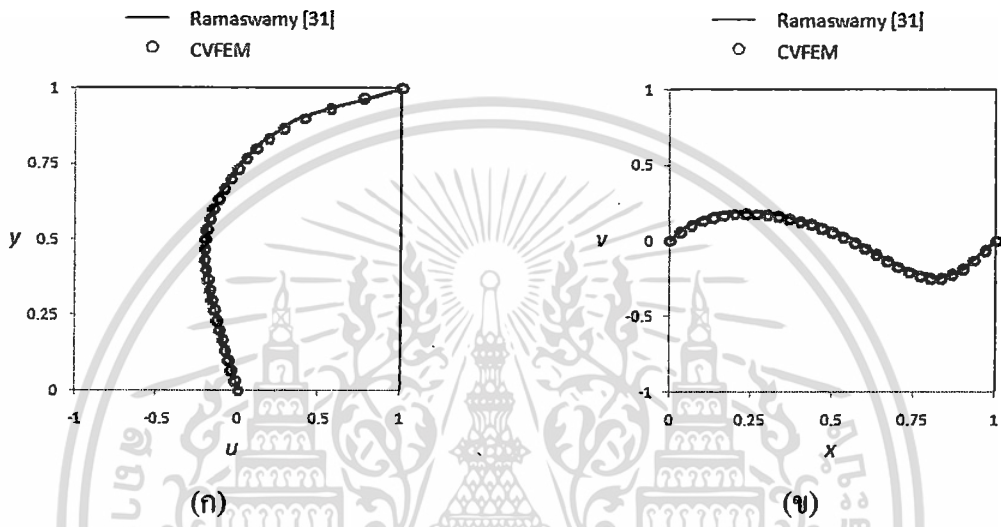


รูปที่ 6.11 เวกเตอร์ของความเร็วภายในช่องแคบสำหรับกรณี (ก) $Re = 100$ (ข) $Re = 400$

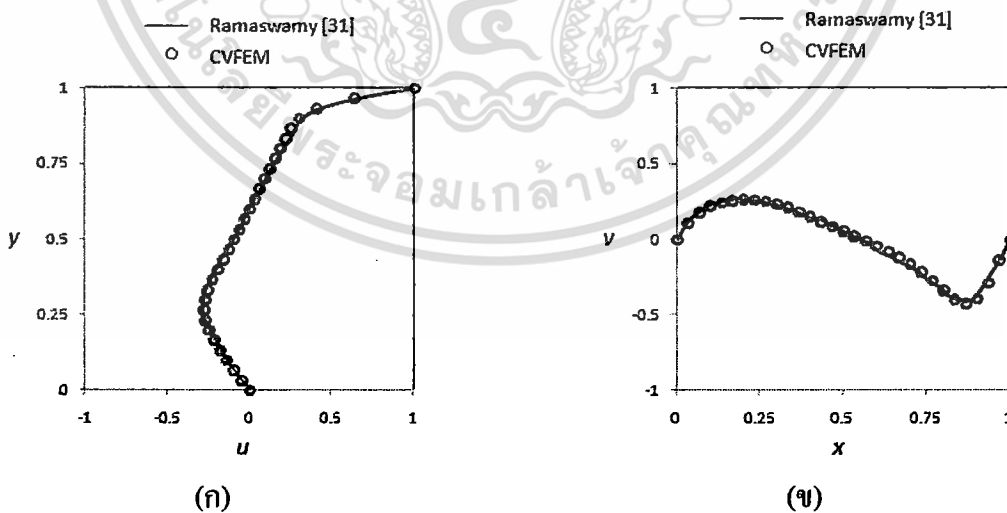


รูปที่ 6.12 ความดันภายในช่องแคบสำหรับกรณี (ก) $Re = 100$ (ข) $Re = 400$

เมื่อพิจารณาในภาพรวมของการไหลวนในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กรณี $Re = 100$ ของไหล มีลักษณะหมุนวนเฉียงไปทางขวาบนของช่องปิดเล็กน้อย สำหรับ $Re = 400$ ของไหลหมุนวนเข้า ใกล้บริเวณกึ่งกลางของช่องปิด ขนาดของความเร็วในแนวแกน x และ y ที่ระยะ $x = 0.5$ และ $y = 0.5$ ตามลำดับถูกนำเสนอไว้ในรูปที่ 6.13 สำหรับกรณี $Re = 100$ และรูปที่ 6.14 สำหรับกรณี $Re = 400$ นอกจากนี้ คำตอบของวิธี CVFEM ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของ Ramaswamy [31] พบว่ามีความใกล้เคียงกันมาก



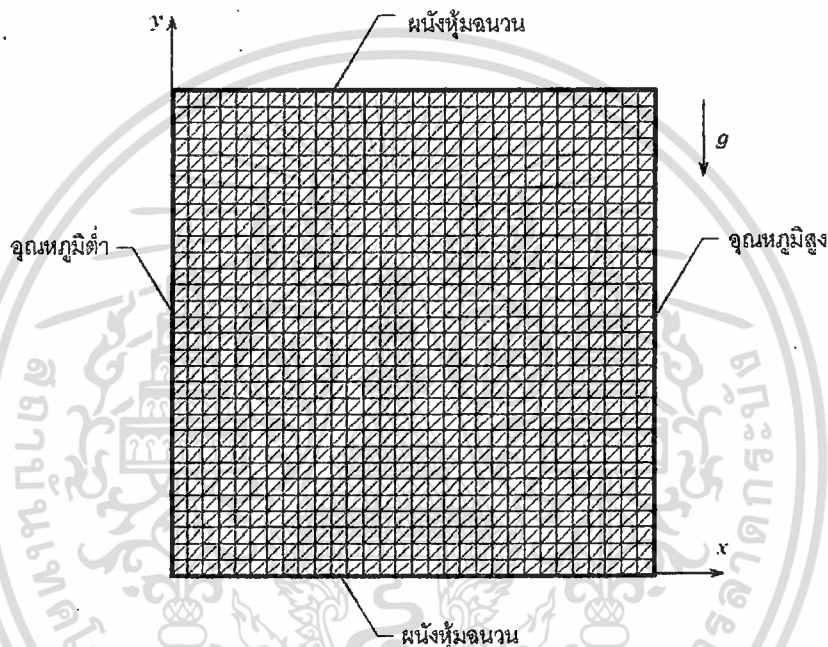
รูปที่ 6.13 (ก) รูปร่างความเร็ว u ที่ $x = 0.5$ (ข) รูปร่างความเร็ว v ที่ $y = 0.5$ สำหรับ $Re = 100$



รูปที่ 6.14 (ก) รูปร่างความเร็ว u ที่ $x = 0.5$ (ข) รูปร่างความเร็ว v ที่ $y = 0.5$ สำหรับ $Re = 400$

6.4 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Free convection in square enclosure) [10, 11, 32]

รูปแบบของการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วย แสดงในรูปที่ 6.15 (สร้างโดยโปรแกรม Excel) แบบจำลอง CVFEM ประกอบด้วย 1800 เซลล์ 961 จุดต่อ โดยผนังด้านขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 60 °C และผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิเท่ากับ 20 °C ซึ่งมีค่าเท่ากับอุณหภูมิสูงสุด (T_{max}) และอุณหภูมิต่ำสุด (T_{min}) ของปัญหาตามลำดับ ส่วนผนังทางด้านบนและด้านล่างของช่องปิดถูกหุ้มฉนวนความร้อน



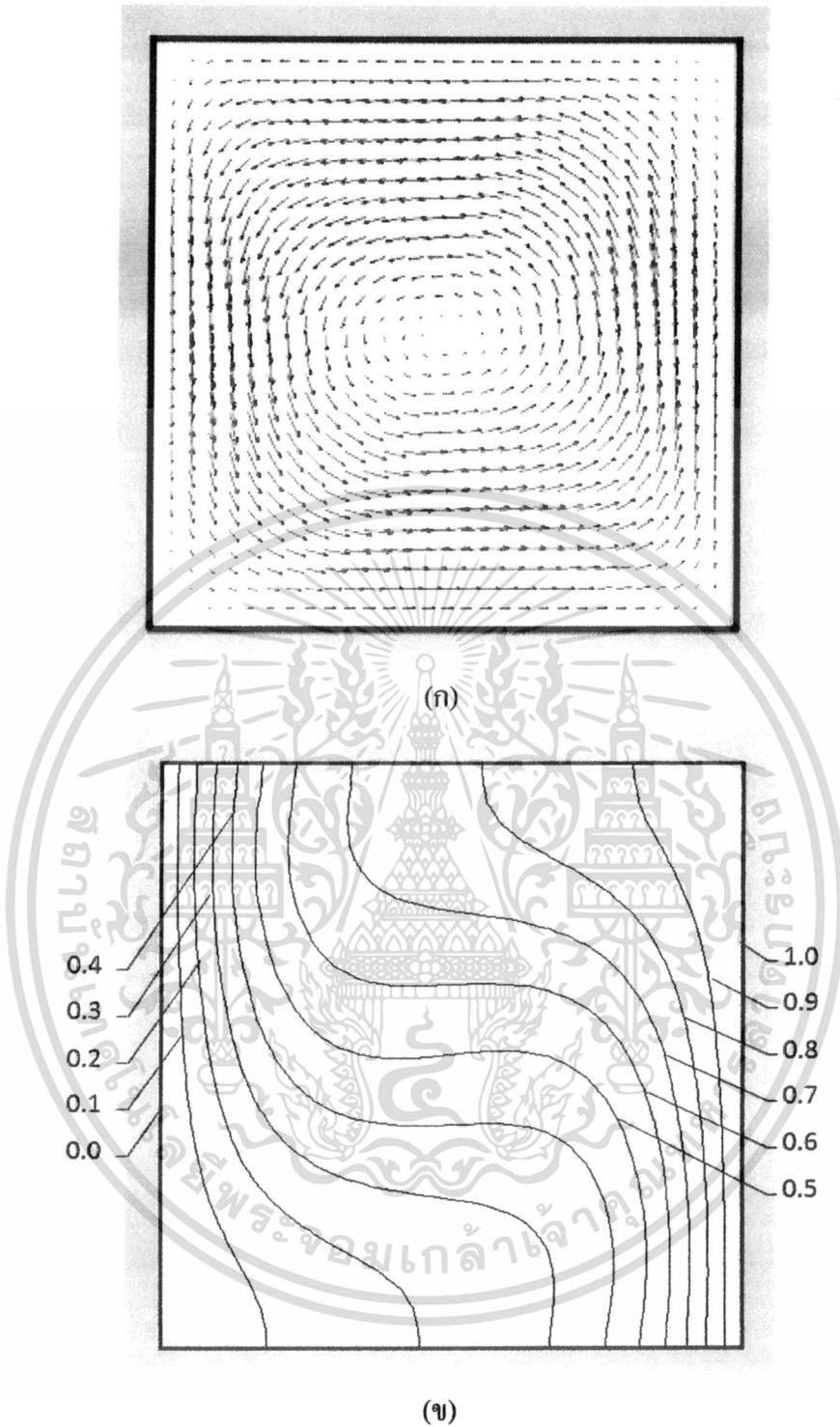
รูปที่ 6.15 รูปร่างแบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ค่าพริ้นด์เทิลนัมเบอร์ที่ใช้มีค่าเท่ากับ 0.71 ซึ่งตรงกับคุณสมบัติของอากาศ เรย์เลห์นัมเบอร์ที่พิจารณามีสองค่าคือ 10^4 และ 10^5 ในปัญหานี้ มี 2 พารามิเตอร์ไร้มิติได้แก่ อุณหภูมิไร้มิติ (\bar{T}) และความเร็วยไร้มิติในแนวตั้ง (\bar{v}) จะต้องให้ค่านิยาม อุณหภูมิไร้มิตินิยามว่า

$$\bar{T} = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \tag{6.15}$$

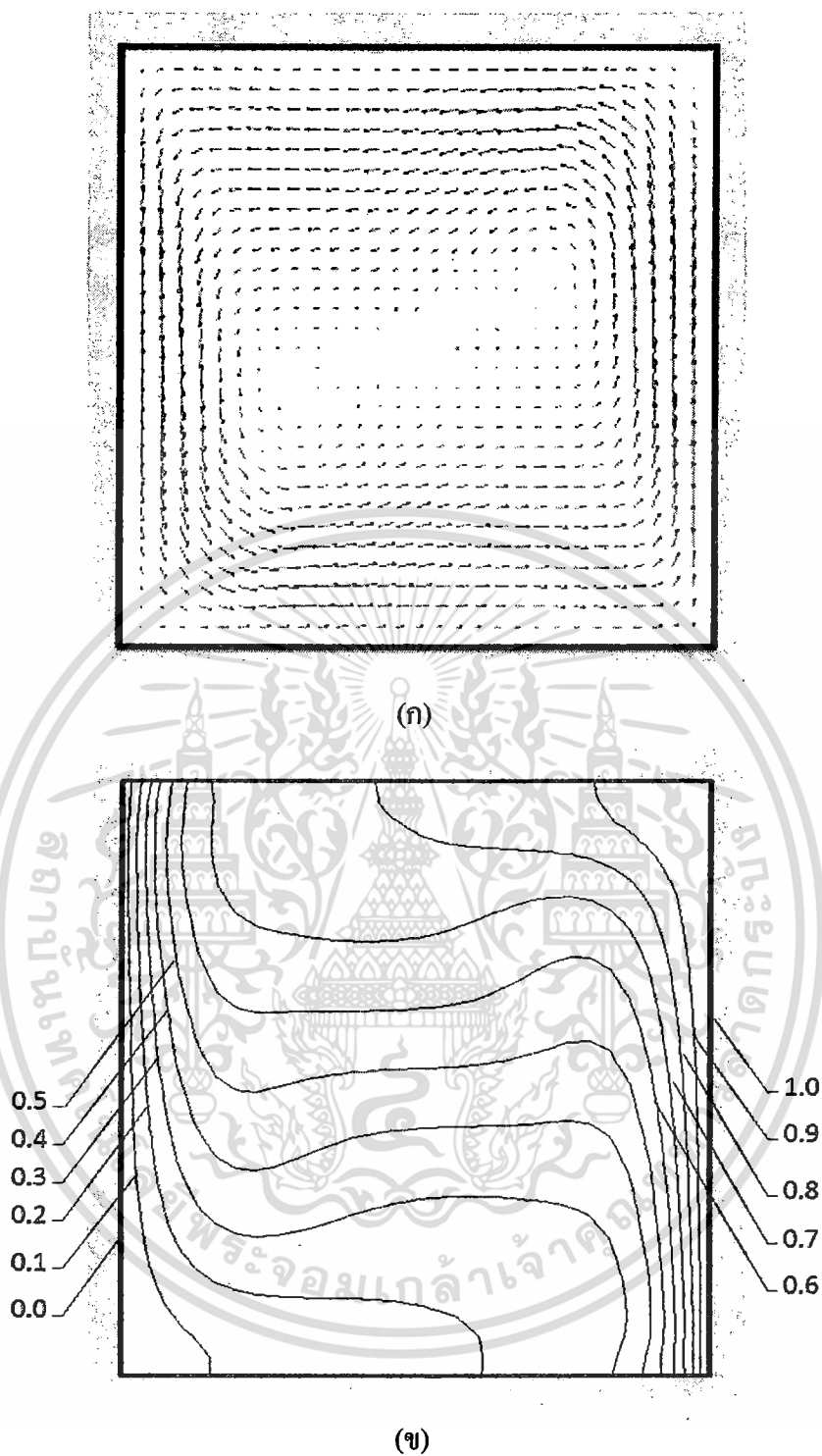
ความเร็วยไร้มิติในแนวตั้งนิยามว่า

$$\bar{v} = \frac{\rho c v L}{k} \tag{6.16}$$



รูปที่ 6.16 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Pr = 0.71$
และ $Ra = 10^4$ (ก) เวกเตอร์ความเร็ว (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิไร้มิติ

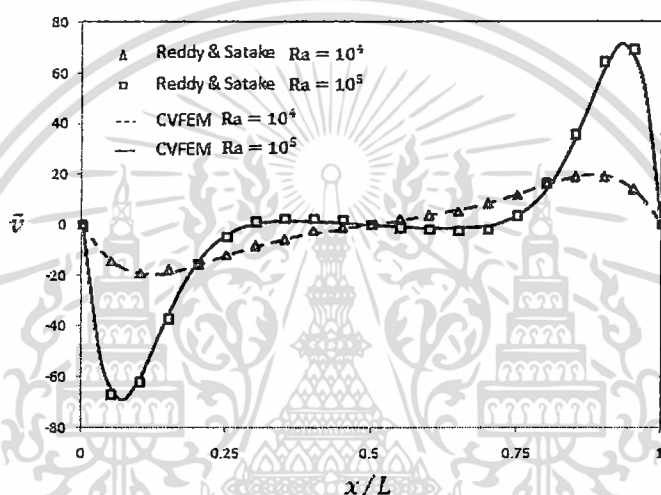
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



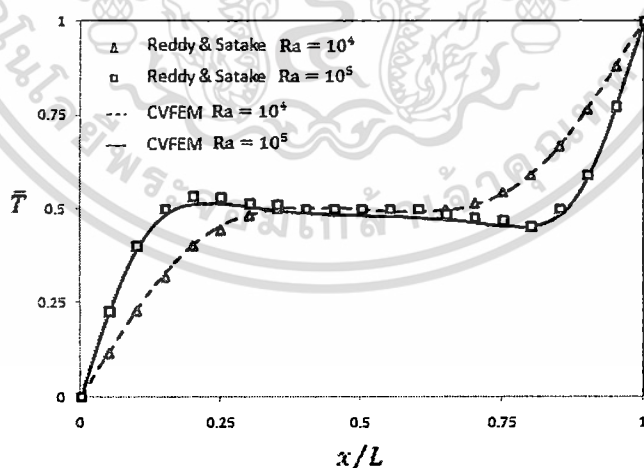
รูปที่ 6.17 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปี่ครุฑสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณี $Pr = 0.71$
และ $Ra = 10^5$ (ก) เวกเตอร์ความเร็ว (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิไร้มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 6.16 (ก) และ 6.16 (ข) แสดงรูปแบบการไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์ นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 จะเห็นได้ว่า ภายในช่องปิดเกิดการไหลแบบหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จำนวน 1 วง โดยสังเกตจากเวกเตอร์ความเร็วที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.16 (ก) แรงลอยตัวซึ่งเกิดจากผลต่างของอุณหภูมิที่แสดงอยู่ในรูปที่ 6.16 (ข) เป็นสาเหตุสำหรับการไหลที่เกิดขึ้น บริเวณที่มีการไหลแบบลอยตัวสูงขึ้นคือ บริเวณใกล้กับผนังด้านขวาซึ่งมีอุณหภูมิสูง ในขณะที่การไหลแบบเคลื่อนที่ลงจะเกิดในบริเวณใกล้กับผนังด้านซ้ายซึ่งมีอุณหภูมิต่ำ บริเวณตรงกลางของช่องปิดจะมีความเร็วต่ำที่สุดและมีลักษณะของการแบ่งชั้นของอุณหภูมิตามระยะทางในแนวดิ่ง (แกน y) บริเวณขอบด้านบนและขอบด้านล่างของช่องปิดจะแบ่งชั้นของอุณหภูมิตามระยะทางในแนวนอน (แกน x)



(ก)



(ข)

รูปที่ 6.18 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด

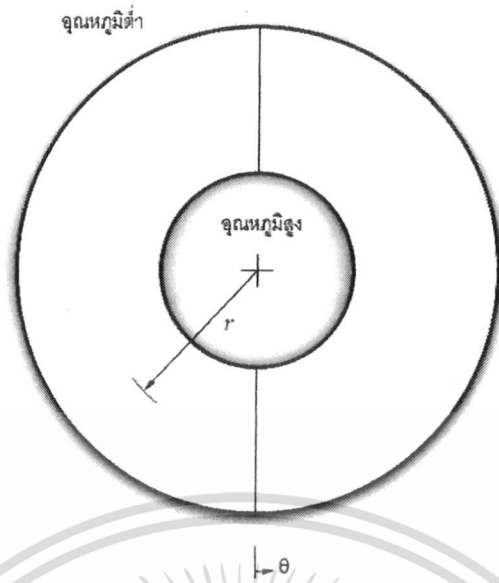
(ก) ความเร็วไร้มิติ (ข) อุณหภูมิไร้มิติ

เมื่อเพิ่มค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เป็น 10^5 จะเห็นได้ว่า รูปแบบการไหลและการกระจายตัวของ อุณหภูมิมีความแตกต่าง ไปอย่างมากจากกรณีที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 สังเกตได้จากเวกเตอร์ ความเร็วที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.17 (ก) ซึ่งมีการไหลแบบหมุนวนจำนวน 2 วง วงหนึ่งอยู่เอียงไปทางมุม ขวาบนและอีกวงหนึ่งอยู่เอียงไปทางมุมซ้ายล่างของช่องปิด จากรูปที่ 6.17 (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิใน บริเวณใกล้กับมุมขวาล่างและมุมซ้ายบนของช่องปิดมีความชันของอุณหภูมิในแนวแกน x มากขึ้น สังเกตได้จากความใกล้ชิดของเส้นชั้นอุณหภูมิในบริเวณดังกล่าว

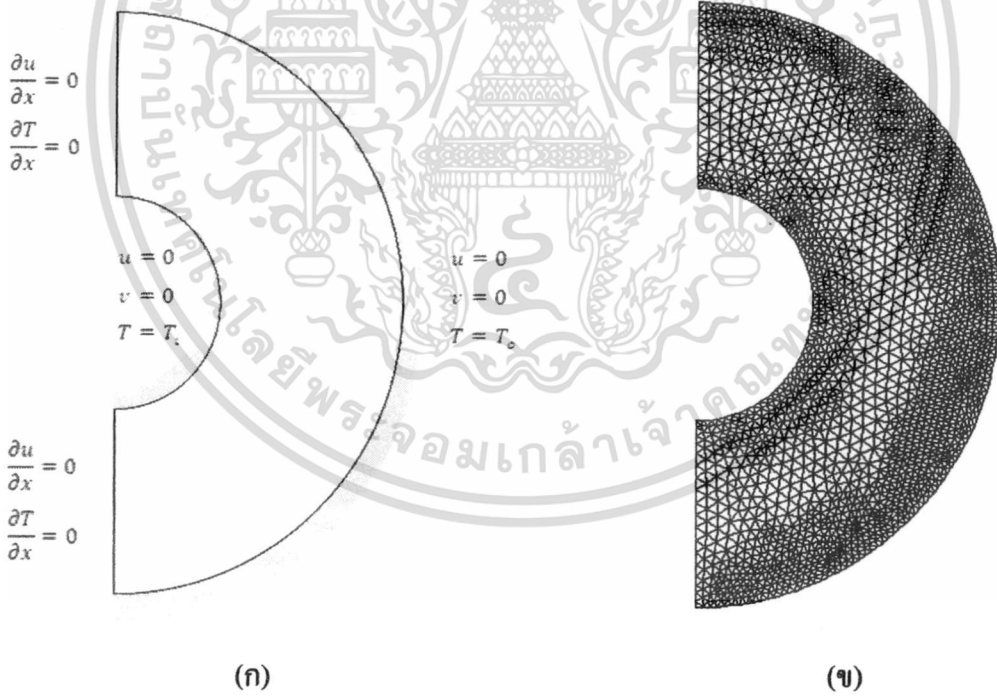
ผลลัพธ์ข้างต้นได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Reddy และ Satake [33] ในรูปแบบของ ความเร็วไร้มิติในแนวดิ่ง และอุณหภูมิไร้มิติที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิดในรูปที่ 6.18 (ก) และ 6.18 (ข) ตามลำดับ หลังจากทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์แล้วพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี CVFEM และ ผลลัพธ์ของ Reddy และ Satake [33] มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

6.5 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกร่วมศูนย์ (Free convection in horizontal concentric annulus) [32]

ช่องว่างที่เกิดการไหลสำหรับปัญหานี้อยู่ระหว่าง ทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน และมี อุณหภูมิผิวที่แตกต่างกันดังแสดงรูปที่ 6.19 ลักษณะของการไหลและการถ่ายเทความร้อนสำหรับ ปัญหานี้เป็นลักษณะที่มีความสมมาตรรอบแกนที่มุม $\theta = 0^\circ$ และ $\theta = 180^\circ$ ดังนั้นการคำนวณสำหรับ ปัญหานี้สามารถลดขนาดลงมาดังรูปแบบที่แสดงอยู่ในรูปที่ 6.20 (สร้างจากโปรแกรม AUTOMESH2D) ประกอบด้วย 3659 เซลล์ 1940 จุดต่อ โดยที่ทรงกระบอกที่อยู่ด้านในมีอุณหภูมิ เท่ากับ 60°C และทรงกระบอกที่อยู่ด้านนอกมีอุณหภูมิเท่ากับ 20°C ในการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ ได้จากวิธี CVFEM กับผลลัพธ์ของ Kuehn และ Goldstein [34] ซึ่งได้จากวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม เงื่อนไข บังคับสำหรับปัญหานี้คืออัตราส่วนของความกว้างของช่องว่างระหว่างทรงกระบอก (L) กับเส้นผ่าน ศูนย์กลางของทรงกระบอกที่อยู่ด้านในมีค่าเท่ากับ 0.8 ด้วยเงื่อนไขนี้ทำให้ได้ขนาดของรัศมีของ ทรงกระบอกด้านในเท่ากับ 0.375 เมตร ขนาดของรัศมีของทรงกระบอกด้านนอกเท่ากับ 0.975 เมตร ทำให้ได้ $L = 0.6$ ตรงตามเงื่อนไขของ Kuehn และ Goldstein [34] การวิเคราะห์การไหลของปัญหา นี้จะกระทำในกรณีที่พรีนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 โดยมีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 และ 10000

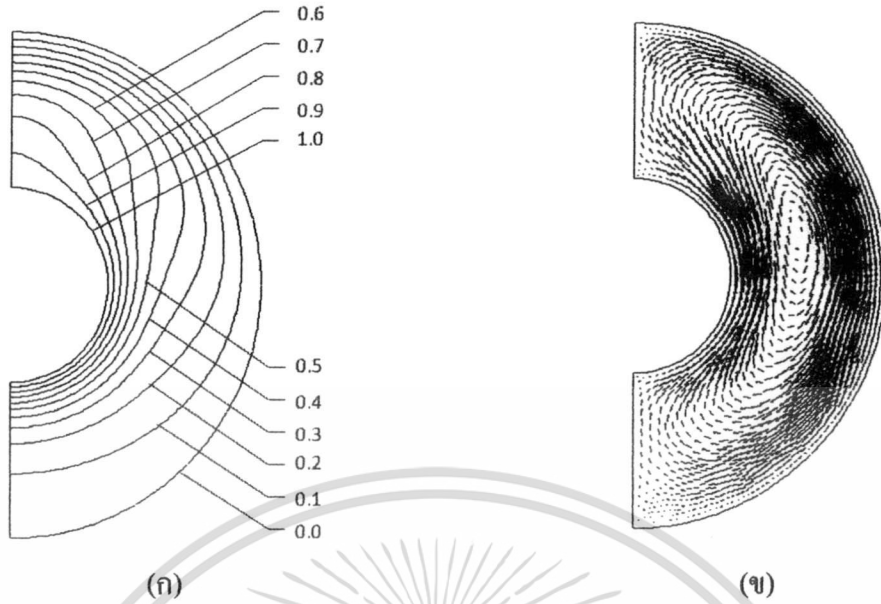


รูปที่ 6.19 รูปร่างปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

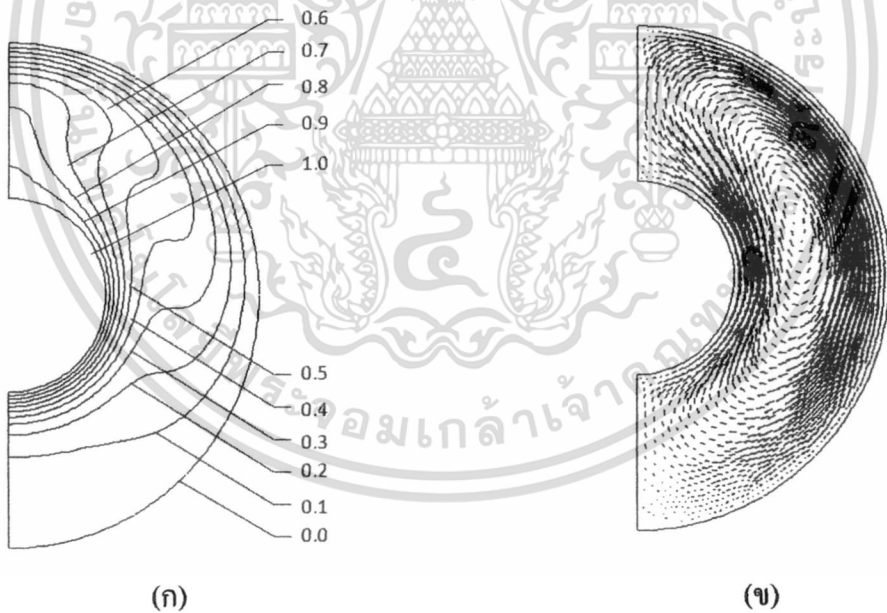


รูปที่ 6.20 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน (ก) เงื่อนไขขอบเขต (ข) รูปร่างของ Mesh

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

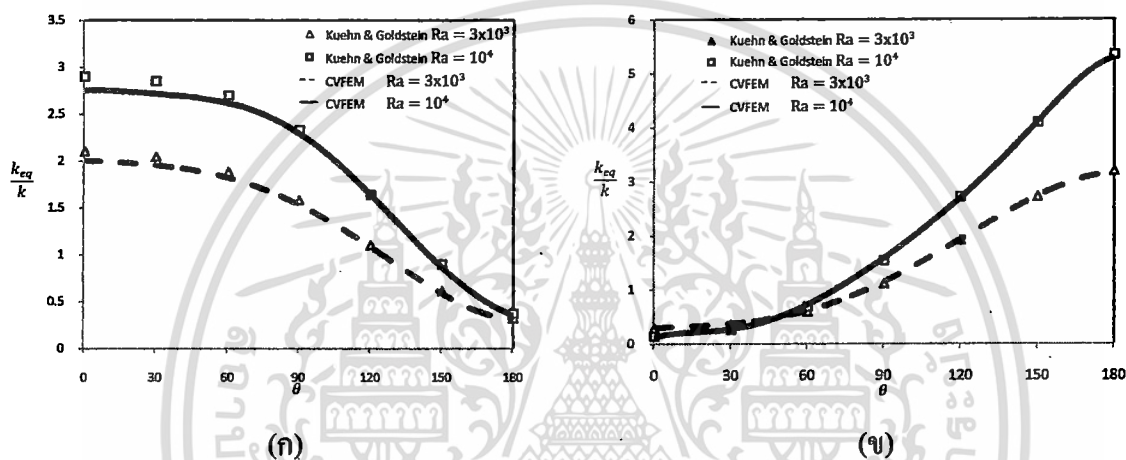


รูปที่ 6.21 (ก) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิไร้มิติ (ข) รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันในกรณีที่มี $Pr = 0.7$ และ $Ra = 3000$



รูปที่ 6.22 (ก) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิไร้มิติ (ข) รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันในกรณีที่มี $Pr = 0.7$ และ $Ra = 10000$

รูปที่ 6.21 แสดงรูปแบบการไหลและการกระจายอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 ของไหลที่อยู่ด้านขวาของช่องว่าง มีการไหลแบบหมุนวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เส้นชั้นอุณหภูมิมีความหนาแน่นมากในบริเวณด้านล่างของทรงกระบอกที่อยู่ด้านใน และบริเวณด้านบนของทรงกระบอกที่อยู่ด้านนอก ลักษณะของเส้นชั้นอุณหภูมิมักบิดเบี้ยวไปจากรูปปร่างวงแหวนเพียงเล็กน้อย รูปที่ 6.22 แสดงรูปแบบการไหลและการกระจายอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10000 จะเห็นได้ว่า ของไหลที่อยู่ด้านขวาของช่องว่างมีการไหลแบบหมุนวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเช่นกัน แต่จุดหมุนของการไหลลอยสูงกว่ากรณีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 เล็กน้อย เส้นชั้นอุณหภูมิที่ได้มีความบิดเบี้ยวมากกว่ากรณีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000



รูปที่ 6.23 การนำความร้อนสมมูลที่ (ก) ผิวทรงกระบอกด้านใน (ข) ผิวทรงกระบอกด้านนอก

ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี CVFEM ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Kuehn และ Goldstein [34] ในรูปที่ 6.23 ด้วยการใส่ค่าของการนำความร้อนสมมูล (Equivalent conductivity) ที่ผิวทรงกระบอกที่อยู่ด้านใน ซึ่งมีนิยามว่า

$$\frac{k_{eq}}{k} = \frac{\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y}{\left\{ \frac{\Delta T}{r_i \ln(r_o/r_i)} \right\}} \tag{6.17a}$$

และค่าของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกที่อยู่ด้านนอกมีนิยามว่า

$$\frac{k_{eq}}{k} = - \frac{\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y}{\left\{ \frac{\Delta T}{r_o \ln(r_o/r_i)} \right\}} \tag{6.17b}$$

โดย ΔT แทนผลต่างของอุณหภูมิของทรงกระบอกทั้งสอง

r_i แทนรัศมีของทรงกระบอกด้านใน

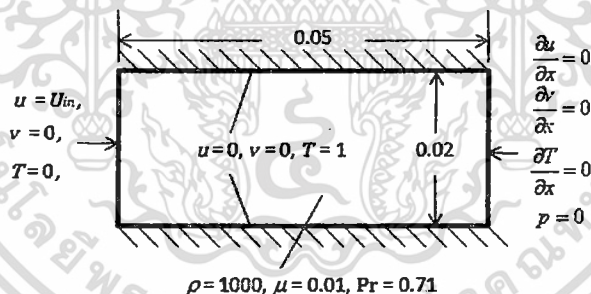
r_o แทนรัศมีของทรงกระบอกด้านนอก

k_{eq} แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสมมูล

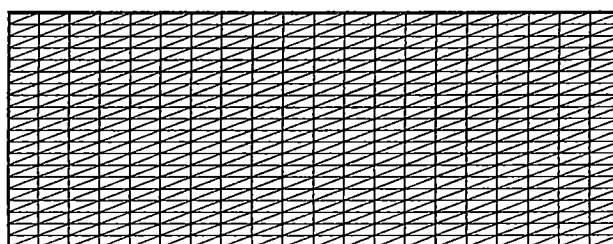
ในรูปที่ 6.23 จะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณที่ได้จากวิธี CVFEM มีความใกล้เคียงกับผลลัพธ์ของ Kuehn และ Goldstein [34] เป็นอย่างดี ยกเว้นบริเวณด้านล่างของทรงกระบอกที่อยู่ด้านในซึ่งมีความชันของอุณหภูมิค่อนข้างสูง การใช้จำนวนเซลล์ที่หนาแน่นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมากจะช่วยให้ได้คำตอบที่แม่นยำมากยิ่งขึ้น

6.6 การพาความร้อนแบบบังคับภายในช่องทางไหล (Forced convection in channel flow)

ลักษณะของปัญหาการไหลในตัวอย่างนี้ กำหนดให้มีการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) เข้าสู่ช่องทางไหลทางด้านซ้าย ดังรูปที่ 6.24 การไหลปรับตัวตามความยาวของช่องทางไหล จนในที่สุดมีลักษณะของรูปร่างความเร็วที่ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งเรียกได้ว่าเป็นการไหลที่พัฒนาเต็มที่ (Fully developed flow) พิจารณาเฉพาะกรณีที่เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 40



รูปที่ 6.24 รูปร่างของปัญหาการไหลผ่านช่องการไหล



รูปที่ 6.25 แบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านช่องการไหล

แบบจำลองของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.25 Structured mesh ถูกสร้างขึ้นด้วยโปรแกรม Excel ด้วยการแบ่งความสูงและความยาวของช่องการไหลออกเป็น 20 และ 20 ส่วนเท่าๆกัน ทำให้ได้ 800 เซลล์และ 441 จุดต่อ ช่องทางไหลมีความสูงเท่ากับ 0.02 หน่วยและยาว 0.05 หน่วย ความเร็ว u ที่ทางเข้าถูกกำหนดให้เท่ากับ 0.02 หน่วย อุณหภูมิของของไหลที่ทางเข้าเท่ากับ 0 หน่วยและอุณหภูมิที่ผนังมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย ความหนาแน่นของของไหลเท่ากับ 1000 หน่วย ความหนืดของของไหลเท่ากับ 0.01 หน่วยและค่าพรีนเทิลด์นัมเบอร์ของของไหลเท่ากับ 0.7

