พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันถ่วงเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด

ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH NONDIFFERENTIABLE WEIGHT FUNCTION AT SOME POINTS

ปิยพงศ์ สุจารกิตติกุล

วิชุตา พิศเพ็ง

สุธิยา คามีศักดิ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2550

ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH NONDIFFERENTIABLE WEIGHT FUNCTION AT SOME POINTS

PIYAPONG SUJARAKITTIKUL

WICHUTA PISPENG

SUTISA KAMEESAK

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FUCULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LARKRABANG

ACADEMIC YEAR 2007

หัวข้อปัญหาพิเศษ	พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันถ่วงเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH NONDIFFERENTIABLE WEIGHT FUNCTION AT SOME POINTS
ชื่อนักศึกษา	นายปิยพงศ์ สุจารกิตติกุล 47050021 นางสาววิชุตา พิศเพ็ง 47050030 นางสาวสุธิษา คามีศักดิ์ 47050038
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์พรชัย ชัยสนิท อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.พรรณทิพย์ ภัทรอินทากร ประธานกรรมการ	
รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ กรรมการ	
อาจารย์พรชัย ชัยสนิท กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

(รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

แด่ สถาบันอันเป็นที่รัก

ปิยพงศ์

ขออุทิศให้กับสถาบัน ผู้เป็นกำลังใจมาโดยตลอด

วิชุตา

ระลึกสถาบันไว้ในความทรงจำตลอดไป

สุธิบา

หัวข้อปัญหาพิเศษ	พหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันถ่วงเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด
ชื่อนักศึกษา	นายปิยพงศ์ สุจารกิตติกุล 47050021
	นางสาววิชุตา พิศเพ็ง 47050030
	นางสาวสุธิษา คามีศักดิ์ 47050038
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2550
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์พรชัย ชัยสนิท
	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด สำหรับแต่ละลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจะทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ทำการหารูปแบบการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขชนิดรูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ และการหารูปแบบการประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยที่สุด

Title	ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH NONDIFFERENTIABLE WEIGHT FUNCTION AT SOME POINTS
Students	Mr.Piyapong Sujarakittikul 47050021
	Ms.Wichuta Pispeng 47050030
	Ms.Sutisa Kameesak 47050038
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Program	Applied Mathematics
Academic Year	2007
Advisor	Mr.Pornchai Chaisanit
	Ms.Thurdkwun Changpuek

ABSTRACT

The purpose of this special problem is to study some for orthogonal polynomials with nondifferentiable weight function at some points. Six sequences of orthogonal polynomials on the interval [0,1] with respect to the six weight function at any points. The orthogonal polynomials of degree 1 to 7 are constructed for each sequence of orthogonal polynomials. The numerical integration formulas, Gauss-Quadrature formula type, are formulated. There are two application in our constructed orthogonal polynomials; finding numerical values of define integrals; and interpolating functions by least-squares approximation.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องพหุนามเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันถ่วงเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุดสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข อ.พรชัย ชัยสนิท และ อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบ ความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์และอื่น ๆ

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ(ต่อ)

ภาพที่ หน้า

สารบัญภาพ(ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากเป็นลำดับอนันต์ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots,$ ซึ่งแต่ละ $p_n(x)$ มีระดับขั้น n สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

โดยในปัญหาพิเศษนี้จะคำนวณหาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วง (weight functions) หกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด(nondiifferentible function at $p_0(x) = 1$ some point) โดยเริ่มต้นที่ โดยจะทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากถึงอันดับที่ 7 เมื่อได้พหุนามเชิงตั้งฉาก (orthogonal polynomials) แล้ว จะคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข เพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต และนำพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้ทั้งหมดนี้นำไปใช้ประมาณค่าในช่วงของฟังก์ชันต่างๆ แบบกำลังสองน้อยสุด

ตาราง 1.1 ฟังก์ชันถ่วง ที่สำคัญ

ฟังก์ชันถ่วง $w(x)$	ช่วง	พหุนาม
1	[-1,1]	Legendre
e^{-x}	$[0,\infty)$	Laguerre
$x^{\alpha}e^{-x}$	$(0,\infty)$	Associated Laguerre
$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	[-1,1]	Chebyshev
e^{-x^2}	$(-\infty,\infty)$	Hermite
$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	[-1,1]	Gegenbauer
$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	[-1,1]	Jacobi

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด

1.2.2 เพื่อหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.2.3 เพื่อนำไปคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต

1.2.4 เพื่อนำไปใช้ประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันต่างๆ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.3.1 ศึกษาลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง[0,1]ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด

$$w_1(x) = \begin{cases} 1-2x, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2-2x, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+2 & , \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_4(x) = \begin{cases} 2x^2 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x & , \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_5(x) = \begin{cases} 2x^2 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+2 & , \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_6(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2-2x, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

1.3.2 หาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.3.3 นำไปคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต

1.3.4 นำไปใช้ประมาณค่าในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันต่างๆ

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1.4.1 ค้นคว้าเอกสาร ทฤษฎีบทงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.4.2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับพหุนามเชิงตั้งฉากเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย

1.4.3 ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.4.4 ทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ

1.4.5 ทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุด

1.4.6 สรุปผลและเขียนรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง[0,1]ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

1.5.2 ได้รูปแบบเชิงตัวเลขที่ดี สำหรับการหาค่าปริพันธ์แบบจำกัดเขต

1.5.3 ได้พหุนามเชิงตั้งฉากที่ใช้ในการประมาณค่าที่ดี

บทที่ 2
นิยาม ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชันถ่วง

นิยาม 2.1.1 ฟังก์ชันถ่วงเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์เมื่อมีการหาปริพันธ์ เพื่อที่จะให้บางส่วนมีค่าถ่วงต่างจากส่วนอื่น ค่าขอบเขตจะเป็นจำนวนจริงหรือเป็นอนันต์ก็ได้ แต่ต้องไม่เป็นศูนย์ระหว่างช่วงการหาปริพันธ์ และต้องได้ค่าบวก ฟังก์ชันถ่วงสามารถเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องหรือฟังก์ชันต่อเนื่องได้

2.2 พหุนามเชิงตั้งฉาก

นิยาม 2.2.1 ให้ $p_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง k เรียก $p_k(x)$ ว่าเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้า $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$ เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆ ที่ $m \le k-1$

นิยาม 2.2.2 ให้ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x), ...$ เป็นลำดับของพหุนามเรียกลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้าทุกๆ พหุนาม $p_i(x), i = 0,1,...,k,...$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง ($w(x)$ มีค่าเป็นบวกในช่วงเปิด (a,b))

ทฤษฎีบท 2.2.1 พหุนาม $p_k(x)$ ที่ทำให้ $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$ สำหรับทุก ๆ พหุนาม $q_m(x)$ ที่ $m \le k-1$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น(ยกเว้นพหุนามที่เป็นผลคูณของ $p_k(x)$ กับค่าคงที่ใดๆ[1]

2.3 รูปแบบของนิวตัน–โค้ต (Newton–Cotes formula)

กำหนด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดอยู่ในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ ต้องการหาจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ เพื่อใช้หาค่าประมาณของ

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \qquad (2.3.1)$$

เรียกรูปแบบที่ (2.3.1) ว่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน--โค้ต $w(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight value) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.3.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตจาก (2.3.1) ว่า รูปแบบ นิวตัน–โค้ตชนิดปิด (Newton–Cotes closed formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้ว เรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตนี้ว่า รูปแบบ นิวตัน–โค้ตชนิดเปิด (Newton–Cotes open formula)

ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดต่าง ๆ กันในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ และฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้วจะมีจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ ที่ทำให้

$$\int_a^b w(x)f(x)de = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k)$$

สำหรับ $f(x)$ เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ [1]

2.4 รูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula)

รูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ เป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f)$$

เมื่อ เรียกว่า $w(x)$ ฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) ซึ่งเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight value) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ทฤษฎีบท 2.4.1 กำหนดให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ สมมติว่าสามารถหาค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ได้และการหาค่าปริพันธ์

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \tag{2.4.1}$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $n-1$ แล้วรูปแบบ (2.4.1) จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $2n-1$ [1]

ทฤษฎีบท 2.4.2 ถ้ารูปแบบ (2.4.1) ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนเลยสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เป็น พหุนามที่มีกำลังไม่เกิน แล้วจุด $2n-1$ $x_1, x_2, ..., x_n$ จะเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ [1]

ทฤษฎีบท 2.4.3 ค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ในรูปแบบที่ (2.4.1) เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด [1]

2.5 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation)

สมมติให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าแน่นอนในช่วงเปิด (a,b) และต้องการหาพหุนาม $p(x)$ ที่มีกำลังไม่เกิน k มาเป็นฟังก์ชันเพื่อใช้หาค่าแทน $f(x)$ โดยให้ค่า $\int_a^b [f(x)-p(x)]^2 w(x)dx$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงของพหุนามเชิงตั้งฉากตามช่วงปิด $[a,b]$

ถ้า $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)$ เป็นลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $y = d_0p_0(x) + d_1p_1(x) + d_2p_2(x) + ... + d_kp_k(x)$ โดยค่า $d_0, d_1, d_2, ..., d_k$ จะเป็นเซตของจำนวนจริงเพียงเซตเดียวเท่านั้นเนื่องจาก $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)$ เป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\int_a^b [f(x)-p(x)]^2 w(x) = \int_a^b [f(x)-d_0p_0(x)-d_1p_1(x)-...-d_kp_k(x)]^2 w(x)dx$$

สิ่งที่ต้องการคือหา $d_0, d_1, d_2, ..., d_k$ ที่ทำให้ค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์น้อยที่สุด

กำหนดให้ $g(d_0, d_1, d_2, ..., d_k) = \int_a^b [f(x)-p(x)]^2 w(x)dx$ ดังนั้น จะต้องหา $d_0, d_1, d_2, ..., d_k$ ที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน g จากแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปรจะต้องหาค่า $d_0, d_1, d_2, ..., d_k$ ที่ทำให้ $\frac{\partial g}{\partial d_0} = \frac{\partial g}{\partial d_1} = ... = \frac{\partial g}{\partial d_k} = 0$ แต่

$$\frac{\partial g}{\partial d_i} = \frac{\partial}{\partial d_i}\int_a^b [f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)]^2 w(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i}\Big[[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)]^2 w(x)\Big]dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i}\begin{bmatrix} w(x) - d_i[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)]^2 + \\ [f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)]^2 \dfrac{\partial}{\partial d_i} w(x) \end{bmatrix} dx$$

$$= \int_a^b w(x) - 2[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_k(x)](-p_i(x))dx$$

$$= -2\int_a^b w(x)[f(x)p_i(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - \ldots - d_k p_1(x) p_i(x) - \ldots -$$

$$d_i p_i(x) p_i(x) - d_k p_k(x) p_i(x)]dx$$

$$= -2\left[\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx - d_0\int_a^b w(x)p_0(x)p_i(x)dx - d_1\int_a^b w(x)p_i(x)p_i(x)dx - \ldots - d_i\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx - \ldots - d_k\int_a^b w(x)p_k(x)p_i(x)dx\right]$$

$$= 2\left[\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx - \ldots - d_i\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx\right]$$

แต่ต้องการ $\dfrac{\partial g}{\partial d_i} = 0$ สำหรับทุกๆ i

$$\therefore \int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx = d_i\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx = 0$$

$$\therefore d_i = \frac{\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx}{d_i\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx}$$

นั่นคือถ้าจะให้ g มีค่าน้อยสุด d_i จะต้องมีค่าดังข้างต้นสำหรับทุกๆ ค่าของ $i = 0,1,2,\ldots,k$

2.6 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

A.Carrido (2005) [2] ได้นำฟังก์ชันถ่วงของ Freud ซึ่งใช้ในพหุนามเชิงตั้งฉาก โดยฟังก์ชันถ่วงคือ $w(x)=e^{-x^4}$ และเรียกพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ว่า Freud–type orthogonal polynomials

Alex Kasman (1996) [3] ได้แสดงถึงพหุนามเชิงตั้งฉากในการหาปริพันธ์แบบต่อเนื่องในกรณีเชิงเส้นคู่ $c=\sum_{i=1}^{m}\delta_{\lambda i}\circ\sum_{j=0}^{\mu i}\alpha_{ij}\delta_z^j, \delta_\lambda$ เป็นฟังก์ชันเดลตา $z=\lambda$ เป็นค่าคงที่, $\lambda\in C, a_z$ เป็นตัวดำเนินการผลต่าง∂/∂_z และ $\alpha_{ij}\in C$ ซึ่ง $a_{i\mu_i}\neq 0$

Alicia Cachafeiro (2000) [4] ได้ศึกษาถึงพีชคณิต และการวิเคราะห์เกี่ยวกับพหุนามเชิง ตั้งฉาก $(p,q)_s=\sum_{k=0}^{N}\int_R \lambda_k p^{(k)}(x)q^{(k)}(x)d\mu_k(x)$ ซึ่ง $(\mu_k)_{k=0}^N$ และ $N=1$ p และ q เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากที่เป็น จำนวนจริง

A.Iserles (1988) [5] ได้แสดงว่าพหุนามเชิงตั้งฉากมีการประยุกต์ของคณิตศาสตร์และสมบัติของศูนย์โดยเฉพาะส่วนของระบบจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบท ได้ขยายการสำรวจตำแหน่งของศูนย์ในการตัดการกระจายในพหุนามเชิงตั้งฉาก

D.V.Chudnovsky (1999) [6] ใช้วิธีการวิเคราะห์ความกว้างของการสั่นสะเทือนของคลื่นวิทยุ (PWM) ปัญหานี้ได้นำสูตรมาใช้สองสูตร สูตรแรกเป็นพีชคณิตเป็นผลรวมของกำลังคี่ กำหนดให้เซต $\{x_i\}(i=1,...,n)$ สมการคือ $\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m-1}=s_{2m-1,m-1,...,n}$ สูตรที่สองเป็นผลรวมโคไซน์ กำหนดให้ $\{\alpha_i\}(i=1,...,n)$ สมการคือ $\sum_{i=1}^{n}\cos(2m-1)\alpha_i=c_{2m-1}, m=1,...,n$ สูตรนี้เป็นฐานหลักของวิธีการวิเคราะห์ความกว้างของการสั่นสะเทือนของคลื่นวิทยุ ได้นำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการประมาณค่าทางเทคนิค และวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้ผลรวดเร็ว

Evgeniy D. Golovin (2003) [7] ได้ใช้วิธีใหม่สำหรับลักษณะเฉพาะของวงจรไฟฟ้า ซึ่งเป็นตัวแปรเสริมในอนุกรม โดยใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์เทย์เลอร์ เช่นเดียวกันกับรูปแบบของความเที่ยงเพิ่ม ซึ่งพิจารณาจากการลดทอนของจำนวนของพจน์ในอนุกรม โดยใช้การแปรผันจากดีกรีในฐานของพหุนามเชิงตั้งฉากของเลคเกอร์, เลอช็องดร์ และรูปแบบที่หนึ่งของเชบีเชฟ และการเคลื่อนที่ของพหุนาม

Gradimir V. Milovanovic (2005) [8] ได้ทำการวิจัยพหุนามเชิงตั้งฉากบนครึ่งวงกลม ซึ่งเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนเชิงซ้อน $[f,g]_m=\int_0^\pi f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})w_m(e^{i\theta})d\theta$ $m=1,2,...,r$ บนฟังก์ชันถ่วง $w_m(x), m=1,2,...,r$ ได้แสดงพหุนามเชิงตั้งฉากบนครึ่งวงกลมในรูปแบบ II ซึ่งเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากของจำนวนจริง ตามฟังก์ชันถ่วง $w_m(x), m=1,2,...,r$

Ira M. Gessel (1988) [9] ได้นำพหุนามของ Laguerre และ Charlier มาศึกษาในการวิจัยโดยมีลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากคือ $p_0, p_1(x), \ldots$ และรูปในการหาปริพันธ์คือ $\int \prod_{i=1}^{r} p_{n_i}(x) d\mu$

J. Arveu$'$ (2001) [10] พหุนามเชิงตั้งฉาก $\{p_n(x) : n = 0,1,2,\ldots\}$ สอดคล้องกับ เมเซอร์ μ บนเส้นจำนวนจริง p_n ซึ่ง n มีดีกรีสอดคล้องกับเงื่อนไข $\int_R p_n(x)x^j d\mu(x) = 0, j = 0,1,\ldots,n-1$

นิยามการคูณตัวประกอบพหุนามในกรณีที่พหุนามเชิงตั้งฉากไม่ต่อเนื่องเมเซอร์ μ

$\mu = \sum_{k=0}^{n} p_k \delta_{x_k}, p_k > 0, x_k \in R$ และ $N \in n \cup \{+\infty\}$

Jose$'$ L . (1991) [11] ได้หาค่าประมาณในพหุนามเชิงตั้งฉากของแอร์มีต ภายใต้ลิมิตของพหุนามเชิง ตั้งฉาก $H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$

K. H. Kwon (2001) [12] อธิบายถึงสมการอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งมีรูปแบบ

$L[u] := A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_x + E(x,y)u_y = \lambda_n u \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

ว่าเป็นพหุนามเชิง ตั้งฉากที่เป็นฟังก์ชันเฉพาะ ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนตัวแปรของพีชคณิตเชิงซ้อน ซึ่งประกอบด้วย

$$(x^2 + y + 1)u_{xx} + 2x(y+1)u_{xy} + (y+1)^2 u_{yy} + g(xu_x + yu_y) = n(n-1+g)u$$

และ $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - y)\ u_{yy} + g\{(x-1)u_x + (y-\gamma)u_y\} = n(n-1+g)u$

Manuel Alfaro (1991) [14] ได้ศึกษาพหุนามเชิงตั้งฉาก แบบเชิงเส้นคู่ $B_s^{(N)}(f,g) = F(c)AG(c)^T + \langle u, f^{(N)} g^{(n)} \rangle$ โดยที่ u เป็นคล้ายกับนิยามฟังก์ชันนัลเชิงเส้นบนปริภูมิเชิงเส้นของพหุนามจำนวนจริง c เป็นจำนวนจริง N เป็นจำนวนเต็มบวก A เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นจำนวนจริง $N \times N$ ซึ่งแต่ละเมตริกซ์ย่อยเป็นเมตริกซ์สามัญและ $F(c) = \left(f(c), f'(c), \ldots, f^{(N-1)}(c)\right)$ $G(c) = \left(g(c), g'(c), \ldots, g^{(N-1)}(c)\right)$

Phimpraphai Phutthiwat (2548) [15] ได้คำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนสองลำดับ บนช่วง[0,1] โดยมีฟังก์ชันถ่วงคือ $\sqrt{1+x^2}$ และ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ซึ่งได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ไปใช้ในการคำนวณหา

รูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต และหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

V.F.Aleksin (1996) [17] ได้ศึกษาถึงพหุนามเชิงตั้งฉากเพื่อนำไปใช้ในวิชาที่เกี่ยวกับแรงของการเคลื่อนตัวของของเหลว เนื่องจากการวิเคราะห์นั้นซับซ้อนจึงได้มีการนำการประมาณค่ามาใช้ในการคำนวณ รูปแบบของฟังก์ชันคือ $G_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty w^\alpha(x) x^n dx$

Yunier Bello Cruz (2005) [18] ได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากของ Legendre มาศึกษา โดยมี พหุนามเชิงตั้งฉาก Legendre (Legendre orthogonal polynomial) $\int_{-1}^{1} L_n(x)x^k dx = 0$ โดยที่ ς เป็นจำนวนเชิงซ้อนและโดยที่ $n \in N$ ให้เป็นพหุนามโมนิคที่มีระดับขั้น n
ซึ่ง $(n+1)L_n(z) = \left((z-\varsigma)P_n(z)\right)' - P_n(z) + (z-\varsigma)P_n'(z)P_n$ เรียก n ว่า
พหุนามเชิงขั้วLegendre(Legend repolar polynomial)

Sukpak Pansomboon (2550) ได้คำนวณพหุนามเชิงตั้งฉากหกลำดับ [0,1] โดยมีฟังก์ชันถ่วง (weight functions) ห้าฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันแบบขั้นบันได (step function) คือ

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \quad w_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases} \quad w_3(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}, 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_4(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \quad w_5(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1, \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases} \quad w_6(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1, \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}, \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

ซึ่งได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ไปใช้ในการคำนวณหารูปแบบของการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของปริพันธ์จำกัดเขต และหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการปัญหาพิเศษ

3.1 ฟังก์ชันถ่วง

การปัญหาพิเศษนี้ได้ศึกษาถึงพหุนามเชิงตั้งฉากจำนวนหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด

$$w_1(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2-2x & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} 1-2x & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+2 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_4(x) = \begin{cases} 2x^2 & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_5(x) = \begin{cases} 2x^2 & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2-4x+2 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$$w_6(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2-2x & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

3.2 การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วง

การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วงทั้งหกฟังก์ชันได้ใช้ ทฤษฎีบท 2.2.1 คำนวณโดยสูตร

$$c_k = \int_0^1 w(x)x^k dx$$

3.3 การหาสัมประสิทธิ์

นำค่าปริพันธ์ที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันถ่วง มาทำการหาสัมประสิทธิ์ โดยใช้ขั้นตอนในการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 2.1.1

$$\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\
a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\
a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \\
&\vdots \\
a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-1} &= -c_{2k-1}
\end{aligned}$$

มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB โดยค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{13}$ เขียนแทนด้วย a0,a1,…,a13 ตามลำดับ ดังตัวอย่าง

[a0]=solve('a0=-7.0/12.0')

ผลที่ได้คือ a0 = -0.58333333333333333333333333333333

[a0,a1]=solve('a0+(7.0/12.0)*a1=-5.0/12.0','(7.0/12.0)*a0+(5.0/12.0)*a1=-31.0/96.0')

ผลที่ได้คือ a0 = 0.19318181818181818181818181818177

a1 = -1.0454545454545454545454545454545

[a0,a1,a2]=solve('a0+(7.0/12.0)*a1+(5.0/12.0)*a2=31.0/96.0','(7.0/12.0)*a0+(5.0/12.0)*a1+(31.0/96.0)*a2=-21.0/80.0','(5.0/12.0)*a0+(31.0/96.0)*a1+(21.0/80.0)*a2=-127.0/576.0')

ผลที่ได้คือ a0 = -0.058735380116959064327485380117067

a1 = 0.66345029239766081871345029239826

a2 = -1.5628654970760233918128654970766

3.4 การหารากของพหุนามเชิงตั้งฉาก

นำสัมประสิทธิ์ที่ได้มาทำการหารากของพหุนามเชิงตั้งฉากโดยใช้ ทฤษฎีบท 2.4.2 มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB ดังตัวอย่าง

[x]=solve('x-0.58333333333333333333333333333333=0.0')

ผลที่ได้คือ x = [0.58333333333333333333333333333333]

[x]=solve('x^2-1.0454545454545454545454545454545*x+

0.19318181818181818181818181818177=0.0')

ผลที่ได้คือ x = [0.23977500913661971875372793939125]

[0.80567953631792573579172660606325]

[x]=solve('x^3-1.5628654970760233918128654970766*x^2+

0.66345029239766081871345029239826*x-

0.058735380116959064327485380116707=0.0')

ผลที่ได้คือ x =[0.11969453865649418040359310757348]

[0.54845260110973155491450743175859]

[0.89471835730979765649476495774453]

3.5 การหาค่าถ่วง

นำรากของพหุนามที่ได้จากการคำนวณมาหาค่าถ่วงคำนวณ โดยนำทฤษฎีบท 2.4.3 มาประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB โดยค่า $A_n, n = 1, 2, ..., 7$ เขียนแทนด้วย A1,A2,...,A7 ตามลำดับดังตัวอย่าง

[A1]=solve('A1=1)

ผลที่ได้คือ A1=1

[A1,A2]=solve('A1+A2=1','0.23977500913661971875372793939125*A1+

0.80567953631792573579172660606325*A2=7/12')

ผลที่ได้คือ A1 = 0.39290408947966681828098089749002

A2 = 0.60709591052033318171901910250998

[A1,A2,A3]=solve('A1+A2+A3=1',' 0.11969453865649418040359310757348*A1+

0.54845260110973155491450743175859*A2+

0.89471357309797656494764957744453*A3=7/12','

0.11969453865649418040359310757348^2*A1+

0.548452601109731554914507431758 59^2*A2+

0.894718357309797656494764957744 53^2*A3=5/12')

ผลที่ได้คือ A1 = 0.19719531345342270158960286485235

A2 = 0.45789673476013001242255459434969

A3 = 0.34490795178644728598784254079796

3.6 การหาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง

นำค่าถ่วงที่ได้มาทำการหาค่าปริพันธ์โดยใช้รูปแบบเกาส์–ควอดเครเจอร์ (Gauss–Quadrature formula) จะทำให้ทราบค่าคลาดเคลื่อนซึ่งเกิดขึ้นระหว่างค่าจริงกับค่าที่คำนวณได้

3.7 การหาค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุด

ในการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด ได้ใช้ฟังก์ชันถ่วง นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชันต่างๆ โดยจัดให้อยู่ในรูปของสมการ $y = d_0p_0(x) + d_1p_1(x) + d_2p_2(x) + ... + d_7p_7(x)$ ค่า $d_0, d_1, d_2, ..., d_7$ หาได้จาก

$$d_i = \frac{\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx}{\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx}$$

การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วง ได้แก่

ฟังก์ชันถ่วงที่ 1 และฟังก์ชันถ่วงที่ 4 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, x \in [0,1]$$

