

โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ

PROGRAM FOR CREATE AND CALCULATE GEOMETRY ON PLANE



ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2546

เลขหมู่.....

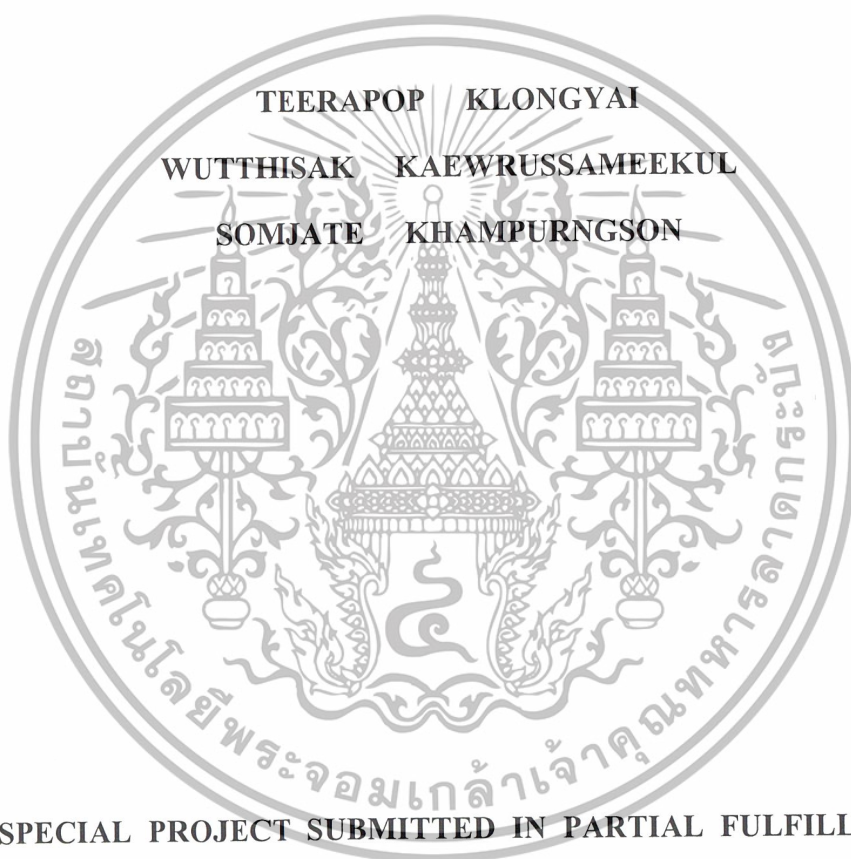
เลขทะเบียน.....51766

วันเดือนปี.....29 ต.ค. 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

.b.....
.i.....

PROGRAM FOR CREATE AND CALCULATE GEOMETRY ON PLANE



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF
SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTERR SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2003

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ

PROGRAM FOR CREATE AND CALCULATE GEOMETRY ON
PLANE

ชื่อนักศึกษา

นายธีรภพ กลองใหญ่ 43050012

นายวุฒิศักดิ์ แก้วศรีมุกด 43050046

นายสมเจตน์ จำพึ่งสน 43050051

ภาควิชา

คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา

รศ.ภักคินี ชิตสกุล

อ.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระ
จอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2546

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ ผศ.กฤษณา ไตรสุวรรณ	
กรรมการ อ.บุญมาส พิมพ์พรรณชาติ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ภักคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา อ.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์	

(ผศ.ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ		
ชื่อนักศึกษา	นายธีรภพ	กลองใหญ่	43050012
	นายวุฒิศักดิ์	แก้วรัศมีกุล	43050046
	นายสมเจตน์	จำพืงสน	43050051
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์		
สาขา	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
ปีการศึกษา	2546		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภักคินี ชิตสกุล		
	อ.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์		

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงการปัญหาพิเศษนี้คือ การสร้างโปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ เริ่มต้นด้วยการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต และศึกษาเกี่ยวกับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา Visual Basic ในส่วนเนื้อหาเกี่ยวกับกราฟฟิกและสร้างโปรแกรม ขั้นตอนสุดท้ายคือการแก้ไขความผิดพลาดของโปรแกรม ซึ่งโปรแกรมนี้สามารถทำให้ผู้ที่กำลังศึกษาและผู้ที่สนใจที่จะศึกษาในหัวข้อนี้ทำงานได้สะดวกยิ่งขึ้น และเป็นแนวทางให้ผู้ที่ต้องการพัฒนาโปรแกรมด้านนี้ให้ดีขึ้นในอนาคต

Special Project Title	PROGRAM FOR CREATE AND CALCULATE GEOMETRY ON PLANE		
Student	Mr. Teerapop	Klongyai	43050012
	Mr. Wutthisak	Kaewrussameekul	43050046
	Mr. Somjate	Khampurngson	43050051
Degree	Bachelor's Degree of Science		
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science		
Programme	Applied Mathematics		
Academic	2003		
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Pakkinnee Chitsakul Jaipong Wongsawasdi		

ABSTRACT

The purpose of this special topic is to creating program for create and calculate geometry on plane . The first session is studied geometry on plane topic. The second , studied graphic and application development by Visual Basic . The final step is evaluating , testing and debugging program. Besides, this program is very useful for student and user who studying in this topic and also for anybody who want to develop this program in future.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำ ต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล และ อาจารย์ใจปอง วงษ์สวัสดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งทางด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2547

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการจัดทำ.....	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา.....	1
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....	1
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ.....	2
บทที่ 2 รูปเรขาคณิต.....	3
2.1 บทนำ.....	3
2.1.1 ส่วนของเส้นตรงกำหนดทิศทาง.....	3
2.1.2 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน.....	4
2.1.3 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด.....	6
2.1.4 ความชันของเส้นตรง.....	7
2.1.5 การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่กำหนดจุดทุกจุด.....	7
2.1.6 พื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมที่กำหนดจุดทุกจุด.....	9
2.2 เส้นตรง.....	11
2.2.1 สมการของเซตของจุด.....	11
2.2.2 ความชันของแต่ละจุดของสมการ.....	12
2.2.3 ความชันของเส้นที่ตัดแกน Y.....	12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.2.4 เส้นตรงและสมการ $Ax+By+C=0$	13
2.2.5 ระยะทางระหว่างเส้นและจุด	14
2.3 วงกลม.....	17
2.3.1 สมการมาตรฐานของวงกลม.....	17
2.3.2 สมการทั่วไปของวงกลม.....	18
2.3.3 เส้นสัมผัสสามเส้นของวงกลม.....	20
2.4 รูปทรงกรวย.....	23
2.4.1 บทนำ.....	23
2.4.2 พาราโบลา.....	23
2.4.3 วงรี.....	28
2.4.4 การหาพื้นที่ของวงรี.....	31
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย.....	32
3.1 ขั้นตอนในการรวบรวมข้อมูล.....	32
3.2 ระบบงาน.....	32
3.3 แผนภาพการทำงานของโปรแกรม.....	32
3.3.1 Flowของ Point	33
3.3.2 Flowของ Line	34
3.3.3 Flowของ Circle	35
3.3.4 Flowของ Ellipse	36
3.3.5 Flowของ Rectangle	37
3.3.6 Flowของ Polygon	38
3.3.7 Flowของ Sum Any Area	39
3.3.8 Flowของ Draw By Value – Line	40
3.3.9 Flowของ Draw By Value – Circle	41
3.3.10 Flowของ Draw By Value – Ellipse.....	42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.3.11 Flowของ Summary Area	43
3.3.12 Flowของ Find Angle.....	44
บทที่ 4 วิธีการใช้โปรแกรม.....	45
4.1 แนะนำโปรแกรม	45
4.2 การทำงานในหน้าจอเมนู	46
4.2.1 แถบเมนู	46
4.2.2 ปุ่มคำสั่ง	52
4.3 คุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่โปรแกรมต้องการ.....	63
บทที่ 5 การวิจารณ์หรืออภิปรายผล.....	65
บรรณานุกรม	55



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงเส้นตรง	3
2.2 แสดงความสัมพันธ์ของเส้นตรง	4
2.3 แสดงพิกัดคาร์ทีเซียน	5
2.4 แสดงระยะทางระหว่างจุดสองจุด	6
2.5 แสดงพื้นที่ของ $\Delta P_1 P_2 P_3$	8
2.6 แสดงเส้นตรงความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$	11
2.7 แสดงระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2	14
2.8 แสดงวงกลมรัศมี 5 หน่วย	17
2.9 แสดงวงกลม	18
2.10 แสดงจุดสามจุดบนวงกลม	20
2.11 แสดงภาพตัดกรวย	23
2.12 แสดงพาราโบลา	24
2.13 แสดงพาราโบลา	26
2.14 แสดงพาราโบลา	26
2.15 แสดงพาราโบลา	27
2.16 แสดงวงรี	28
2.17 แสดงวงรี	29
2.18 แสดงวงรี	30
3.1 Flow ของ Point	33
3.2 Flow ของ Line	34
3.3 Flow ของ Circle	35
3.4 Flow ของ Ellipse	36
3.5 Flow ของ Rectangle	37
3.6 Flow ของ Polygon	38
3.7 Flow ของ Sum Any Area	39
3.8 Flow ของ Draw By Value – Line	40
3.9 Flow ของ Draw By Value – Circle	41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.10 Flowของ Draw By Value – Ellipse.....	42
3.11 Flowของ Summary Area	43
3.12 Flowของ Find Angle	44
4.1 แสดงตัวอย่างโปรแกรม	45
4.2 แสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Line	47
4.3 แสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Circle	48
4.4 แสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Ellipse	49
4.5 แสดงการใช้เครื่องมือ Set New Scale	50
4.6แสดงการใช้เครื่องมือ Set Shape Color.....	51
4.7 แสดงการใช้เครื่องมือ Point.....	52
4.8 แสดงการใช้เครื่องมือ Line	53
4.9 แสดงการใช้เครื่องมือ Circle	54
4.10 แสดงการใช้เครื่องมือ Ellipse.....	55
4.11 แสดงการใช้เครื่องมือ Rectangle	56
4.12 แสดงการใช้เครื่องมือ Polygon	57
4.13 แสดงการใช้เครื่องมือ Find Angle.....	58
4.14 แสดงการใช้เครื่องมือ Find Any area	59
4.15 แสดงการใช้เครื่องมือ History	60
4.16 แสดงการใช้เครื่องมือ Cross Point	61
4.17 แสดงการหามุมโดยใช้เครื่องมือ Cross Point	62
4.18 แสดงการพื้นที่โดยใช้เครื่องมือ Cross Point	62

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เนื่องจากการคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบต่างๆ ไปกระทำได้ไม่สะดวก และหากต้องการให้
ง่ายและเข้าใจก็อาจจะต้องวาดภาพประกอบในการคำนวณ แต่การวาดภาพก็มีข้อจำกัดหากรูปมี
ขนาดเล็กหรือใหญ่เกินไป นอกจากนี้การคำนวณค่าที่ต้องการยังมีความยุ่งยาก และยังต้อง
คำนวณซ้ำหลายครั้งๆ หากมีการเปลี่ยนแปลงค่าที่ใช้ ดังนั้นเพื่อเป็นการประหยัดเวลาและสะดวก
ต่อการคำนวณจึงมีความสนใจที่จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว โดยการสร้างโปรแกรมคำนวณรูป
เรขาคณิตบนระนาบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการจัดทำ

- 1.2.1 เพื่อแก้ปัญหาในการคำนวณรูปเรขาคณิตให้สะดวกยิ่งขึ้น
- 1.2.2 เพื่อช่วยในการศึกษาเรื่องรูปทรงเรขาคณิตให้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น
- 1.2.3 เพื่อความสะดวกต่อการสร้างรูปเรขาคณิตและยังเป็นภาพที่มีความถูกต้อง
- 1.2.4 ช่วยลดความซ้ำซ้อนในการคำนวณ และทำให้การคำนวณเป็นไปอย่างถูกต้องแม่นยำ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็น โปรแกรมคำนวณรูปเรขาคณิต โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของรูป
เรขาคณิตโดยมีความสามารถ

- 1.3.1 วาดรูปเส้นตรง วงกลม และวงรีตามสมการที่กำหนดจากผู้ใช้
- 1.3.2 คำนวณค่าพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ความยาวของเส้นรอบวง ระยะทางต่างๆ
- 1.3.3 วาดรูปตามที่ใช้ต้องการวาดโดยไม่ต้องกำหนดสมการ

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

- 1.4.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต
- 1.4.2 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียน
- 1.4.3 สร้างโปรแกรมคำนวณรูปเรขาคณิต
- 1.4.4 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ
- 1.4.5 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ
- 1.4.6 จัดทำเอกสารประกอบการทำโปรแกรมคำนวณรูปเรขาคณิต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.5.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องรูปเรขาคณิต
- 1.5.2 ช่วยให้การคำนวณรูปเรขาคณิตเป็นไปอย่างสะดวก
- 1.5.3 ช่วยให้ความรู้รูปเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

- 1.6.1 เครื่องคอมพิวเตอร์ PENTIUM 4 2.0 GHz
- 1.6.2 RAM 512 MB
- 1.6.3 ระบบปฏิบัติการ WINDOW XP
- 1.6.4 โปรแกรม VISUAL STUDIO 6.0
- 1.6.5 หนังสือการเขียนโปรแกรม VISUAL STUDIO



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2 รูปเรขาคณิต

2.1 บทนำ

2.1.1 ส่วนของเส้นตรงกำหนดทิศทาง (DIRECT LINE SEGMENT)

ในการศึกษาเรื่องเรขาคณิตบนระนาบ เราจะให้ส่วนของเส้นตรง SU และ ส่วนของเส้นตรง US ไม่ต่างกันเพราะเราสนใจเฉพาะความยาวของส่วนของเส้นตรง ในการศึกษาเรื่องการวิเคราะห์เรขาคณิต แม้ว่าจะพิจารณาทั้งความยาวและทิศทาง เมื่อเรากล่าวถึงความยาวของส่วนของเส้นตรงเราจะพิจารณาเครื่องหมาย เมื่อเราพิจารณาทั้งความยาวและทิศทางของส่วนของเส้นตรง เราจะเรียกว่าเป็น Direct Line Segment โดยส่วนของเส้นตรงกำหนดทิศทางเราจะหมายถึงส่วนที่เราเลือกซึ่งมีทิศทางเป็นบวก โดยทิศทางที่เป็นบวกจะชี้ไปตามลูกศรที่ผ่านส่วนของเส้นตรง



ซึ่งเส้นตรง L มีทิศทางตามหัวลูกศร ซึ่งหมายถึงความยาวที่ได้จากจุดทางขวาไปจุดทางซ้ายบนเส้นตรงจะมีทิศทางเป็นบวก ปริมาณความยาวที่วัดได้จากจุดทางขวาไปจุดทางซ้าย หรือในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางที่เป็นบวกบนเส้นตรง เราจะให้ทิศทางเป็นลบ ดังนั้นส่วนของเส้นตรง SU มีทิศทางเป็นบวก และส่วนของเส้นตรง US มีทิศทางเป็นลบ ซึ่งทิศทางที่เราพิจารณาจะแสดงโดยลำดับชี้ จุดปลายของส่วนที่เราเขียน ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์

$$SU = -US$$

$$SU + US = 0$$

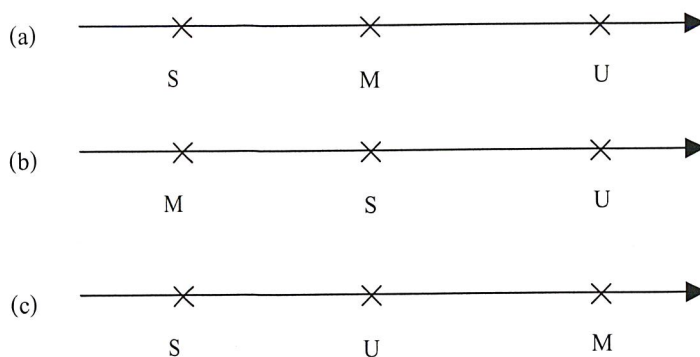
เราจะพิจารณาความสัมพันธ์ของจุดสามจุดบนเส้นตรง M, S และ U โดยระยะจากจุด M ไปยังจุด S และ U จากรูป 2.2a เราจะได้ว่า

$$SU = SM + MU$$

จากรูป 2.2b เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} SU &= -MS + MU \\ &= SM + MU \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ของเส้นตรง

เนื่องจาก

จากรูป 2.2c เราจะได้ว่า

เนื่องจาก

เหมาะสมจาก

ดังนั้นสำหรับทั้งสามตัวอย่างที่ขึ้นมา ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนที่เหมือนกัน จะเขียนในรูปที่

$$SM + MU + US = 0$$

2.1.2 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (THE CARTESIAN COORDINATE SYSTEM)

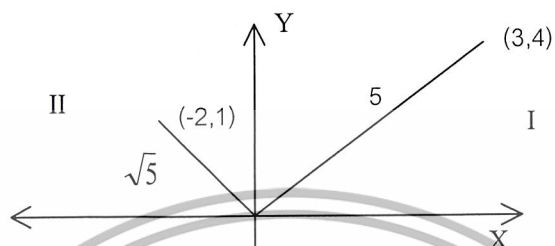
โครงร่างของ rectangular cartesian coordinate ประกอบด้วยเส้นตั้งฉากกัน 2 เส้น เรียกว่า แกน coordinate แกนตั้งเรียกว่าแกน X และแกนนอนเรียกว่าแกน Y และแกนทั้งสองแกนตัดกันที่จุดกำเนิด ระนาบจะถูกแบ่งเป็น 4 ส่วน ซึ่งส่วนถูกแบ่งโดยแกน coordinate เรียกว่ามี 4 จตุภาค ส่วนบนขวาของ ระนาบเรียกว่าจตุภาคที่ I เขียนแทนได้โดย I สำหรับ II, III และ IV ตามทิศทวนเข็มนาฬิกา ตามรูป 2.3

จุดแสดงโดยให้ระยะทางและทิศทางจากแกน coordinate ส่วนของเส้นตรงกำหนดทิศทางจากแกน Y ไปยังจุดและขนานกับ X เรียกว่า abscissa ของจุดและส่วนของเส้นตรงกำหนดทิศทางจากแกน X ไปยังจุดและขนานกับ Y เรียกว่า ordinate และทั้งสองตัวนี้จะอ้างอิงถึงพิกัดของจุด ถ้าจุดอยู่ทางขวาของแกน Y abscissa เป็นบวก ถ้าอยู่ทางซ้ายของแกน Y abscissa เป็นลบ ถ้าจุดอยู่เหนือแกน X ordinate เป็นบวก ถ้าอยู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ได้แกนX ordinate)เป็นลบ โดยเราจะเขียน abscissaและordinate แยกกันด้วยcomma(,)และอยู่ในวงเล็บ() นั่นคือ(x, y) เรียกว่าคู่ลำดับ (x, y)

ตัวอย่าง จุดอยู่ทางขวาของแกนY 3หน่วย และอยู่เหนือแกนX 4หน่วย เราเขียนได้โดย (3,4) ทิศทางของแต่ละส่วนซึ่งแสดงโดยเครื่องหมายบวก (-2,1) แสดงจุดซึ่งจุดอยู่ทางซ้ายของแกนY 2 หน่วย และอยู่เหนือแกนX 1หน่วย ทิศทางที่เป็นลบจากแกนY แสดงโดยเครื่องหมายลบ หมายเลขจุดภาคเขียนได้ดังรูป2.3



รูปที่ 2.3

ระยะทางจากจุดศูนย์กลางเรียกว่าradius vector ของจุดและจะเป็นบวกตลอด กำลังสอง radius vector ของจุดจะเท่ากับผลบวกระหว่างกำลังสองของabscissa และกำลังสองordinate เนื่องจากความยาวเท่ากับ3 นั่นคือ $x^2 + y^2 = r^2$ ซึ่ง rเป็นระยะของจุดจากจุดกำเนิด

ตัวอย่าง radius vector ของจุด(3,4)เป็น $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ และradius vectorของจุด(-2,1)เป็น $\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ดังรูป2.3

เราจะใช้การประมาณค่าของ square root การประมาณค่าสามารถหาได้ โดยเราสามารถใส่ logarithmหรือการเปิดตารางsquare root

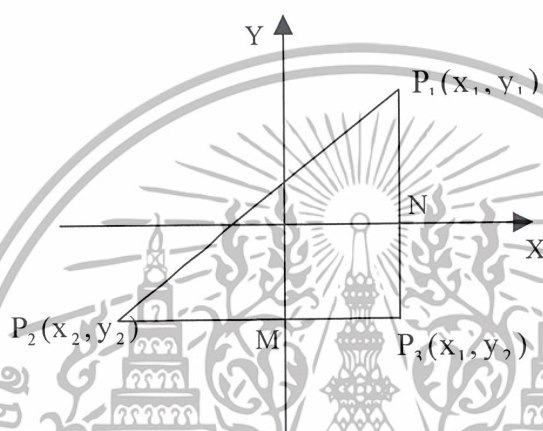
2.1.3 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (THE DISTANCE BETWEEN TWO POINT)

เราต้องการจะรู้ระยะทางจากจุดสองจุดที่กำหนดและเราสามารถหาสูตรในการหาได้ กำหนดให้สองจุดคือ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ตามรูป 2.4 จุด $P_3(x_1, y_2)$ หาได้โดยการตัดกันของเส้นซึ่งลากผ่าน P_1 ขนานแกน Y และลากผ่าน P_2 ขนานแกน X พิกัด x_1 และ y_2 นั่นคือ

$$P_2P_3 = P_2M + MP_3 = MP_3 - MP_2 = x_1 - x_2$$

และ

$$P_3P_1 = P_3N + NP_1 = NP_1 - NP_3 = y_1 - y_2$$



รูปที่ 2.4 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} (P_1P_2)^2 &= (P_2P_3)^2 + (P_3P_1)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ถ้าจุด P_1 อยู่ทางซ้ายของ P_2 เราจะได้ว่า $P_3P_2 = x_2 - x_1$ ถ้า P_1 อยู่ใต้ P_2 เราจะได้ว่า $P_1P_3 = y_2 - y_1$ ความสัมพันธ์ของตำแหน่ง P_1 และ P_2 ไม่สำคัญเพราะ $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ และ $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$ ดังนั้นสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎี

ความยาวของส่วนของเส้นตรงซึ่งระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็น

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

เราไม่กำหนดเครื่องหมายเพราะเราต้องการค่าระยะทางและไม่ต้องการทิศทาง

ตัวอย่าง จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรงที่จุด $(3,4)$ และที่จุด $(-2,1)$

วิธีทำ ไม่สำคัญว่าเราจะเลือก $(3,4)$ และ $(-2,1)$ เป็นจุด $P_1(x_1, y_1)$ เนื่องจากเครื่องหมายไม่มีผล ถ้าเราใช้ $(3,4)$ เป็นจุด P_1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \end{aligned}$$

2.1.4 ความชันของเส้นตรง (SLOPE)

ความชันของเส้นตรงผ่าน $p_1 = (x_1, y_1)$ และ $p_2 = (x_2, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ คือ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

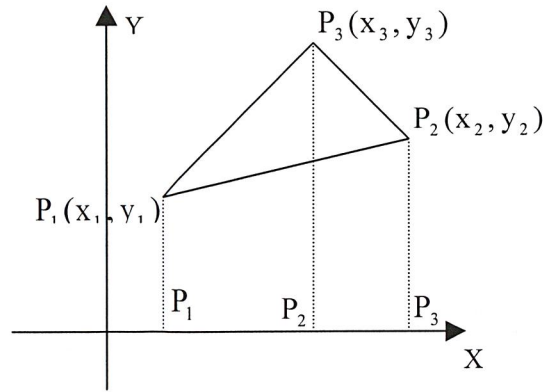
ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นตรงเมื่อ $p_1 = (2,0)$ และ $p_2 = (10,5)$