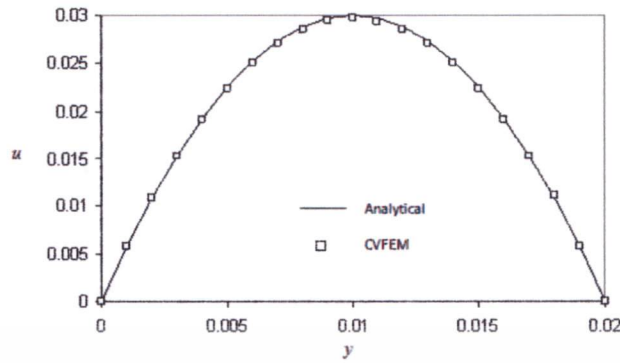
เนื่องจากปัญหาดังกล่าวสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ทางออกได้ ถ้าคิดว่าเป็นการไหลแบบหนึ่งมิติ [13] ซึ่งความเร็ว v มีค่าเป็นศูนย์ภายในช่องทางไหล คำตอบแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้คือ

$$\frac{u}{U_{\max}} = 4y(1-y) \quad (6.18)$$

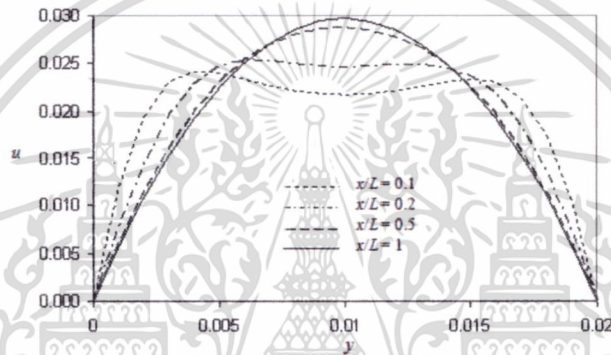
โดย U_{\max} แทนความเร็วสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของช่องการไหลหรือ $y = 0.5$ หาได้จาก

$$U_{\max} = -\frac{1}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 1.5U_{\text{in}} \quad (6.19)$$

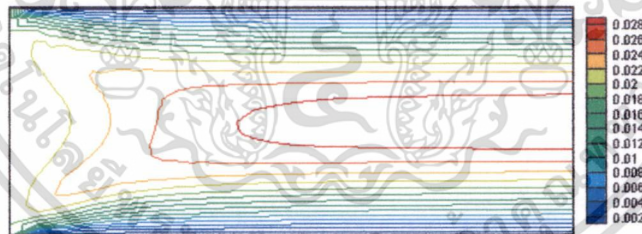
ผลลัพธ์ของความเร็ว u ที่ทางออกของช่องการไหล ซึ่งคำนวณได้จากวิธี CVFEM ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์แม่นยำตรงในรูปที่ 6.26 เห็นได้ว่าความเร็ว u ที่ได้จากการคำนวณมีความแม่นยำ โดยมีความคลาดเคลื่อนไปจากคำตอบแม่นยำตรงที่ได้จากสมการที่ (6.19) เท่ากับ -1 เปอร์เซ็นต์ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6.27 นอกจากนี้รูปที่ 6.27 ได้แสดงถึงการพัฒนารูปร่างของการไหลตลอดระยะทางที่ห่างออกจากทางเข้า ความเร็ว u ที่ระยะทาง x ซึ่งอยู่ใกล้กับทางเข้าของการไหล ในบริเวณใกล้กับผนังจะมีขนาดสูงกว่าบริเวณที่อยู่กึ่งกลางช่องแคบ เมื่อระยะทาง x มากขึ้น ความเร็ว u บริเวณใกล้กับผนังจะลดขนาดลงในขณะที่ความเร็ว u ตรงกึ่งกลางช่องแคบจะมีขนาดเพิ่มขึ้น ในที่สุดความเร็ว u นั้นไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างอีกต่อไปกลายเป็นรูปร่างที่พัฒนารูปร่างอย่างเต็มที่ (fully developed velocity profile) ที่ระยะทาง x หนึ่งของช่องแคบ ความเร็วสูงสุดที่กึ่งกลางช่องแคบตรงทางออกของการไหลในทางทฤษฎี มีค่าเท่ากับ 0.03 รูปที่ 6.28 แสดงเส้นชั้นของขนาดความเร็ว ($|U|$) ที่จุดต่างๆ ภายในช่องการไหล โดย $|U| = \sqrt{u^2 + v^2}$ รูปที่ 6.29 แสดงเส้นชั้นของอุณหภูมิที่จุดต่างๆภายในช่องการไหล ความแตกต่างของเส้นชั้นอุณหภูมิ (ΔT) มีค่าเท่ากับ 0.1 เห็นได้ว่า อุณหภูมิภายในช่องการไหลมีการปรับตัวเช่นเดียวกับความเร็ว u



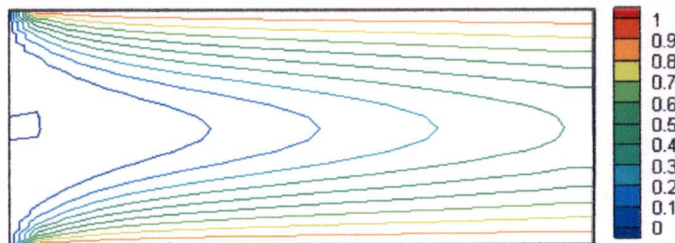
รูปที่ 6.26 รูปร่างของความเร็ว u ที่ทางออก ($x = 10$)



รูปที่ 6.27 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x ต่างๆ



รูปที่ 6.28 เส้นชั้นของขนาดความเร็วภายในช่องการไหล

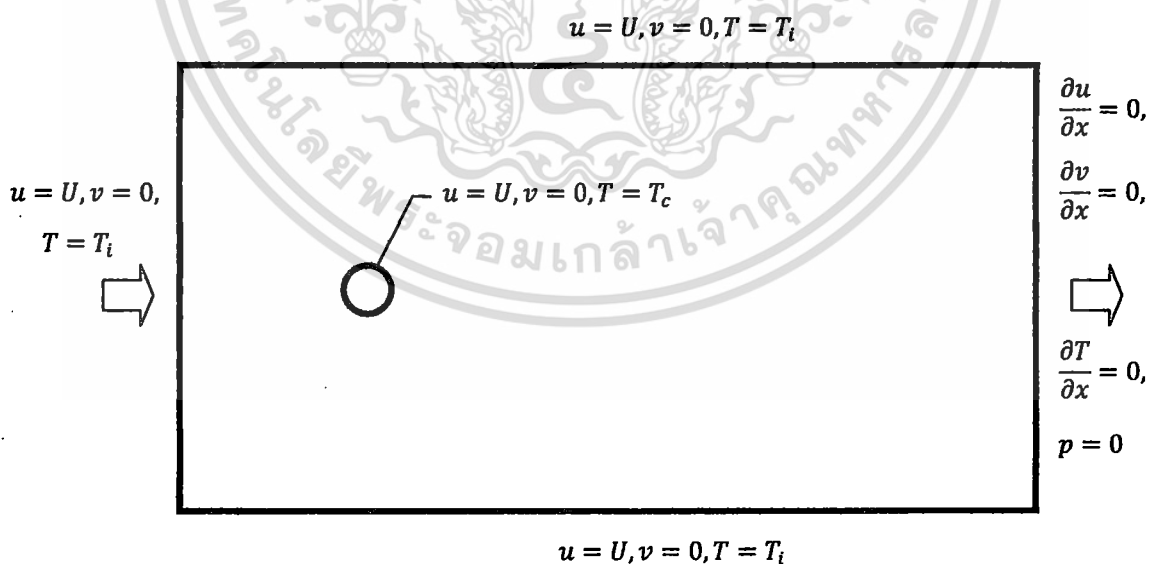


รูปที่ 6.29 การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในช่องแคบ

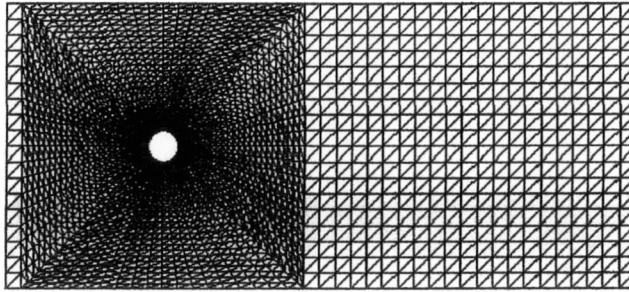
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.7 การพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน (Forced convection from heated cylinder) [32]

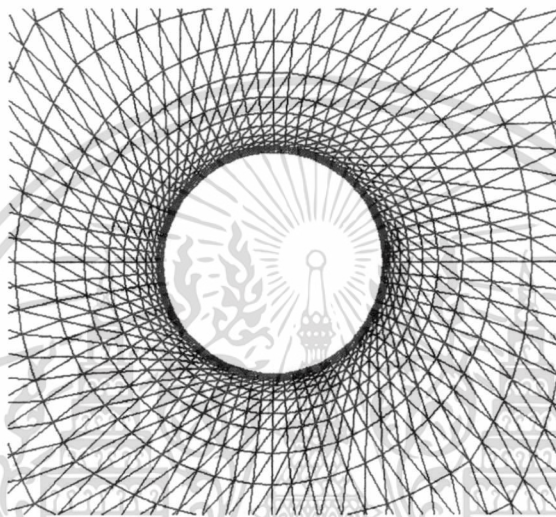
ปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน เป็นปัญหาพื้นฐานที่มีความสำคัญในทางวิศวกรรมค่อนข้างมาก สืบเนื่องจาก จำนวนผลงานวิจัยในอดีตที่มีมากมายทั้งการคำนวณ และการทดลอง เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.30 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน เป็นไปตามรูปที่ 6.31 (สร้างจากโปรแกรม Excel) ประกอบด้วย 5112 เซลล์ 2650 จุดต่อ เป็น Mesh ที่ง่ายต่อการสร้างแต่ต้องใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณใกล้กับผิวทรงกระบอกจะต้องมีลักษณะเซลล์ที่มีขนาดเล็กและกระจายตัวอยู่อย่างหนาแน่น นอกจากนี้ปริมาณเซลล์ที่อยู่บริเวณด้านหลังของทรงกระบอกควรมีปริมาณมากพอสมควร เพื่อประโยชน์ในการแสดงเวกเตอร์ความเร็ว หรือภาพของเส้นกระแสการไหล (Streamlines) ที่สวยงาม ของไหลเข้าสู่โดเมนของการไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ פרินด์เทิลนัมเบอร์ของของไหลมีค่าเท่ากับ 0.7 ความยาวของโดเมนเท่ากับ 20 หน่วย ความสูงของโดเมนเท่ากับ 9 หน่วย ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกเท่ากับ 1 หน่วย จุดศูนย์กลางของทรงกระบอกอยู่ห่างจากขอบทางเข้าเท่ากับ 5 หน่วย เรย์โนลด์นัมเบอร์ที่พิจารณาในปัญหานี้มี 4 ค่า ได้แก่ 10, 20, 30 และ 40 ความยาวคุณลักษณะที่ใช้ในการคำนวณเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าเท่ากับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอก



รูปที่ 6.30 รูปร่างของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน



(ก)



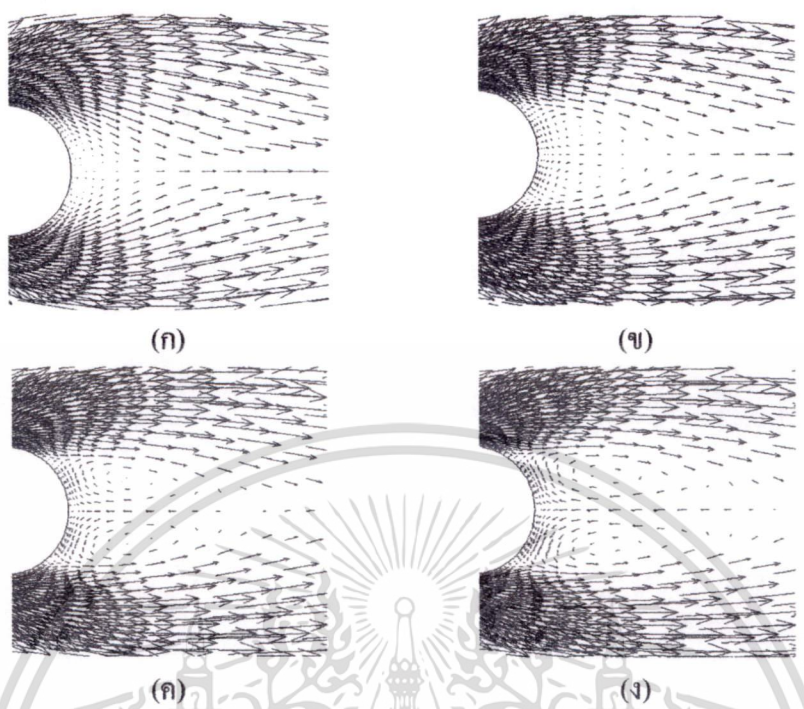
(ข)

รูปที่ 6.31 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกกร้อน

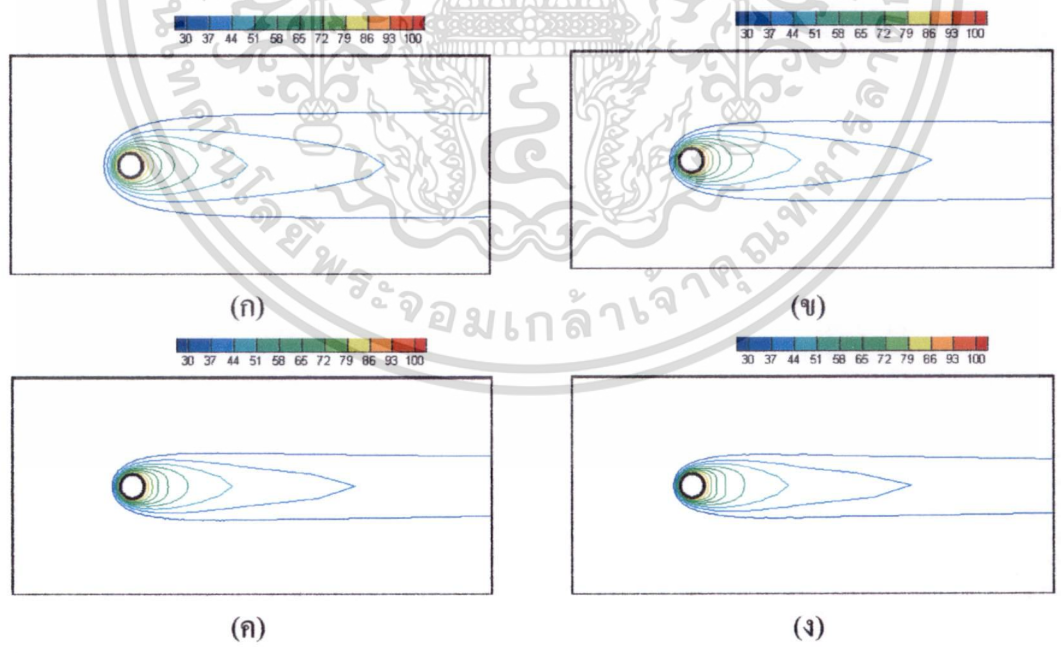
(ก) Mesh โดยรวม (ข) Mesh บริเวณใกล้ผิวของทรงกระบอก

เวกเตอร์ความเร็วที่ด้านหลังของทรงกระบอกกร้อนที่เรย์โนลด์์นัมเบอร์ต่างๆ ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.32 เมื่อเรย์โนลด์์นัมเบอร์มีค่าน้อย ลักษณะการไหลผ่านด้านหลังของทรงกระบอกจะค่อนข้างราบเรียบ แต่เมื่อเรย์โนลด์์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น รูปแบบการไหลที่ตำแหน่งด้านหลังของทรงกระบอกจะปรากฏว่ามีการหมุนวนเกิดขึ้น 2 วงสมมาตรรอบแกน x และบริเวณที่เกิดการไหลแบบหมุนวนจะกว้างขึ้น รูปที่ 6.33 แสดงเส้นชั้นของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นภายในโดเมนของไหลสำหรับเรย์โนลด์์นัมเบอร์ต่างๆ เมื่อเรย์โนลด์์นัมเบอร์มีค่าน้อย ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิจะกว้าง เนื่องจากการไหลนั้นมีการแพร่กระจายสูง การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจะมีค่ามากในบริเวณด้านหน้าของทรงกระบอกกร้อนซึ่งสัมพันธ์กับของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าเป็นจุดแรก แต่การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ตำแหน่งนี้จะมีค่ามากที่สุดเมื่อเรย์โนลด์์นัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 40

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

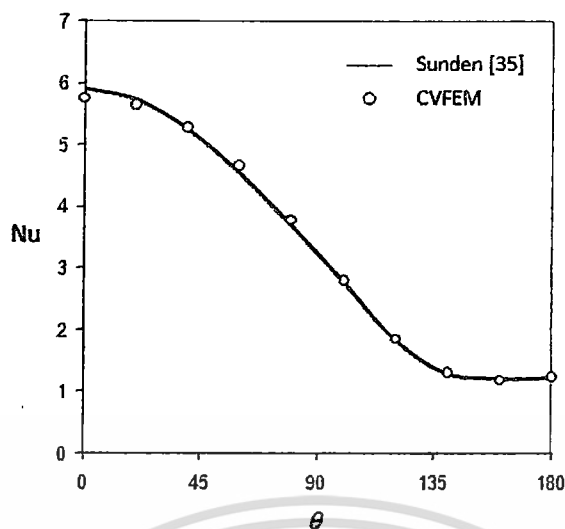


รูปที่ 6.32 รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกครึ่งในกรณี (ก) $Re = 10$ (ข) $Re = 20$ (ค) $Re = 30$ (ง) $Re = 40$



รูปที่ 6.33 ลักษณะการกระจายอุณหภูมิของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกครึ่งในกรณี (ก) $Re = 10$ (ข) $Re = 20$ (ค) $Re = 30$ (ง) $Re = 40$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.34 นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆบนผิวทรงกระบอกในกรณี $Re = 40$

นัสเซิลท์นัมเบอร์ที่คำนวณจากวิธี CVFEM ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ Sunden [35] ในรูปที่ 6.34 พบว่า ส่วนใหญ่แล้วมีความคลาดเคลื่อนกันน้อยมาก บริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากที่สุดอยู่บริเวณ stagnation point ซึ่งเป็นจุดที่ทรงกระบอกร้อนสัมผัสกับของไหลเป็นจุดแรก นอกจากนี้ นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยตลอดพื้นผิวของทรงกระบอกร้อนได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกับสมการสหสัมพันธ์ (Correlations) จากผลการทดลองในหนังสือของ Holman [36] ไว้ในตารางที่ 6.1 นัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยสำหรับผลลัพธ์เชิงตัวเลข คำนวณด้วยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขดังนี้

$$Nu_m = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} Nu \, dL \quad (6.21)$$

โดย r แทนรัศมีของทรงกระบอก

สมการสหสัมพันธ์สำหรับนัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของการพาความร้อนแบบบังคับ รอบผิวของทรงกระบอก [36] คือ

$$Nu_m = 0.911 Re^{0.385} Pr^{0.333} \quad \text{for } 4 \leq Re \leq 40 \quad (6.22)$$

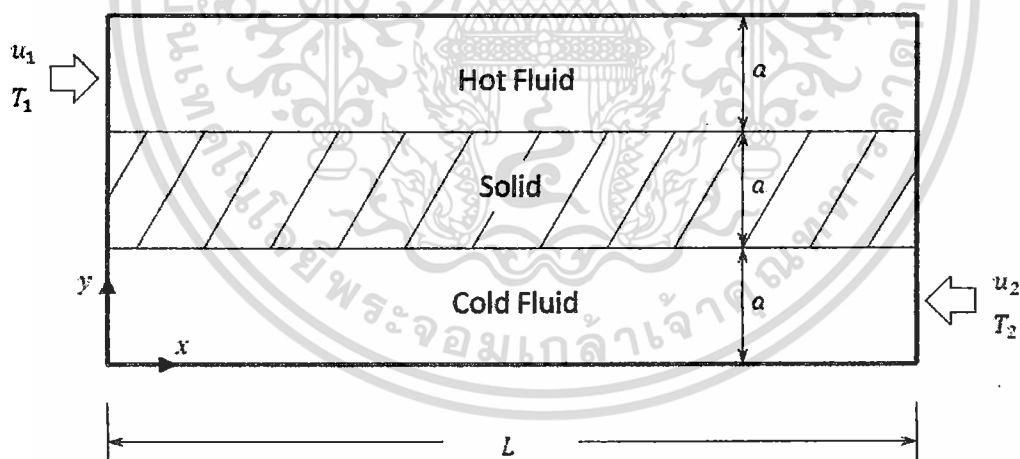
ผลการเปรียบเทียบนัสเซิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยจากสมการที่ (6.21) และ (6.22) พบว่า มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 3 เปอร์เซ็นต์

ตารางที่ 6.1 น้สเซลท์นัมเบอร์เฉลี่ยของทรงกระบอกร้อน

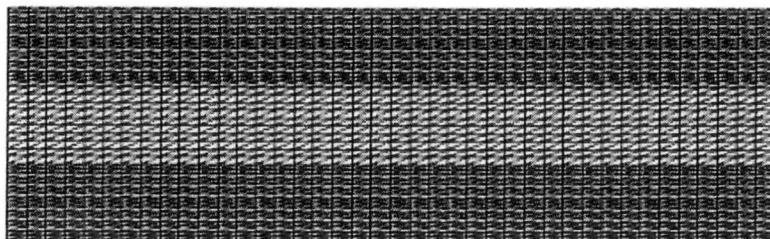
Re	Nu_m (CVFEM)	Nu_m (Ref. [36])	ความคลาดเคลื่อน (%)
10	1.94202	1.97399	-1.620
20	2.51914	2.57776	-2.274
30	2.97802	3.01326	-1.170
40	3.34163	3.36619	-0.729

6.8 การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน (Conjugate forced convection in counter-flow heat exchanger)

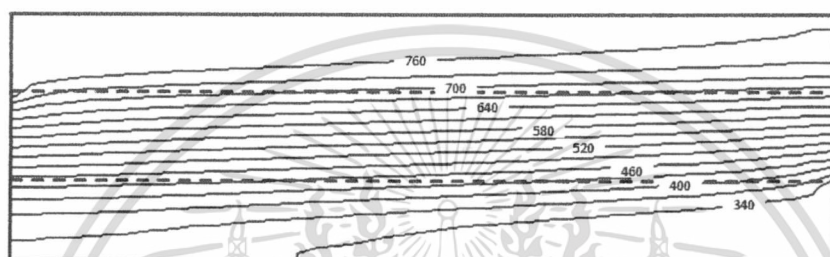
การถ่ายเทความร้อนในปัญหานี้เกิดขึ้นภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน ที่มีของไหลสองชนิด ซึ่งมีอุณหภูมิแตกต่างกันไหลสวนทางกัน แต่ของไหลทั้งสองนั้นไม่ได้สัมผัสกัน การถ่ายเทความร้อนระหว่างกันเกิดขึ้นโดยผ่านผนังนำความร้อน ซึ่งปลายด้านซ้ายและขวาถูกหุ้มฉนวนไว้ (บริเวณแรเงา) ผนังด้านบนและล่างของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนถูกหุ้มฉนวนไว้เช่นกัน (บริเวณแรเงา) ดังแสดงในรูปที่ 6.35



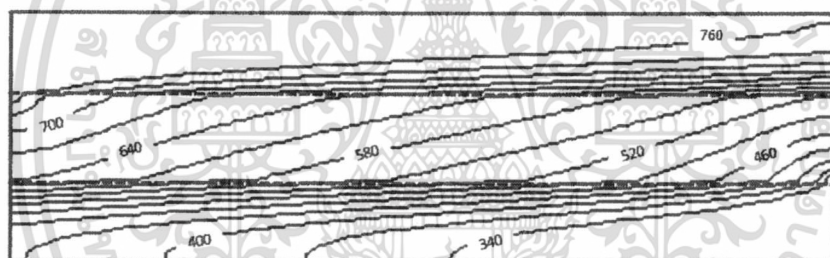
รูปที่ 6.35 รูปร่างของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนที่มีการไหลสวนทางกัน



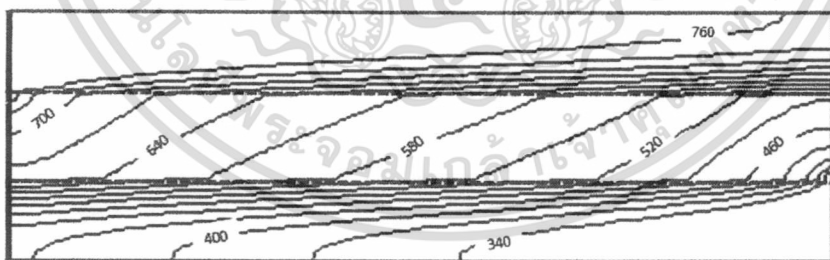
รูปที่ 6.36 แบบจำลองของปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทางกัน



(ก)



(ข)



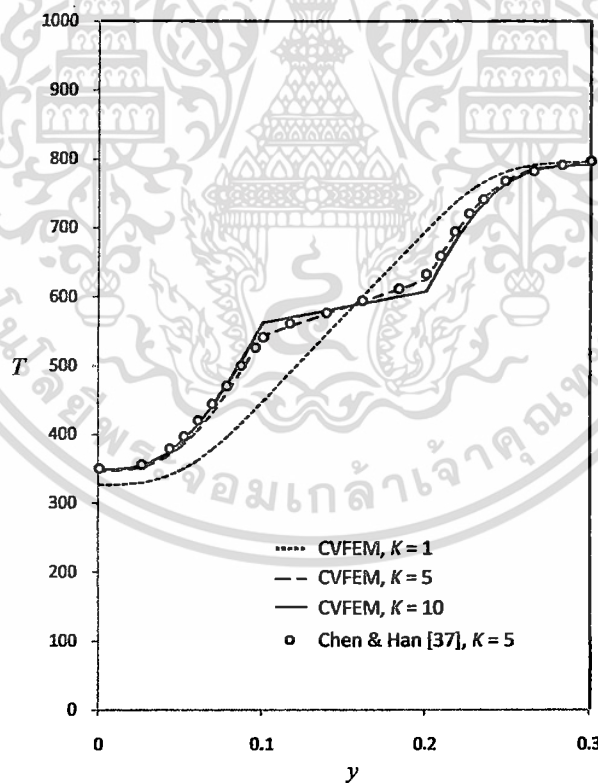
(ค)

รูปที่ 6.37 การกระจายตัวของอุณหภูมิในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทางกันในกรณี (ก) $K = 1$ (ข) $K = 5$ (ค) $K = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขนาดและเงื่อนไขของปัญหาถูกกำหนดไว้ดังนี้ ความยาวของช่องการไหลเท่ากับ 1 ($L = 1$) ความหนาของผนังนำความร้อนและความสูงของช่องการไหลเท่ากับ 0.1 ($\alpha = 0.1$) ของไหลที่ไหลผ่านช่องการไหลด้านบน ไหลจากซ้ายไปขวาด้วยความเร็วและอุณหภูมิเท่ากับ 0.2 และ 800 ตามลำดับ เรย์โนลด์นัมเบอร์สำหรับการไหลในช่องการไหลด้านบนคือ 133 ของไหลที่ไหลผ่านช่องการไหลด้านล่าง ไหลจากขวาไปซ้ายด้วยความเร็วและอุณหภูมิเท่ากับ 0.1 และ 300 ตามลำดับ เรย์โนลด์นัมเบอร์สำหรับการไหลในช่องการไหลด้านล่างคือ 66 พรีนคัลเทิลนัมเบอร์สำหรับของไหลที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 0.7

รูปร่างแบบจำลองของปัญหาแสดงไว้ในรูปที่ 6.36 ประกอบด้วย 3600 เซลล์ 1891 จุดต่อแบบจำลองนี้ได้ถูกนำไปวิเคราะห์ด้วยวิธี CVFEM สำหรับอัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหลกับของแข็ง (K) จำนวน 3 ค่าได้แก่ 1, 5 และ 10 เส้นชั้นอุณหภูมิภายในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.37 รูปที่ 6.38 แสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากวิธี CVFEM และผลการคำนวณของ Chen และ Han [37] ที่ค่า K เท่ากับ 5 ผลการเปรียบเทียบพบว่าคำตอบที่ได้จากทั้งสองวิธีแทบจะไม่มี ความแตกต่างกัน



รูปที่ 6.38 อุณหภูมิในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง $x = 0.5$ เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า K ตั้งแต่ 1 ถึง 10

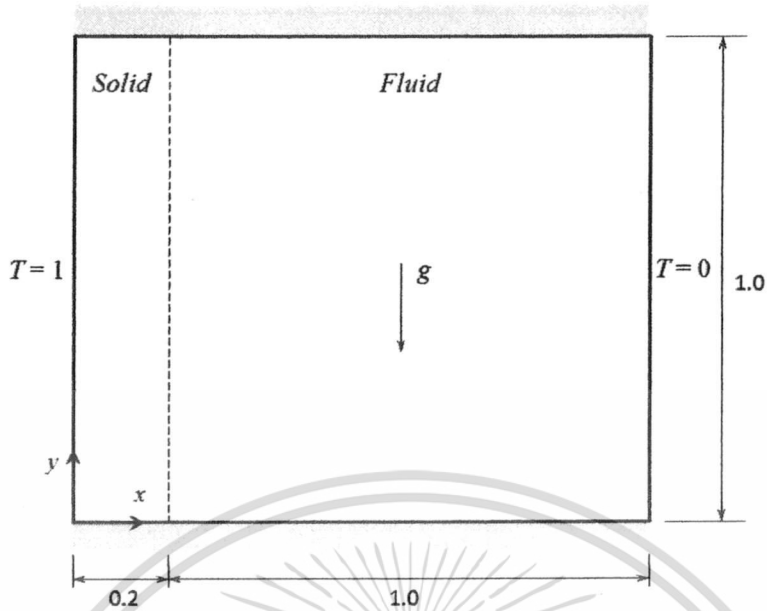
6.9 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีผนังนำความร้อน

(Conjugate natural convection in a square cavity with conducting wall) [10, 11, 38]

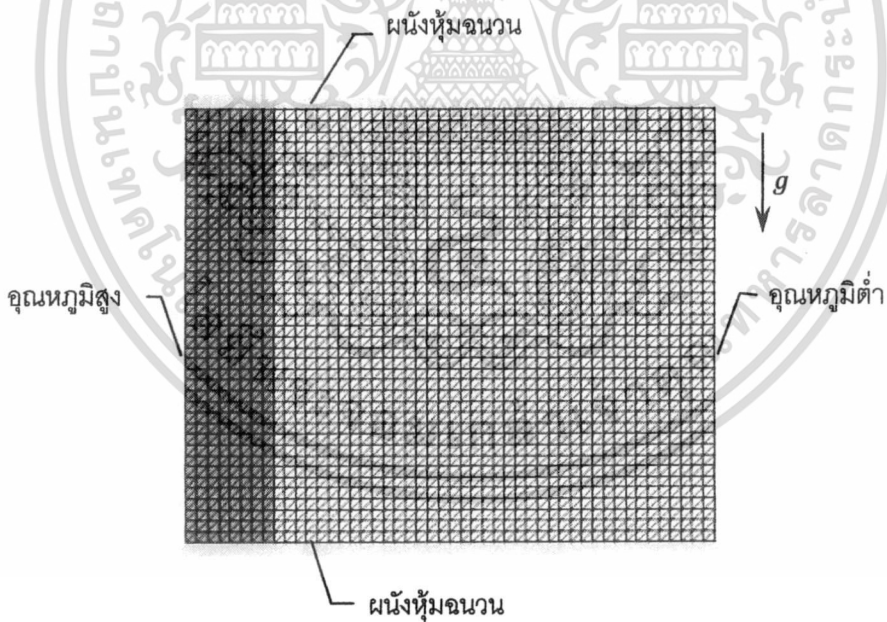
ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยคิดผลของผนังนำความร้อน เป็น ปัญหาพื้นฐานที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณเชิงตัวเลข ช่องปิดสี่เหลี่ยม ขนาด 1×1 หน่วย ภายในบรรจุอากาศซึ่งมีพริ้นด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 ผนังนำความร้อนหนา 0.2 หน่วย ติดตั้งอยู่ที่ด้านซ้ายของรูปที่ 6.39 ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 หน่วย ผนังด้านด้านขวามี อุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 หน่วย ผนังด้านบนและล่างถูกหุ้มฉนวนไว้ (บริเวณแรเงา) แบบจำลองของ ปัญหาซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 6.40 ประกอบด้วย 2160 เซลล์ 1147 จุดต่อ

เรย์เลห์นัมเบอร์จำนวน 2 ค่าที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตนี้ คือ 10^3 และ 10^5 ความยาวคุณลักษณะ (Characteristic length) ของปัญหานี้คือ 1 รูปแบบการไหล และเส้นชั้นอุณหภูมิที่ได้วิธี CVFEM สำหรับเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3 แสดงไว้ในรูปที่ 6.41 รูปที่ 6.41 (ก) และ (ข) แสดงให้เห็นถึงเวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิภายในโดเมนเมื่ออัตราส่วน ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของผนังกับอากาศหรือ K มีค่าเท่ากับ 1 รูปที่ 6.41 (ค) แสดง เส้นชั้นอุณหภูมิภายในโดเมน เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของผนังกับอากาศ เท่ากับ 10 รูปแบบการไหลที่เกิดขึ้นเป็นการไหลด้วยแรงลอยตัวเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ของไหลในบริเวณติดกับผนังนำความร้อน ของไหลที่อยู่ติดกับผนังด้านขวาของช่องปิดถูกผลักให้ เคลื่อนที่ลงมาตามผนัง ทำให้เกิดการไหลเป็นแบบหมุนวนตามเข็มนาฬิกา จำนวน 1 วง ภาพรวมของ เส้นชั้นอุณหภูมิคือ ความลาดชันของอุณหภูมิส่วนใหญ่เกิดขึ้นในแนวแกน x แต่จะมีลักษณะบิดเบี้ยว เล็กน้อยในบริเวณตรงกลางของช่องปิด

รูปที่ 6.42 แสดงรูปแบบการไหลและเส้นชั้นอุณหภูมิที่ได้จากวิธี CVFEM สำหรับเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิภายในโดเมนสำหรับกรณีที่ K มีค่าเท่ากับ 1 แสดงไว้ในรูปที่ 6.42 (ก) และ (ข) ในขณะที่เส้นชั้นอุณหภูมิภายในโดเมนสำหรับกรณีที่ K มีค่าเท่ากับ 10 แสดงไว้ในรูปที่ 6.42 (ค) การไหลภายในช่องปิดเป็นการไหลหมุนวนจำนวน 2 วง เส้นชั้น อุณหภูมิในบริเวณใกล้ผนังมีความลาดชันในแนวแกน x สูง แต่เส้นชั้นอุณหภูมิในบริเวณตรงกลางของ ช่องปิดมีความลาดชันในแนวแกน y ค่อนข้างสูง

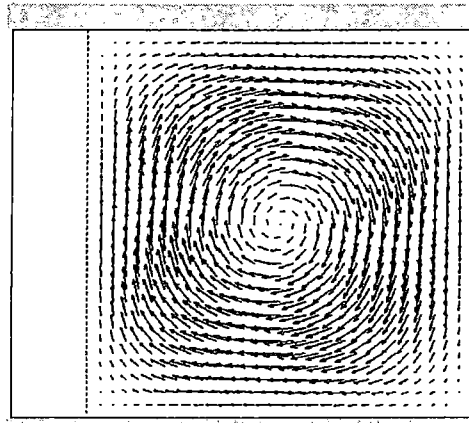


รูปที่ 6.39 รูปร่างของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยคิดผลของผนังนำความร้อน

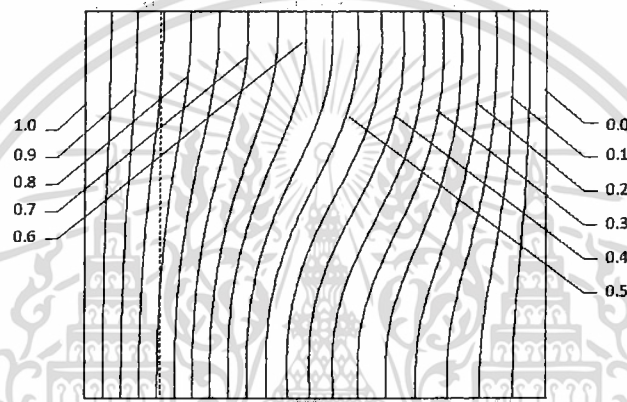


รูปที่ 6.40 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยคิดผลของผนังนำความร้อน

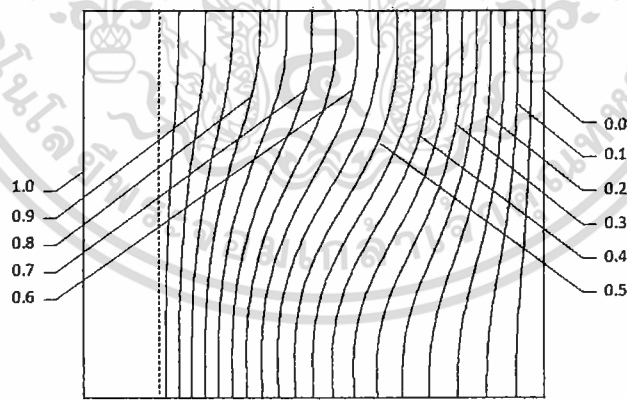
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)

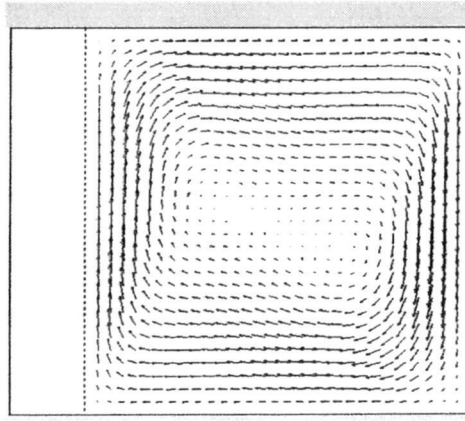


(ข)

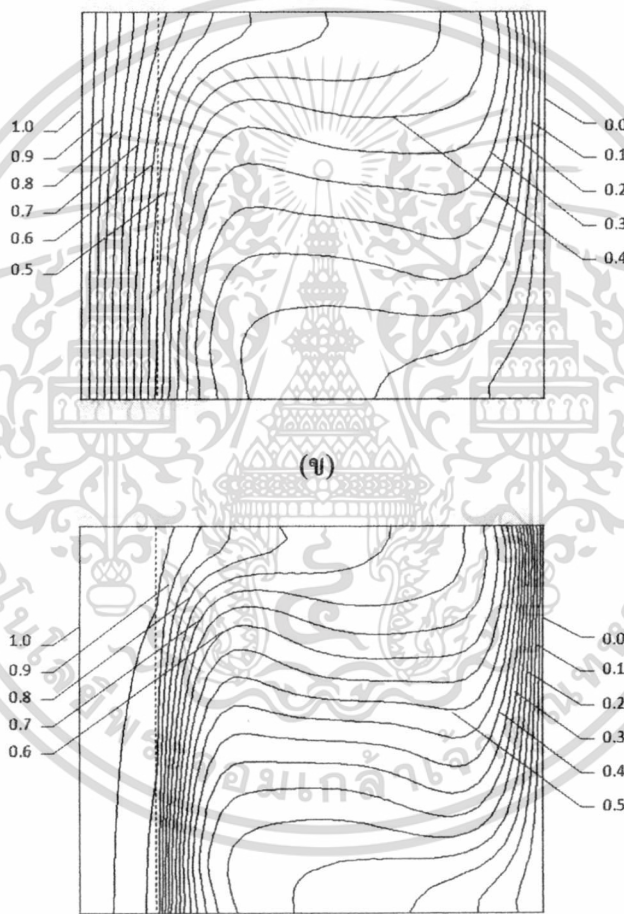


(ค)

รูปที่ 6.41 การไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปี่ครุปลี่เหลี่ยมจัตุรัส
ที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย เมื่อ $Ra = 10^3$ (ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ $K = 1$
(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 1$ (ค) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 10$



(ก)



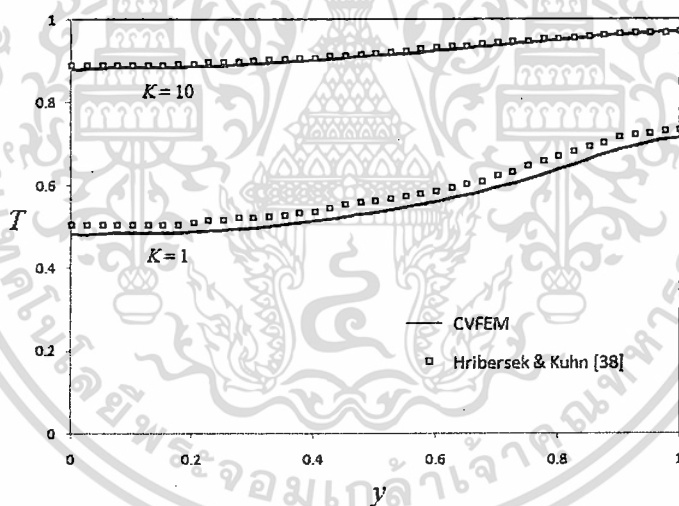
(ค)

รูปที่ 6.42 การไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 ที่มีผนังนำความร้อนรวมอยู่ด้วย เมื่อ $Ra = 10^5$ (ก) เวกเตอร์ความเร็วที่ $K = 1$
 (ข) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 1$ (ค) เส้นชั้นอุณหภูมิที่ $K = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการพิจารณาผลของพจน์นำความร้อน ที่มีต่อการไหลและการถ่ายเทความร้อนภายในโดเมน ถ้า K มีค่ามากแสดงว่า การถ่ายเทความร้อนภายในผนังที่ตีมาก อุณหภูมิภายในพจน์นำความร้อนเกือบจะมีค่าเท่ากันหมด แต่ถ้า K มีค่าน้อย จะเห็นได้ว่า ภายในพจน์นำความร้อนมีเส้นชั้นอุณหภูมิหลายเส้นปรากฏอยู่ ความบางและความหนาของเส้นชั้นอุณหภูมิภายในผนังด้านบนและด้านล่าง เป็นผลมาจากการพาความร้อนด้วยอากาศบริเวณผิวสัมผัส ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งสำหรับกรณี K เท่ากับ 10 ซึ่งถือได้ว่าเป็นค่า K ที่สูงมาก ลักษณะเส้นชั้นอุณหภูมิภายในช่องปิดไม่แตกต่างจากการพาความร้อนแบบอิสระในหัวข้อที่ 6.4 สำหรับเรย์เลห์นัมเบอร์ค่าเดียวกัน

ความแม่นยำของผลลัพธ์จากวิธี CVFEM ได้รับการตรวจสอบโดยการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากวิธี boundary-domain integral method ของ Hribersek และ Kuhn [38] ค่าอุณหภูมิไร้มิติที่บริเวณรอยต่อระหว่างของแข็งและของไหล ($x = 0.2$) ตลอดความสูงของผนังตามแนวแกน y เมื่อ K มีค่าเท่ากับ 1 และ 10 ถูกนำมาแสดงไว้ในรูปที่ 6.43 สรุปได้ว่าอุณหภูมิไร้มิติบริเวณรอยต่อที่ได้จากวิธี CVFEM ต่ำกว่าผลลัพธ์จาก Hribersek และ Kuhn [38] เล็กน้อย ความคลาดเคลื่อนมากขึ้นเมื่อ K มีค่าน้อย

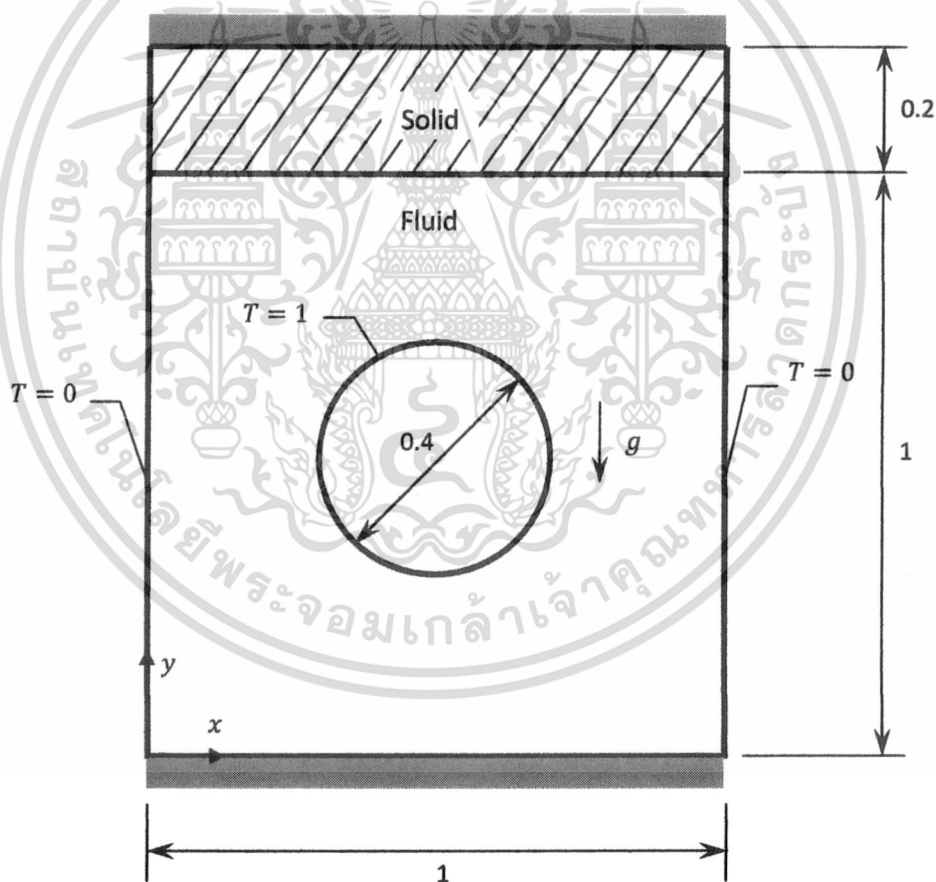


รูปที่ 6.43 การเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติที่ได้จากวิธี CVFEM และวิธีของ Hribersek และ Kuhn [38]

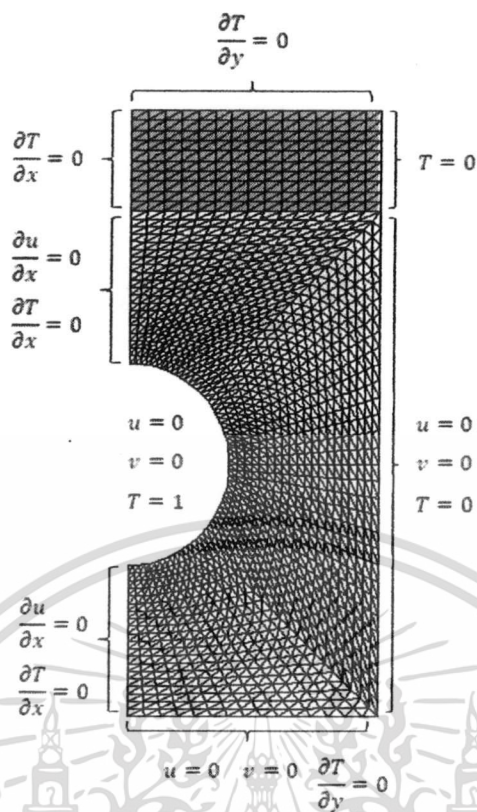
สำหรับ $Ra = 10^5$ ที่ $K = 1$ และ 10

6.10 การพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดสี่เหลี่ยมโดยคิดผลของผนังนำความร้อน (Conjugate natural convection from heated cylinder in square cavity) [39]

ปัญหานี้เกี่ยวข้องกับการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 หน่วย ที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.44 ซึ่งตรงกลางของช่องปิดมีทรงกระบอกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.4 หน่วยและมีอุณหภูมิสูงเท่ากับ 1 หน่วย ผนังด้านซ้ายและขวาของช่องปิดมีอุณหภูมิต่ำเท่ากับ 0 หน่วย ผนังกันความร้อนที่ด้านบนของโดเมนมีความหนาเท่ากับ 0.2 หน่วย ด้านบนสุดและล่างสุดของโดเมนมีฉนวนหุ้มอยู่ ในการจำลองแบบการไหลใช้ความสมมาตรเพื่อลดขนาดของการคำนวณลงมาเหลือครึ่งหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 6.45 ประกอบด้วย 2700 เซลล์ 1441 จุดต่อ ของไหลที่ใช้มีพริ้นเทิลด์นัมเบอร์เท่ากับ 0.7 ความยาวคุณลักษณะสำหรับเรย์เลห์นัมเบอร์คือ ขนาดความสูงของช่องปิดซึ่งเท่ากับ 1 หน่วย



รูปที่ 6.44 รูปร่างปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลของผนังกันความร้อน

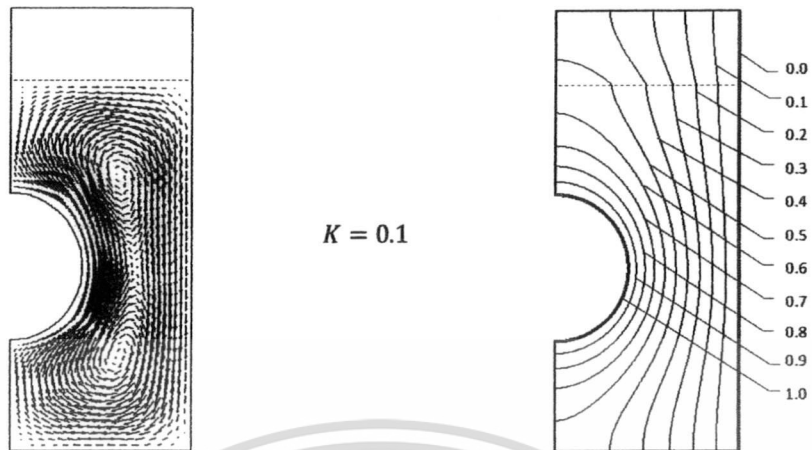


รูปที่ 6.45 แบบจำลองของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระระหว่างท่อทรงกระบอกกับช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยคิดผลกระทบของผนังกันความร้อน

รูปที่ 6.46 ถึง 6.48 แสดงรูปแบบการไหลและเส้นชั้นอุณหภูมิที่คำนวณได้ที่เรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3 , 10^4 และ 10^5 สำหรับอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งกับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล (K) มีค่าเท่ากับ 0.1, 1 และ 10

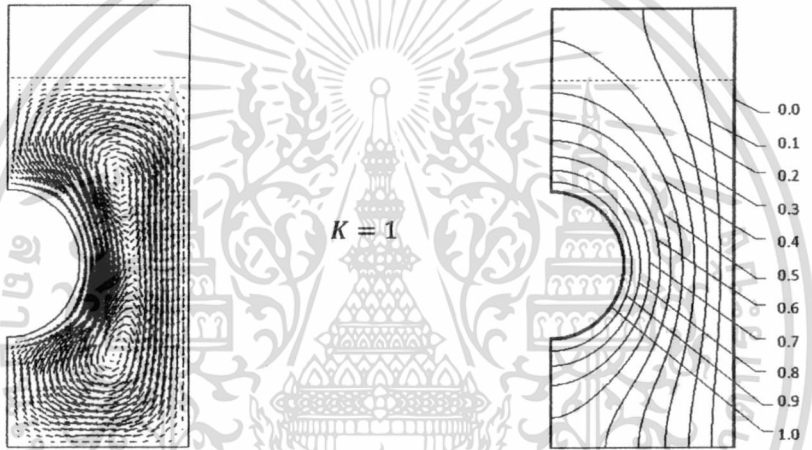
ในการพิจารณารูปแบบการไหลที่ได้จากเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ พบว่าเวกเตอร์ความเร็วที่ได้จาก $Ra = 10^3$ และ $Ra = 10^4$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ไม่ว่า K จะเป็นเท่าใดก็ตาม กล่าวคือมีการไหลแบบหมุนวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาขนาดใหญ่จำนวน 2 วง แต่เมื่อ $Ra = 10^5$ จะเห็นได้ว่าการไหลแบบหมุนวนขนาดใหญ่ปรากฏให้เห็นเพียงวงเดียวเท่านั้น

ในการพิจารณาเส้นชั้นอุณหภูมิภายในโดเมน พบว่าเมื่อเพิ่มค่า K อุณหภูมิภายในของแข็งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างชัดเจน กล่าวคือมีจำนวนเส้นชั้นอุณหภูมิตกลงเนื่องจากอุณหภูมิภายในของแข็งมีการเปลี่ยนแปลงที่สม่ำเสมอมากขึ้น ดังนั้นการกระจายอุณหภูมิส่วนใหญ่จึงอยู่ภายในของไหล การกระจายอุณหภูมิภายในของไหลในกรณี $Ra = 10^3$ และ $Ra = 10^4$ มีความราบเรียบมากกว่ากรณี $Ra = 10^5$



$K = 0.1$

(ก)



$K = 1$

(ข)

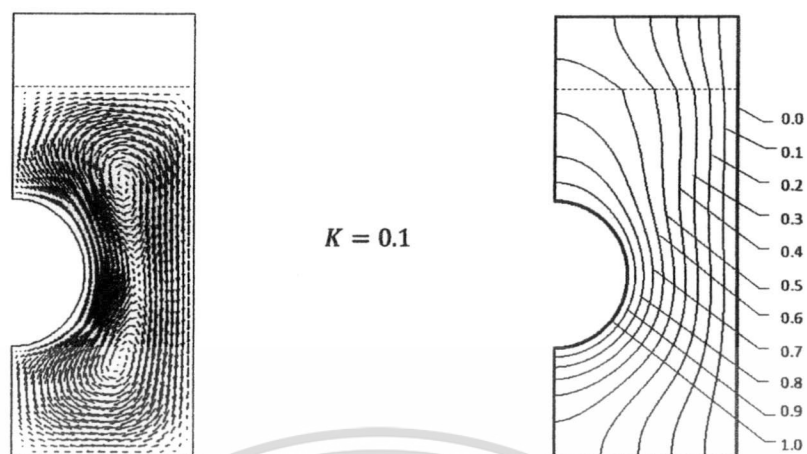


$K = 10$

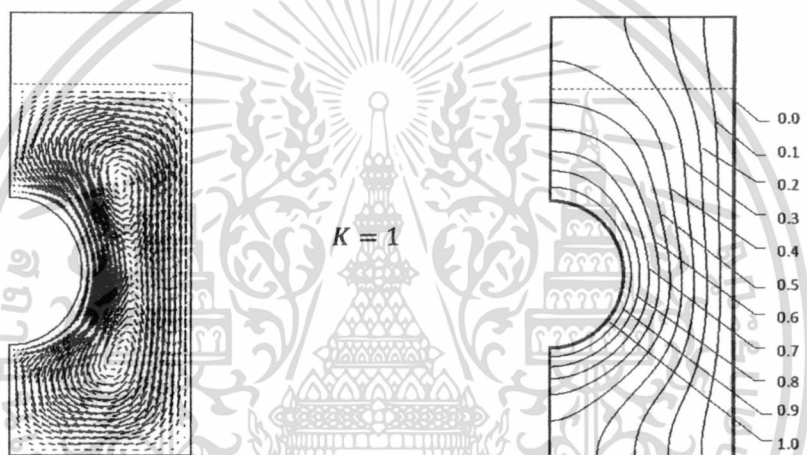
(ค)

รูปที่ 6.46 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิกภายในโดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^3$

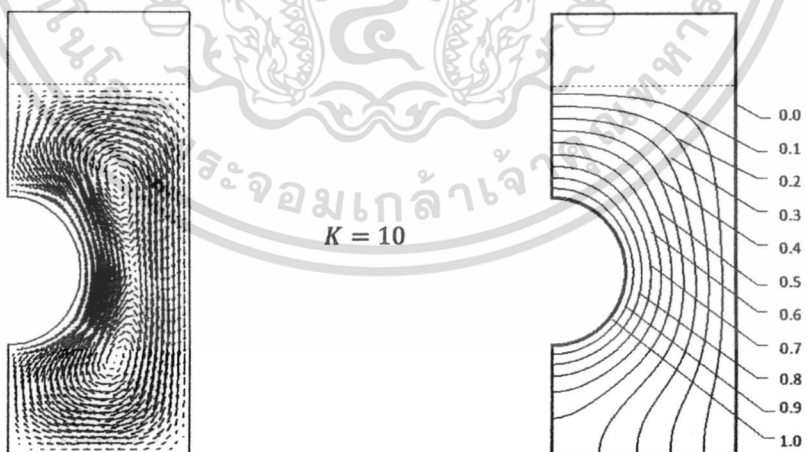
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



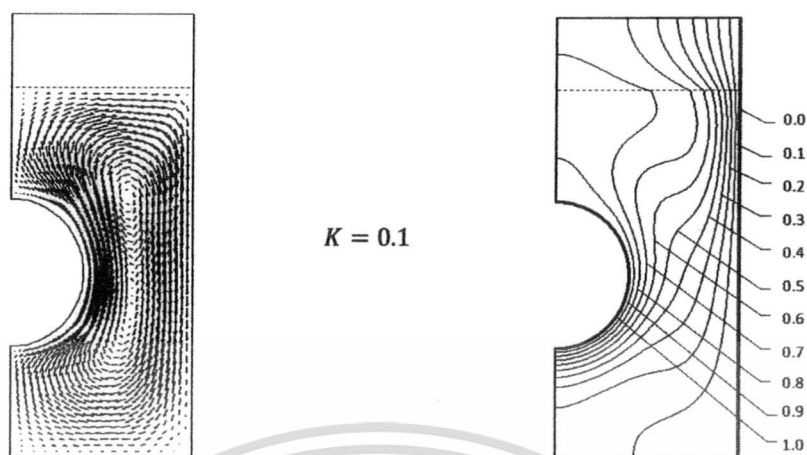
(ข)



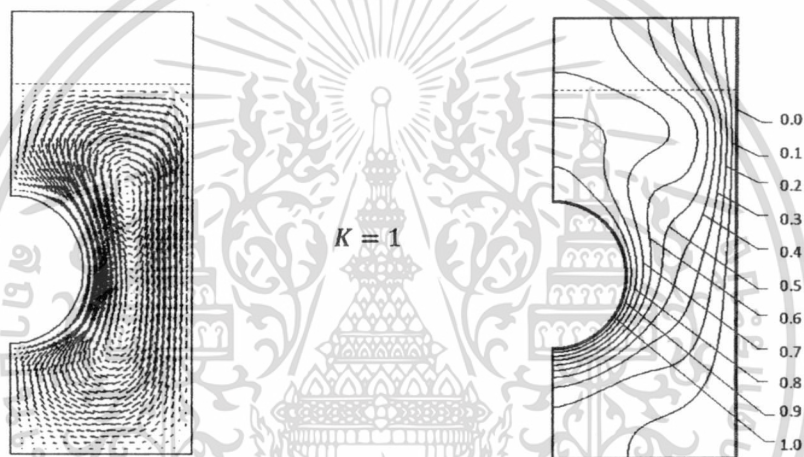
(ค)

รูปที่ 6.47 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมภายในโดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^4$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก)



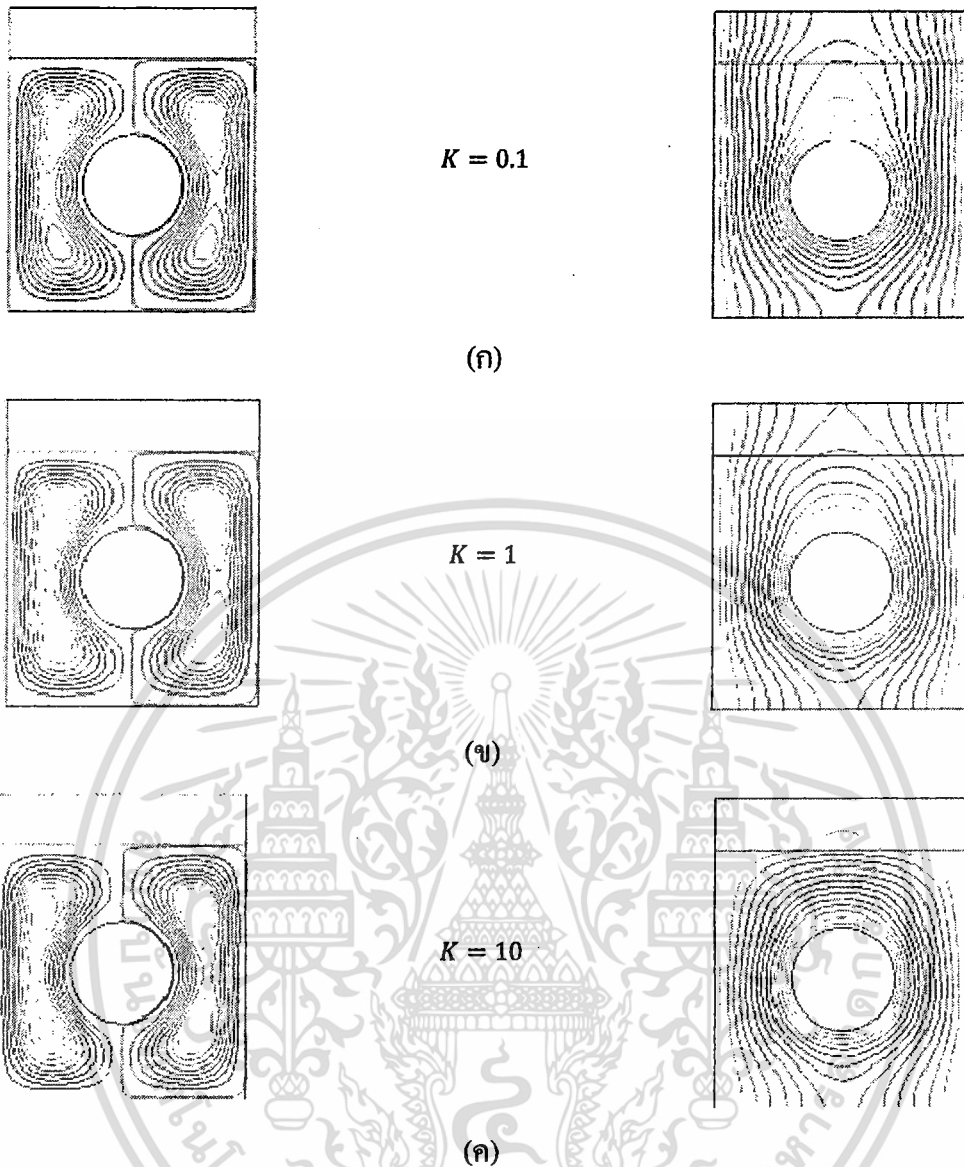
(ข)



(ค)

รูปที่ 6.48 เวกเตอร์ความเร็วและเส้นชั้นอุณหภูมิกภายในโดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.49 เส้นกระแสการไหล (Streamline) และเส้นชั้นอุณหภูมิภายใน โดเมนที่ค่า $K = 0.1, 1$ และ 10 เมื่อ $Ra = 10^4$ จากผลลัพธ์ของ Dong และ Li [39]

รูปที่ 6.49 แสดงเส้นกระแสการไหลและเส้นชั้นอุณหภูมิซึ่งได้จาก ผลลัพธ์ของ Dong และ Li [39] เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับลักษณะการไหลและการกระจายอุณหภูมิที่ได้รับจากวิธี CVFEM ในรูปที่ 6.47 สรุปได้ว่าผลการคำนวณจากวิธี CVFEM มีความสอดคล้องกับผลลัพธ์จากวิธีผลต่างสืบเนื่องเป็นอย่างดี

บทที่ 7

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้เน้นการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ตามแนวทางของระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ ปัญหาการถ่ายเทความร้อนสองมิติแบบคอนจูกต์ระหว่างของแข็งและของไหลที่ไหลแบบหนืดไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว ในส่วนที่เป็นของแข็งมีเฉพาะการนำความร้อนเท่านั้น ส่วนปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหลคือปัญหาการพาความร้อน

ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์ในสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ จำเป็นที่จะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นในบทที่ 2 จึงได้แสดงถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็ง ปัญหาการถ่ายเทความร้อนร่วมกับการไหลของของไหล สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสองมิติมีทั้งหมด 1 สมการ ได้แก่ สมการอนุพันธ์พลังงาน สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลในสองมิติมีทั้งหมด 4 สมการ ได้แก่ สมการอนุพันธ์มวล สมการอนุพันธ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y และสมการอนุพันธ์พลังงาน ตามลำดับ สมการทั้งสี่ครอบคลุมสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบอิสระด้วยซึ่งในกรณีดังกล่าว แรงวัตถุหนึ่งที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลภายในโดเมนคือ แรงลอยตัวซึ่งเกิดขึ้นจากความแตกต่างของอุณหภูมิภายในโดเมน

ในบทที่ 3 เป็นการแสดงขั้นตอนในการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุพันธ์พลังงาน นอกจากนี้ บทที่ 3 ได้แสดงถึงความแตกต่างระหว่างวิธี Cell-centered และ Vertex-centered ความสามารถในการคำนวณด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมได้ถูกแสดงไว้ในตัวอย่างเกี่ยวกับการนำความร้อนในหนึ่งมิติ รวมทั้งความแตกต่างของวิธีทั้งสองได้ถูกแสดงไว้ด้วยเช่นกันในกรณีที่ปัญหานั้นมีวัสดุ 2 ชนิด วิธี Vertex-centered เป็นวิธีที่ถูกเลือกใช้ในการคำนวณทั้งหมดในวิทยานิพนธ์นี้ ดังนั้น ส่วนหนึ่งของบทที่ 3 จึงอธิบายถึงการสร้างปริมาตรควบคุมของวิธี Vertex-centered สำหรับกริดที่ไร้ระเบียบดังเช่นกริดที่ได้จากเซลล์สามเหลี่ยม

สำหรับในบทที่ 4 เป็นการแสดงขั้นตอนในการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน พร้อมทั้งประยุกต์ใช้วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์คอนโทรลวอลุ่ม (Streamline Upwind Control Volume; SUCV) จากนั้นได้ประยุกต์ใช้ขั้นตอนการคำนวณของวิธี SIMPLER ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการคำนวณความเร็วและความดัน

เพื่อให้ความเร็ว n และ v ที่คำนวณได้จากสมการ โมเมนตัมนั้นมีความสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล ขั้นตอนดังกล่าวเป็นการคำนวณแบบแยกกัน (Segregated method) ที่ช่วยลดการใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์และลดระยะเวลาในการคำนวณลงได้ โดยไม่ต้องทำการคำนวณทุกตัวแปรในระบบสมการขนาดใหญ่พร้อมๆกัน ยิ่งไปกว่านั้น ระเบียบวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ยินยอมให้ใช้ฟังก์ชันประมาณภายในของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิที่มีอันดับเท่ากันได้ (Equal-order interpolation function) ทำให้สะดวกต่อการประดิษฐ์สมการและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงทำให้สะดวกที่จะนำไปพัฒนาสู่งานวิจัยระดับสูงต่อไป สมการที่ปรากฏอยู่ในบทนี้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมที่จะหาคำตอบด้วยวิธีกระทำซ้ำแบบเกาส์ไซเคิล และสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยง่าย

ในบทที่ 5 แสดงคำอธิบายเกี่ยวกับข้อมูลต่างๆที่นำเข้าสู่โปรแกรมคำนวณ โดยบันทึกไว้ในไฟล์นำเข้า (Input file) และลักษณะของการแสดงผลทั้งบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ และไฟล์ผลลัพธ์ (Output file) สำหรับในบทที่ 6 ประกอบด้วยการตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ระเบียบสำหรับปัญหาในของแข็งและของไหล และการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ระเบียบกับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต การตรวจสอบแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ในส่วนแรกเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในของแข็ง โดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงเลขกับผลเฉลยแม่นยำตรง 2 ปัญหาได้แก่ 1) ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติของแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยม 2) ปัญหาการแพร่กระจายความร้อนโดยมีการผลิตความร้อนขึ้นภายในโดเมน ในส่วนที่สองเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืด โดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงเลขที่ได้กับผลการคำนวณเชิงเลขของผู้วิจัยอื่น 5 ปัญหาได้แก่ 1) ปัญหาการไหลและถ่ายเทความร้อนระหว่างแผ่นคู่ขนานและของไหล 2) ปัญหาการไหลในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 3) ปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน 4) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 5) ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ในที่สุดท้ายเป็นการประยุกต์ระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ระเบียบกับปัญหาของการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต โดยเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณจากนักวิจัยอื่น จำนวน 3 ปัญหาได้แก่ 1) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทางกัน 2) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีผนังนำความร้อน 3) ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในช่องปิดสี่เหลี่ยมที่มีทรงกระบอกร้อนอยู่ภายใน และมีผนังนำความร้อนด้วย โดยในปัญหาเหล่านี้ ได้มีการศึกษาผลกระทบของค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็งต่อสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของไหล

กล่าวโดยสรุปได้ว่า วิทยานิพนธ์นี้สามารถนำระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมไว้ระเบียบสำหรับเซลล์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ซึ่งเป็นการถ่ายเทความร้อนร่วมกันระหว่างการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหล ได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้ การคำนวณแบบแยกกัน (Segregated method) สามารถช่วยลดเวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้มาก การทำงานของเซลล์สามเหลี่ยมทำให้มีความสะดวกต่อการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ โดยแทบจะเรียกได้ว่าไม่ด้อยไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เลย

7.2 ปัญหาที่พบในขณะที่ทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาที่สำคัญยิ่งในการทำวิทยานิพนธ์นี้คือ การทำความเข้าใจถึงความเหมือนและความแตกต่างของวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์แบบใช้การถ่วงน้ำหนักสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (SUPG) และระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม (SUCV) สำหรับการวิเคราะห์การไหล เมื่อเข้าใจในเทคนิค SUCV แล้วจะพบว่า การประดิษฐ์สมการสำหรับวิเคราะห์การแพร่และการพาด้วยวิธีนี้สามารถทำได้โดยง่ายด้วยการแก้ไขเพิ่มเติมพจน์การพาเข้าไปในสมการสำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน ต่อจากนั้นเป็นการใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLER ในการคำนวณปัญหาการไหลในโดเมนปิด ซึ่งไม่มีการไหลเข้าและออกจากโดเมน เมื่อสามารถคำนวณได้อย่างถูกต้องกับปัญหาการไหลในโดเมนปิดได้แล้ว จึงได้เพิ่มความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้ประยุกต์ได้กับ ปัญหาที่มีการไหลเข้าและออกจากโดเมน สิ่งที่สำคัญที่สุดสำหรับปัญหาแบบนี้คือ การเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตของฟลักซ์มวลที่ไหลเข้าสู่โดเมนในด้านขวามือของสมการความดัน ปัญหาในส่วนสุดท้ายคือ การใช้วิธีเกาส์ไซเดลในวิทยานิพนธ์นี้ถือได้ว่าเป็นการแก้ระบบสมการที่มีการจองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ที่น้อยมาก ในที่นี้วิธีเกาส์ไซเดลที่ใช้จึงไม่มีการเก็บองค์ประกอบโคเลของเมตริกซ์ที่อยู่ด้านซ้ายมือของสมการคำนวณ (Matrix free Gauss-Seidel method) และภายในแต่ละโปรแกรมย่อยของการคำนวณค่า u , v , p และ T จะมีการค้นหาเซลล์โดยรอบของจุดต่อใดๆ เสมอ

7.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

การพัฒนางานวิจัยต่อจากวิทยานิพนธ์มีอยู่หลายแนวทาง ได้แก่ แนวทางที่หนึ่งคือ ปรับปรุงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนที่สภาวะอยู่ตัว (Steady turbulent flow) เพื่อให้สามารถหาผลลัพธ์ ให้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต สำหรับการไหลที่มี

ความเร็วสูงยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาให้ใกล้เคียงกับสถานะของการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นจริงในปัญหาทางอุตสาหกรรม แนวทางที่สองคือ เพิ่มความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในสามมิติที่สถานะอยู่ตัว แนวทางที่สามคือ พิจารณาพจน์ของการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของตัวแปรต่างๆ เพื่อนำไปสู่การประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่สามารถให้คำตอบของตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหลายในช่วงเวลาต่างๆได้ (Transient problems) แนวทางที่สี่ คือ การประยุกต์วิธีปรับขนาดเซลล์ เพื่อลดจำนวนเซลล์ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต (Adaptive meshing)



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- [1] G.D. Raithby, "Skew upwind differencing schemes for problems involving fluid flow," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 9, pp. 153-164, 1976.
- [2] A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- [3] Y.A. Hassan, J.G. Rice, and J.H. Kim, "A stable mass-flow-weighted two-dimensional skew upwind scheme," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 6, pp. 395-408, 1983.
- [4] J.G. Rice and R.J. Schnipke, "A monotone streamline upwind finite element method convection-dominated flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, pp. 313-327, 1985.
- [5] J.G. Rice and R.J. Schnipke, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 58, pp. 135-149, 1986.
- [6] N. Wansophark and P. Dechaumphai, "Enhancement of streamline upwind finite element solutions by adaptive meshing technique," *JSME International Journal Series B*, Vol. 45, pp. 770-779, 2002.
- [7] N. Wansophark and P. Dechaumphai, "Combined adaptive meshing technique and segregated finite element algorithm for analysis of free and forced convection heat transfer," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 645-663, 2004.
- [8] N. Wansophark, A. Malatip, and P. Dechaumphai, "Streamline upwind finite element method for conjugate heat transfer problems," *Acta Mech Sinica*, Vol. 21, pp. 436-443, 2005.
- [9] C.R. Swaminathan, V.R. Voller, and S.V. Patankar, "A Streamline upwind control volume finite element method for modeling fluid flow and heat transfer problems," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 13, pp. 169-184, 1993.