ฟังก์ชันถ่วงที่ 2 และฟังก์ชันถ่วงที่ 6 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f_2(x) = \sqrt{x}, x \in [0,1]$$

ฟังก์ชันถ่วงที่ 3 และฟังก์ชันถ่วงที่ 5 นำมาปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) กับฟังก์ชัน

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [0,1]$$

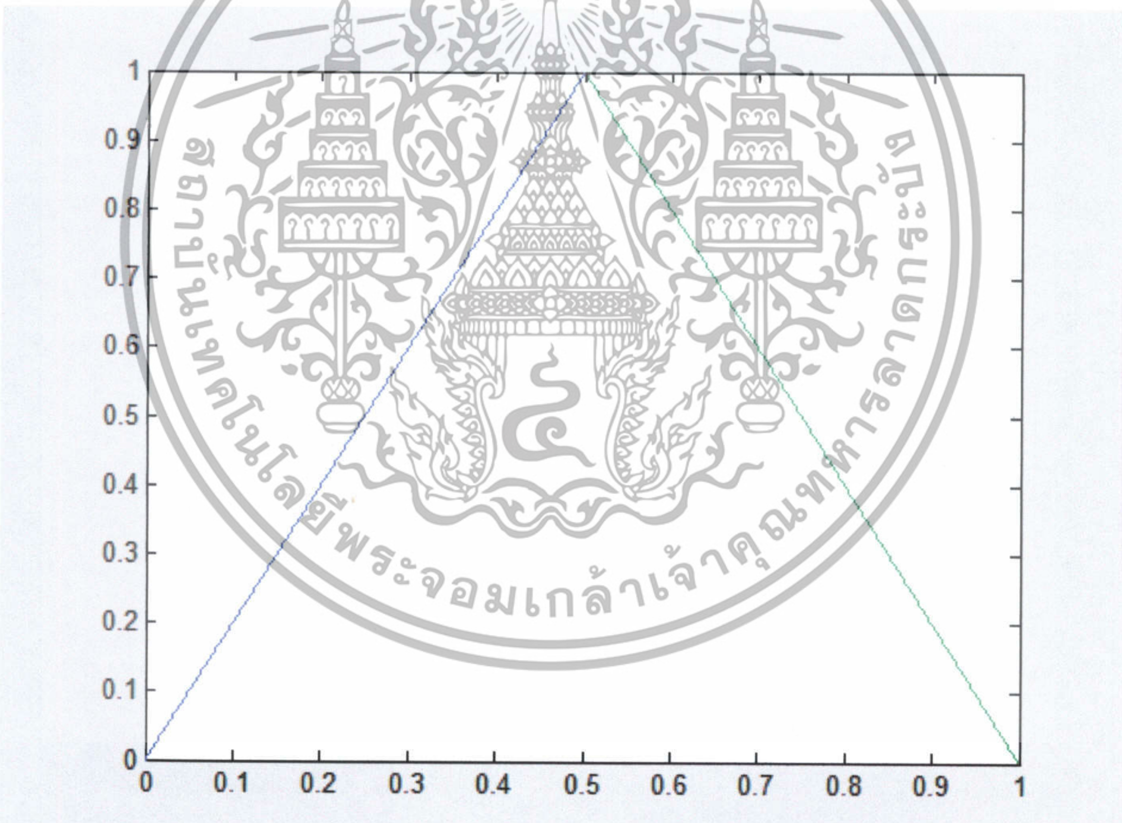
บทที่ 4

ผลงานการดำเนินการปัญหาพิเศษ

การวิจัยนี้ได้ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ บนช่วง [0,1] ตามฟังก์ชันถ่วงหกฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีอนุพันธ์ที่บางจุด โดยคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ถึงพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของลำดับของ พหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ เพื่อทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉาก และทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณในช่วง แบบกำลังสองน้อยสุด ซึ่งได้ผลการวิจัยดังนี้

4.1 ค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก

4.1.1 ฟังก์ชันถ่วงที่ 1



$$w_1(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2-2x & ,\dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k = \int_0^1 w(x) \cdot x^k dx$ โดย k=0,1,2,....,13

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^1(2-2x)dx = 0.25$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2(2-2x)dx = 0.14583333333$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^3(2-2x)dx = 0.093750$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4(2-2x)dx = 0.064583333333$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^5(2-2x)dx = 0.046875$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^6(2-2x)dx = 0.035435267857$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^7(2-2x)dx = 0.027669270833$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^8(2-2x)dx = 0.022178819444$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9(2-2x)dx = 0.0181640625$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{10}(2-2x)dx = 0.015144116951$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{11}(2-2x)dx = 0.012817382813$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{12}(2-2x)dx = 0.010987669557$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{13}(2-2x)dx = 0.0095232282366$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.5$

$p_2(x) = x^2 - x + 0.2083333333$

$\quad = (x - 0.0212864461)(x - 0.9787135539)$

$p_3(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.65x - 0.075$

$\quad = (x - 0.1837722339)(x - 0.4999999984)(x - 0.8162277688)$

$p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 1.3418367355x^2 - 0.3418367351x + 0.0253826531$

$\quad = (x - 0.1245374286)(x - 0.3688850791)(x - 0.6311149208)(x - 0.8754625720)$

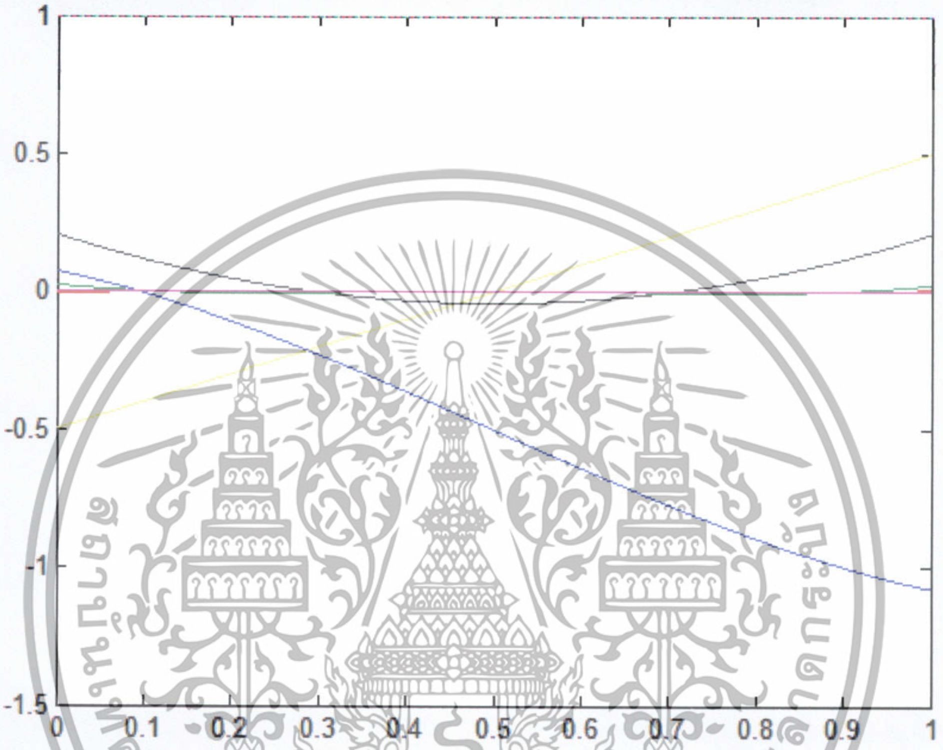
$p_5(x) = x^5 - 2.499999x^4 + 2.2807017140x^3 - 0.9210526040x^2 + 0.1565632760x - 0.0081062025$

$\quad = (x - 0.0892796978)(x - 0.2750398179)(x - 0.5)(x - 0.7249601697)(x - 0.9107202998)$

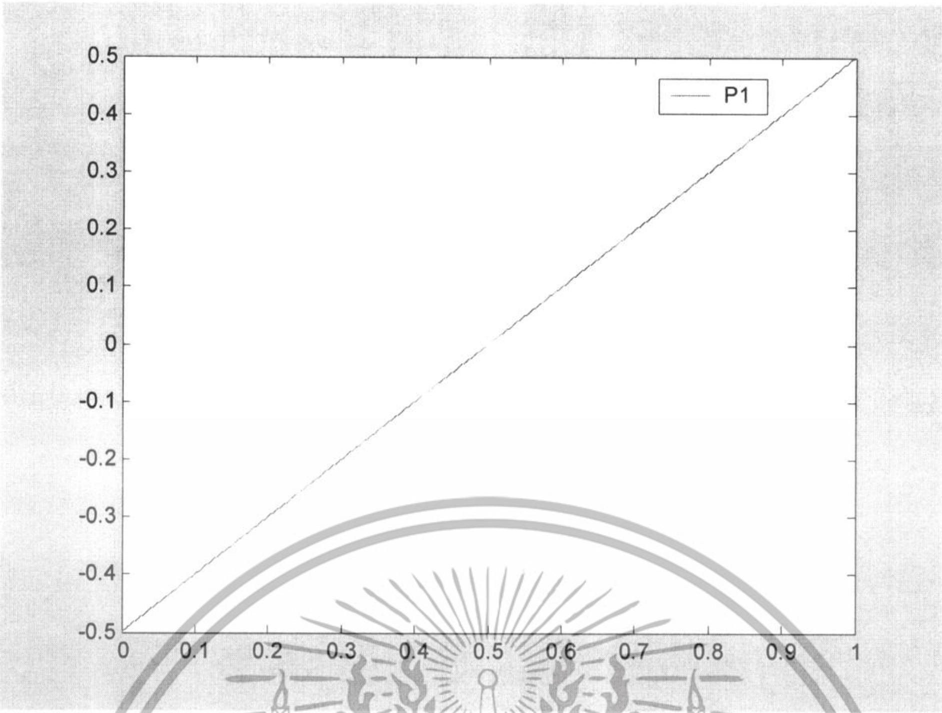
$p_6(x) = x^6 - 3x^5 + 3.4700690383x^4 - 1.9401375203x^3 + 0.5357298945x^2 - 0.0656612115x$
$\quad + 0.00251407$

$\quad = (x - 0.0671308533)(x - 0.2116926142)(x - 0.4028682105)(x - 0.5971319016)$
$\quad (x - 0.7883074575)(x - 0.9328691669)$

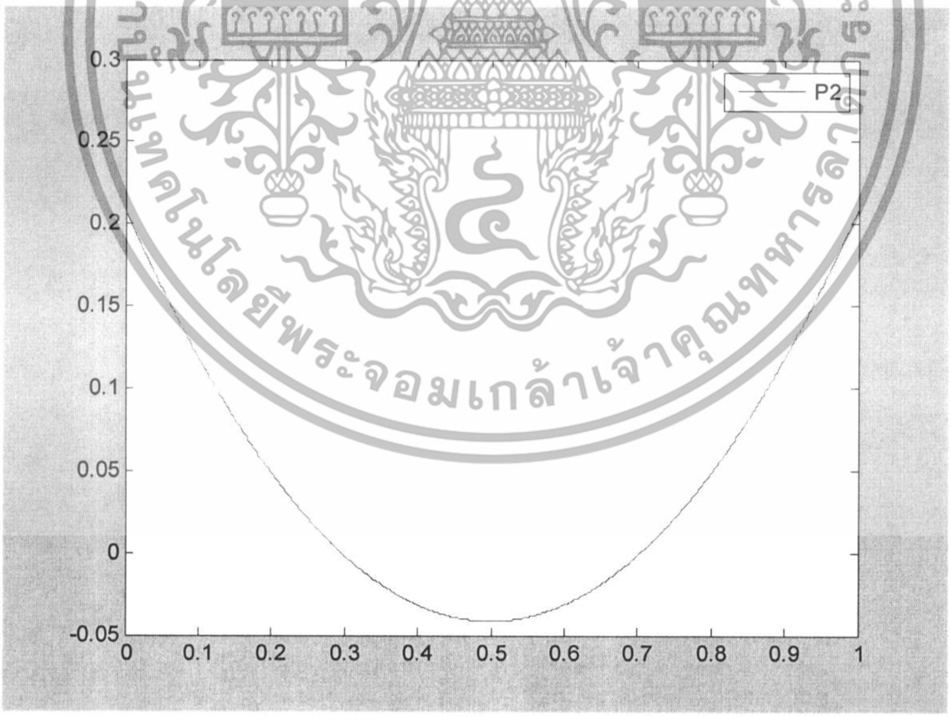
$$p_7(x) = x^7 - 3.5x^6 + 4.9082852769x^5 - 3.5206442204x^4 + 1.3648051665x^3 - 0.2765822823x^2$$
$$+0.0256647547x - 0.0007558338$$
$$= (x - 0.0521931533)(x - 0.1670060263)(x - 0.3257972429)(x - 0.5000037359)$$
$$(x - 0.6742099186)(x - 0.8329985569)(x - 0.9478084796)$$



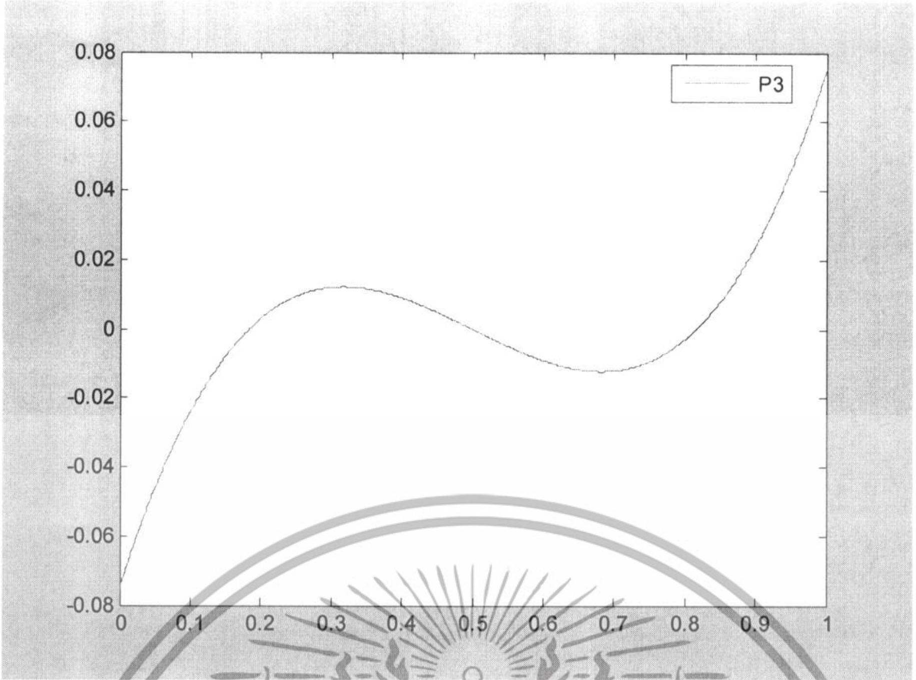
ภาพที่ 4.1 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 1



ภาพที่ 4.1.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

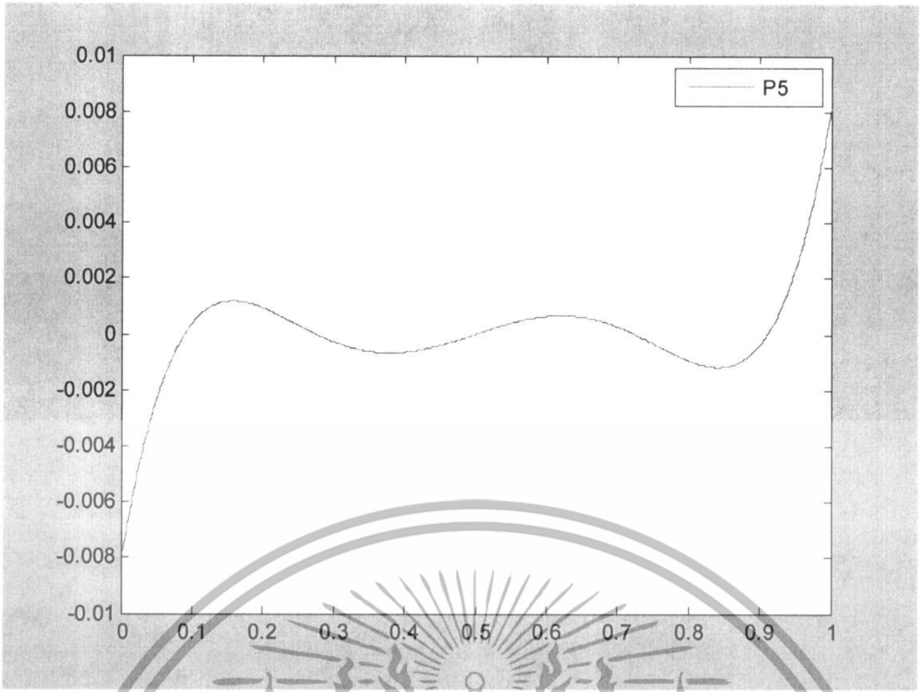


ภาพที่ 4.1.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

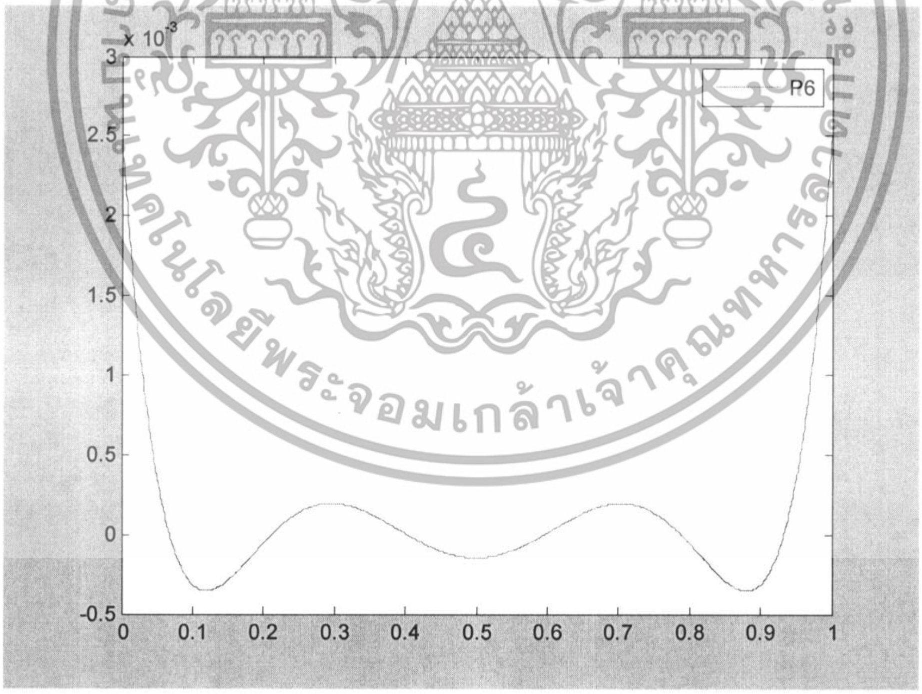


ภาพที่ 4.1.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

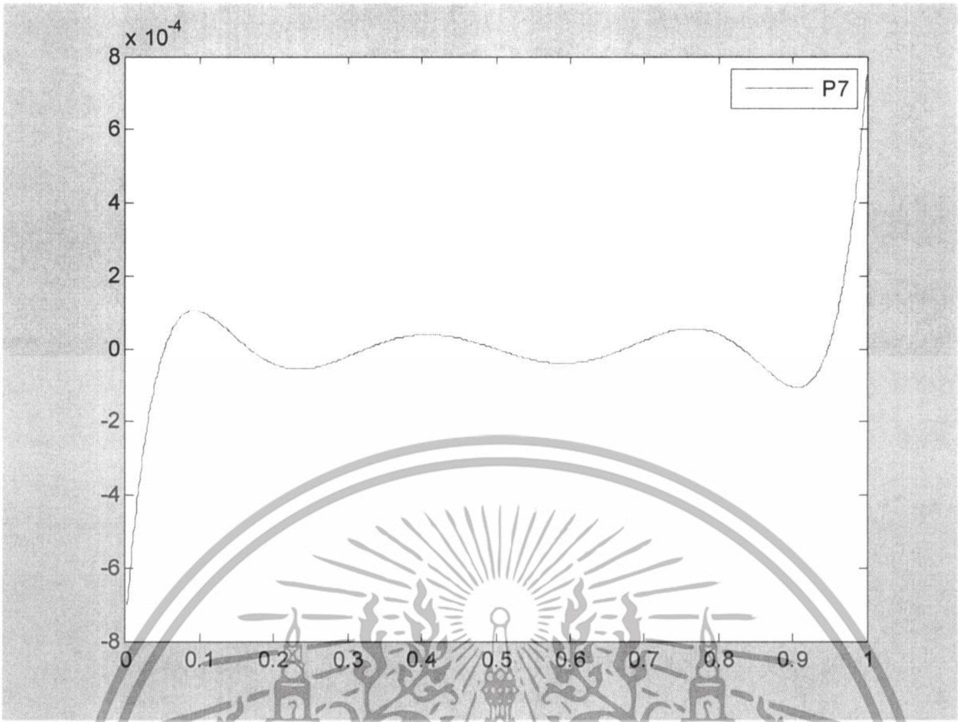
ภาพที่ 4.1.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1



ภาพที่ 4.1.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

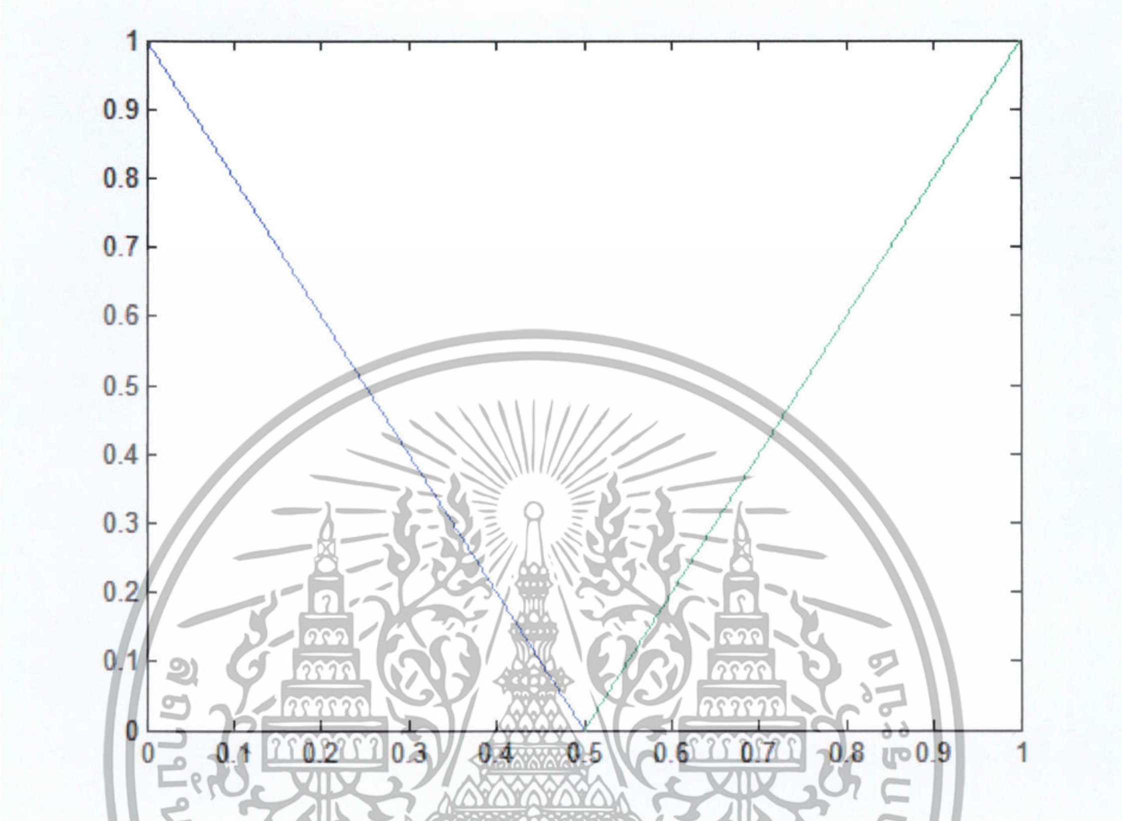


ภาพที่ 4.1.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1



ภาพที่ 4.1.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

4.1.2 ฟังก์ชันถ่วงที่ 2



$$w_2(x)=\begin{cases}1-2x & ,0\le x<\frac{1}{2}\\ 2x-1 & ,\frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร โดย $c_k = \int_0^1 w(x)\cdot x^k dx$ โดย k=0,1,2,...,13

$$c_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^0(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^0(2x-1)dx = 0.5$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^1(2x-1)dx = 0.25$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2(2x-1)dx = 0.18750$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3(2x-1)dx = 0.156250$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4(2x-1)dx = 0.13541666667$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(2x-1)dx = 0.119791666667$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^6(2x-1)dx = 0.11074218750$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^7(2x-1)dx = 0.0097330729167$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^8(2x-1)dx = 0.088932291667$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9(2x-1)dx = 0.08183593750$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{10}(2x-1)dx = 0.07564973958$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{11}(2x-1)dx = 0.070515950521$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{12}(2x-1)dx = 0.065935407366$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{13}(2x-1)dx = 0.061905343192$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - 0.5$$

$$p_2(x) = x^2 - x + 0.125$$

$$= (x - 0.1464466094)(x - 0.8535533905)$$

$$p_3(x) = x^3 - 1.50x^2 + 0.5833333333x - 0.0416666667$$

$$= (x - 0.0919907965)(x - 0.5014400012)(x - 0.9084892118)$$

$$p_4(x) = x^4 - 1.9999999980x^3 + 1.2499999969x^2 - 0.24999999872x + 0.010416666566$$