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงหาได้จากสูตร

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 0}{10 - 2} = \frac{5}{8}$$

2.1.5 การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่กำหนดจุดทุกจุด

กำหนดให้ $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เราจะหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ ได้จาก

รูปที่ 2.5 พื้นที่ของ $\Delta P_1P_2P_3$

พื้นที่ของ $\Delta P_1P_2P_3 =$ พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $M_1P_1P_3M_2 +$ พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $M_1P_1P_3M_2$
 $-$ พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $M_1P_1P_2M_2$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของ } \Delta P_1P_2P_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) \\ &\quad - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \end{aligned}$$

ทั้งนี้อาจเขียนให้อยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมทั้งสามที่จุด (2,2) , (2,4) และ (4,4)

วิธีทำ สูตรหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมคือ

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าจุดมุมในสูตรจะได้ว่า

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2 \times 4) + (2 \times 4) + (4 \times 2) - (2 \times 2) - (4 \times 4) - (2 \times 4)| = \frac{1}{2} |-4| = 2$$

2.1.6 พื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมที่กำหนดจุดทุกจุด

ในการหาพื้นที่ จุดทุกจุดต้องเรียงกัน โดยรูปทรง n เหลี่ยม จะมีจุด

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 \times y_2) + (x_2 \times y_3) + \dots + (x_n \times y_1) - (y_1 \times x_2) - (y_2 \times x_3) - \dots - (y_n \times x_1)]$$

โดยในการหาพื้นที่รูป polygon จะต้องรู้ตำแหน่งของจุดทุกจุดและจุดทุกจุดต้องเรียงกัน โดยในการหาพื้นที่นั้นจะจัดสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ โดยจะคูณทแยงไปเรื่อยๆจาก

$$(x_1 \times y_2) + (x_2 \times y_3) + (x_3 \times y_4) + \dots + (x_{n-1} \times y_n) + (x_n \times y_1)$$

$$\text{และ } (y_1 \times x_2) - (y_2 \times x_3) - (y_3 \times x_4) - \dots - (y_{n-1} \times x_n) - (y_n \times x_1)$$

โดยเมื่อได้แล้วให้บวกกันแล้วคูณด้วย $\frac{1}{2}$ จะได้พื้นที่ของรูป polygon โดยถ้าจุดเรียงกันตามเข็มนาฬิกาจะได้ค่าเป็นลบ และถ้าจุดหมุนวนทวนเข็มนาฬิกาจะได้ค่าเป็นบวก

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่รูปหกเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมทั้งหกที่จุด (2,2) , (1,3) , (1,4) , (2,5) , (3,4) และ (3,3)

วิธีทำ สูตรหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมคือ

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

แทนค่าจุดมุมในสูตรจะได้ว่า

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} (2 \times 3) + (1 \times 4) + (1 \times 5) + (2 \times 4) + (3 \times 3) + (3 \times 2) \\ - (1 \times 2) - (1 \times 3) - (2 \times 4) - (3 \times 5) - (3 \times 4) - (2 \times 3) \end{array} \right| = \frac{1}{2} |-8| = 4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 เส้นตรง

2.2.1 สมการของเซตของจุด (THE EQUATION OF A SET OF POINTS)

ปัญหาของเราคณิตวิเคราะห์ที่จะศึกษามีสองประเภทคือ

1. ให้ข้อมูลของเรขาคณิตมา แล้วให้หาสมการ
2. ให้สมการของจุดมาแล้วให้เขียนกราฟ

วิธีการแก้ปัญหาในAlgebraมีขั้นตอนดังนี้

1. ให้ $P(x, y)$ เป็นของจุดซึ่งใช้หาความโค้ง
2. เขียนลักษณะของเส้น โค้ง และเครื่องหมายโดยใช้สมการ
3. แปรสัญลักษณ์ทางเรขาคณิตไปเป็นสมการAlgebra โดยใช้สูตรต่างๆ

สมการที่ได้ตามขั้นตอนนี้เรียกว่า สมการของcurve จุด $P(x, y)$ จะต้องเป็นจุดบนcurve

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตรงซึ่งที่จุด $(1, -1)$ มีความชันเป็น $\frac{2}{3}$

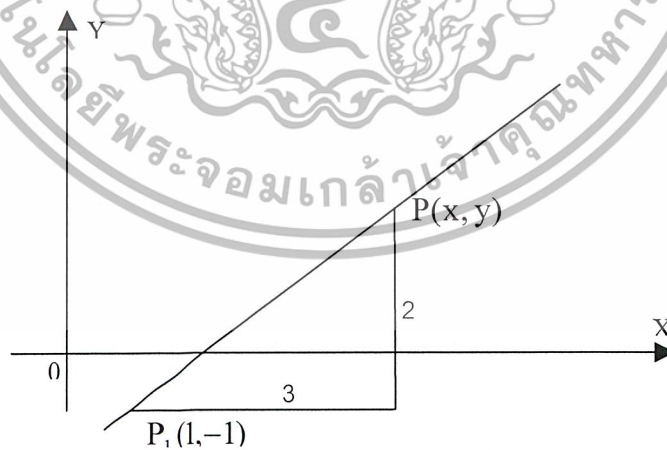
วิธีทำ ความชันของ PP_1 เป็น $m = \frac{2}{3}$ ในสูตรความชันเราได้ว่า

$$m = \frac{y - (-1)}{x - 1}$$

แทนค่า $m = \frac{2}{3}$ ลงในสมการ

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

จะได้กราฟตามรูป



รูปที่ 2.6 เส้นตรงความชันเท่ากับ $\frac{2}{3}$

เราสามารถเปลี่ยนรูปแบบของสมการโดยนำ $3(x - 1)$ คูณทั้งสมการ เราจะได้ว่า

$$3(y + 1) = 2(x - 1)$$

ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$2x - 3y = 5$$

2.2.2 ความชันของแต่ละจุดของสมการ (THE POINT-SLOPE FORM OF THE EQUATION)

เราจะพิจารณาสมการของเส้นซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และความชันเท่ากับ m ถ้าจุดอยู่บนเส้นเดียวกับ $P(x, y)$ ดังนั้น $\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)}$ เป็นความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P_1 และ P แต่เราให้เท่ากับ m เราจึงได้ว่า

$$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} = m$$

หรือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

เป็นสมการของเส้นตรงความชัน m และผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$

สมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$ เป็นความชันแต่ละจุดจากสมการของเส้นตรง เนื่องจากอยู่ในรูปของความชันและจุด ดังนั้นเราจะหาสมการเส้นตรงซึ่งให้ความชันและจุดที่ลากผ่านได้

ตัวอย่าง จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(4, -2)$ และความชันเท่ากับ $-\frac{3}{5}$

วิธีทำ เราแทนค่า x_1, y_1 และ m ในสมการเราจะได้

$$y - (-2) = -\frac{3}{5}(x - 4)$$

รูปแบบของสมการเราสามารถจัดให้อยู่ในรูปที่ดีขึ้นได้โดยหา ครน. ของตัวส่วนแล้วคูณทั้งสมการ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$3x + 5y = 2$$

2.2.3 ความชันของเส้นที่ตัดแกน Y (THE SLOPE-Y-INTERCEPT FORM OF THE EQUATION)

รูปแบบของสมการเส้นตรงนี้เป็นกรณีพิเศษของรูปแบบของความชันแต่ละจุด ซึ่งเราจะใช้จุดตัดของเส้นตรงและแกน Y

นิยาม ordinate (ระยะจากจากแกน X ที่วัดขนานกับแกน Y) ของแต่ละจุด ซึ่งตัดกันระหว่างแกน Y กับเส้นตรง เราจะเรียกว่าจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง

Abcissa ของแต่ละจุดเป็นศูนย์ เราจะใช้ b เป็นจุดที่ตัดแกน Y ในกรณีของเส้นตรง ดังนั้นเราจะหาสมการผ่านจุด $(0, b)$ ในจุด (x_1, y_1) ในสมการ

$$m = \frac{(y - y_1)}{(x - x_1)}$$

เราจะได้ว่า

$$y - b = m(x - 0)$$

จัดให้อยู่รูปของ y เราจะได้ว่า

$$y = mx + b$$

เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งความชัน m และตัดแกน Y ที่จุด b

สมการนี้หาจุดตัดที่แกน Y จากสมการนี้เนื่องจากอยู่ในรูปแบบของความชัน m และจุดตัดแกน Y ที่จุด b มักใช้กันบ่อยเนื่องจากจะให้ความชันและจุดตัดแกน Y โดย (x, y) ต้องอยู่บนเส้นตรง ไม่สามารถใช้ได้กรณีที่ขนานกับแกน Y เนื่องจากจะไม่มีจุดตัดบนแกน Y ซึ่งเรารู้ว่าเส้นตรงนั้นก็คือสมการเส้นตรง $x = x_1$

ตัวอย่าง จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งความชันเท่ากับ 2 และจุดตัดแกน Y เท่ากับ 3

วิธีทำ ถ้าเราแทนค่า m และ b จากสมการเราจะได้ว่า

$$y = 2x + 3$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรง

ตัวอย่าง จงหาความชันและจุดตัดแกน Y ของเส้นตรงซึ่งมีสมการ $2x + 3y = 7$

วิธีทำ วิธีหาสำหรับ Y เราจะได้ว่า

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$m = -\frac{2}{3} \text{ และ } b = \frac{7}{3}$$

2.2.4 เส้นตรงและสมการ $Ax + By + C = 0$ (THE STRAIGHT LINE AND $Ax + By + C = 0$)

เราจะพิสูจน์ 2 ทฤษฎีบทนี้ซึ่งเกี่ยวข้องกับเส้นตรง

ทฤษฎี สมการ $Ax + By + C = 0$ จะแสดงถึงสมการเส้นตรงซึ่งทั้ง A และ B ต้องไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

พิสูจน์ จากสมการถ้า $B = 0$ จะได้ว่า $Ax = -C$ หรือ $x = -\frac{C}{A}$ ถ้า $B \neq 0$ เราสามารถหาสมการสำหรับ y ได้คือ

$$y = \frac{-Ax}{B} + \frac{-C}{B}$$

นั่นคือสมการเส้นตรงมีความชันเท่ากับ $-\frac{A}{B}$ และจุดตัดแกน y ที่ $-\frac{C}{B}$

ทฤษฎี ทุกเส้นตรงจะมีรูปแบบสมการ $Ax + By + C = 0$ ซึ่ง A, B และ C เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิสูจน์ ถ้าเรามีเส้นตรงใดๆ ตัดแกน y , ขนานแกน y หรือ เส้นที่ทับกัน จากทฤษฎีบทที่ผ่านมา เส้นตัดแกน y จะอยู่ในรูป $y = mx + b$ ถ้าเส้นตรงขนานหรือทับกันกับแกน Y สมการจะอยู่ในรูป $x = x_1$, $x = 0$ ในกรณีที่เส้นทับกัน สมการทั้งคู่เป็นไปตามรูปแบบที่ยกตัวอย่าง ดังนั้นจึงได้ตามที่พิสูจน์

2.2.5 ระยะทางระหว่างเส้นและจุด (DISTANCE BETWEEN A LINE AND A POINT)

สูตรสำหรับหาระยะทาง d จากเส้นไปยังจุด เราจะพิจารณาเส้นตรง เราจะพิจารณาเส้นตรง L ซึ่งมีสมการ $Ax + By + C = 0$ และจุด $P_1(x_1, y_1)$ ตามรูปเราจะลากเส้นตั้งฉากจาก P_1 ไปยัง L และเรียกจุดที่ลากไปยัง L ว่า $P_2(x_2, y_2)$ เนื่องจาก P_2 อยู่บน L แทนพิกัดลงในสมการของ L เราจะได้ว่า

$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

เนื่องจาก P_2P_1 และ L ตั้งฉากกันความชันคูณกันได้ -1 เราจะได้ว่า

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{B}{A}$$

แทนในสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$ จะได้ว่า

$$y_1 - y_2 = \frac{B}{A}(x_1 - x_2)$$

จากสมการ $y = mx + b$ เราจะได้ว่า

$$y_2 = -\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B}$$



รูปที่ 2.7 ระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2

และจาก $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ เราจะได้ว่า

$$y_2 = y_1 - \frac{B}{A}(x_1 - x_2)$$

จึงได้ว่าทั้ง 2 สมการเท่ากับ y_2 และคูณทั้งสมการด้วย -1 จึงได้ว่า

$$-y_1 + \frac{B}{A}(x_1 - x_2) = \frac{A}{B}x_2 + \frac{C}{B}$$

ถ้าเรานำ $y_1 + \frac{A}{B}(x_1 - x_2)$ บวกทุกตัวในสมการ เราจะได้ว่า

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right) = y_1 + \frac{A}{B}x_2 + \frac{C}{B}$$

ดังนั้น

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{A^2 + B^2}{AB}\right) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}$$

จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$x_1 - x_2 = \frac{A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}$$

ในทางเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$y_1 - y_2 = \frac{A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}$$

แล้วแทนค่า $x_1 - x_2$ และ $y_1 - y_2$ ใน $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ จะได้ว่า

$$d^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

ดังนั้น

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ในระยะทางระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ และจุด $P_1(x_1, y_1)$ โดยให้ A และ B ไม่เป็นศูนย์
ทั้งคู่

ถ้า $A = 0$ สมการ $Ax + By + C = 0$ จะเป็น $By + C = 0$ หรือ $y = \frac{-C}{B}$ ดังนั้นระยะทาง

ระหว่างเส้นกับจุด $P_1(x_1, y_1)$ เป็น $\left|y_1 + \frac{C}{B}\right|$ ในทางเดียวกัน $B = 0$ ระยะทางระหว่างเส้นกับจุด P_1

เป็น

$$\left|x_1 + \frac{C}{A}\right|$$

เราจะพิจารณาค่าแห่งของ P_1 สัมพันธ์กับเส้นตรง L ถ้าเราหาจากสมการ $Ax + By + C = 0$ ของเส้นตรง L สำหรับ y เราจะได้ว่า $y = \frac{-Ax}{B}$ ดังนั้นจุด $P_1(x_1, y_1)$ อยู่เหนือเส้นตรงถ้า $y_1 > \frac{-Ax_1}{B} - \frac{C}{B}$ หรืออยู่ใต้เส้นตรงถ้า $y_1 < \frac{-Ax_1}{B} - \frac{C}{B}$

ตัวอย่าง จงหาระยะทางระหว่างเส้นสมการ $3x - 4y + 20 = 0$ และจุด $(6, 2)$ และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุดกับเส้นตรง

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 3, B = -4, C = 20$ และ $(x_1, y_1) = (6, 2)$ ดังนั้นระยะทางเป็น

$$d = \frac{|(3)(6) - (4)(2) + 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{30}{5}$$

$$= 6$$

จึงได้ว่า $y_1 = 2$ และ $\frac{-Ax_1}{B} - \frac{C}{B} = \frac{-(3)(6)}{(-4)} - \frac{20}{(-4)} = 9.5$ ดังนั้น $y_1 < \frac{-Ax_1}{B} - \frac{C}{B}$ และจุดใต้เส้นตรง



2.3 วงกลม

2.3.1 สมการมาตรฐานของวงกลม (STANDARD EQUATION OF A CIRCLE)

ในบทนี้เราจะมาพิจารณาถึงสมการของวงกลม แต่ก่อนอื่นเราจะต้องรู้จักนิยามของวงกลมเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาสมการวงกลมต่อไป

ตัวอย่าง จงหาสมการของจุดในระนาบโดยแต่ละจุดอยู่ห่างจากจุดกำเนิด 5 หน่วย

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นเซตของจุด ดังนั้นจากสูตรหาระยะทาง $(OP)^2 = 5^2$ หรือ

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$$(x^2 + y^2) = 25$$

กราฟของสมการนี้เป็นดังรูป



รูปที่ 2.8 วงกลมรัศมี 5 หน่วย

นิยาม

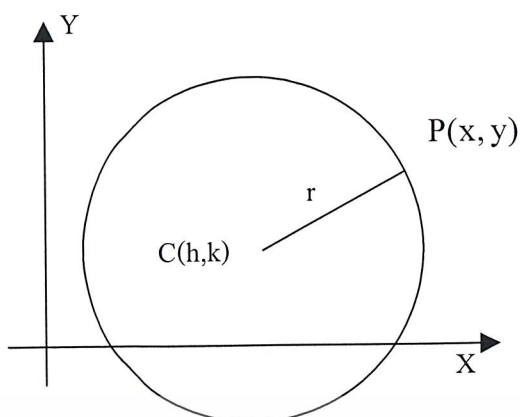
วงกลมคือ เซตของจุดที่อยู่บนระนาบซึ่งระยะทางจากทุกจุดในเซตนั้น ไปยังจุดจุดหนึ่งบนระนาบที่อยู่กับที่มีระยะทางเท่ากัน

จุดจุดหนึ่งบนระนาบที่อยู่กับที่ และระยะทางจากแต่ละจุดนั้นคือ จุดศูนย์กลางและรัศมีตามลำดับต่อไปเราจะหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h, k)$ และมีรัศมี r ซึ่งดูได้จากในรูปที่ 2.9 ให้

$L(x, y)$ เป็นจุดอยู่บนวงกลม ดังนั้น $CP - r = 0$ ถ้าเราคูณด้วย $CP + r$ เราจะได้ $(CP)^2 - r^2 = 0$

ดังนั้น $(CP)^2 = r^2$ จะได้ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.9 วงกลม

เราจึงได้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(h, k)$ และมีรัศมี r คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (2.1)$$

ผลที่ตามมาถ้าวงกลมรัศมี r มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด สมการของวงกลมจะเป็นดังนี้

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.2)$$

เราเรียกสมการ(2.1)ว่าเป็นสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมและเป็นวงกลมจริง ถ้า $r^2 > 0$ และจะเป็นจุด เมื่อ $r^2 = 0$ และจะเป็นวงกลมสมมติ ถ้า $r^2 < 0$

ตัวอย่าง จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ และมีรัศมี 3

วิธีทำ เนื่องจาก $h = 2, k = -1$ และ $r = 3$ สมการวงกลมที่หาได้โดยการแทนค่าลงในสมการ (2.1) คือ

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2 \quad (2.3)$$

2.3.2 สมการทั่วไปของวงกลม (THE GENERAL EQUATION OF CIRCLE)

สมการ(2.1) อาจจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2 \quad (2.4)$$

สมการข้างต้นมีรูปแบบคล้ายกับสมการ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.5)$$

สมการ(2.5) นี้เรียกว่าสมการทั่วไปของวงกลม

หากเราต้องการเปลี่ยนสมการทั่วไปให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานเราก็ทำได้โดยการจัดรูปแบบของสมการกำลังสองของ x และ y ให้สมบูรณ์ หลังจากจัดรูปได้แล้วเราก็จะได้ค่าเพิ่มเข้ามาทางด้านขวาของสมการ ซึ่งทำให้เราทราบได้ว่าเป็นวงกลมแบบวงกลมจริง , เป็นจุดหรือเป็น วงกลมสมมติ โดยทราบจากค่าคงที่ทางขวาของสมการว่าเป็น ค่าบวก, ศูนย์ หรือเป็นลบ

ตัวอย่าง จงทำ $3x^2 + 6x + 3y^2 - 8y = 48$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานพร้อมทั้งหาค่าของ รัศมี และจุดศูนย์กลาง

วิธีทำ หากเราหารทุกสมาชิกของสมการด้วยสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ซึ่งก็คือ 3 เราจะได้ $x^2 + 2x + y^2 - \left(\frac{8y}{3}\right) = 16$ ถ้าเราต้องการจัดสมการกำลังสองให้อยู่ในรูปแบบที่สมบูรณ์เราจะต้องบวกด้วยค่าครึ่งหนึ่งของสัมประสิทธิ์ของ x และ y ยกกำลังสอง ซึ่งเราจะได้

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - \frac{8y}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = 16 + 1 + \frac{16}{9}$$

รวมเทอมต่างๆ และจัดให้อยู่ในรูปของสมการมาตรฐานจะได้

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

ดังนั้นวงกลมมีรัศมี $\frac{13}{3}$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$

ตัวอย่าง สมการ $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$ เป็นสมการของวงกลมลักษณะใด

วิธีทำ ถ้าเราจัดรูปสมการกำลังสองให้สมบูรณ์เราจะได้

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -5 + 1 + 4 = 0$$

ดังนั้นสมการที่ให้มาเป็นสมการของวงกลมแบบจุด

ตัวอย่าง สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นสมการวงกลมแบบใด $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 7 = 0$

วิธีทำ ถ้าเราจัดรูปสมการกำลังสองให้สมบูรณ์เราจะได้

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -7 + 1 + 4 = -2 < 0$$

ดังนั้นสมการวงกลมที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมสมมติ

2.3.3 เงื่อนไขสามเงื่อนไขของวงกลม (THE CIRCLE AND THREE CONDITION)

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ในสมการของวงกลมซึ่งไม่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นเราจึงสามารถหาค่าหารสมาชิกทุกตัวในสมการให้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้ได้

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.6)$$

ดังนั้นเราจะมีค่าคงที่ 3 ค่าในสมการเพิ่มขึ้นมา

ถ้าเราแทนค่าพิกัดจุดลงในสมการ (2.6) เราจะได้สมการเชิงเส้นซึ่งมีตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ D, E และ F ดังนั้นถ้าเราแทนค่าของพิกัดจุด 3 จุด เราก็จะได้สมการเชิงเส้น 3 สมการ ถ้าค่าของคำตอบของระบบสมการมีค่าเท่ากันแสดงว่าเป็นจุดบนวงกลมแต่จะมีค่าต่างกัน แสดงว่าเป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง



รูปที่ 2.10 จุดสามจุดบนวงกลม

ทฤษฎี

วงกลมถูกกำหนดโดยจุด 3 จุดที่แตกต่างกันบนระนาบ ซึ่งจุดทั้ง 3 นั้นจะต้องไม่เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

1. $\triangle ADE \cong \triangle CDE$
 - $\overline{AE} = \overline{EC}$ เส้น $BE \perp AC$ แบ่ง AC เป็นสองส่วนเท่าๆกันที่จุด E
 - $\hat{A}ED = \hat{D}EC$ เส้น $BE \perp AC$
 - $DE = DE$ เส้นตรงเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$ ตามทฤษฎี ด้าน-มุม-ด้าน ของรูปสามเหลี่ยม
 \therefore จึงได้ว่า $\overline{AD} = \overline{DC}$

2. $\triangle ADF \cong \triangle BDF$

- $\overline{AF} = \overline{FB}$ เส้น $CF \perp AB$ แบ่ง AB เป็นสองส่วนเท่าๆกันที่จุด F
- $\hat{A}FD = \hat{B}FD$ เส้น $CF \perp AB$
- $DF = DF$ เส้นตรงเดียวกัน

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDF$ ตามทฤษฎี ด้าน-มุม-ด้าน ของรูปสามเหลี่ยม
 \therefore จึงได้ว่า $\overline{AD} = \overline{DB}$

3. $\triangle BDG \cong \triangle CDG$

- $\overline{BG} = \overline{GC}$ เส้น $AG \perp BC$ แบ่ง BC เป็นสองส่วนเท่าๆกันที่จุด G
- $\hat{B}GD = \hat{C}GD$ เส้น $AG \perp BC$
- $DG = DG$ เส้นตรงเดียวกัน