- [10] ยศกร ประทุมวัลย์, **ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต**, วิทยาลัยปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.
- [11] อธิพงษ์ มาลาทิพย์, **ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต**, วิทยาลัยปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.
- [12] นิพนธ์ วรรณโสภาคย์, **ระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ไฟไนต์เอลิเมนต์และการปรับขนาดสำหรับการวิเคราะห์ร่วมกันระหว่างกริดไหล ออณหภูมิ และโครงสร้าง**, วิทยาลัยปริญญาคุณฐิบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549.
- [13] R.W. Fox and A.T. McDonald, **Introduction to fluid mechanics**, Fourth edition, New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [14] J.D. Jr. Anderson, **Computational Fluid Dynamics**, Singapore: McGraw-Hill, 1995.
- [15] H. Schlichting, **Boundary Layer Theory**, Seventh edition, New York: McGraw-Hill, 1979.
- [16] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, **The finite element method**, Fourth edition, McGraw-Hill, 1991.
- [17] H.C. Huang and A.S. Usmani, **Finite element analysis for heat transfer: Theory and software**, London: Springer-Verlag, 1994.
- [18] Y.W. Kwon and H. Bang, **The finite element method using MATLAB**, New York: CRC Press, 1997.
- [19] B.R. Baliga and S.V. Patankar, "Elliptic systems: finite element I," **Handbook of Numerical Heat Transfer**, New York: Wiley, 1988.
- [20] S.C. Chapra, **Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists**, Special Indian Edition, Tata McGraw-Hill, 2007.
- [21] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, **Numerical recipes in FORTRAN 77: The art of science computing**, Vol. 1, Second Edition, United Kingdom: Cambridge University Press, 1996.
- [22] H.K. Versteeg and W. Malalasekera, **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**, London: Longman Scientific & Technical, 1995.

- [23] C. Masson, H.J. Saabas, and B.R. Baliga, "Co-located equal-order control-volume finite element method for two-dimensional axisymmetric incompressible flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 18, pp. 1-26, 1994.
- [24] B.R. Baliga and N. Atabaki, "Control-volume-based finite-difference and finite-element methods," *Handbook of Numerical Heat Transfer*, 2006.
- [25] G. Comini, W.J. Minkowycz, and W. Shyy, "General algorithms for the finite element solution of incompressible flow problems using primitive variables," *Advanced in Numerical Heat Transfer: Volume 1*, Taylor & Francis, pp. 137-170, 1997.
- [26] J.C. Heinrich and C.C. Yu, "Finite element simulation of buoyancy-driven flows with emphasis on natural convection in a horizontal circular cylinder," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 69, pp. 1-27, 1988.
- [27] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York: Taylor & Francis, 1980.
- [28] C. Prakash and S.V. Patankar, "A control volume-based finite element method for solving the Navier-Stokes equations using equal-order velocity-pressure interpolation," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 259-280, 1985.
- [29] H.J. Saabas and B.R. Baliga, "A co-located equal-order control-volume finite element method for multidimensional, incompressible fluid flow, part I: formulation," *Numerical Heat Transfer Part B*, Vol. 26, pp. 381-407, 1994.
- [30] F.P. Incropera and D.P. De Witt, *Introduction to heat transfer*, Second edition, Singapore: John Wiley & Sons, 1990.
- [31] B. Ramaswamy and T.C. Jue, "A segregated finite element formulation of Navier-Stokes equations under laminar conditions," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, pp. 257-270, 1991.
- [32] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม, ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนึ่งเดียว, วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

- [33] J.N. Reddy and A. Satake, "A comparison of a penalty finite element model with the stream function-vorticity model of natural convection in enclosures," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 659-666, 1980.
- [34] T.H. Kuehn and R.J. Goldstein, "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 74, pp. 695-719, 1976.
- [35] B. Sunden, "Conjugate heat transfer from circular cylinders in low Reynolds number flow," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 1359-1367, 1980.
- [36] J.P. Holman, *Heat transfer*, SI Metric edition, Singapore: McGraw-Hill, 1989.
- [37] X. Chan and P. Han, "A note on the solution of conjugate heat transfer problems using SIMPLE-like algorithms," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 463-467, 2000.
- [38] M., Hribersek and G. Kuhn, "Conjugate heat transfer by boundary-domain integral method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 24, pp. 297-305, 2000.
- [39] S.F. Dong and Y.T. Li, "Conjugate of natural convection and conduction in a complicated enclosure," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 2233-2239, 2004.



ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
program sucv
```

```

=====
!
!                               SUCV
!
!-----
! AN UNSTRUCTURED FINITE VOLUME PROGRAM FOR
! TWO-DIMENSIONAL CONJUGATE HEAT TRANSFER PROBLEMS
! USE EQUAL-ORDER TRIANGULAR FORMULATION
! WITH STREAMLINE UPWIND TECHNIQUE FOR CONVECTION-DOMINATED FLOWS.
!-----
! COMPILED BY COMPAQ VISUAL FORTRAN V6.6
! DEVELOPED BY PASSAKORN VESSAKOSOL,
! DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING, FACULTY OF ENGINEERING,
! KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG, THAILAND.
!-----
=====

```

```
implicit none
```

```
integer,parameter :: maxnod = 2938, maxele = 5688, maxels=6, maxbou = 19, npe=3
```

```

=====
! maxnod : MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE DOMAIN
! maxele : MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE DOMAIN
! maxels : MAXIMUM NUMBER OF SURROUNDING ELEMENTS OF EACH NODE
! maxbou : MAXIMUM NUMBER OF NODES ON THE INLET OR OUTLET BOUNDARY
!-----

```

```
integer,parameter :: pswp=200      ! iterations for pressure calculation
real,parameter    :: relax_u=0.3, relax_v=0.3, relax_p=0.2, relax_t=0.5
```

```

=====
! relax_u : UNDER-RELAXATION FACTOR FOR U
! relax_v : UNDER-RELAXATION FACTOR FOR V
! relax_p : UNDER-RELAXATION FACTOR FOR P
! relax_t : UNDER-RELAXATION FACTOR FOR T
!-----

```

```
integer :: nnode,nelem,nboun,niter,nbpr,nbsym,nodef,nelef
```

```

=====
! nnode : TOTAL NUMBER OF NODES IN BOTH SOLID AND FLUID (SUBROUTINE INPUT)
! nodef : TOTAL NUMBER OF NODES IN FLUID ONLY (SUBROUTINE INPUT)
! nelef : TOTAL NUMBER OF ELEMENTS IN FLUID
! nelem : TOTAL NUMBER OF ELEMENTS (SUBROUTINE INPUT)
! nboun : NUMBER OF NODES ON INPUT BOUNDARY (SUBROUTINE INPUT)
! nbpr  : NUMBER OF NODES ON OUTLET BOUNDARY (SUBROUTINE INPUT)
! nbsym : NUMBER OF NODES ON SYMMETRY BOUNDARY (SUBROUTINE INPUT)
! niter : NUMBER OF ITERATIONS OF OUTER CALCULATION LOOPS
!-----

```

```

integer :: iter,i,j,count
integer :: intmat(maxele,npe)      ! node-element connectivity array
integer :: ibin(maxbou),ibou(maxbou) ! a couple of nodes for outlet b.c.
integer :: ibpi(maxbou),ibpo(maxbou) ! a couple of nodes for inlet b.c.
integer :: ibsi(maxbou),ibso(maxbou) ! a couple of nodes for symm. b.c.
logical :: ibcu(maxnod),ibcv(maxnod),ibcp(maxnod),ibct(maxnod),mat(maxele)

```

```

=====
! ibcu : BOOLEAN VARIABLE FOR THE BOUNDARY NODES OF U (T) OR INTERNAL NODES(F)
! ibcv : BOOLEAN VARIABLE FOR THE BOUNDARY NODES OF V (T) OR INTERNAL NODES(F)
! ibcp : BOOLEAN VARIABLE FOR THE BOUNDARY NODES OF P (T) OR INTERNAL NODES(F)
! ibct : BOOLEAN VARIABLE FOR THE BOUNDARY NODES OF T (T) OR INTERNAL NODES(F)
! mat  : BOOLEAN VARIABLE FOR SOLID (F) OR FLUID (T)
!-----

```

```
real    :: den,vis,hcap,condy,conds,gravy,beta,tref
```

```

=====
! den  : DENSITY OF FLUID
! vis  : KINEMATIC VISCOSITY OF FLUID
! hcap : SPECIFIC HEAT OF FLUID
! condy : THERMAL CONDUCTIVITY OF FLUID
! conds : THERMAL CONDUCTIVITY OF SOLID
! gravi : GRAVITATION ACCELERATION CONSTANT
! beta : COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION IN FLUID
! tref : REFERENCE TEMPERATURE FOR BOUYANT FORCE
!-----

```

```
real    :: qgen      ! heat generation per unit volume
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

real    :: tmax,tmin                ! max and min temperature of domain
real    :: erroru,errorv,errorp,errorm,errorr,tol

!=====
! erroru : TOTAL ERROR OF U-VELOCITY
! errorv : TOTAL ERROR OF V-VELOCITY
! errorp : TOTAL ERROR OF PRESSURE
! errorm : TOTAL ERROR OF MASS FLUX
! errorr : TOTAL ERROR OF TEMPERATURE
! tol    : MAXIMUM TOLERANCE FOR CONVERGENCE
!=====

real    :: u(maxnod),v(maxnod)      ! u and v velocities
real    :: p(maxnod),t(maxnod)      ! pressure and temperature
real    :: xcord(maxnod),ycord(maxnod) ! coordinates of each node
real    :: uhat(maxnod),vhat(maxnod) ! pseudo-velocities of u and v
real    :: du(maxnod),dv(maxnod)    ! coefficients of dp/dx and dp/dy
real    :: diagu(maxnod),diagv(maxnod)
real    :: anew(maxnod),vnew(maxnod) ! u and v velocities from correct_uv
real    :: pnew(maxnod),tnew(maxnod) ! p and t from calc_temp & solve_p
real    :: cpx(maxnod),cpy(maxnod)  ! du*(dp/dx) and dv*(dp/dy)
real    :: dtdx(maxnod),dtdy(maxnod) ! temp. gradients in x & y directions

open(unit=7,file='cn07.inp')
open(unit=8,file='cn07.out')

!=====
! read data from input file (unit=7)
!=====

call input(maxnod,maxele,maxbou,npe,nnode,nelem,nboun,intmat,ibcu,ibcv,&
           ibcp,ibct,hcap,condy,gravity,beta,tref,xcord,ycord,den,vis,&
           niter,tol,u,v,p,t,qgen,tmax,tmin,ibin,ibou,nbpr,ibpi,ibpo,nbsym,&
           ibsi,ibso,nodef,nelef,conds,mat)

cpx=0.0
cpy=0.0

do iter=1,niter

!=====
! solve temperature
!=====

call calc_temp(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,ibct,&
              den,condy,hcap,conds,qgen,mat,xcord,ycord,u,v,t,tnew)

!=====
! calculate uhat and du
!=====

call calc_uhat(maxele,maxnod,maxels,nodef,nelem,npe,intmat,ibcu,&
              den,vis,xcord,ycord,u,v,uhat,du,cpx,diagu)

!=====
! calculate vhat and dv
!=====

call calc_vhat(maxele,maxnod,maxels,nodef,nelem,npe,intmat,ibcv,&
              den,vis,xcord,ycord,beta,gravity,tref,t,u,v,vhat,dv,cpy,diagv)

!=====
! solve pressure
!=====

call solve_p(maxele,maxnod,maxels,nodef,nelem,npe,intmat,ibcp,&
            den,xcord,ycord,pswp,maxbou,nbpr,ibpo,p,uhat,vhat,du,dv,pnew)

!=====
! correct u and v-velocities
!=====

call correct_uv(maxele,maxnod,maxels,nodef,nelem,npe,intmat,&
              ibcu,ibcv,ibcp,xcord,ycord,den,vis,u,v,uhat,vhat,pnew,&
              diagu,diagv,anew,vnew,cpx,cpy)

if (nboun>0) then
  call boundary_pressure(maxnod,maxbou,nodef,nbpr,ibpi,ibpo,&
                       cpx,cpy,xcord,ycord,ibcp,pnew)
end if

```

```

!=====
! calculate erroru,errorv,errorp and errort
!=====

call error_check(maxnod,nodef,ibcu,u,unew,erroru)
call error_check(maxnod,nodef,ibcv,v,vnew,errorv)
call error_check(maxnod,nodef,ibcp,p,pnew,errorp)
call error_check(maxnod,nnode,ibct,t,tnew,errort)

errorm=1.0
if (nboun>0) then
  write(*,10) ' iter = ',iter,erroru,errorv,errorp,errort
else if (nboun==0) then
  write(*,10) ' iter = ',iter,erroru,errorv,errorp,errort
end if
10 format(a,i5,2x,4(e10.4,3x))
if (max(erroru,errorv,errorp,errort)<tol) then
  write(8,'(a,i5)') ' solution converged at iter = ',iter
  exit
else
  !=====
  ! check mass balance (for flow in and out of the domain)
  !=====
  if (nboun>0) then
    errorm=1.0

    do i=1,nboun

      ! outlet velocity components
      unew(ibou(i)) = unew(ibin(i))
      u(ibou(i)) = unew(ibou(i))
      vnew(ibou(i)) = vnew(ibin(i))
      v(ibou(i)) = vnew(ibou(i))

      ! outlet temperature
      tnew(ibou(i)) = tnew(ibin(i))
      t(ibou(i)) = tnew(ibou(i))
    end do

    do i=1,nbsym
      ! symmetry around a line parallel to x-axis
      if (ibcv(i)) unew(ibso(i)) = unew(ibsi(i))

      ! symmetry around a line parallel to y-axis
      if (ibcu(i)) vnew(ibso(i)) = vnew(ibsi(i))

      tnew(ibso(i)) = tnew(ibsi(i))
    end do
  end if

  !=====
  ! under-relaxation for u, v, p and t (internal nodes)
  !=====

  do i=1,nnode
    if (.not.ibcu(i)) then
      u(i) = (1-relax_u)*unew(i)+(relax_u)*u(i)
    end if
    if (.not.ibcv(i)) then
      v(i) = (1-relax_v)*vnew(i)+(relax_v)*v(i)
    end if
    if (.not.ibcp(i)) then
      p(i) = (1-relax_p)*pnew(i)+(relax_p)*p(i)
    end if
    if (.not.ibct(i)) then
      t(i) = (1-relax_t)*tnew(i)+(relax_t)*t(i)
    end if
  end do

  end if
end do

do i=1,nnode
  if (tnew(i)<tmin) tnew(i)=tmin
  if (tnew(i)>tmax) tnew(i)=tmax
  write(8,*) i,unew(i),vnew(i),pnew(i),tnew(i)
end do

!=====

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

! calculate the temperature gradients for Nusselt number
!=====
call gradient(maxele,maxnod,maxels,nodef,nelef,npe,intmat,&
             ibct,xcord,ycord,tnew,dtdx,dtdy)

write(8,*) ' gradient in fluid'
write(8,*) ' i x-direction y-direction normal'

do i=1,nnode
  write(8,*) i,dtdx(i),dtdy(i)
end do

write(8,*) ' temp. gradient (fluid) around circle'
! cn07.inp
do i=2642,2606,-1
  write(8,*) i,dtdx(i),dtdy(i)
end do

write(8,*) ' temperature around circle'
! cn07.inp
do i=2642,2606,-1
  write(8,*) i,tnew(i)
end do

stop
end program sucv

subroutine gradient(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
                  ibct,xcord,ycord,tnew,dtdx,dtdy)
  implicit none
  integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
  integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
  real,intent(in) :: xcord(maxnod),ycord(maxnod),tnew(maxnod)
  logical,intent(in) :: ibct(maxnod)
  real,intent(out) :: dtdx(maxnod),dtdy(maxnod)

  integer :: i,ii,k,m,count,numnod,numele,ie,s1,s2
  integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)
  real :: xil,etal,xi2,eta2,gx,gy,detJ
  real :: x(npe),y(npe)
  real :: shp(npe),dndx(npe),dndy(npe)

!=====
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call surround_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,&
                    intmat,inode,surnd,elcou)

do m=1,nnode
  gx = 0.0; gy=0.0 ! average dt/dx and dt/dy for each node
  numele = elcou(m)
  do k=1,numele
    numnod = inode(m,k)
    ie = surnd(m,k)

!=====
! integration points of each surrounding element
!=====
call check_node(numnod,xil,etal,xi2,eta2,s1,s2)

do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  x(i)=xcord(ii)
  y(i)=ycord(ii)
end do

!=====
! subcontrol surface no.1
!=====
call shapef(npe,x,y,xil,etal,shp,dndx,dndy,detJ)

do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  gx = gx + dndx(i)*tnew(ii)
  gy = gy + dndy(i)*tnew(ii)
end do

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====
call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  gx = gx + dndx(i)*tnew(ii)
  gy = gy + dndy(i)*tnew(ii)
end do

end do ! end of element loop

dtdx(m) = gx/(2.0*numele)
dtdy(m) = gy/(2.0*numele)
end do

return
end subroutine gradient

subroutine calc_temp(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
  ibct,den,condy,hcap,conds,&
  qgen,mat,xcord,ycord,u,v,t,tnew)

implicit none
integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
logical,intent(in) :: ibct(maxnod),mat(maxele)
real,intent(in) :: den,condy,hcap,conds,qgen
real,intent(in) :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
real,intent(in) :: u(maxnod),v(maxnod),t(maxnod)
real,intent(out) :: tnew(maxnod)

integer :: i,ii,ie,m,k,numnod,numele,s1,s2
integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

real :: capcy,detJ
real :: x11,xi2,eta1,eta2,ux,uy,kbar,a,b,x1,x2,y1,y2,vol,x3,y3
real :: diag(maxnod),rhs(maxnod),x(npe),y(npe)
real :: Jx(npe),Jy(npe),coef(npe)
real :: shp(npe),dndx(npe),dndy(npe)

real :: midside,midele

capcy = den*hcap ! capcy ==> density*heat capacity
!=====
! initialization
!=====

diag=0.0
rhs=0.0
tnew = t

!=====
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
  ibct,inode,surnd,elcou)

do m=1,nnode
  if (.not.ibct(m)) then
    numele = elcou(m)
    vol = 0.0 ! the volume of each control volume

    do k=1,numele
      numnod = inode(m,k)
      ie = surnd(m,k)
      coef = 0.0

      !=====
      ! find the integration points of each surrounding element
      !=====

      call check_node(numnod,x11,eta1,xi2,eta2,s1,s2)

      do i=1,npe
        ii=intmat(ie,i)
        x(i)=xcord(ii)
        y(i)=ycord(ii)

```

```

end do

!=====
! subcontrol surface no.1
!=====

!=====
! calculate the shape functions and their derivatives
!=====

call shapef(npe,x,y,x1,eta1,shp,dndx,dndy,detJ)

x1=midside(s1,npe,x)
y1=midside(s1,npe,y)

x2=midele(x,npe)
y2=midele(y,npe)

a = y2 - y1
b = x1 - x2

x3 = xcord(m)
y3 = ycord(m)
vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

ux = 0.0
uy = 0.0

do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  ux = ux + shp(i)*u(ii)
  uy = uy + shp(i)*v(ii)
end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

call petrov(npe,ux,uy,capcy,condy,x,y,kbar)

if (mat(ie)) then      ! fluid
  do i=1,npe
    Jx(i) = -condy*dndx(i)+capcy*ux*shp(i)- &
             capcy*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
    Jy(i) = -condy*dndy(i)+capcy*uy*shp(i)- &
             capcy*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
    coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
  end do
else                    ! solid
  do i=1,npe
    Jx(i) = -conds*dndx(i)
    Jy(i) = -conds*dndy(i)
    coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
  end do
end if

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====

!=====
! calculate the shape functions and their derivatives
!=====

call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

x1=x2
y1=y2
x2=midside(s2,npe,x)
y2=midside(s2,npe,y)

a = y2 - y1
b = x1 - x2

vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

ux = 0.0
uy = 0.0
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  ux = ux + shp(i)*u(ii)

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

      uy = uy + shp(i)*v(ii)
    end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

    call petrov(npe,ux,uy,capcy,condy,x,y,kbar)

    if (mat(ie)) then      ! fluid

!=====
! use SUCV to solve the convective term problem
!=====

      do i=1,npe
        Jx(i) = -condy*dndx(i)+capcy*ux*shp(i)- &
                capcy*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
        Jy(i) = -condy*dndy(i)+capcy*uy*shp(i)-&
                capcy*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
        coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
      end do
    else
      ! solid

      do i=1,npe
        Jx(i) = -conds*dndx(i)
        Jy(i) = -conds*dndy(i)
        coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
      end do
    end if

!===== assembly =====

    do i=1,npe
      ii = intmat(ie,i)
      if (m==ii) then
        diag(m) = diag(m) + coef(i)
      else
        rhs(m) = rhs(m) - coef(i)*tnew(ii)
      end if
    end do
  end do

  rhs(m) = rhs(m) + qgen*vol

!=====
! solve temperature by using gauss-seidel method
!=====

  if(diag(m)/=0.0) then
    tnew(m) = rhs(m)/diag(m)
  end if
end if
end do

return
end subroutine calc_temp

subroutine calc_uhat(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
  ibcu,den,vis,xcord,ycord,&
  u,v,uhat,du,cpx,diagu)

implicit none
integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
logical,intent(in) :: ibcu(maxnod)
real,intent(in) :: den,vis
real,intent(in) :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
real,intent(in) :: v(maxnod),cpx(maxnod)
real,intent(in) :: u(maxnod)
real,intent(out) :: uhat(maxnod),du(maxnod),diagu(maxnod)

integer :: i,ii,ie,k,m,numnod,numele,s1,s2
integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

real :: rhs(maxnod),coef(npe)
real :: x(npe),y(npe)
real :: shp(npe),dndx(npe),dndy(npe)
real :: Jx(npe),Jy(npe)
real :: unew(maxnod)
real :: xi1,xi2,eta1,eta2,detJ
real :: x1,x2,x3,y1,y2,y3,a,b

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

real    :: vol,ux,uy,kbar
real    :: midside,midele

!=====
! subroutine node_element apply only to the internal nodes (ibcu = false)
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
                 ibcu,inode,surnd,elcou)

!=====
! initialization
!=====

uhat=0.0; du=0.0; diagu=0.0; rhs=0.0

do m=1,nnode
  numele = elcou(m)
  vol = 0.0

  do k=1,numele
    numnod = inode(m,k)
    ie = surnd(m,k)
    coef = 0.0

    !=====
    ! find the integration points of each surrounding element
    !=====

    call check_node(numnod,x11,eta1,x12,eta2,s1,s2)

    do i=1,npe
      ii=intmat(ie,i)
      x(i)=xcord(ii)
      y(i)=ycord(ii)
    end do

    !=====
    ! subcontrol surface no.1
    !=====

    call shapef(npe,x,y,x11,eta1,shp,dndx,dndy,detJ)

    x1=midside(s1,npe,x)
    y1=midside(s1,npe,y)

    x2=midele(x,npe)
    y2=midele(y,npe)

    a = y2 - y1
    b = x1 - x2

    x3 = xcord(m)
    y3 = ycord(m)
    vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

    ux = 0.0
    uy = 0.0
    do i=1,npe
      ii=intmat(ie,i)
      ux = ux + shp(i)*u(ii)
      uy = uy + shp(i)*v(ii)
    end do

    !=====
    ! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
    !=====

    call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)

    do i=1,npe
      Jx(i) = -vis*dndx(i)+(den*ux*shp(i))-&
              den*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
      Jy(i) = -vis*dndy(i)+(den*uy*shp(i))-&
              den*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
      coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
    end do
  end do
end do

```

```

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====

      call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

      x1 = x2
      y1 = y2

      x2=midside(s2,npe,x)
      y2=midside(s2,npe,y)

      a = y2 - y1
      b = x1 - x2

      vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

      ux = 0.0
      uy = 0.0
      do i=1,npe
         ii=intmat(ie,i)
         ux = ux + shp(i)*u(ii)
         uy = uy + shp(i)*v(ii)
      end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

      call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)

      do i=1,npe
         Jx(i) = -vis*dndx(i)+(den*ux*shp(i))-&
                 den*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
         Jy(i) = -vis*dndy(i)+(den*uy*shp(i))-&
                 den*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
         coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
      end do

!===== assembly =====
      do i=1,npe
         ii = intmat(ie,i)
         if (m==ii) then
            diagu(m) = diagu(m) + coef(i)
         else
            rhs(m) = rhs(m) - coef(i)*u(ii)
         end if
      end do
      end do

      if (.not.ibcu(m)) then
         if (diagu(m)/=0.0) then
            du(m) = vol/diagu(m)
            uhat(m) = rhs(m)/diagu(m)
         end if
      else
         diagu(m) = 1.0
         du(m) = 0.0
         uhat(m) = u(m)
      end if
      end do

      return
      end subroutine calc_uhat

      subroutine calc_vhat(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
         ibcv,den,vis,xcord,ycord,&
         beta,gravy,tref,t,u,v,vhat,dv,cpy,diagv)

      implicit none
      integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
      integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
      logical,intent(in) :: ibcv(maxnod)
      real,intent(in) :: den,vis,beta,gravy,tref
      real,intent(in) :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
      real,intent(in) :: u(maxnod),v(maxnod),t(maxnod),cpy(maxnod)
      real,intent(out) :: vhat(maxnod),dv(maxnod),diagv(maxnod)

      integer :: i,ii,ie,k,m,numnod,numele,s1,s2
      integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

```

```

real    :: rhs(maxnod),coef(npe)
real    :: x(npe),y(npe)
real    :: shp(npe),dndx(npe),dndy(npe)
real    :: Jx(npe),Jy(npe)
real    :: xi1,xi2,eta1,eta2,detJ
real    :: x1,x2,x3,y1,y2,y3,a,b
real    :: vol,ux,uy,kbar
real    :: tm

real    :: midside,midele

!=====
! subroutine node_element apply only to the internal nodes (ibcv = false)
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
                 ibcv,inode,surnd,elcou)

!=====
! initialization
!=====

vhat=0.0; dv=0.0; diagv=0.0; rhs=0.0

do m=1,nnode
  numele = elcou(m)
  vol = 0.0
  tm = 0.0      ! average temperature in buoyant force
  do k=1,numele
    numnod = inode(m,k)
    ie = surnd(m,k)
    coef = 0.0

    !=====
    ! find the integration points of each surrounding element
    !=====

    call check_node(numnod,xi1,eta1,xi2,eta2,s1,s2)

    do i=1,npe
      ii=intmat(ie,i)
      x(i)=xcord(ii)
      y(i)=ycord(ii)
    end do

    !=====
    ! subcontrol surface no.1
    !=====

    call shapef(npe,x,y,xi1,eta1,shp,dndx,dndy,detJ)

    do i=1,npe
      ii = intmat(ie,i)
      tm = tm + shp(i)*t(ii)
    end do

    x1=midside(s1,npe,x)
    y1=midside(s1,npe,y)

    x2=midele(x,npe)
    y2=midele(y,npe)

    a = y2 - y1
    b = x1 - x2

    x3 = xcord(m)
    y3 = ycord(m)
    vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

    ux = 0.0
    uy = 0.0
    do i=1,npe
      ii=intmat(ie,i)
      ux = ux + shp(i)*u(ii)
      uy = uy + shp(i)*v(ii)
    end do

    !=====

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar) .

do i=1,npe
  Jx(i) = -vis*dndx(i)+(den*ux*shp(i))-&
           den*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
  Jy(i) = -vis*dndy(i)+(den*uy*shp(i))-&
           den*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
  coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
end do

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====

call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

do i=1,npe
  ii = intmat(ie,i)
  tm = tm+shp(i)*t(ii)
end do

x1 = x2
y1 = y2

x2=midside(s2,npe,x)
y2=midside(s2,npe,y)

a = y2 - y1
b = x1 - x2
vol = vol + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

ux = 0.0
uy = 0.0
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  ux = ux + shp(i)*u(ii)
  uy = uy + shp(i)*v(ii)
end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)

do i=1,npe
  Jx(i) = -vis*dndx(i)+(den*ux*shp(i))-&
           den*ux*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
  Jy(i) = -vis*dndy(i)+(den*uy*shp(i))-&
           den*uy*kbar*(ux*dndx(i)+uy*dndy(i))
  coef(i) = coef(i) + Jx(i)*a + Jy(i)*b
end do

!===== assembly =====
do i=1,npe
  ii = intmat(ie,i)
  if (m==ii) then
    diagv(m) = diagv(m) + coef(i)
  else
    rhs(m) = rhs(m) - coef(i)*v(ii)
  end if
end do
end do

if (numele/=0.0) tm=tm/(2.0*numele)

!=====
! compute the buoyant force
!=====

if (beta/=0.0) then
  rhs(m) = rhs(m)-den*gravity*(1.0-beta*(tm-tref))*vol
end if

if (.not.ibcv(m)) then
  if(diagv(m)/=0.0) then
    dv(m) = vol/diagv(m)
    vhat(m) = rhs(m)/diagv(m)
  end if
end if

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        end if
    else
        diagv(m)=1.0
        dv(m)=0.0
        vhat(m)=v(m)
    end if
end do

return
end subroutine calc_vhat

subroutine solve_p(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,ibcp,&
    den,xcord,ycord,pswp,maxbou,nbpr,ibpo,p,uhat,vhat,du,dv,pnew)
implicit none
integer,intent(in)  :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,maxbou,nbpr,pswp
integer,intent(in)  :: intmat(maxele,npe),ibpo(maxbou)
logical,intent(in)  :: ibcp(maxnod)
real,intent(in)     :: den
real,intent(in)     :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
real,intent(in)     :: p(maxnod),uhat(maxnod),vhat(maxnod)
real,intent(in)     :: du(maxnod),dv(maxnod)
real,intent(out)    :: pnew(maxnod)

logical :: ibms(maxnod)
integer :: i,ii,ie,j,k,m,numnod,numele,s1,s2,iter
integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

real :: rhs(maxnod),coef(npe)
real :: x(npe),y(npe),shp(npe),dndx(npe),dndy(npe)
real :: diag(maxnod)
real :: Jx(npe),Jy(npe)
real :: uht,vht,kdu,kdv,fg
real :: x1,y1,x2,y2,x3,y3,a,b
real :: xil,xi2,etal,eta2,detJ

real :: midside,midele

!=====
! subroutine node element apply only to the internal nodes (ibcp = false)
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
    ibcp,inode,surnd,elcou)

do m=1,nnode
    pnew(m) = p(m)
end do

do iter=1,pswp
    diag=0.0
    rhs=0.0
    ibms = .false.
    do m=1,nnode

        !=====
        ! find the nodes on the inlet b.c. and specify the ibms(m) to .true.
        !=====

        do j=1,nbpr
            if (m==ibpo(j)) ibms(m)=.true.
        end do

        if((.not.ibcp(m)).and(.not.ibms(m))) then
            numele = elcou(m)
            fg = 0.0
            do k=1,numele
                numnod = inode(m,k)
                ie = surnd(m,k)
                coef = 0.0

                !=====
                ! find the integration points of each surrounding element
                !=====

                call check_node(numnod,xil,etal,xi2,eta2,s1,s2)

            do i=1,npe
                ii=intmat(ie,i)

```

```

      x(i)=xcord(ii)
      y(i)=ycord(ii)
    end do

!=====
! subcontrol surface no.1
!=====
      call shapef(npe,x,y,xil,etal,shp,dndx,dndy,detJ)

kdu=0.0; kdv=0.0
uht=0.0; vht=0.0
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  kdu = kdu + shp(i)*du(ii)
  kdv = kdv + shp(i)*dv(ii)
  uht = uht + shp(i)*uhat(ii)
  vht = vht + shp(i)*vhat(ii)
end do

      x1=midside(s1,npe,x)
      y1=midside(s1,npe,y)

      x2=midele(x,npe)
      y2=midele(y,npe)

      a = y2 - y1
      b = x1 - x2

      x3 = xcord(m)
      y3 = ycord(m)

      do i=1,npe
        Jx(i)=den*kdu*dndx(i)
        Jy(i)=den*kdv*dndy(i)
        coef(i)=coef(i) + (Jx(i)*a + Jy(i)*b)
      end do

      fg = fg + den*uht*a + den*vht*b

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====

      call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

kdu=0.0; kdv=0.0
uht=0.0; vht=0.0
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  kdu = kdu + shp(i)*du(ii)
  kdv = kdv + shp(i)*dv(ii)
  uht = uht + shp(i)*uhat(ii)
  vht = vht + shp(i)*vhat(ii)
end do

      x1 = x2
      y1 = y2

      x2=midside(s2,npe,x)
      y2=midside(s2,npe,y)

      a = y2 - y1
      b = x1 - x2

      do i=1,npe
        ii = intmat(ie,i)
        Jx(i)=den*kdu*dndx(i)
        Jy(i)=den*kdv*dndy(i)
        coef(i)=coef(i) + (Jx(i)*a + Jy(i)*b)
      end do

      fg = fg + den*uht*a + den*vht*b

!===== assembly =====
do i=1,npe
  ii = intmat(ie,i)
  if (m==ii) then
    diag(m) = diag(m) + coef(i)
  else
    rhs(m) = rhs(m) - coef(i)*pnew(ii)
  end if
end do

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        end do
    end do

    !===== solve by using gauss seidel method =====
    rhs(m) = rhs(m) + fg

    if(diag(m)/=0.0) then
        pnw(m) = rhs(m)/diag(m)
    end if
end if
end do
end do

return
end subroutine solve_p

subroutine correct_uv(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
                    ibcu,ibcv,ibcp,xcord,ycord,den,vis,u,v,uhat,&
                    vhat,pnew,diagu,diagv,unew,vnew,cpx,cpy)

implicit none
integer,intent(in)  :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
integer,intent(in)  :: intmat(maxele,npe)
logical,intent(in)  :: ibcu(maxnod),ibcv(maxnod),ibcp(maxnod)
real,intent(in)     :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
real,intent(in)     :: uhat(maxnod),vhat(maxnod),pnew(maxnod)
real,intent(in)     :: diagu(maxnod),diagv(maxnod)
real,intent(in)     :: u(maxnod),v(maxnod)
real,intent(in)     :: den,vis
real,intent(out)    :: unew(maxnod),vnew(maxnod)
real,intent(out)    :: cpx(maxnod),cpy(maxnod)

integer :: m,k,i,ii,ie,s1,s2,numele,numnod
integer :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

real    :: wpx(maxnod),wpy(maxnod)

real    :: x(npe),y(npe),shp(npe),dndx(npe),dndy(npe),vol(maxnod)
real    :: x1,y1,x2,y2,x3,y3,a,b
real    :: xil,xi2,eta1,eta2,detJ
real    :: dpdx,dpdy,wdpdx,wdpdy
real    :: kbar,ux,uy,dudx,dudy,ap
real    :: midside,midele