$$= (x - 0.0559630827)(x - 0.2701495774)(x - 0.7298504211)(x - 0.94403691677)$$

$$p_5(x) = x^5 - 2.4999999601x^4 + 2.1999999179x^3 - 0.799999946x^2 + 0.10624998x - 0.0031249994$$

$$= (x - 0.0403944667)(x - 0.2020691989)(x - 0.4999999789)(x - 0.7979307860)$$

$$(x - 0.9596055296)$$

$$p_6(x) = x^6 - 3x^5 + 3.3750005946x^4 - 1.7500004933x^3 + 0.4125001x^2 - 0.03750001x + 0.0007812$$

$$= (x - 0.0290174263)(x - 0.1464466268)(x - 0.3321447246)(x - 0.6678554365)$$

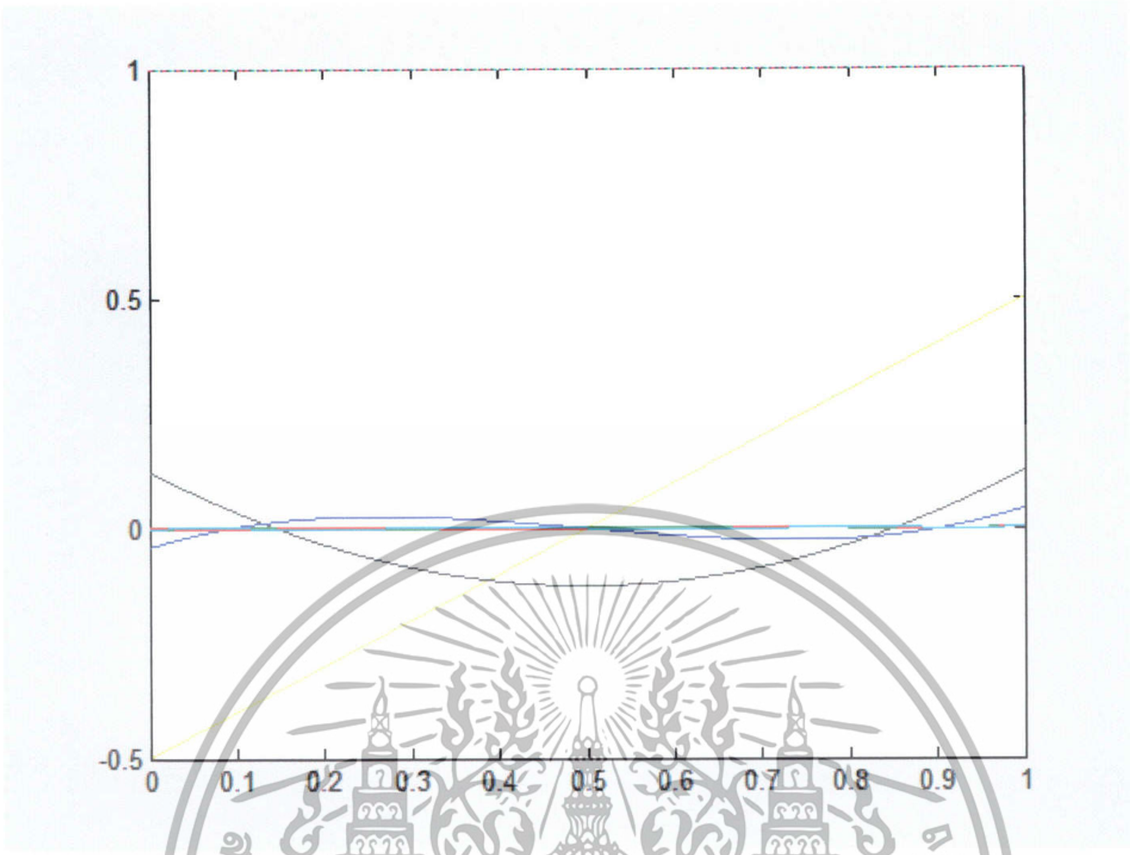
$$(x - 0.8535534508)(x - 0.9709825827)$$

$$p_7(x) = x^7 - 3.5000476729x^6 + 4.8215725707x^5 - 3.3037347805x^4$$

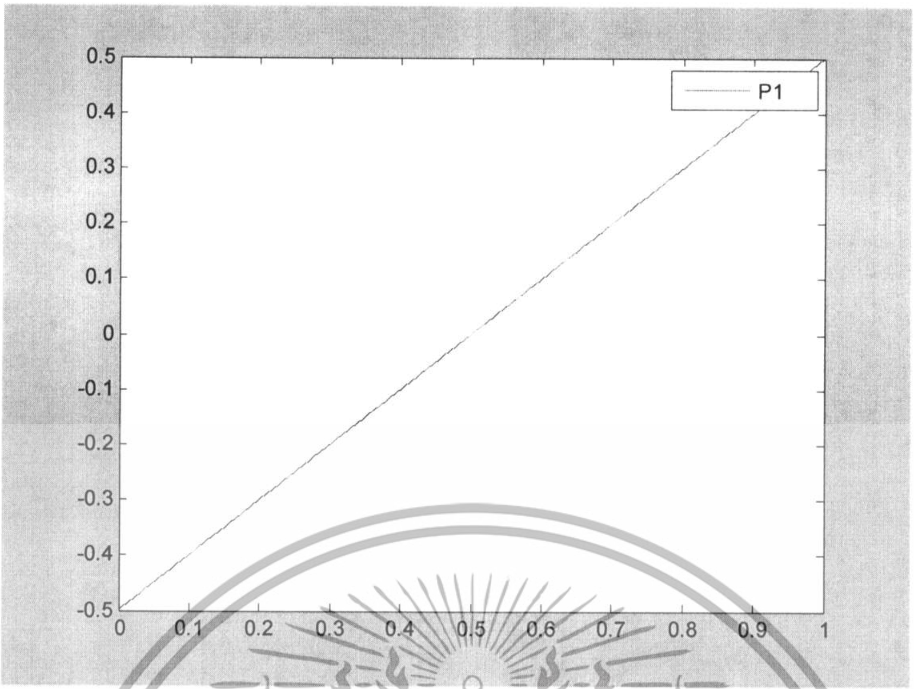
$$+1.1697284491x^3 - 0.2009133094x^2 + 0.0138411775x - 0.0002232545$$

$$= (x - 0.0226615725)(x - 0.1157741384)(x - 0.2696068561)(x - 0.5000208178)$$

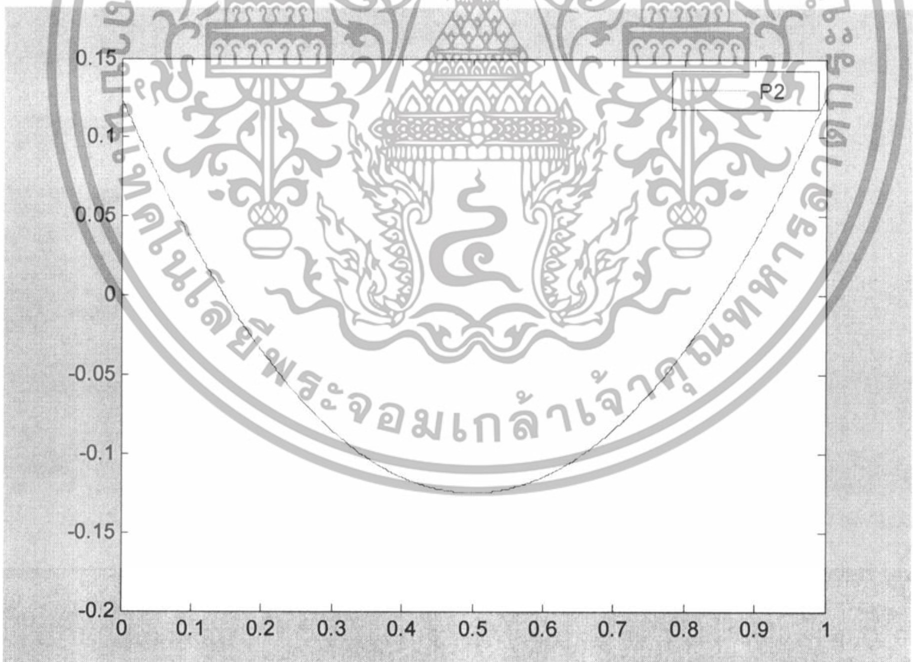
$$(x - 0.7304095924)(x - 0.8842344136)(x - 0.9773402823)$$



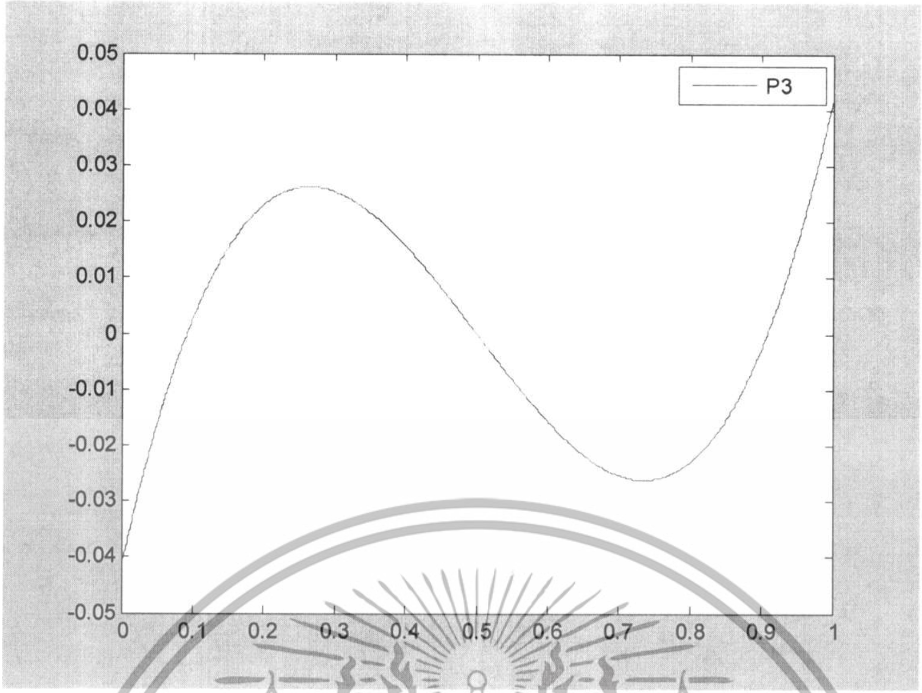
ภาพที่ 4.2 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



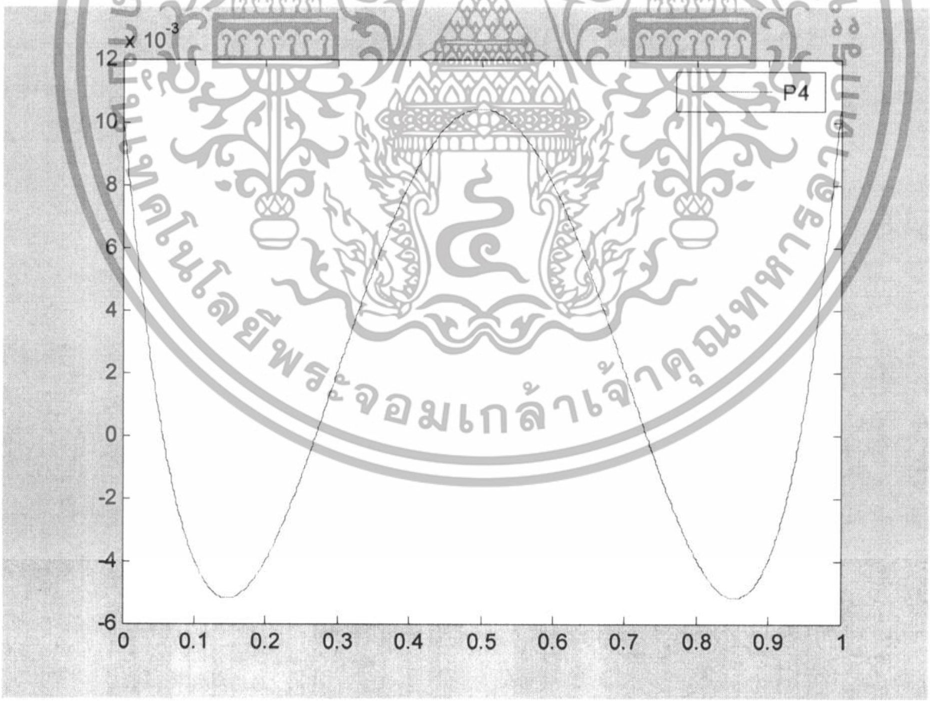
ภาพที่ 4.2.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



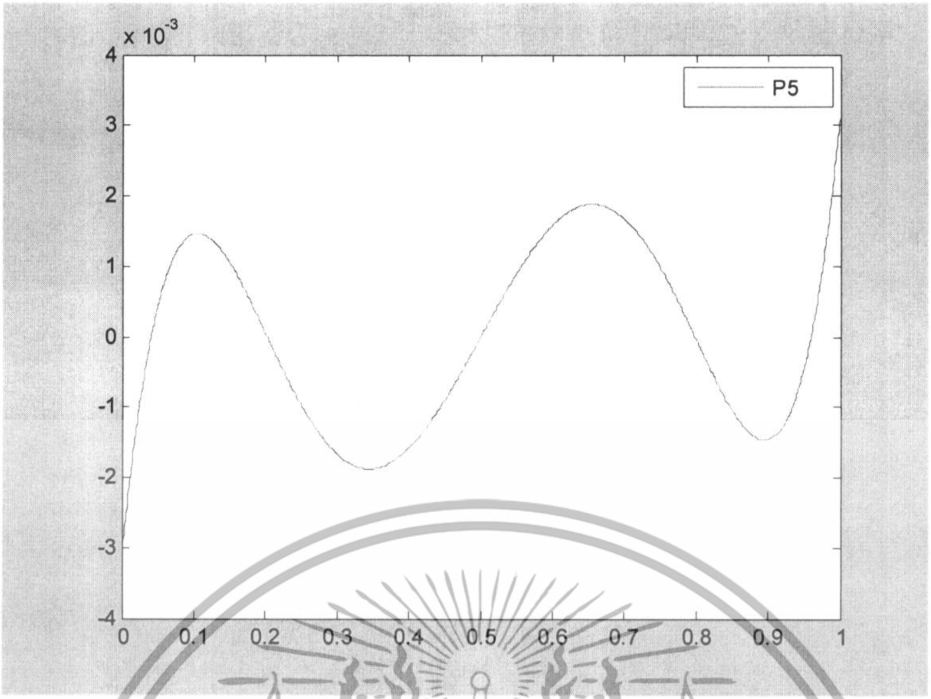
ภาพที่ 4.2.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



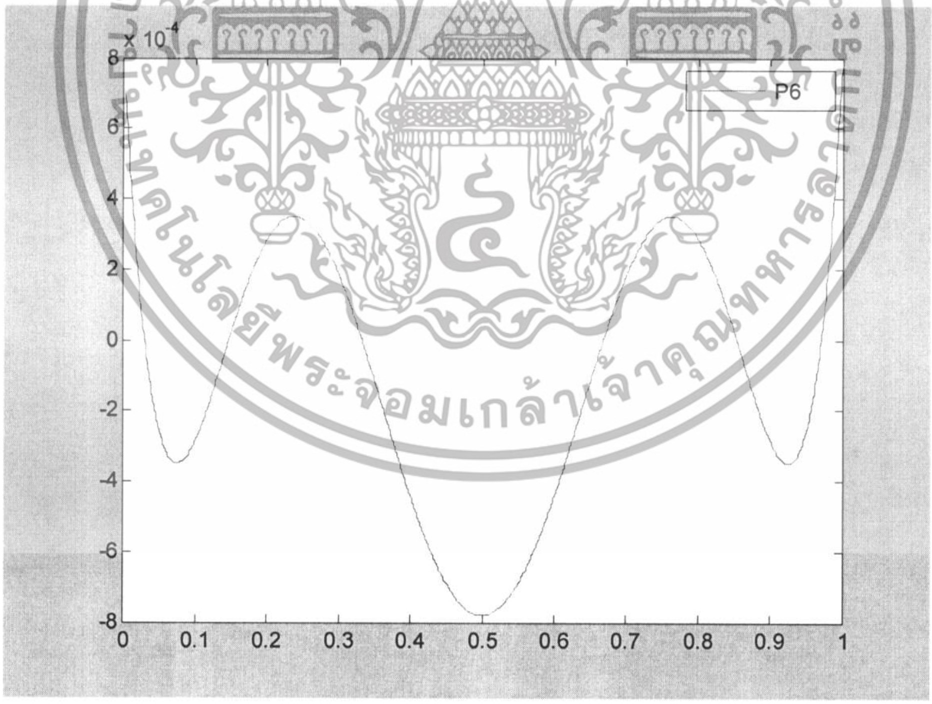
ภาพที่ 4.2.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



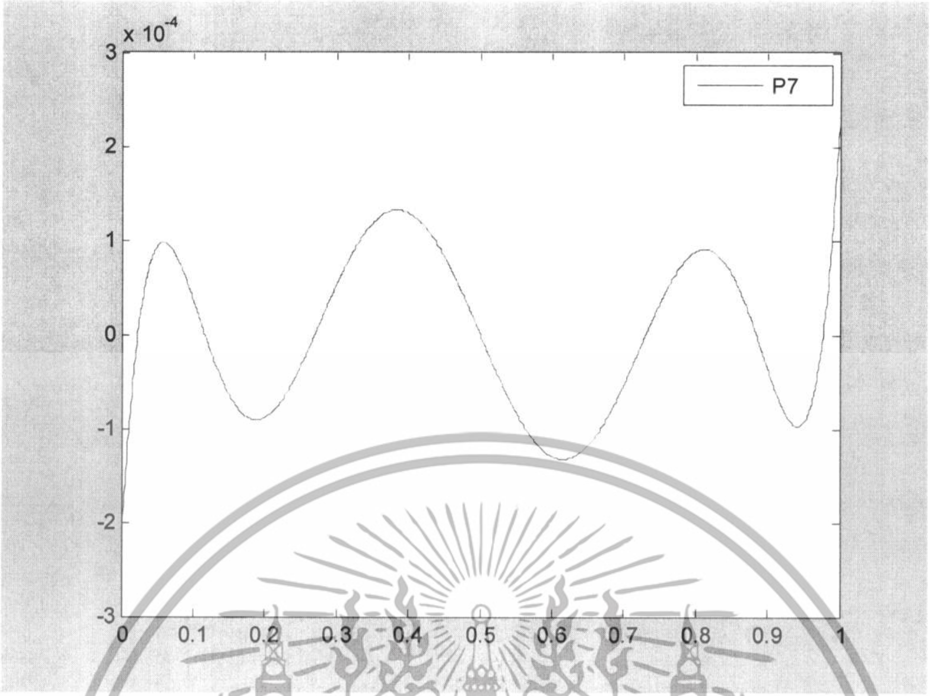
ภาพที่ 4.2.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



ภาพที่ 4.2.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

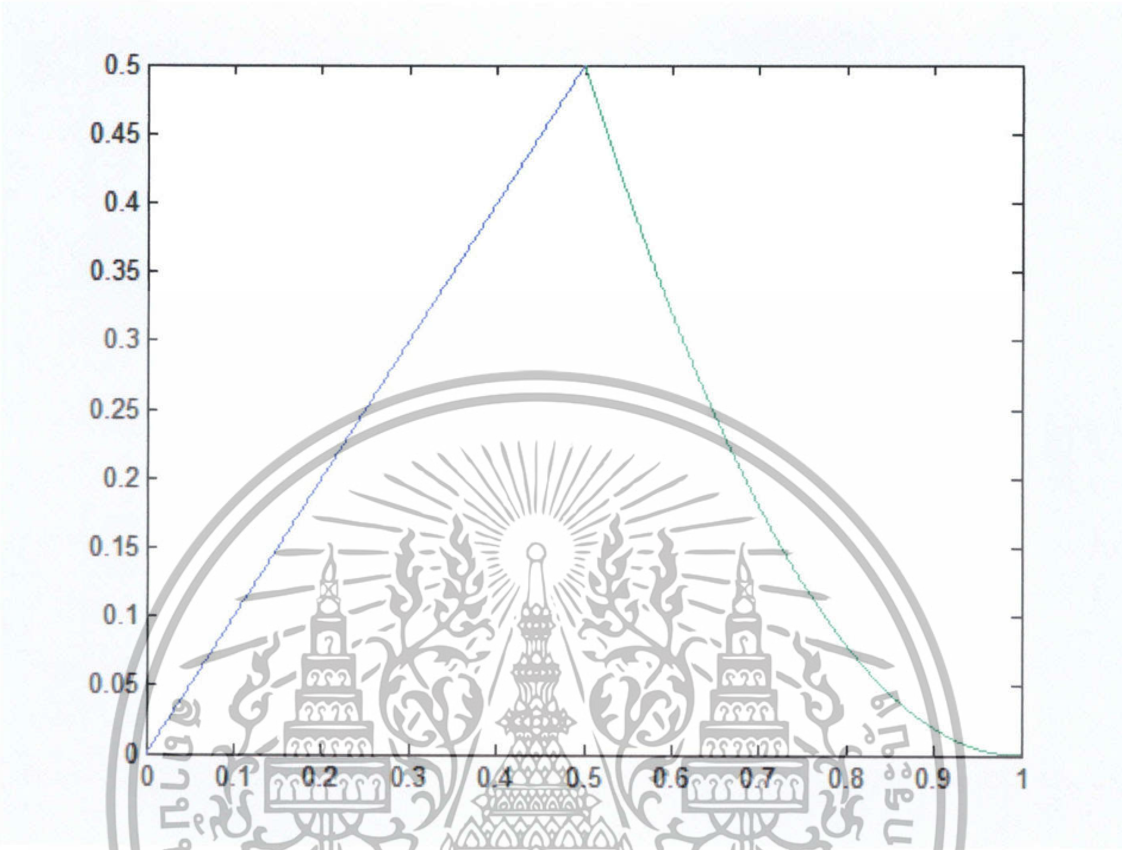


ภาพที่ 4.2.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2



ภาพที่ 4.2.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

4.1.3 ฟังก์ชันถ่วงที่ 3



$$w_3(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 2 & , \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร โดย $c_k = \int_0^1 w(x) \cdot x^k dx$ โดย $k = 0,1,2,...,13$

$$c_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^0 (x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^0 (2x^2 - 4x + 2) dx = 0.20833333333$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1 (x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^1 (2x^2 - 4x + 2) dx = 0.09375$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 (2x^2 - 4x + 2) dx = 0.048958333333$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0281250$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.01733630952$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0113002232$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^6(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.007711743551$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^7(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.005468750$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^8(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.00400587910353$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.00301624644$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{10}(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0023251691342$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{11}(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0018290425394$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{12}(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0014641506767$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{13}(2x^2 - 4x + 2)dx = 0.0011900220598$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.45$

$p_2(x) = x^2 - 0.89999999999x + 0.17000000000$

$\quad = (x - 0.2697224362)(x - 0.6302775637)$

$p_3(x) = x^3 - 1.3809012874x^2 + 0.5516023674 1x - 0.058709262804$

$\quad = (x - 0.1695974355)(x - 0.4619650619)(x - 0.7493387899)$

$p_4(x) = x^4 - 1.86258562x^3 + 1.1625888521x^2 - 0.27562484211x + 0.019063003575$

$\quad (x - 0.1161071861)(x - 0.3438225713)(x - 0.5815057275)(x - 0.8211903710)$

$p_5(x) = x^5 - 2.3542688151x^4 + 2.0203142689x^3 - 0.76708154202x^2$

$\quad +0.12256723602x - 0.0059657937310$

$\quad = (x - 0.0839439851)(x - 0.2584647755)(x - 0.4698081306)$

$\quad (x - 0.6750553005)(x - 0.8669966232)$

$p_6(x) = x^6 - 2.8448818847x^5 + 3.1166822659x^4 - 1.6489993579x^3$

$\quad +0.43070180509x^2 - 0.049928784793x + 0.0018085261795$

$\quad = (x - 0.0635266724)(x - 0.2002450035)(x - 0.3808150106)(x - 0.5599450923)$

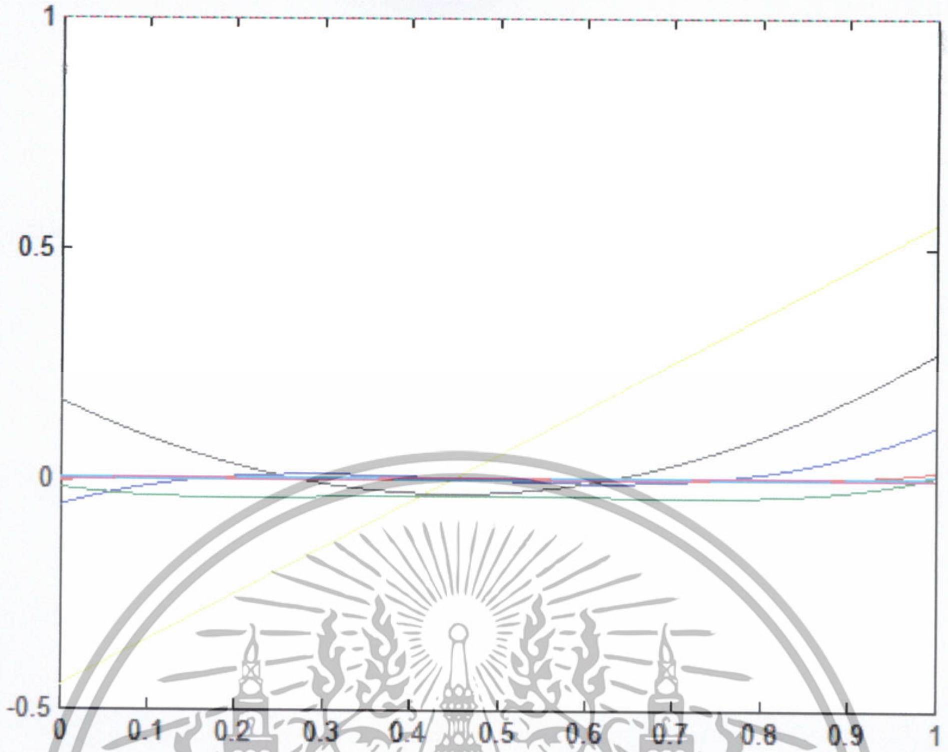
$\quad (x - 0.7429678867)(x - 0.8973822190)$

