

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความถี่ระดับต่างๆ ในสมการ KdV  
ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

THE PROPAGATION OF WATER WAVES OVER VARIABLE DEPTH IN  
THE VARIABLE-COEFFICIENT KORTEWEG-DE VRIES EQUATION



ปิยธิดา ค.ไชยสุวรรณ

PIYATIDA T.CHAISUWAN

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 67436  
วัน,เดือน,ปี... 15 S.A. 2549

b. 116 4101d  
i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคณะหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในห้องสมุดเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**THE PROPAGATION OF WATER WAVES OVER VARIABLE DEPTH IN  
THE VARIABLE-COEFFICIENT KORTEWEG-DE VRIES EQUATION**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2006**

**ISBN 974-8308-10-3**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**COPYRIGHT 2006**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมีเหตุดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

นักศึกษา นางสาวปิยธิดา ต. ไชยสุวรรณ

รหัสประจำตัว 47063802

ปริญญา วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

พ.ศ. 2549

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ. ภักคินี ชิตตกุล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ดร. วรณัทนา ภาณุพิณฑุ

### บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ทำการศึกษาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการเคอทิเวจ ดี วิส (Korteweg-de Vries) หรือ เคดีวี (KdV) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร รูปแบบของสมการเป็นดังนี้

$$2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^3}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0$$

โดยสัมประสิทธิ์เป็นสัมประสิทธิ์เฉพาะที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้ รูปแบบสมการเคดีวีที่ทำการศึกษา ได้มาจากการแปลงสมการออยเลอร์ที่สอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล และเงื่อนไขค่าขอบเขตต่างๆ ให้เหมาะสม จากนั้นใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีการกำหนดพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ 2 ตัว ได้แก่  $\varepsilon$  เป็นขนาดแอมพลิจูดของคลื่น,  $\sigma$  เป็นการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก และพิจารณาเฉพาะเทอม  $O(1)$  และ  $O(\varepsilon)$  เท่านั้น จึงทำให้ได้ผลเฉลยเป็นสมการเคดีวีที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรดังกล่าว ที่สามารถนำมาพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองที่ความลึกระดับต่างๆ โดยเมื่อความลึกเกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้น จะส่งผลทำให้ความสูงของคลื่นเพิ่มขึ้นด้วย และในขณะเดียวกันความกว้างของคลื่นจะลดลง

<b>Thesis</b>	The Propagation of Water Waves over Variable Depth in the Variable-Coefficient Korteweg-de Vries Equation
<b>Student</b>	Miss Piyatida T.Chaisuwan
<b>Student ID.</b>	47063802
<b>Degree</b>	Master of Science
<b>Program</b>	Applied Mathematics
<b>Year</b>	2006
<b>Thesis Advisor</b>	Assoc.Prof Pakkinee Chitsakul
<b>Thesis Co-advisor</b>	Dr. Wantana Panupintu

### ABSTRACT

The propagation of water waves in the variable-coefficient Korteweg-de Vries (KdV) equation,  $2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0$ , is described. The coefficients of the KdV equation is particular for the equation. This equation was transformed from Euler's equation, together with the equation of mass conservation and suitably boundary conditions. Double asymptotic expansion, a part of singular perturbation method, is used. This expansion is introduced two small parameters that are  $\varepsilon$ , amplitude of the wave and  $\sigma$  scale of the depth variation into the problem. Terms  $O(1)$  and  $O(\varepsilon)$  are only retained in this research. Finally, KdV equation, mentioned above, is obtained to describe the water waves increases in depth and in height as decreases in width in the river.

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ด้วยคำแนะนำ และคำปรึกษาที่มีคุณค่าต่อ งานวิจัยชิ้นนี้จาก รศ. ภักตินี ชิตสกุล อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ และ ดร. วรรณัทธนา ภาณุพิณฑุ อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ร่วม ผู้วิจัยรู้สึกทราบบ้างในความอนุเคราะห์ และขอกราบ ขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร. ฉัฐไชย ลีนาวงศ์ รศ.ดร. ปรีชา ยูพาพิน และ รศ. ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ที่ให้ข้อเสนอแนะจนทำให้งานวิจัยฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณเพื่อนๆ รุ่นพี่ และรุ่นน้อง ที่ให้ความช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อคุณแม่ และพี่ๆ น้องๆ ทุกคน ที่สนับสนุนค่าใช้จ่าย และให้ กำลังใจอย่างใกล้ชิดเสมอมา

คุณค่า และประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ปิยธิดา ต.ไชยสุวรรณ



# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ .....	IV
สารบัญรูป.....	VI
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ .....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย .....	4
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย.....	4
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย.....	4
1.5 วิธีการวิจัย.....	5
1.6 ขั้นตอนของงานวิจัย .....	5
1.7 ตารางเวลาและแผนการดำเนินงาน .....	5
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	6
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง .....	6
2.1.1 กฎทรงมวล.....	6
2.1.2 การเสียดรูปของของไหล.....	12
2.1.2.1 การเสียดรูปเชิงมุม.....	12
2.1.2.2 การเสียดรูปเชิงเส้น .....	13
2.1.3 สมการต่างๆ ของการเคลื่อนที่.....	25
2.1.4 เงื่อนไขค่าขอบเขต .....	26
2.1.4.1 เงื่อนไขที่พื้นผิวอิสระ .....	26
2.1.4.1.1 เงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์.....	26
2.1.4.1.2 เงื่อนไขพลังงานพลศาสตร์.....	27
2.1.4.2 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ .....	28
2.1.5 การไร้มิติ .....	28
2.1.6 วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน .....	30
2.1.6.1 ความคิดพื้นฐานบางอย่าง .....	30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา IV ละต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.1.6.2 อนุกรมกำลัง .....	31
2.1.6.3 การหาปริยานุพันธ์ .....	32
2.1.6.4 สมการเชิงอนุพันธ์ .....	33
2.1.6.5 ข้อสรุปและข้อคิดเห็น.....	35
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	35
<b>บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย.....</b>	<b>39</b>
3.1 การไว้มิติ .....	39
3.2 การเปลี่ยนสเกลสำหรับตัวแปรต่างๆ.....	41
3.3 สภาพะพื้นฐาน .....	43
3.4 กรณีพิเศษ .....	46
3.5 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องถิ่น.....	46
3.6 กฎทรงมวล .....	48
3.7 ตัวแปรต่างๆ.....	50
3.8 สมการต่างๆ.....	52
<b>บทที่ 4 ผลของงานวิจัย.....</b>	<b>55</b>
4.1 ผลเฉลยที่ $O(\varepsilon^n \sigma^m)$ .....	55
4.2 กรณีพิเศษสำหรับเฉลย .....	63
<b>บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ.....</b>	<b>68</b>
5.1 สรุปผลงานวิจัย.....	68
5.2 ข้อเสนอแนะ .....	70
<b>เอกสารอ้างอิง.....</b>	<b>71</b>
<b>ประวัติผู้เขียน .....</b>	<b>73</b>

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 แสดงเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ขนาด $dx dy$ และ $dz$ .....	7
2.2 แสดงการเสียดรูปเชิงมุมของของไหล .....	12
2.3 แสดงการเสียดรูปเชิงเส้นของของไหล .....	14
2.4 แสดงความเค้นต่างๆที่พื้นผิวในทิศทาง $x$ .....	15
2.5 แสดงอนุภาคของไหลบนเส้นสายธาร .....	20
2.6 แสดงสภาวะที่ไม่ถูกรบกวน และคลื่นพื้นผิว .....	25
2.7 แสดงเงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์ .....	27
4.1 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 1).....	65
4.2 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 2).....	65
4.3 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 3).....	66
4.4 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 4).....	66

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

เนื่องจากน้ำเป็นทรัพยากรทางธรรมชาติที่มีความสำคัญต่อการดำรงชีวิตของคน ดังนั้นในอดีตและปัจจุบันคนส่วนใหญ่จึงนิยมที่จะปลูกบ้านเรือนริมแม่น้ำหรือริมคลอง แต่ต่อมาเกิดปัญหาการกัดเซาะอันเนื่องมาจากคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลอง จนทำให้ตลิ่งพังและเกิดความเสียหายต่อบ้านเรือนที่อาศัยอยู่บริเวณนั้น เพราะฉะนั้นการศึกษาครั้งนี้จึงมีแนวความคิดที่จะศึกษาถึงพารามิเตอร์ที่ทำให้ความสูงของคลื่นลดน้อยลง เพื่อลดการกัดเซาะ โดยพิจารณาจากความลึกประกอบกับลักษณะทางภูมิศาสตร์ของแม่น้ำลำคลองสายนั้น สำหรับการศึกษาครั้งนี้ทำการพิจารณาค้นคว้าที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV โดยอันดับแรกกล่าวถึงรูปแบบสมการ KdV ในรูปแบบต่างๆ ดังนี้

สมการเคอทิเวจ ดี วิส (Korteweg-de Vries) หรือ เคดีวี (KdV) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ [1] มีรูปแบบดังนี้

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

โดยที่  $u(x,t)$  เป็นฟังก์ชันของเวลา ( $t$ ) และระยะพิกัดที่มีความสัมพันธ์กับทิศทาง ( $x$ ) สมการ KdV จะถูกกำหนดลักษณะเฉพาะที่ได้มาจากชุดคำตอบของคลื่น โซลิตารี (Solitary)

$$u = a \operatorname{sech}^2(\gamma(x-Vt)) \quad \text{โดยที่ } V = 2a = 4\gamma^2 \quad (1.2)$$

สมการ (1.2) ถูกกำหนดลักษณะเฉพาะโดยเลขคลื่น (Wavenumber) คือ  $\gamma$  , ความเร็ว  $V$  ที่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแอมพลิจูด (Amplitude) ของคลื่น ( $a$ ) และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเลขคลื่นยกกำลังสอง ( $\gamma^2$ )