!=====
! subroutine node_element apply only to the internal nodes (ibcp = false)
! inode : local node number of each global node in surrounding elements
! surnd : element number that surrounding each global node
! elcou : total number of elements that surrounding each global node
!=====

call node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
                ibcp,inode,surnd,elcou)

vol = 0.0
do m=1,nnode
    if (.not.ibcp(m)) then
        dpdx = 0.0; dpdy=0.0
        wdpdx = 0.0; wdpdy=0.0
        numele = elcou(m)

        do k=1,numele
            numnod = inode(m,k)
            ie = surnd(m,k)

            call check_node(numnod,xil,eta1,xi2,eta2,s1,s2)

            do i=1,npe
                ii=intmat(ie,i)
                x(i)=xcord(ii)
                y(i)=ycord(ii)
            end do

            !=====
            ! subcontrol surface no.1
            !=====
            call shapef(npe,x,y,xil,eta1,shp,dndx,dndy,detJ)

            x1=midside(s1,npe,x)
            y1=midside(s1,npe,y)

            x2=midele(x,npe)

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

y2=midele(y,npe)

a = y2 - y1
b = x1 - x2

x3 = xcord(m)
y3 = ycord(m)
vol(m) = vol(m) + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

ux=0.0; uy=0.0; dudx = 0.0; dudy = 0.0
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  ux = ux + shp(i)*u(ii)
  uy = uy + shp(i)*v(ii)
  dudx = dudx + dndx(i)*u(ii)
  dudy = dudy + dndy(i)*v(ii)
end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)

ap = 1.0+kbar*(dudx+dudy) ! weighted constant
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  dpdx = dpdx + dndx(i)*pnew(ii)
  dpdy = dpdy + dndy(i)*pnew(ii)
  wdpdx = wdpdx + dndx(i)*pnew(ii)*ap
  wdpdy = wdpdy + dndy(i)*pnew(ii)*ap
end do

!=====
! subcontrol surface no.2
!=====
call shapef(npe,x,y,xi2,eta2,shp,dndx,dndy,detJ)

x1 = x2
y1 = y2

x2=midside(s2,npe,x)
y2=midside(s2,npe,y)

a = y2 - y1
b = x1 - x2
vol(m) = vol(m) + 0.5*(x1*(y2-y3)+x2*(y3-y1)+x3*(y1-y2))

ux=0.0; uy=0.0; dudx = 0.0; dudy = 0.0

do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  ux = ux + shp(i)*u(ii)
  uy = uy + shp(i)*v(ii)
  dudx = dudx + dndx(i)*u(ii)
  dudy = dudy + dndy(i)*v(ii)
end do

!=====
! calculate the coefficient of the streamline upwind term (kbar)
!=====

call petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)

ap = (1.0+kbar*(dudx+dudy)) ! weighted constant
do i=1,npe
  ii=intmat(ie,i)
  dpdx = dpdx + dndx(i)*pnew(ii)
  dpdy = dpdy + dndy(i)*pnew(ii)
  wdpdx = wdpdx + dndx(i)*pnew(ii)*ap
  wdpdy = wdpdy + dndy(i)*pnew(ii)*ap
end do

end do

cpx(m) = dpdx/(2.0*numele) ! average pressure gradient in x-direction
cpy(m) = dpdy/(2.0*numele) ! average pressure gradient in y-direction
wpx(m) = wdpdx/(2.0*numele)
wpy(m) = wdpdy/(2.0*numele)
end if
end do

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

!=====
! correct u-velocity
!=====

do m=1,nnode
  if (.not.ibcu(m)) then
    unew(m) = uhat(m) - vol(m)*wpx(m)/diagv(m)
  else
    unew(m) = u(m)
  end if
end do

!=====
! correct v-velocity
!=====

do m=1,nnode
  if (.not.ibcv(m)) then
    vnew(m) = vhat(m) - vol(m)*wpy(m)/diagv(m)
  else
    vnew(m) = v(m)
  end if
end do

return
end subroutine correct_uv

subroutine boundary_pressure(maxnod,maxbou,nnode,nbpr,ibpi,ibpo,&
  cpx,cpy,xcord,ycord,ibcp,pnew)
implicit none
integer,intent(in) :: maxnod,maxbou,nnode,nbpr
integer,intent(in) :: ibpi(maxbou),ibpo(maxbou)
logical,intent(in) :: ibcp(maxnod)
real,intent(in) :: xcord(maxnod),ycord(maxnod)
real,intent(in) :: cpx(maxnod),cpy(maxnod)
real,intent(inout) :: pnew(maxnod)

integer :: i

!=====
! compute only the pressure on the inlet boundary
!=====

do i=1,nbpr
  if (.not.ibcp(ibpo(i))) then
    pnew(ibpo(i))=pnew(ibpi(i))+cpx(ibpi(i))*(xcord(ibpo(i))-xcord(ibpi(i)))&
      +cpy(ibpi(i))*(ycord(ibpo(i))-ycord(ibpi(i)))
  end if
end do

return
end subroutine boundary_pressure

subroutine error_check(maxnod,nnode,ibcu,u,unew,error)
implicit none
integer,intent(in) :: maxnod,nnode
logical,intent(in) :: ibcu(maxnod)
real,intent(in) :: u(maxnod),unew(maxnod)
real,intent(out) :: error
integer :: i
real :: sum_up,sum_dn,small
data small/1.e-30/

sum_up = 0.0
sum_dn = 0.0
do i=1,nnode
  if (.not.ibcu(i)) then
    sum_up = sum_up + abs(u(i)-unew(i)-small)
    sum_dn = sum_dn + abs(unew(i)+small)
  end if
end do

error = sum_up/sum_dn

return
end subroutine error_check

SUBROUTINE petrov(npe,ux,uy,den,vis,x,y,kbar)
implicit none
integer,intent(in) :: npe

```

```

real,intent(in)    :: ux,uy,den,vis
real,intent(in)    :: x(npe),y(npe)
real,intent(out)   :: kbar

real              :: d(npe)
real              :: hex,hey,hnx,hny,he,h1,h2,pe

d(1)=(x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1))
d(2)=(x(3)-x(2))*(x(3)-x(2))+(y(3)-y(2))*(y(3)-y(2))
d(3)=(x(1)-x(3))*(x(1)-x(3))+(y(1)-y(3))*(y(1)-y(3))

if (d(1)<=d(2).and.d(2)<=d(3)) then
  hex = x(1)-0.5*(x(2)+x(3))
  hey = y(1)-0.5*(y(2)+y(3))
  hnx = x(2)-0.5*(x(3)+x(1))
  hny = y(2)-0.5*(y(3)+y(1))
else if (d(2)<=d(3).and.d(3)<=d(1)) then
  hex = x(2)-0.5*(x(3)+x(1))
  hey = y(2)-0.5*(y(3)+y(1))
  hnx = x(3)-0.5*(x(1)+x(2))
  hny = y(3)-0.5*(y(1)+y(2))
else if (d(3)<=d(1).and.d(1)<=d(2)) then
  hex = x(3)-0.5*(x(1)+x(2))
  hey = y(3)-0.5*(y(1)+y(2))
  hnx = x(1)-0.5*(x(2)+x(3))
  hny = y(1)-0.5*(y(2)+y(3))
end if

if ((ux/=0.0).and.(uy/=0.0)) then
  h1 = (ux*hex + uy*hey)/sqrt(ux*ux+uy*uy)
  h2 = (ux*hnx + uy*hny)/sqrt(ux*ux+uy*uy)
  he = abs(h1)+abs(h2)
else
  he = min(abs(hex),abs(hny))
endif

if (vis==0) then
  kbar = 1.0
else
  pe = den*sqrt(ux*ux+uy*uy)*he/(2.0*vis)
  if (abs(pe)>1.e-6) then
    kbar = (1.0/(tanh(pe))-1.0/(pe))*he/(2.0*sqrt(ux*ux+uy*uy))
  else
    kbar = 0.0
  end if
end if

return
END SUBROUTINE petrov

SUBROUTINE shapef(npe,x,y,xi,eta,shp,dndx,dndy,detJ)
implicit none
integer,intent(in) :: npe
real,intent(in)    :: x(npe),y(npe),xi,eta
real,intent(out)   :: shp(npe),dndx(npe),dndy(npe),detJ

real :: dnds(npe),dndt(npe)
integer :: i,j
real :: jacob(2,2),jinv(2,2)

shp(1) = 1.0-xi-eta
shp(2) = xi
shp(3) = eta

dnds(1) = -1.0
dnds(2) = 1.0
dnds(3) = 0.0

dndt(1) = -1.0
dndt(2) = 0.0
dndt(3) = 1.0

jacob(1,1) = x(1)*dnds(1)+x(2)*dnds(2)+x(3)*dnds(3)
jacob(1,2) = y(1)*dnds(1)+y(2)*dnds(2)+y(3)*dnds(3)
jacob(2,1) = x(1)*dndt(1)+x(2)*dndt(2)+x(3)*dndt(3)
jacob(2,2) = y(1)*dndt(1)+y(2)*dndt(2)+y(3)*dndt(3)

detJ = jacob(1,1)*jacob(2,2)-jacob(1,2)*jacob(2,1)

jinv(1,1)=jacob(2,2)/detJ
jinv(1,2)=-jacob(1,2)/detJ

```

```

jinv(2,1)=-jacob(2,1)/detJ
jinv(2,2)=jacob(1,1)/detJ

do i=1,npe
  dndx(i)=jinv(1,1)*dnds(i)+jinv(1,2)*dndt(i)
  dndy(i)=jinv(2,1)*dnds(i)+jinv(2,2)*dndt(i)
end do

RETURN
END SUBROUTINE shapef

SUBROUTINE check_node(numnod,x11,etal,xi2,eta2,s1,s2)
implicit none
integer,intent(in) :: numnod
real,intent(out) :: x11,etal,xi2,eta2
integer,intent(out) :: s1,s2

select case (numnod)
case (1)
  x11= 5.0/12.0;  etal= 1.0/6.0
  xi2= 1.0/6.0;  eta2= 5.0/12.0

  s1 = 1;  s2 = 3
case (2)
  x11= 5.0/12.0;  etal= 5.0/12.0
  xi2= 5.0/12.0;  eta2= 1.0/6.0

  s1 = 2;  s2 = 1
case (3)
  x11= 1.0/6.0;  etal= 5.0/12.0
  xi2= 5.0/12.0;  eta2= 5.0/12.0

  s1 = 3;  s2 = 2
case default
  write(*,*) 'wrong number of node (max = 3)'
end select

RETURN
END SUBROUTINE check_node

subroutine surround_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,&
  intmat,inode,surnd,elcou)
implicit none
integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
integer,intent(out) :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

integer :: i,k,m,count

surnd = 0;  inode = 0;  elcou = 0

do m=1,nnode
  count=0
  do k=1,nelem
    do i=1,npe
      if (m==intmat(k,i)) then
        count=count+1
        inode(m,count)=i
        surnd(m,count)=k
      end if
    end do
  end do
  elcou(m)=count
end do

return
end subroutine surround_element

subroutine node_element(maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe,intmat,&
  ibcu,inode,surnd,elcou)
implicit none
integer,intent(in) :: maxele,maxnod,maxels,nnode,nelem,npe
integer,intent(in) :: intmat(maxele,npe)
logical,intent(in) :: ibcu(maxnod)
integer,intent(out) :: inode(maxnod,maxels),surnd(maxnod,maxels),elcou(maxnod)

integer :: i,k,m,count

surnd = 0;  inode = 0;  elcou = 0

do m=1,nnode

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

count=0
if (.not.ibcu(m)) then
  do k=1,nelem
    do i=1,npe
      if (m==intmat(k,i)) then
        count=count+1
        inode(m,count)=i
        surnd(m,count)=k
      end if
    end do
  end do
  elcou(m)=count
end if
end do

return
end subroutine node_element

REAL FUNCTION midele(x,npe)
implicit none
integer :: npe
real    :: x(npe)

integer :: i

midele=0.0
do i=1,npe
  midele=midele+x(i)
end do
midele=midele/float(npe)

return
END FUNCTION midele

REAL FUNCTION midside(iside,npe,x)
implicit none
integer :: iside,npe
real    :: x(npe)
real    :: x1,x2

select case (iside)
  case (1)
    x1 = x(1); x2 = x(2)
  case (2)
    x1 = x(2); x2 = x(3)
  case (3)
    x1 = x(3); x2 = x(1)
  case default
    write(*,*) 'wrong side'
end select

midside = 0.5*(x1+x2)

return.
END FUNCTION midside

subroutine input(maxnod,maxele,maxbou,npe,nnode,nelem,nboun,intmat,&
  ibcu,ibcv,ibcp,ibct, hcap,condy,gravy,beta,tref,xcord,ycord,&
  den,vis,niter,tol,u,v,p,t,qgen,tmax,tmin,ibin,ibou,&
  nbpr,ibpi,ibpo,nbsym,ibsi,ibso,nodef,nelef,conds,mat)

implicit none
integer,intent(in)  :: maxnod,maxele,maxbou,npe
integer,intent(out) :: nnode,nelem,nboun,niter,nbpr,nbsym,nodef,nelef
integer,intent(out) :: intmat(maxele,npe)
integer,intent(out) :: ibin(maxbou),ibou(maxbou),ibpi(maxbou),ibpo(maxbou)
integer,intent(out) :: ibsi(maxbou),ibso(maxbou)
logical,intent(out) :: ibcu(maxnod),ibcv(maxnod),ibcp(maxnod);
logical,intent(out) :: ibct(maxnod),mat(maxele)
real,intent(out)    :: den,vis,tol,hcap,condy,gravy,beta,tref,conds
real,intent(out)    :: qgen,tmax,tmin
real,intent(out)    :: u(maxnod),v(maxnod)
real,intent(out)    :: xcord(maxnod),ycord(maxnod),p(maxnod),t(maxnod)

character :: text
integer :: i,ip,nlines

read(7,*) nlines
do ip=1,nlines
  read(7,*) text
end do

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

read(7,*) text
read(7,*) nodef,nnode,nelem,nboun,nbpr,nbsym,niter,tol

if (nnode > maxnod) then
  write(*,*) ' increase maxnod to ',nnode
  stop
end if

if (nelem > maxele) then
  write(*,*) ' increase maxele to ',nelem
  stop
end if

if (nboun > maxbou) then
  write(*,*) ' increase maxbou to ',nboun
  stop
end if

if (nbpr > maxbou) then
  write(*,*) ' increase maxbou to ',nbpr
  stop
end if

if (nbsym > maxbou) then
  write(*,*) ' increase maxbou to ',nbsym
  stop
end if

read(7,*) text
read(7,*) den,vis,hcap,conds,condy,gravy,beta,tref,qgen,tmin,tmax
read(7,*) text
do ip=1,nnode
  read(7,*) i,ibcu(i),ibcv(i),ibcp(i),ibct(i),xcord(i),ycord(i),&
    u(i),v(i),p(i),t(i)
  if (ip/=i) then
    write(*,*) ' error in node order !!!'
  end if
end do

nelef = 0
read(7,*) text
do ip=1,nelem
  read(7,*) i,intmat(ip,1),intmat(ip,2),intmat(ip,3),mat(ip)
  if (ip/=i) then
    write(*,*) ' error in element order !!!'
  end if
  if (mat(ip)) nelef = nelef+1      ! compute total number of fluid elements
end do

if (nboun>0) then
  read(7,*) text
  do ip=1,nboun
    read(7,*) i,ibin(ip),ibou(ip)
  end do
else
  ibin = 0
  ibou = 0
end if

if (nbpr>0) then
  read(7,*) text
  do ip=1,nbpr
    read(7,*) i,ibpo(ip),ibpi(ip)
  end do
else
  ibpi = 0
  ibpo = 0
end if

if (nbsym>0) then
  read(7,*) text
  do ip=1,nbsym
    read(7,*) i,ibsi(ip),ibso(ip)
  end do
else
  ibsi = 0
  ibso = 0
end if

return
end subroutine input

```

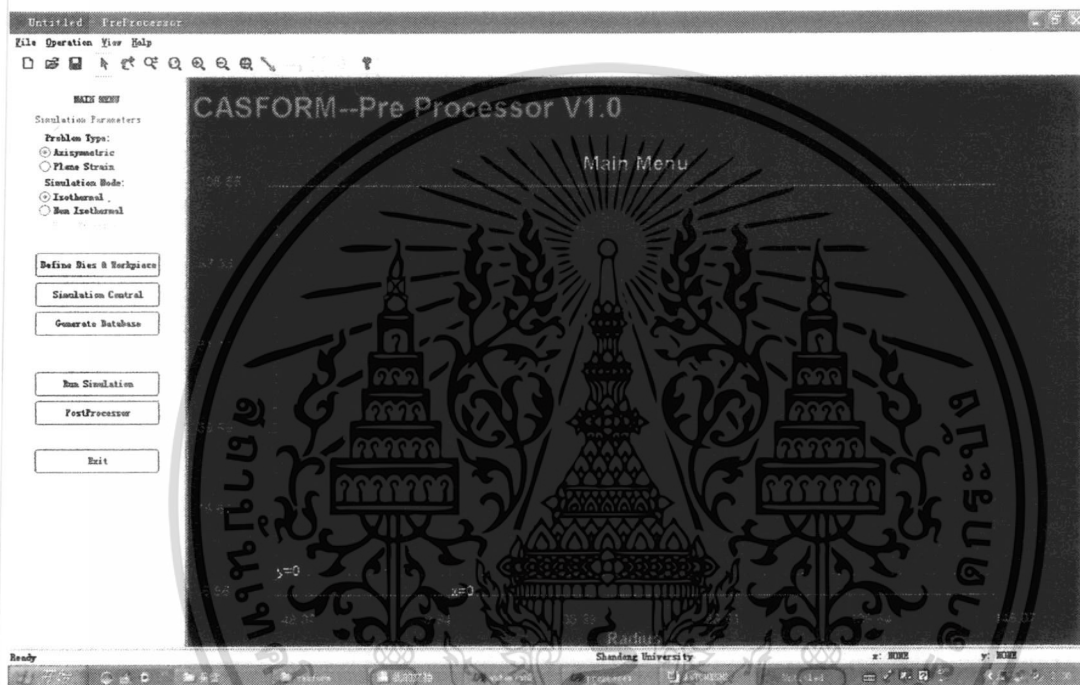
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โปรแกรม Pre-processor สำหรับสร้างเซลล์สามเหลี่ยมในงานวิจัยนี้คือ AUTOMESH2D ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นโดย Professor Guoqun Zhao และ Dr. Xinwu Ma แห่งศูนย์วิจัย Mold & Die Engineering and Technology Research Center ของมหาวิทยาลัย Shandong สาธารณรัฐประชาชนจีน ผู้เขียนได้มาจาก website ชื่อ <http://www.automesh2d.com>

หลังการติดตั้งโปรแกรมเสร็จสิ้นแล้ว ให้ผู้ใช้เรียกโปรแกรมชื่อว่า Preprocessor.exe จะปรากฏหน้าต่างของโปรแกรมเป็นไปตามรูปที่ ข1

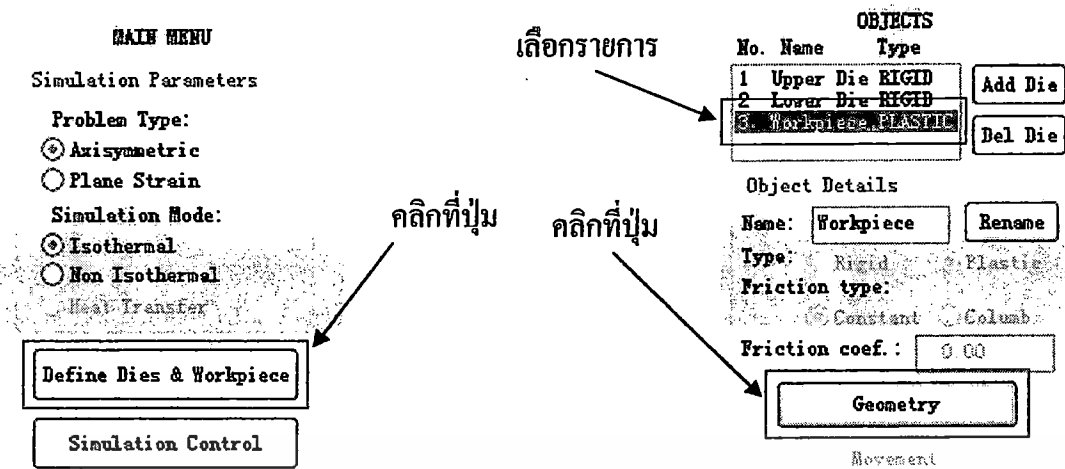


รูปที่ ข1 การติดต่อกับผู้ใช้งานของโปรแกรม AUTOMESH2D

ขั้นตอนที่ 1 สร้างรูปร่างของโดเมน

คลิกที่ปุ่ม **Define Dies & Workpiece** บนไดอะล็อกซ์ด้านซ้ายมือ **MAIN MENU** จะปรากฏไดอะล็อกซ์ **OBJECTS** ขึ้นมา ให้เลือกหัวข้อที่ 3 (3 Workpiece PLASTIC) จาก list box ด้านบน แล้วคลิกปุ่ม **Geometry** และจะปรากฏไดอะล็อกซ์ **GEOMETRY** ขึ้นมา ขณะนี้โปรแกรมพร้อมที่จะรับข้อมูลของ object แล้ว การทำงานก่อนเริ่มสร้างรูปร่างของโดเมนแสดงไว้ในรูปที่ ข2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ ข2 ขั้นตอนก่อนการสร้างรูปของโดเมน

ตัวอย่างหนึ่งของรูปร่างคือ รูปแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 100 หน่วย x 100 หน่วย ซึ่งมีรูเจาะรูปวงกลมขนาด รัศมี 20 หน่วยอยู่ใน เริ่มต้นจากการสร้างแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามพิกัดในตารางที่ ข1 และสร้างรูเจาะรูปร่างวงกลมดังพิกัดในตารางที่ ข2 ข้อสังเกตสำหรับการสร้างรูปร่างทั้งสองคือ ถ้าเป็นรูปร่างที่อยู่ภายนอกให้กำหนดจุดแบบทวนเข็มนาฬิกา แต่ถ้าเป็นรูปร่างที่อยู่ภายในให้กำหนดจุดแบบตามเข็มนาฬิกา ในการสร้างรูเจาะให้กดปุ่ม **Add a hole** แต่ในการสร้างรูปร่างภายนอกให้ Add พิกัดของจุดที่ใช้ในการสร้างตามปกติ เส้นที่สามารถสร้างด้วยโปรแกรมนี้มีเฉพาะเส้นตรงและเส้น Arc เท่านั้น รูปที่ ข3 แสดงแผนผังทำงานเพื่อติดต่อกับผู้ใช้งาน รูปที่ ข4 แสดงคำอธิบายของ ไอคอนสำหรับการสร้างรูป

ตารางที่ ข1 พิกัดของรูปร่างสี่เหลี่ยมจัตุรัส (5 จุด)

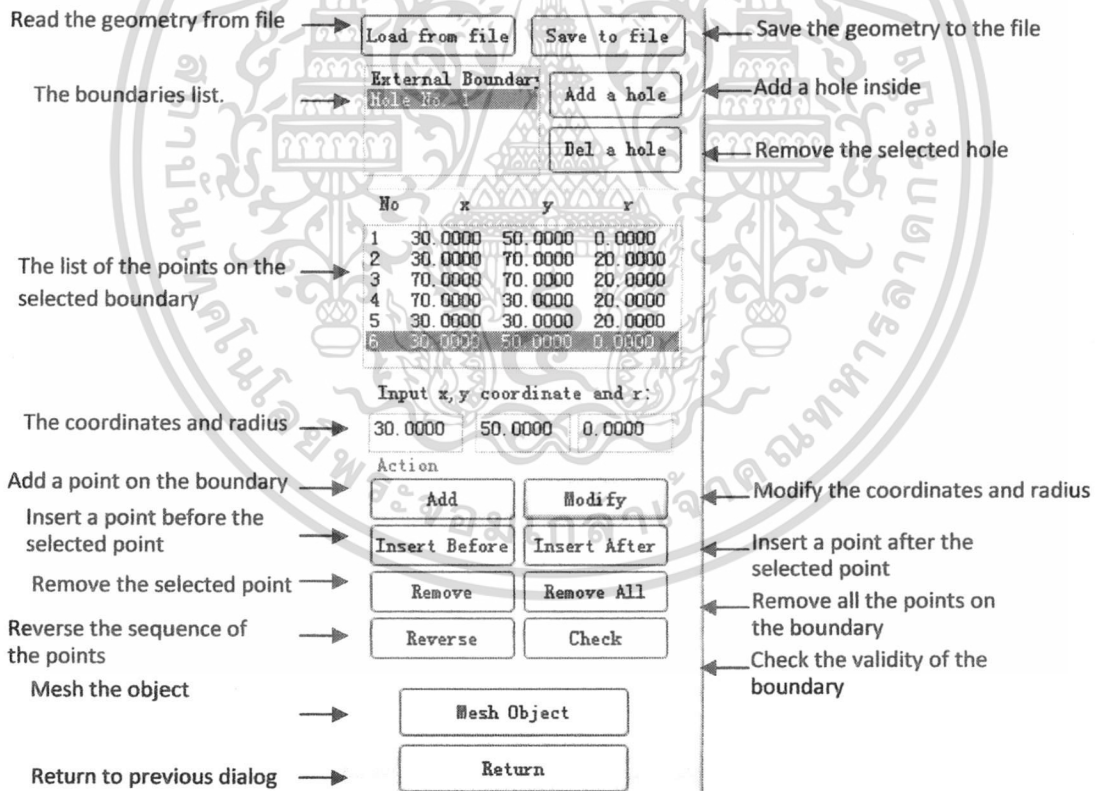
No	X	Y	R
1	0	0	0
2	100	0	0
3	100	100	0
4	0	100	0
5	0	0	0

ตารางที่ ข2 พิกัดของรูปร่างวงกลม (6 จุด)

No	X	Y	R
1	30	50	0
2	30	70	20
3	70	70	20
4	70	30	20
5	30	30	20
6	30	50	0



รูปที่ ข3 การให้นิยามรูปร่างของปัญหา



รูปที่ ข4 หน้าที่ของส่วนประกอบต่างๆของไดอะล็อกซ์ที่อยู่ด้านซ้ายมือของโปรแกรม

AUTOMESH2D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างเซลล์สามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยม (Mesh generation)

ผู้ใช้โปรแกรม AUTOMESH2D สามารถสร้างเซลล์ได้สองวิธีได้แก่ การสร้างที่โปรแกรมกำหนดขนาดของเซลล์ให้โดยอัตโนมัติ และการสร้างที่สามารถกำหนดขนาดของเซลล์จากผู้ใช้

1. การสร้างเซลล์ด้วยขนาดที่กำหนดไว้โดยอัตโนมัติโดยโปรแกรม

Method:	<input type="text" value="LOOPING"/>	← mesh generation method
Mesh Parameters		
Number of elements:	<input type="text" value="1000"/>	← number of elements to be meshed
Max/Min density:	<input type="text" value="2.000000"/>	← the ratio of the max and min density
Thickness elements:	<input type="text" value="4"/>	← number of elements in the thickness

รูปที่ ข5 ข้อมูลสำหรับการสร้างเซลล์

คำอธิบายสำหรับแต่ละองค์ประกอบของไดอะล็อกซ์ในรูปที่ ข5 คือ

Mesh generation method (เลือกวิธีสร้างเซลล์)

โปรแกรมนี้มี 2 วิธีที่สามารถสร้างเซลล์สี่เหลี่ยมได้ และ 1 วิธีที่สามารถสร้างเซลล์สามเหลี่ยมได้ ซึ่งผู้ใช้สามารถเลือกวิธีได้ตามใจชอบ

Number of elements to be meshed (กำหนดจำนวนเซลล์ที่อยากให้โปรแกรมสร้าง)

จำนวนเซลล์ที่ได้ อาจแตกต่างกันไปเล็กน้อยจากตัวเลขที่ใส่ไว้ในหัวข้อนี้

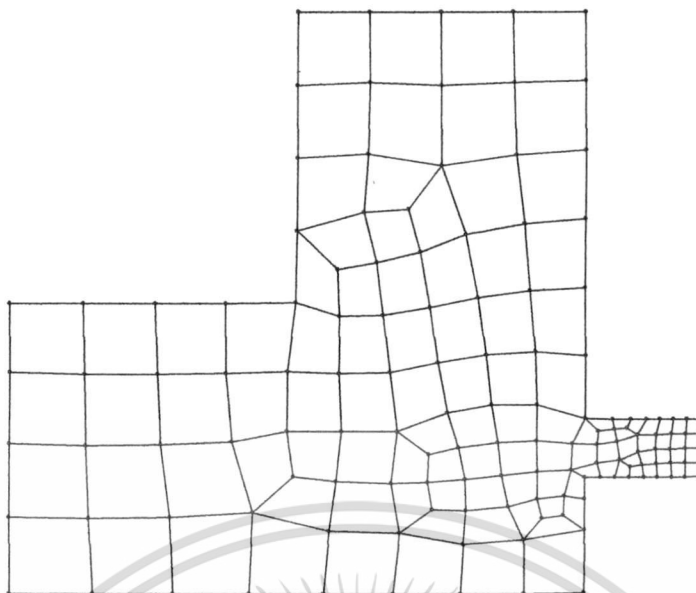
The ratio of the max and min density (อัตราส่วนของความหนาแน่นสูงสุดและต่ำสุดของเซลล์)

ถ้าค่านี้เท่ากับหนึ่ง หมายความว่าต้องการการแบ่งเซลล์แบบเท่าเทียมกันในทุกพื้นที่ ความหนาแน่นสูงสุดจะอยู่ที่บริเวณขอบเขตของรูปร่างที่มีความโค้งเว้ามากๆ

Number of elements in the thickness (กำหนดจำนวนเซลล์ตามความหนาของรูปร่าง)

รูปที่ ข6 แสดงเซลล์ที่ได้จากการใส่หมายเลข 4 ลงในหัวข้อนี้ ทำให้ได้เซลล์จำนวน 4 เซลล์ที่ทุกความหนา ไม่ว่าจะหนาหรือหนาน้อย

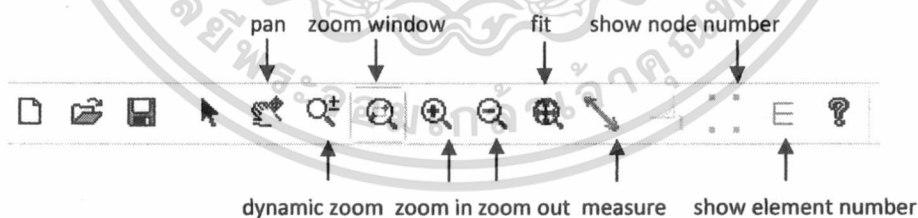
เมื่อผู้ใช้ได้ใส่ข้อมูลที่ต้องการในหน้าต่างนี้เรียบร้อยแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม **Generate Mesh** ภายหลังจากเซลล์ได้ถูกสร้างขึ้นมาแล้วจะปรากฏไดอะล็อกซ์แสดงเวลาในการทำงานดังรูปที่ ข7 รูปที่ ข8 แสดงปุ่มที่ช่วยให้สังเกตเซลล์ว่าตรงตามความต้องการของผู้ใช้หรือไม่



รูปที่ ข6 การสร้างเซลล์ตามเงื่อนไขของจำนวนเซลล์ที่ยึดถือตามความหนา



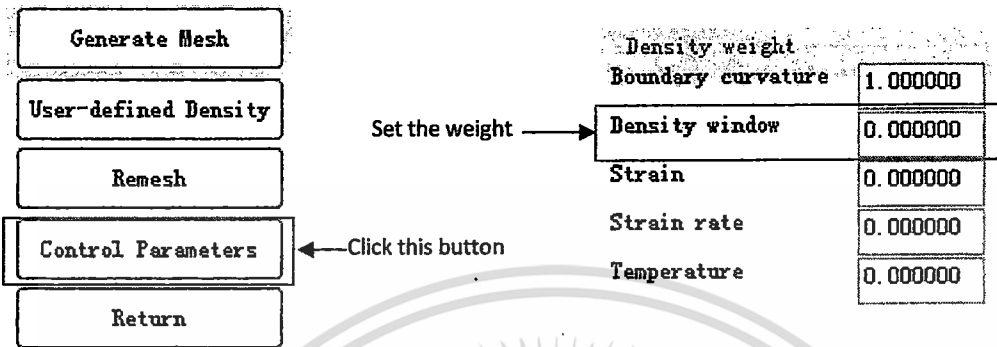
รูปที่ ข7 โค้ดอะล็อกซ์แสดงข้อมูลของการสร้างเซลล์



รูปที่ ข8 ทูลบาร์ของโปรแกรม AUTOMESH2D

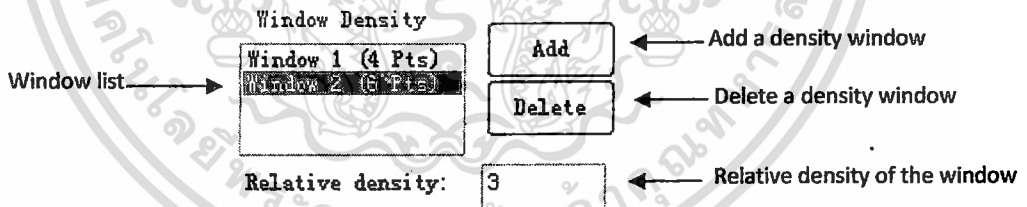
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภายหลังจากการสร้างเซลล์แบบอัตโนมัติจากโปรแกรมแล้ว ผู้ใช้สามารถระบุความหนาแน่นของเซลล์ได้โดยการใช้ Density window เริ่มต้นจากการคลิกปุ่ม **Control Parameters** ในไดอะล็อกซ์ แล้วกำหนดน้ำหนักให้แก่ความหนาแน่นของเซลล์ ดังรูปที่ ข9



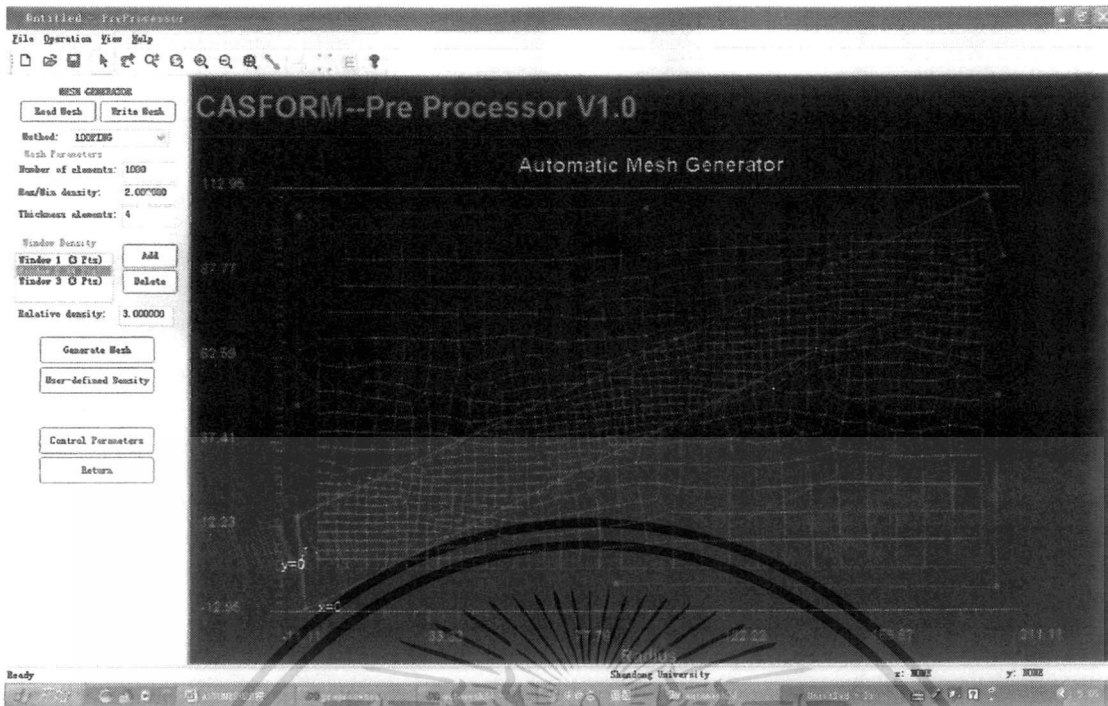
รูปที่ ข9 การกำหนดความหนาแน่นของเซลล์โดยผู้ใช้

น้ำหนักของความหนาแน่นเซลล์แบ่งออกเป็น 5 ส่วนได้แก่ 1) ความโค้งเว้าของขอบเขต 2) หน้าต่างของความหนาแน่น 3) ความเครียด 4) อัตราของความเครียด และ 5) อุณหภูมิ ผลรวมของน้ำหนักจากเงื่อนไขทั้ง 5 ส่วนนี้จะต้องรวมกันแล้วเท่ากับหนึ่งเสมอ ถ้าต้องการเปลี่ยนน้ำหนักของหน้าต่างความหนาแน่น ให้เริ่มต้นจากการกดปุ่ม **Add** เปลี่ยนแปลงความหนาแน่นสัมพัทธ์ (Relative density) ดังรูปที่ ข10



รูปที่ ข10 การใช้ Density window

ขั้นตอนต่อไปคือการนิยาม window polygon ด้วยการคลิกเมาส์ลงไปที่พื้นที่กราฟฟิกส์ของโปรแกรมเพื่อให้โปรแกรมได้ทราบถึงขอบเขตของ window ที่ต้องการจะกำหนดความหนาแน่นใหม่ Density window สามารถสร้างขึ้นได้หลายรูป แต่ละรูปก็สามารถมีความหนาแน่นที่แตกต่างกันได้ดังแสดงไว้ในรูปที่ ข11 และ ข12



รูปที่ ข11 ตัวอย่างของการใช้ Density window



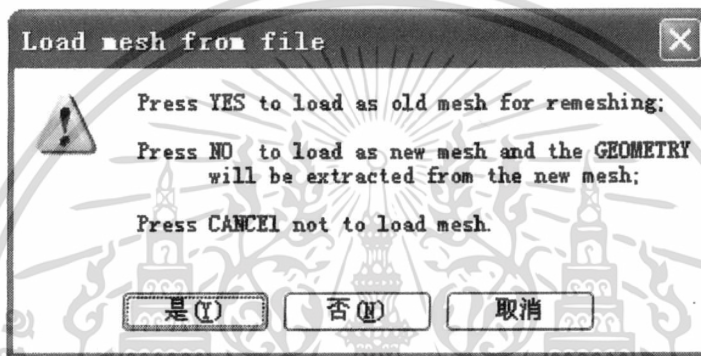
รูปที่ ข12 Density window ที่ไม่มีส่วนใดอยู่บนขอบเขตของรูปร่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างเซลล์ใหม่จากเซลล์ที่เคยสร้างไว้แล้ว (Remeshing)

การทำ Remeshing มีทั้งหมด 2 ขั้นตอนได้แก่ 1) รับข้อมูลขอบเขตของปัญหาแล้วสร้างเซลล์ชุดใหม่ 2) ประมาณค่าภายในจากข้อมูลอื่นที่ไม่ใช่พิกัดของจุดต่อของเซลล์ชุดเก่า ได้แก่ อุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆ ความเครียดของเซลล์ต่างๆ ไปสู่เซลล์ชุดใหม่

เริ่มต้นการทำ Remeshing ด้วยการกดปุ่ม **Read Mesh** ในไดอะล็อกซ์และเลือกชื่อไฟล์ที่ต้องการจะอ่านข้อมูลของเซลล์ชุดเก่าเข้าสู่โปรแกรม จะปรากฏไดอะล็อกซ์ในรูปที่ ข13 ถ้ากดปุ่ม Yes จะได้การทำ Remesh และใช้ข้อมูลของตัวแปรที่สนใจจากเซลล์ชุดเก่า แต่ถ้ากดปุ่ม No จะรับเฉพาะข้อมูลของจุดต่อและเซลล์เท่านั้น แต่ไม่นำเอาข้อมูลของตัวแปรจากเซลล์ชุดเก่ามาใช้



รูปที่ ข13 ไดอะล็อกซ์ที่เกิดขึ้นหลังจากกดปุ่ม **Read Mesh**

ต่อจากนั้นให้กำหนดค่าต่างๆตามขั้นตอนต่างๆเช่นเดียวกับการสร้างเซลล์ธรรมดา แล้วกดปุ่ม **Remesh** เพื่อให้ทำ Remeshing เซลล์ทั้งหมดที่ได้จะสามารถบันทึกไว้ได้ด้วยการกดปุ่ม **Write Mesh** ในไดอะล็อกซ์แล้วใส่ชื่อไฟล์ลงไป ไฟล์นี้เป็นไฟล์ ASCII ที่มีนามสกุล .msh สามารถเปิดอ่านได้ด้วยโปรแกรม Notepad

2. การสร้างเซลล์ตามขนาดที่ผู้ใช้กำหนด

เริ่มต้นด้วยการคลิกที่ปุ่ม **User-defined Density** ในไดอะล็อกซ์แล้ว ไดอะล็อกซ์ชื่อว่า **User-defined Mesh Density** จะปรากฏขึ้นมา ดังรูปที่ ข14

The boundary nodes as mesh nodes → Keep origin boundary nodes

Type	x	y	d
B	19.87	39.20	1.00
B	11.36	58.52	1.00
B	29.07	79.91	1.00
B	93.93	66.57	1.00
I	82.89	30.00	1.00

Density points list →

Boundary density point → Boundary Internal ← Internal density point

Relative density: ← Relative density value of the point

Coordinates:

The coordinates of point →

Add a density point → ← Modify the density point

Delete a density point → ← Delete all the points

Num of elements: ← Number of elements to be generated

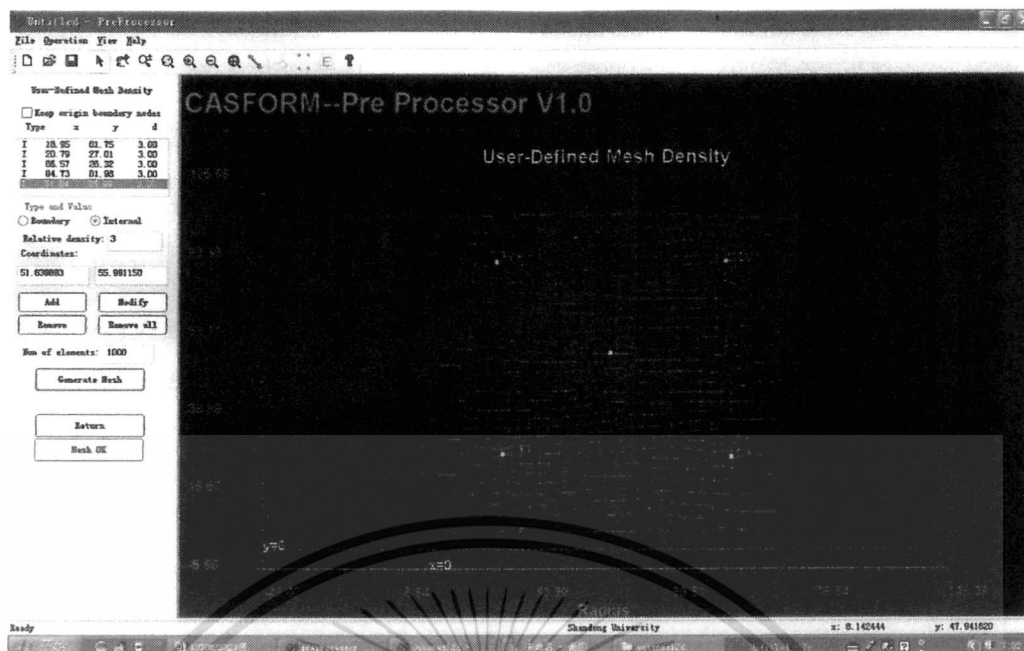
Generate mesh according to user- →

รูปที่ ข14 ไคอะลือกซ์หรือ User-defined Mesh Density

ผู้ใช้สามารถกำหนดความหนาแน่นสัมพัทธ์บนขอบเขตและภายในโดเมนได้ ระบบจะสร้างความหนาแน่นของการเปลี่ยนแปลงอย่างราบเรียบที่ได้กำหนดไว้ที่ density point ต่างๆ แล้วทำการสร้างชุดเซลล์ นิยามของ density point คือ

- ชนิดของ density point : มีสองชนิดได้แก่ boundary point และ internal point
- ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์บนจุด : ป้อนค่าลงไปไคอะลือกซ์
- เพิ่ม density point : กดปุ่ม
- ปรับเปลี่ยน density point : กดปุ่ม
- ลบ density point เฉพาะจุด : กดปุ่ม
- ลบ density point ทุกจุด : กดปุ่ม

ภายหลังจากได้กำหนด boundary point และ internal point แล้ว ให้ใส่จำนวนเซลล์ที่ต้องการจะสร้างขึ้นมา กดปุ่ม ในไคอะลือกซ์ โปรแกรมก็จะสร้างชุดเซลล์ตามความต้องการของผู้ใช้ตามรูปที่ ข15



รูปที่ ข15 density points ที่ผู้ใช้กำหนดขึ้นมา

ถ้าผู้ใช้ต้องการเก็บจุดต่อที่ขอบเขตค่าเดิมไว้เป็นจุดต่อสำหรับชุดเซลล์ใหม่ ให้ผู้ใช้เลือกที่หัวข้อ **Keep origin boundary nodes** ในไดอะล็อกซ์ดังรูปที่ ข16 นอกจากนี้ผู้ใช้สามารถควบคุมความหนาแน่นและรูปร่างของเซลล์ได้ด้วยการปรับค่าที่อยู่ในไดอะล็อกซ์ Mesh Control Parameter ในรูปที่ ข17



รูปที่ ข16 การเก็บจุดต่อที่ขอบเขตค่าเดิมเอาไว้สำหรับเซลล์ชุดใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Background Grid & Tolerance

X-Division number ← Grid number in X direction

Y-Division number ← Grid number in Y direction

Distance tolerance ← Length tolerance

Angle tolerance ← Angle tolerance

Split Criteria

1 2 3 ← Split Criteria

Split angle ← Weight of split angle

Structure ← Weight of structured mesh

Split length ← Weight of split line length

Symmetry ← Weight of geometry

รูปที่ ข17 พารามิเตอร์ต่างๆในไดอะล็อกซ์ Mesh Control Parameter

โปรแกรมในส่วนของ Post-processor ผู้เขียนใช้โปรแกรม tecplot 360 2009 ที่เป็น Evaluation version สมมติว่าชุดเซลล์และจุดต่อของปัญหาที่ต้องการจะพล็อตเส้นชั้นของอุณหภูมิ หรือ เวกเตอร์ความเร็วที่แสดงไว้ในตารางที่ ข3 และ ข4 ถ้าต้องการใส่เป็นข้อมูลให้กับโปรแกรม tecplot 360 ให้ป้อนข้อมูลของจุดต่อ เซลล์ และเพิ่มอีก 3 บรรทัด ดังรูปที่ ข18 รายละเอียดของโปรแกรมให้ดูในคู่มือผู้ใช้งานของโปรแกรมซึ่งสามารถดาวน์โหลดมาใช้ได้จาก <http://www.tecplot.com>

ตารางที่ ข3 พิกัดของจุดต่อ ความเร็ว และอุณหภูมิ

No	X	Y	U	V	T
1	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0
2	0.5	0.0	1.0	1.0	0.0
3	1.0	0.0	1.0	1.0	0.0
4	0.0	0.5	1.0	1.0	0.5
5	0.5	0.5	1.0	1.0	0.5
6	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5
7	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
8	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0
9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

ตารางที่ ข4 ความสัมพันธ์ของจุดต่อและเซลล์

No	I1	I2	I3
1	1	2	5
2	1	5	4
3	2	3	6
4	2	6	5
5	4	5	8
6	4	8	7
7	5	6	9
8	5	9	8

TITLE = "Example: 2D Finite-Volume Data"

VARIABLES = "X", "Y", "U", "V", "T"

ZONE N=9, E=8, DATAPACKING=POINT, ZONETYPE=FETRIANGLE

0.0 0.0 1.0 1.0 0.0

0.5 0.0 1.0 1.0 0.0

1.0 0.0 1.0 1.0 0.0

0.0 0.5 1.0 1.0 0.5

0.5 0.5 1.0 1.0 0.5

1.0 0.5 1.0 1.0 0.5

0.0 1.0 1.0 1.0 1.0

0.5 1.0 1.0 1.0 1.0

1.0 1.0 1.0 1.0 1.0

1 2 5

1 5 4

2 3 6

2 6 5

4 5 8

4 8 7

5 6 9

5 9 8

รูปที่ ข18 ตัวอย่างไฟล์นำเข้าชื่อ "plate.dat" สำหรับโปรแกรม tecplot 360

นอกจากนี้ผู้เขียนใช้อีกโปรแกรมหนึ่งชื่อว่า FEPlot สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของชุดเซลล์ และค้นหาหมายเลขจุดต่อ บริเวณขอบเขตของปัญหาสำหรับการเตรียม Input file ของโปรแกรมคำนวณ เนื่องจากโปรแกรม AUTOMESH2D ที่ใช้อยู่นั้นไม่สามารถแสดงหมายเลขจุดต่อและหมายเลขเซลล์ได้ โปรแกรม feplot นี้เป็น freeware ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Eric Lund แห่ง Institute of Mechanical Engineering มหาวิทยาลัย Aalborg ประเทศเดนมาร์ก ที่อยู่ของ website คือ <http://www.imc.auc.dk/~el> ผู้เขียนได้ดาวน์โหลดโปรแกรมนี้มาใช้เป็นเวลานานมาแล้ว ดังนั้นผู้เขียนไม่สามารถยืนยันได้ว่าจะสามารถดาวน์โหลดโปรแกรมนี้ได้หรือไม่จาก web site ดังกล่าว

ไฟล์รับเข้าของโปรแกรมนี้จะต้องมีนามสกุล *.inp โดยมีรูปแบบของข้อมูลดังรูปที่ ข19 ตัวอย่างของการใส่ข้อมูลแสดงไว้ในรูปที่ ข20 ซึ่งนำมาจากรูปร่างของโดเมนในรูปที่ ข21 ซึ่งจะเห็นว่าข้อความของคำว่า node และ element จะต้องกำกับไว้สำหรับข้อมูลที่เป็นจุดต่อ และเซลล์ตามลำดับ แต่ตัวเลขที่กำหนดลงใน $x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i$ เปลี่ยนแปลงไปตามข้อมูลจุดต่อของรูปร่าง ตัวเลขที่กำหนดลงใน $El_1_MatSetNo, \dots, El_j_MatSetNo$ มีค่าเป็น 1 และตัวเลขที่กำหนดลงใน $El_1_ConstSetNo, \dots, El_j_ConstSetNo$ ก็สามารมีค่าเป็น 1 ด้วยเช่นกัน ข้อความที่กำหนดลงใน $El_1_Type, \dots, El_j_Type$ เป็นสิ่งที่กำหนดจำนวนของจุดต่อที่จะตามมาในบรรทัดนั้นๆ เช่น ถ้า El_1_Type คือ quad4 หมายความว่าเซลล์หมายเลข 1 มีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 4 แต่ถ้า El_2_Type คือ tri3 หมายความว่าเซลล์หมายเลข 2 มีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 3 รายละเอียดเพิ่มเติมของโปรแกรมให้ค้นคว้าเพิ่มเติมจากคู่มือผู้ใช้โปรแกรม