$p_7(x) = x^7 - 3.3402138266x^6 + 4.4657243052x^5 - 3.0512557635x^4$

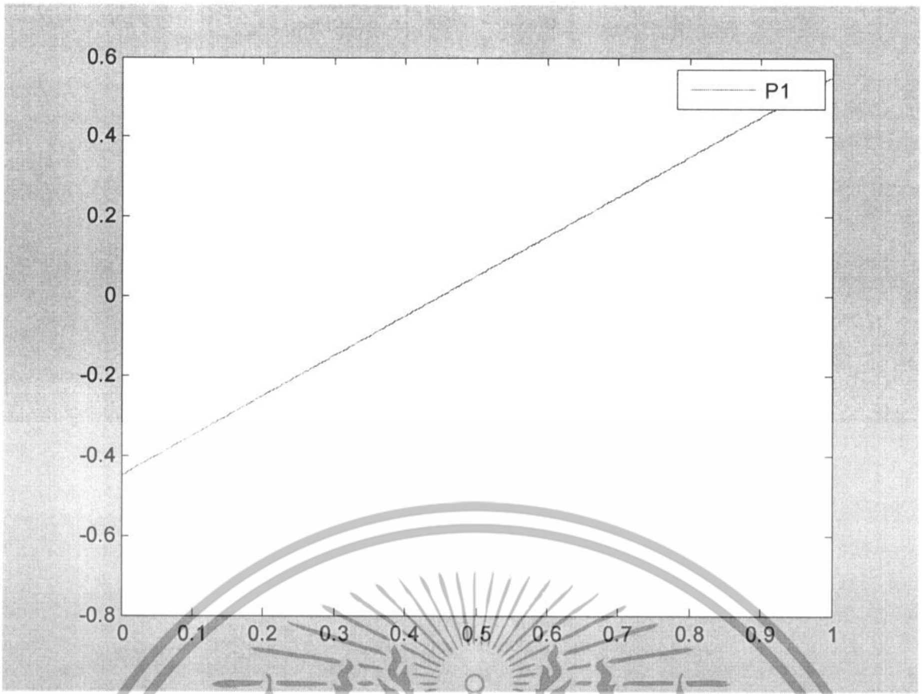
$\quad +1.1260449529x^3 - 0.21715311675x^2 + 0.019171253135x - 0.00053716453885$

$\quad = (x - 0.0496597011)(x - 0.1588512106)(x - 0.3096933761)(x - 0.4750174529)$

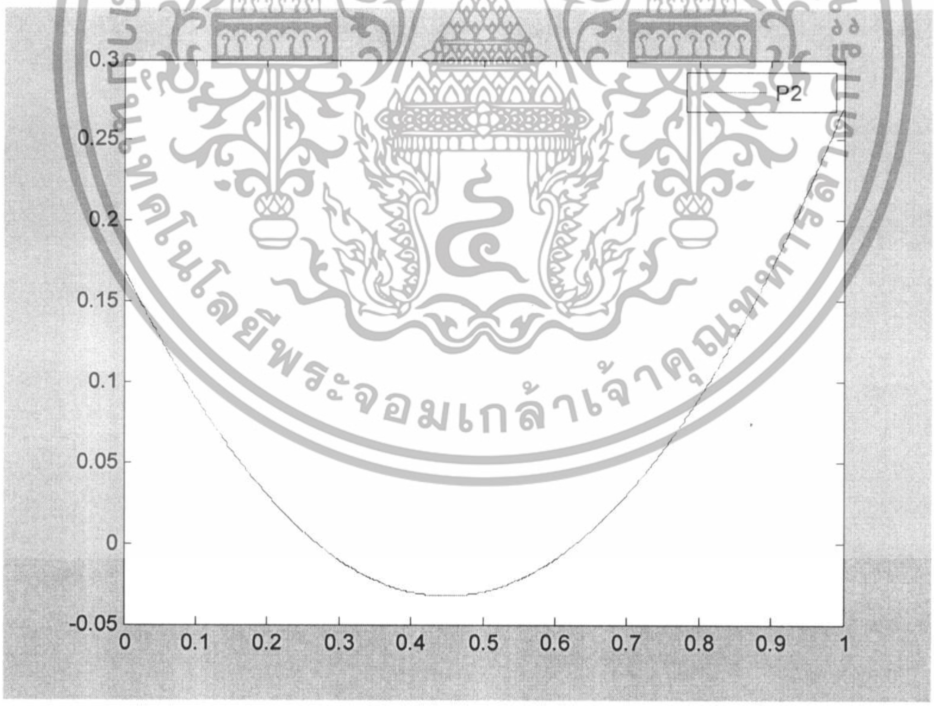
$\quad (x - 0.6356081606)(x - 0.7927903220)(x - 0.9185936030)$



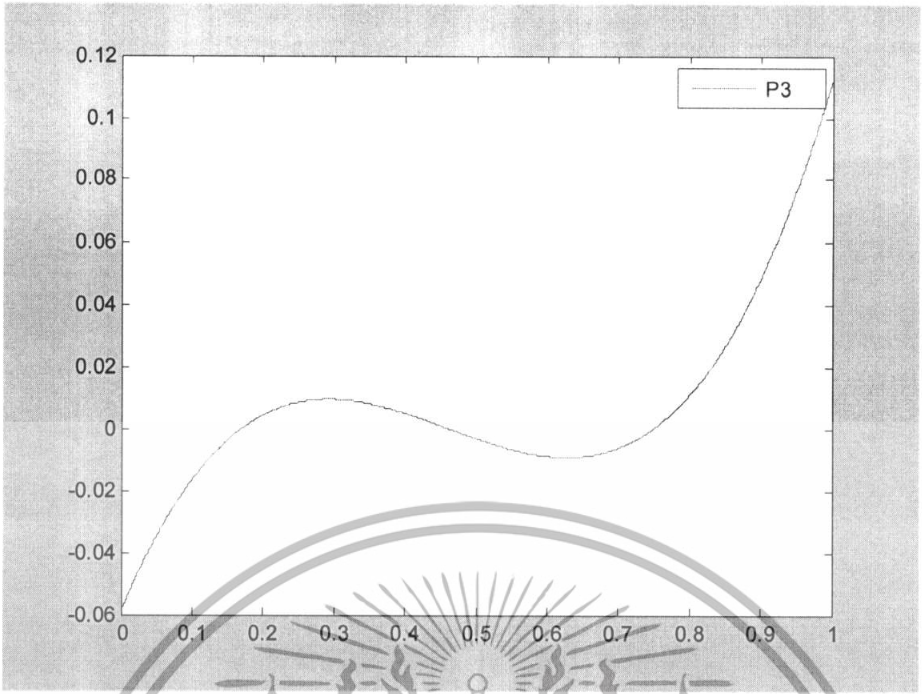
ภาพที่ 4.3 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



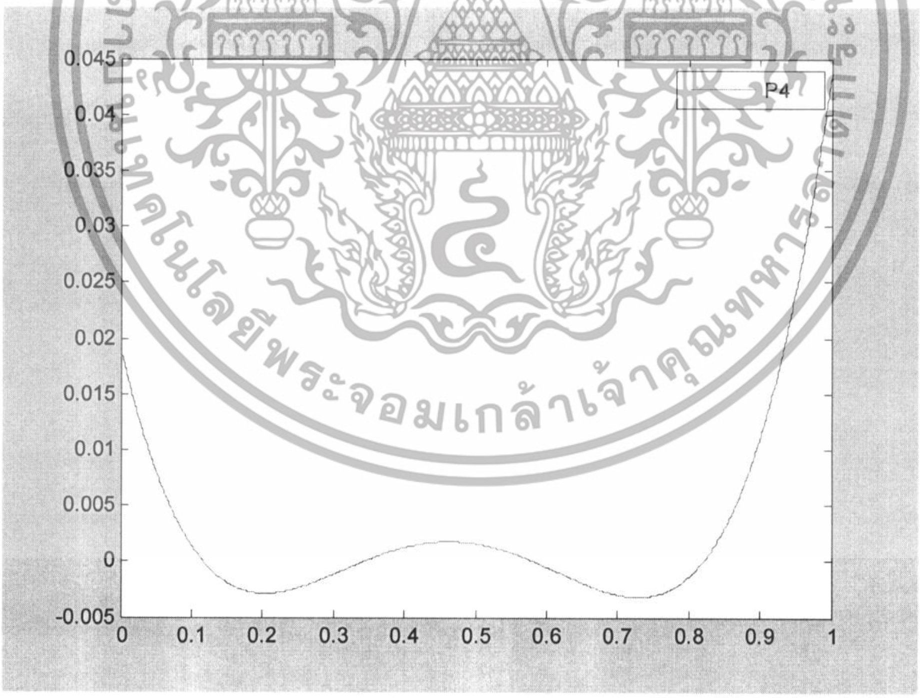
ภาพที่ 4.3.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



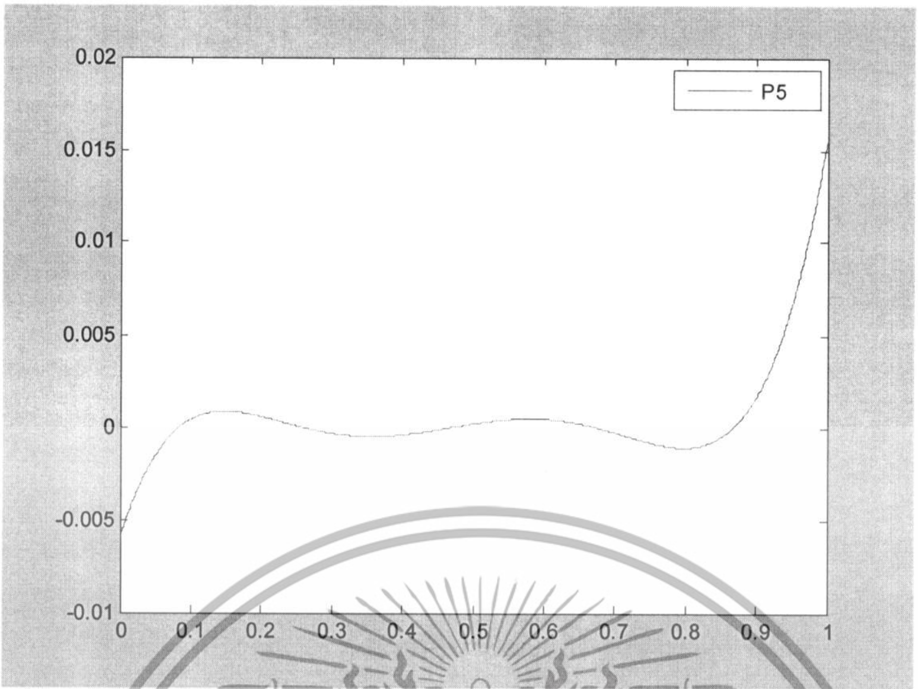
ภาพที่ 4.3.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



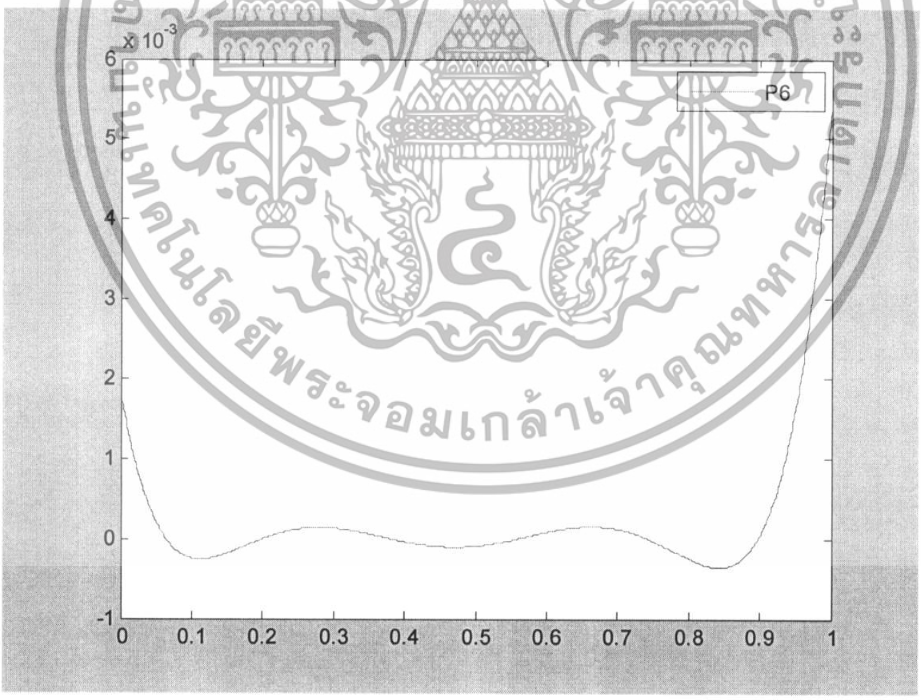
ภาพที่ 4.3.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



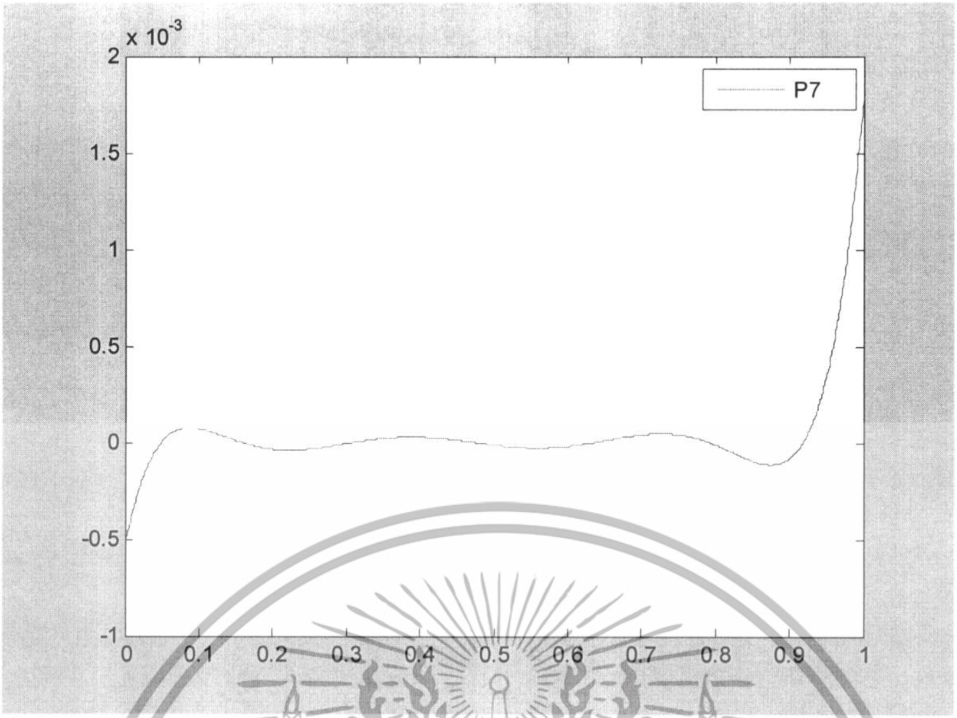
ภาพที่ 4.3.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



ภาพที่ 4.3.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

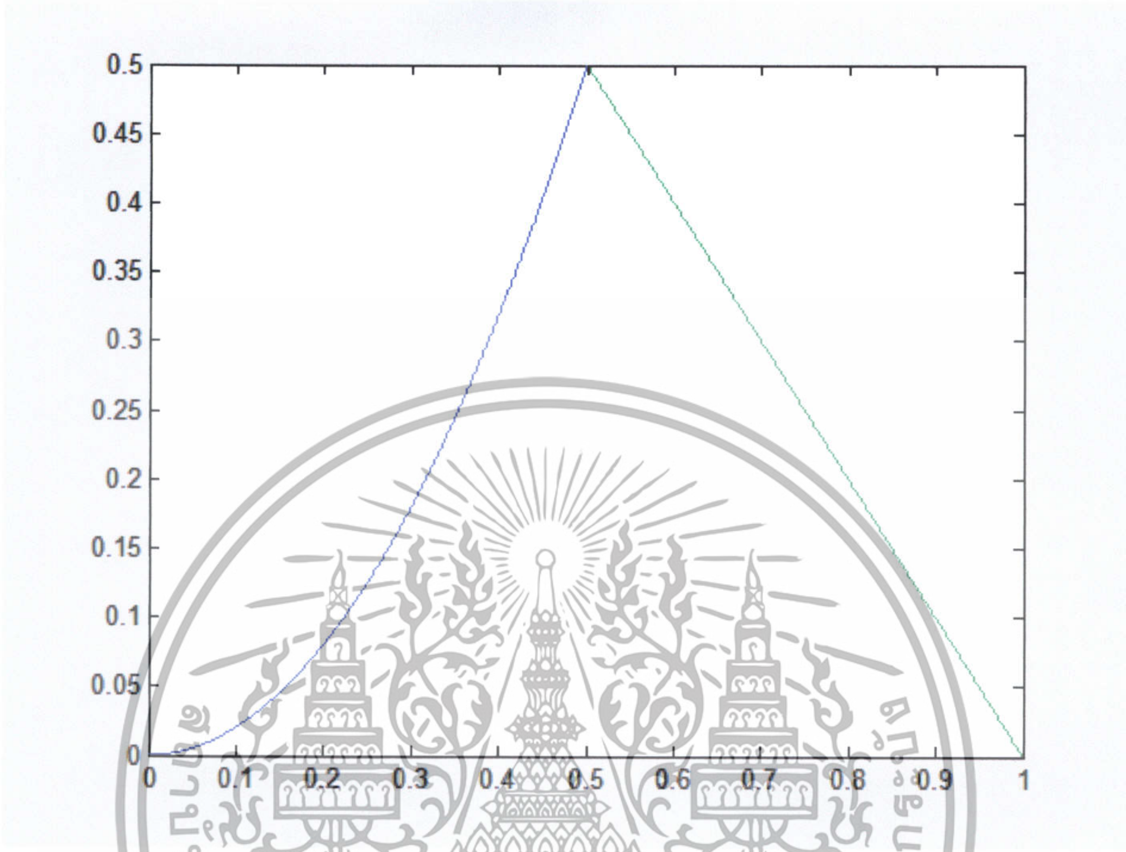


ภาพที่ 4.3.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3



ภาพที่ 4.3.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

4.1.4 ฟังก์ชันถ่วงที่ 4



$$w_4(x) = \begin{cases} 2x^2 & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $c_k = \int_0^1 w(x) \cdot x^k dx$ โดย $k = 0,1,2,...,14$

$$c_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^0(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^0(1-x)dx = 0.20833333333$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^1(1-x)dx = 0.11458333333$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2(1-x)dx = 0.069791666667$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^3(1-x)dx = 0.045833333333$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4(1-x)dx = 0.031919642857$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^5(1-x)dx = 0.023297991071$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^6(1-x)dx = 0.017663380456$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^7(1-x)dx = 0.013812934028$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^8(1-x)dx = 0.011080531881$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^9(1-x)dx = 0.0090783321496$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{10}(1-x)dx = 0.0075704934714$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{11}(1-x)dx = 0.0064080206902$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{12}(1-x)dx = 0.0054935441349$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{13}(1-x)dx = 0.0047614869617$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$$p_0(x)=1$$

$$p_1(x)=x-0.55$$

$$p_2(x)=x^2-1.1x+0.27$$
$$=x(-0.3697224362)(x-0.7302775638)$$

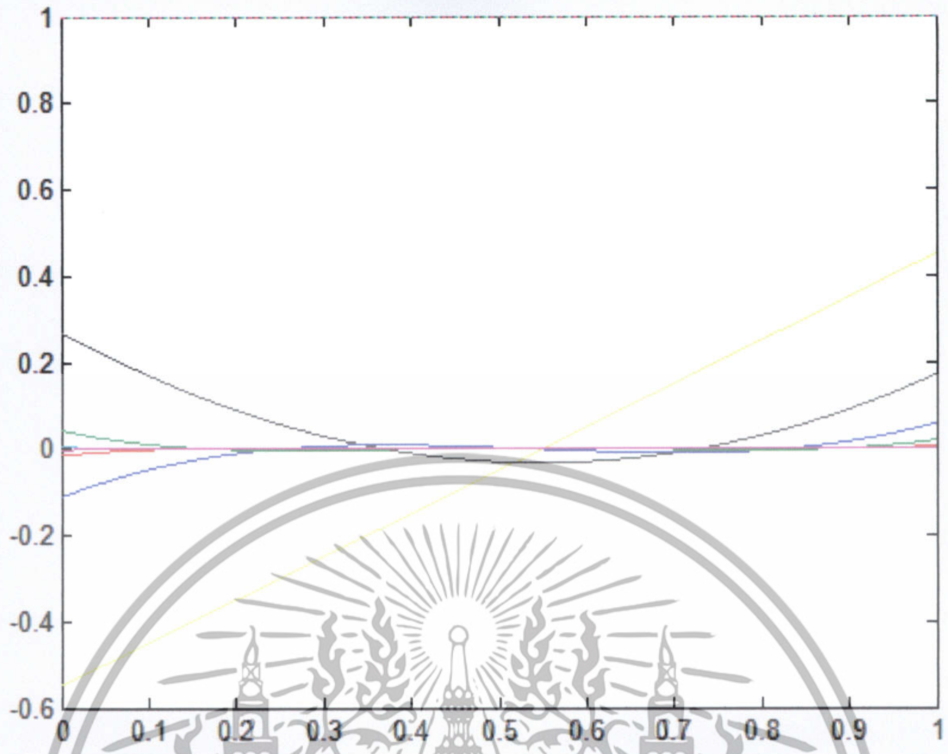
$$p_3(x)=x^3-1.6190987125x^2+0.7897997925x-0.1119918172$$
$$=(x-0.2506612101)(x-0.5380349379(x-0.8304025645)$$

$$p_4(x)=x^4-2.1373741440x^3+1.574711284x^2-0.4616752938x+0.0434011574$$
$$=(x-0.1788096293)(x-0.4184924724)(x-0.6561774289)(x-0.8838928135)$$

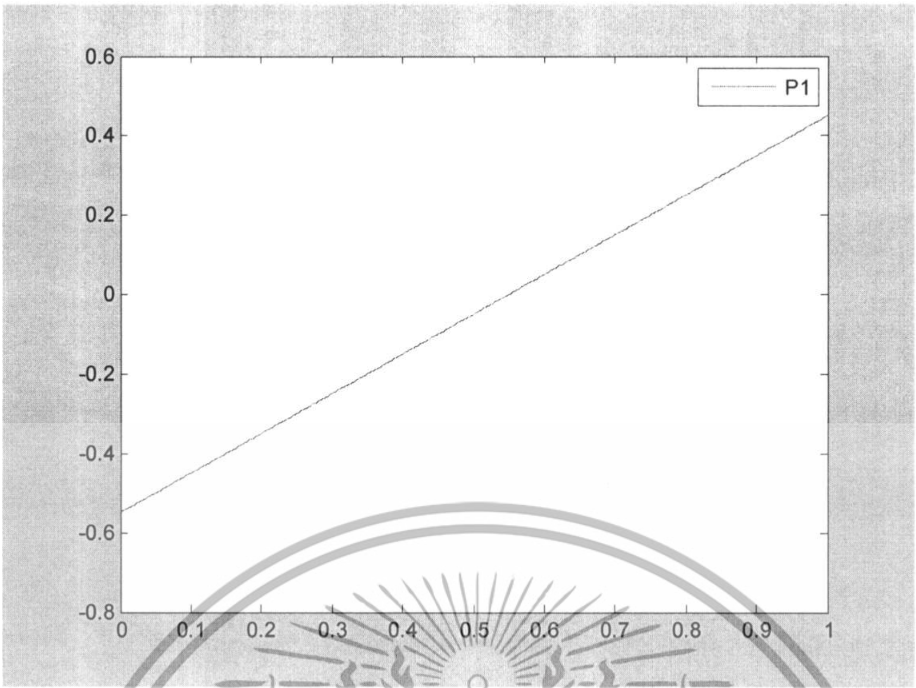
$$p_5(x)=x^5-2.6457311466x^4+2.6032389273x^3-1.168248314x^2+0.23227168x-0.01555652$$
$$=(x-0.1330033704)(x-0.3249446920)(x-0.5301918582)(x-0.7415352173)$$
$$(x-0.9160560887)$$

$$p_6(x)=x^6-3.1551170617x^5+3.8922700626x^4-2.3689081276x^3+0.7349772533x^2$$
$$-0.1067961468x+0.0053825532$$
$$=(x-0.1026176712)(x-0.2570319097)(x-0.4400546927)(x-0.6191847352)$$
$$(x-0.79975481038)(x-0.9364732398)$$