สมการ KdV (1.1) เป็นผลงานของเคอทิเวจ (Korteweg) และดี วิส (De Vries) ตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1895 โดยแสดงคลื่นยาว (Long Waves) ที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ บนพื้นผิวอิสระของน้ำโดยใช้สมการ

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3c}{2h}\zeta\zeta_x + \frac{ch^2}{6}\delta\zeta_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้  $\zeta(x,t)$  คือความสูงของพื้นผิวอิสระที่มีความสัมพันธ์กับความลึก  $h$  ,  $c = (gh)^{1/2}$  คือ ความเร็วของคลื่นยาวเชิงเส้น และ  $\delta = 1 - 3B$  ซึ่ง  $B = \sigma / gh^2$  คือการวัดผลของความตึงผิวเชิงตัวเลขบอน (Bond Number) โดยที่  $\rho\sigma$  เป็นสัมประสิทธิ์ของความตึงผิว และ  $\rho$  เป็นความหนาแน่นของน้ำ การแปลงที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการเคลื่อนที่ ที่มีความเร็ว  $c$  โดยที่  $(x,t)$  เป็นการแทนที่ด้วย  $(x-ct,t)$  ผลที่ตามมาสามารถกำหนดมาตราส่วนอีกครั้ง (Rescaling) ได้ ซึ่งจะเท่ากับ (1.1) และ (1.3) ในปี ค.ศ.1877 โบสสิเนส (Boussinesq) ค้นพบสมการ (1.1) ที่มีชื่อเรียกว่า สมการ KdV เป็นครั้งแรก ต่อมา Korteweg และ De Vries ได้หาคำตอบคลื่นโซลิตอน (1.2) และที่สำคัญยังแสดงว่าคำตอบเป็นองค์ประกอบของพหามิเตอร์ 2 ตัว ที่เป็นชุดคำตอบของคลื่นตัวจร (Travelling Wave) สามารถอธิบายได้โดยฟังก์ชันเอลลิปติก (Elliptic Functions) และโดยทั่วไปเรียกว่าคลื่นคอยดอล (Cnoidal Wave)

$$u = b + acn^2(\gamma(x-Vt)|m) \text{ โดยที่ } V = 6b + 4(2m-1)\gamma^2, a = 2m\gamma^2 \quad (1.4)$$

กำหนด  $cn(x|m)$  เป็นฟังก์ชันจาโคเบียน เอลลิปติก (Jacobian Elliptic Function) ของโมดูลัส (Modulus)  $m(0 < m < 1)$  โดย  $m \rightarrow 1$ ,  $cn(x|m) \rightarrow \sec h(x)$  จากที่กำหนดทำให้คลื่นคอยดอล (1.4) กลายเป็นคลื่นโซลิตอน (1.2) บนพื้นฐานหนึ่งในระดับ  $b$  สำหรับกรณีอื่นๆ เช่น  $m \rightarrow 0$ ,  $cn(x|m) \rightarrow \cos 2x$  แล้วคลื่นคอยดอล (1.4) กลายเป็นคลื่นไซน์ซอยดอล (Sinusoidal Wave) แบบเชิงเส้น โดย limit  $a \rightarrow 0$

การหาคำตอบคลื่นโซลิตอนโดย Korteweg และ De Vries หาได้โดยตรงจากสมการที่ไม่มีความตึงผิวจาก Boussinesq ในปีค.ศ. 1871 , 1877 และเรย์ (Rayleigh) ในปีค.ศ. 1876 ซึ่งใช้แนวทางในการศึกษาของรัสเซล (Russell) ในปีค.ศ.1844 ทำให้ได้สมการ KdV แบบไม่สมบูรณ์ ถ้ากำหนดความตึงผิว และ  $0 < B < 1/3$

ภายหลังจาก Korteweg และ De Vries ได้ค้นพบคลื่นน้ำโซลิตอนและสมการ KdV ความสนใจเกี่ยวกับโซลิตอนและสมการ KdV เริ่มลดน้อยลง จนกระทั่งในปีค.ศ. 1965 ซาบัสกี (Zabusky) และครัสเคา (Kruskal) ได้ค้นพบคลื่นโซลิตอน (1.2) และเงื่อนไขเริ่มต้นทั่วไป โดยการหาปฏิยานุพันธ์เชิงตัวเลขของสมการ KdV ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างโซลิตอน (Soliton) การค้นพบครั้งนี้ทำให้โซลิตอนและสมการ KdV กลับมาเป็นที่สนใจอีกครั้ง ต่อมาในปี ค.ศ.1967 ได้มีทฤษฎีของกราดเนอร์ (Gardner) , กรีนี (Greene) , ครัสเคา (Kruskal) และมิวรา (Miura) ที่แสดงว่าสมการ KdV สามารถหาปฏิยานุพันธ์ได้โดยวิธีการแปลงอินเวอร์ส สเคตเตอร์ริง (Inverse Scattering Transform) ซึ่งทฤษฎีนี้ทำให้ได้ทฤษฎีของโซลิตอน

สมการ KdV (1.1) มีความเกี่ยวข้องกับคลื่นน้ำ โดยที่เกิดขึ้นจากการลดรูปมาตราส่วนการคูณเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Multi-Scale) จากสมการคลื่นยาวเชิงเส้น ผลลัพธ์ที่ได้เป็น

$$A_t + cA_x + \mu AA_x + \lambda A_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

โดยที่  $c$  เป็นความเร็วของคลื่นยาวเชิงเส้นที่มีแอมพลิจูดเป็น  $A(x,t)$  ,  $\mu$  และ  $\lambda$  เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายเทอมที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น และแบบเชิงเส้นตามลำดับ การแปลงที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการเคลื่อนที่ที่มีความเร็ว  $c$  ผลที่ตามมาสมการ (1.5) สามารถแปลงเป็นรูปแบบ (1.1) ได้

จากสมการ (1.5) ทำให้สมการโดยเทอมที่เป็นอันดับสูงกว่าเดิมของคิวบิกแบบไม่เชิงเส้น (Higher-Order Cubic Nonlinear Term) ที่มีรูปแบบเป็น  $\nu A^2 A_x$  จากการแปลงนี้สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็นสมการกราดเนอร์ (Gardner Equation)

$$u_t + 6uu_x + 6\delta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.6)$$

สมการกราดเนอร์ สามารถหาปฏิยานุพัทธ์ได้โดยวิธีการแปลงอินเวอร์ส สเคตเตอร์ริง (Inverse Scattering Transform) กำหนดให้สัมประสิทธิ์  $\delta$  เป็นบวก หรือ เป็นลบก็ได้ การแผ่ขยายคลื่นโซลิตอนโดยมีสัมประสิทธิ์  $c, \mu$  และ  $\lambda$  ในสมการ (1.5) เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่มีการเพิ่มเทอม  $c(\sigma_x/2\sigma)A$  โดย  $\sigma(x)$  แทนการแผ่ขยาย จากการแปลงตัวแปรใหม่ได้เป็น  $\theta = (\int^x dx/c) - t, x$  กับ  $U = \sigma^{1/2}u$  สมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้ มีรูปแบบดังนี้

$$U_x + \alpha(x)UU_\theta + \beta(x)U_{\theta\theta\theta} = 0; \alpha = \mu/c\sigma^{1/2}, \beta = \lambda/c^3 \quad (1.7)$$

เนื่องจากสมการ KdV เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีความสำคัญ และได้มีการประยุกต์ใช้สมการ KdV นี้อย่างมาก ทั้งในทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรมศาสตร์ แต่อย่างไรก็ตามในทางกายภาพนั้น สมการ KdV ยังคงเป็นนามธรรมอยู่ เนื่องจากเรื่องของข้อกำหนดของสัมประสิทธิ์แบบคงที่ เช่น ในเรื่องของกาแผ่ขยายของคลื่นพื้นผิวที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ ในของเหลวที่มีความลึกคงที่ เป็นต้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร เพราะจะได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง และเป็นรูปธรรมที่สุด ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษาที่ความลึกระดับต่างๆ ของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลอง พร้อมทั้งพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ระดับความลึกต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาที่มาของสมการ KdV
2. เพื่อศึกษาวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)
3. เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณี que ศึกษาของความถี่ระดับต่างๆ ในสมการ KdV และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความถี่ระดับต่างๆ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)
4. เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV สำหรับความถี่ระดับต่างๆ

## 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1. รูปแบบของสมการ KdV ที่ศึกษาเป็นแบบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
2. ในการหาสัมประสิทธิ์ของคลื่นน้ำในสมการ KdV และหาผลเฉลยสำหรับความถี่ระดับต่างๆ จะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้ [2-3]
  - 2.1 ของไหล (น้ำ) ที่มีค่าความหนืดเป็นศูนย์
  - 2.2 ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible)
  - 2.3 แรงภายในเป็นแรงโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว
  - 2.3 ของไหลมีการเคลื่อนที่เป็นการไหลที่เป็นแบบไม่คงที่ (Unsteady Flow)
  - 2.4 ของไหลมีการเคลื่อนที่เป็นการไหลที่ไม่มีการหมุน (Irrotational Flow)
  - 2.5 ไม่คิดความตึงผิว (Surface Tension)
  - 2.6 แอมพลิจูดของคลื่นมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวคลื่น
  - 2.7 คลื่นจะต้องเคลื่อนที่ในทิศทางเดียว
  - 2.8 แรงดันที่พื้นผิวคลื่นเป็นศูนย์ (Pressure On Free Surface In Zero)
3. ศึกษาตามวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะ และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความถี่ระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่เป็นผลเฉลยในครั้งนี้

## 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1. ทำให้ได้ตัวอย่างสำหรับการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น
2. ทราบถึงสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับความถี่ระดับต่างๆ ของคลื่นน้ำในสมการ KdV แล้วถ้ามีผู้ที่สนใจในส่วนนี้จะได้นำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