```

node 1      x_1  y_1  z_1
node 2      x_2  y_2  z_2
node 3      x_3  y_3  z_3
node
node i      x_i  y_i  z_i
node ...
node nNode  x_nNode  y_nNode  z_nNode
element 1  El_1_Type  El_1_MatSetNo  El_1_ConstSetNo  El_1_Node_1 .. El_1_Node_n
element 2  El_2_Type  El_2_MatSetNo  El_2_ConstSetNo  El_2_Node_1 .. El_2_Node_n
element 3  El_3_Type  El_3_MatSetNo  El_3_ConstSetNo  El_3_Node_1 .. El_3_Node_n
element ...
element j  El_j_Type  El_j_MatSetNo  El_j_ConstSetNo  El_j_Node_1 .. El_j_Node_n
element ...
element nElement  El_nElement_Type  El_nElement_MatSetNo  El_nElement_ConstSetNo  El_nElement_Node_1 .. El_nElement_Node_n

```

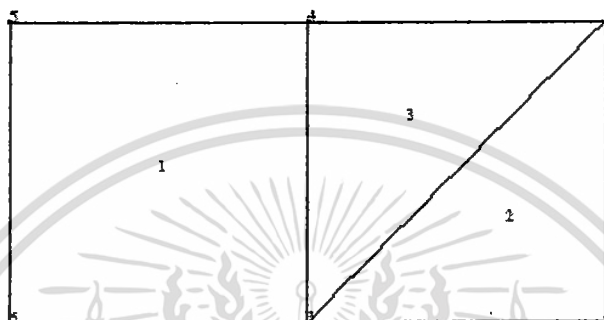
รูปที่ ข19 รูปแบบของข้อมูลรับเข้าของโปรแกรม FEPlot