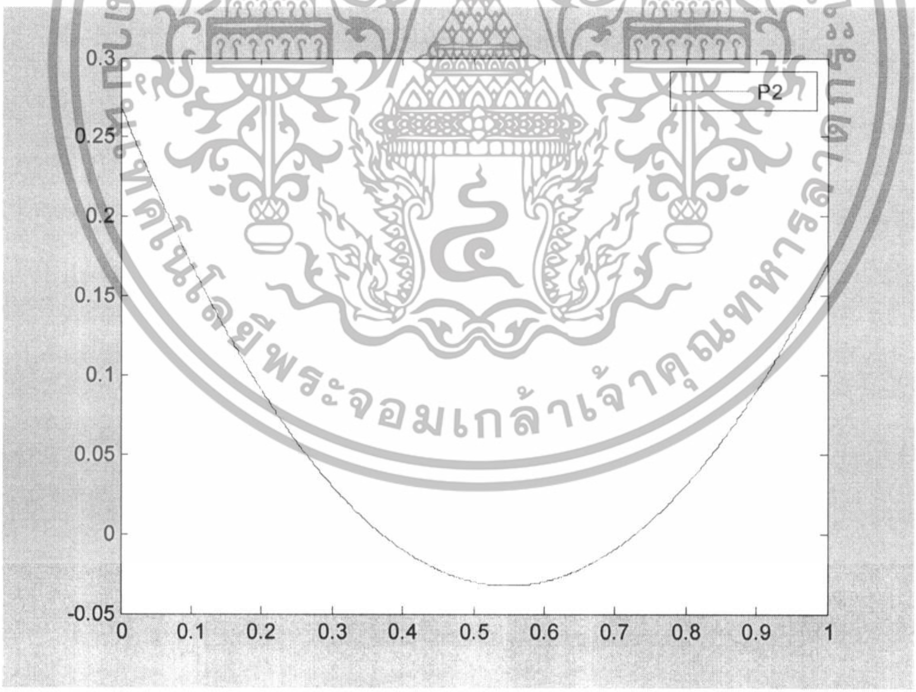
$$p_7(x)=x^7-3.6597913988x^6+5.4244606920x^5-4.1741861760x^4+1.7740080418x^3$$
$$-0.4074898446x^2+0.0453165674x-0.0017807080$$
$$=(x-0.0814078960)(x-0.2072125399)(x-0.3643945555)(x-0.5249837159)$$
$$(x-0.6903059877)(x-0.8411472858)(x-0.9503394180)$$



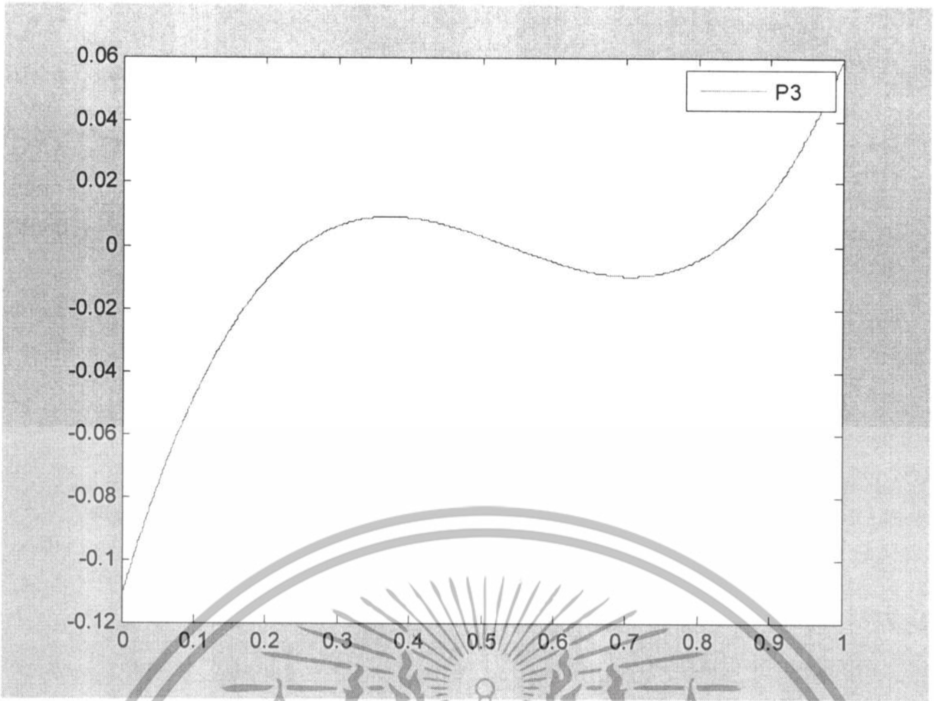
ภาพที่ 4.4 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



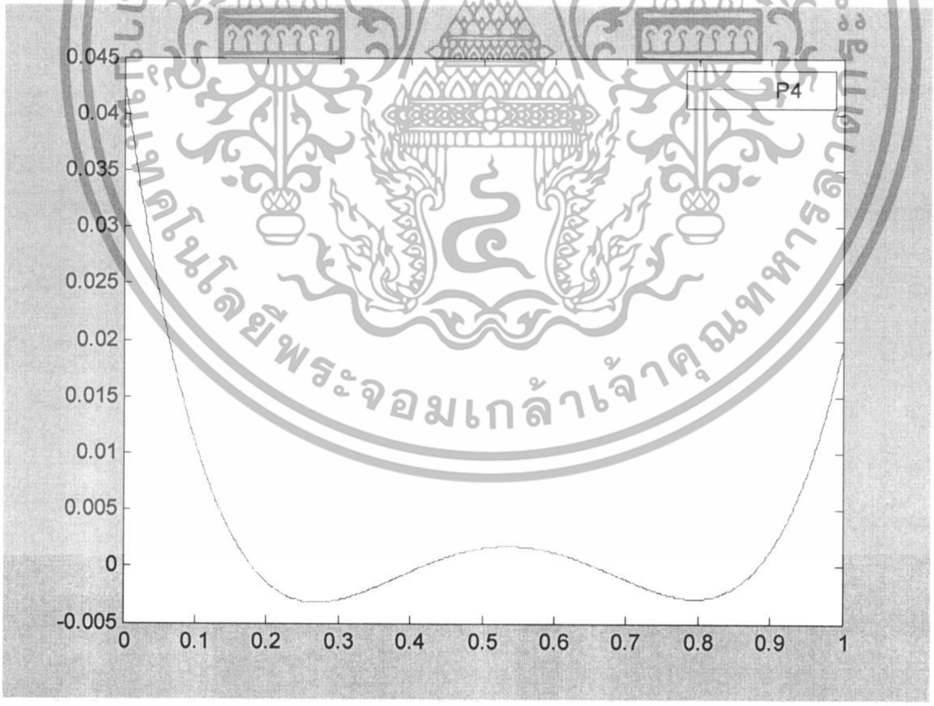
ภาพที่ 4.4.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



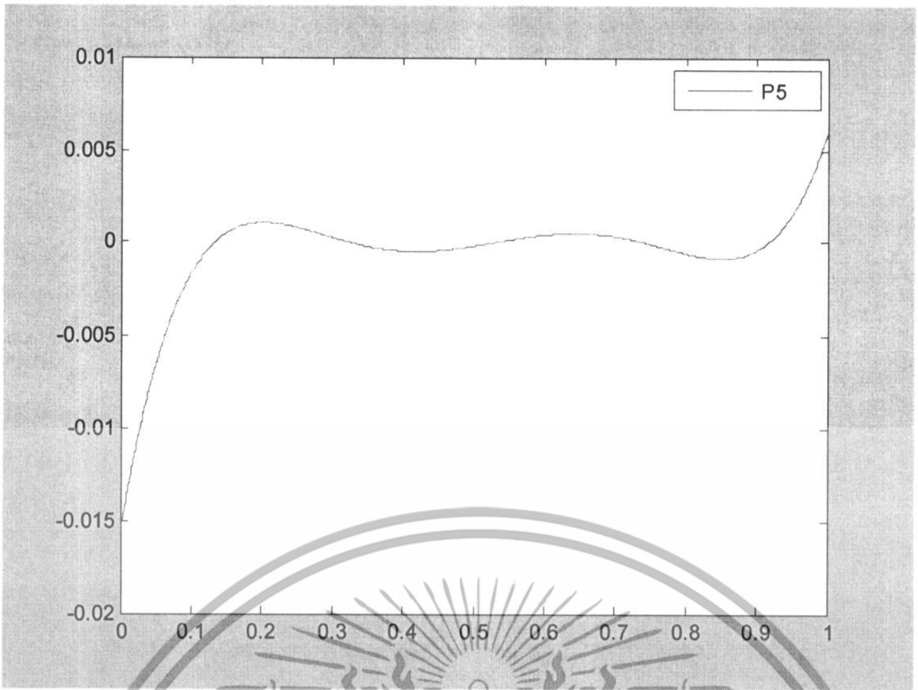
ภาพที่ 4.4.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



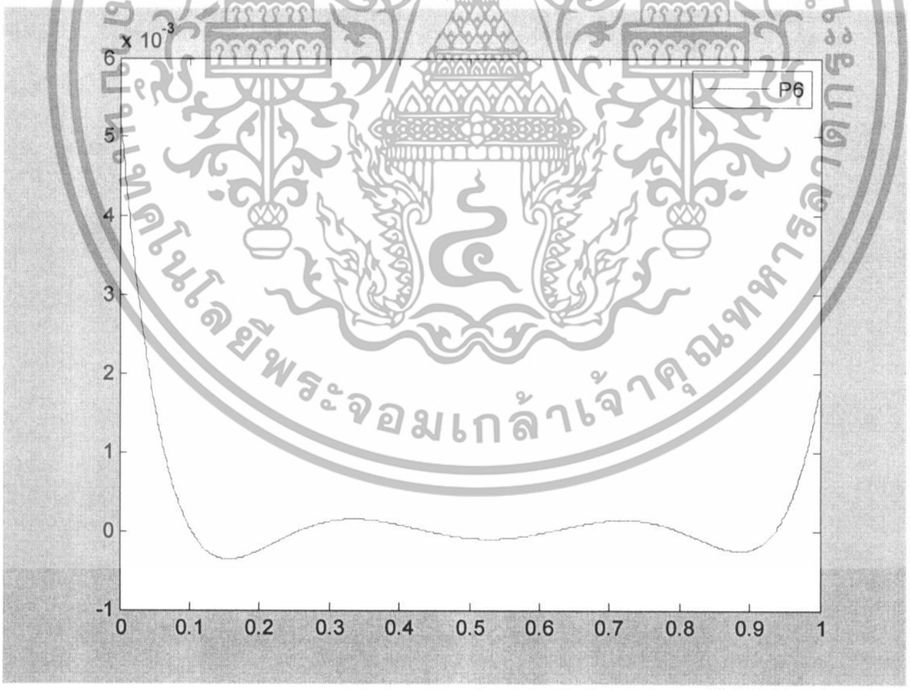
ภาพที่ 4.4.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



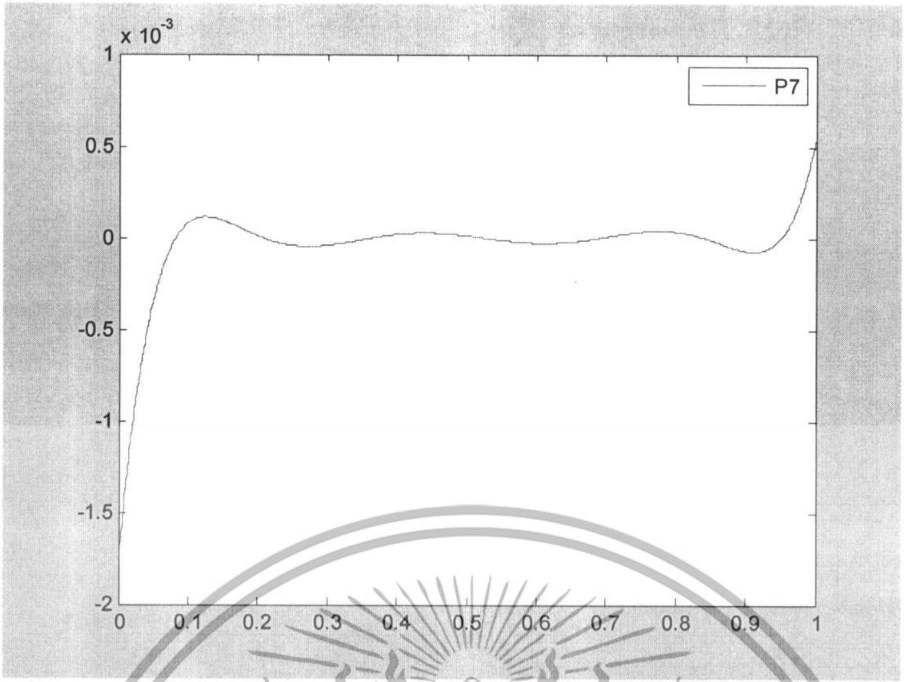
ภาพที่ 4.4.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



ภาพที่ 4.4.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

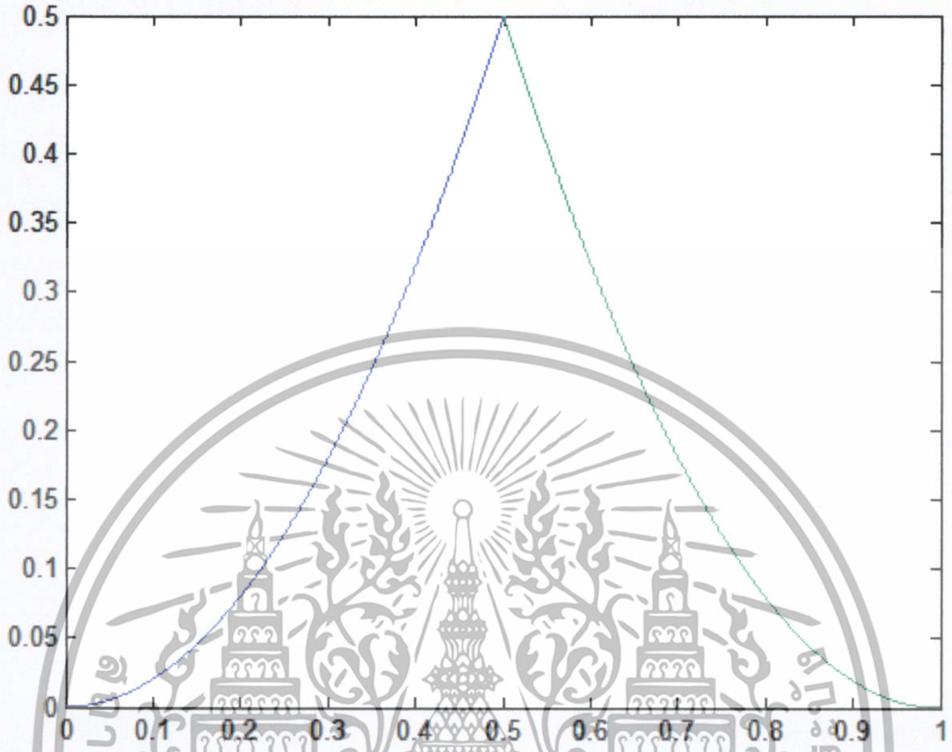


ภาพที่ 4.4.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4



ภาพที่ 4.4.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

4.1.5 ฟังก์ชันถ่วงที่ 5



ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $\mathrm{w}_5(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2\mathrm{x}^2 & , 0 \leq \mathrm{x} < \frac{1}{2} \\ 2\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 2 & , \frac{1}{2} < \mathrm{x} \leq 1 \end{cases}$ โดย $k = 0, 1, 2, \ldots, 14$

$$c_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^0 (2x^2) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^0 (2x^2 - 4x + 2) dx = 0.16666666700$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1 (2x^2) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^1 (2x^2 - 4x + 2) dx = 0.083333333000$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.045833333000$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.027083333000$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.016964285670$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.011160714290$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^6(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0076574900790$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^7(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0054470486110$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^8(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0039970012620$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0030125473490$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{10}(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0023236041300$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{11}(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.018283718240$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{12}(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0014638600330$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(2x^2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{13}(2x^2 - 4x + 2)dx = \quad 0.0011898949040$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง ดังนี้ $p_7(x)$

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.4999999970$

$p_2(x) = x^2 - 0.9999999730x + 0.2249999861$

= (x-0.6581138709)(x-0.3418861021)

$p_3(x) = x^3$-1.4999979059x^2 + 0.67856926149x-0.089285206099

= (x-0.2327379373)(x-0.4999992744)(x-0.7672606942)

$p_4(x) = x^4 - 1.9999740484x^3 + 1.3781643185x^2 - 0.3781855395x + 0.0333076489$

= (x-0.1677446693)(x-0.3931896830)(x-0.6067955541)(x-0.8322441420)

$p_5(x) = x^5 - 2.4999009059x^4 + 2.3221018304x^3 - 0.9833121696x^2 + 0.1844385443x - 0.0116600570$

= (x-0.1254810348)(x-0.3064596064)(x-0.4999819134)(x-0.6934962774)
(x-0.8744820739)

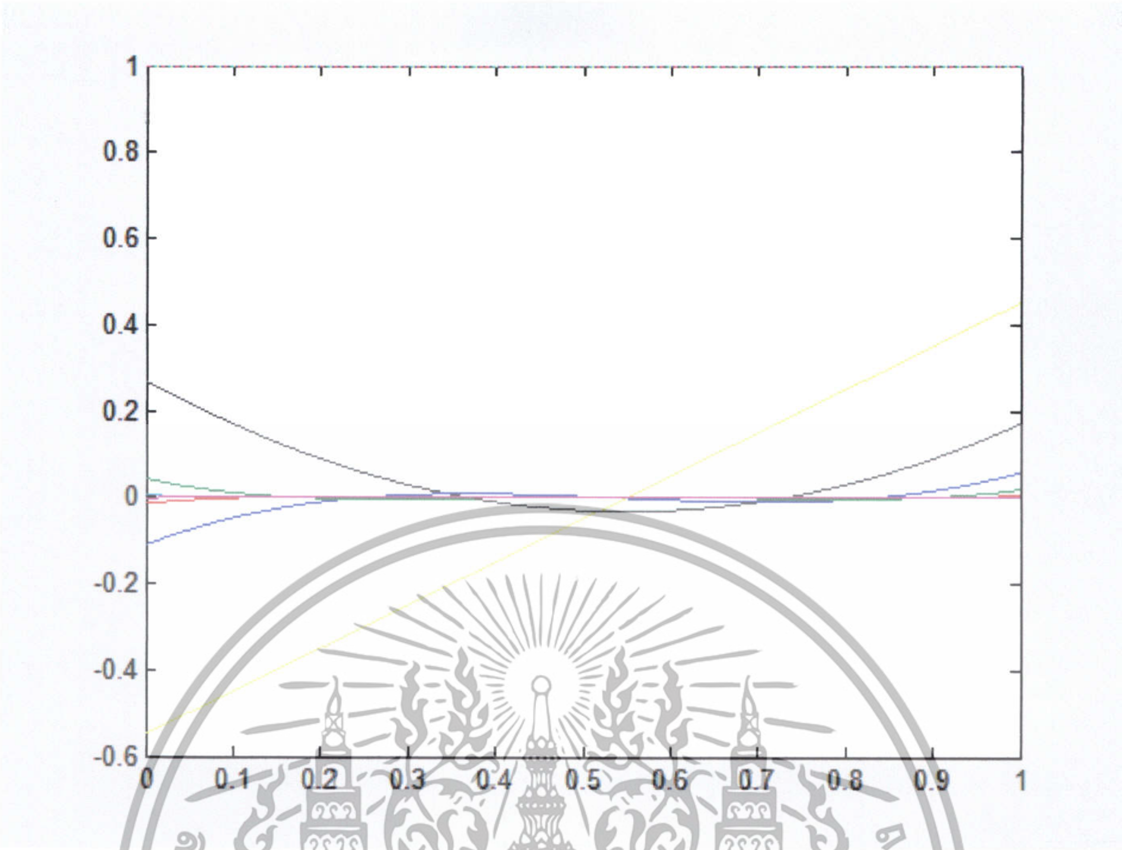
$p_6(x) = x^6 - 3.0008918508\, x^5 + 3.5179837412x^4 - 2.0335740155x^3 + 0.59913962575\, x^2$

= (x-0.0975171431)(x-0.2442486267)(x-0.4183069784)(x-0.5821257398)
(x-0.7560851906)(x-0.9026081721)

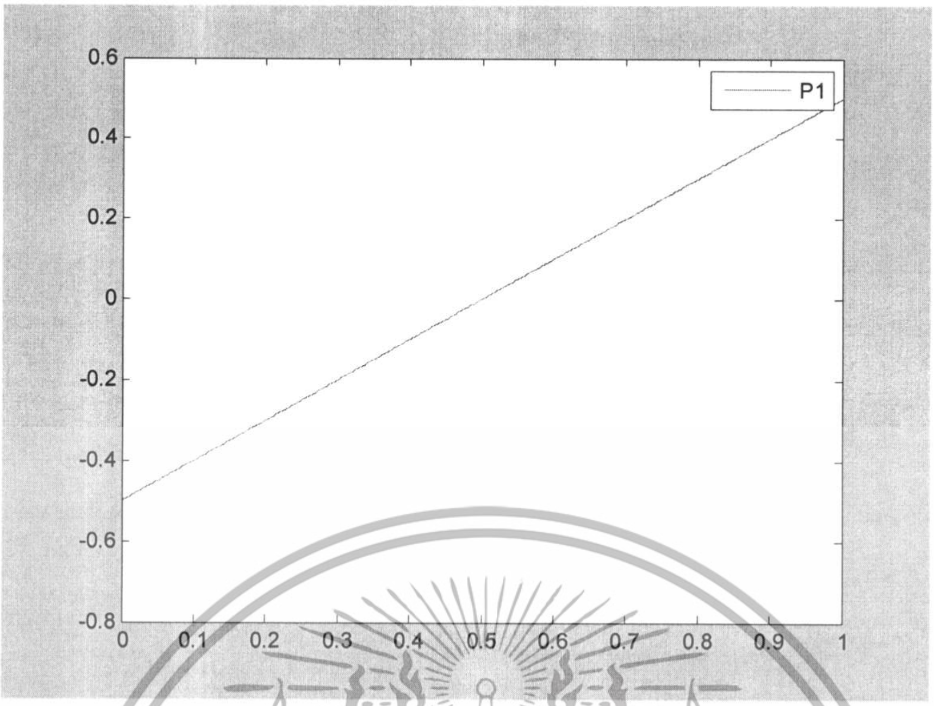
$p_7(x) = x^7 - 3.5383672998x^6 + 5.0735130384x^5 - 3.7809686358x^4 + 1.5589019726x^3$

$-0.3482812763x^2 + 0.0378127861x - 0.0014584113$

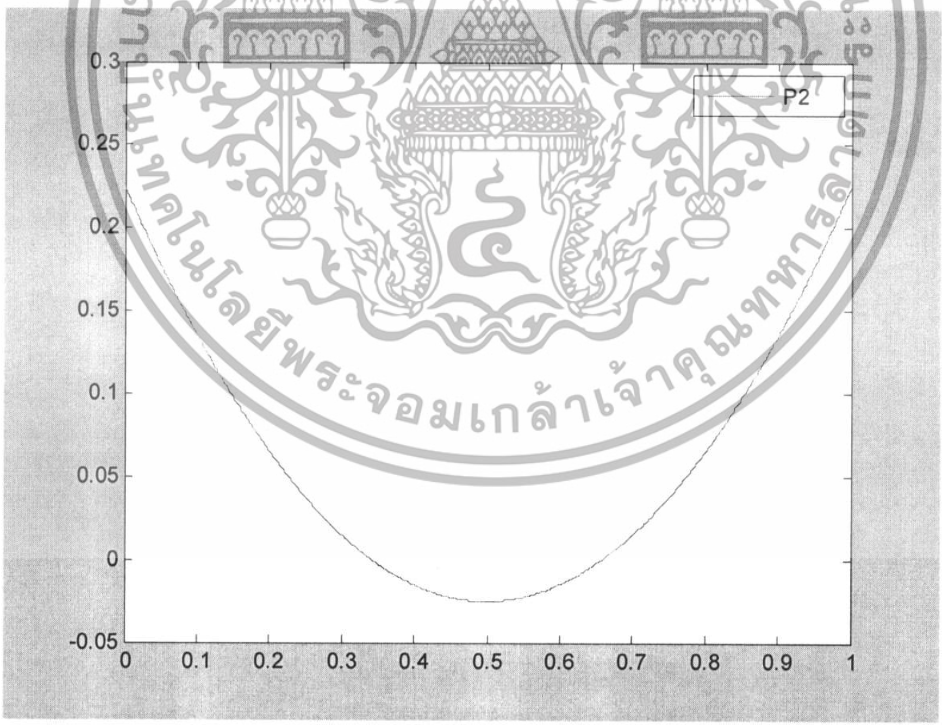
= (x-0.080652119855098244741180852457676)
(x-0.20384779103161401074840525094324)
(x-0.35527640867626911501881594014886)
(x-0.50711027377564947619787980651520)
(x-0.65977787401165880631419653108837)
(x-0.80723385987390897414897702962367)
(x-0.92446897257580137283054458922298)