## 1.5 วิธีการวิจัย

ในการศึกษาเพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีการศึกษา และผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายที่ความถี่ระดับต่างๆ ในแม่น้ำลำคลอง วิธีการที่ใช้ในการหาสัมประสิทธิ์เฉพาะนั้น จะใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีการกำหนดพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ 2 ตัว ได้แก่  $\varepsilon$  เป็นขนาดแอมพลิจูดของคลื่น,  $\sigma$  เป็นการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก และพิจารณาเฉพาะเทอม  $O(1)$  และ  $O(\varepsilon)$  เท่านั้น

## 1.6 ขั้นตอนของงานวิจัย

- ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสาร และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง
- ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสาร และข้อมูลที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย
- ขั้นตอนที่ 3 ทำการศึกษาโดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐานในสมการ KdV ใน 2 มิติ
- ขั้นตอนที่ 4 หาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีการศึกษาในสมการ KdV โดยใช้วิธีการตามขั้นตอนที่ 3
- ขั้นตอนที่ 5 เขียนกราฟของสมการ KdV จากสัมประสิทธิ์เฉพาะที่หามาได้ และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความถี่ระดับต่างๆ
- ขั้นตอนที่ 6 สรุป และเขียนวิทยานิพนธ์

## 1.7 ตารางเวลาและแผนการดำเนินงาน

แผนการดำเนินงาน	เดือน											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ขั้นตอนที่ 1	←→											
ขั้นตอนที่ 2			←→									
ขั้นตอนที่ 3					←→							
ขั้นตอนที่ 4						←→						
ขั้นตอนที่ 5								←→				
ขั้นตอนที่ 6										←→		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

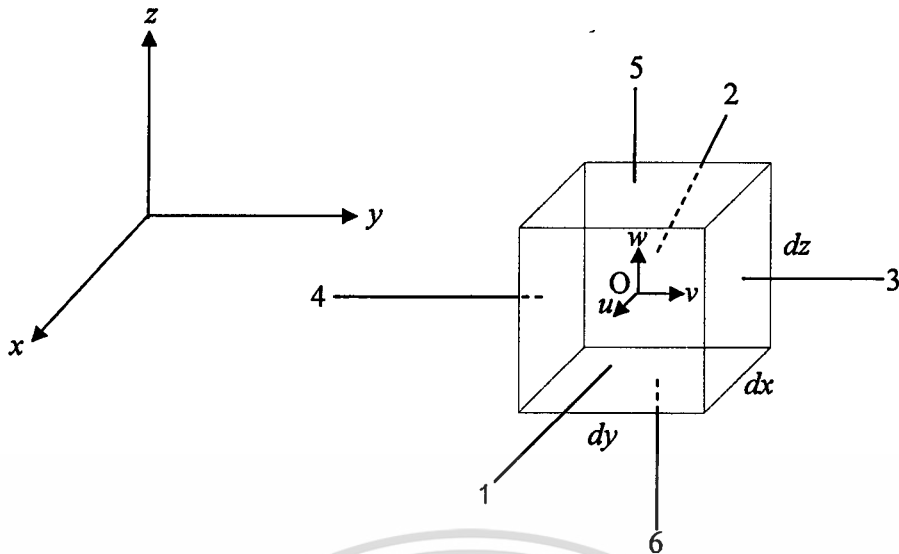
ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ที่ประกอบไปด้วยทฤษฎีและแนวคิด รวมทั้งงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการ KdV โดยที่เนื้อหาหลักจะมุ่งประเด็นไปที่ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ซึ่งทำโดยการให้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่ถูกนำมาใช้เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีศึกษา และทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลาคองที่ความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่เป็นผลเฉลยที่ได้นี้ ซึ่งทฤษฎีและแนวคิดที่อยู่ในบทนี้เป็นส่วนประกอบสำหรับงานวิจัยอย่างมาก

### 2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1.1 กฎทรงมวล (Conservation of Mass)

กฎทรงมวลกล่าวไว้ว่า “ผลรวมของอัตราการผ่านเข้าออกพื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ และอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในเอลิเมนต์เล็กๆมีค่าเท่ากับศูนย์” [3] หรือถ้าเขียนในรูปของสมการเชิงอินทิกรัลคือ 
$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV = 0$$
 ในที่นี้จะหาอัตราการผ่านเข้าออกพื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ และอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในเอลิเมนต์เล็กๆ ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เอลิเมนต์ที่ใช้ที่นี่จะใช้เป็นรูปแบบเอลิเมนต์ในระบบแกนตั้งฉาก  $(X - Y - Z)$  ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ปัญหา สำหรับการวิเคราะห์จะทำการกำหนดคุณสมบัติที่ตำแหน่งกึ่งกลางเอลิเมนต์ จากนั้นก็หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติดังกล่าวบนแต่ละด้านของพื้นผิวเอลิเมนต์โดยใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุดศูนย์กลางเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถทำได้เพราะว่ากำหนดให้ของไหลเป็นสารที่มีความต่อเนื่องทำให้คุณสมบัติต่างๆของของไหลสามารถเขียนได้ในรูปของตำแหน่ง และเวลา สำหรับการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎทรงมวลในระบบแกนตั้งฉากเป็นดังนี้

จะใช้เอลิเมนต์เล็กๆ รูปลูกบาศก์ที่มีขนาด  $dx dy$  และ  $dz$  เพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงได้ในรูปที่ 2.1 โดยกำหนดให้ความหนาแน่น และความเร็วของของไหลที่จุดศูนย์กลางของเอลิเมนต์ “O” มีค่าเท่ากับ  $\rho$  และ  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 แสดงเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ขนาด  $dx$   $dy$  และ  $dz$

การหาคุณสมบัติที่แต่ละด้านของพื้นผิวเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ ทำได้โดยการกระจายอนุกรมเทเลอร์ของคุณสมบัตินั้นๆ รอบจุดศูนย์กลางเอลิเมนต์ "O" ตัวอย่างเช่น ความหนาแน่นที่พื้นผิว (1) ทางด้านหน้าจะได้

$$\rho|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right) \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right) \frac{1}{3!} \left(\frac{dx}{2}\right)^3 + \dots$$

เนื่องจากกำหนดให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กมาก ทำให้เทอมที่มีขนาดของเอลิเมนต์ยกกำลังสองขึ้นไปสามารถกำหนดให้มีค่าน้อยมาก และตัดทิ้งได้ ดังนั้นสมการข้างต้นจึงลดรูปเหลือ

$$\rho|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ของความเร็วยกกำลังหนึ่งเพื่อหาความเร็วที่พื้นผิวด้านหน้าซึ่งหมายถึงความเร็วในทิศทางตามแนวแกน  $x$  ซึ่งก็คือ  $u$  นั้นเองจะได้

$$u|_{x+\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

ขั้นตอนเช่นเดียวกันนี้สามารถนำไปใช้หาความหนาแน่น และความเร็วที่พื้นผิวด้านอื่นๆ  
ที่เหลือ ในที่นี้จะสรุปได้ดังนี้  
ที่พื้นผิวด้านหลัง (2)

$$\rho|_{x-\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \left(\frac{-dx}{2}\right)$$

$$u|_{x-\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{-dx}{2}\right)$$

ที่พื้นผิวด้านขวามือ (3)

$$\rho|_{y+\frac{dy}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}$$

$$v|_{y+\frac{dy}{2}} = v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}$$

ที่พื้นผิวด้านซ้ายมือ (4)

$$\rho|_{y-\frac{dy}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \left(\frac{-dy}{2}\right)$$

$$v|_{y-\frac{dy}{2}} = v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{-dy}{2}\right)$$

ที่พื้นผิวด้านบน (5)

$$\rho|_{z+\frac{dz}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}$$

$$w|_{z+\frac{dz}{2}} = w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}$$

ที่พื้นผิวด้านล่าง (6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho|_{z-\frac{dz}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\left(\frac{-dz}{2}\right)$$

$$w|_{z-\frac{dz}{2}} = w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{-dz}{2}\right)$$

จากการพิจารณาความหนาแน่น และความเร็วที่แต่ละพื้นผิวของรูปลูกบาศก์ ทำให้สามารถหาอัตราการผ่านเข้าออกของมวลที่แต่ละพื้นผิวของรูปลูกบาศก์ได้  $\left(\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}\right)$  และเมื่อนำมารวมกันจะทำให้ได้อัตราการเคลื่อนผ่านเข้าออกสุทธิของมวลของเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์นี้ โดยมีขั้นตอนต่างๆดังต่อไปนี้

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านหน้า (1) คือ

$$\begin{aligned} & \left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz \\ &= \rho u dydz + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{dx}{2} \right)^2 dydz \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากเอลิเมนต์มีขนาดเล็ก ดังนั้นเทอมสุดท้ายที่มี  $\left(\frac{dx}{2}\right)^2$  จึงมีค่าน้อยเพียงพอที่จะทำให้ตัดเทอมสุดท้ายทิ้งได้ ดังนั้นอัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านหน้าคือ

$$\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านหลัง (2) คือ

$$\begin{aligned} & - \left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( \frac{-dx}{2} \right) \right] \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{-dx}{2} \right) \right] dydz \\ &= -\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz \end{aligned}$$

สาเหตุที่มีเครื่องหมายลบเนื่องจากทิศทางของความเร็ว และของพื้นที่บริเวณพื้นผิว

**ด้านหลังมีทิศทางตรงกันข้าม**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านขวามือ (3) คือ

$$\left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] \left[ v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz = \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านซ้ายมือ (4) คือ

$$-\left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \left( \frac{-dy}{2} \right) \right] \left[ v + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{-dy}{2} \right) \right] dx dz = -\rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านบน (5) คือ

$$\left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] \left[ w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[ w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านล่าง (6) คือ

$$-\left[ \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{-dz}{2} \right) \right] \left[ w + \frac{\partial w}{\partial z} \left( \frac{-dz}{2} \right) \right] dx dy = -\rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[ w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