```

node 1 1.00000000000000E+001 0.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
node 2 1.00000000000000E+001 5.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
node 3 5.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
node 4 5.00000000000000E+000 5.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
node 5 0.00000000000000E+000 5.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
node 6 0.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000 0.00000000000000E+000
element 1 quad4 1 1 6 3 4 5
element 2 tri3 1 1 3 1 2
element 3 tri3 1 1 2 4 3

```

รูปที่ ข20 ตัวอย่างของข้อมูลรับเข้าของ โปรแกรม FEPlot



รูปที่ ข21 รูปร่างของโดเมนตัวอย่าง

คำสั่งที่ผู้เขียนใช้บ่อย สำหรับโปรแกรมนี้คือ

File Menu

- รับข้อมูลสามารถกระทำได้ด้วยการเลือกคำสั่ง Load
- พิมพ์รูปลงสู่ไฟล์ด้วยคำสั่ง Postscript, Bitmap Plot หรือ DXF File

Geometry Menu

- แสดงตำแหน่งของจุดต่อด้วยคำสั่ง Plot Nodes
- แสดงรูปร่างของเซลล์ด้วยคำสั่ง Plot Elements
- แสดงหมายเลขของจุดต่อด้วยคำสั่ง Node Numbers
- แสดงหมายเลขของเซลล์ด้วยคำสั่ง Element Numbers

Window Menu

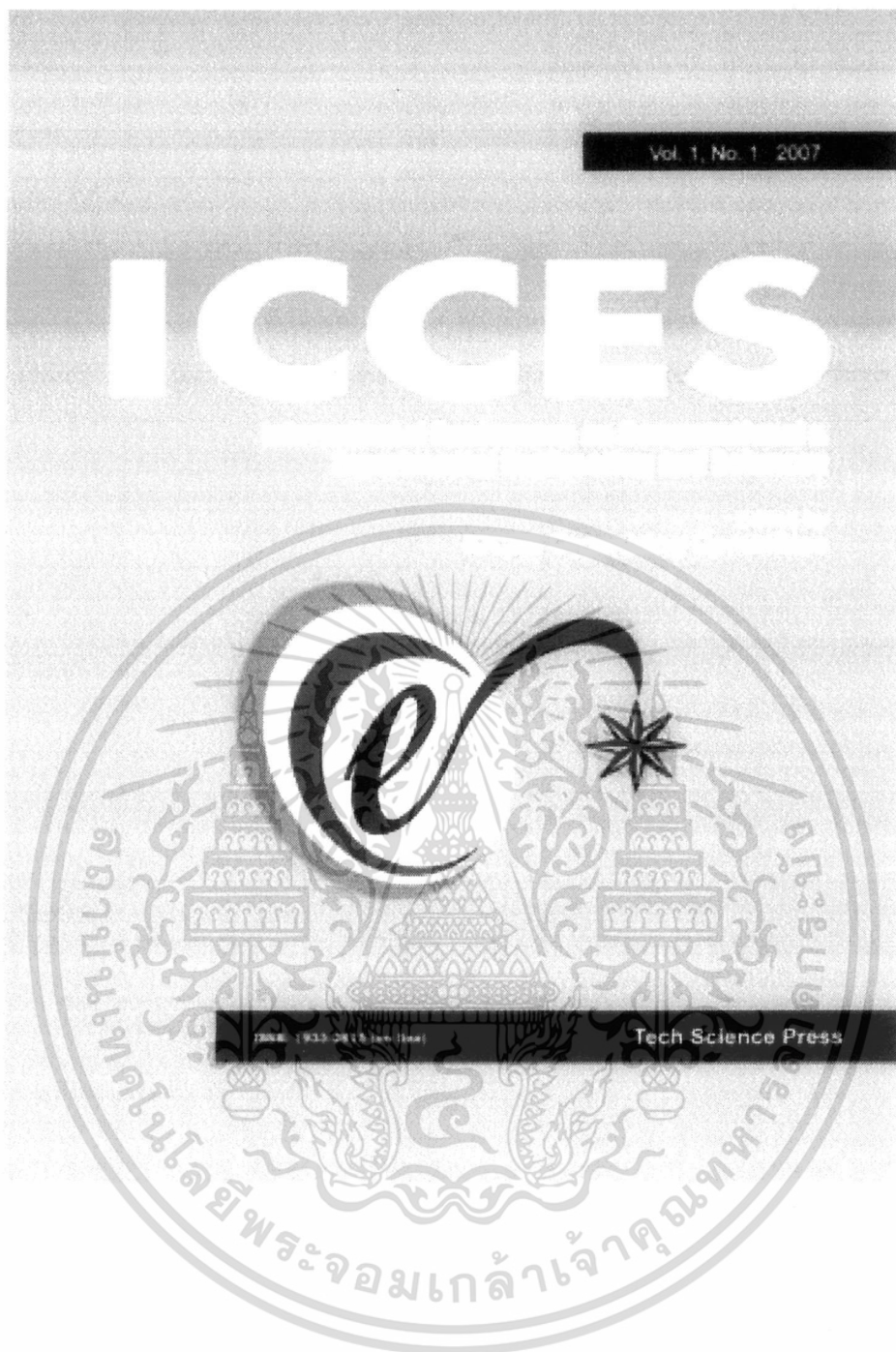
- Zoom แบบกำหนดหน้าต่างด้วยเมาส์ด้วยคำสั่ง Zoom Window
- Zoom กลับมาที่รูปร่างครั้งก่อนหน้าด้วยคำสั่ง Zoom Prev
- Zoom ด้วยการป้อนค่าพิกัดตรงมุมทั้งสองของ Window ด้วยคำสั่ง Zoom by Coordinates
- Clear หน้าจอด้วยคำสั่ง Clear Window

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ค.

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

1. P. Vessakosol, J. Chareonsuk and T. Teschareon, "A finite volume method for an analysis of transient heat conduction in functionally graded materials," Internation Conference on Computational & Experimental Engineering Sciences (ICCES'09) , Vol. 10, No. 3, pp. 5-20, Phuket, Thailand, April 8-11, 2009.
2. P. Vessakosol and J. Chareonsuk, "Numerical analysis of heat transfer and flow field around cross-flow heat exchanger tube with fouling," Applied Thermal Engineering, Vol. 30, No. 10, pp. 1170-1178.
3. J. Chareonsuk and P. Vessakosol, "A high order control volume finite element procedure for transient heat conduction analysis of functionally graded materials," Heat and Mass Transfer, accepted 15 July 2010.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A finite volume method for an analysis of transient heat conduction in functionally graded materials

P. Vessakosol¹, J. Chareonsuk^{1,2}, T. Teschareon¹

Summary

For a non-homogeneous medium, the governing equation for heat conduction is nonlinear in general which difficult to be solved by analytical approach. In the present work, we propose a numerical approach based on finite volume method for transient temperature analysis in functionally graded material (FGM), a new class of composite material, with a simple exponential variation of thermal non-homogeneities in one coordinate. Numerical calculations are carried out for a FGM strip and a FGM hollow circular cylinder. The effect of the material non-homogeneity parameter on the temperature response is discussed.

keywords: Transient temperature; Functionally graded materials; Finite volume method; Heat conduction; Time-stepping technique

Introduction

Composite materials have turn out to be preferable materials for developing efficient machine components in several industrial areas including aeronautics, aerospace, civil and mechanical engineering etc. A composite material may consists of two or more constituents that possess different attributes. For instance, ceramic based composite, usually made of ceramic and metal, has been developed for thermal protection component of space vehicles. Ceramic has excellent properties of high thermal resistance and corrosion resistance whereas metal can give high mechanical strength and fracture toughness. Under very high temperature and large thermal gradients, thermal stresses due to the abrupt transition from one material to another material in conventional layered composites can lead to structural failure like delamination and cracking. These problems can be reduced by properly smooth out the transition of material properties corresponding to functionally graded material (FGM). FGM is a new generation of composites where the volume fraction of its constituents varies gradually, giving a non-uniform microstructure in material with continuously graded properties. As a result, there is a growing interest in developing a comprehensive understanding of the behavior of FGMs for microstructural architecture and design of the overall geometry. A comprehensive review of design, processing, and modeling as well as applications can be found in the books by Suresh and Mortensen [1] and by Miyamoto et al. [2].

Since FGMs are frequently used for structures under thermal load, it is indispensable to analyze their thermal properties. In the past few years, transient heat

¹Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

²Corresponding Author; Tel.: 662 3264197, Fax.: 662 3264198, Email: kcjaruw@kmitl.ac.th

conduction behavior in FGMs has been investigated using analytical and numerical approach. Most of analytical investigations determined the heat conduction solutions by assuming the exponential variation of material constants with Cartesian coordinates under stationary thermal loading conditions ([3-7]). Although analytical approach can provide closed-form solutions to the partial differential equation that governs the transient heat conduction problems in FGMs, it is restricted to numerous assumptions such as simple geometries (e.g. plate, cylinder or sphere), certain types of gradation of material properties (e.g. exponential or power-law distribution), specific types of boundary conditions (e.g. isothermal or adiabatic) and special loading cases (e.g. uniform or sinusoidal loading). Hence, the solution of heat conduction differential equation in FGMs requires numerical approach due to the high mathematical complexity. The well known numerical methods including the finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) have been used. In the former method, Wang et al. [8] derived a finite element formulation for determining the one-dimensional transient temperature field in FGMs plate, cylinder and sphere. They also gave the expressions for the displacement and thermal stresses in hollow and solid cylinders after the temperature field was determined. Wang and Tian [9] extended the work of Wang et al. [8] for solving the two-dimensional transient heat conduction considering FGM plate under a sudden internal heat generation. In previous FEM papers, FGM, a kind of non-homogeneous material, was defined by a number of homogeneous elements which their constant material properties evaluated at their own centroids. This attempt leads to additional discretization error in the modeling of material property field because a step-wise constant approximation was employed instead of a continuous one in each individual element. A few studies in developing new finite element formulations based on graded material properties were carried out ([10-11]). These formulations are called graded finite elements by both researchers and only applied for the plane elasticity problems. Nonetheless, they may be applied for other applications such as the heat conduction problem.

Secondly, the BEM concept was extensively used to investigate many heat conduction problems in graded materials. Gray et al. [12] developed a Galerkin BEM formulation by deriving the Green's function for steady state heat conduction problem in exponentially graded material. Sutradhar et al. [13] extended the work of Gray et al. [12] to transient heat conduction for exponentially graded materials in three dimensions using Laplace transform Galerkin boundary element method (LTBEM). Sladek et al. [14-16] presented a meshless local boundary integral equation (LBIE) formulation for transient heat conduction considering exponential material variation. Sutradhar and Paulino [17] proposed a simple three-dimensional BEM for transient heat conduction in FGMs where the non-homogeneous problem

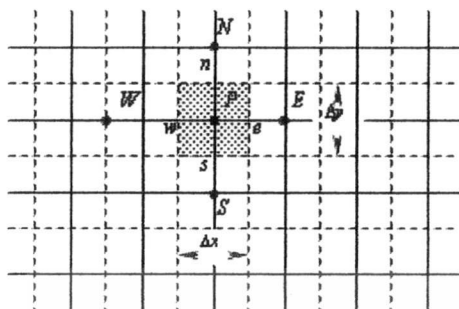


Figure 1: two-dimensional Cartesian mesh

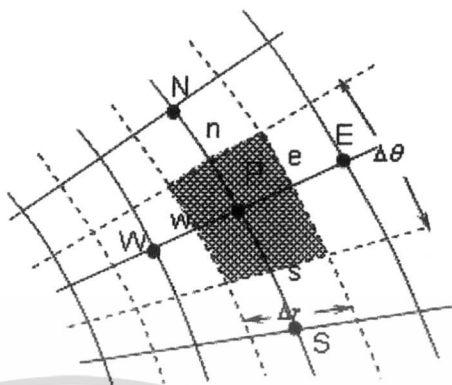


Figure 2: two-dimensional polar mesh

In Eq. (8), superscript ‘o’ refers to temperature at time t ; temperature at time level $t + \Delta t$ are not superscripted. After substituting Eq. (8) into Eq. (7) and applying central differencing to the diffusion terms on the left hand side of Eq. (7), we have

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(k_e \Delta y \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - k_w \Delta y \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(k_n \Delta x \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - k_s \Delta x \frac{T_P - T_S}{\Delta y} \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} Q \Delta x \Delta y dt = \rho c (T_P - T_P^o) \Delta x \Delta y. \quad (9)$$

Another type of control volume which is referred to as a two-dimensional polar coordinate system is shown Fig. 2. Integration of equation (4) over the control volume (Ω) and over a time interval from t to $t + \Delta t$ gives

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} Q d\Omega dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt \quad (10)$$

With the temperature at a node prevailing over the whole control volume, the right hand side can be written as

$$\int_{\Omega} \int_t^{t+\Delta t} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\Omega = \rho c (T_P - T_P^o) \left\{ \frac{r_e + r_w}{2} \right\} \Delta r \Delta \theta. \quad (11)$$

A finite volume method

11

Similar technique is used for Eq.(11) and Eq.(10), thus we have

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left(k_e r_e \Delta \theta \frac{T_E - T_P}{\Delta r} - k_w r_w \Delta \theta \frac{T_P - T_W}{\Delta r} \right) dt \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{k_n}{r_n} \Delta r \frac{T_N - T_P}{\Delta \theta} - \frac{k_s}{r_s} \Delta r \frac{T_P - T_S}{\Delta \theta} \right) dt + Q \left\{ \frac{r_e + r_w}{2} \right\} \Delta r \Delta \theta \\ & = \rho c (T_P - T_P^o) \left\{ \frac{r_e + r_w}{2} \right\} \Delta r \Delta \theta. \quad (12) \end{aligned}$$

Finding transient response via finite difference

The generalized trapezoidal family of methods is used in order to write the integral I_T of temperature T_P with respect to time as

$$I_T = \int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\beta T_P + (1 - \beta) T_P^o] \Delta t \quad (13)$$

A weighting factor β is bounded between 0 and 1. If $\beta = 0$, the algorithm is the Euler forward method; if $\beta = 0.5$, the algorithm is the Crank-Nicolson; if $\beta = 2/3$, the algorithm is known as the Galerkin method; if $\beta = 1$, the algorithm is the Euler backward method. The time-marching algorithm (Eq. (13)) is unconditionally stable for $\beta \geq 0.5$. Using Eq. (13) for T_N , T_S , T_E and T_W , Eq. (9) may be re-written as

$$\begin{aligned} \frac{\rho c (T_P - T_P^o) \Delta x \Delta y}{\Delta t} &= \frac{k \Delta y \beta}{\Delta x} (T_E - T_P) + \frac{k \Delta y (1 - \beta)}{\Delta x} (T_E^o - T_P^o) - \frac{k \Delta y \beta}{\Delta x} (T_P - T_W) \\ &- \frac{k \Delta y (1 - \beta)}{\Delta x} (T_P^o - T_W^o) + \frac{k \Delta x \beta}{\Delta y} (T_N - T_P) + \frac{k \Delta x (1 - \beta)}{\Delta y} (T_N^o - T_P^o) \\ &- \frac{k \Delta y \beta}{\Delta x} (T_P - T_S) - \frac{k \Delta y (1 - \beta)}{\Delta x} (T_P^o - T_S^o) + Q \Delta x \Delta y. \quad (14) \end{aligned}$$

Eq. (14) is solved with the Crank-Nicolson by setting $\beta = 0.5$. Then, the discretized unsteady heat conduction equation may be expressed in the compact form as

$$\begin{aligned} a_P T_P &= a_E \left[\frac{T_E + T_E^o}{2} \right] + a_W \left[\frac{T_W + T_W^o}{2} \right] + a_N \left[\frac{T_N + T_N^o}{2} \right] + a_S \left[\frac{T_S + T_S^o}{2} \right] \\ &+ \left[a_P^o - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} - \frac{a_N}{2} - \frac{a_S}{2} \right] T_P^o + b \quad (15) \end{aligned}$$

and ω_n are roots of the following transcendental equation

$$J_0(R_1 r)Y_0(R_2 r) - J_0(R_2 r)Y_0(R_1 r) = 0, \quad (33)$$

with $J_0(x)$ and $Y_0(x)$ are Bessel functions of first and second kind and zeroth order.

The thermal conductivity and diffusivity are taken as

$$k = k_0 e^{\gamma(r-R_1)}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{\gamma(r-R_1)}, \quad (34)$$

where $k_0 = 17 \text{ W/(m} \cdot \text{deg)}$, $\alpha_0 = 0.17 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ and γ is known as the exponential parameter. Here $\gamma = 0$ corresponds to a homogeneous material with constant thermal conductivity (k_0) and diffusivity (α_0). The time history of temperatures at the position $r/R_1 = 1.025$ is shown in Fig. 8. Again, the finite volume method gives good agreement with the analytical solutions. Fig. 9 shows the temperature distributions along radial direction at four different time levels.

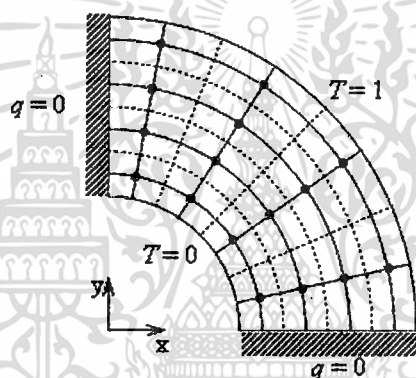


Figure 7: Boundary conditions, control volumes and node locations for a hollow cylinder

To illustrate the influence of material gradation on the temperature variation, three different exponential parameters $\gamma = 0.2, 0.4$ and 0.6 cm^{-1} are selected for thermal conductivity and diffusivity in FGM. Numerical results for time variation of the temperature in the FGMs and the homogeneous material at a selected position are shown in Fig. 10. The results shown in Fig. 11 also suggest that the increasing of exponential parameter of FGM raises the spatial variation of the temperature response.

Conclusions

The understanding of temperature distribution and related heat fluxes in FGMs under severe thermal environment is important to several industrial applications. Moreover, the simple and effective calculation technique for FGMs is also necessary. In this method, an exponential variation of material properties was used for

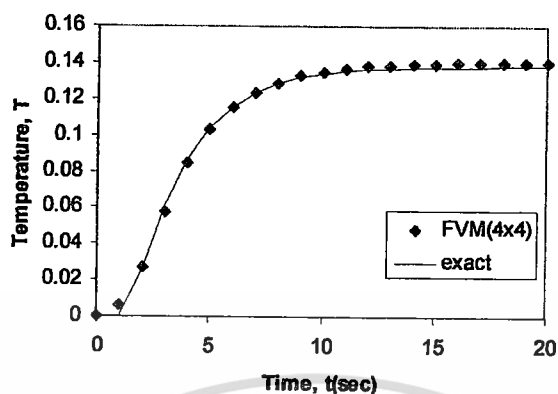


Figure 8: Time variation of the temperature at $r/R_1 = 1.025$ in the hollow cylinder with homogeneous material properties

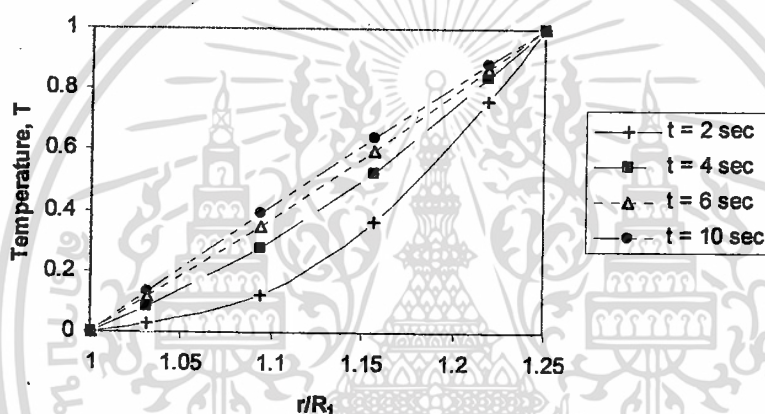


Figure 9: Temperature distribution along radial direction at different time levels for a hollow cylinder with homogeneous material properties

modeling the functionally graded material. However, there is no restriction in the function variation of material properties, as seen in the discretization step. The governing equation for the nodal temperature values in the time-domain formulation are given by a system of first-order ordinary differential equations, which can be solve by a time-stepping technique such as Crank-Nicolson method. The standard finite volume technique is used to approximate the system of differential equations with the system of algebraic equations. Good agreements of the numerical results by using the FVM with the exact results can be achieved in all considered test examples. In the present work, we have developed two separate codes corresponding to the Cartesian and Polar meshes. Our primary aim is to introduce an alternative numerical formulation which is easy to implement and to investigate the effects of non-homogeneous material constants on the characteristics of the FGMs. An extension of this work includes testing the performance of the unstructured finite

17. A. Sutradhar, G.H. Paulino, The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 (2004) 4511-4539.
18. H.K. Versteeg, W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
19. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon, Oxford, 1959.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

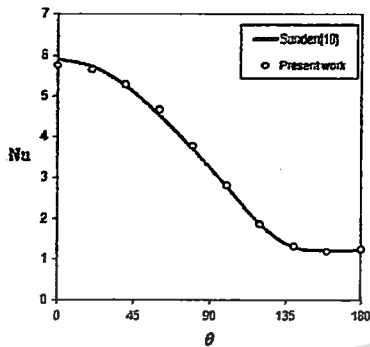


Fig. 3. Local Nusselt number for a clean tube at Re = 40 and Pr = 0.71.

i , V_{CV} is the volume of the control volume surrounding this node, b_i^u and b_i^v are the terms containing the variables that are not related to the velocity components and pressure gradients in x and y momentum equations, respectively.

3.2. Discretization of the pressure equations

To derive the discretized pressure equation, the sub-domain weighted residual method is applied to the mass conservation equation, Eq. (1),

$$\int \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega = \int \rho (u n_x + v n_y) d\Gamma \quad (7)$$

where the integrations are done over the control volume Ω and the control volume face Γ ; n_x and n_y are the direction cosines of the unit vector normal to the control surface with respect to x and y direction, respectively. As mentioned earlier, the mass conservation equation is employed for solving the pressure, but the pressure term does not arise in the mass conservation equation. For this reason, the relation of pressure and velocities is needed. These relations are obtained from rewriting Eqs. (6a) and (6b) as follows:

$$u_i = \hat{u}_i - d_i^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{CV} \quad (8a)$$

$$v_i = \hat{v}_i - d_i^v \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{CV} \quad (8b)$$

where

$$\hat{u}_i = \frac{\sum_{ab} a_{ab}^u u_{ab} + b_i^u}{d_i^u} \quad (9a)$$

$$\hat{v}_i = \frac{\sum_{ab} a_{ab}^v v_{ab} + b_i^v}{d_i^v} \quad (9b)$$

$$d_i^u = \frac{V_{CV}}{d_i^u} \quad (9c)$$

$$d_i^v = \frac{V_{CV}}{d_i^v} \quad (9d)$$

where \hat{u}_i and \hat{v}_i represent pseudo-velocity components in x and y direction, respectively; d_i^u and d_i^v are the pressure gradient coefficients.

Using Eqs. (7)–(9) and the relation between the volume-averaged values and the nodal values of pressure gradients from sur-

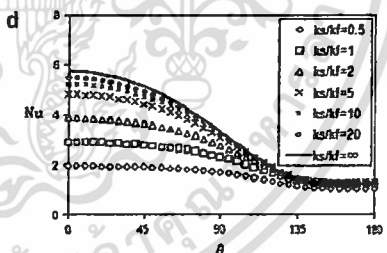
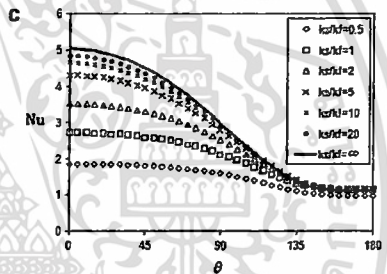
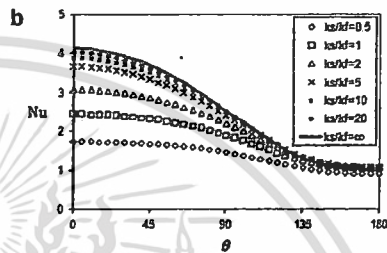
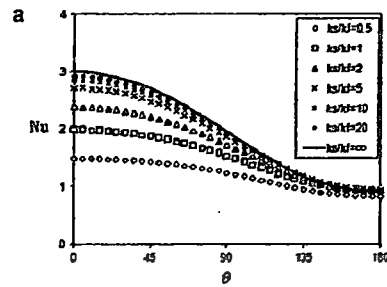


Fig. 4. local Nusselt number for concentric fouling in air (Pr = 0.71) at (a) Re = 10, (b) Re = 20, (c) Re = 30, (d) Re = 40.

rounding elements, the integration of mass conservation Eq. (1) through the control volume surrounding node i yields the equation of pressure written in the general form:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

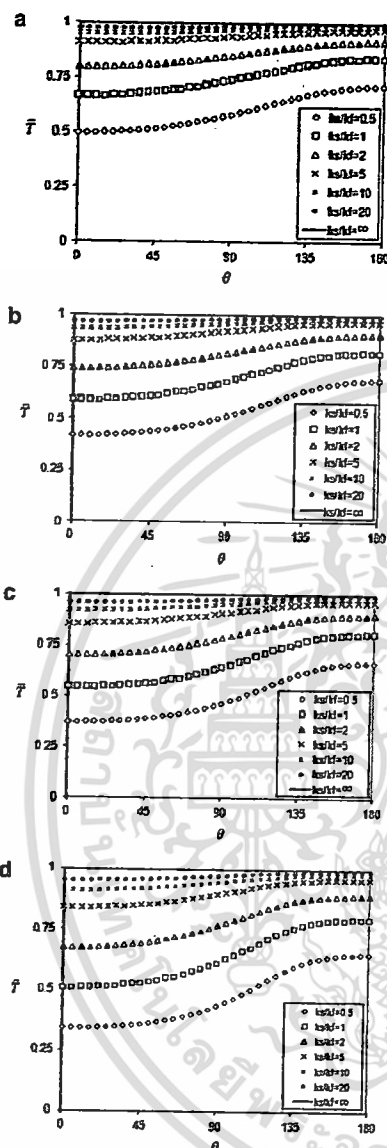


Fig. 5. temperature distribution on the surface of concentric solid in air ($Pr = 0.71$) at (a) $Re = 10$, (b) $Re = 20$, (c) $Re = 30$, (d) $Re = 40$.

$$a_i^t p_i = \sum_{nb} a_{nb}^t p_{nb} + b_i^t \quad (10)$$

where b_i^t is the source term arising from pseudo-velocity fields.

3.3. Discretization of the energy equations

The streamline upwind control volume method is also applied to the convection term in the weak form of energy equation of fluid. The algebraic equation of energy balance within an internal control volume both in solid and fluid regions can be expressed as

$$a_i^t T_i = \sum_{nb} a_{nb}^t T_{nb} + b_i^t \quad (11)$$

where a_i^t is the coefficient of the temperature at node i , a_{nb}^t are the coefficients of temperature at the neighbor nodes and b_i^t is the source term arising from other variables not depend on the temperature.

3.4. Solution procedure

The coefficients in the above discretization equations are calculated using appropriate algebraic approximations for the volume and surface integrals. For example, the midpoint rule is used in approximation of integrals on the control volume face.

The SIMPLER algorithm of Patankar [12] is applied for a treatment of the pressure-velocity coupling. The initial values of unknown velocity components, pressure and temperature are pre-determined. The new nodal temperature in the fluid and solid regions are computed by using Eq. (11). Then, the pseudo-velocity components (\hat{u}_i and \hat{v}_i) and the coefficient of pressure gradients (d_i^u and d_i^v) are obtained from the iterations of the momentum equations, Eqs. (8a) and (8b). These variables are used in the calculation of the new nodal pressure in Eq. (10). The nodal velocity components are then updated by using the recent pressure gradients. With the latest values of velocity components, pressure and temperature, the computational process is continued until the specified convergence criterion is satisfied. The velocity components, pressure and temperature are stored at the mesh vertices and solved sequentially in each cycle of the overall solution procedure. The linear algebraic equations may be solved by any suitable method. The solutions for all variables such as two velocity components, temperature and pressure are carried out by matrix-free point-by-point successive over-relaxation method. This algorithm is selected because of its low computer storage requirement and simplicity in developing computer program from the equations described above. Our convergence criteria are 10^{-5} for all the variables in the analysis.

3.5. Nusselt numbers

The local Nusselt number for fouled tube is given by

$$Nu = -\frac{(\partial T / \partial n)_c d_c}{T_c - T_{\infty}} = \frac{hd_c}{k_f} \quad (12a)$$

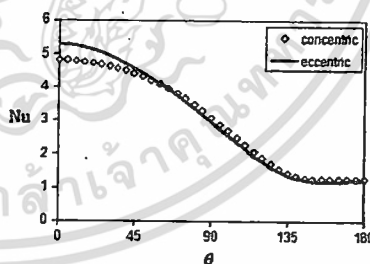


Fig. 6. Local Nusselt number of concentric and eccentric fouling ($k_c/k_f = 5$) in air ($Pr = 0.71$) at $Re = 40$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

face is smaller when the Reynolds number is low. This same conclusion can be drawn from the case of water. At the same Reynolds number and thermal conductivity ratio k_f/k_s , the temperature distribution along the fouling surface becomes larger when the Prandtl number is decreased.

The influences of thermal conductivity ratio k_f/k_s and Prandtl number on the mean heat transfer coefficient are shown in Fig. 12a and b for $Re = 20$ and $Re = 40$, respectively. From these figures, it is clear that for high Prandtl number fluid, the mean heat transfer coefficient is more sensitive to the value of k_f/k_s than that for fluid with low Prandtl number.

When k_f/k_s equals zero or $k_s \gg k_f$, the temperature level within fouling material approaches a constant value of the tube surface temperature. For this particular case, the local Nusselt number approaches the value for clean tube. Specifically speaking, one can compare the result for instant at Reynolds number of 40, between Figs. 3 and 4d and the temperature distribution Fig. 5d for $k_f/k_s = \infty$ (solid line). Due to similarities in: (i) the Reynolds number, (ii) the surface geometry and (iii) the temperature distribution of solid

fouling approach to those of clean tube, the results shown in Fig. 3 and that from Fig. 4d (only for concentric case) are expected to be the same. On the other hand, the mean Nusselt number of the clean tube can be computed from the correlation $Nu_m = 0.911 - Re^{0.385} Pr^{1/3}$ for $4 \leq Re \leq 40$ in Ref. [4], see Table 1.

5. Conclusions

A control volume finite element method using sub-domain weighted residual discretization was constructed and validated with existing empirical and numerical results with excellent degree of accuracy. The model was then used for assessing the effect of fouling eccentricity as well as its thermal conductivity on heat transfer coefficient at different values of Reynolds numbers and fluid's Prandtl number.

It was found that eccentric fouling had resulted in less adverse effect on the heat transfer characteristic simply due to thinner fouling layer at the leading side of cylinder pipe where the majority of heat transfer takes place. However, the thermal conductivity of fouling material, which was varied from 0.5 to infinity times to that of fluid, would alter the distribution of the local Nusselt number, leading to lower rate of overall heat transfer. This insulation effect adversely depends upon the value of thermal conductivity of the fouling solid and is more noticeable at higher Reynolds number. Lastly, these numerical results can also depict the effect of Prandtl number on heat transfer, where high Nusselt number is expected for heat transfer with high Prandtl number fluid. Additionally, this effect appears to be strong especially when the thermal conductivity of fouling solid is high.

Acknowledgments

The authors would like to express sincere gratitude to the National Metal and Materials Technology Center (MTEC) of Thailand for the financial support under Grant No. MT-B-52-MAC-22-189-G. Also, the authors gratefully acknowledge the valuable suggestions in correcting the manuscripts provided by reviewers.

References

- [1] E.R.G. Eckert, E. Soehngen, Distribution of heat transfer coefficients around circular cylinders in cross-flow at Reynolds number from 20 to 500, Transactions of ASME Paper 51-F9 (1953) 343–347.
- [2] K.M. Krall, E.R.G. Eckert, Local heat transfer around a cylinder at low Reynolds number, Journal of Heat Transfer 95 (1973) 273–275.
- [3] A. Zukauskas, Heat transfer from tubes in cross flow, Advances in Heat Transfer 8 (1972) 93–160.
- [4] J.P. Holman, Heat Transfer, Metric ed., McGraw-Hill, 1989.
- [5] A. Nuntapan, T. Kiatstirnat, Thermal behaviour of spiral fin-and-tube heat exchanger having fly ash deposit, Experimental Thermal and Fluid Science 31 (2007) 1103–1109.
- [6] M.S. Kim, B.J. Baek, T. Ota, Fouling effect of water scale on heat transfer around a tube in staggered tube banks, International Journal of Energy Research 27 (2003) 337–348.
- [7] E. Buyruk, Numerical study of heat transfer characteristics on tandem cylinders, inline and staggered tube banks in cross-flow of air, International Communications in Heat and Mass Transfer 29 (2002) 355–366.
- [8] D. Bouris, G. Papadakis, G. Bergeles, Numerical evaluation of alternate tube configurations for particle deposition rate reduction in heat exchanger tube bundles, International Journal of Heat and Fluid Flow 22 (2001) 525–536.
- [9] I. Owen, E. Buyruk, H. Barrow, Theoretical analysis of the thermal resistance of non-uniform fouling on cross-flow heat exchanger tubes, Applied Thermal Engineering 16 (1996) 43–50.
- [10] B. Sundén, Conjugate heat transfer from circular cylinders in low Reynolds number flow, International Journal of Heat and Mass Transfer 23 (1980) 1359–1367.
- [11] C.R. Swaminathan, V.R. Voller, S.V. Patankar, A Streamline upwind control volume finite element method for modeling fluid flow and heat transfer problems, Finite Elements in Analysis and Design 13 (1993) 169–184.
- [12] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [13] F.M. White, Viscous Fluid Flow, second ed., Mc Graw-Hill, 1991.

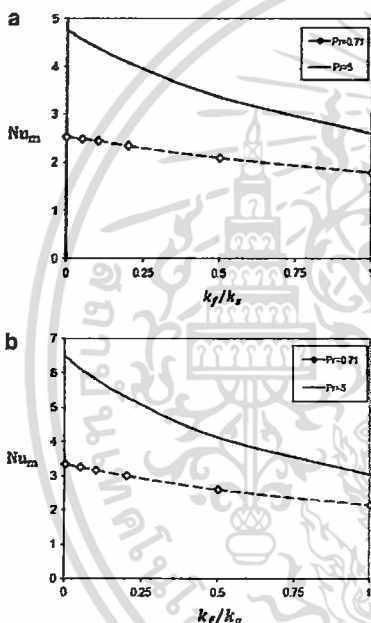


Fig. 12. Mean Nusselt number of concentric fouling for air ($Pr = 0.71$) and water ($Pr = 5$) at (a) $Re = 20$ and (b) $Re = 40$.

Table 1 validation of Nusselt number of circular tube in air (uniform temperature).

Re	Nu_m (CVFEM)	Nu_m (Ref.[4])	Error (%)
10	1.94202	1.97399	-1.61958
20	2.519137	2.577755	-2.27388
30	2.978019	3.043261	-1.16956
40	3.341631	3.366186	-0.72947

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Journal: 231
Article: 649



Springer

the language of science

Author Query Form

**Please ensure you fill out your response to the queries raised below
and return this form along with your corrections**

Dear Author

During the process of typesetting your article, the following queries have arisen. Please check your typeset proof carefully against the queries listed below and mark the necessary changes either directly on the proof/online grid or in the 'Author's response' area provided below

Query	Details required	Author's response
1.	Please note that the Appendix equations, figures and tables are renumbered to ensure sequential order of numbering with text. Kindly check and confirm the change.	
2.	Please check and confirm the inserted citation of Table 2 is correct. If not, please suggest an alternate citation. Please note that figures and tables should be cited in sequential order in the text.	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A high order control volume finite element procedure for transient heat conduction analysis of functionally graded materials

J. Charoensuk · P. Vessakosol

Received: 4 December 2009 / Accepted: 15 July 2010
© Springer-Verlag 2010

Abstract A robust unstructured control-volume finite element method is presented for the solution of two-dimensional transient heat conduction in functionally graded materials (FGMs) with isotropic properties. The material properties at a point in the domain vary exponentially to spatial coordinates. A triangular mesh is chosen for spatial discretization and a fully implicit scheme is adapted for time discretization. Several problems are investigated and the results are successfully validated by using analytical and other numerical solutions available in the literature.

1 Introduction

Functionally graded material (FGMs) is a class of composites having continuous spatial variation of material properties. This type of material has recently been used in a severe temperature environment—a body is subjected to high transient heating and cooling within a short period of time [1, 2]. With appropriate grading profile, the thermal stress, residual stress, and stress concentration factor in the structure can be reduced when compared with those in the laminated composite structures under the same loading condition. Mostly, FGMs are manufactured from isotropic components such as metals and ceramics. FGMs have become widely used not only in thermal protection purpose but also in other areas; i.e. biomedical engineering and fuel cell [3, 4].

Transient heat conduction in FGMs has been investigated by several researchers [5–12] for better understanding of

these materials. Sladek et al. [9] applied a meshless method called local boundary integral equation method (LBIEM) to analyze the transient heat conduction problem in FGM. Wang et al. [10] determined the transient temperature field in FGM plate, shell and sphere by a finite element/finite difference (FE/FD) method and also considered the effect of material properties on the temperature. Wang and Tian [11] gave more details on the above FE/FD method and demonstrated their method to two-dimensional heat transfer under transient state. Wang et al. [12] proposed the virtual boundary collocation method (VBCM) for transient heat conduction analysis in FGM.

Control volume finite element method (CVFEM) is an alternative numerical technique for the solution of FGM problems. It is a combination of numerical discretization inherited from the finite volume method and numerical interpolation of FEM and sometimes referred to as a vertex-centered finite volume method [13, 25–28]. This technique has a potential for multi-physical problems such as the conjugate heat transfer where the energy balance between solid and moving fluid needed to be considered simultaneously [35]. From authors' point of view, CVFEM is applicable for the transient heat conduction problems in FGM where the non-homogenous material properties of FGM induce the non-linearity in heat conduction problem.

Early development of finite volume method had focused on the non-linearity in problems of fluid dynamics [13]. Therefore, the domain geometries initially modeled by finite volume method were relatively simple. The use of structured mesh based either on rectangular or body-fitted coordinates did not lead to severe errors in the numerical results. In modern applications, however, the domain geometries are much more complicated than those in the past. Consequently, it is difficult to handle these works with structured mesh solver. Unstructured mesh solver

A1 J. Charoensuk (✉) · P. Vessakosol
A2 Department of Mechanical Engineering,
A3 Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology
A4 Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
A5 e-mail: kcjaruw@kmitl.ac.th

221 element is, in fact, the formation of sub-control volumes of
222 four smaller "imitation" triangles $I-L-N$, $J-M-L$, $L-M-N$,
223 and $K-N-M$. Figure 1c, d show two control volumes con-
224 structed from three-node and six-node triangular elements,
225 respectively.

226 According to the concept of multiple isoparametric
227 transformation proposed by Li et al. [29], the material
228 properties and temperature at any point in a triangular
229 element can be approximated by

$$\rho = \sum_{i=1}^n N_i \rho_i, \quad c = \sum_{i=1}^n N_i c_i, \quad k = \sum_{i=1}^n N_i k_i, \quad T = \sum_{i=1}^n N_i T_i. \quad (7)$$

231 Here, N_i are the shape functions of the element [34]
232 which are normally defined in terms of local coordinates
233 over the triangular region, n is a number of nodes in a
234 particular element, ρ_i , c_i , k_i , and T_i are the nodal values of
235 density, specific heat, thermal conductivity, and
236 temperature, respectively, of a particular element. Note
237 that Eq. 7 is similar to the generalized isoparametric
238 graded finite elements of Kim and Paulino [30]. The
239 temperature gradients at any point in an element, appearing
240 in the first integral of Eq. 5, can be written as

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i, \quad (8a)$$

$$242 \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i, \quad (8b)$$

244 where $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ are the derivatives of shape functions at
245 the nodal point i with respect to x and y , respectively. The
246 midpoint rule is utilized to compute all element integrals
247 since it gives high accuracy with little effort expended. The
248 star symbols in Fig. 1a, b represent the integration points
249 for determining the values of integral terms in Eq. 6. Note
250 that the sub-control volume boundary around each node is
251 the summation of two surfaces in the case of three-node
252 element while it is the summation of four surfaces in the
253 case of six-node element. Details of shape functions, their
254 derivatives and numerical integration method are included
255 in Appendix 1.

256 3.3 Time discretization

257 Integration with respect to time can be carried out with the
258 following trapezoidal interpolation formula [13]:

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi dt = [f\phi^{t+\Delta t} + (1-f)\phi^t] \Delta t, \quad (9)$$

260 where f is a weighting factor between 0 and 1. In this paper,