$\therefore \triangle BDG \cong \triangle CDG$ ตามทฤษฎี ด้าน-มุม-ด้าน ของรูปสามเหลี่ยม

\therefore จึงได้ว่า $\overline{DB} = \overline{DC}$

\therefore จาก 1,2,3 จึงได้ว่า $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$

\therefore จึงได้ว่าจุด A, B, C เป็นจุดบนวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด D และเส้น AD, DC, DB เป็นรัศมี

ของวงกลม D

ตัวอย่าง จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด $P_1(1,-2), P_2(3,-4)$ และ $P_3(5,0)$

วิธีที่ 1 ถ้าเราแทนค่าพิกัดจุด P_1 ในสมการ (2.6) เราจะได้

$$1^2 + (-2)^2 + D(1) + E(-2) + F = D - 2E + F + 5 = 0$$

เช่นเดียวกันเมื่อเราแทน P_2 และ P_3 ในสมการเราจะได้

$$3D - 4E + F + 25 = 0$$

$$5D + F + 25 = 0$$

เมื่อเราแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบเราจะได้

$$D = -\frac{20}{3}, E = \frac{10}{3}, F = \frac{25}{3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าเราแทนค่าที่ได้ในสมการ(1) เราได้

$$x^2 - \frac{20}{3}x + y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{3} = 0$$

ดังนั้น

$$3x^2 - 20x + 3y^2 + 10y + 25 = 0$$

เป็นสมการที่เราต้องการ

วิธีที่ 2 เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงกลมมีระยะทางจากจุดทั้ง 3 จุดเท่ากัน และเป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดกึ่งกลางของจุด P_1P_2 , P_1P_3 และ P_2P_3

เราจะหาสมการโดยคิดจากแค่ 2 เส้นเท่านั้น โดยเราจะมาหาจุดตัดของทั้ง 2 เส้น เส้นตั้งฉากของจุดกึ่งกลางของ P_1P_2 คือเส้นตั้งฉากที่จุด $(2, -3)$ ซึ่งมีค่าความชันเท่ากับ 1 ดังนั้นเส้นตั้งฉากจะมีค่าความชันคือ -1 เนื่องจาก

$$\frac{y+3}{x-2} = -1 \text{ หรือ } x - y = 5$$

และจากจุด P_2P_3 เราก็สามารถหาได้ในกรณีเดียวกันเราจะได้สมการ $x + 2y = 0$ จุดตัดของทั้ง 2 สมการนี้คือ $(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3})$ นี่ก็จุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดทั้ง 3 จุดที่กำหนด ซึ่งมีค่า $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ดังนั้นสมการวงกลมคือ

$$(x - \frac{10}{3})^2 + (y + \frac{5}{3})^2 = (\frac{5\sqrt{2}}{3})^2$$

เมื่อเราได้กระจายกำลังสองและจัดรูปต่างๆ ให้สมบูรณ์จะมีค่าเท่ากับสมการที่หาได้จากวิธีที่ 1

2.4 รูปทรงกรวย

2.4.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับสมการกำลังสองต่างๆไปของ 2 ตัวแปร ถ้าให้ตัวแปรนั้นคือ x กับ y เพราะฉะนั้นสมการคือ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.7)$$

โดยที่ A, B, C, D, E, F เป็นค่าคงที่ เส้นโค้งสร้างจากเซตของจุดที่พิกัด ดังเช่นสมการนี้เรียกว่า ภาคตัดกรวย (conic section) หรือ ทรงกรวย (conic) เนื่องจากเส้นโค้งสามารถนำไปตัดกันของวงทวงขวาของโคนกับระนาบ ถ้าระนาบไม่ผ่านจุดยอด แล้วรูปทรงกรวยคือ

- พาราโบลา (Parabola) ถ้าตัดกรวยตรงด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นขอบกรวย ดังรูป 2.11a)
- วงรี (Ellipse) ถ้าตัดกรวยตรงด้วยระนาบที่ตัดกรวยเพียงส่วนเดียว ดังรูป 2.11b)
- ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ตัดสองส่วนของกรวย ดังรูป 2.11c)



(a) Parabola

(b) Ellipse

(c) Hyperbola

รูปที่ 2.11 ภาพตัดกรวย

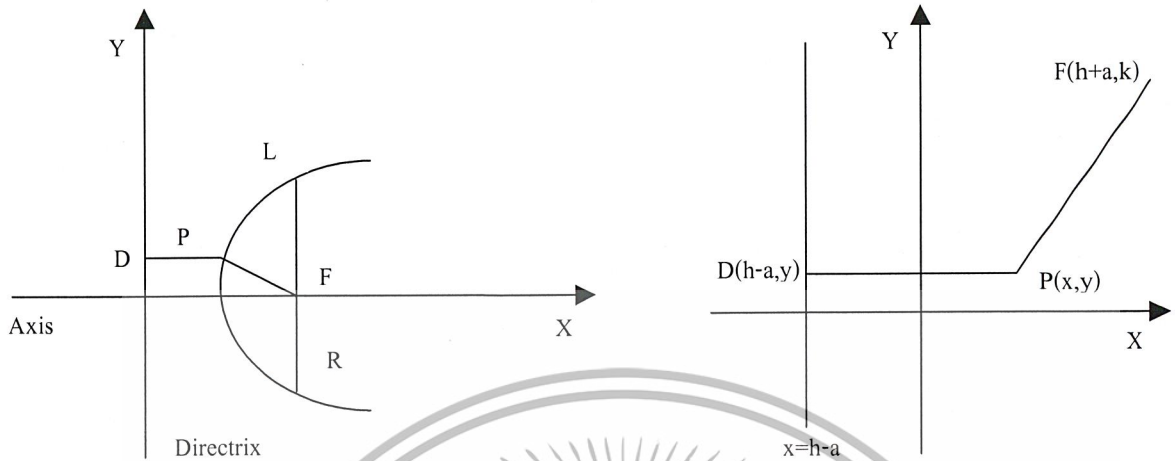
2.4.2 พาราโบลา (PARABOLA)

นิยาม

พาราโบลาคือเซตของจุดที่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง (fixes point) กับเส้นตรงที่ยึดเส้นหนึ่ง (fixed line) เท่ากัน

จุดคงที่นี้เรียกว่า โฟกัส (focus) ส่วนเส้นตรงที่ยึดนี้เรียกว่า ไคเร็คตริก (directrix) เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไคเร็คตริก (directrix) เรียกว่า แกนสมมาตร (axis) และเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนและตัดกับพาราโบลาทั้ง 2 ด้าน นี้เรียกว่า เส้นตรงที่ตัดเส้นโค้งที่จุดโฟกัส

(focal chord) หรือเรียกว่า ลาดัสเร็กตัม (latus rectum) ความยาวของเส้นตรงที่ตัดเส้นโค้งที่จุดโฟกัส (focal chord) นี้เรียกว่า ความกว้างโฟกัส (focal width) ดังรูปที่ (2.12)



รูปที่ 2.12 พาราโบลา

รูปแบบของสมการที่มีความสัมพันธ์กันอย่างง่าย ๆ เราควรจะให้ $x = h - a$ เป็นสมการของไดเรกตริก (directrix) และ จุด $F(h + a, k)$ คือจุดโฟกัส และ $P(X, Y)$ เป็นจุดใดๆบนเซต แล้ว D มีพิกัดที่ $(h - a, y)$ เนื่องจากมันอยู่บนไดเรกตริก (directrix) และมีระยะที่จุด P จากแกน X ดังนั้นนิยามคือ

$$|FP| = |DP|$$

จะได้ว่า

$$\sqrt{(x - h - a)^2 + (y - k)^2} = \sqrt{(x - h + a)^2 + (y - y)^2}$$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง จะได้

$$(x - h - a)^2 + (y - k)^2 = (x - h + a)^2$$

พิจารณาที่ $x - h$ จะได้

$$[(x - h) - a]^2 + (y - k)^2 = [(x - h) + a]^2$$

จะได้ว่า

$$(x - h)^2 - 2a(x - h) + a^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2a(x - h) + a^2$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad (2.8)$$

สมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสที่ $F(h + a, k)$ และ $x = h - a$ เป็นเส้นไดเรกตริก (directrix)

ถ้าเราเรียกเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและเส้นที่ตั้งฉากว่า แกนสมมาตร สมการของแกน คือ

$$y = k$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เส้นที่ตัดกันของแกนและกรวยคือจุดยอด (Vertex) ของกรวย ดังนั้นเราจะแสดงสมการ(2.7)กับ (2.8)พร้อมกัน เพื่อหาจุดยอดที่ (h, k) ตามทฤษฎี

ทฤษฎี

สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (h, k) และจุดโฟกัสที่ $(h + a, k)$ คือ

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad (2.9)$$

สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (h, k) และจุดโฟกัสที่ $(h + a, k)$ คือ

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \quad (2.10)$$

สมการที่ (2.9) และ (2.10) จะเป็น รูปแบบพื้นฐาน (Standard form) ของสมการของพาราโบลา แล้วลดรูปได้เป็น

$$y^2 = 4ax \quad (2.11)$$

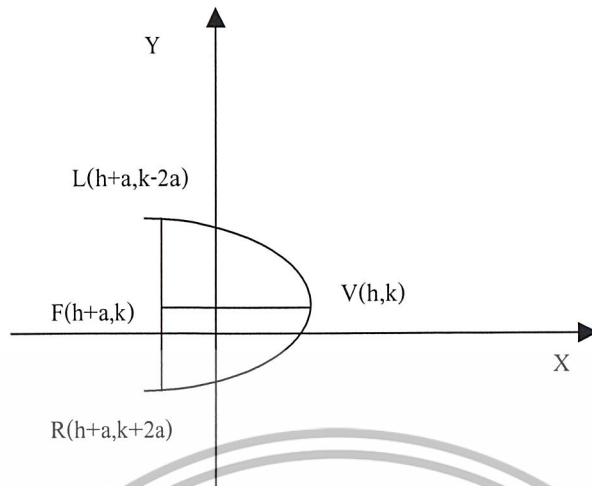
และ

$$x^2 = 4ay \quad (2.12)$$

ถ้าจุดยอด (Vertex) คือจุดกำเนิด (Origin)

ค่าทางซ้ายของสมการ (2.10) เป็นค่าบวกหรือศูนย์ ดังนั้นค่าทางขวาจะต้องเป็นค่าบวกหรือศูนย์ ดังนั้น a และ $x - h$ ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน หรือ $x - h$ ต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้า $a > 0$ แล้ว $x \geq h$ และเส้นจะโค้งไปทางขวาของจุดยอด ถ้า $a < 0$ แล้ว $x \leq h$ และเส้นจะโค้งไปทางซ้ายของจุดยอด มันสามารถแสดงในทำนองเดียวกับ สมการ

ระยะโฟกัส (focal width) มาจากการแก้สมการของเส้นตรง ซึ่งเส้นตรงที่ตัดเส้น โค้งที่จุดโฟกัส (focal chord) และใช้รูปแบบระยะ (Distance formula) เพื่อหาระยะระหว่าง 2 จุดของที่เส้นที่ตัดกัน ถ้าเราใช้สมการที่(1) แล้ว $x = h + a$ เป็นสมการของเส้นตรงซึ่งเส้นตรงที่ตัดเส้น โค้งที่จุดโฟกัส (focal chord) และจุดของเส้นที่ตัดกัน คือ $R(h + a, k + 2a)$ และ $L(h + a, k - 2a)$ ดังที่แสดงในรูป (2.10) ระยะระหว่างจุด 2 จุดนี้คือ $4|a|$ เราสามารถแสดงในทำนองเดียวกับ ระยะโฟกัส (focal width) ของพาราโบลาตามสมการรูปแบบมาตรฐานที่ (2.11) ด้วย $4|a|$

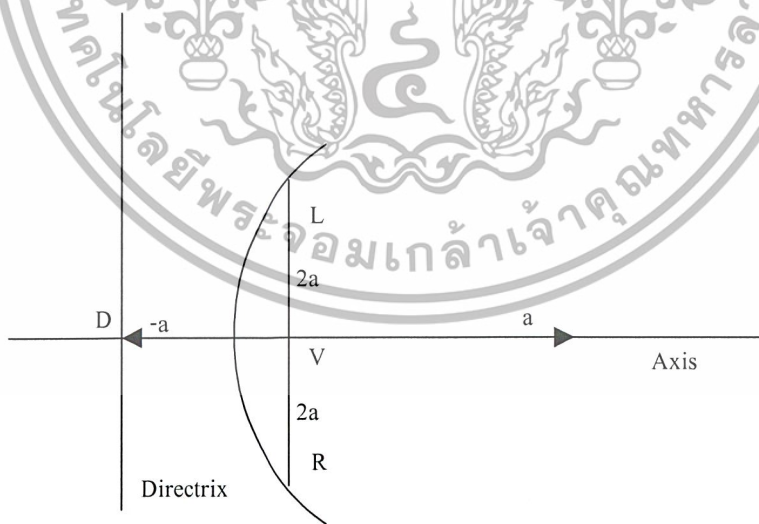


รูปที่ 2.13 พาราโบลา

ทฤษฎี

ระยะโฟกัส (focal width) ของพาราโบลา คือ $4|a|$

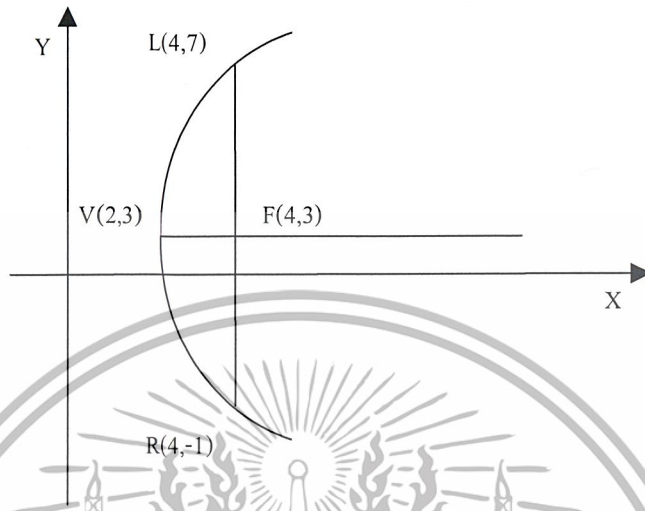
ในรูปที่ (2.14) มันจะแสดงตำแหน่งความสัมพันธ์ของเส้นตรงที่สำคัญและจุดที่เชื่อมต่อกับพาราโบลา ความยาวของเส้น ระยะโฟกัส (focal width) LR และพาราโบลา ดังรูป



รูปที่ 2.14 พาราโบลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดที่ (2,3) และจุดโฟกัส (4,3) และหาระยะโฟกัส (focal width) พร้อมทั้งวาดรูป



รูปที่ 2.15 พาราโบลา

วิธีทำ ระยะทางจากจุดยอดไปจุดโฟกัส คือ a ดังนั้น $a = 2$ นอกจากนี้ แกน X ยังขนานกับเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดผ่านจุดโฟกัส ใช้รูปแบบสมการมาตรฐานที่ (2.10)

ดังนั้น แทนค่า $a = 2$, $h = 2$ และ $k = 3$ ในสมการ (2.10) ได้ว่า

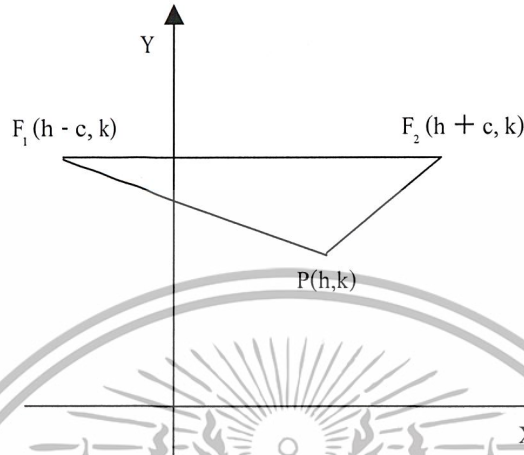
$$(y - 3)^2 = 4(2)(x - 2)$$

จากเส้น ระยะโฟกัส (focal width) ของพาราโบลา คือ $4|a|$ เพราะฉะนั้น ระยะโฟกัส (focal width) ในพาราโบลานี้คือ $4|2| = 8$ นอกจากนี้ กราฟยังไม่กางออกจากจุดยอด เนื่องจาก $a > 0$ ดังรูป (2.15)

2.4.3 วงรี (Ellipse)

นิยาม

วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่



รูปที่ 2.16 วงรี

จุด 2 จุดที่คงที่นี้เรียกว่า โฟกัสวงรี (foci) และเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสเรียกว่า แกน รูปแบบความสัมพันธ์อย่างง่าย สำหรับสมการของวงรี เราควรเลือกตำแหน่งของพิกัดแกน ซึ่งโฟกัสวงรี คือ จุด $F_1(h - c, k)$ และ $F_2(h + c, k)$ ดังรูป 2.16 ถ้า $P(X, Y)$ เป็นจุดใดๆบนวงรีและถ้า $2a$ คือผลรวมของระยะทางจากโฟกัสวงรี แล้วนิยามของวงรีกลายมาเป็น

$$F_1P + F_2P = 2a$$

เราควรจะต้องแปลงรูปแบบนี้ให้อยู่ในรูปของ X, Y และค่าคงที่ โดยใช้รูปแบบระยะ (distance formula) จะได้

$$\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

ถ้าดูที่ $x - h$ ในเทอมเดียวและบวก $-\sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}$ แต่ละสมาชิกยกกำลังสองและแสดงจำนวนรากเท่านั้น จะได้

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = a - \frac{c}{a}(x - h)$$

ยกกำลังสอง แล้วจัดรูปใหม่

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (2.13)$$

ในสามเหลี่ยม PF_1F_2 ผลรวม $2a$ ของด้าน PF_1 และ PF_2 จะมากกว่าด้าน $F_1F_2 = 2c$ ดังนั้น $a^2 - c^2$ เป็นจำนวนเต็มบวก จากนั้นแทนสมการ

$$a^2 - c^2 = b^2$$

ในสมการ (2.13) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(2.14)

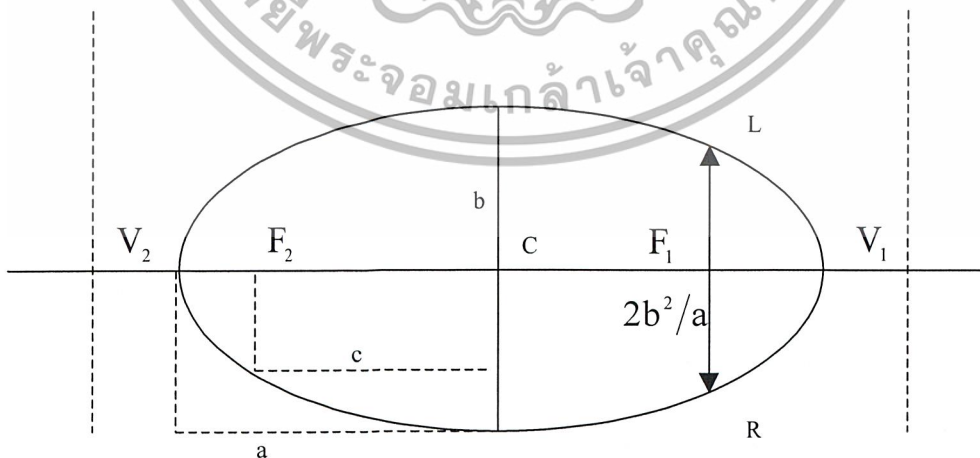
สมการที่ (2.14) เป็นสมการของวงรี เนื่องจากเราสามารถแสดงว่าถ้า $P(X, Y)$ เป็นไปตาม (2.13) แล้ว $PF_1 + PF_2 = 2a$ และแสดง $P(X, Y)$ เป็นไปตาม (2.13) ถ้า $PF_1 + PF_2 = 2a$ อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เรียกว่า อีซเซนทริกซิตี

จุดกลางระหว่างโฟกัสเรียก ศูนย์กลาง และคูที่ (h, k) เนื่องจากโฟกัสคือจุด $(h - c, k)$ และ $(h + c, k)$ เส้นที่ตัดกันของวงรีและแกน ซึ่งเรียกว่า จุดยอด (Vertices) และคูที่ $(h - c, k)$ และ $(h + c, k)$ โดยแสดงวิธีวงรีสมการ (2.14) และแกน $y = x$ ทำนองเดียวกัน ค่า a และ b เรียกว่า แกนเอก (semimajor) และ แกนโท (semiminor) ดังนั้นสมการที่(2.14) คือสมการของวงรีที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X และครึ่งแกน a และ b

สมการของวงรีที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน Y และครึ่งแกน a และ b คือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{2.15}$$

ดังรูป 4.8 ความยาวของเส้นระหว่างโฟกัสเรียกว่า ระยะ โฟกัส (focal width) ซึ่งมีค่า $\frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 2.17 วงรี

ตัวอย่าง จงหาสมการของวงรีที่มี ศูนย์กึ่งกลางที่ $(2,3)$ จุดโฟกัสที่ $(5,3)$ และจุดยอดที่ $(7,3)$

วิธีทำ จากโจทย์รู้ว่า $a = 5, c = 3$ ดังนั้น $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$

จะได้สมการ

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

จะได้

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4^2)}{5} = \frac{32}{5}$$

ดังรูป 2.18



2.4.4 การหาพื้นที่ของวงรี

การหาพื้นที่ของวงรีสามารถหาได้จากสูตร $A = ab\pi$

พิสูจน์

วิธีทำ สมการวงรีเท่ากับ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.16)$$

จากสมการวงกลมเท่ากับ

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2.17)$$

จัดให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

ดังนั้นสมการวงรีจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= r \cos \theta \\ \frac{y}{b} &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -r \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 abrdrd\theta = ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta$$

$$= \frac{ab}{2} * 2\pi = ab\pi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นการวิจัยแบบทดลองออกแบบ ศึกษาารูปเรขาคณิตลักษณะต่างๆ มาใช้สร้างโปรแกรมวาดภาพบนระนาบ ซึ่งเป็นการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์กับคอมพิวเตอร์ เพื่อดึงดูดความสนใจให้มีผู้มาศึกษาวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้น ซึ่งบ่งบอกถึงความสำคัญของวิชานี้

ในการสร้างโปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ จะประกอบด้วยโปรแกรมโดยใช้ภาษา Visual Basic ซึ่งทำหน้าที่ในการสร้างกราฟ จัดการกับข้อมูล และแสดงผลออกทางจอภาพ

3.1 ขั้นตอนในการรวบรวมข้อมูล

1. ศึกษาารูปแบบของรูปเรขาคณิตและสมการพื้นฐานที่นำมาเสนอ
2. วางแผนและกำหนดรูปแบบของส่วนติดต่อกับผู้ใช้
3. ศึกษาภาษาที่ใช้ในการเขียน โปรแกรม
4. ลงมือปฏิบัติและเขียนโปรแกรม
5. ตรวจสอบและแก้ไขความผิดพลาดที่เกิดขึ้นกับ โปรแกรม