นำอัตราการผ่านเข้าออกของมวลที่แต่ละพื้นผิวดังแสดงข้างต้นมารวมกันจะได้อัตราการผ่านเข้าออกสุทธิของมวลของเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz - \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz \\ &+ \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz - \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz \\ &+ \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[ w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz - \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[ w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \left[ \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ 
$$= \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.1)$$

ต่อไปจะหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลภายในเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ซึ่ง  $\frac{\partial m}{\partial t}$  จะพบว่า มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

เมื่อ  $m = \rho dA = \rho dx dy dz \quad (2.2)$

จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) เมื่อแทนค่าลงในสมการของกฎทรงมวลทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎทรงมวลบนระบบแกนตั้งฉากคือ

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

หรือเขียนสั้นๆ โดยใช้ตัวดำเนินการทางเวกเตอร์ "∇" จะได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เมื่อ 
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

สมการของกฎทรงมวลสำหรับแกนตั้งฉากดังแสดงในสมการ (2.3) สามารถนำมาพิจารณารูปแบบการไหลได้หลายรูปแบบ เช่น เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับการไหลของของไหลที่อัดตัวไม่ได้หรือ  $\rho$  มีค่าคงที่ จะได้ผลลัพธ์ คือ

จาก 
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เนื่องจาก  $\rho$  มีค่าคงที่จะได้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

หรือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

จากสมการ (2.4) จะเห็นว่ากฎทรงมวลในระบบแกนตั้งฉากเมื่อ  $\rho$  มีค่าคงที่จะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของความเร็วของการไหลเท่านั้น หากนำสมการ (2.3) มาประยุกต์ใช้กับการไหลแบบคงตัวซึ่งหมายถึงคุณสมบัติต่างๆ ของการไหลไม่ขึ้นกับเวลา จะได้ดังนี้

จาก 
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เนื่องจาก  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

หรือ

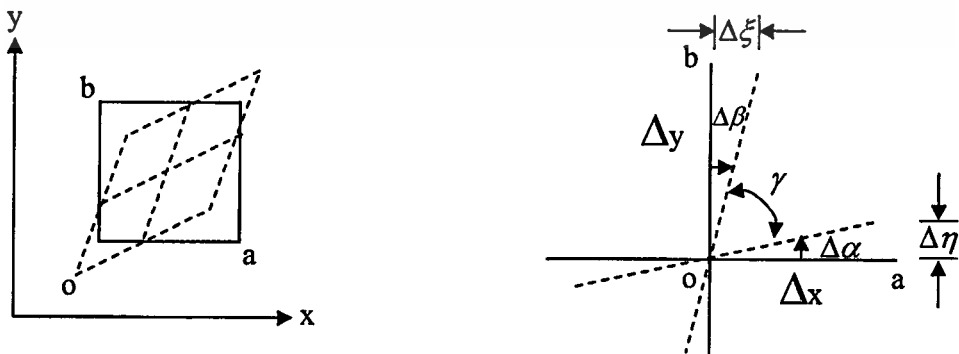
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

### 2.1.2 การเสียรูปของของไหล

เป็นรูปแบบการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ การเสียรูปเชิงมุมและการเสียรูปเชิงเส้น [3] ซึ่งสามารถพิจารณาการเสียรูปแต่ละแบบดังต่อไปนี้

#### 2.1.2.1 การเสียรูปเชิงมุม (Angular Deformation)

การเสียรูปเชิงมุมของเอलिเมนต์เล็กๆ ของของไหลคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่เริ่มแรกตั้งฉากกัน



รูปที่ 2.2 แสดงการเสียรูปเชิงมุมของของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาจากรูปที่ 2.2 จะเห็นว่าอัตราการเสียรูปเชิงมุมเทียบกับเวลาคือ อัตราการลดลงของมุมระหว่างเส้นตรง  $oa$  และ  $ob$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

สาเหตุที่ต้องมีเครื่องหมาย (-) เนื่องจากมุมที่เปลี่ยนแปลงไปมีลักษณะลดลง แต่ค่าของ  $\frac{d\alpha}{dt}$  และ  $\frac{d\beta}{dt}$  ที่หานั้นเป็นการหาขนาดเท่านั้น ดังนั้นเพื่อแสดงให้เห็นว่ามุมที่เปลี่ยนแปลงมีลักษณะลดลงจึงต้องใส่เครื่องหมาย (-)

จากการหมุนของของไหลจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงมุมของเส้นตรง  $oa$  และ  $ob$  เป็นดังนี้

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

หมายเหตุ  $\frac{d\beta}{dt}$  ไม่มีเครื่องหมาย (-) เพราะทิศทางการเคลื่อนที่ของจุด  $b$  อยู่ในทิศทางแกน  $x +$

จากที่ว่าความเค้นเฉือนมีความสัมพันธ์กับอัตราการเสียรูปเชิงมุมผ่านทางค่าความหนืด ( $\mu$ ) ซึ่งในกรณีของไหลที่มีความหนืดเป็นไปไม่ได้เลยที่ค่า  $\frac{\partial v}{\partial x}$  จะมีค่าเท่ากับ  $\frac{\partial u}{\partial y}$  แล้วมีเครื่องหมายตรงกันข้ามเพื่อให้รวมแล้วมีอัตราการเสียรูปเชิงมุมเท่ากับศูนย์ แสดงว่าย่อมต้องเกิดการเสียรูปเชิงมุมแน่นอน เมื่อเกิดการเสียรูปก็หมายถึงต้องมีความเค้นเฉือนมากระทำด้วยเช่นกัน ความเค้นเฉือนนี้ก็จะทำให้ของไหลเกิดการหมุนสามารถสรุปได้ว่า การที่มีแรงหนืดแสดงว่าให้เห็นว่าเป็นการไหลที่มีการหมุน (Rotational Flow)

### 2.1.2.2 การเสียรูปเชิงเส้น (Linear Deformation)

การเสียรูปเชิงเส้นของอนุภาคของไหล อธิบายด้วยมุมที่จุดตัดกันของเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งจะต้องไม่เปลี่ยนแปลงกล่าวคือ ก่อนเกิดการเสียรูปเชิงเส้นหากมุมระหว่างเส้น 2 เส้นนี้เป็นมุมฉาก เมื่อเกิดการเสียรูปเชิงเส้นจะทำให้เอลิเมนต์ของไหลเกิดการยืดหรือหดโดยไม่เกิดการเปลี่ยนมุม (ดูรูปที่ 2.3) กล่าวคือ เอลิเมนต์ของของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวตามแกน  $x$  ไปเท่ากับ  $\frac{\partial u}{\partial x}$  หรือเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวตามแกน  $y$  ไปเท่ากับ  $\frac{\partial v}{\partial y}$  ส่วนการ

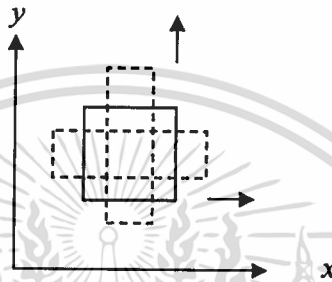
เปลี่ยนแปลงตามแนวแกน  $z$  ก็จะทำกับ  $\frac{\partial w}{\partial z}$  การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้คือ ความเครียดตามยาว

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(Longitudinal Strain) ซึ่งมีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเอลิเมนต์ได้ จึงให้นิยามของ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตร (Volume Dilation Rate) ดังนี้

$$\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตร} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

โดยที่หากเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ จะพบว่า ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตร (หรือ การเสีรูปร่างเชิงเส้น) จะมีค่าเท่ากับศูนย์



รูปที่ 2.3 แสดงการเสีรูปร่างเชิงเส้นของของไหล

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหล โดยคำนึงถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ซึ่งหมายถึงแรงลัพธ์ โดยจะทำการสร้างกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน หรือ สมการโมเมนตัม ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยพิจารณาแรงลัพธ์ที่เป็นผลรวมของแรงพื้นผิวที่เกิดจากความเค้นตึงจาก และความเค้นเฉือน กับแรงวัตถุ(เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก) และใช้ค่าความเร่งของของไหลซึ่งได้มาจากการศึกษาเรื่องจลศาสตร์สำหรับของไหล โดยขั้นตอนเป็นดังนี้ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันเป็น

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{หรือ} \quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{\text{system}}$$

เมื่อ  $\vec{P}$  คือ โมเมนตัมเชิงเส้น และ  $\vec{P}_{\text{system}} = \int_{\text{mass}} \vec{V} dm$

หากพิจารณาระบบเป็นเอลิเมนต์ของไหลเล็กๆ ที่มีมวล  $dm$  จะเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\text{system}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