261 the time discretization is done through a fully implicit

scheme, $f = 1$. Thus, the integrals of Eq. 6 can be written
in discretized forms as

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Gamma_{int}} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma dt = \sum_{j=1}^{ng} \left[k \delta S_j^{int} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \right]_j \Delta t, \quad (10a)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Gamma_q} \hat{q} d\Gamma dt = \sum_{i=1}^{nf} [\hat{q}_i \delta S_i^q] \Delta t, \quad (10b)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Gamma_c} h(T - T_\infty) d\Gamma dt = \sum_{i=1}^{nc} [h_i \delta S_i^c (T_i^n - (T_\infty)_i^n)] \Delta t, \quad (10c)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega^v} Q d\Omega dt = \left(\int_{\Omega^v} Q d\Omega \right) \Delta t, \quad (10d)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega^v} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt = (T_i^n - T_i^{n-1}) \left(\int_{\Omega^v} \rho c d\Omega \right), \quad (10e)$$

where ng , nf , and nc are the number of surface segments
belonging to Γ_{int} , Γ_q and Γ_c , respectively. δS_j^{int} is an
internal surface of sub-control volume. δS_i^q and δS_i^c are
the surfaces associated with heat convection, and the heat
flux at boundary corresponding to node i , respectively.
 T_i^{n-1} is the known temperature at the last time step t^{n-1} of
node i , T_i^n is the unknown temperature at current time step
 t^n of node i , $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n-1} = \left(\frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\Delta t}\right)$ and $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ is the
size of time step. A special case with assuming that there
is a uniform internal heat generation rate per unit volume
throughout the domain can be used to simplify Eq. 10d.
The control-volume finite element approximation of heat
equation can be obtained by substituting Eq. 10a through
to Eq. 10e into Eq. 6,

$$[K]\{T^n\} = \{f\}. \quad (11)$$

The coefficient matrix $[K]$ depends on the temperature
gradients and the material properties. The right-handed side
vector $\{f\}$ depends on the temperature results from the
previous time step, specified heat flux, internal heat
generation rate and heat convection coefficient. The
remaining task is solving the system of equations
(Eq. 11) for the nodal values of unknown temperatures
 T^n at current time step by using direct or iterative method.
If the final time step has not reached, the last nodal
temperatures are used as the current nodal temperatures for
the next time step.

299 4 Numerical results and discussion

300 4.1 Assessment on predictive quality of the proposed
301 method

302 The example used here is the steady heat conduction in a
303 rectangular plate made of homogeneous material with the size
304 of $5\text{ m} \times 10\text{ m}$ as shown in the Fig. 2. The thermal con-
305 ductivity of material is $1\text{ W/m}^\circ\text{C}$. The boundary conditions
306 are $T(x, 0) = 0$, $T(0, y) = 0$, $T(x, 10) = 100 \sin(\pi x/10)$, and
307 $\partial T/\partial x = 0$ at $x = 5$. To assess the accuracy of linear and
308 quadratic CVFEM and the effect of mesh refinement versus
309 analytical solution, four meshes are introduced, see Fig. 3.

310 The governing equation for this example is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

312 The exact temperature field is

$$T(x, y) = 100 \frac{\sinh(\pi y/10) \sin(\pi x/10)}{\sinh \pi} \quad (13)$$

314 The average error of temperature field is evaluated by

$$E(x, y) = \left[\frac{1}{N_I \times N_J} \sum_{i=1}^{N_I \times N_J} \left| \frac{T_{Num} - T_{Exact}}{T_{Exact}} \right| \right] \times 100\% \quad (14)$$

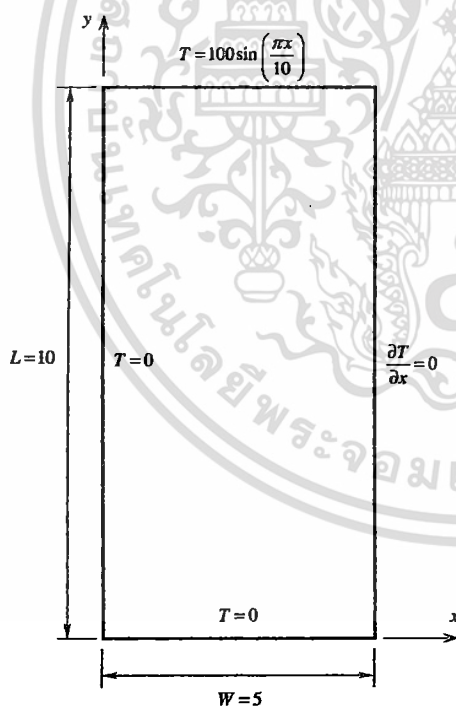


Fig. 2 The calculation domain and boundary conditions

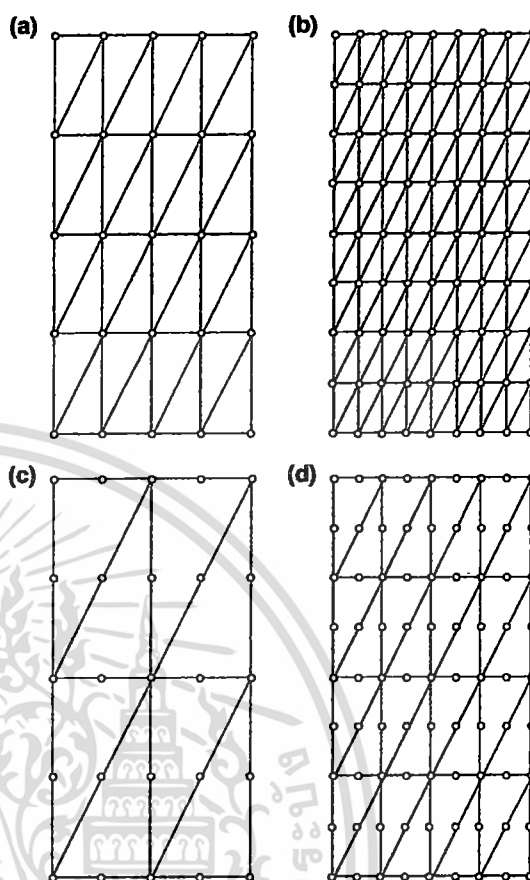


Fig. 3 The computational mesh of CVFEM a 25 nodes 32 elements (linear), b 81 nodes 128 elements (linear), c 25 nodes 8 elements (quadratic), d 81 nodes 32 elements (quadratic)

where T_{Num} and T_{Exact} are the numerical and exact values of temperature, respectively. N_I and N_J are total numbers of internal nodes in x and y directions, respectively. From Table 1, the accuracy of numerical solution can be greatly improved by increasing the order of interpolation function just the same way as decreasing the element size (Table 2).

4.2 Problems on FGM material

In this section, four simple heat conduction problems in isotropic FGM are presented in order to validate and illustrate the accuracy of the proposed numerical scheme. In all problems, zero initial temperature is applied.

The first test case is about solving the transient temperature for one-dimensional heat conduction problem. A functionally graded finite square strip with a unidirectional variation of thermal conductivity and thermal

Table 1 Average errors of various mesh sizes and orders of interpolation functions

CVFEM	Order	NI	NJ	$E(x, y)$ (%)
Mesh (a)	1	4	3	4.235
Mesh (b)	1	8	7	1.003
Mesh (c)	2	4	3	1.074
Mesh (d)	2	8	7	0.099

diffusivity [9] is concerned. The geometry, boundary conditions and mesh are given in Fig. 4. The thermal conductivity and diffusivity are assumed in the form of exponential functions, given by

$$k = k_0 e^{\lambda x}, \tag{15a}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \alpha_0 e^{\lambda x}, \tag{15b}$$

where $k_0 = 17 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$, and $\alpha_0 = 0.17 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

Three values of exponential parameters $\lambda = 0, 0.2,$ and 0.5 cm^{-1} are used in this problem to demonstrate the non-homogeneous effect of material properties on the temperature result. In the view of boundary conditions, there is no normal heat flux on two opposite sides parallel to the y -axis while different values of temperature are specified on the two opposite sides parallel to the x -axis. The length of square strip is $a = 0.04 \text{ m}$. The left boundary is maintained at zero temperature and the right boundary is imposed by the Heaviside step function of time, i.e., $T = \bar{T} \cdot H(t)$ with $\bar{T} = 1 \text{ } ^\circ\text{C}$. The analytical solution of the temperature distribution in a FGM square strip at steady state can be obtained as

$$T = \bar{T} \left[\frac{e^{-\lambda x} - 1}{e^{-\lambda a} - 1} \right]. \tag{16}$$

When the exponential parameter is prescribed to zero, the strip has homogeneous thermal conductivity, $k = k_0$ and constant thermal diffusivity, $\alpha = \alpha_0$. The analytical solution for this special case [31] can be written as

$$T = \bar{T} \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{T} \cos(n\pi)}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \right] e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 \alpha}{a^2}\right)}. \tag{17}$$

Table 2 Comparison between exact and numerical solutions inside the calculation domain at corresponding locations

y	x	Exact solution, T_{exact}	CVFEM (3 node), Mesh (a)		CVFEM (6 node), Mesh (c)	
			T_{FVM3}	Error (%)	T_{FVM6}	Error (%)
2.5	2.5	5.319	5.6386	6.0086	5.351	0.6016
	5	7.522	7.9742	6.0117	7.601	1.0503
5	2.5	14.09	14.7109	4.4067	13.832	1.8311
	5	19.927	20.8043	4.4026	19.831	0.4818
7.5	2.5	32.01	32.7416	2.2855	32.454	1.3871
	5	45.269	46.3036	2.2854	45.93	1.4602

The accuracy of this proposed method is evaluated by comparing the numerical results with the analytical solution in Eq. 17. All of the results are obtained by using 25 nodes, 4 quadratic triangular elements, and uniform time step $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Figure 5 shows the temperature change with time which is numerically and analytically computed at three positions, $x = 0.01 \text{ m}$, $x = 0.02 \text{ m}$, and $x = 0.03 \text{ m}$. Good agreement between the numerical and analytical solutions is noticed in Fig. 5. Figure 6 shows the variation of temperature with time for three λ -values at the position $x = 0.02 \text{ m}$. The temperature distribution in material having large exponent coefficient approaches the steady state solution quicker than that in the material having small exponent coefficient. Figure 7 illustrates the distributions of temperatures inside FGM strip under different transient states. From numerical results, it is found that the temperature approaches steady state after $t = 20 \text{ s}$.

For the steady state condition, the analytical results from Eq. 16 are compared with the results obtained by the proposed method in Fig. 8. The numerical results are in good agreement with the analytical results. The predictive quality of CVFEM is also compared with conventional finite element method where the thermal conductivity of material is piecewise constant and represented by the value at the centroid of the element. The result suggests that the conventional FEM is not recommended for the solution of highly graded material especially in conjunction with coarse mesh, see Table 3.

In the second problem, a thick-wall functionally graded cylinder with infinite length is considered, where its inner radii R_1 is 0.08 m and outer radii R_2 is 0.1 m . The zero initial temperature is employed in this analysis. The outer surface of the hollow cylinder has the Heaviside step time variation $T = \bar{T} \cdot H(t)$ with $\bar{T} = 1 \text{ } ^\circ\text{C}$. The inner surface is maintained at zero temperature. Due to symmetry in geometry and boundary conditions, only a quarter of annulus cross-section is considered. The total number of nodes and elements are 63 and 16, respectively. A uniform time step $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ is used in this calculation. The geometry, boundary conditions and mesh for the second

Author Proof

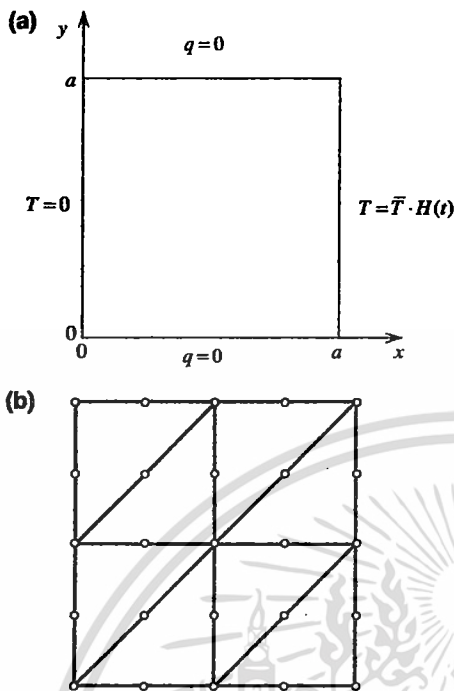


Fig. 4 a Geometry and boundary conditions of the functionally graded finite square strip problem, b triangular mesh

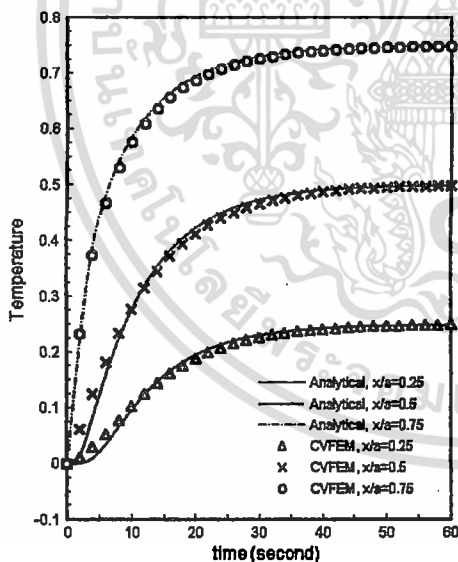


Fig. 5 CVFEM and analytical solutions for time dependence of temperature in a homogeneous finite square strip ($\lambda = 0$) at three locations along x -axis

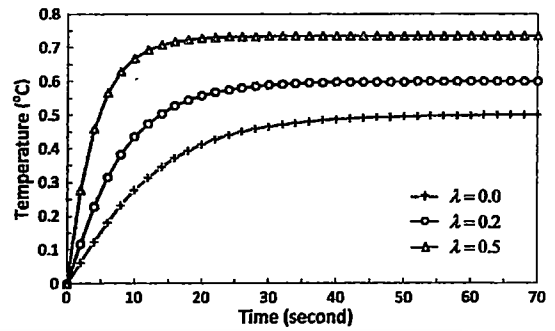


Fig. 6 Time dependence of temperature at the middle location of functionally graded finite square strip

problem are depicted in Fig. 9. The thermal conductivity and diffusivity are assumed in the form of exponential functions, given by

$$k = k_0 e^{\lambda(r-R_1)} \tag{18a}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \alpha_0 e^{\lambda(r-R_1)} \tag{18b}$$

where $k_0 = 17 \text{ W/(m } ^\circ\text{C)}$, $\alpha_0 = 0.17 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. λ is a parameter dictating the non-homogeneity within the FGM cylinder. The analytical solution for homogeneous cylinder is given by [31] as follow

$$T(r, t) = \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(R_1 \zeta_n) U_0(r \zeta_n)}{J_0^2(R_1 \zeta_n) - J_0^2(R_2 \zeta_n)} e^{-\alpha \zeta_n^2 t} \tag{19}$$

where

$$U_0(r \zeta_n) = J_0(r \zeta_n) Y_0(R_2 \zeta_n) - J_0(R_2 \zeta_n) Y_0(r \zeta_n) \tag{20}$$

and ζ_n are roots of the following transcendental equation

$$J_0(R_1 r) Y_0(R_2 r) - J_0(R_2 r) Y_0(R_1 r) = 0 \tag{21}$$

with $J_0(x)$ and $Y_0(x)$ are the zeroth order Bessel functions of first and second kind.

Some small differences between analytical and numerical solutions are observable in Fig. 10. Figure 11 shows the temperature profiles along the radial locations of homogeneous hollow cylinder at four different time instants. Numerical results for the time variation of temperature at $r = 9 \text{ cm}$ are illustrated in Fig. 12. Figure 13 gives the temperature profiles along the radial coordinate with various values of λ .

To illustrate the accuracy of the program in response to convective boundary, a rectangular FGM strip subjected to a non-uniform convective boundary condition in Fig. 14 is selected. The initial temperature of the plate is zero. The values of fluid temperature surrounding the bottom and the top edge of the plate are defined by function $T_{f, \pm}(x)$ and

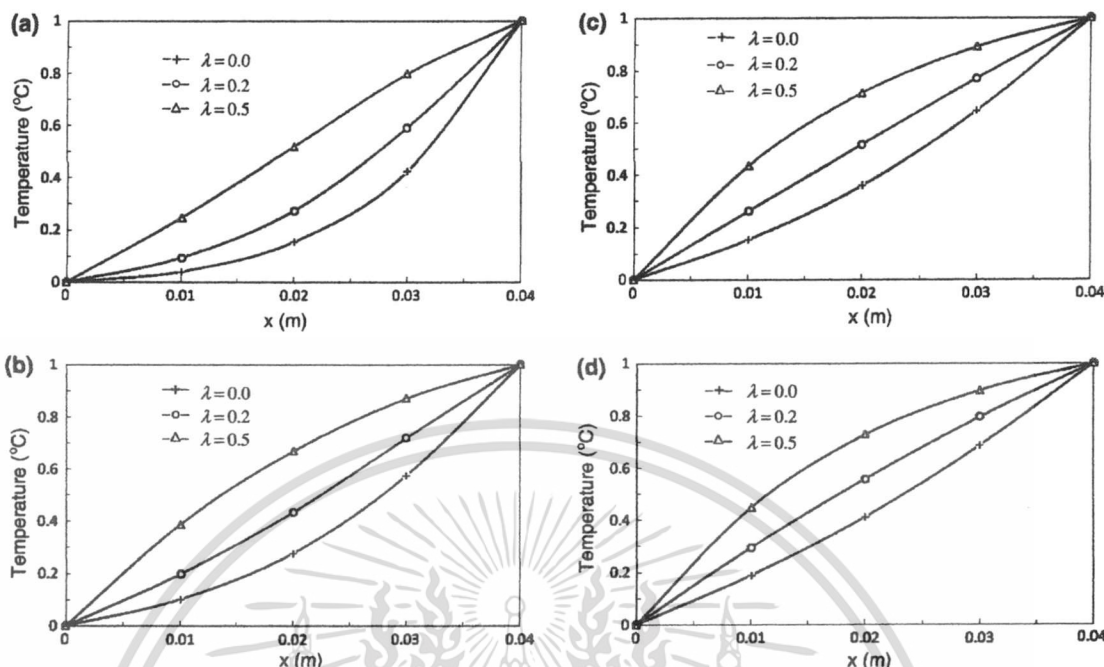


Fig. 7 Temperature distribution along x-axis of functionally graded finite square strip at a $t = 5$ s, b $t = 10$ s, c $t = 15$ s and d $t = 20$ s

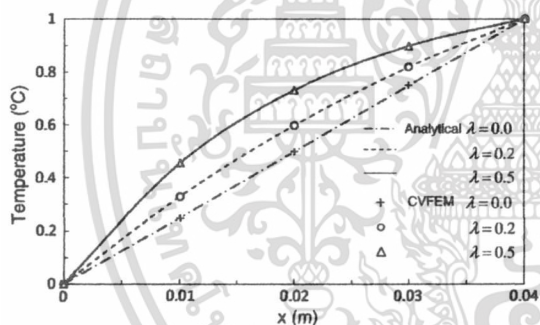


Fig. 8 Comparison of CVFEM and analytical solutions for steady temperature distribution along x-axis of functionally graded finite square strip

Table 3 Comparison on predictive quality between conventional FEM and CVFEM

λ	x	Exact	FEM (6 node)		CVFEM (6 node)	
			T_{FEM}	Error (%)	T_{CVFEM}	Error (%)
0.2	0.01	0.329179	0.309017	6.12489	0.32932	0.043493
	0.02	0.598688	0.599746	0.17678	0.59868	0.000611
	0.03	0.819343	0.805994	1.62921	0.81944	0.011738
0.5	0.01	0.455054	0.394336	13.3431	0.45772	0.585373
	0.02	0.731059	0.733122	0.28225	0.73101	0.006371
	0.03	0.898464	0.87677	2.41453	0.89944	0.108555

430 zero, respectively. The left and right boundaries are spec-
 431 ified with zero normal temperature gradient. The non-
 432 dimensional parameters used in the third and fourth prob-
 433 lems are defined as follow:

$$\bar{x} = x/B, \quad \bar{L} = L/B, \quad \tau = \alpha_0 t/B^2, \quad \alpha_0 = k_0/(\rho c),$$

$$H_a = h_a/k_a, \quad H_b = h_b/k_b, \quad (22)$$

435 where τ represents the non-dimensional time and α_0 is a
 436 typical value of thermal diffusivity. The assigned values for
 437 non-dimensional parameters are given by

$$H_a = 1, \quad H_b = 1, \quad T_a = 1, \quad T_b = 0, \quad L = 6, \\ B = 1, \quad k_0 = 1, \quad \alpha_0 = 1, \quad (23)$$

and a function $f_a(x)$ is defined by 439

$$f_a(\bar{x}) = \begin{cases} 1 - [\bar{x}/\bar{x}_0]^2 & : -\bar{x}_0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0 \\ 0 & : \bar{x} \leq -\bar{x}_0, \bar{x}_0 \geq \bar{x} \end{cases} \quad (24)$$

$$\bar{x}_0 = 1, \quad \bar{x} = \bar{x} - L/2$$

The definition of function $f_b(x)$ is not necessary because 441
 the temperature of surrounding fluid on the top edge of a 442
 plate is prescribed to zero. 443

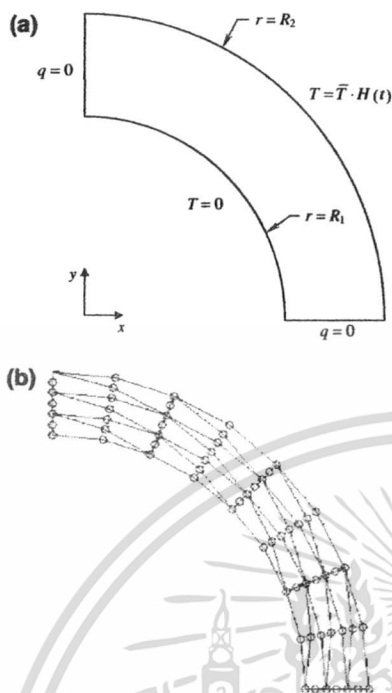


Fig. 9 a Geometry of the second problem and boundary conditions, b triangular mesh

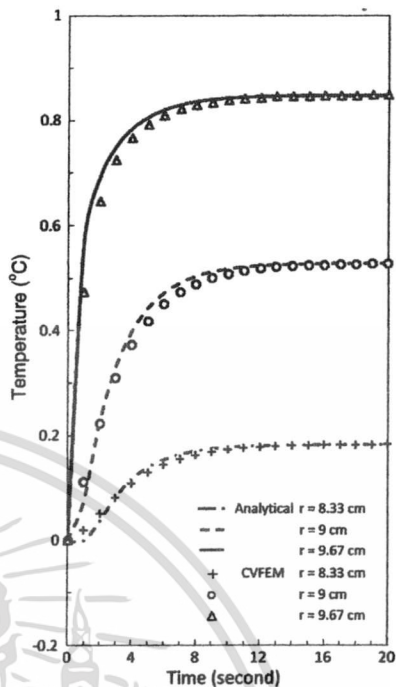


Fig. 10 Time dependence of temperature at three radial positions in a homogeneous hollow cylinder

444 The thermal conductivity and diffusivity at any point in
 445 the FGM plate are assumed following the exponential
 446 functions as

$$k = k_0 e^{\lambda y/B} \tag{25a}$$

$$448 \alpha = \frac{k}{\rho c} = \alpha_0 e^{\lambda y/B} \tag{25b}$$

450 where λ represents the non-homogeneity parameter for
 451 controlling the material gradation through the thickness of
 452 the plate. In this problem, the number of equally spaced
 453 nodes along the x and y directions are 49 and 11, respec-
 454 tively. Initial temperature of the plate is zero and the time
 455 step is 0.01.

456 Figures 15 and 16 show the plot of temperature varia-
 457 tion at the middle of the plate ($\bar{x} = 3$) when $\tau = 0.1$ and
 458 $\tau = 10$. For the purpose of comparison, the analytical
 459 results of Ootao and Tanigawa [32] are also shown in both
 460 figures. It is notable that the steady state is reached after
 461 $\tau = 4$. Good agreement between the analytical and pro-
 462 posed numerical solutions can be seen.

463 The corresponding temperature distributions on the
 464 bottom edge of the rectangular plate with different λ -values
 465 and at different time instants are depicted in Fig. 17. The
 466 high temperature zone can be noticed in the heated region

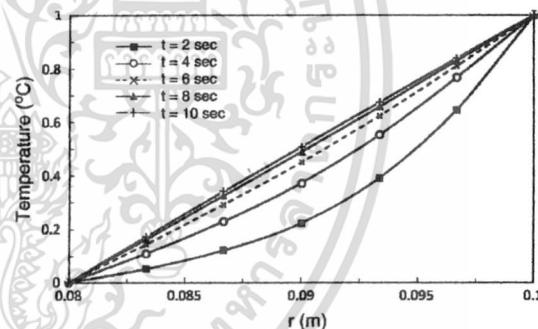


Fig. 11 Temperature variation with the radial distance at five time levels for a homogeneous hollow cylinder

near the midpoint on the bottom edge of the plate. When
 the parameter λ is decreased, the temperature value on the
 heated surface increases. Although this non-homogeneity
 effect can be clearly noticed at steady state, the temperature
 distributions of different λ -values in transient state are
 almost the same.

Finally, the third problem is considered again by
 assuming that the surrounding temperature on the bottom
 edge of the plate increased exponentially with time; viz.,
 $T_{fd}(x)g(\tau)$, where $g(\tau) = 1 - e^{-\gamma\tau}$. From this definition,

467
 468
 469
 470
 471
 472
 473
 474
 475
 476

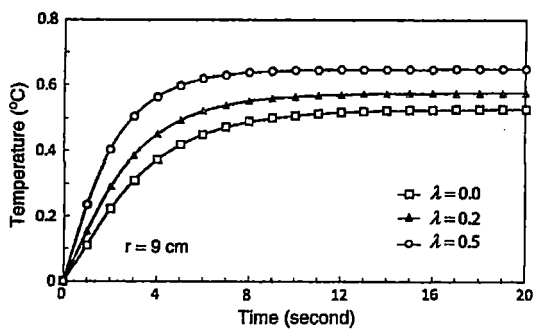


Fig. 12 Temperature variation with respect to time at $r = 9$ cm in a functionally graded hollow cylinder

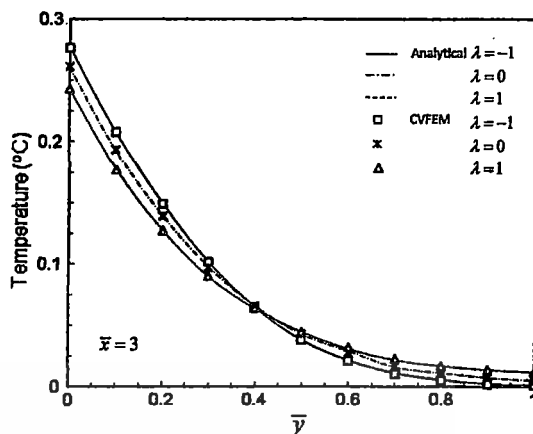


Fig. 15 Temperature change along the y -direction at the position $\bar{x} = 3$ when $\tau = 0.1$

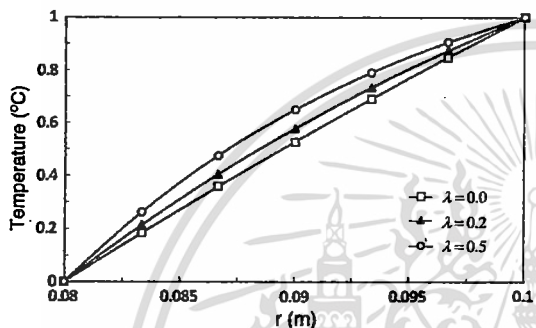


Fig. 13 Steady state temperature distribution with radial direction for a functionally graded hollow cylinder

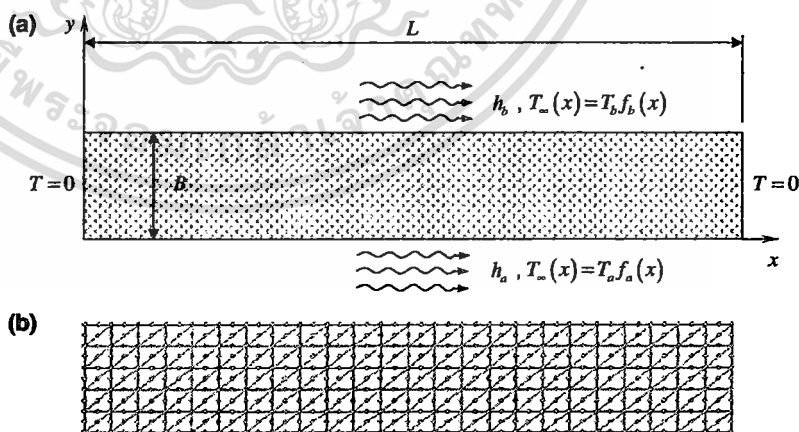
method match well with the results obtained from the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method [33]. The effect of γ on temperature distributions throughout the thickness of the FGM plate with $\lambda = 1$ in a transient state ($\tau = 1$) at the position $\bar{x} = 3$ is shown in Fig. 19.

5 Summary and conclusions

The high order control-volume finite element method has been applied to analyze the transient heat conduction problems occurring in two-dimensional functionally graded solid. The material properties such as thermal conductivity, density, specific heat capacity and thermal diffusivity were assumed to vary exponentially through the thickness direction. In our validation work on homogeneous material,

477 γ is a parameter dictating the rate of change in fluid temperature imposed on the bottom edge of the plate. If γ is large, the value of function $g(\tau)$ increases abruptly like a unit step function. Figure 18 plots the time histories of temperature at the centroid of the plate for different values of γ , with $\lambda = 1$. The results calculated from the present

Fig. 14 a Geometry of the FGM plate subjected to non-uniform convection boundary conditions, b triangular mesh



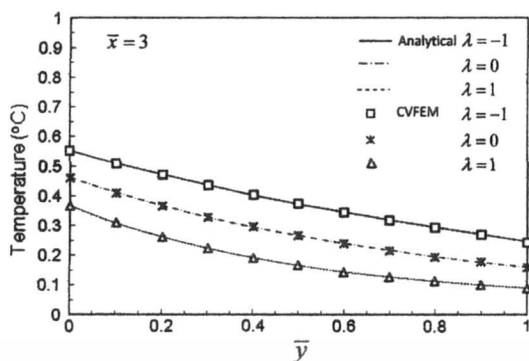


Fig. 16 Steady state temperature change along the y-direction at the position $\bar{x} = 3$

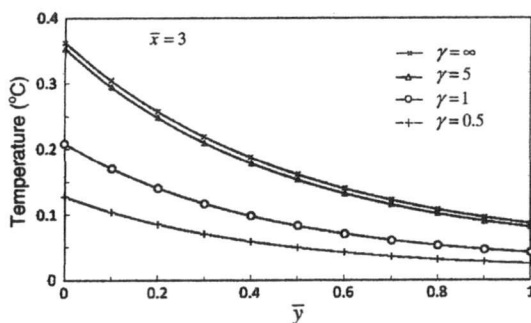


Fig. 19 Temperature distribution throughout the thickness of the rectangular FGM plate for the time-dependent heat supply at time $\tau = 1$ and $\lambda = 1$

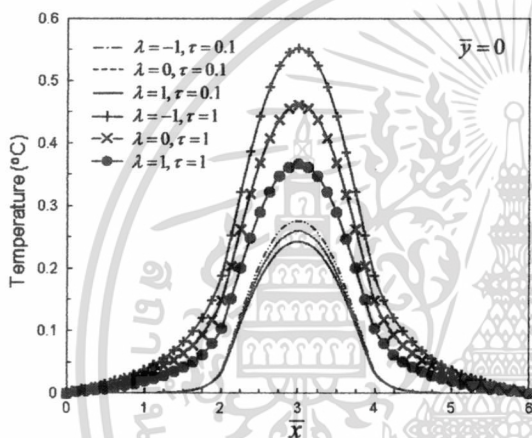


Fig. 17 Temperature distributions at different time instants on the bottom edge of the plate ($\bar{y} = 0$)

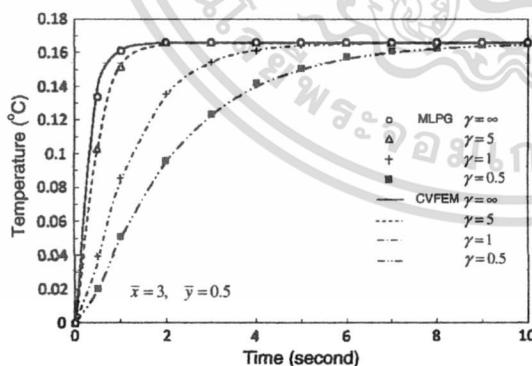


Fig. 18 Time history of temperature at the centroid of the plate for the time-dependent heat supply with $\lambda = 1$

it has been proven that this method gave better accuracy than the first order method under the same mesh size.

Later, the predictive quality of high-order CVFEM versus conventional high-order FEM was investigated by assessing the effect of non-homogeneity of the material properties on thermal response against the analytical result under the same mesh size. The result showed that our method could provide more accurate solution than the counterpart.

The solution with time-dependent boundary condition is also illustrated to show the flexibility of numerical method in solving the problems of interest. The transient temperature solutions of material obtained from the CVFEM method agree well with the solutions from MLPG methods. Our method could also perform well with the solution of heat transfer through a hollow cylinder. It is also recommended for solution of heat transfer with steady and unsteady convective boundary conditions.

The present formulation to be used for analyzing FGMs which their properties described by other grading functions is subjected to further investigation.

Acknowledgments The authors would like to acknowledge the financial support from National Metal and Materials Technology Center (MTEC), Thailand Science Park, under the research grant no.MT-B-52-MAC-22-189-G.

Appendix 1

Shape functions, their derivatives and numerical integration method

The shape functions and their derivatives with respect to ξ and η for 3-noded triangular element are summarized in Table 4. Figure 20 shows the mapping from arbitrary 3-node triangular element to a reference triangular element. The shape functions and their derivatives with respect to ξ

496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528

Author Proof

	Journal : Large 231	Dispatch : 27-7-2010	Pages : 16
	Article No. : 649	<input type="checkbox"/> LE	<input type="checkbox"/> TYPESET
	MS Code : HMT-09-0354	<input checked="" type="checkbox"/> CP	<input checked="" type="checkbox"/> DISK

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 4 The shape functions and their derivatives with respect to ξ and η for 3-noded triangular element

i	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	ξ	1	0
3	η	0	1

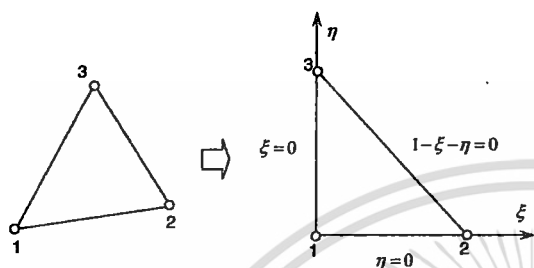


Fig. 20 Mapping from general triangle to a reference triangle (3 node element)

Table 5 The shape functions and their derivatives with respect to ξ and η for 6-noded triangular element

i	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$(1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$	$-3 + 4\xi + 4\eta$	$-3 + 4\xi + 4\eta$
2	$\xi(2\xi - 1)$	$4\xi - 1$	0
3	$\eta(2\eta - 1)$	0	$4\eta - 1$
4	$4\xi(1 - \xi - \eta)$	$4 - 8\xi - 4\eta$	-4ξ
5	$4\xi\eta$	4η	4ξ
6	$4\eta(1 - \xi - \eta)$	-4η	$4 - 4\xi - 8\eta$

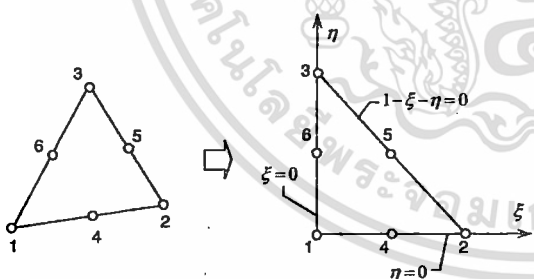


Fig. 21 Mapping from general triangle to a reference triangle (6 node element)

529 and η for 6-noded triangular element are summarized in
 530 Table 5. Figure 21 shows the mapping of element of
 531 arbitrary 6-noded triangular element to a reference triangular
 532 element.

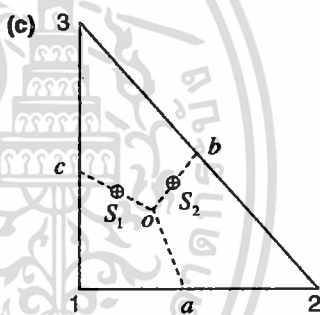
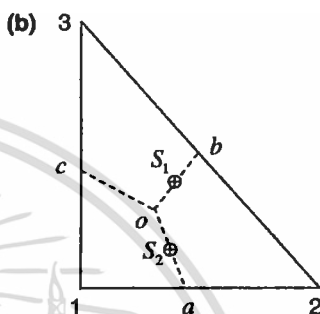
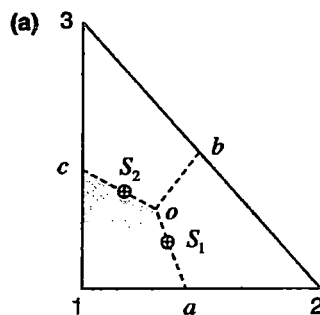


Fig. 22 Integration points along the faces surrounding a node 1, b node 2, c node 3

Table 6 Integration points for 3-node element (midpoint rule)

Face/node	1	2	3
S_1	(5/12, 1/6)	(5/12, 5/12)	(1/6, 5/12)
S_2	(1/6, 5/12)	(5/12, 1/6)	(5/12, 5/12)

In the derivation of the element conductance matrix, it is
 necessary to establish the shape function derivatives with
 respect to (x, y) coordinates. By the rule of partial differ-
 entiation, we write the derivatives of the shape functions
 with respect to local coordinates as

533
 534
 535
 536
 537

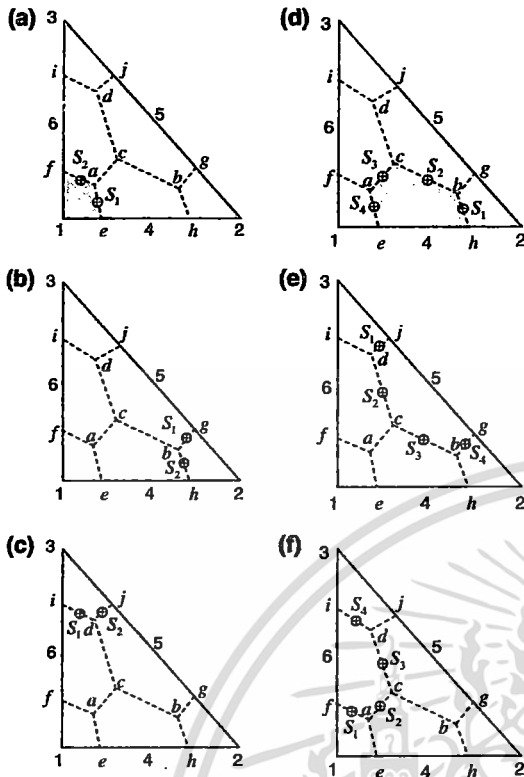


Fig. 23 Integration points along the faces surrounding a node i, b node 2, c node 3, d node 4, e node 5, f node 6

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (27)$$

in the algebraic form, or

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

in the matrix form. The matrix $[J]$ is known as the Jacobian matrix. The Jacobian matrix components can be found explicitly in terms of the local coordinates as follows,

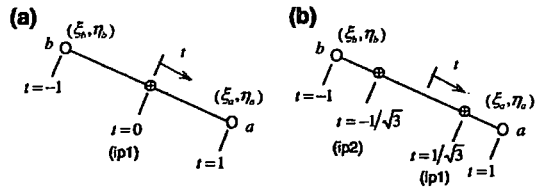


Fig. 24 a Integration point for midpoint rule. b Integration points for 2-point Gauss-Quadrature rule

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{npc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{npc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{npc} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{npc} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i, \end{aligned} \quad (29)$$

where npc refers to the number of nodes per element. Therefore, the required derivatives $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ can be obtained by

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

The discretized equation for heat conduction at steady state of the control volume belonging to node i is

$$\sum_{k=1}^{ns} \left\{ \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) n_x + \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) n_y \right\} \Delta A_k + \bar{S}_i \Delta V_i = 0 \quad (31)$$

where ΔA_k represents the area of face k of the control volume covering node i ; ns is the total number of faces; ΔV_i is the volume of the control volume belonging to node i ; \bar{S}_i is the average heat source over the control volume; n_x and n_y are the direction cosines of a surface. For example, n_x and n_y of the face S_1 in Fig. 22a, later referred to as S_{oa} , are defined as

$$n_x = \frac{y_o - y_a}{\Delta A}, \quad n_y = \frac{x_a - x_o}{\Delta A}, \quad (32)$$

where $\Delta A = \sqrt{(x_o - x_a)^2 + (y_o - y_a)^2}$.

Equation 31 may be rewritten in matrix form for a triangular element that relates to node i as

$$[K]\{T^e\} = \{f\} \quad (33)$$

where $[K]$ is the element conductance matrix; $\{T^e\}$ is the vector containing nodal temperature values in the element; $\{f\}$ is the element load vector.

Table 7 Integration points for 6-node element (midpoint rule)

Face/Node	1	2	3	4	5	6
S_1	(5/24, 1/12)	(17/24, 5/24)	(1/12, 17/24)	(17/24, 1/12)	(5/24, 17/24)	(1/12, 5/24)
S_2	(1/12, 5/24)	(17/24, 1/12)	(5/24, 17/24)	(1/2, 1/4)	(1/4, 1/2)	(1/4, 1/4)
S_3	-	-	-	(1/4, 1/4)	(1/2, 1/4)	(1/4, 1/2)
S_4	-	-	-	(5/24, 1/12)	(17/24, 5/24)	(1/12, 17/24)

584 The calculation method for integrals of an element

585 The integration points on the faces surrounding node i for
586 midpoint rule integration over the faces within a 3-noded
587 triangular element are depicted in Fig. 22 and their loca-
588 tions are summarized in Table 6. The integration points of
589 midpoint rule on the faces surrounding node i within a
590 6-noded triangular element are depicted in Fig. 23 and
591 their locations are summarized in Table 7.

592 The surface integral can be calculated by the midpoint
593 rule which its value equals to the product of the functional
594 values at the center of surface and the total surface area. The
595 locations of integration points are illustrated in Fig. 24.

596 The Gauss quadrature rule is used to approximate the
597 integral value of a specified function. It is a sum of the
598 products between the weighting factors and the corre-
599 sponding function values at the gauss points. The integra-
600 tion points for mid-point rule and 2-point Gauss quadrature
601 rule are calculated by

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(1-t) \left\{ \begin{matrix} \xi_b \\ \eta_b \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(1+t) \left\{ \begin{matrix} \xi_a \\ \eta_a \end{matrix} \right\}, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (36)$$

603 where

604 $t = 0$ for midpoint rule.

605 $t = \{+1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\}$ for 2-point Gauss quadrature
606 rule.

607 The weighting factors for midpoint rule and 2-point
608 Gauss quadrature rule are given by

609 $w_{ip1} = 2$ for midpoint rule.

610 $w_{ip1} = w_{ip2} = 1$ for 2-point Gauss quadrature rule.

611 The line integral of $F(S)$ over the finite length of ΔA can
612 be simplified to

613 $\int_0^{\Delta A} F(S)dS \approx \left(\frac{\Delta A}{2}\right)(2)f(0) = f(0)\Delta A$ for midpoint rule,

614 $\int_0^{\Delta A} F(S)dS \approx \left(\frac{\Delta A}{2}\right)(f(+1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3}))$ for 2-point

615 Gauss quadrature rule.

616 The integration points of 2-point Gauss quadrature rule
617 on the faces surrounding node i within a 6-noded triangular
618 element are summarized in Table 8.
619

620 References

- 621 1. Suresh S, Mortensen A (1997) Fundamentals of functionally
622 graded materials. Cambridge University Press, Cambridge
623 2. Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG
624 (1999) Functionally graded materials: design, processing and
625 applications. Kluwer Academic, Dordrecht

3. Ni M, Leung MKH, Leung DYC (2007) Micro-scale modeling of
626 solid oxide fuel cells with micro-structurally graded electrodes.
627 J Power Sourc 168:369–378
628 4. Yang J, Xiang HJ (2007) A three-dimensional finite element
629 study on the biomechanical behavior of an FGBM dental implant
630 in surrounding bone. J Biomech 40:2377–2385
631 5. Jin ZH, Batra RC (1996) Stress intensity relaxation at the tip of
632 an edge crack in a functionally graded material subjected to a
633 thermal shock. J Therm Stresses 19:317–339
634 6. Noda N, Jin ZH (1994) A crack in functionally graded materials
635 under thermal shock. Arch Appl Mech 64:99–110
636 7. Jin ZH, Paulino GH (2001) Transient thermal stress analysis of an
637 edge crack in a functionally graded material. Int J Fract
638 107:73–98
639 8. Sutradhar A, Paulino GH, Gray LJ (2002) Transient heat con-
640 duction in homogenous and non-homogeneous materials by the
641 Laplace transform Galerkin boundary element method. Eng Anal
642 Boundary Elem 26:119–132
643 9. Sladek J, Sladek V, Zhang Ch (2003) Transient heat conduction
644 analysis in functionally graded materials by the meshless local
645 boundary integral equation method. Comput Mater Sci 28:494–504
646 10. Wang BL, Mai YW, Zhang XH (2004) Thermal shock resistance
647 of functionally graded materials. Acta Mater 52:4961–4972
648 11. Wang BL, Tian ZH (2005) Application of finite element-finite dif-
649 ference method to the determination of transient temperature field in
650 functionally graded materials. Finite Elem Anal Des 41:335–349
651 12. Wang H, Qin QH, Kang YL (2006) A meshless model for tran-
652 sient heat conduction in functionally graded materials. Comput
653 Mech 38:51–60
654 13. Versteeg HK, Malalasekera W (2007) An introduction to com-
655 putational fluid dynamics: the finite volume method. Prentice-
656 Hall, New York
657 14. Aboudi J, Pindera MJ, Arnold SM (1999) Higher-order theory for
658 functionally graded materials. Composites Part B 33(8):777–832
659 15. Aboudi J, Pindera MJ, Arnold SM (2002) High-fidelity general-
660 ized method of cells for inelastic periodic multiphase materials.
661 Paper no. NASA-TM-2002-211469
662 16. Bansal Y, Pindera MJ (2003) Efficient reformulation of the
663 thermal higher-order theory for FGMs. J Therm Stresses 26(11/
664 12):1055–1092
665 17. Bansal Y, Pindera MJ (2005) A second look at the higher-order
666 theory for periodic multiphase materials. ASME J Appl Mech
667 72:177–195
668 18. Bansal Y (2005) Finite-Volume Direct Averaging Microme-
669 chanics of Heterogeneous Media. Ph.D. Thesis, Engineering and
670 Applied Science University of Virginia, VA
671 19. Bansal Y, Pindera MJ (2006) Finite-volume direct averaging
672 micromechanics of heterogeneous materials with elastic-plastic
673 phases. Int J Plast 22(5):775–825
674 20. Pindera MJ, Bansal Y (2007) On the micromechanics-based
675 simulation of metal matrix composite response. ASME J Eng
676 Mater Technol 129:468–482
677 21. Cavalcante MAA (2006) Modeling of transient thermo-mechan-
678 ical behavior of composite material structures by the finite-vol-
679 ume theory. M.S. Thesis, Civil Engineering Department, Federal
680 University of Alagoas, Maceio
681 22. Cavalcante MAA, Marques SPC, Pindera MJ (2007) Parametric
682 formulation of the finite-volume theory for functionally graded
683 materials. Part I: analysis. ASME J Appl Mech 74(5):935–945
684 23. Cavalcante MAA, Marques SPC, Pindera MJ (2007) Parametric
685 formulation of the finite-volume theory for functionally graded
686 materials. Part II: numerical results. ASME J Appl Mech
687 74(5):946–957
688 24. Gao X, Song Y, Sun Z (2009) Quadrilateral subcell based finite
689 volume micromechanics theory for multiscale analysis of elastic
690 periodic materials. ASME J Appl Mech 76:011013-1–011013-7
691

- 692 25. Ferziger JH, Peric M (1996) Computational methods for fluid
693 dynamics. Springer, New York 709
- 694 26. Prakash C, Patankar SV (1985) A control volume-based finite element
695 method for solving the Navier-Stokes equations using equal-order
696 velocity-pressure interpolation. Numer Heat Transfer 8:259–280 710
- 697 27. Baliga BR, Patankar SV (1988) Elliptic systems: finite element I.
698 In: Minkowycz WJ, Sparrow EM, Schneider GE, Plether RH
699 (eds) Handbook of numerical heat transfer. Wiley, New York 711
- 700 28. Swaminathan CR, Voller VR, Patankar SV (1993) A streamline
701 upwind control volume finite element method for modeling fluid
702 flow and heat transfer problems. Finite Elem Anal Des 13:169–184 712
- 703 29. Li C, Zou Z, Duan Z (2000) Multiple isoparametric finite element
704 method for nonhomogeneous media. Mech Res Commun
705 27(2):137–142 713
- 706 30. Kim JH, Paulino GH (2002) Isoparametric graded finite elements
707 for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. J Appl
708 Mech 69:502–514 714
31. Carslaw HS, Jaeger JC (1959) Conduction of heat in solids.
Clarendon, Oxford 715
32. Ootao Y, Tanigawa Y (2004) Transient thermoelastic of functionally
graded thick strip due to nonuniform heat supply. Compos Struct 63:139–146 716
33. Ching HK, Yen SC (2006) Meshless local Petrov–Galerkin
analysis of 2D functionally graded strips under nonuniformly
convective heat supply. Compos Struct 73:381–393 717
34. Zienkiewicz OC, Taylor RL (1989) The finite element method:
volume 1 basic formulation and linear problems, 4th edition.
McGraw-Hill, NY 718
35. Vessakosol P, Charoensuk J (2010) Numerical analysis of heat
transfer and flow field around cross-flow heat exchanger tube
with fouling. Appl Therm Eng 30:1170–1178 719
- 720
721
722
723



ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายภาสกร เวสสะโกศล เกิดเมื่อวันที่ 12 ธันวาคม 2511 ที่จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ สำเร็จ การศึกษาระดับปริญญาตรีหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะ วิศวกรรมศาสตร์ จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2533 ต่อมาสำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาโทหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรม เครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปี การศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาเอกหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขา วิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2547



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้