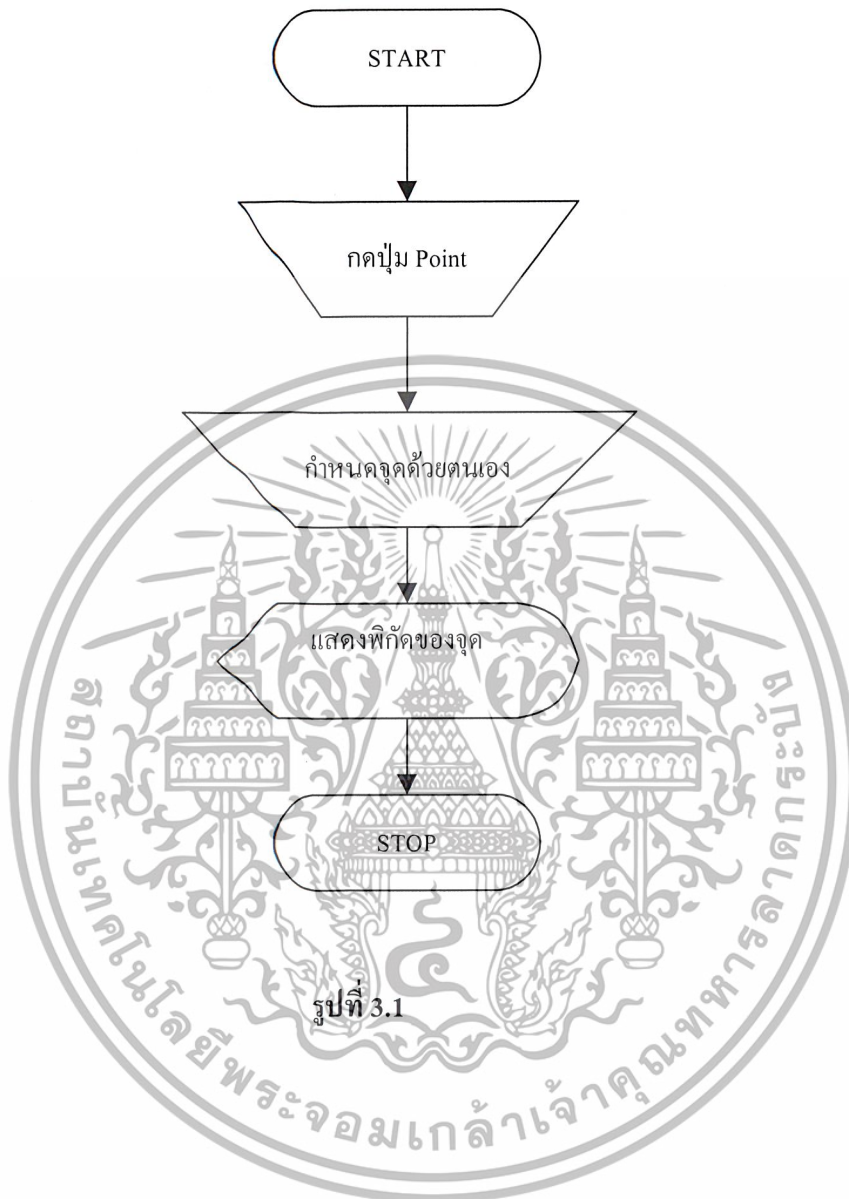
3.2 ระบบงานแบ่งออกเป็น 3 ส่วนดังนี้

1. ส่วนนำข้อมูลเข้าเป็นการกำหนดค่าด้วยตนเองและการใส่ค่า
2. ส่วนวิเคราะห์ประมวลผล ส่วนนี้จะนำข้อมูลที่รับเข้ามานำมาวิเคราะห์และคำนวณค่าต่างๆ
3. ส่วนแสดงผล คือนำข้อมูลในส่วนที่สองนำมาแสดงผลทางจอภาพ

3.3 แผนภาพการทำงานของโปรแกรม (Flow Chart)

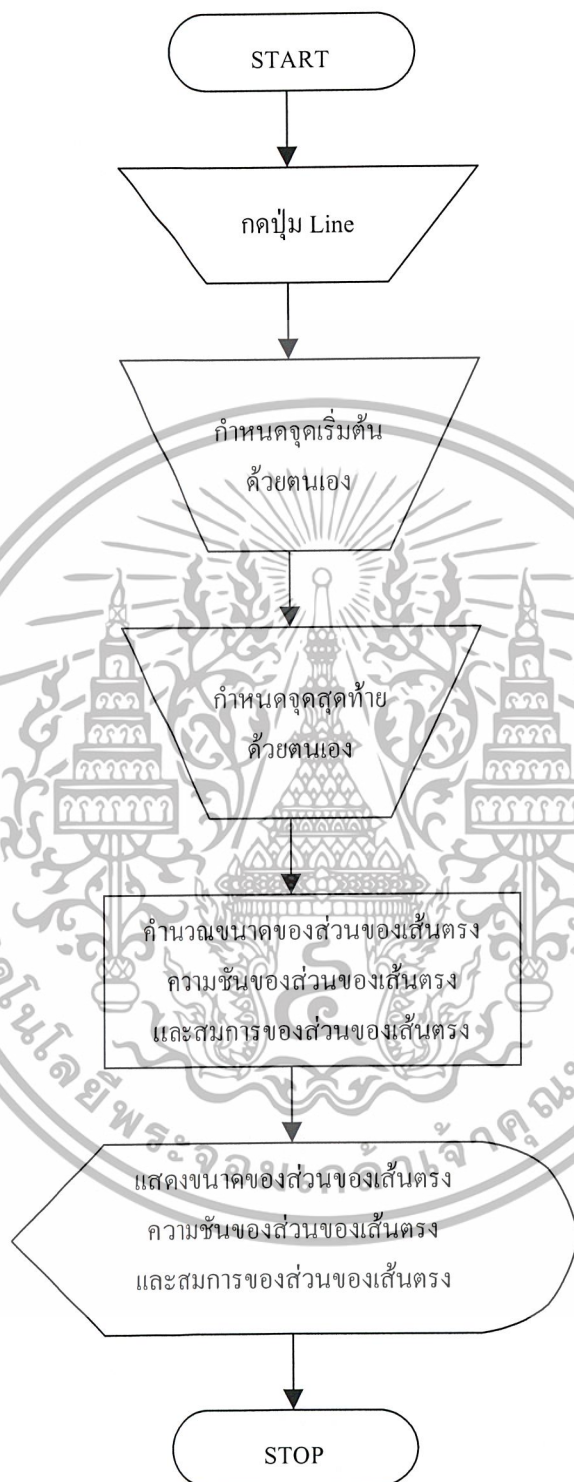
แผนภาพการทำงานของโปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบมีหลายส่วนซึ่งแสดงดังนี้