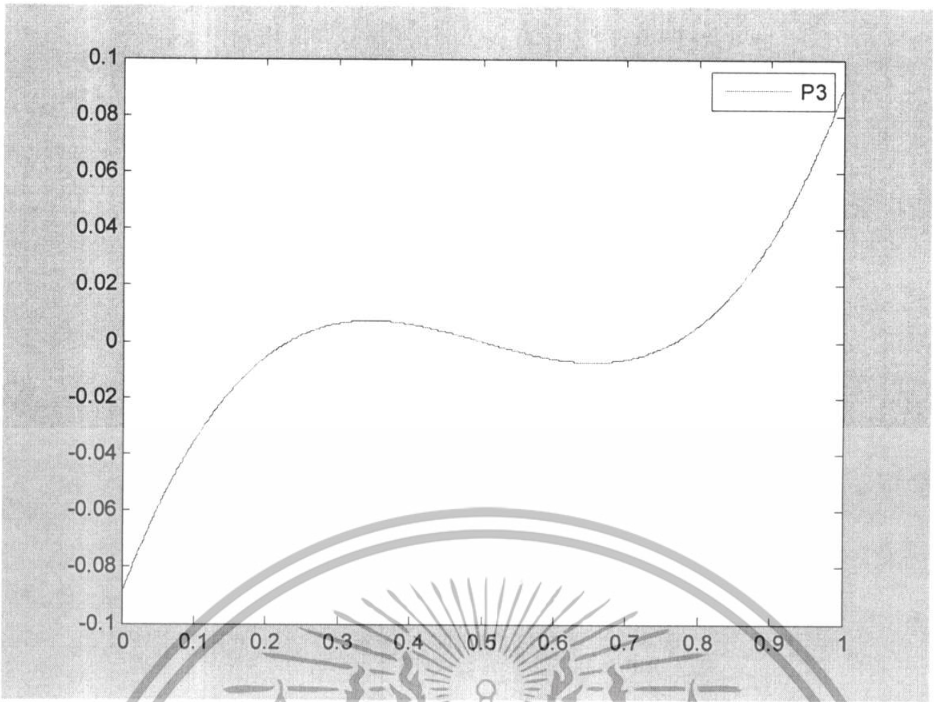
ภาพที่ 4.5 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



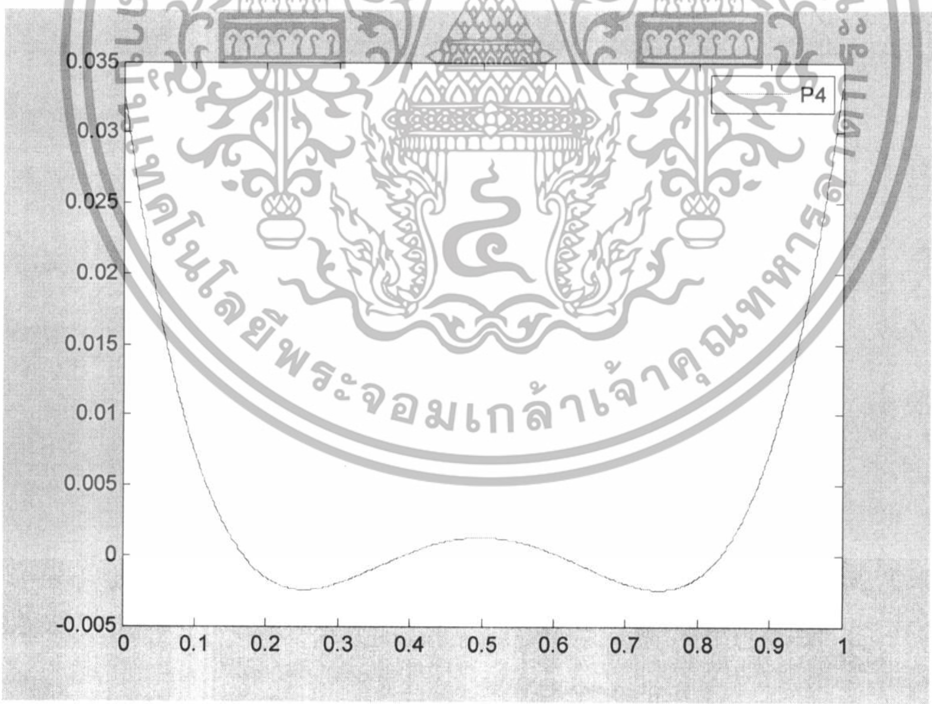
ภาพที่ 4.5.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



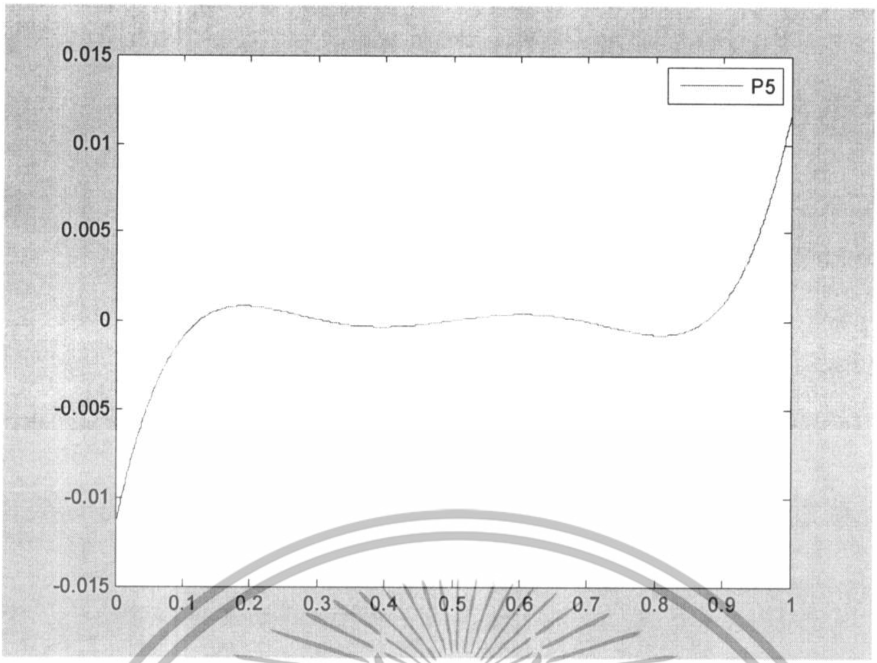
ภาพที่ 4.5.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



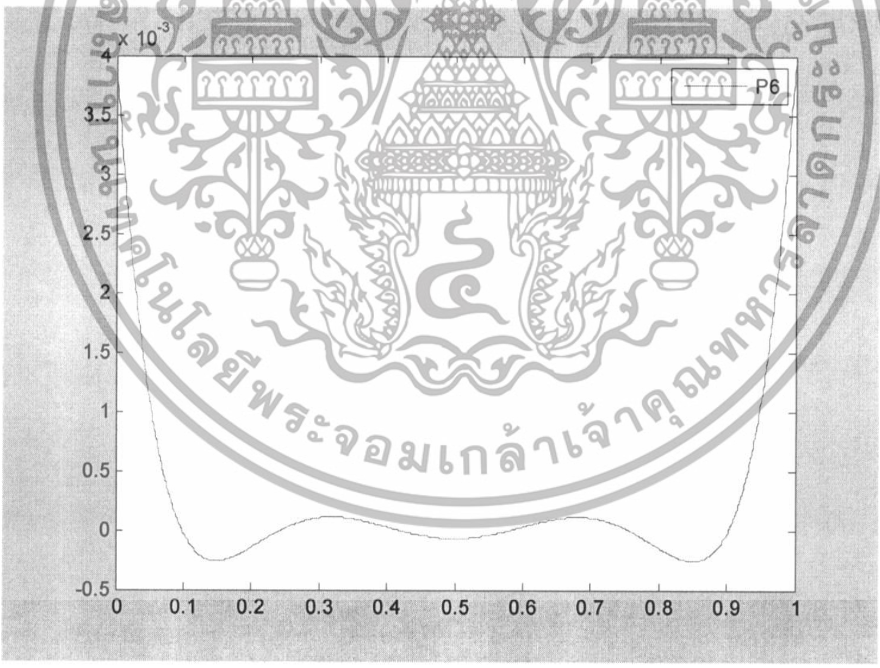
ภาพที่ 4.5.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



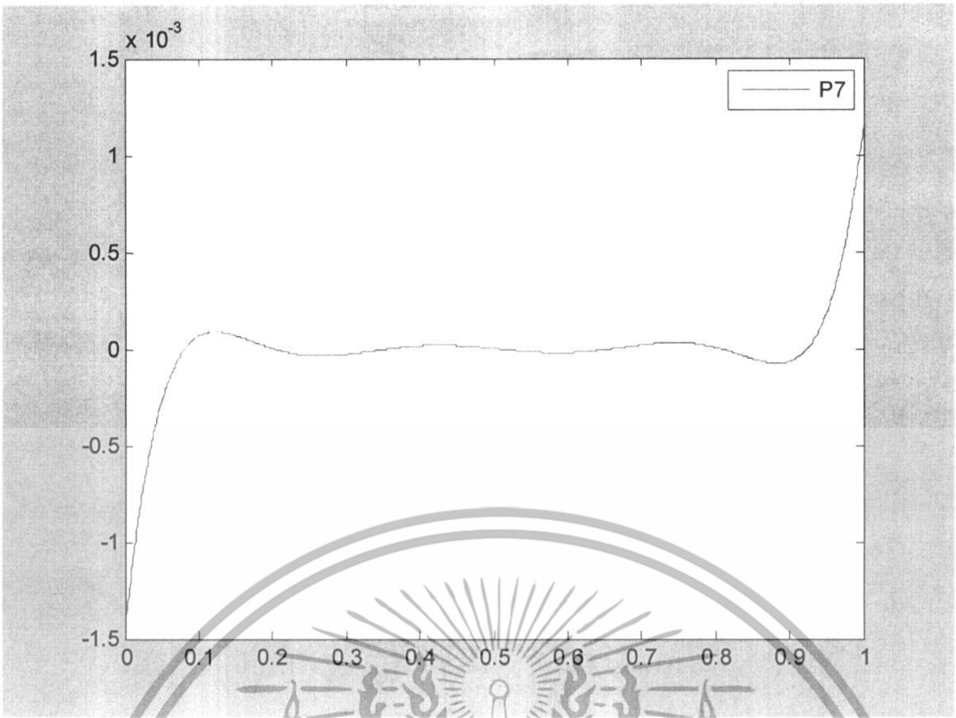
ภาพที่ 4.5.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



ภาพที่ 4.5.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

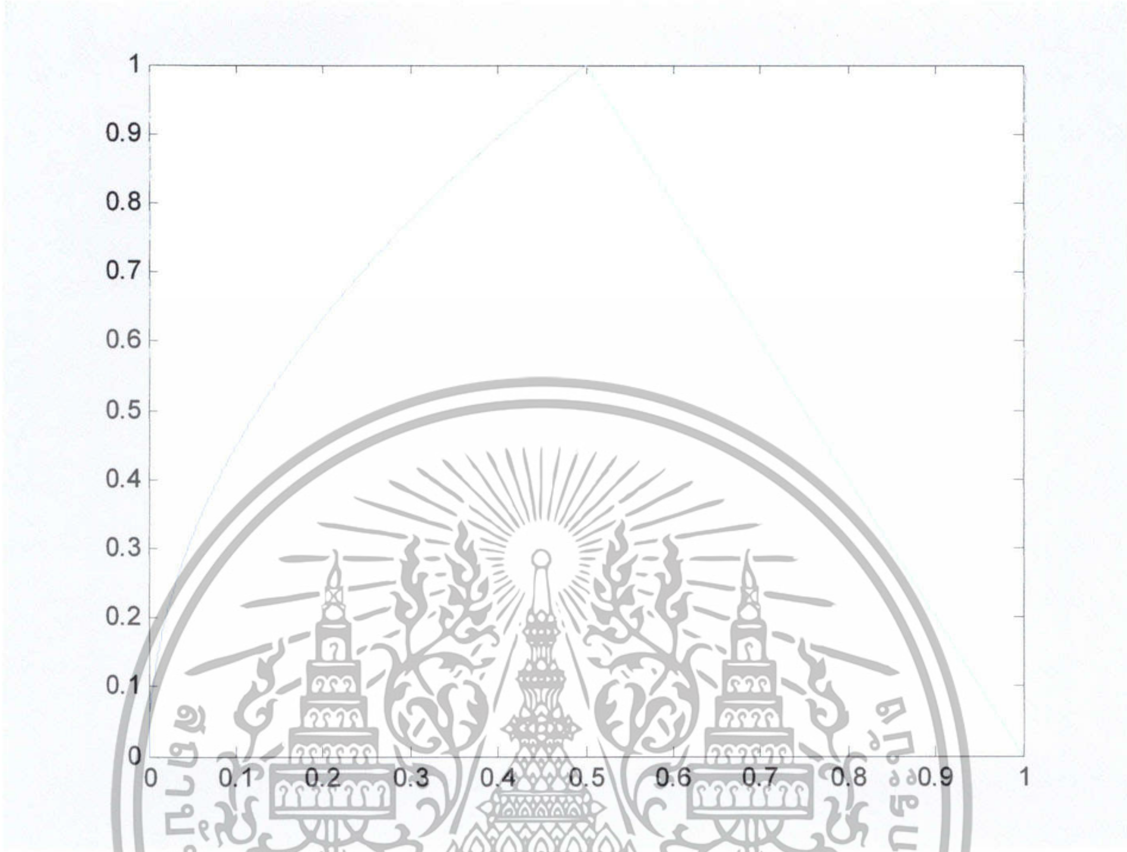


ภาพที่ 4.5.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5



ภาพที่ 4.5.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

4.1.6 ฟังก์ชันถ่วงที่ 6



ใช้การหาค่าปริพันธ์โดยสูตร $\mathrm{w}_6(\mathrm{x}) = \begin{cases} \sqrt{2\mathrm{x}} & , 0 \le \mathrm{x} < \frac{1}{2} \\ 2 - 2\mathrm{x} & , \frac{1}{2} < \mathrm{x} \le 1 \end{cases}$ โดย $k = 0,1,2,\ldots,14$

$$c_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^0(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^0(2-2x)dx = 0.583333333$$

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^1(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^1(2-2x)dx = 0.2666666667$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2(2-2x)dx = 0.1502976190$$

$$c_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3(2-2x)dx = 0.09513888889$$

$$c_4 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^4(2-2x)dx = 0.06505681818$$

$$c_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^5(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5(2-2x)dx = 0.04704670329$$

$$c_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^6(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^6(2-2x)dx = 0.03550037203$$

$$c_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^7(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^7(2-2x)dx = 0.03550037203$$

$$c_8 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^8(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^8(2-2x)dx = 0.02218909905$$

$$c_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^9(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^9(2-2x)dx = 0.01816829004$$

$$c_{10} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{10}(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{10}(2-2x)dx = 0.01514588609$$

$$c_{11} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{11}(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{11}(2-2x)dx = 0.01281813401$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12}(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{12}(2-2x)dx = 0.01098799250$$

$$c_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{13}(\sqrt{2x})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{13}(2-2x)dx = 0.009523368547$$

นำค่าปริพันธ์ที่ได้มาหาค่าพหุนามเชิงตั้งฉาก ตั้งแต่ $p_0(x)$ ถึง $p_7(x)$ ดังนี้

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x - 0.4571$

$p_2(x) = x^2 - 0.93091744351x + 0.16790919881$

$= (x-0.6862360368)(x-0.24468140668)$

$p_3(x) = x^3 - 1.4240128095x^2 + 0.56612498955x - 0.054993973868$

$= (x-0.1440656467)(x-0.4731275111)(x-0.8068196515)$

$p_4(x) = x^4 - 1.9171034622x^3 + 1.2083586156\,x^2 - 0.27835151352x + 0.017053581542$

$= (x-0.0945224346)(x-0.3368252877)(x-0.6155051310)(x-0.8702506087)$

$p_5(x) = x^5 - 2.4145773477x^4 + 2.1001326773x^3 - 0.791282354x^2 + 0.120463326x - 0.005077668$

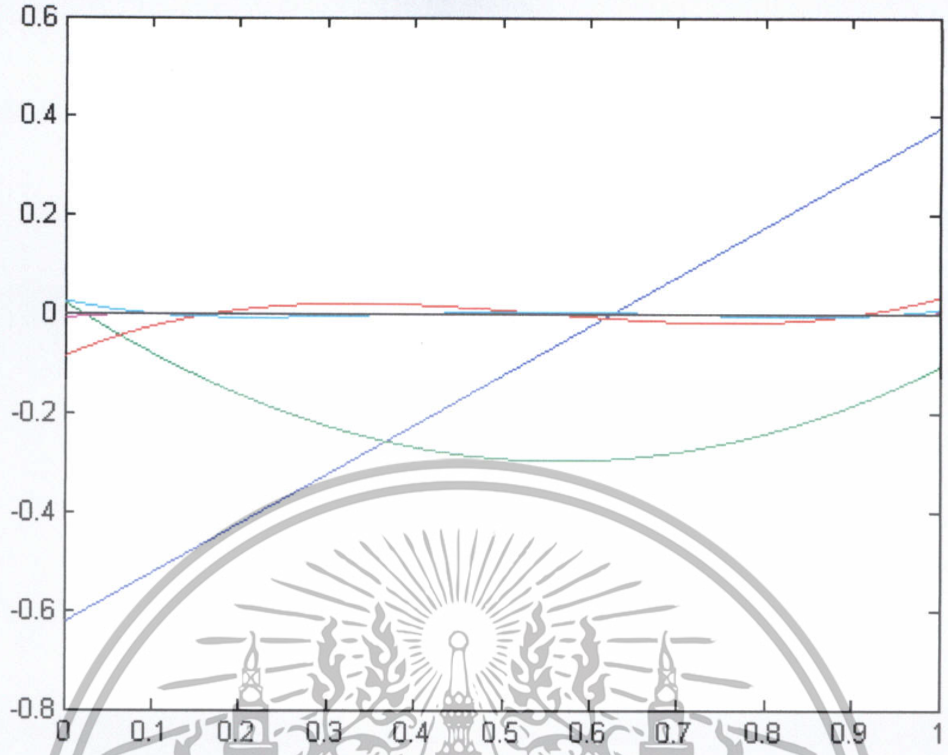
$= (x-0.06636185874)(x-0.2455308704)(x-0.4804383287)(x-0.7147732390)(x-9074730507)$

$p_6(x) = x^6 - 2.9110994821x^5 + 3.2375807616x^4 - 1.7162520988x^3 + 0.43910733440x^2$

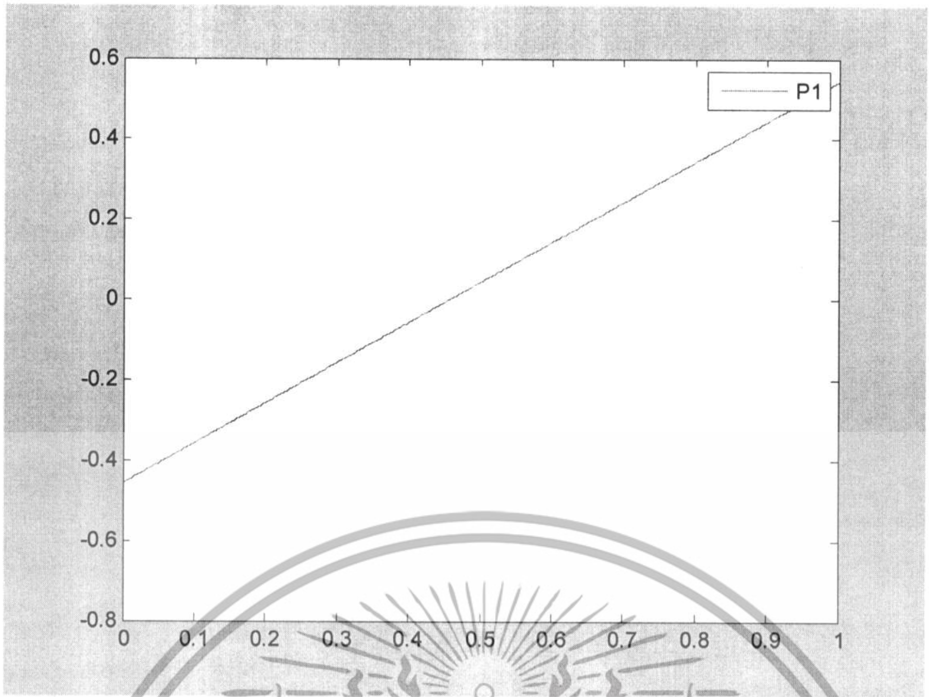
$-0.047787620080x+0.0014733511783$

$= (x-0.0491274846)(x-0.185846351)(x-0.379904118)(x-0.583965612)$
$(x-0.781518436)(x-0.930737478)$

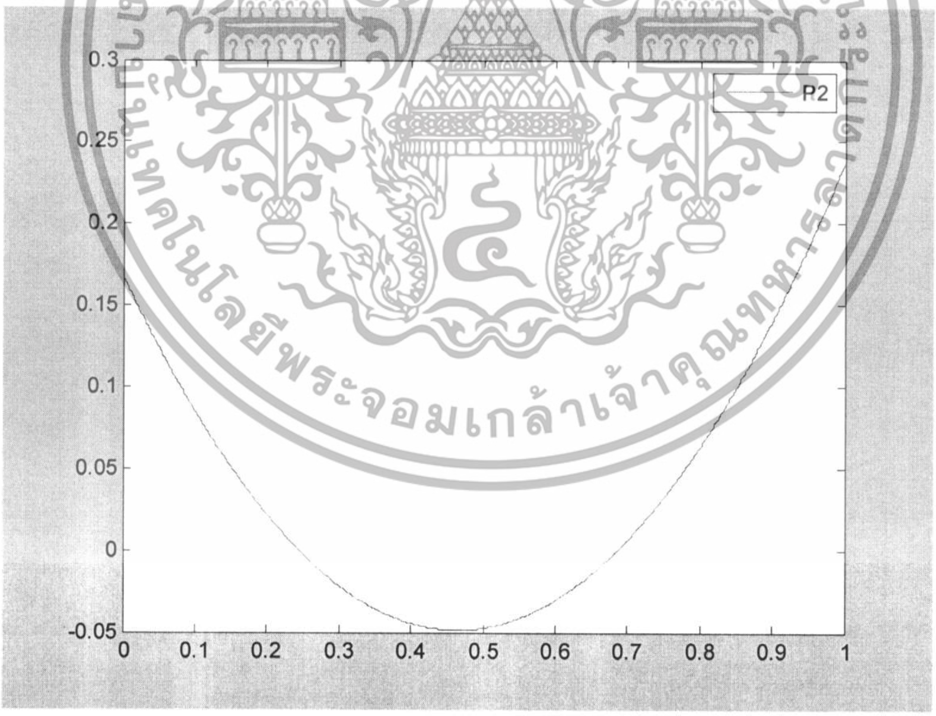
$p_7(x) = x^7 - 3.3949640654x^6 + 4.5834117283x^5 - 3.13129535x^4 + 1.13776397x^3 - 0.21060553x^2$
$+0.017037379651x - 0.00039429417999$
$= (x-0.037028627)(x-0.142572777)(x-0.299980437)(x- 0.481216015)$
$(x-0.66185410)(x-0.82654746)(x-0.94576463)$



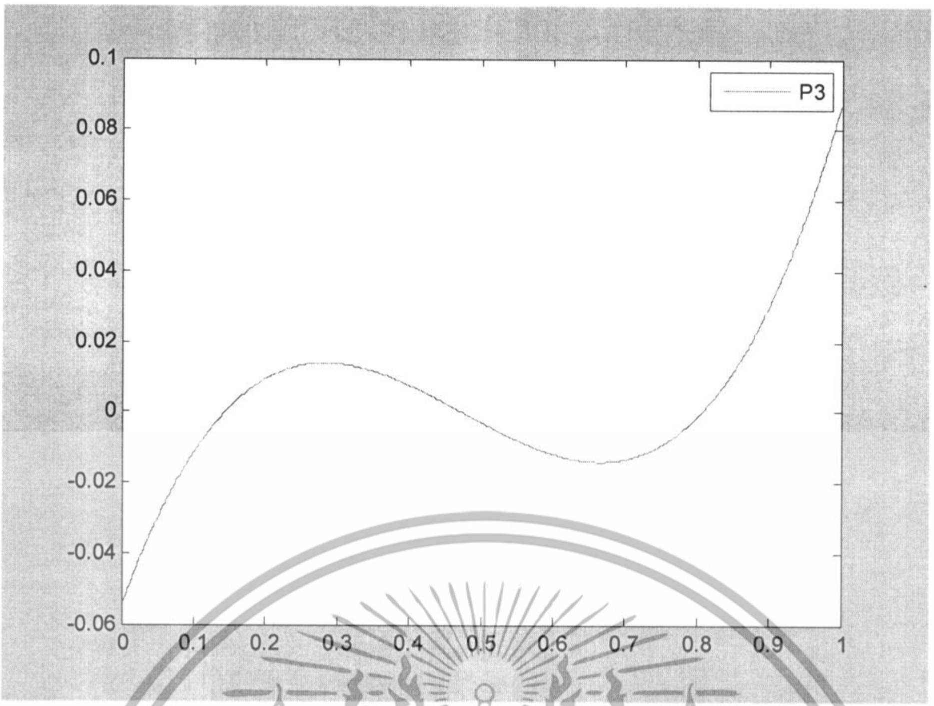
ภาพที่ 4.6 พหุนามเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