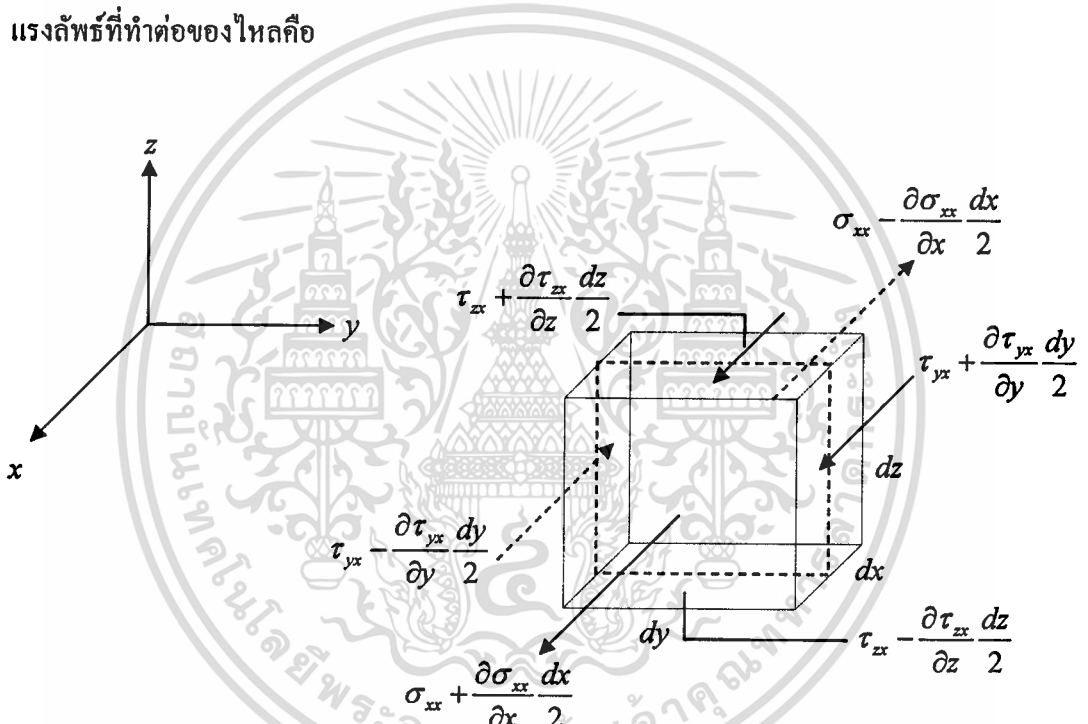
จากการศึกษาจลศาสตร์ของของไหลจะได้

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{system} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

เมื่อแทนความเร่งลงไปในการของนิวตันจะได้

$$d\vec{F} = dm \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \tag{2.5}$$

แรงลัพธ์ที่ทำต่อของไหลคือ



รูปที่ 2.4 แสดงความเค้นต่างๆที่พื้นผิวในทิศทาง x

แรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ 1) แรงพื้นผิว 2) แรงวัตถุ ในที่นี้จะพิจารณาแรงพื้นผิวจากทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน

พิจารณารูปที่ 2.4 ซึ่งแสดงความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่กระทำต่อเอลิเมนต์ของไหลเฉพาะในทิศทาง x โดยกำหนดให้ที่จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์มีความเค้นเท่ากับ  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  และ  $\tau_{xx}$  จากนั้นสามารถหาความเค้นบนพื้นผิวของเอลิเมนต์ได้จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุดกึ่งกลาง "o" ดังนั้นแรงพื้นผิวทั้งหมดที่กระทำต่อเอลิเมนต์ของไหลในทิศทาง x คือ

$$d\vec{F}_{sx} = \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\
 & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

หรือ

$$d\vec{F}_{Sx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

เมื่อหาแรงพื้นผิวที่กระทำต่อเอลิเมนต์ในทิศทาง  $x$  และแรงวัตถุจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อเอลิเมนต์เป็นดังนี้

$$d\vec{F}_{Bx} = (\rho g_x) dx dy dz$$

จากแรงพื้นผิว และแรงวัตถุที่หาได้ทำให้สามารถหาแรงลัพธ์ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ในทิศทาง  $x$  ได้เป็น

$$d\vec{F}_x = d\vec{F}_{Sx} + d\vec{F}_{Bx} = \left( \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

สำหรับแรงลัพธ์ที่กระทำต่อเอลิเมนต์นี้ในทิศทางอื่นๆ คือในทิศทาง  $y$  และในทิศทาง  $z$  ในทำนองเดียวกันสามารถหาได้เช่นเดียวกับในแกน  $x$  ดังนั้นจะได้

$$d\vec{F}_y = d\vec{F}_{Sy} + d\vec{F}_{By} = \left( \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$d\vec{F}_z = d\vec{F}_{Sz} + d\vec{F}_{Bz} = \left( \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

นำแรงลัพธ์ที่หาได้แทนลงในสมการ (2.5) เพื่อหาค่า  $d\vec{F}$  และจะทำการพิจารณาตามแกนต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

$$\text{แกน } x: \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{แกน } y: \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\text{แกน } z: \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการในรูปอนุพันธ์สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหล ที่สอดคล้องกับสมมติฐานของสารต่อเนื่อง แต่ถ้าหากนำเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเร็วของการไหลไปแทนในสมการข้างต้น (แกน x, แกน y, แกน z) นี้จะทำให้ง่ายขึ้น สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียน จะเห็นว่าค่าความเค้นเฉือนจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเสียรูปเชิงมุมด้วยค่าความหนืด ( $\mu$ ) ซึ่งทำให้ความเค้นเหล่านี้สามารถเขียนได้ในรูปของความเร็วของการไหลดังนี้

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ; \sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

เมื่อ  $p$  คือ ความดันเทอร์โมไดนามิกส์ (Thermodynamics Pressure)

นำความเค้นต่างๆ ในรูปของความเร็ว และความดันของการไหลแทนลงในสมการสำหรับกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง แล้วทำการจัดรูปจะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$

เรียกสมการเหล่านี้ว่า “สมการนาเวียร์-สโตค (Navier-Stokes Equation)” [3] ซึ่งหากพิจารณาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ หรือ  $\rho$  คงที่ และกำหนดให้  $\mu$  คงที่ จะทำให้สมการลดรูปลงเหลือ

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

นอกจากนี้หากพิจารณาในกรณีการไหลแบบไม่มีความเสียดทาน (ไม่มีความหนืด หรือไม่มีความเค้นเฉือน) ดังนั้น  $\mu = 0$  จึงทำให้มีเฉพาะความเค้นตั้งฉากที่มีค่า  $-p$  ที่กระทำต่ออนุภาคของไหลเท่านั้น เพราะฉะนั้นสมการจะลดรูปได้สมการเหลือเป็น “สมการออยเลอร์ (Euler’s Equation)” [3] ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

หรือ

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

กำหนดให้แกน  $z$  อยู่ในแนวตั้ง ดังนั้น

$$\nabla z = \hat{k} \Rightarrow \rho \vec{g} = -\rho g \hat{k} = -\rho g \nabla z$$

แทนเทอมข้างคั่นลงในสมการออยเลอร์จะได้

$$-g\rho\nabla z - \nabla p = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

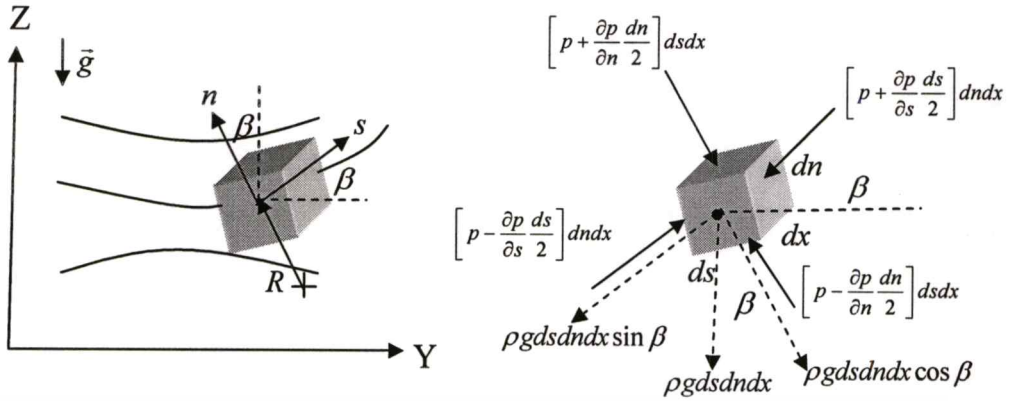
$$-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

จากสมการความเร่งที่ว่า  $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$  ดังนั้น

$$-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ และไม่มี ความหนืดต้องใช้ สมการออยเลอร์หรือสมการนาเวียร์-สโตก ที่กำหนดให้  $\rho$  มีค่าคงที่ และ  $\mu=0$  ที่ได้แสดง รูปแบบบนระบบแกนตั้งฉาก เนื่องจากความเร่งในสมการออยเลอร์เกิดจากการหาอนุพันธ์ของ ความเร็ว  $\vec{V}$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ 4 ตัวแปร คือฟังก์ชันของ  $x, y, z$  และ  $t$  ดังนั้นถ้าเลือกระบบ แกนที่เหมาะสม และมีผลทำให้ความเร็วของการไหลเป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่น้อยลงจะทำให้ สะดวกต่อการหาความเร่งในสมการออยเลอร์ จากนิยามของเส้นสายธารที่ว่า เป็นเส้นที่ลากสัมผัส กับความเร็วของการไหลซึ่งในกรณีที่เป็นของไหลแบบคงตัวเส้นสายธารจะเป็นเส้นเดียวกับเส้น วิถี (Pathline) บนเส้นสายธารนี้ความเร็วเป็นตัวแปรของฟังก์ชัน  $s$  (ตามแนวเส้นสายธาร) และ  $t$  เท่านั้น ดังนั้นจึงเหมาะสมที่จะสร้างสมการออยเลอร์บนระบบแกนของเส้นสายธาร

บนระบบแกนของเส้นสายธาร กำหนดให้พิกัด  $s$  แทนระยะตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้น สายธาร และพิกัด  $t$  แทนระยะในแนวตั้งฉากกับเส้นสายธาร จากนั้นจะสร้างสมการสำหรับการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันบนแนวแกนทั้งสอง โดยพิจารณาตัวอย่างของการไหลในระนาบ  $Y-Z$  ดังรูปที่ 2.5 เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกับเอลิเมนต์เล็กๆ ขนาดของ  $ds \, dn \, dx$  ซึ่งมีความเร็วในแนวสัมผัสเท่ากับ  $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$  เมื่อพิจารณาตามแนวแกน  $s$  โดยไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานหรือแรงหนืด และมีคุณสมบัติต่างๆ ที่พื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ นี้ สามารถหาได้จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ของคุณสมบัติต่างๆ รอบจุดกึ่งกลางเอลิเมนต์



รูปที่ 2.5 แสดงอนุภาคของไหลบนเส้นสายธาร

จาก

$$\sum F = ma$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะแรงตามแนวแกน  $s$  จะได้ว่า