3.3.1 Flowของ Point



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

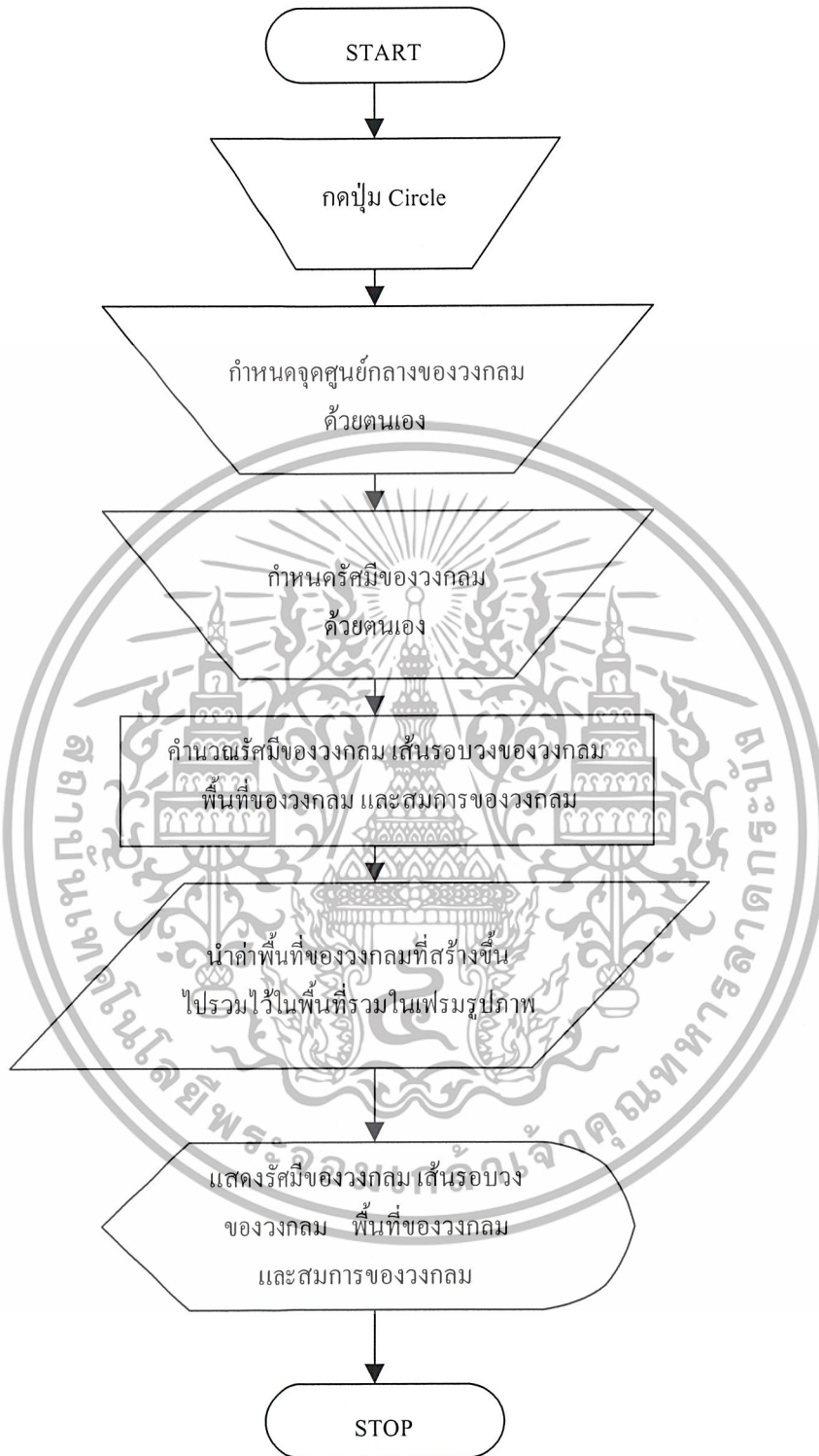
3.3.2 Flow ของ Line



รูปที่ 3.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

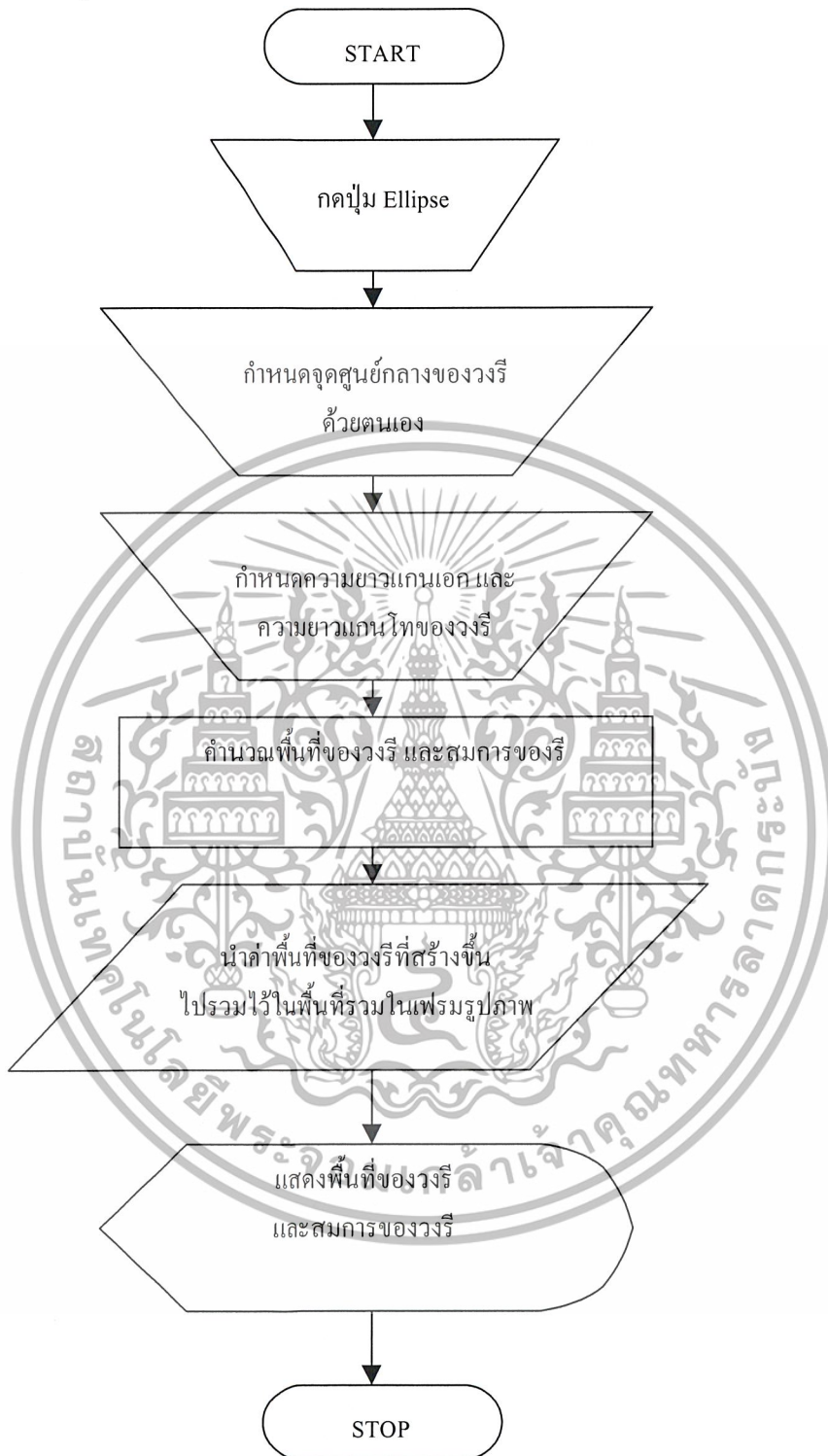
3.3.3 Flowของ Circle



รูปที่ 3.3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

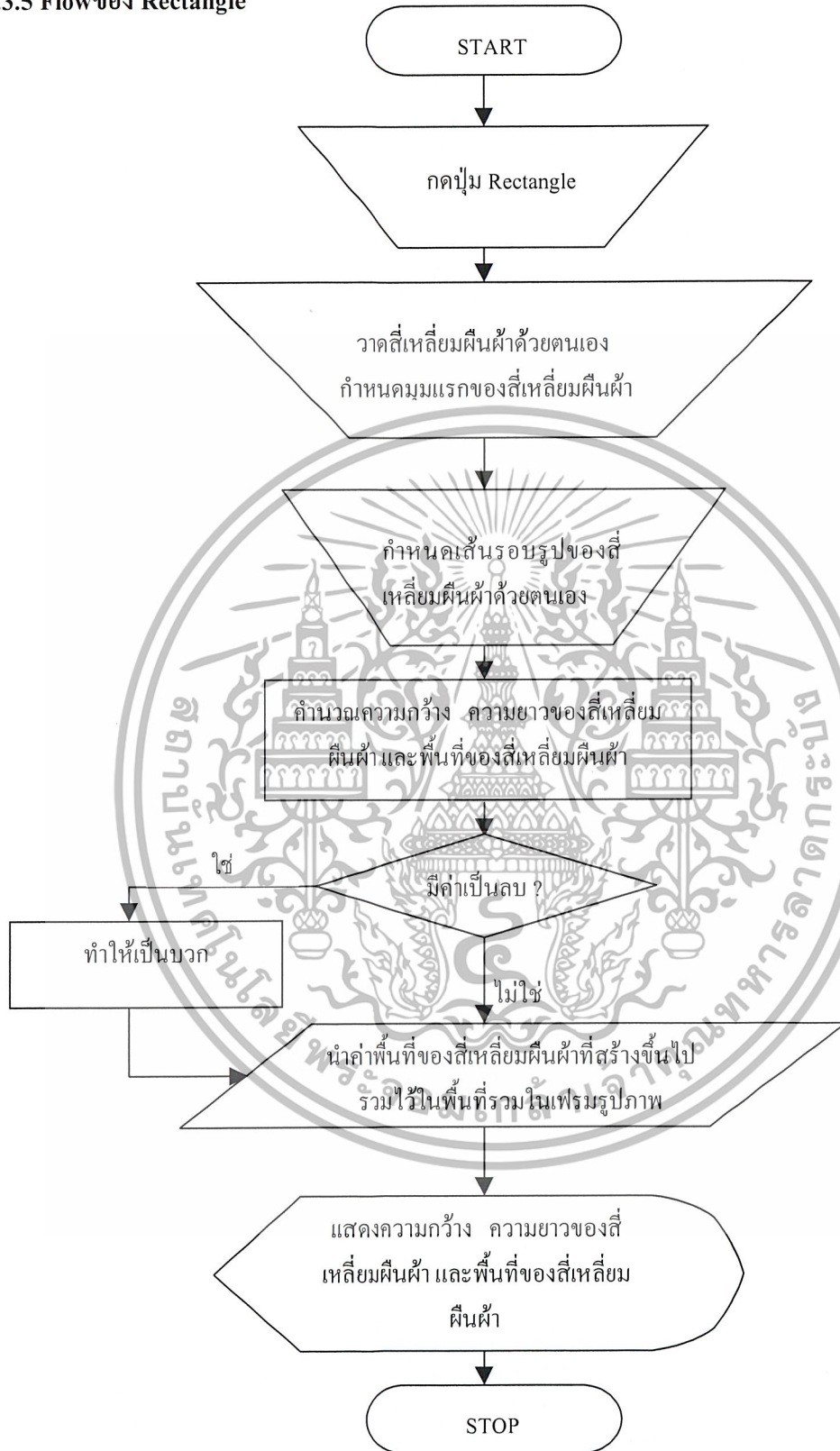
3.3.4 Flowของ Ellipse



รูปที่ 3.4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

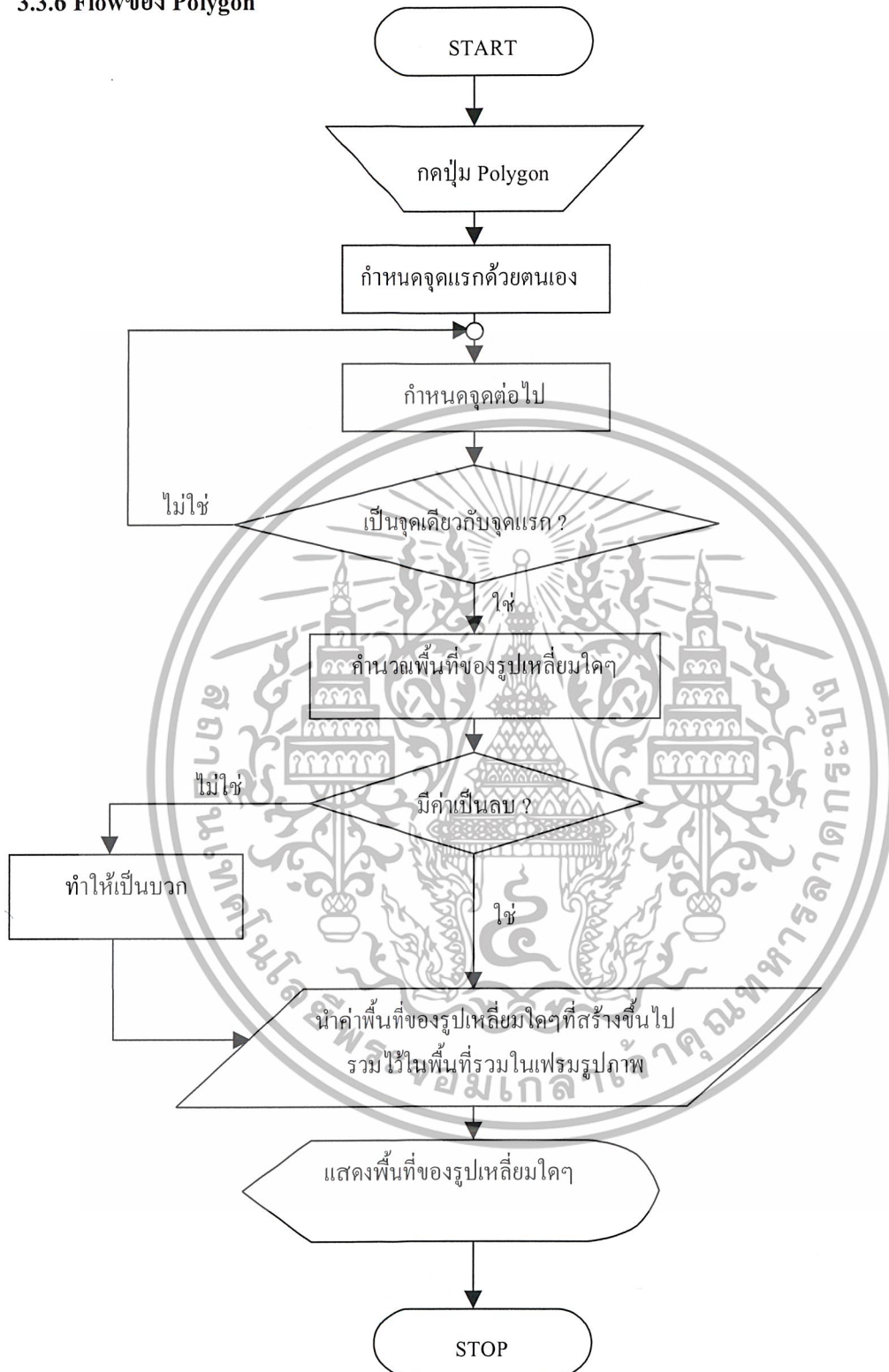
3.3.5 Flowของ Rectangle



รูปที่ 3.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

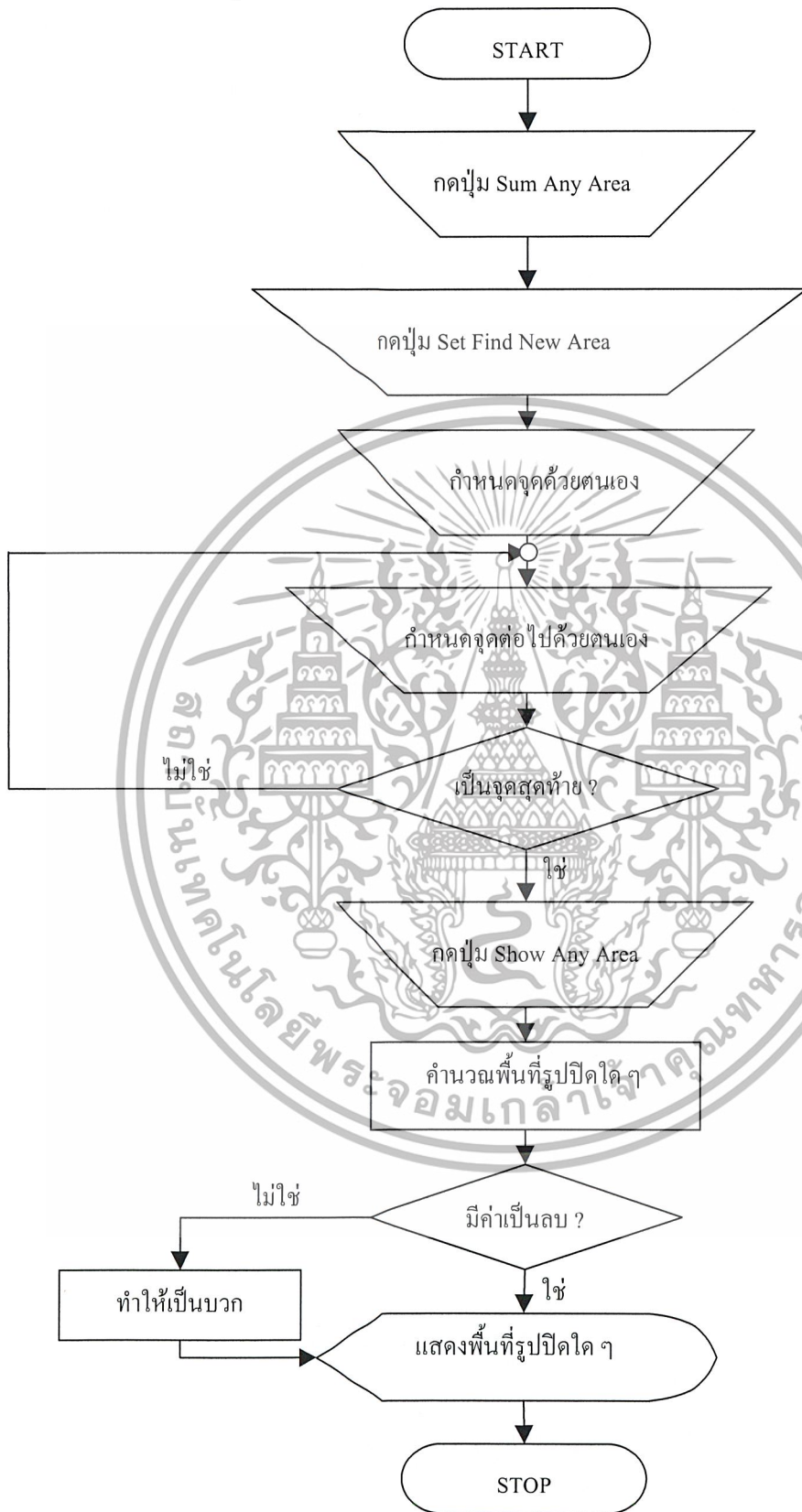
3.3.6 Flowของ Polygon



รูปที่ 3.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

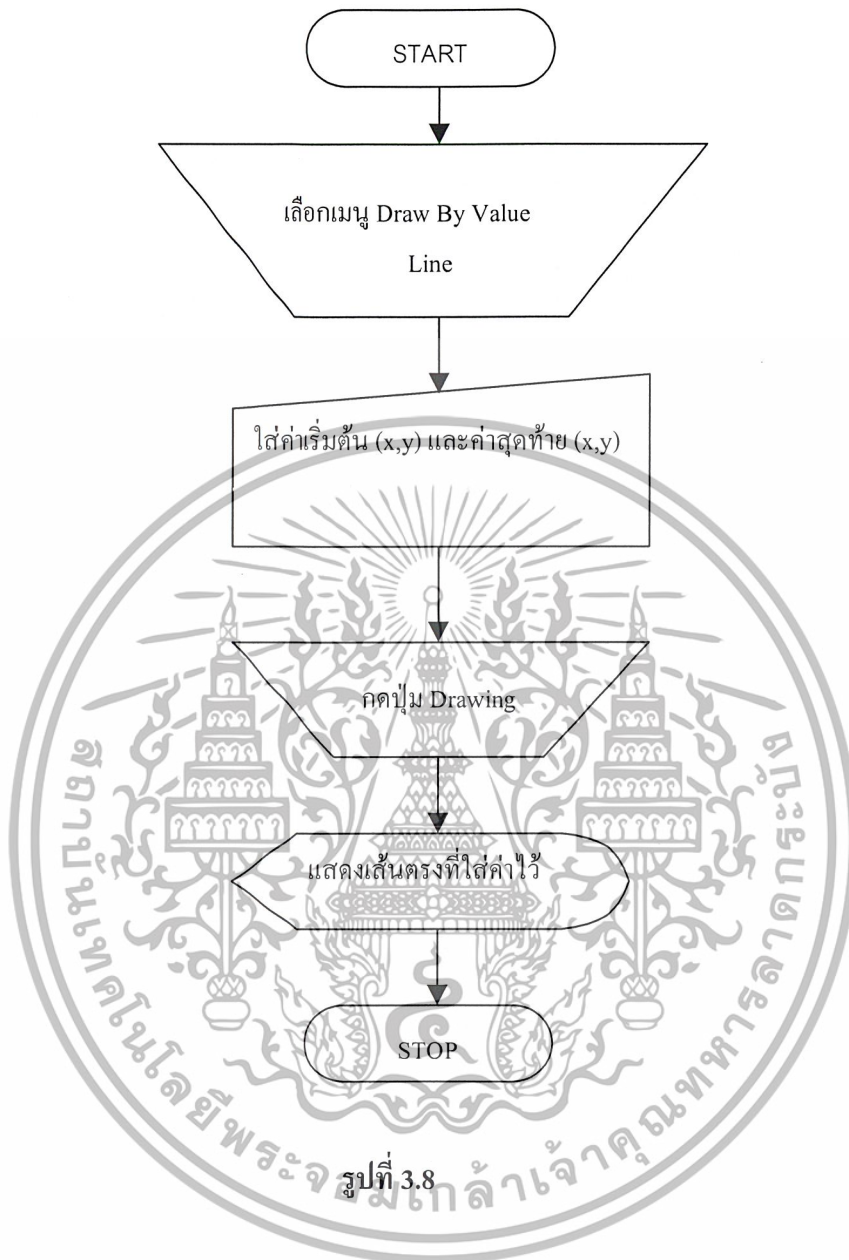
3.3.7 Flowของ Sum Any Area



รูปที่ 3.7

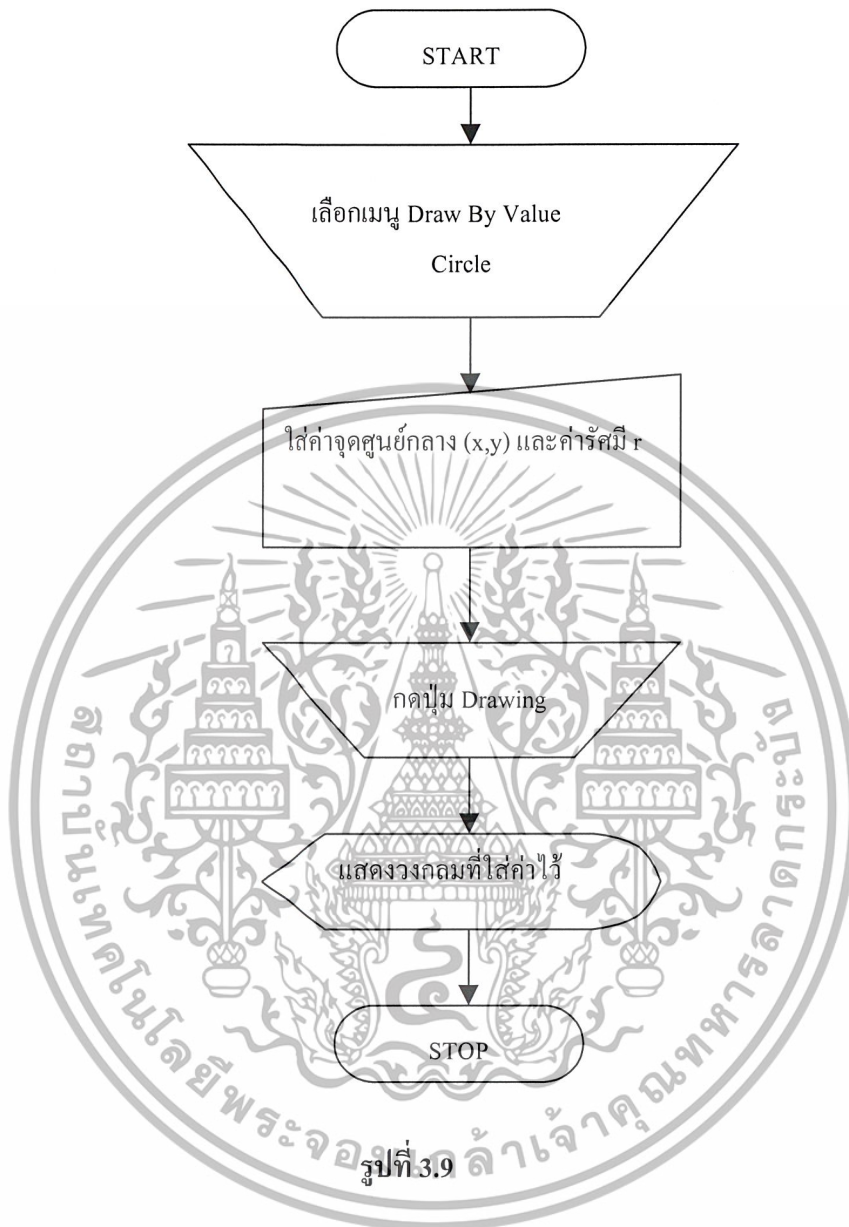
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.8 Flowของ Draw By Value - Line



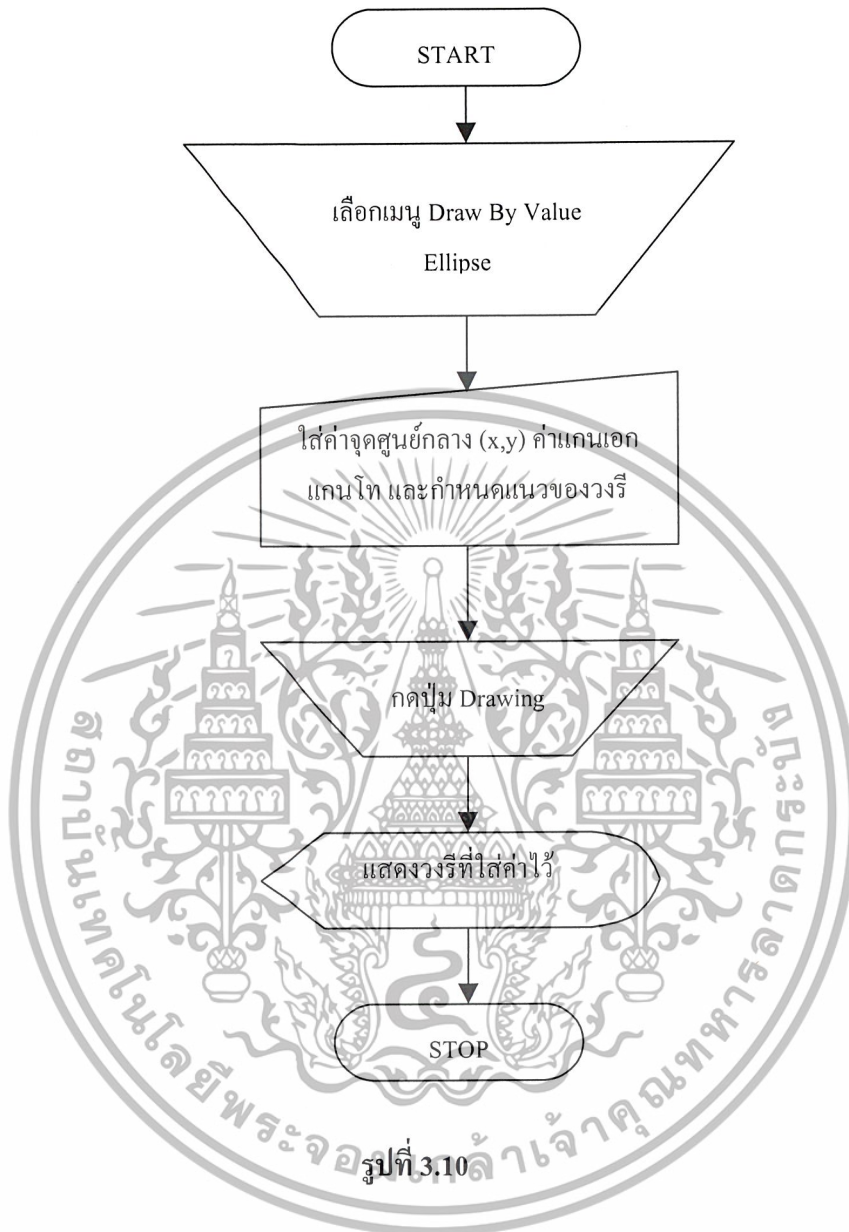
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.9 Flowของ Draw By Value – Circle



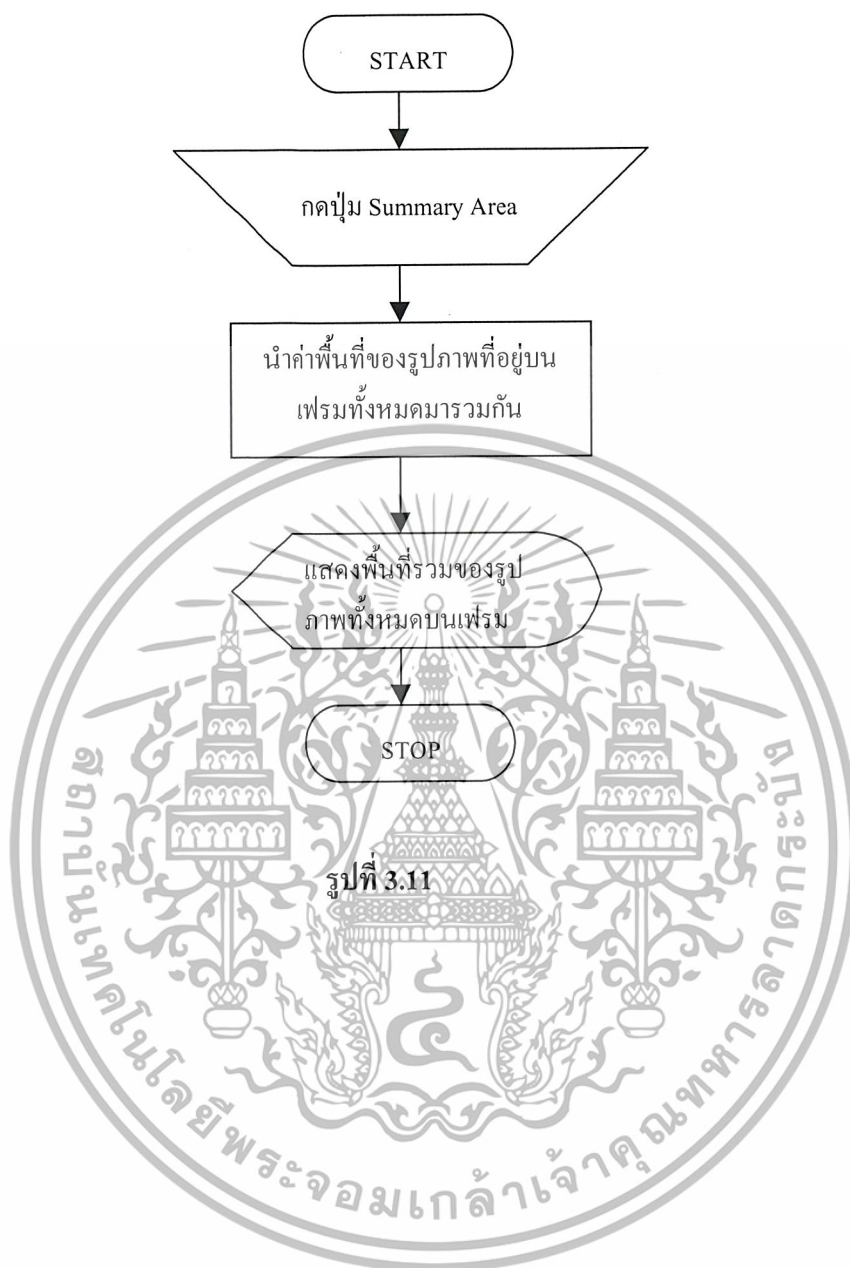
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.10 Flow ของ Draw By Value – Ellipse



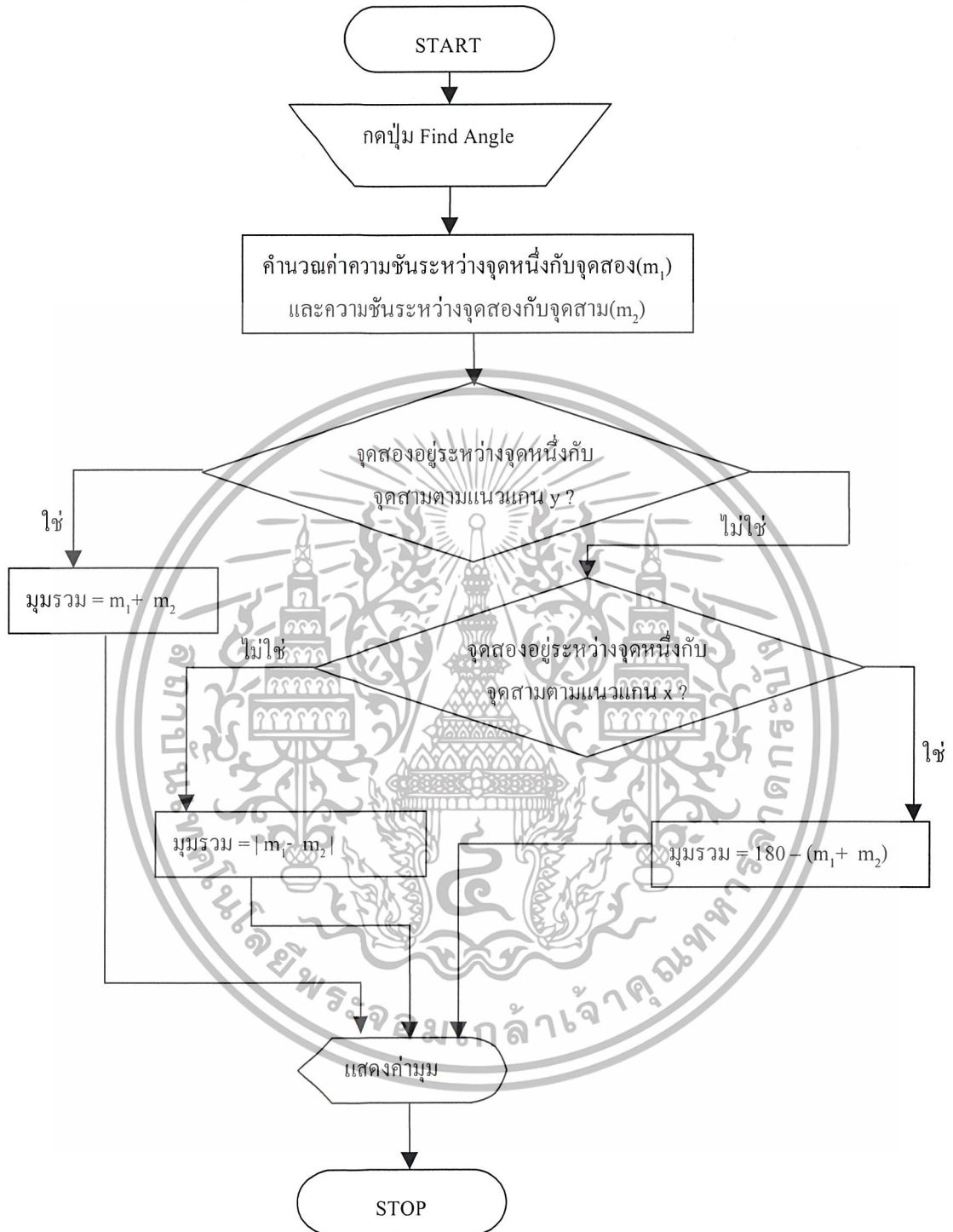
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.11 Flowของ Summary Area



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.12 Flowของ Find Angle



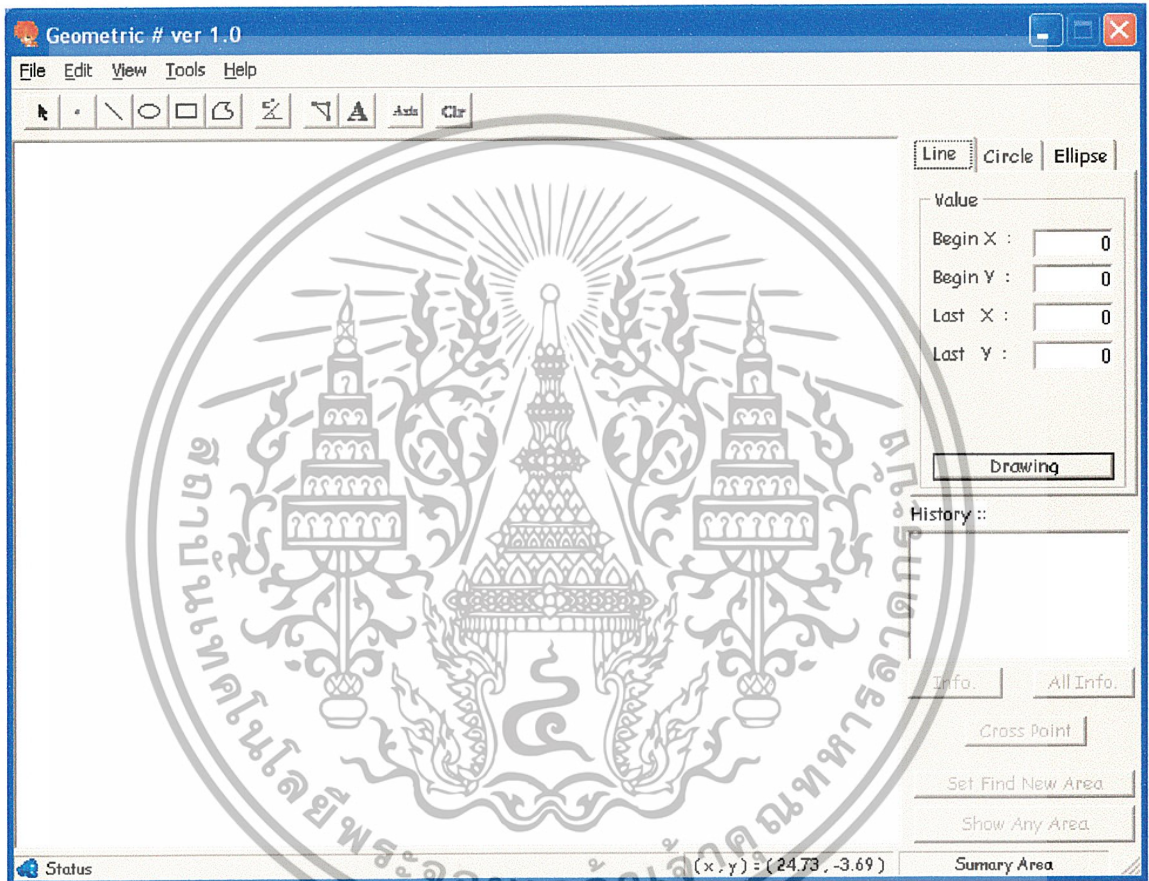
รูปที่ 3.12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4 วิธีการใช้โปรแกรม

4.1 แนะนำโปรแกรม

โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวาดรูปเรขาคณิต หน้าจอทำงานของโปรแกรมมีลักษณะดังรูปที่ 4.1 โดยมีแถบเมนู 5 เมนูและ แถบเครื่องมือ 12 ปุ่มการทำงาน



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 การทำงานในหน้าจอเมนู

หน้าจอเมนูสามารถแบ่งการทำงานออกเป็น 2 ลักษณะคือ แถบเมนู 5 เมนู ปุ่มคำสั่ง 12 ปุ่ม

4.2.1 แถบเมนู (Menu bar)

4.2.1.1 File มี 2 ฟังก์ชันการทำงานได้แก่

Clear เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการลบภาพบนหน้าจอทั้งหมดโดยสามารถกดปุ่ม Ctrl+L แล้วจะมีกล่องข้อความขึ้นมาถามว่าต้องการลบทั้งหมดหรือไม่ ถ้าต้องการให้เลือก YES ถ้าไม่ต้องการ ารให้เลือก NO