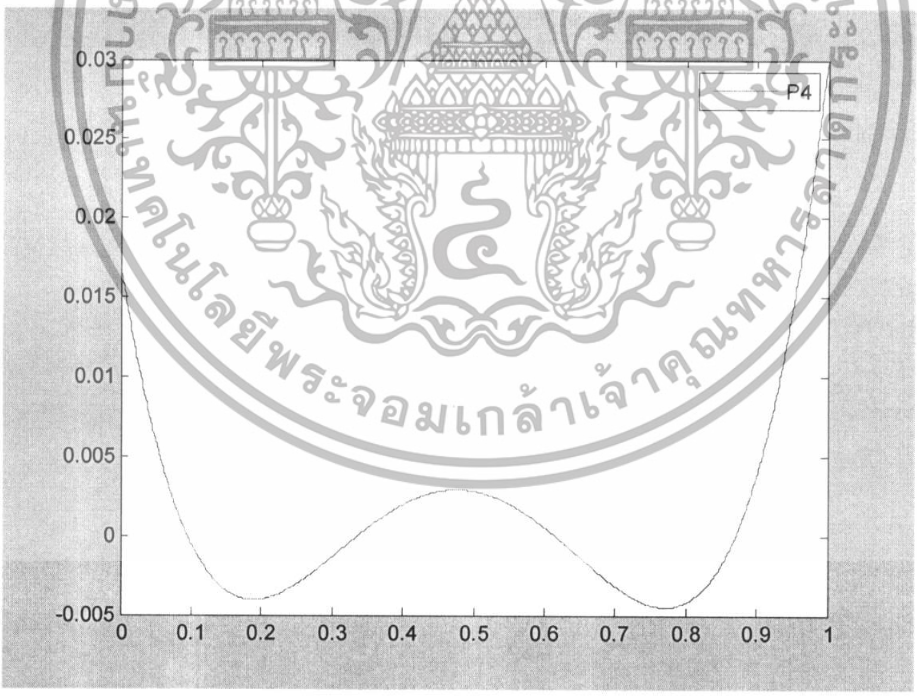
ภาพที่ 4.6.1 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 1 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



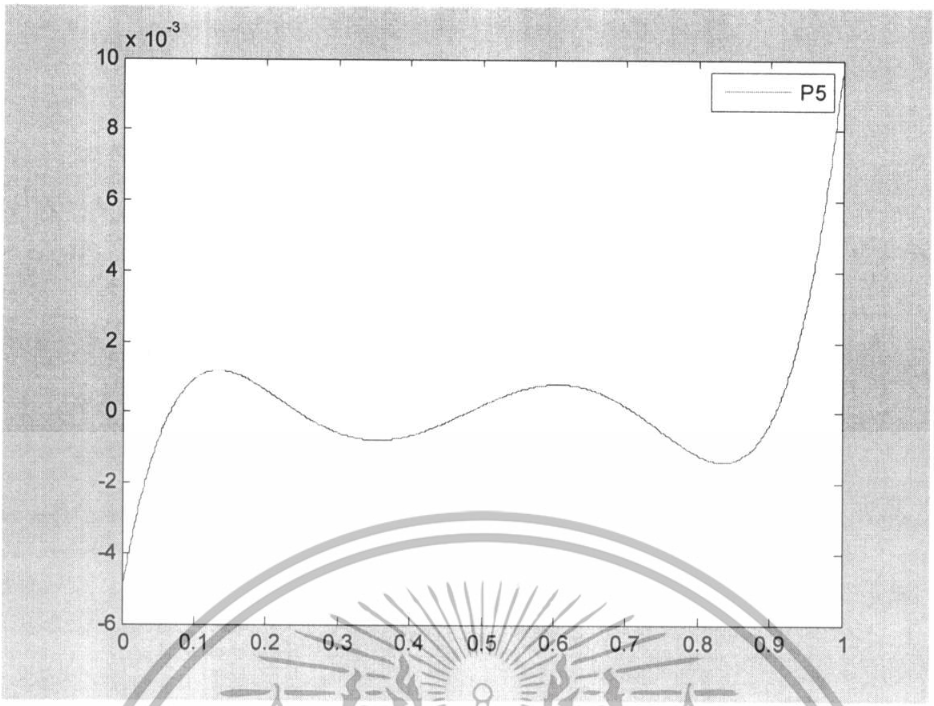
ภาพที่ 4.6.2 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 2 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



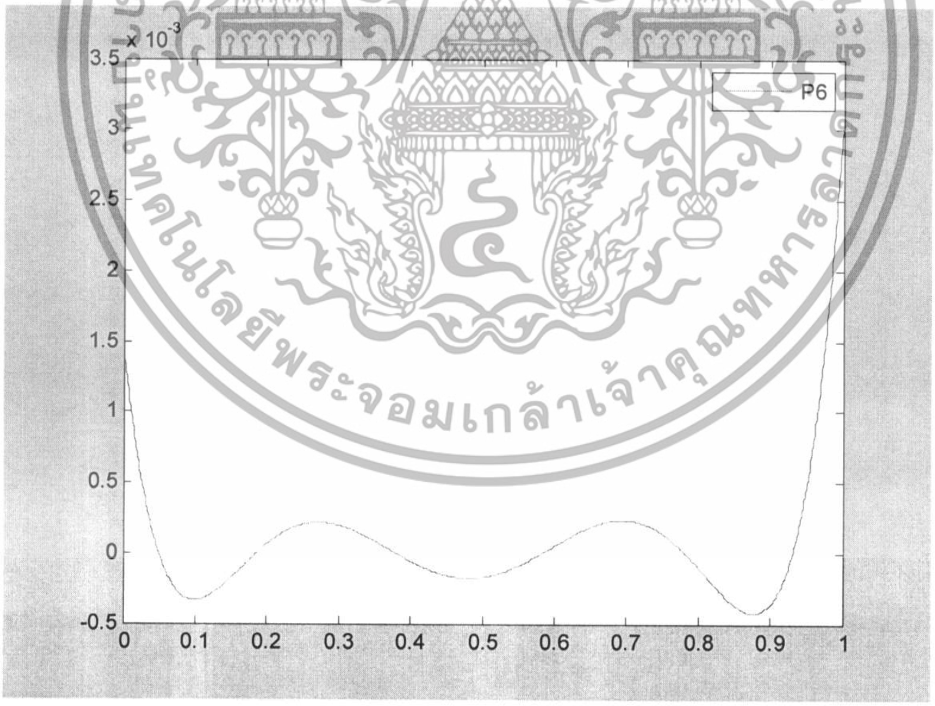
ภาพที่ 4.6.3 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 3 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



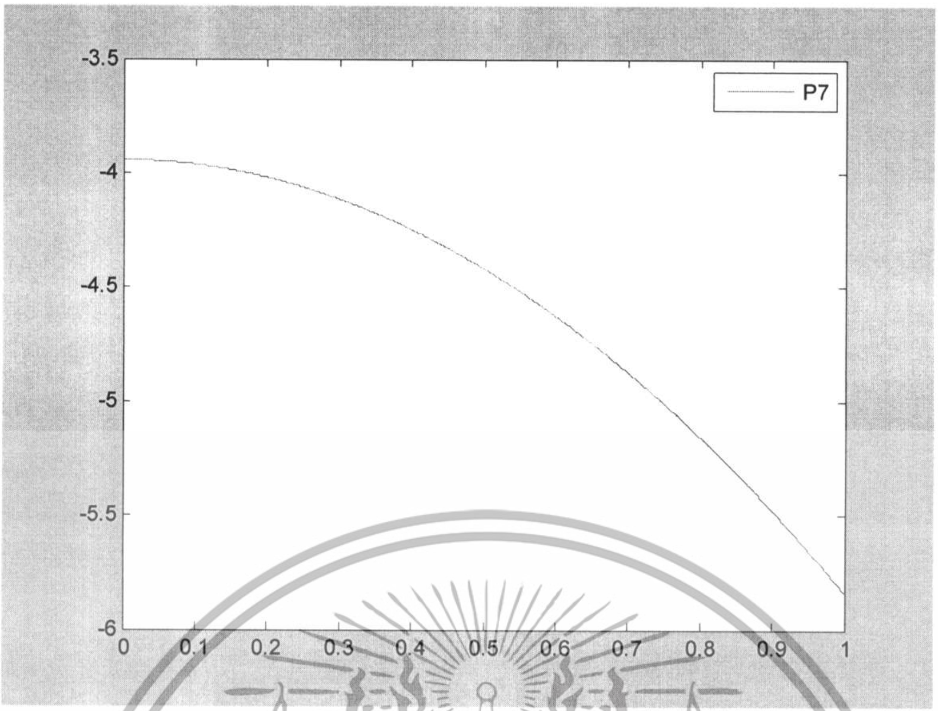
ภาพที่ 4.6.4 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 4 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



ภาพที่ 4.6.5 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 5 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



ภาพที่ 4.6.6 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 6 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6



ภาพที่ 4.6.7 กราฟพหุนามเชิงตั้งฉากอันดับที่ 7 ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

4.2 ค่าถ่วง (weight value)

ค่าถ่วง (weight value) ของฟังก์ชันการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.1 ค่าของ $A_n, n = 1, 2, ..., 7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_1(x) = \begin{cases} 2x^2 & ,0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 2 & ,\dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.50000000
2	0.25000000
	0.25000000
3	0.10416666
	0.29166666
	0.10416666
4	0.04943315
	0.20056684
	0.20056684
	0.04943315
5	0.02582912
	0.11973661
	0.20886849
	0.11973662
	0.02582912

6	0.01474828
	0.07374063
	0.16151113
	0.16151108
	0.07374058
	0.01474827
7	0.00897069
	0.04696382
	0.11237503
	0.16338735
	0.11237142
	0.04696150
	0.00897015

ตารางที่ 4.2 ค่าของ $A_n, n = 1,2,\ldots,7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_2(x) = \begin{cases} 1-2x & ,0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.5000000
2	0.2500000
	0.2500000
3	0.1875000
	0.12500000
	0.18750000
4	0.12499999
	0.12500000
	0.12499999
	0.12500000
5	0.09410076
	0.12812145
	0.05555555
	0.12812145
	0.09410076

6	0.06944444 0.11111113 0.06944443 0.06944447 0.11111109 0.06944441
7	0.05511799 0.09705057 0.08220932 0.03124974 0.08221204 0.09704650 0.05511380

ตารางที่ 4.3 ค่าของ $A_n, n = 1,2,...,7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_3(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 2, \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.20833333
2	0.10416666
	0.10416666
3	0.04434871
	0.12753936
	0.03644525
4	0.01385777
	0.08581231
	0.08718422
	0.02147901
5	0 .01141469
	0.05281887
	0.09382492
	0.04442939
	0.00584543

6	0 .00676928 0.031582763 0 .07555517 0.06596396 0.02755240 0.00090974
7	0.00406000 0.02123368 0.05068732 0.07467970 0. 04384329 0. 01245587 0. 00137344

ตารางที่ 4.4 ค่าของ $A_n, n = 1, 2, ..., 7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_4(x) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.20833333
2	0.10416666
	0.10416666
3	0.03644525
	0.12753936
	0.04434871
4	0.01385778
	0.08581231
	0.08718422
	0.02147901
5	0.00584543
	0.04442939
	0.093824925
	0.05281887
	0.01141470

6	0.00272478 0.02308273 0.07086628 0.07208975 0.03296724 0.00660253
7	0.00137352 0.01245628 0.04384368 0.07467892 0.05068691 0.02123388 0.00406012

ตารางที่ 4.5 ค่าของ $A_n, n = 1,2,...,7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_5(x) = \begin{cases} 2x^2, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 4x + 2, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.166666667
2	0.083333339
	0.08333332
3	0.02916641
	0.10833339
	0.02916685
4	0.01144300
	0.07188684
	0.07189182
	0.01144498
5	0.00490809
	0.03723774
	0.08236117
	0.03724800
	0.00491164

6	0.002338850 0.01979961 0.06129911 0.06117617 0.01972375 0.00232914
7	0.00133005 0.01171704 0.03980301 0.06663795 0.03600585 0.010073895 0.00109884

ตารางที่ 4.6 ค่าของ $A_n, n = 1, 2, \ldots, 7$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ของฟังก์ชันถ่วง

$$w_6(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2 - 2x, \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

n	A_n
1	0.58333333
2	0.28068066 0.30265267
3	0.14514100 0.32300834 0.11518398
4	0.07909887 0.23267199 0.21789264 0.05366982
5	0.04711393 0.15386840 0.22566300 0.12893956 0.27748427

6	0.30231227 0.10479148 0.18162166 0.17239826 0.07858908 0.01570160
7	0.01990558 0.07217517 0.13562877 0.17441212 0.12090766 0.05062179 0.00968424

4.3 การหาค่าปริพันธ์ Gacss Quadrature

นำ $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$ หาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 – 6 และนำมาหาค่าความ คลาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าจริง

ตารางที่ 4.7 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง= 0.3397980736

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.66666667	0.32686859
2	0.37113402	$0.31335947 \times 10^{-1}$
3	0.33979328	$0.47920000 \times 10^{-5}$
4	0.33979793	$0.13760000 \times 10^{-6}$
5	0.33979806	$0.39000000 \times 10^{-8}$
6	0.33979807	$0.10000000 \times 10^{-9}$
7	0.33979807	0

ตารางที่ 4.8 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง= 0.353349107

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.66666667	0.31331756
2	0.35294117	$0.40793050 \times 10^{-3}$
3	0.35333333	$0.15773700 \times 10^{-4}$
4	0.35334872	$0.37720000 \times 10^{-6}$
5	0.35334909	$0.13200000 \times 10^{-7}$
6	0.35334910	$0.40000000 \times 10^{-9}$
7	0.35334910	0

ตารางที่ 4.9 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง= 0 .1459914715

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.14367815	0.14367815
2	0.14593397	$0.57494044 \times 10^{-4}$
3	0.14598997	$0.14965012 \times 10^{-5}$
4	0.14319434	$0.27971246 \times 10^{-2}$
5	0.14599147	$0.11492900 \times 10^{-8}$
6	0.14596965	$0.21816458 \times 10^{-4}$
7	0.14599147	$0.5156000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 4.10 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง= 0.136294

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.64516129	0.50886729
2	0.13625175	$0.42241900 \times 10^{-4}$
3	0.13629330	$0.69050000 \times 10^{-6}$
4	0.13629433	$0.33310000 \times 10^{-6}$
5	0.13629436	$0.33310000 \times 10^{-6}$
6	0.13629436	$0.36110000 \times 10^{-6}$
7	0.13629436	$0.36110000 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.11 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง= 0.1123867958

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.66666660	0.55427987
2	0.11235955	$0.27244700 \times 10^{-4}$
3	0.11238615	$0.63860000 \times 10^{-6}$
4	0.11238677	$0.16000000 \times 10^{-7}$
5	0.11238679	$0.20000000 \times 10^{-9}$
6	0.11238679	$0.60000000 \times 10^{-9}$
7	0.11238679	$0.60000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 4.12 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$

ค่าจริง=0.40989000

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.40033856	$0.95514400 \times 10^{-2}$
2	0.40961069	$0.27931000 \times 10^{-3}$
3	0.40988086	$0.91400000 \times 10^{-5}$
4	0.40988855	$0.14500000 \times 10^{-5}$
5	0.40988878	$0.12200000 \times 10^{-5}$
6	0.40988878	$0.12200000 \times 10^{-5}$
7	0.40988878	$0.12200000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 4.13 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง= 0.3966410308

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.80000000	0.42886597
2	0.37113402	0
3	0.39661344	0.39664103
4	0.39664194	$0.25507925 \times 10^{-1}$
5	0.39664103	$0.25507013 \times 10^{-1}$
6	0.39664102	$0.25507008 \times 10^{-1}$
7	0.39503434	$0.23900323 \times 10^{-1}$

ตารางที่ 4.14 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง= 0.388754

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.80000000	0.41124600
2	0.38938053	$0.62653100 \times 10^{-3}$
3	0.38867924	$0.74754700 \times 10^{-4}$
4	0.38875943	$0.54338000 \times 10^{-5}$
5	0.38875712	$0.31261000 \times 10^{-5}$
6	0.38875710	$0.31278000 \times 10^{-5}$
7	0.38875713	$0.31329000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 4.15 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง= 0.1715645172

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.09908838	0.72476131×10^{-1}
2	0.17165365	0.89139926×10^{-4}
3	0.17155660	0.79172000×10^{-5}
4	0.16839506	0.31694536×10^{-2}
5	0.17156451	0.25461460×10^{-8}
6	0.17156842	0.39099217×10^{-5}
7	0.17156451	0.69800000×10^{-12}

ตารางที่ 4.16 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง= 0.159454

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.76775431	4.86922151×10^{-3}
2	0.15957599	1.52177999×10^{-3}
3	0.15944674	1.14539642×10^{-4}
4	0.15945367	3.46091498×10^{-6}
5	0.15945352	3.10572743×10^{-8}
6	0.15945352	9.84589398×10^{-9}
7	0.15945352	5.45567813×10^{-10}

ตารางที่ 4.17 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง=0.1326975235

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.80000000	1.93738243×10^{-2}
2	0.13276064	1.30644587×10^{-3}
3	0.13269357	1.24450241×10^{-4}
4	0.13269763	5.15835960×10^{-6}
5	0.13269752	2.93075521×10^{-8}
6	0.13269752	9.72228642×10^{-9}
7	0.13269752	6.52419118×10^{-10}

ตารางที่ 4.18 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$

ค่าจริง=0.47592700

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.48251619	0.65891900×10^{-2}
2	0.47637649	0.44949000×10^{-3}
3	0.47588596	0.41040000×10^{-4}
4	0.47592884	0.18400000×10^{-5}
5	0.47592723	0.23000000×10^{-6}
6	0.47592723	0.23000000×10^{-6}
7	0.47592724	0.24000000×10^{-6}

ตารางที่ 4.19 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง=0.2616240719

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	1.50000000	1.23837592
2	0.37757589	0.11595182
3	0.26157407	$0.49997900 \times 10^{-4}$
4	0.26162058	$0.34847000 \times 10^{-5}$
5	0.26162382	$0.24210000 \times 10^{-6}$
6	0.26162405	$0.17200000 \times 10^{-7}$
7	0.26162407	$0.17200000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 4.20 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง= 0.287685

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	1.50000000	1.21231500
2	0.28571428	$0.19707143 \times 10^{-2}$
3	0.28750000	$0.18500000 \times 10^{-3}$
4	0.28767123	$0.13767100 \times 10^{-4}$
5	0.28768115	$0.38406000 \times 10^{-5}$
6	0.28768201	$0.29850000 \times 10^{-5}$
7	0.28768206	$0.29322000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 4.21 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง= 0.1140096981

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.28735631	0.17334661
2	0.11374521	0.26448737×10^{-3}
3	0.11399282	0.16868299×10^{-4}
4	0.11052914	0.34805571×10^{-2}
5	0.11400962	0.77905909×10^{-7}
6	0.11397227	0.37420398×10^{-4}
7	0.11400969	0.37457100×10^{-9}

ตารางที่ 4.22 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง= 0.102386

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	2.10000000	1.99761400
2	0.10221962	0.16637380×10^{-3}
3	0.10237591	0.10082900×10^{-4}
4	0.10238500	0.99240000×10^{-6}
5	0.10238558	0.41430000×10^{-6}
6	0.10238562	0.37650000×10^{-6}
7	0.10238562	0.37400000×10^{-6}

ตารางที่ 4.23 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง= 0.08558328838

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	1.99999999	1.91441670
2	0.08547008	0.11320238×10^{-3}
3	0.08557692	0.63643600×10^{-5}
4	0.08558288	0.39840000×10^{-6}
5	0.08558326	0.24130000×10^{-7}
6	0.085583288	0.22000000×10^{-9}
7	0.085583283	0.12700000×10^{-8}

ตารางที่ 4.24 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$

ค่าจริง= 0.32280000

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.30474001	0.1805999×10^{-1}
2	0.32151675	0.1283250×10^{-2}
3	0.32271001	0.8999000×10^{-4}
4	0.32279308	0.6920000×10^{-5}
5	0.32279904	0.96000000×10^{-6}
6	0.32279946	0.54000000×10^{-6}
7	0.32279949	0.51000000×10^{-6}

ตารางที่ 4.25 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.2013551355

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.40000000	0.19864486
2	0.32432432	0.12296918
3	0.20135501	0.12200000×10^{-6}
4	0.20135513	0.12000000×10^{-8}
5	0.20135513	0
6	0.20135513	0
7	0.20135513	0

ตารางที่ 4.26 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.204112

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.40000000	0.19588800
2	0.20408163	0.30367300×10^{-4}
3	0.20410958	0.30367300×10^{-4}
4	0.20410994	0.20305000×10^{-5}
5	0.20410997	0.20274000×10^{-5}
6	0.20410997	0.20274000×10^{-5}
7	0.20410997	0.20274000×10^{-5}

ตารางที่ 4.27 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.08550091966

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.08503401	0.00046690
2	0.08549692	$0.39905701 \times 10^{-5}$
3	0.08550088	$0.35783926 \times 10^{-7}$
4	0.08454691	$0.95400265 \times 10^{-3}$
5	0.08550091	$0.52800000 \times 10^{-12}$
6	0.08549610	$0.48119928 \times 10^{-5}$
7	0.08550091	$0.27640000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 4.28 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.082113

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.39215686	0.31004386
2	0.08210973	$0.32627500 \times 10^{-5}$
3	0.08211305	0.51810000
4	0.08211308	$0.80620000 \times 10^{-7}$
5	0.08211308	$0.80890000 \times 10^{-7}$
6	0.08211308	$0.80890000 \times 10^{-7}$
7	0.08211308	$0.80890000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 4.29 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.06693643280

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.40000000	0.33306356
2	0.06693440	$0.20282900 \times 10^{-5}$
3	0.06693641	$0.16390000 \times 10^{-7}$
4	0.06693643	$0.8000000 \times 10^{-10}$
5	0.06693643	$0.23000000 \times 10^{-9}$
6	0.06693643	$0.23000000 \times 10^{-9}$
7	0.066936433	$0.23000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 4.30 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$

ค่าจริง= 0.23932900

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.23740724	$0.19217600 \times 10^{-2}$
2	0.23931947	$0.95300000 \times 10^{-5}$
3	0.23933871	$0.97100000 \times 10^{-5}$
4	0.23933890	$0.99000000 \times 10^{-5}$
5	0.23933890	$0.99000000 \times 10^{-5}$
6	0.23933890	$0.99000000 \times 10^{-5}$
7	0.23933890	$0.99000000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 4.31 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.1698990368

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333330	0.16343426
2	0.20761245	0.37713419×10^{-1}
3	0.16989664	0.23960000×10^{-5}
4	0.16989896	0.68800000×10^{-7}
5	0.16989903	0.20000000×10^{-8}
6	0.16989903	0.10000000×10^{-9}
7	0.16989903	0

ตารางที่ 4.32 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.1766769

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333330	0.15665640
2	0.17647058	0.20631180×10^{-3}
3	0.17666666	0.10233300×10^{-4}
4	0.17667436	0.25351000×10^{-5}
5	0.17667454	0.23531000×10^{-5}
6	0.17667455	0.23467000×10^{-5}
7	0.17667455	0.23465000×10^{-5}

ตารางที่ 4.33 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.07299573576

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.07183907	0.00115665
2	0.07296698	0.28747032×10^{-4}
3	0.07299498	0.74826063×10^{-6}
4	0.07159717	0.13985623×10^{-2}
5	0.07299573	0.58464500×10^{-9}
6	0.07298482	0.10908239×10^{-4}
7	0.07299573	0.74220000×10^{-11}

ตารางที่ 4.34 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.0681471

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.32258064	0.25443354
2	0.06812587	0.21220960×10^{-4}
3	0.06814665	0.44525000×10^{-6}
4	0.06814716	0.66540000×10^{-7}
5	0.06814718	0.80180000×10^{-7}
6	0.06814718	0.80550000×10^{-7}
7	0.06814718	0.80560000×10^{-7}

ตารางที่ 4.35 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.05619339792

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333333	0.27713993
2	0.056179775	0.13622390×10^{-4}
3	0.056193078	0.31931000×10^{-6}
4	0.056193389	0.80400000×10^{-8}
5	0.056193398	0.80000000×10^{-10}
6	0.056193396	0.30000000×10^{-9}
7	0.056193395	0.30000000×10^{-9}

ตารางที่ 4.36 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$

ค่าจริง= 0.20494400

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.20016928	0.47747200×10^{-2}
2	0.20480534	0.13866000×10^{-3}
3	0.20494043	0.35700000×10^{-5}
4	0.20494427	0.27000000×10^{-6}
5	0.20494439	0.39000000×10^{-6}
6	0.20494439	0.39000000×10^{-6}
7	0.20494439	0.39000000×10^{-6}

ตารางที่ 4.37 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง= 0.1698990368

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333330	0.16343426
2	0.18556701	0.15667973×10^{-1}
3	0.16989664	0.23960000×10^{-5}
4	0.16989896	0.68800000×10^{-7}
5	0.16989903	0.20000000×10^{-8}
6	0.16989903	0.10000000×10^{-9}
7	0.16989903	0

ตารางที่ 4.38 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 2 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง= 0.1766769

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333330	0.15665640
2	0.17647058	0.20631180×10^{-3}
3	0.17666666	0.10233300×10^{-4}
4	0.17667436	0.25351000×10^{-5}
5	0.17667436	0.25351000×10^{-5}
6	0.17667455	0.23467000×10^{-5}
7	0.17667455	0.23465000×10^{-5}

ตารางที่ 4.39 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 3 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง= 0.07299573576

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.06720430	0.00579143
2	0.06812587	0.48698567×10^{-2}
3	0.06814665	0.48490810×10^{-2}
4	0.06942642	0.35693072×10^{-2}
5	0.06814718	0.48485555×10^{-2}
6	0.06812838	0.48673511×10^{-2}
7	0.06814718	0.48485552×10^{-2}

ตารางที่ 4.40 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 4 โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง= 0.072995

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.34482758	0.27183258
2	0.07296698	0.28011270×10^{-4}
3	0.07299498	0.12500000×10^{-7}
4	0.07299571	0.71504000×10^{-6}
5	0.07299573	0.73517000×10^{-6}
6	0.07299573	0.73574000×10^{-6}
7	0.07299573	0.73575000×10^{-6}