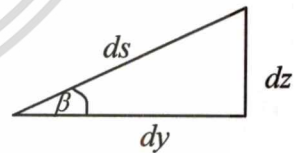
$$\left[ p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dndx - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dndx - \rho g \sin \beta dsdndx = \rho adndsdx$$

เมื่อ  $\beta$  คือมุมระหว่างเส้นสัมผัสเส้นสายธารกับเส้นระดับ

$a$  คือความเร่งของอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นสายธาร

จากสมการข้างบนจัดรูปใหม่จะได้

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a$$



จากรูปทางขวามือจะเห็นว่า  $\sin \beta = \frac{dz}{ds}$  เมื่อนำไปแทนจะได้

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{dz}{ds} = a$$

เนื่องจากบนแนวเส้นสายธาร พบว่าค่าความเร็วจะเป็นฟังก์ชันของ  $s$  และ  $t$  เท่านั้นหรือ  $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$  ทำให้สามารถเขียนสมการความเร่งของอนุภาคของไหลด้วยวิธีออยเลอร์ได้ดังนี้

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \text{หรือ} \quad a = \frac{D\vec{V}}{Dt} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

โดยปกติแล้วบนระบบแกน  $s-n$  นี้ความเร็วของการไหลจะอยู่ในแนว  $s$  เท่านั้นเพราะเส้นสายธารเป็นเส้นที่ลากสัมผัสกับความเร็ว ดังนั้นตามแนว  $n$  จึงมีความเร็วเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสามารถเขียนสมการออยเลอร์ที่สร้างบนแนวแกน  $s$  ของระบบแกนของเส้นสายธารได้ดังนี้

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

สำหรับกรณีที่เป็นการไหลแบบคงตัว และไม่พิจารณาผลจากแรงวัตถุ ซึ่งหมายถึงกำหนดให้  $\vec{g} = 0$  ดังนั้นสมการออยเลอร์ข้างต้นจะลดรูปเป็น

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -V \frac{\partial V}{\partial s}$$

จากสมการนี้มีความหมายว่าสำหรับการไหลตามแนวเส้นสายธารนั้น ถ้าความเร็วของการไหลลดลง ความดันของของไหลจะเพิ่มขึ้นหรือถ้าความเร็วของการไหลเพิ่มขึ้น ความดันของไหลจะลดลง

การสร้างสมการเบอร์นูลลีสามารถสร้างได้จากการพิจารณาสมการออยเลอร์บนระบบแกนตั้งฉาก  $(X-Y-Z)$  โดยเราสามารถนำมาอินทิเกรตตามเส้นสายธารเพื่อสร้างสมการเบอร์นูลลี สำหรับในที่นี้จะแสดงกรณีการไหลแบบคงตัว เพื่อความสะดวกจึงจะใช้สัญลักษณ์ทางเวกเตอร์ซึ่งสมการออยเลอร์บนระบบแกนตั้งฉากสำหรับการไหลแบบคงตัวคือ

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

เนื่องจาก 
$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

ดังนั้น 
$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (2.6)$$

สำหรับการไหลแบบคงตัวสนามความเร็วจะอยู่ในรูป  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$  ซึ่งเส้นสายธารจะเป็นเส้นที่ลากสัมผัสกับความเร็วของการไหล และในกรณีการไหลแบบคงตัวเส้นสายธารและเส้นวิถีเป็นเส้นเดียวกัน ดังนั้นอนุภาคของไหลจึงเคลื่อนที่ไปตามสมการ (2.6) ด้วย ซึ่งในเวลาที่ไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น ไม่สามารถนำเอกสารนี้ไปเผยแพร่หรือใช้เพื่อวัตถุประสงค์อื่นได้ หากต้องการนำเอกสารนี้ไปใช้ กรุณาติดต่อขอสงวนลิขสิทธิ์จากผู้จัดทำเอกสาร

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผ่านไป  $dt$  อนุภาคของไหลจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะตามแนว  $d\vec{s}$  ตามแนวเส้นสายธาร หากคูณสมการ (2.6) ด้วยผลคูณแบบสเกลาร์กับระยะ  $d\vec{s}$  ตามแนวเส้นสายธารจะได้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} - g \nabla z \cdot d\vec{s} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (2.7)$$

เมื่อพิจารณาเทอมทั้งสามในสมการข้างต้นดังต่อไปนี้

$$\text{เทอมที่ 1 : } -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right]$$

$$= -\frac{1}{\rho} dp$$

ตามแนวเส้นสายธาร

$$\text{เทอมที่ 2 : } -g \nabla z \cdot d\vec{s} = -g \hat{k} \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= -g dz$$

ตามแนวเส้นสายธาร

$$\text{เทอมที่ 3 : } (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \left[ \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) \right] \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$$

เนื่องจากความเร็ว  $\vec{V}$  และระยะ  $d\vec{s}$  มีทิศทางขนานกันจึงทำให้  $[\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} - 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V^2}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V^2}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V^2}{\partial x} dx + \frac{\partial V^2}{\partial y} dy + \frac{\partial V^2}{\partial z} dz \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{1}{2} d(V^2)$$

ตามแนวเส้นสายธาร

แทนเทอมทั้งสามลงในสมการ (2.7) จะได้

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + \frac{1}{2} d(V^2) = 0 \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

อินทิเกรตสมการข้างต้นสำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่} \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

ผลที่ตามมาคือ สมการเบอร์นูลลีในกรณีการไหลแบบคงตัว อัดตัวไม่ได้ และไม่มีควมหนืด ซึ่งค่าคงที่ที่เกิดจากการอินทิเกรตจะมีค่าแตกต่างกันสำหรับแต่ละเส้นสายธาร จึงทำให้การประยุกต์ใช้สมการเบอร์นูลลีระหว่าง 2 จุดใดๆ ต้องเป็นจุดบนเส้นสายธารเดียวกัน แต่หากสมมติให้การไหลนั้นเป็นการไหลแบบไม่มีการหมุน (Irrotational Flow) สมการเบอร์นูลลีที่ได้จะสามารถใช้ระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลโดยไม่จำเป็นต้องอยู่บนสายธารเดียวกัน ทั้งนี้เนื่องจากค่าคงที่จากการอินทิเกรตสำหรับทุกเส้นสายธารมีค่าเท่ากัน

สำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุน หมายถึง  $\omega = 0$  หรือ  $\nabla \times \vec{V} = 0$  ซึ่งความหมายทางคณิตศาสตร์นี้จะนำไปใช้ในการสร้างสมการเบอร์นูลลีสำหรับการไหลที่ไม่มีการหมุน โดยที่จะเริ่มต้นจากการพิจารณาสมการออยเลอร์บนแกนตั้งฉาก  $X - Y - Z$  ดังนี้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

จากเอกลักษณ์ทางเวกเตอร์

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})]$$

แทนเอกลักษณ์ทางเวกเตอร์ลงในสมการออยเลอร์จะได้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})]$$

จากที่ผ่านมามีจำเป็นต้องคูณสมการออยเลอร์ในระบบแกนตั้งฉากแบบสเกลาร์ด้วยระยะ

$d\vec{s}$  ตามแนวเส้นสายธารเพื่อให้ค่า  $[\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยใช้เหตุผลที่ว่า เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความเร็ว  $\vec{V}$  และ  $d\vec{r}$  มีทิศทางขนานกัน แต่สำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุนจะเห็นว่า  $\nabla \times \vec{V}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเทอม  $\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$  จึงมีค่าเท่ากับศูนย์โดยไม่จำเป็นต้องคูณแบบสเกลาร์ด้วยระยะ  $d\vec{r}$  ตามเส้นสายธาร ดังนั้นสำหรับการไหลที่ไม่มีการหมุนสมการออยเลอร์ลดรูปเป็น

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V})$$

สมการออยเลอร์ที่ลดรูปนี้ ไม่มีความจำเป็นต้องคูณสมการทั้งหมดแบบสเกลาร์ด้วยระยะ  $d\vec{r}$  ตามแนวเส้นสายธารอีกต่อไป ดังนั้นกำหนดให้  $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  เป็นระยะระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนเส้นสายธารเดียวกัน และนำไปคูณแบบสเกลาร์กับสมการข้างต้นจะได้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} - g \nabla z \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \nabla (V^2) \cdot d\vec{r}$$

หรือ

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = \frac{1}{2} d(V^2)$$

เมื่ออินทิเกรตจะได้

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่}$$

สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ หรือ  $\rho$  มีค่าคงที่จะได้

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่}$$

สมการเบอร์นูลลีที่ได้ไม่ได้เกิดจากการคูณสมการออยเลอร์แบบสเกลาร์ด้วยระยะ  $d\vec{r}$  ตามเส้นสายธาร แต่เกิดจากการคูณด้วย  $d\vec{r}$  ซึ่งเป็นระยะระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลจึงทำให้สมการเบอร์นูลลีสำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุนนี้สามารถใช้กับจุด 2 จุดใดๆ ที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนเส้นสายธารเดียวกันหรือกล่าวได้ว่า ค่าคงที่จากการอินทิเกรตสำหรับแต่ละเส้นสายธารในการไหลแบบไม่มีการหมุนมีค่าเท่ากัน