Exit เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการสิ้นสุดการทำงานของโปรแกรม

4.2.1.2 Edit มี 1 ฟังก์ชันการทำงานได้แก่

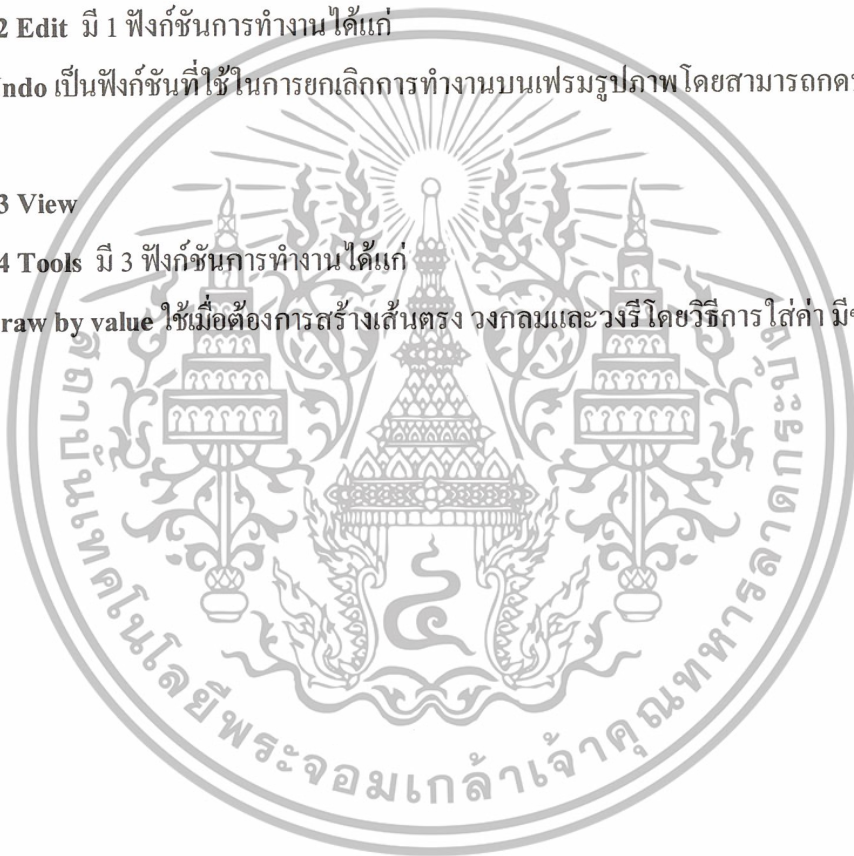
Undo เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการยกเลิกการทำงานบนเฟรมรูปภาพโดยสามารถกดปุ่ม

Ctrl + Z

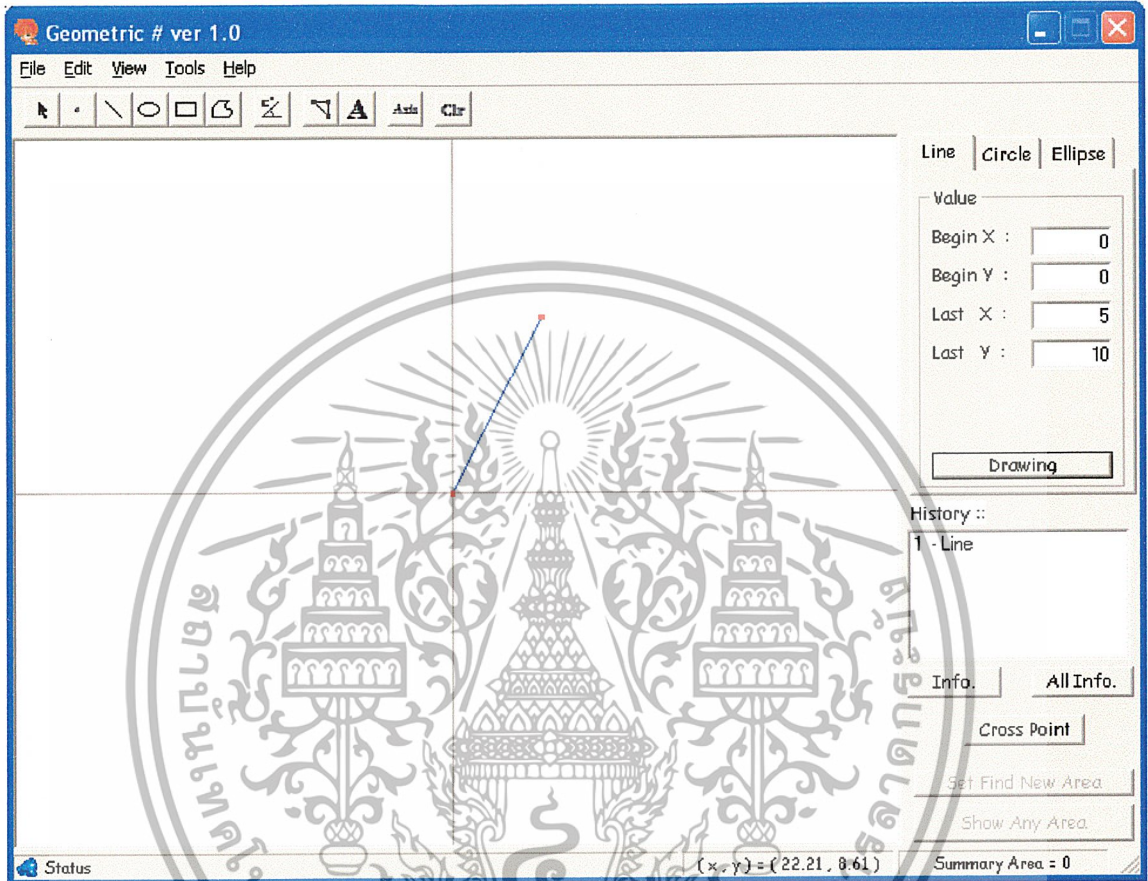
4.2.1.3 View

4.2.1.4 Tools มี 3 ฟังก์ชันการทำงานได้แก่

Draw by value ใช้เมื่อต้องการสร้างเส้นตรง วงกลมและวงรีโดยวิธีการใส่ค่า มีขั้นตอนดังนี้



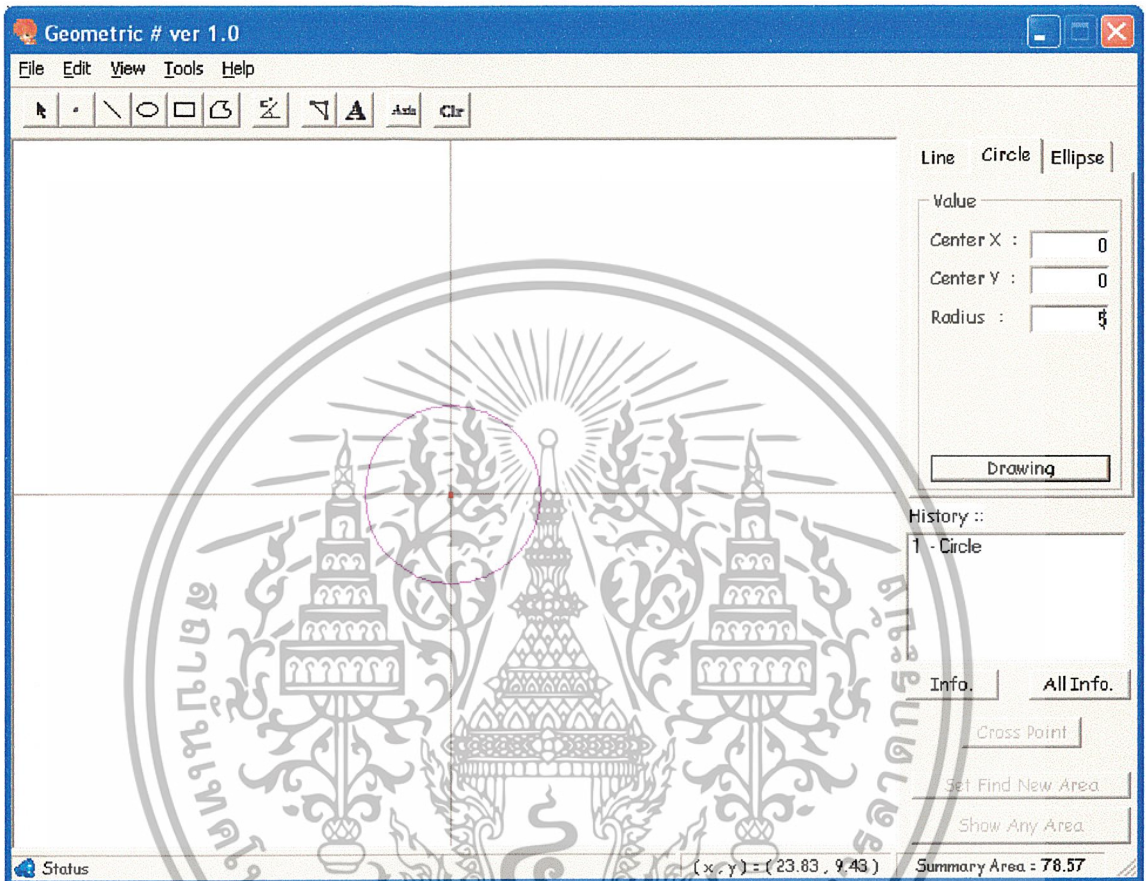
- **Line** ค่าที่ต้องการในการวาดรูปส่วนของเส้นตรงคือจุดเริ่มต้นของส่วนของเส้นตรงและจุดสุดท้ายของส่วนของเส้นตรงเมื่อกดDrawingแล้วจะสร้างส่วนของเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเท่ากับที่กำหนดขึ้นแสดงดังรูป



รูปที่ 4.2 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Line

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

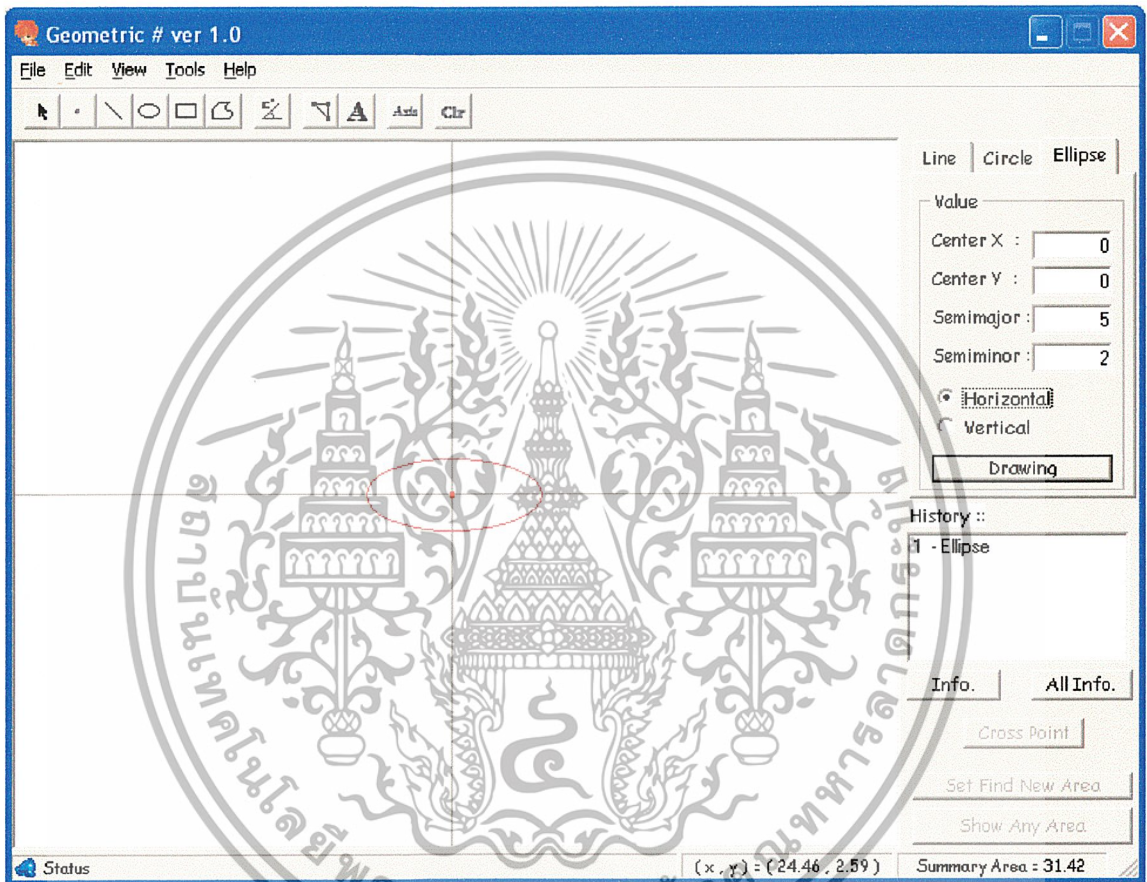
- **Circle** ค่าที่ต้องการในการวาดรูปวงกลมคือจุดศูนย์กลางของวงกลมและค่ารัศมีของวงกลม เมื่อกด Drawing แล้วจะสร้างวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางและรัศมีเท่ากับที่กำหนดขึ้น แสดงดังรูป



รูปที่ 4.3 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Circle

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

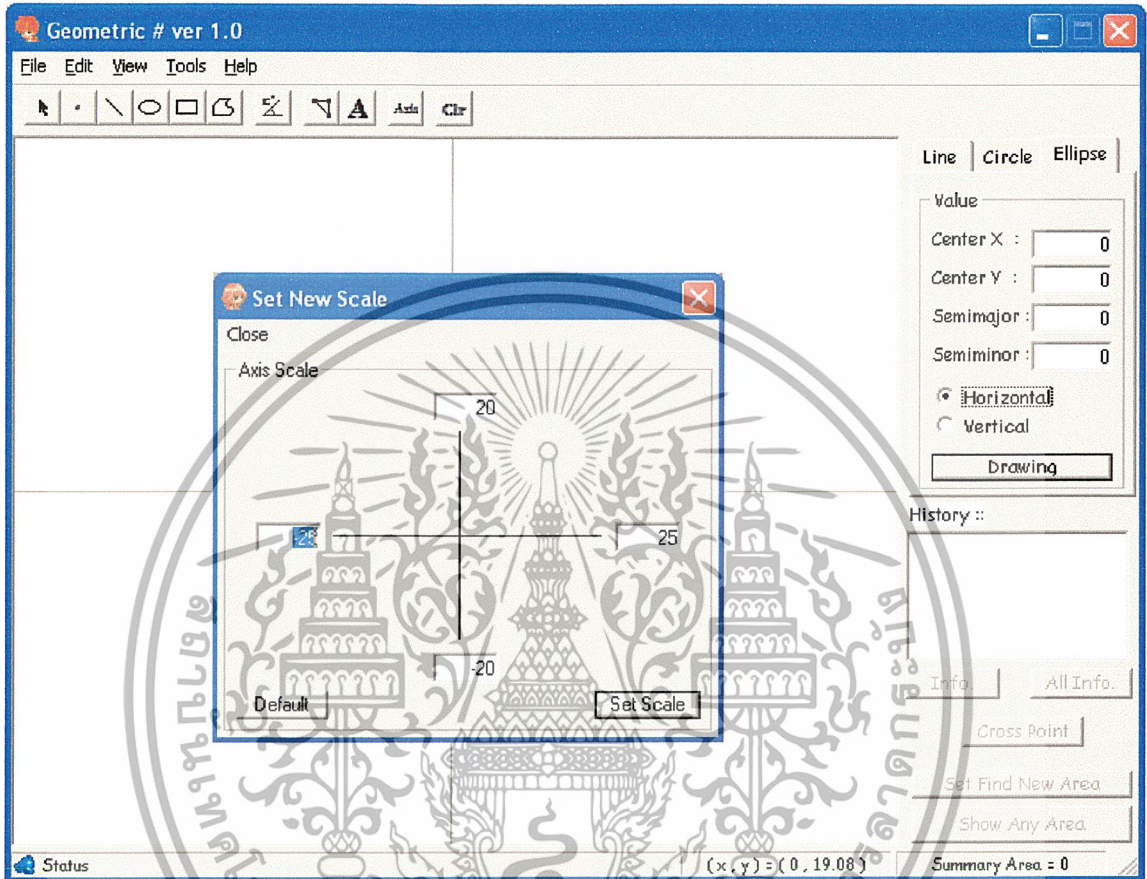
- **Ellipse** ค่าที่ต้องการในการวาดรูปวงรีคือจุดศูนย์กลางของวงรี ค่าความยาวแกนเอกของวงรี และค่าความยาวแกนโทของวงรี และต้องกำหนดด้วยว่าจะให้รีตามแนวแกนXหรือแกนYเมื่อกด Drawingแล้วจะสร้างวงรีที่มีจุดศูนย์กลาง ความยาวแกนเอกและความยาวแกน โทเท่ากับที่กำหนดขึ้น แสดงดังรูป



รูปที่ 4.4 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Draw by value Ellipse

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

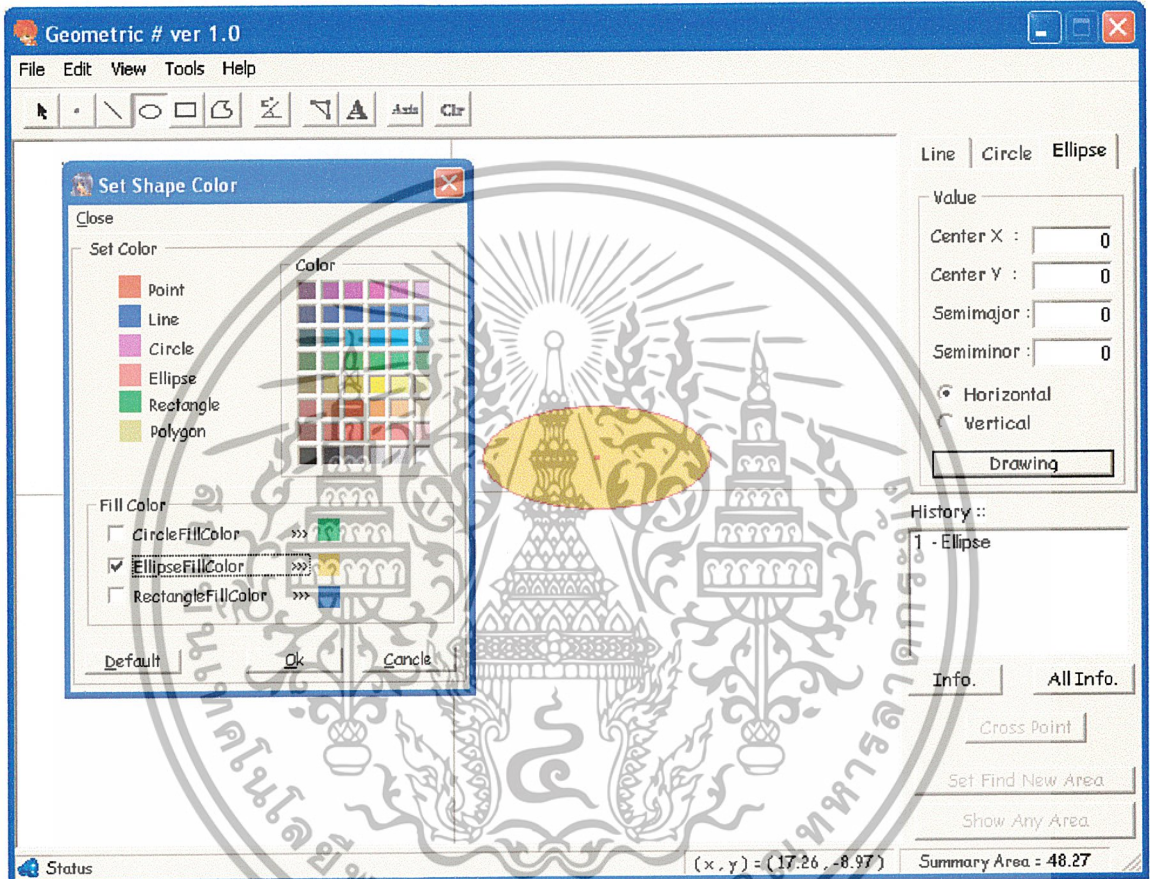
- Set New Scale เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการกำหนดค่าสเกลของหน้าจอ โดยสามารถกดปุ่ม Ctrl + S แสดงคั่งรูป



รูปที่ 4.5 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Set New Scale

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- **Set Shape Color** เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการกำหนดค่าสี สามารถเปลี่ยนสีเส้นต่างๆและสามารถเติมสีเข้าไปข้างในวงกลม วงรี และสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้โดยสามารถกดปุ่ม **Ctrl + R** แสดงดังรูป



รูปที่ 4.6 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Set Shape Color

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

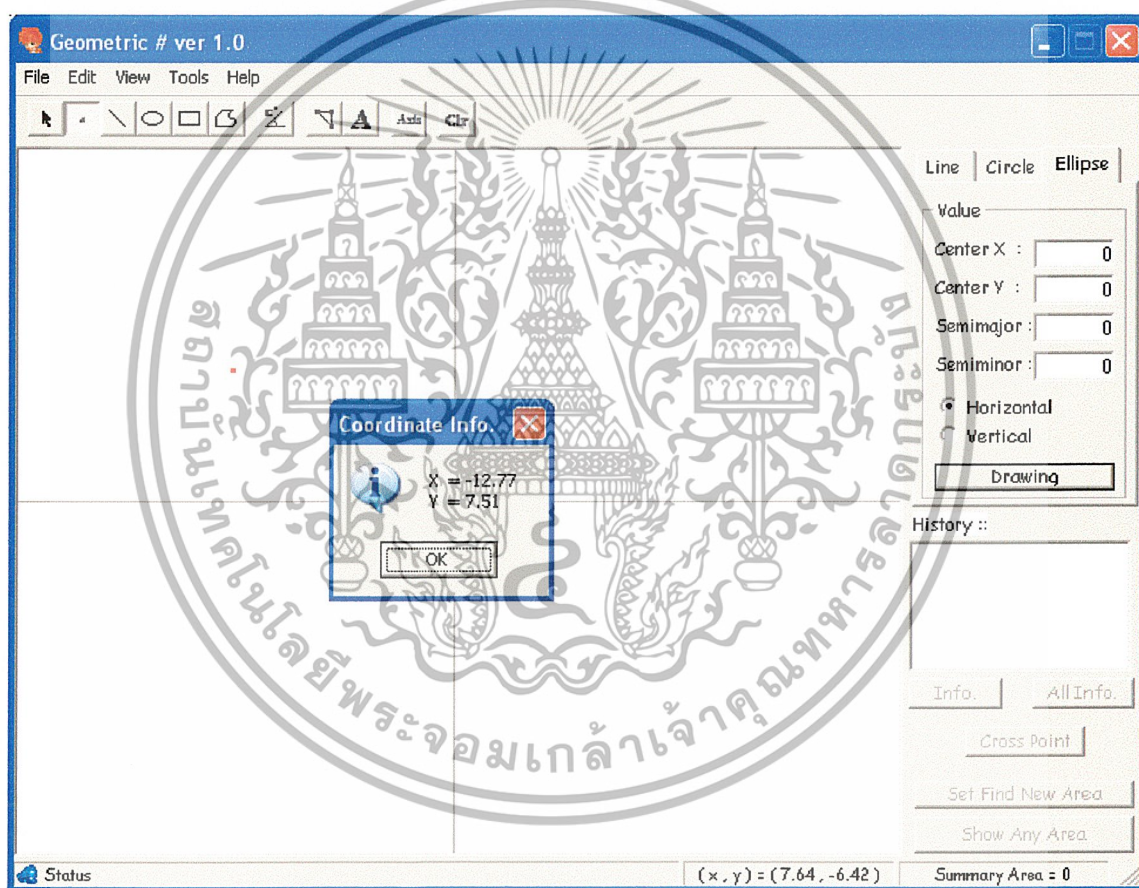
4.2.1.5 Help มี 1 ฟังก์ชันการทำงานได้แก่