ตารางที่ 4.41 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 5โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง= 0.05619339792

n	ผลลัพธ์	ค่าความคลาดเคลื่อน
1	0.33333333	0.27713993
2	0.05617977	$0.13622640 \times 10^{-4}$
3	0.05619307	$0.31959000 \times 10^{-6}$
4	0.05619338	$0.83400000 \times 10^{-8}$
5	0.05619339	$0.22000000 \times 10^{-9}$
6	0.05619339	0
7	0.05619339	0

ตารางที่ 4.42 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 6โดยสูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$

ค่าจริง=0.19314500

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.18903795	$0.41070500 \times 10^{-2}$
2	0.19303327	$0.11173000 \times 10^{-3}$
3	0.19314400	$0.10000000 \times 10^{-5}$
4	0.19314708	$0.20800000 \times 10^{-5}$
5	0.19314717	$0.21700000 \times 10^{-5}$
6	0.19314718	$0.21800000 \times 10^{-5}$
7	0.19314718	$0.21800000 \times 10^{-5}$

ตัวอย่างการหาค่าปริพันธ์รูปแบบต่างๆ

จะนำเสนอการหาค่าปริพันธ์ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)x^2dx$, $\int_1^2 w_1(x)(1+x)dx$, $\int_1^2 w_1(x)(2+x^2)dx$, $\int_1^2 w_1(x)(x^2-2x+1)dx$, $\int_1^2 w_1(x)(2x^2+5)dx$, $\int_1^2 w_1(x)(\frac{-5x^2}{1+2x})dx$

ผลที่ได้มีดังนี้

ตารางที่ 4.43 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)x^2dx$

ค่าจริง=1.25000000

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.25000000	0
2	1.25000000	0
3	1.25000000	0
4	1.25000000	0
5	1.25000000	0
6	1.25000000	0
7	1.25000000	0

ตารางที่ 4.44 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)(1+x)dx$

ค่าจริง=1.145833333

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	1.23958333	9.38000000×10^{-2}
2	1.14583333	0
3	1.14583333	0
4	1.14583333	0
5	1.14583333	0
6	1.14583333	0
7	1.14583333	0

ตารางที่ 4.45 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)(2+x^2)dx$

ค่าจริง=2.145833333

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	2.12500000	0.20833330×10^{-1}
2	2.23958333	0.93750000×10^{-1}
3	2.14583333	0
4	2.14583333	0
5	2.14583333	0
6	2.14583333	0
7	2.14583333	0

ตารางที่ 4.46 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)(x^2-2x+1)dx$

ค่าจริง=0.145833333

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	0.12500000	0.20833330×10^{-1}
2	0.23958333	0.93749997×10^{-1}
3	0.14583333	0.30000000×10^{-10}
4	0.14583333	0.30000000×10^{-10}
5	0.14583333	0.30000000×10^{-10}
6	0.14583333	0.30000000×10^{-10}
7	0.14583333	0.30000000×10^{-10}

ตารางที่ 4.47 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)(2x^2+5)dx$

ค่าจริง= 4.791666666

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	4.75000000	4.16666660×10^{-2}
2	4.97916666	1.87500000×10^{-1}
3	4.79166666	0
4	4.79166666	0
5	4.79166666	0
6	4.79166666	0
7	4.79166666	0

ตารางที่ 4.48 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงในฟังก์ชันถ่วงที่ 1 โดยสูตร $\int_1^2 w_1(x)(\frac{-5x^2}{1+2x})dx$

ค่าจริง= -1.407919712

n	ผลลัพธ์	ค่าความคาดเคลื่อน
1	-1.40625000	1.66971200×10^{-3}
2	-1.41574585	7.82614400×10^{-3}
3	-1.40791933	3.75000000×10^{-7}
4	-1.40791970	6.00000000×10^{-9}
5	-1.40791971	1.00000000×10^{-9}
6	-1.40791971	0
7	-1.40791971	0

4.4 การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation)

การประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด (least–squares approximation) ได้แสดงโดยการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ดังนี้

4.4.1 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1 ผลที่ได้มี ดังนี้

$y_1(x) = 7.408121055 - 9.271064666\,x$

$y_2(x) = 14.06149109 - 41.20724083\,x + 31.93617616\,x^2$

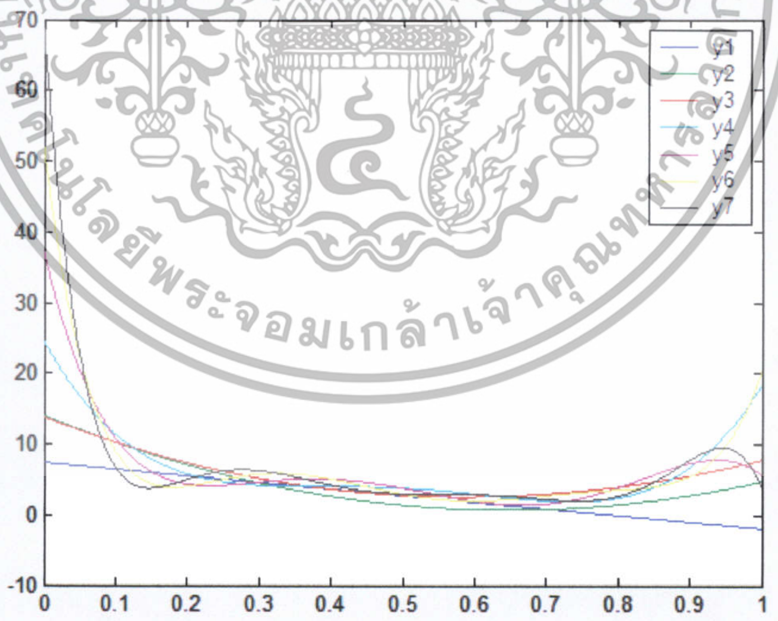
$y_3(x) = 13.85082974 - 39.38150913\,x + 36.14940315\,x^2 - 2.808817990\,x^3$

$y_4(x) = 24.49412103 - 182.7182963\,x + 598.7997764\,x^2 - 841.4359894\,x^3 + 419.3135857\,x^4$

$y_5(x) = 37.13006039 - 426.7689562\,x + 2034.535547\,x^2 - 4396.591276\,x^3 + 16.065104\,x^4 - 1558.798884\,x^5$

$y_6(x) = 51.77031644 - 809.1356385\,x + 5154.265714\,x^2 - 15694.64579\,x^3 + 24523.65624\,x^4 - 19028.77999\,x^5 + 5823.326641\,x^6$

$y_7(x) = 68.40884119 - 1374.105949\,x + 11242.80152\,x^2 - 45738.74352\,x^3 + 102025.2526\,x^4 - 127077.1712\,x^5 + 82870.84876\,x^6 - 22013.47011\,x^7$



ภาพที่ 4.7 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 1

4.4.2 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2 ผลที่ได้มี ดังนี้

$y_1(\mathrm{x}) = 0.2366934644 + 0.8141936381\,x$

$y_2(\mathrm{x}) = 0.1577956430 + 1.445376209\,x - 0.6311825712\,x^2$

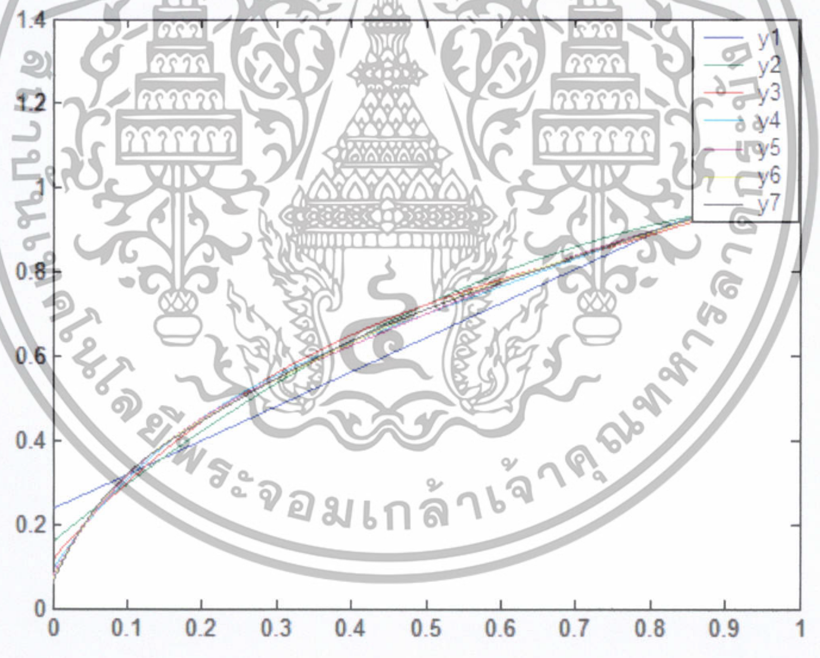
$y_3(\mathrm{x}) = 0.1170527789 + 2.015776306\,x - 2.097925678\,x^2 + 0.9778287379\,x^3$

$y_4(\mathrm{x}) = 0.09454263111 + 2.556019855\,x - 4.799143432\,x^2 + 5.299777150\,x^3 - 2.160974208\,x^4$

$y_5(\mathrm{x}) = 0.07889784136 + 3.087942739\,x - 8.804210021\,x^2 + 16.31371060\,x^3 -$
$0.67680794\,x^4 + 5.006333571\,x^5$

$y_6(\mathrm{x}) = 0.06806885342 + 3.607734156\,x - 14.52191503\,x^2 + 40.57063816\,x^3 -$
$61.45802045\,x^4 + 46.58962969\,x^5 - 13.86109756\,x^6$

$y_7(\mathrm{x}) = 0.05970785418 + 4.126093492\,x - 22.04622352\,x^2 + 84.37758020\,x^3 - 185.1846154\,x^4$
$+ 227.1600436\,x^5 - 144.9397131\,x^6 + 37.45052288\,x^7$



ภาพที่ 4.8 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 2

4.4.3 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3 ผลที่ได้มี ดังนี้

y_1(x) = 1.191581541-2.583894958* x

y_2(x) = 2.255370955-8.215722141 x +6.25758635 x^2

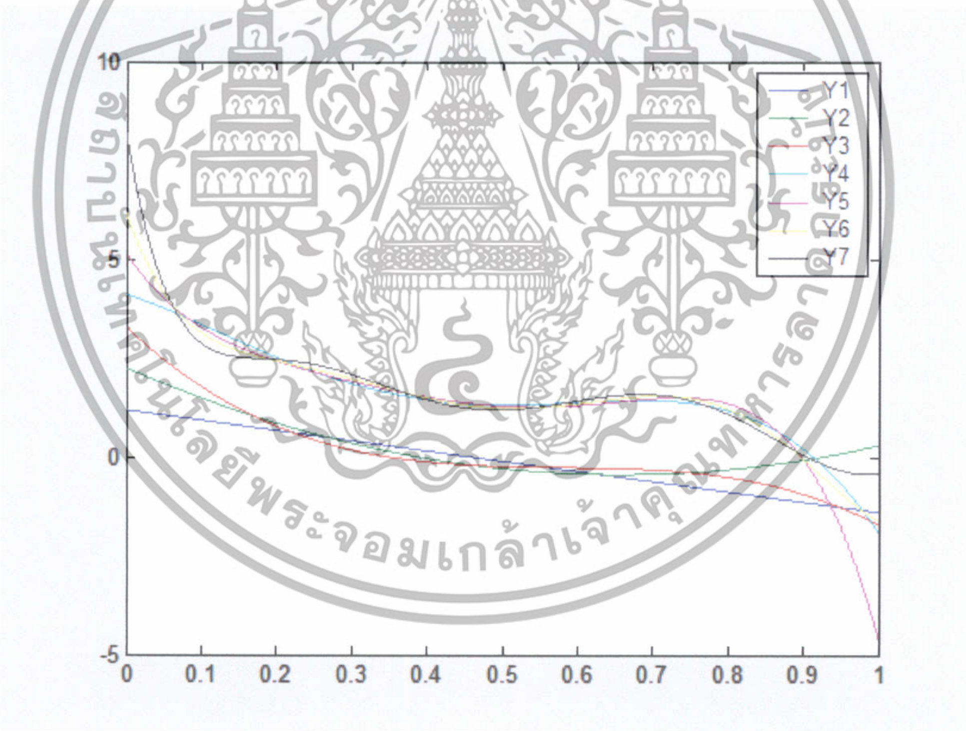
y_3(x) = 3.301540061-18.04501081 x +30.86460787 x^2 -17.81955039 x^3

y_4(x) = 4.115711805-6.272429926 x -18.79453995 x^2 +61.74390268 x^3 -42.71689655* x^4

y_5(x) = 5.129416170-27.11799050 x +111.7447679 x^2 -282.2142471 x^3 +358.2280074 x^4 -170.3493876 x^5

y_6(x) = 6.152588156-55.33636668 x +354.7871024 x^2 -1211.224930 x^3 +2111.376759 x^4 -1768.309021 x^5 +560.9575191 x^6

y_7(x) = 8.190648080-116.2695945 x +939.8118007 x^2 -3803.080269 x^3 +8140.261275 x^4 -9359.033690 x^5 +5445.290769 x^6 -1255.581366 x^7



ภาพที่ 4.9 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 3

4.4.4 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4 ผลที่ได้มี ดังนี้

$y_1\,(\mathrm{x}) = 5.002482038\text{-}5.227955584\,x$

$y_2\,(\mathrm{x}) = 8.947754994\text{-}21.30128985\,x + 14.61212206\,x^2$

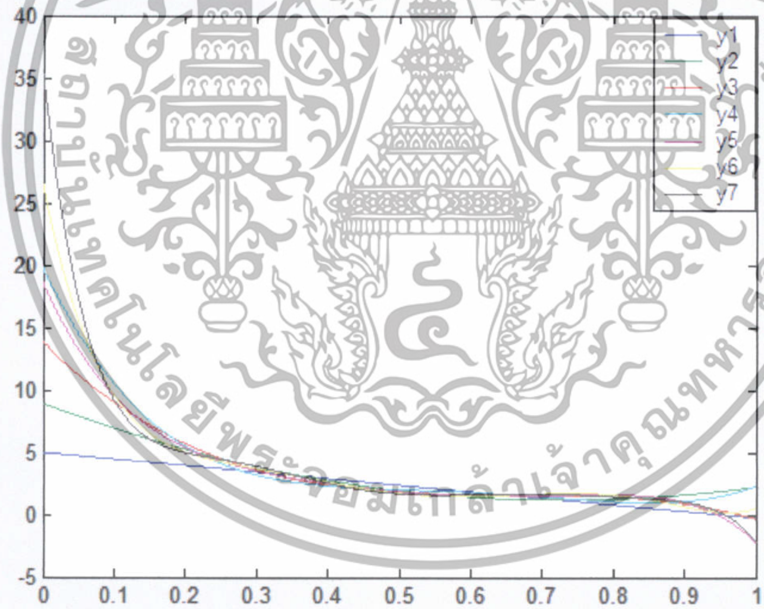
$y_3\,(\mathrm{x}) = 13.81584252\text{-}55.63249914\,x + 84.99149828\,x^2 \text{-}43.46824298\,x^3$

$y_4\,(\mathrm{x}) = 19.73745984\text{-}118.6230870\,x + 299.8437781\,x^2 \text{-}335.0897690\,x^3 + 136.4391568\,x^4$

$y_5\,(\mathrm{x}) = 18.56158696\text{-}126.4501723\,x + 441.1805394\,x^2 \text{-}837.1737989\,x^3 + 806.6610742\,x^4$
$\text{-}304.8915516\,x^5$

$y_6\,(\mathrm{x}) = 26.47361838\text{-}283.4341240\,x + 1521.553166\,x^2 \text{-}4319.327139\,x^3 + 6528.065394\,x^4$
$\text{-}4942.725027\,x^5 + 1469.940222\,x^6$

$y_7\,(\mathrm{x}) = 35.34864949\text{-}509.2914502\,x + 3552.478541\,x^2 \text{-}13160.96576\,x^3 \text{-}{+}27332.16821\,x^4$
$\text{-}31978.18374\,x^5 + 19710.30454\,x^6 \text{-}4983.990159\,x^7$



ภาพที่ 4.10 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 4

4.4.5 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5 ผลที่ได้มี ดังนี้

y_1 (x) = 2.405194842-1.837806696 x

y_2 (x) = 3.239160872-5.544322514 x +3.706515918 x^2

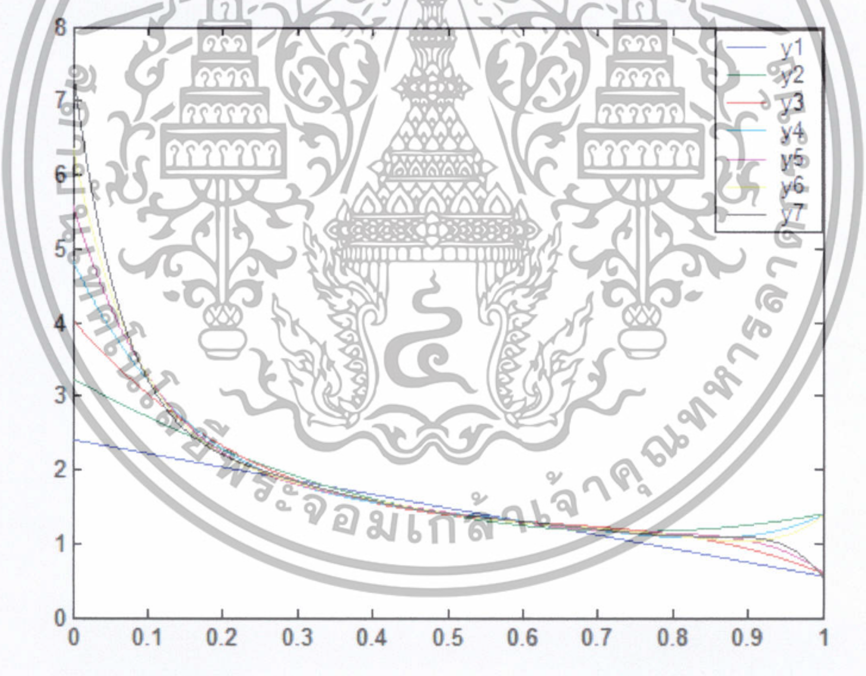
y_3 (x) = 4.036723587-11.60581429 x +17.10562709 x^2 -8.932753247 x^3

y_4 (x) = 4.819025666-20.48831855 x +49.47479289 x^2 -55.90646365 x^3 +23.48715997 x^4

y_5 (x) =5.589391602-32.67395135 x +114.4410453 x^2 -209.3249386 x^3 +188.6526061 x^4 -66.06879724 x^5

y_6 (x) =6.358292863-48.73455293 x +230.8278140 x^2 -604.3599161 x^3 +872.0438263 x^4 -649.0115550 x^5 +194.2565033 x^6

y_7 (x) =7.422183965 -76.31846256 x +484.8942355 x^2 -1741.557557 x^3 +3630.208668 x^4 -4350.069838 x^5 +2775.446993 x^6 -729.4863057 x^7



ภาพที่ 4.11 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 5

4.4.6 สมการของการปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6 ผลที่ได้มี ดังนี้

y_1 (x) = 2.069074431-1.099825064 x

y_2 (x) = 1.935423646+4.983913590 x -5.370722933 x^2

y_3 (x) = 3.348403137-7.491029696*x x +21.56852562 x^2 -16.43312050 x^3

y_4 (x) = 4.577812525-25.26437679 x +89.93543147 x^2 -112.9063121 x^3 +45.07956209 x^4

y_5 (x) =5.312602465-40.99384782 x +183.1941304 x^2 -336.8645271 x^3 +279.1216222 x^4 -88.57982148 x^5

y_6 (x) = -66.40197326 x +6.166454629+397.3136515 x^2 -1105.200831 x^3 +1612.907186 x^4 -1195.853705 x^5 +352.5105624 x^6

y_7 (x) =7.302568985 -112.3923241 x +927.1729370 x^2 -3768.592265 x^3 +8435.123170 x^4 -10504.48794 x^5 +6794.514933 x^6 -1777.556813 x^7

ภาพที่ 4.12 การปรับเรียบเส้นโค้ง (curve smoothing) ของฟังก์ชันถ่วงที่ 6

บทที่ 5
สรุปผลงานการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ทำการหาพหุนามเชิงตั้งฉากทั้งหกลำดับ เพื่อทำการหาค่ารากพหุนามเชิงตั้งฉากและทำการประยุกต์ใช้ในสองแนวทาง ได้แก่ หาปริพันธ์เชิงตัวเลขและการประมาณค่าในช่วงแบบกำลังสองน้อยสุด ซึ่งได้ผลดังนี้

5.1.1 ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง

ค่าปริพันธ์ของค่าถ่วง ได้ใช้รูปแบบของเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula type) โดยรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ซึ่งค่าถ่วงเหล่านี้จะเป็นค่าคงที่ ทำให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ มีค่าคงที่ด้วย นั่นคือในรูปแบบแต่ละรูปแบบของของเกาส์จะมี จุดจากพหุนามเชิงตั้งฉากหนึ่ง และมีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น

การหาค่าปริพันธ์ของค่าถ่วงได้ทำการหาค่าปริพันธ์โดยใช้สูตร $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}dx$, $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+x^2}dx$, $\int_0^1 \frac{w(x)}{1+2x}dx$, $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+x}dx$, $\int_0^1 \frac{w(x)}{2+2x}dx$ และ $\int_0^1 \frac{w(x)}{4-2x}dx$ ซึ่งเมื่อนำค่าที่ได้ระหว่างค่าจริงกับค่าที่คำนวณได้ มาเปรียบเทียบกัน พบว่า การหาค่าปริพันธ์โดยมีฟังก์ชันถ่วงเป็นตัวที่ช่วยในการทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่ามาก

5.2 ข้อเสนอแนะ

การหาฟังก์ชันถ่วงใหม่ๆที่มีประโยชน์ในการประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ ฟังก์ชันถ่วงทั้งหกฟังก์ชันที่นำเสนอนี้เป็นฟังก์ชันถ่วงที่กำหนดขึ้นในช่วง $[a,b]$ เนื่องจากต้องการศึกษาให้สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ หากต้องการนำฟังก์ชันถ่วงไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆ สามารถกำหนดฟังก์ชันถ่วงและช่วงของฟังก์ชันถ่วงได้ เพื่อให้สอดคล้องกับงานที่จะนำไปใช้ในด้านนั้นๆ ได้อย่างเหมาะสม

ฟังก์ชันถ่วงต่างๆนั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งการประยุกต์ใช้อย่างเหมาะสมนั้นจะทำให้ค่าที่ได้ใกล้เคียงกับค่าจริง โดยการประยุกต์ขึ้นอยู่กับงานที่จะใช้หากมีการคำนวณที่เหมาะกับงานจะทำให้การคำนวณนั้นคุ้มค่าเนื่องจากมีการคำนวณที่ต่อเนื่องดังนั้นจึงควรใช้ฟังก์ชันถ่วงที่เหมาะสมกับงานที่จะประยุกต์นั้น

รายการอ้างอิง

[1] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2529.

[2] A.Garrido. **An Electrostatic Interpretation of the Zero of the Freud-Type Orthogonal Polynomials**. Mathematics. Kent State University, 2005.

[3] Alex Kasmas. **Orthogonal polynomials and the finite Toda lattice. Mathematics.** Uiversity of Georgia, 1996.

[4] Alicia Cachafeiro. **On asymptotic properties of Freud–Sobolev orthogonal polynomials.** Matematica Aplicada. Universidad de Vigo, 2000.

[5] A.Iserles. **Zero of expansions in orthogonal polynomials.** Applied Mathematics and Theoretical Physics. University of Cambridge, 1988.

[6] D. V. Chudnovsky. **Solution of the pulse width modulation problem using orthogonal polynomials and Korteweg-de Vries equations.** Mathematics and Advanced Supercomputing. Polytechnic Unversity, 1999.

[7] Evgeniy D. Golovin. **Usage of Orthogonal Polynomials at Calculation of Transfer Processes in Electric Circuits with Variable Parameters Using Differential Transformations.** Master of Education. Tomsk State University, 2003.

[8] Gradimir V. Milovanovic□. **Multiple Orthogonal Polynomials on the semicircle.** Ser.Math. Facta Universitatis, 2005.

[9] Ira M. Gessel. **Generalized Rook Polynomials and Orthogonal Polynomials.** Mathematics. Brandeis University, 1988.

[10] J. Arveu□. **Some discrete multiple orthogonal polynomials.** Mathematics. Universidad Carlos III de Madrid, 2001.

[11] Jose□ L. **Approximation of Orthogonal Polynomials in Terms of Hermite Polynomials.** Matematia Aplicada. Universidad de Zaragoza, 1991.

[12] K.H.Kwon. **Orthogonal Polynomials Eigenfunctions of second-order partial differential equation.** American Mathematical society. Seoul National University, 2001,64

[13] Le Active Math. **Definition of step functions.** [Online]. Avalable:
http://demo.activemath.org/ActiveMath2/search/edit.cmd?dictNum=0&stepnum=4

[14] Manuel Alfaro. **Sobolev orthogonal polynomials: the discrete–continuous case.** Mathematics. Universidad de Zaragoza, 1991.

[15] Phimpraphai Phutthiwat. **Orthogonal Polynomials and Applications.** Master of Science. King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, 2005

[16] Sci–Tech Dictionary. **Weight function.** [Online]. Avalable: http://www.answers.com/topic/weight-function

[17] V.F.Aleksin. **Construction and Application of Orthogonal Polynomials in Kinetics of Quasi–particles.** Physics and Technology. Kharkov State University, 1996.

[18] Yunier Bello Cruz. **Legendre Orthogonal Polynomial Primitives**. Mathematics. Universidad de Matanzas, 2005.