2.1.3 สมการต่างๆ ของการเคลื่อนที่

การสมมุติขั้นพื้นฐานที่อธิบายแบบจำลอง จะใช้สมการออยเลอร์ (Euler's Equation) ร่วมกับสมการของกฎทรงมวล [4] จุดประสงค์ของการศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาคลื่นที่มีการแผ่ขยายใน 2 มิติ แนวระนาบ  $(x', z')$  ดังรูปที่ 2.6 และกำหนด  $P'(x', t', z')$  แทนความดันของไหล,  $\rho'$  แทนความหนาแน่นคงที่,  $g \equiv (0, -g)$  แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก,  $u' \equiv (u', w')$  แทนเวกเตอร์ที่เป็นความเร็ว ดังนั้นจะได้

$$\frac{Du'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'}$$

$$\frac{Dw'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial z'} - g$$

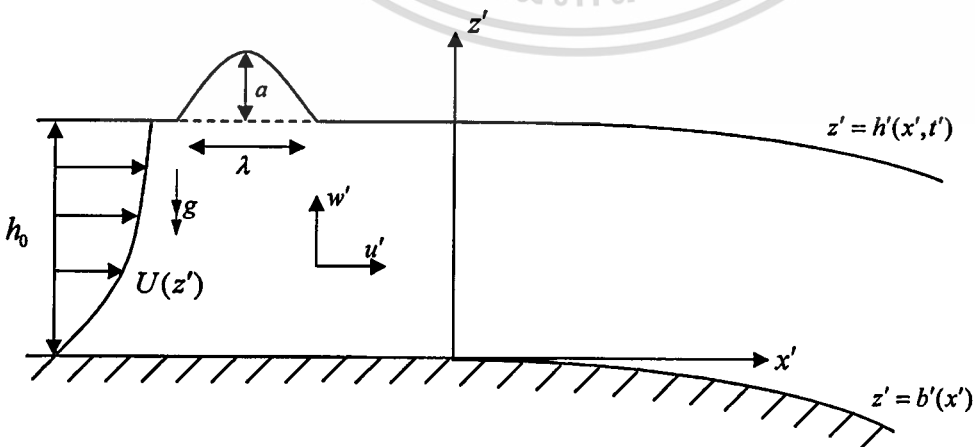
โดยที่

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + u' \frac{\partial}{\partial x'} + w' \frac{\partial}{\partial z'}$$

เป็นอนุพันธ์ที่มีความสำคัญ และสมการของกฎทรงมวล คือ

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

เมื่อนำสมการต่างๆ ที่กำหนดมารวมกับเงื่อนไขค่าขอบเขต เงื่อนไขค่าเริ่มต้น และสเกลที่เหมาะสม เหล่านี้จะเป็นหลักของการทำงาน



รูปที่ 2.6 แสดงสถานะที่ไม่ถูกรบกวน และคลื่นพื้นผิว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.4 เงื่อนไขค่าขอบเขต (The Boundary Conditions)

พิจารณาเงื่อนไขค่าขอบเขตบนพื้นผิว (พื้นผิวอิสระ) และที่ท้องน้ำ (Bottom) [4] อธิบายได้ดังนี้

#### 2.1.4.1 เงื่อนไขพื้นผิวอิสระ (The Free Surface Conditions)

โดยปกติแล้วพื้นผิวจะเรียกว่าพื้นผิวอิสระเพราะว่าพื้นผิวไม่ได้ถูกกำหนดโดยเงื่อนไขของความเร็ว (Velocity Conditions) พื้นผิวแทนด้วย  $z' = h'(x', t')$  [4] เมื่อพื้นผิวนี้เคลื่อนที่จะอธิบายโดยใช้เงื่อนไขจลนศาสตร์ (Kinematic Condition)

เมื่อพื้นผิวมีความดันเนื่องจากความดันเพียงอย่างเดียว (คือไม่มีความหนืด , ไม่มีแรงตึงผิว) ผลที่ตามมาคือเงื่อนไขพื้นผิวถูกเรียกว่าเงื่อนไขพลศาสตร์ (Dynamic Condition) รายละเอียดของเงื่อนไขค่าขอบเขตทั้งสอง อธิบายได้ดังนี้

##### 2.1.4.1.1 เงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์ (The Kinematic Condition)

พื้นผิวหนึ่ง  $F'(x', t')$  = ค่าคงที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งจะได้

$$\frac{DF'}{Dt'} = 0$$

ดังนั้นที่พื้นผิวอิสระสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ  $z' - h'(x', t') = 0$  ผลที่ตามมาคือ

$$\frac{D}{Dt'} \{z' - h'(x', t')\} = 0$$

และมีผลลัพธ์เป็น

$$w' - \frac{\partial h'}{\partial t'} - u' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$w' = h'_t + u' h'_x \quad \text{บน } z' = h'(x', t') \quad (2.8)$$

เงื่อนไขขอบเขตนี้เป็นเงื่อนไขอันดับแรกบนพื้นผิวอิสระที่อธิบายถึงความเร็วในแนวตั้งของของไหลที่พื้นผิวซึ่งเป็นผลรวมของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของพื้นผิว ( $h'_t$ ) และที่เป็นองค์ประกอบในแนวตั้งที่เหมาะสมของของไหลที่เคลื่อนที่ในแนว  $x'$  ที่ความชัน ( $u' h'_x$ ) ของพื้นผิวไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับบางส่วนที่มีการเคลื่อนที่ในพื้นผิว เวกเตอร์ความเร็วต้องเป็น

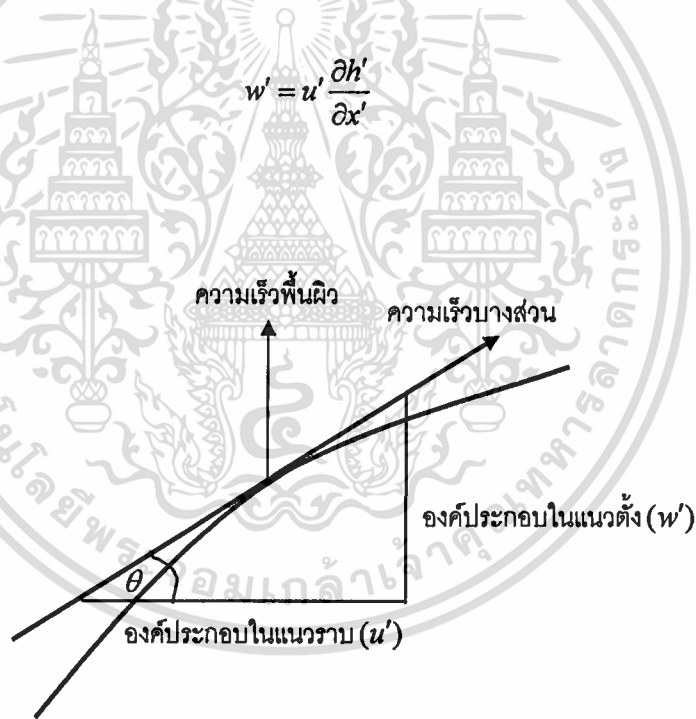
แทนเจนต์ ดังนั้นถ้าองค์ประกอบของความเร็วนี้ที่พื้นผิวเป็น  $u'$  (แนวราบ) และ  $w'$  (แนวตั้ง) จะได้

$$\frac{w'}{u'} = \tan \theta$$

โดยที่  $\theta$  เป็นมุมที่เวกเตอร์ความเร็วนั้นทำกับแนวราบ (ดูรูปที่ 2.7) แต่  $\tan \theta$  เป็นความชันของพื้นผิวด้วยเหมือนกัน ดังนั้น

$$\frac{w'}{u'} = \tan \theta = \frac{\partial h'}{\partial x'}$$

และดังนั้นการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของบางส่วนที่เหมาะสมเป็น



รูปที่ 2.7 แสดงเงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์

#### 2.1.4.1.2 เงื่อนไขพลศาสตร์ (The Dynamic Condition)

สำหรับปัญหาที่ศึกษาส่วนใหญ่ในทฤษฎีของคลื่นน้ำ (รวมทั้งที่กำลังศึกษา) จะกำหนดให้  $P' = P_0 =$  ค่าคงที่ ซึ่งเป็นความดันของบรรยากาศ เนื่องจากทำการอธิบายการไหลแบบไม่มีความหนืด และไม่คิดผลของแรงตึงผิวด้วย ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตพลศาสตร์ที่พื้นผิวกลายเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P' = P_a = \text{ค่าคงที่ บน } z' = h'(x', t') \quad (2.9)$$

#### 2.1.4.2 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (The Bottom Boundary Condition)

สำหรับของไหลแบบไม่มีความหนืดของของไหลเป็นการทำให้เกิดรูปแบบอย่างง่ายของเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ ค่าขอบเขตท้องน้ำซึ่งของไหลไม่สามารถซึมผ่านได้ [4] ดังนั้นกำหนดให้

$$\frac{D}{Dt}(z' - b'(x', t')) = 0$$

สำหรับรูปแบบท้องน้ำทั่วไปจะถูกกำหนดโดย  $z' = b'(x', t')$  ดังนั้นจะได้เงื่อนไข

$$w' = b'_t + u'b'_x \quad \text{บน } z' = b'(x', t') \quad (2.10)$$

แต่จะพิจารณาขอบเขตค่าท้องน้ำที่มีการกำหนดว่า  $z' = b'(x')$  (ดูรูปที่ 2.6) ซึ่งไม่รวมถึงภูเขาไฟระเบิดที่เกิดขึ้นได้นำแล้วสมการ (2.10) จะถูกลดรูปเป็น

$$w' = u' \frac{db'}{dx'} \quad \text{บน } z' = b'(x') \quad (2.11)$$

จากสมการออยเลอร์ร่วมกับสมการของกฏทรงมวล (ส่วนที่ 2.1.3) ภายใต้อิทธิพลของพื้นผิวอิสระ (ส่วนที่ 2.1.4.1) และเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (ส่วนที่ 2.1.4.2) คือสมการที่สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำที่แอมพลิจูดมีค่าน้อยๆ สำหรับการหาผลเฉลยโดยวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) จะกล่าวในบทต่อไป