About เป็นฟังก์ชันแสดงคุณสมบัติของโปรแกรมโดยสามารถกดปุ่ม **Ctrl + B**

4.2.2 ปุ่มคำสั่ง (Tools bar)

4.2.2.1 Pointer ใช้สำหรับชี้ส่วนต่างๆในเฟรมรูปภาพ

4.2.2.2 Point ใช้สำหรับสร้างจุดบนเฟรมรูปภาพ เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกจุดใดบนเฟรมรูปภาพ จะขึ้นรายละเอียดของจุด(Coordinate Info) โดยจะแสดงค่า(X,Y)ในพิกัดคาร์ทีเซียนแสดงดังรูป

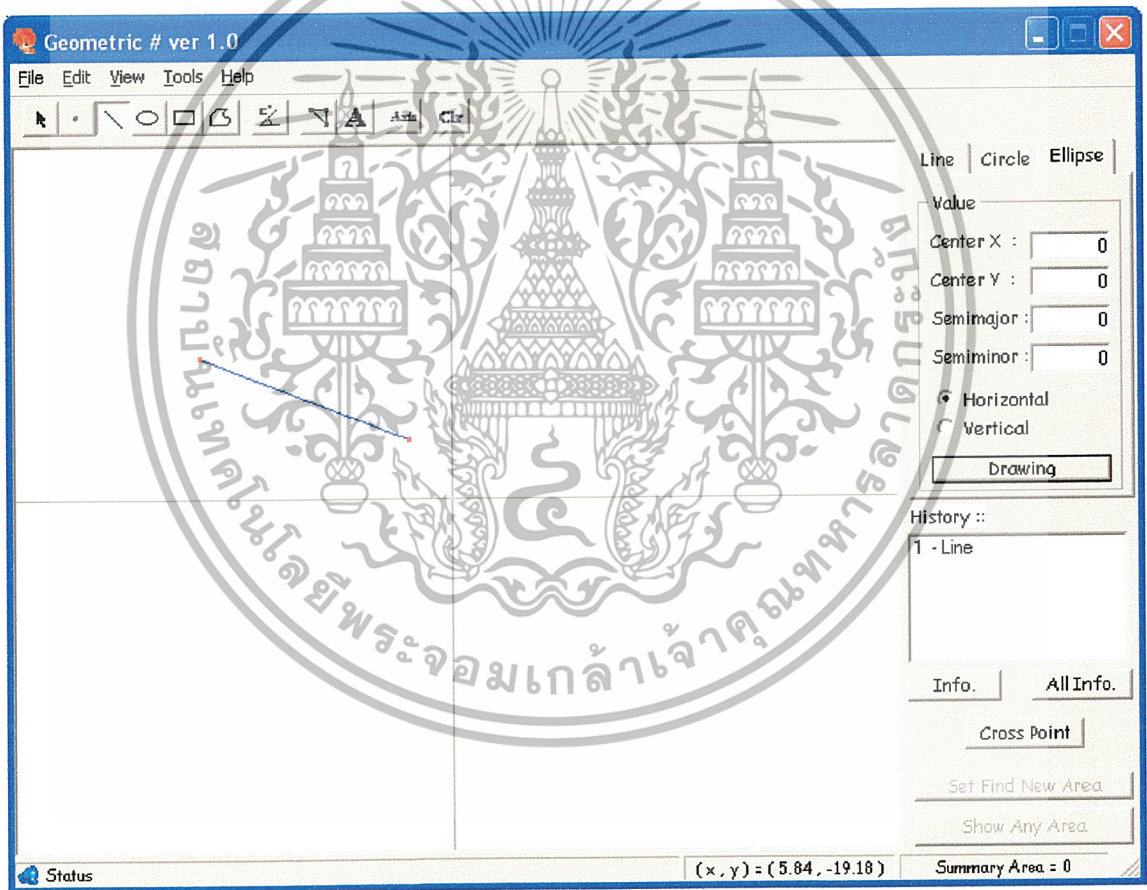


รูปที่ 4.7 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Point

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.3 Line ใช้สำหรับสร้างส่วนของเส้นตรงบนเฟรมรูปภาพ เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรกจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของส่วนของเส้นตรง หลังจากนั้นเมื่อเคลื่อนที่เมาท์แล้วจะเกิดเส้นจากจุดกำเนิดของส่วนของเส้นตรง จากนั้นเมื่อคลิกครั้งที่สองจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ และจะเกิดส่วนของเส้นตรงขึ้น แล้วจะเก็บรายละเอียดของส่วนของเส้นตรง(Line Info) แสดงดังรูป โดยจะเก็บค่าดังนี้

- ระยะทางของส่วนของเส้นตรง(Distance)
- จุดกึ่งกลางของเส้นตรง (Mid Point)
- ความชันของส่วนของเส้นตรง(Slope)
- สมการของส่วนของเส้นตรง(Equation)

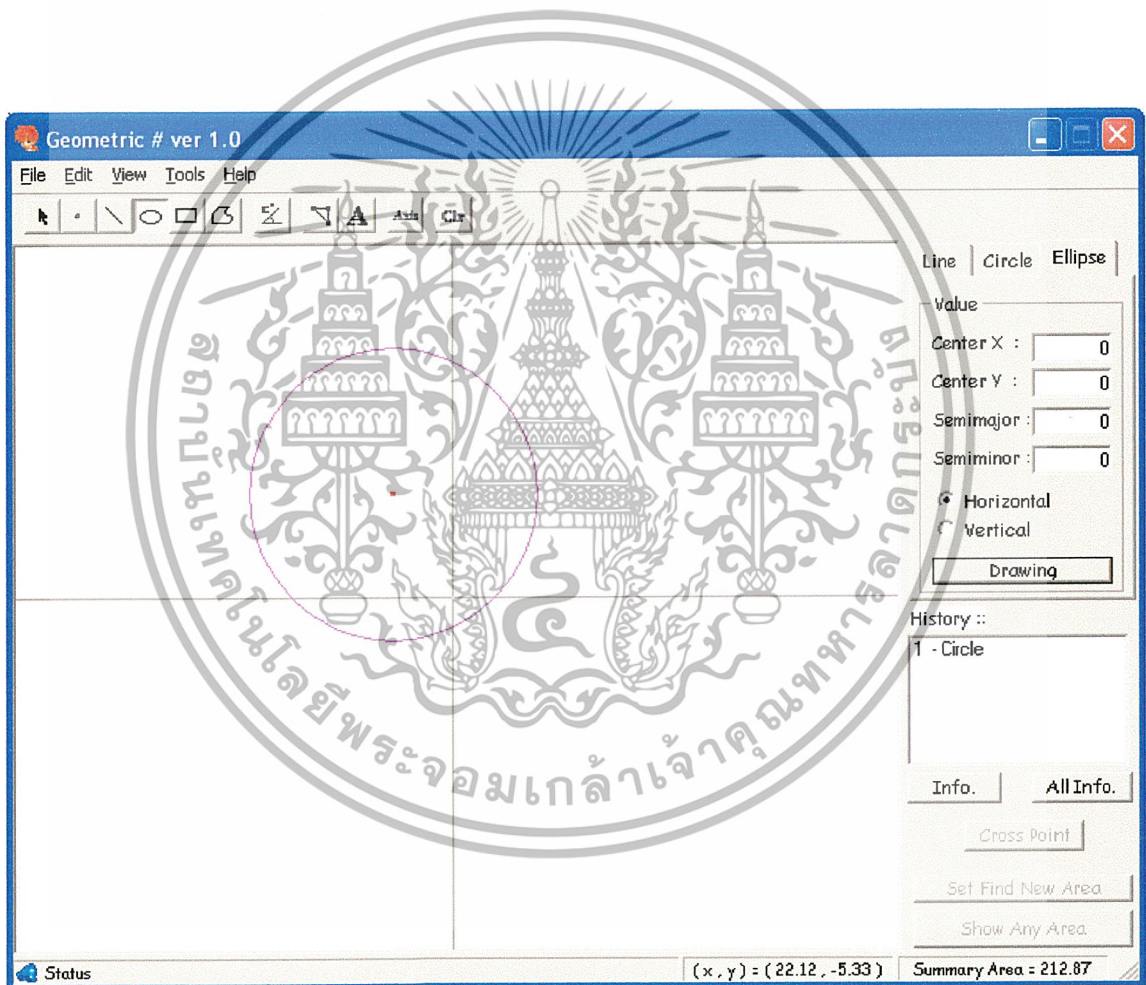


รูปที่ 4.8 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Line

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.4 Circle ใช้สำหรับสร้างวงกลม เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรกจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม หลังจากนั้นเมื่อเคลื่อนที่เมาท์ แล้วจะเกิดเส้นวงกลมขึ้น เมื่อคลิกครั้งที่สองจะเกิดวงกลมขึ้น แล้วจะเก็บรายละเอียดของวงกลม(Circle Info)ขึ้นแสดงดังรูป โดยจะเก็บค่าดังนี้

- ความยาวของรัศมีของวงกลม(Radius)
- เส้นรอบวงของวงกลม(Circumference)
- พื้นที่ของวงกลม(Area)
- สมการของวงกลม(Equation)

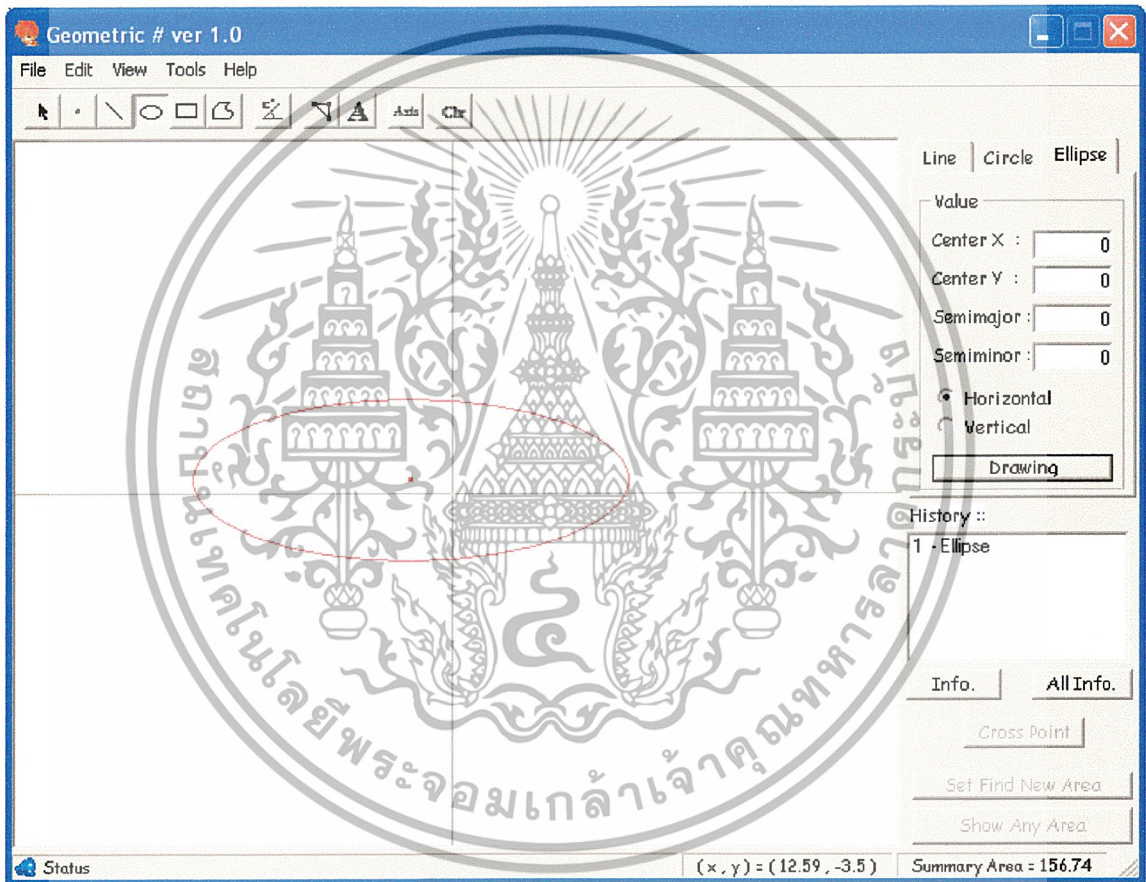


รูปที่ 4.9 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Circle

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.5 **Ellipse** ใช้สำหรับสร้างวงรี เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรกจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงรี หลังจากนั้นเมื่อเคลื่อนที่เมาส์แล้วจะเกิดเส้นวงรีขึ้น เมื่อคลิกครั้งที่สองจะเกิดวงรีขึ้น แล้วจะเก็บรายละเอียดของวงรี(Ellipse Info)ขึ้นแสดงดังรูป โดยจะเก็บค่าดังนี้

- ความยาวแกนเอกของวงรี (semimajor)
- ความยาวแกนโทของวงรี (semiminor)
- พื้นที่ของวงรี(Area)
- สมการของวงรี(Equation)

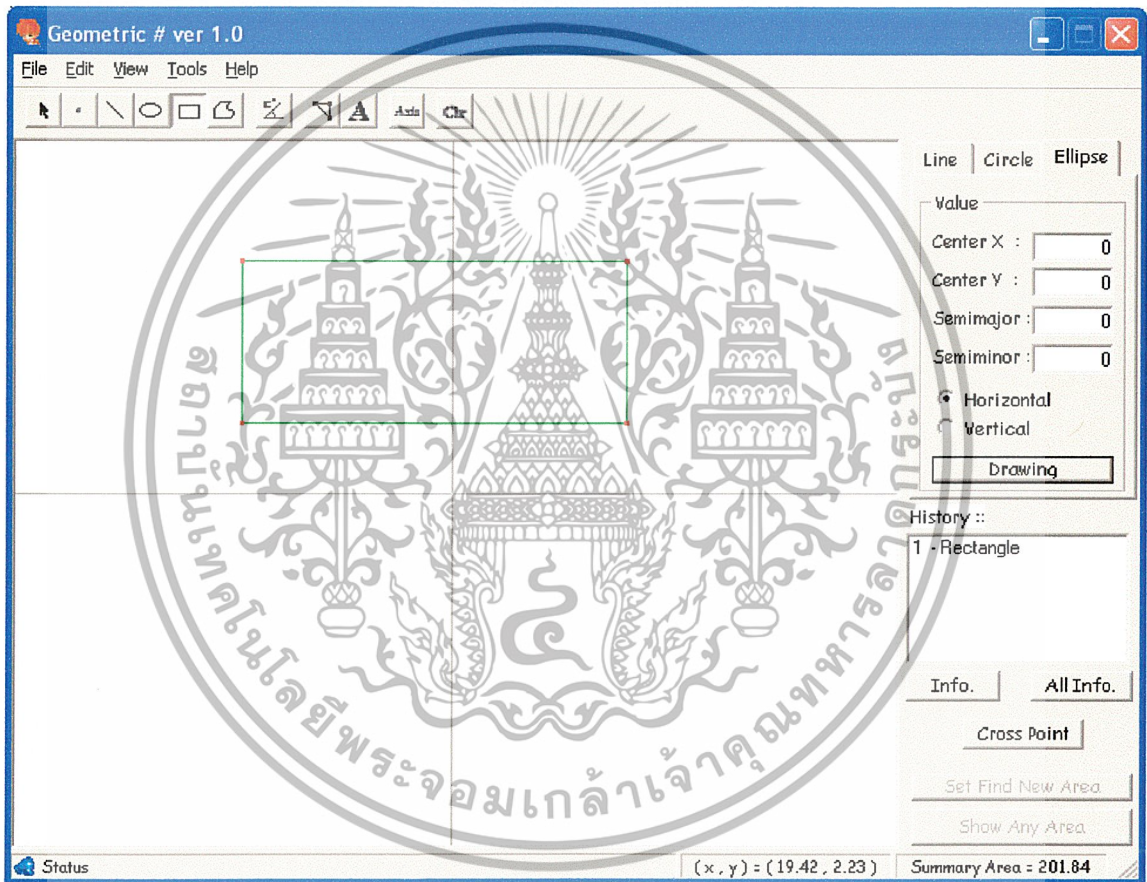


รูปที่ 4.10 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Ellipse

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.6 Rectangle ใช้สำหรับสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรกจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ ซึ่งเป็นจุดมุมหนึ่งของสี่เหลี่ยมผืนผ้า เมื่อเคลื่อนที่เมาท์แล้วจะเกิดเส้นจากจุดมุมนั้นเป็นรูปเหลี่ยมขึ้น เมื่อครั้งที่สองจะเกิดเป็นรูปเหลี่ยมขึ้น แล้วจะเก็บรายละเอียดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(Rectangle Info)แสดงดังรูป โดยจะเก็บค่าดังนี้

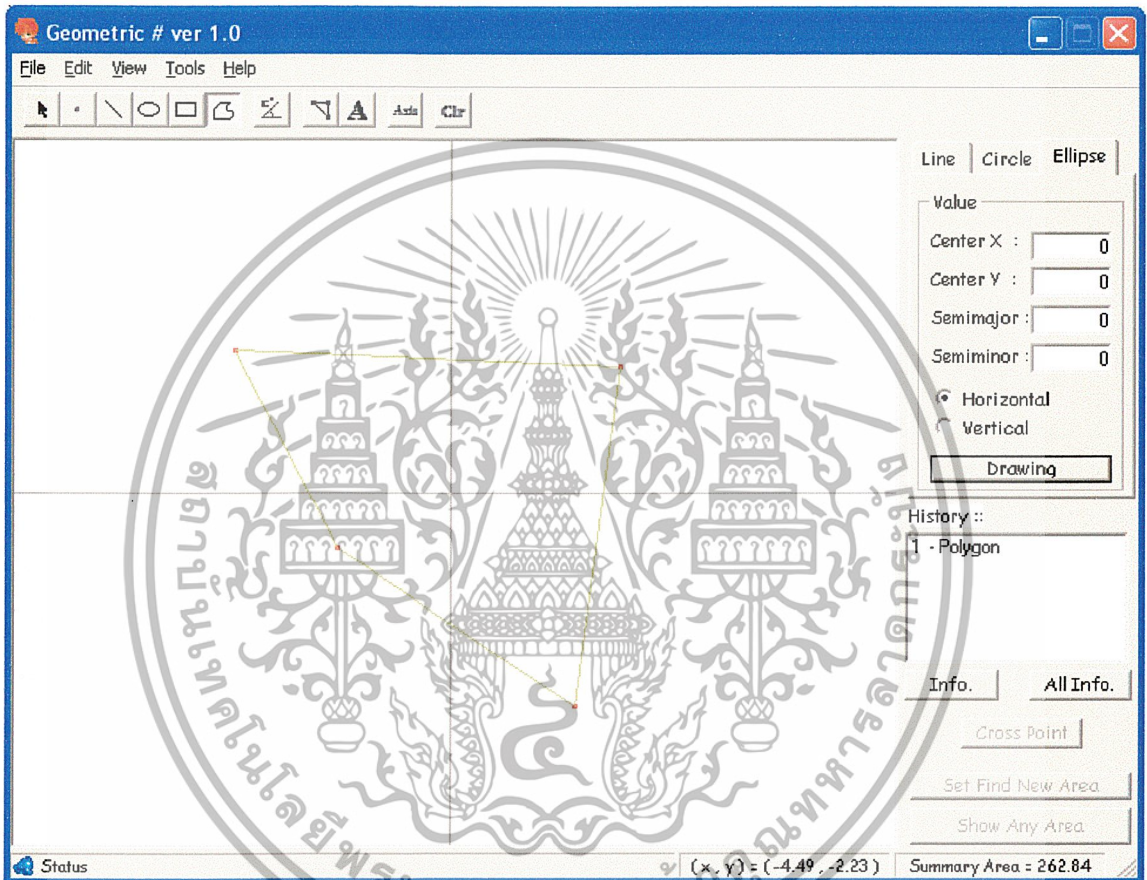
- ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(Width)
- ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(Height)
- เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Circumference)



รูปที่ 4.11 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Rectangle

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

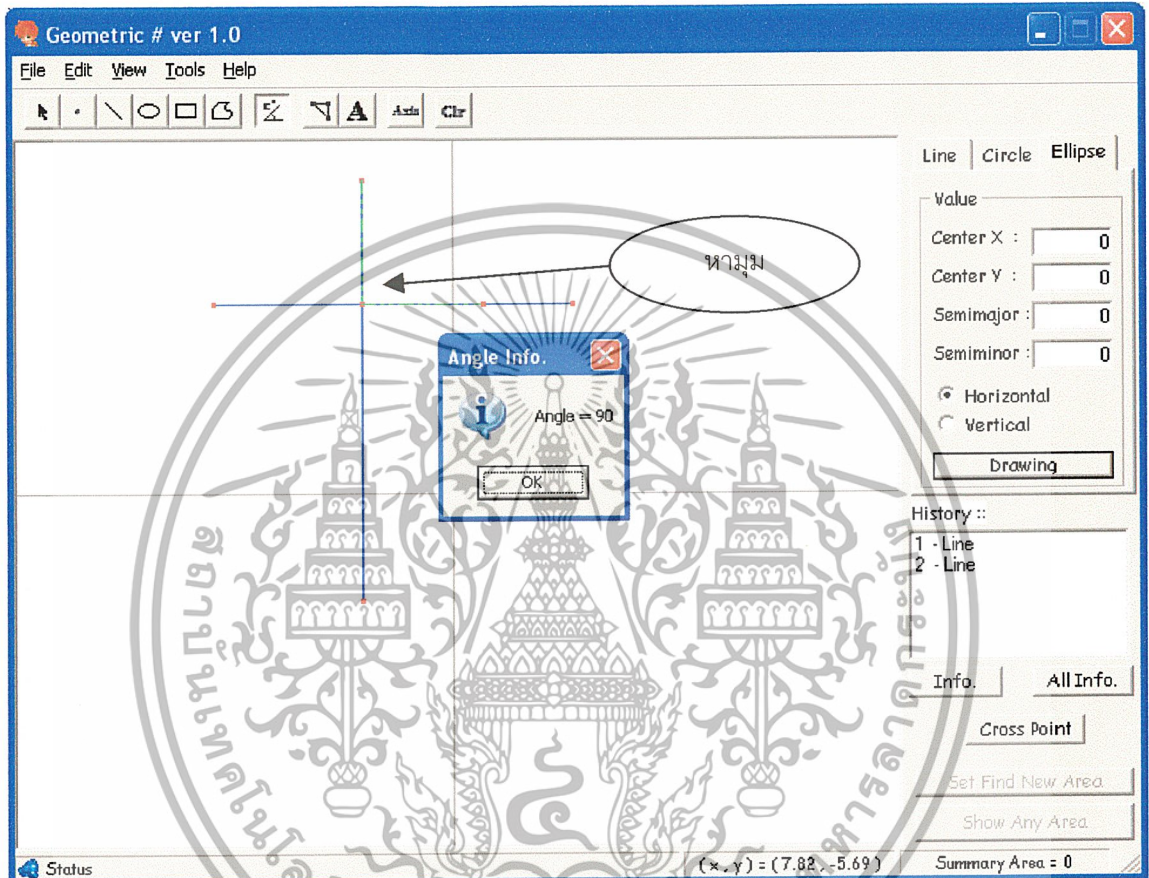
4.2.2.7 Polygon ใช้สำหรับสร้างรูปเหลี่ยมใดๆ เมื่อเลือกเครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรกจะเกิดจุดบนเฟรมรูปภาพ ซึ่งเป็นจุดมุมของรูปเหลี่ยมใดๆนี้ เมื่อคลิกครั้งต่อไปเรื่อยๆ จะเกิดเส้นระหว่างจุดในการคลิกแต่ละครั้ง ซึ่งจะเป็นด้านแต่ละด้านของรูปเหลี่ยมใดๆนี้ รูปนี้จะสร้างเสร็จเมื่อจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดเดียวกัน เมื่อสร้างรูปเหลี่ยมใดๆแล้วจะเก็บขนาดของพื้นที่ของรูปเหลี่ยมใดๆ นั้นที่สร้างขึ้นมา แสดงดังรูป



รูปที่ 4.12 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Polygon

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

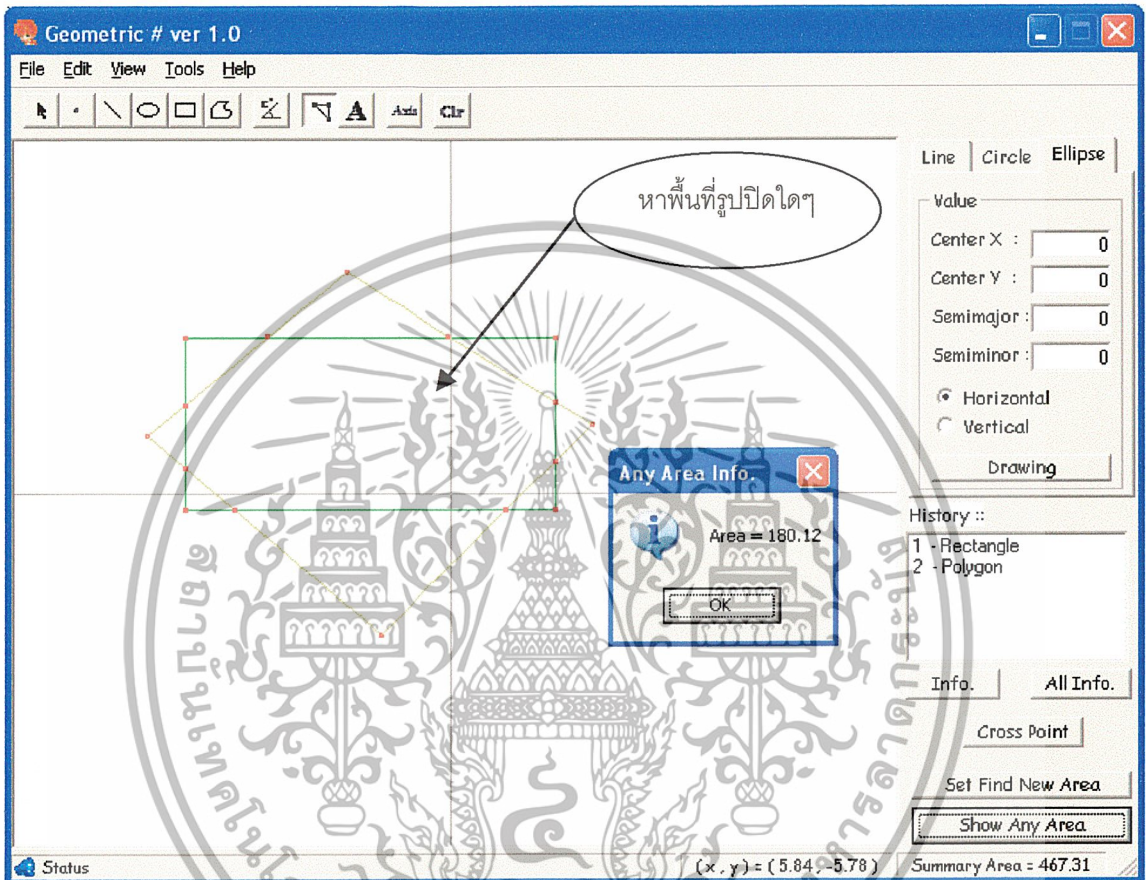
4.2.2.8 Find Angle ใช้สำหรับหามุมระหว่างจุดสามจุด เมื่อเลือกเครื่องมือนี้แล้ว เมื่อคลิกครั้งแรก จะเกิดจุดขึ้น เมื่อคลิกครั้งที่สองจะเกิดจุดขึ้นและมีเส้นปะตามมาจากจุดแรก และเมื่อคลิกครั้งที่สามจะเกิดจุดขึ้นและมีเส้นปะตามมาจากจุดที่สอง แล้วจะปรากฏรายละเอียดของมุม(Angle Info) ซึ่งเป็นมุมที่จุดที่สอง แสดงดังรูป



รูปที่ 4.13 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Find Angle

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.9 Find Any area ใช้สำหรับหาพื้นที่รูปปิดใดๆ เช่นต้องการหาพื้นที่ของรูปปิดใดๆที่เกิดจากตัดกันของส่วนของเส้นตรง เมื่อเลือกเครื่องมือนี้แล้ว ต้องทำการกดปุ่ม Set Find New Area เพื่อให้ค่าที่หาได้ถูกต้อง เมื่อคลิกที่จุดใดๆบนเฟรมรูปภาพจะเกิดจุดขึ้น แล้วเมื่อคลิกต่อไปเรื่อยๆ จะเกิดจุดต่างๆบนเฟรมรูปภาพ เมื่อกดปุ่ม Show Any Area แสดงดังรูป



รูปที่ 4.14 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Find Any area

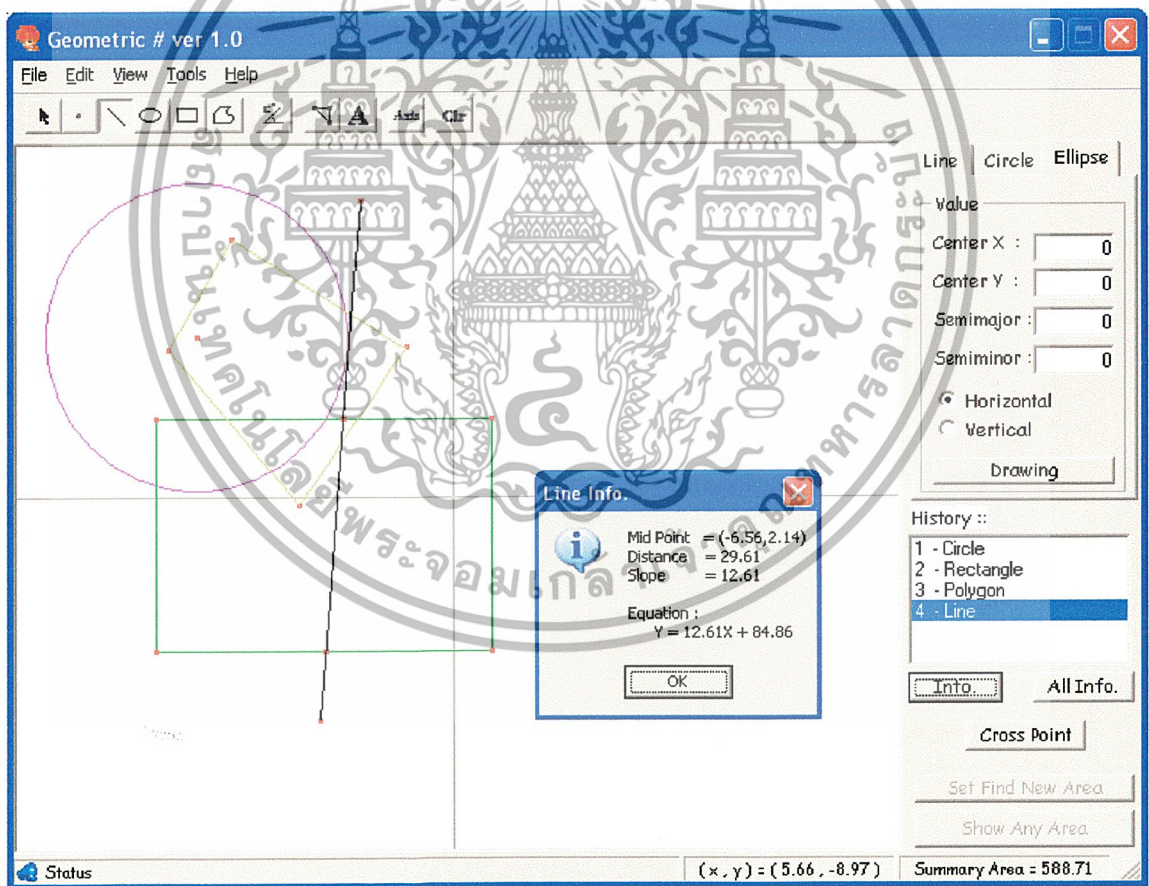
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2.10 Summary Area ใช้สำหรับหาพื้นที่ของรูปใดๆที่สร้างขึ้นบนเฟรมรูปภาพ เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว จะขึ้นพื้นที่รวมของรูปปิดใดๆที่สร้างขึ้นบนเฟรมรูปภาพ

4.2.2.11 Axis ใช้เมื่อต้องการแสดงแกนCoordinate เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้วจะแสดงแกน coordinate ขึ้นมาและเมื่อไม่ต้องการแสดงแกนนี้ ให้เลือกเครื่องมือนี้อีกครั้ง

4.2.2.12 Clear ใช้เมื่อต้องการลบรูปต่างๆที่สร้างขึ้นบนเฟรมรูปภาพทั้งหมด เมื่อเลือกใช้เครื่องมือนี้แล้ว จะมีข้อความขึ้นมาถามว่าต้องการลบทั้งหมดหรือไม่ ถ้าต้องการให้เลือก YES ถ้าไม่ต้องการให้เลือก NO

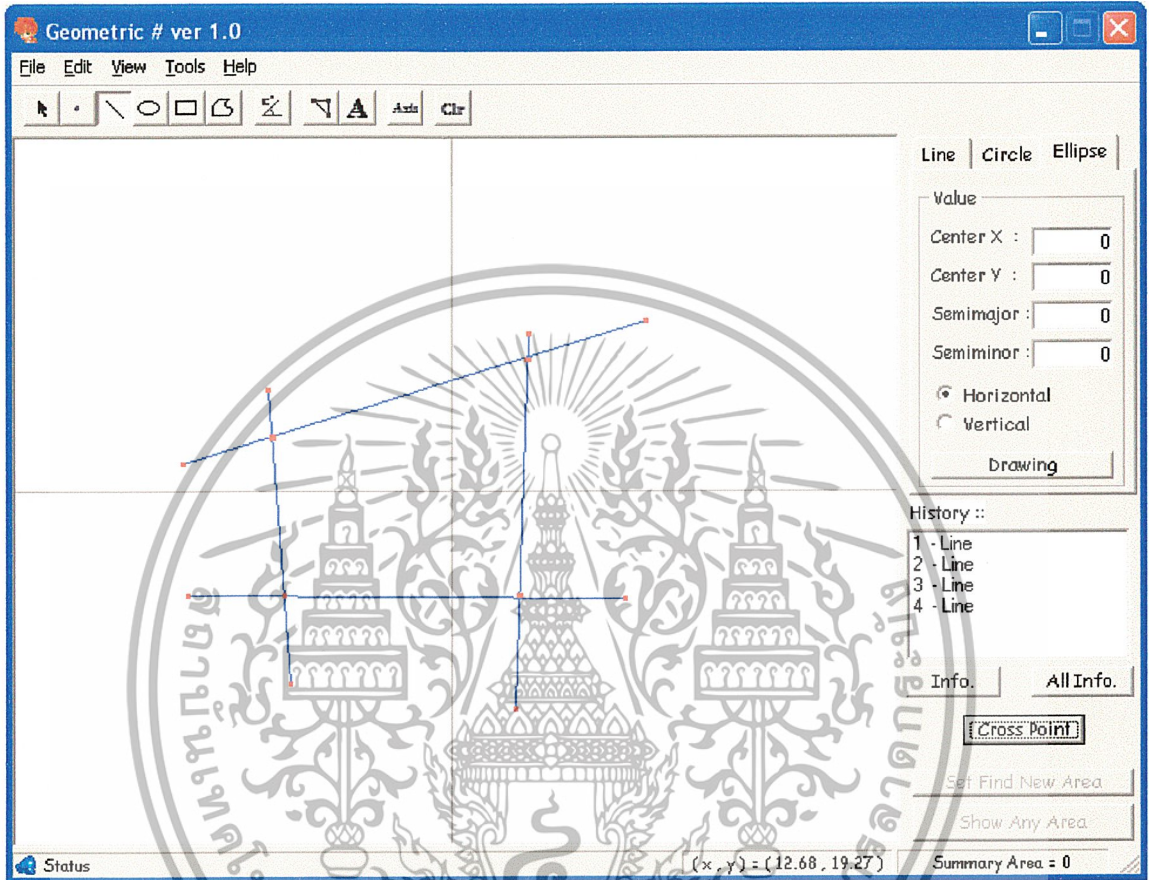
เราสามารถค่าต่างๆที่เกิดจากการวาดรูปบนเฟรมรูปภาพไปแล้ว โดยการกดปุ่ม Ctrl+D จะขึ้นเมนู History ขึ้นมา เมื่อเกิดจากการวาดรูปบนเฟรมรูปภาพไปแล้วสามารถดูค่าต่างๆได้ โดยกดปุ่ม info เพื่อดูค่าที่เกิดจากการวาดรูปนั้นๆ และ All info เพื่อทำการย้อนดูทั้งหมด โดยเรียงตามลำดับ ในการวาดบนเฟรมรูปภาพ



รูปที่ 4.15 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ History

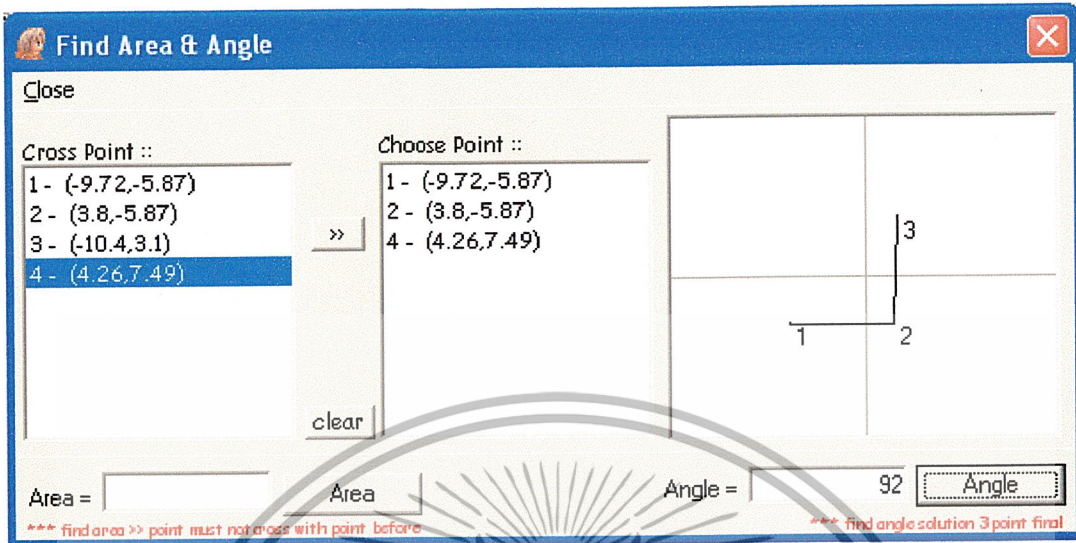
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อให้ค่าที่คำนวณนั้นเป็นค่าที่มีความผิดพลาดน้อยที่สุด โปรแกรมนี้จึงมีการนำจุดตัดของส่วนของเส้นตรงมาคำนวณ โดยมีปุ่ม Cross Point ไว้สำหรับหาค่ามุมและพื้นที่ปิดของรูปเหลี่ยมใดๆ แสดงดังรูป



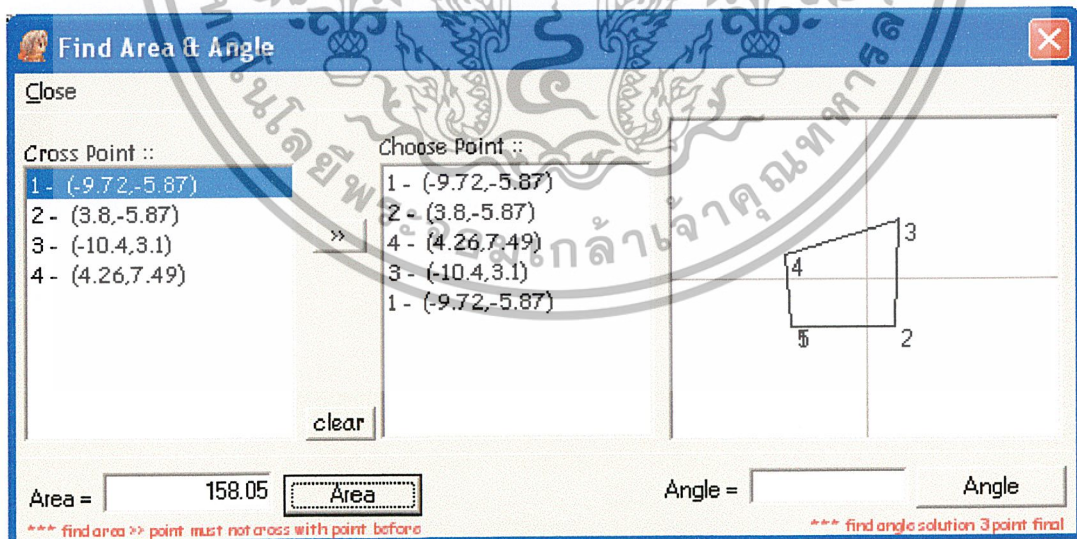
รูปที่ 4.16 ภาพแสดงการใช้เครื่องมือ Cross Point

เมื่อวาดส่วนของเส้นตรงหลายๆเส้นตัดกันแล้วจะเกิดจุดตัดของส่วนของเส้นตรงและมีการเก็บจุดตัดทุกจุดที่เกิดขึ้นทุกจุดบนเฟรมรูปภาพ เมื่อกดปุ่ม Cross Point แล้วจะขึ้นหน้าต่างๆ Find Area & Angle ซึ่งจะขึ้นจุดตัดทุกจุดที่เกิดขึ้นบนเฟรมรูปภาพซึ่งจะมีภาพแสดงมุมที่ต้องการหา ดังแสดงในรูปที่ 4.17 แสดงมุมที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรง



รูปที่ 4.17 ภาพแสดงการหาพื้นที่โดยใช้เครื่องมือ Cross Point

เมื่อต้องการหาพื้นที่ปิดของรูปเหลี่ยมใดๆ ให้เลือกจุดที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรง ซึ่งจะมีภาพแสดงจุดมุมของพื้นที่ที่ต้องการหาโดยจุดแรกและจุดสุดท้ายต้องเป็นจุดเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.18 แสดงพื้นที่ที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรง



รูปที่ 4.18 ภาพแสดงการหาพื้นที่โดยใช้เครื่องมือ Cross Point

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 คุณสมบัติของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่โปรแกรมต้องการ

4.3.1 ระบบปฏิบัติการ Window 95/98/ME/NT/2000/XP

4.3.2 ความเร็วในการประมวลผลมากกว่า 300 MHz

4.3.3 RAM ต้องไม่ต่ำกว่า 64 MB



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

บทสรุป

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ทำให้ได้โปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ ซึ่งสามารถใช้ได้ง่ายและไม่ซับซ้อน แต่เนื่องจากเนื้อหาเรื่องรูปเรขาคณิตยังไม่แพร่หลายและยังยากต่อการเข้าใจสำหรับผู้ที่ไม่มีความรู้พื้นฐาน โปรแกรมนี้จะทำให้ผู้ใช้สามารถวาดรูปและคำนวณได้ง่ายขึ้น แต่ก่อนการใช้โปรแกรมควรศึกษาเรื่องรูปเรขาคณิตมาก่อนเพื่อความเข้าใจที่ง่ายขึ้น

โปรแกรมนี้ทำให้คำนวณค่าต่างๆบนระนาบได้ง่ายขึ้นเช่นจุดตัดของสมการเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน พื้นที่ของรูปปิดใดๆที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรงใดๆหลายเส้นที่ตัดกัน การคำนวณหาค่ามุมที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรงสองเส้น เป็นต้น ซึ่งในการคำนวณนั้นอาจทำได้ยาก โปรแกรมนี้จึงเป็นทางเลือกให้ผู้ใช้สามารถใช้งานได้ง่ายขึ้น

โปรแกรมนี้เขียนขึ้นด้วยภาษา Visual Basic ซึ่งเนื้อหาในส่วนของกราฟฟิกมีให้ศึกษาน้อยมาก เนื่องจากไม่ค่อยมีผู้เขียนเนื้อหาในส่วนนี้ จึงมีความลำบากต่อการเขียนโปรแกรม ภาษา Visual Basic ไม่เป็นโปรแกรมเชิงวัตถุเมื่อวาดรูปลงบนเฟรมรูปภาพแล้วไม่สามารถเคลื่อนย้ายวัตถุนั้นๆได้อีกทั้งโปรแกรมนี้เมื่อแสดงค่าต่างๆออกทางหน้าจอแล้วไม่สามารถเรียกกลับมาดูได้อีก

ข้อจำกัดของโปรแกรมสร้างและคำนวณรูปเรขาคณิตบนระนาบ

1. ถ้าค่าพิกัดที่ใส่เข้าไปเกินสเกลของโปรแกรมที่กำหนดไว้ จะทำให้ไม่เห็นรูปภาพที่สร้างหรืออาจจะมีบางส่วนที่อยู่นอกเฟรมรูปภาพ
2. ถ้า Set Scale ให้มีค่ามากๆ จะทำให้ขนาดของรูปภาพเล็กลง
3. คำสั่ง Undo สามารถใช้ยกเลิกการกระทำล่าสุดได้เท่านั้น
4. ค่าต่างๆที่ปรากฏขึ้นเช่น ค่าความชัน ค่าระยะทางระหว่างจุด สมการ จะดูได้เพียงครั้งเดียวไม่สามารถเรียกกลับมาดูใหม่ได้

ข้อเสนอแนะ

สำหรับข้อเสนอแนะแนวทางการพัฒนาต่อไปนั้น ได้สรุปเป็นแนวทางไว้ดังนี้

1. การจัดทำส่วนของเครื่องมือที่ใช้การสร้างรูปเรขาคณิตในโปรแกรมนี้มีเครื่องมือในการสร้างรูปเรขาคณิตที่ยังไม่ครบ โปรแกรมสามารถเพิ่มเครื่องมือในการสร้างรูปเรขาคณิตเข้าไปได้อีก
2. เพิ่มฟังก์ชันที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาค่าต่างๆ ของรูปเรขาคณิตบนระนาบได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

ฉัททวุฒิ พีชผล. 2542. คู่มือ Visual Basic 6.0. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : อินโฟเพรส
สัจจะ จรัสรุ่งรวีวร. 2544. คู่มือการเขียนโปรแกรมและใช้งาน Visual Basic 6.0. พิมพ์ครั้งที่ 1.

กรุงเทพมหานคร. ซักเซสมิเดีย

Denny Guillick and Robert Ellis. 1997. **Calculus with Analytic Geometry**. U.S.A.:

Suanders Colledge Publishing



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้