#### 2.1.5 การไร้มิติ (Nondimensionalisation)

การไร้มิติของตัวแปรต่างๆ จะสร้างขึ้นมาจากสเกลของระยะทาง และสเกลของเวลา[4] โดยกำหนดให้สเกลของระยะทางเป็นดังนี้  $h_0$  แทนความลึก,  $\lambda$  แทนความยาวคลื่น และ  $b$  แทนพื้นผิวท้องน้ำ และตัวแปรอื่นๆ ที่นอกเหนือจากที่กล่าวถึงสามารถดูได้จากรูปที่ 2.6 สำหรับในส่วนของสเกลของเวลา จะเป็นตัวกำหนดสเกลของความเร็วที่เหมาะสม ซึ่งประมาณได้เป็น  $\sqrt{gh_0}$ ,  $g$  แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง โดยที่สเกลของความเร็ว และความยาวคลื่น ( $\lambda$ ) จะถูกใช้อธิบายเวลาที่มีความเกี่ยวข้องกับการแผ่ขยายของคลื่นในแนวราบได้เป็น  $\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$  และสามารถใช้  $\sqrt{gh_0}$  เป็นตัวอธิบายสเกลขององค์ประกอบของความเร็วในแนวราบได้ แต่สำหรับ

องค์ประกอบของความเร็วในแนวตั้งนั้นจะเป็น  $\frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda}$  และมีการกำหนดพื้นผิว  $z' = (x', t')$  ดังนั้นสามารถเขียนตัวแปรต่างๆ ที่ไร้มิติได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow \lambda x, & z' &\rightarrow h_0 z, & t' &\rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t, \\ u' &\rightarrow \sqrt{gh_0} u, & w' &\rightarrow \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} w, & b &\rightarrow h_0 b \end{aligned}$$

ร่วมกับ  $h = h_0 + a\eta$

โดยที่ “ $\rightarrow$ ” หมายความว่า “แทนที่ด้วย”  $a$  เป็นแอมพลิจูด, ฟังก์ชัน  $\eta$  เป็นแบบไร้มิติ และความดันคือ

$$P' = P_a + \rho g(h_0 - z') + \rho g h_0 p$$

โดยที่  $P_a$  เป็นความดันของบรรยากาศที่มีค่าคงที่,  $\rho g(h_0 - z')$  เป็นความดันเนื่องจากการแพร่กระจาย และ  $\rho g h_0$  เป็นสเกลของความดันที่ความลึก  $z' = h_0$  สำหรับตัวแปรของความดัน  $p$  จะถูกเปลี่ยนให้ไร้มิติ

สมการออยเลอร์ และสมการของกฎทรงมวลสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

โดยที่

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ซึ่งสมการเหล่านี้สามารถเขียนในเทอมของตัวแปรที่ไร้มิติ โดยกำหนดให้  $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$  เป็น

พารามิเตอร์ของความยาวของคลื่นยาว หรือ คลื่นน้ำตื้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.6 วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)

การกระจายเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Expansion) คือ การวิเคราะห์คุณสมบัติในเรื่งลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อฟังก์ชันเป็น  $y = (x, \varepsilon)$  มีพารามิเตอร์  $\varepsilon$  ซึ่งมีค่าน้อยๆ และคำตอบจะหาได้เมื่อ  $\varepsilon = 0$  ซึ่งคำตอบเป็นแบบแม่นตรง สำหรับการหาคำตอบเมื่อ  $\varepsilon$  ที่มีค่าน้อยๆ จะใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation Method) ถ้า  $\varepsilon$  คู่กับเทอมของสมการของฟังก์ชัน ซึ่งคำตอบที่ได้หาโดยอนุกรมกำลัง (Power Series) ที่มีรูปแบบเป็น

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.12)$$

ผลที่ได้คืออนุกรมที่ลู่ออกสำหรับค่า  $\varepsilon$  ใดๆ อย่างไรก็ตามผลที่ได้ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าฟังก์ชัน  $y = (x, \varepsilon)$  เมื่อ  $\varepsilon$  มีค่าน้อยๆ ได้ [5-8] ในงานวิจัยนี้ได้ใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ซึ่งลักษณะของการกระจายนี้จะเป็นเช่นเดียวกับการกระจายเชิงเส้นกำกับ โดยที่การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ที่มีรูปแบบเป็น [9]

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma^m Q_{nm}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$$

ต่อไปจะกล่าวถึงกระจายเชิงเส้นกำกับสำหรับการพิจารณาในแบบต่างๆ ดังนี้

#### 2.1.6.1 ความคิดพื้นฐานบางอย่าง

สำหรับเรื่องความคิดพื้นฐานบางอย่างในการใช้อนุกรมเชิงเส้นกำกับ จะขออธิบายเกี่ยวกับสัญลักษณ์ 2 สัญลักษณ์ทั่วไปที่ใช้กับฟังก์ชัน  $f(\varepsilon)$  ในลิมิตที่มี  $\varepsilon \rightarrow 0$  สัญลักษณ์เหล่านั้นเป็น “O” และ “o” และเป็นเทอมโอใหญ่ และเทอมโอเล็ก ตามลำดับ ถ้าฟังก์ชันที่แตกต่างกันของ  $\varepsilon$  เป็น  $f(\varepsilon)$  และ  $g(\varepsilon)$  จะได้ว่า

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} < \infty \quad (2.13)$$

ผลที่ตามมาคือ  $f(\varepsilon)$  เป็นอันดับของ  $g(\varepsilon)$  ถ้าลิมิตเท่ากับศูนย์แล้วสัญลักษณ์ o ที่ใช้จะเป็น

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad (2.14)$$

ฟังก์ชัน  $g(\varepsilon)$  ข้างบนเป็นเทอมของ “ฟังก์ชันเกาส์ (Gauge Function)” เซตของฟังก์ชันเกาส์เป็นเซตของกำลังของ  $\varepsilon$  ( $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots$ ) กำลังเหล่านี้สามารถใช้อธิบายคุณสมบัติของฟังก์ชันอื่นๆ บางฟังก์ชันของ  $\varepsilon$  ได้ ตัวอย่างเช่น

$$\sin \varepsilon \sim \varepsilon \quad (2.15)$$

อ่านว่าซายน์เอปซิลอน (Sine Epsilon) เป็นการประมาณให้เท่ากับ  $\varepsilon$  นอกจากนี้ก็สามารถบอกได้ว่า

$$\tan \varepsilon \sim \varepsilon \quad (2.16)$$

ดังนั้นจะเห็นว่าฟังก์ชันที่แตกต่างกันสามารถแสดงด้วยเชิงเส้นกำกับได้เหมือนกัน

### 2.1.6.2 อนุกรมกำลัง

จัดเป็นประเภทหนึ่งของอนุกรมเชิงเส้นกำกับ โดยทั่วไปอนุกรมเชิงเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชัน  $y(x, \varepsilon)$  มีรูปแบบเป็น

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N f_n(\varepsilon) y_n(x) \quad (2.17)$$

ถ้าผลที่ได้จากอนุกรมเป็นแบบลู่ออก ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน  $f_n(\varepsilon)$  จะเป็นไปตาม

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)} = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

แต่ละวิธีเป็นองค์ประกอบของเซตของฟังก์ชันที่เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ  $\varepsilon \rightarrow 0$  จะเรียกเซตของฟังก์ชัน  $\{f_n(\varepsilon)\}$  ว่าลำดับเชิงเส้นกำกับ ถ้าเงื่อนไขในสมการ (2.18) มีองค์ประกอบที่เหมาะสม ซึ่งเซตของกำลังของ  $\varepsilon$  เป็นลำดับเชิงเส้นกำกับ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน  $y_j(x)$  จะเป็นลักษณะเฉพาะจากคุณสมบัติขององค์ประกอบของลำดับเชิงเส้นกำกับ ชั้นแรกหารทั้งสองข้างของสมการ (2.17) ด้วย  $f_0(\varepsilon)$  และใส่ลิมิตที่  $\varepsilon \rightarrow 0$  ผลที่ตามมาเป็นสัมประสิทธิ์อันดับนำ (Leading Order Coefficient)  $y_0(x)$

$$y_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon)}{f_0(\varepsilon)} \quad (2.19)$$

ต่อไปนำ  $f_0(\varepsilon)y_0(x)$  มาลบทั้งสองข้างของสมการ (2.17) แล้วหารด้วย  $f_1(\varepsilon)$  และใส่ลิมิตที่  $\varepsilon \rightarrow 0$  ผลที่ได้เป็น

$$y_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon) - f_0(\varepsilon)y_0(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} \quad (2.20)$$

ขั้นตอนดังกล่าวใช้เป็นขั้นตอนโดยตรงที่แสดงถึงสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน  $y_j(x)$  ในอนุกรมเชิงเส้นกำกับสามารถเขียนเป็น

$$y_j(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{j-1} f_n(\varepsilon)y_n(\varepsilon)}{f_j(\varepsilon)}, \quad j=1,2,3,\dots \quad (2.21)$$

สัมประสิทธิ์ในอนุกรมเชิงเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ขึ้นอยู่กับทางเลือกของลำดับ ซึ่งแต่เดิมลำดับจะกำหนดมาให้ สัมประสิทธิ์ลักษณะเฉพาะมาจากโดยสมการ (2.20) และ (2.21) ในปัญหาที่กำหนดให้ปกติมักไม่ทราบว่า  $y(x, \varepsilon)$  ไม่เป็นอิสระบน  $\varepsilon$  ดังนั้นผลในสมการเหล่านี้ควรพิจารณาโดยใช้แก่นนิยมทั่วไปของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเท่านั้น

### 2.1.6.3 การหาปฏิยานุพันธ์

พิจารณาปฏิยานุพันธ์  $I(\varepsilon)$  ที่มีรูปแบบเป็น

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+\varepsilon t} dt \quad (2.22)$$

ใช้วิธีแยกส่วน (By Part) เพื่อหาปฏิยานุพันธ์ ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \left[ \frac{1}{1+\varepsilon t} \{e^{-t}\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \{e^{-t}\} \left\{ \frac{-\varepsilon}{(1+\varepsilon t)^2} \right\} dt \\ &= 1 - \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+\varepsilon t)^2} dt = 1 - \varepsilon \left[ \frac{1}{(1+\varepsilon t)^2} \{e^{-t}\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \{e^{-t}\} \left\{ -\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon t)^3} \right\} dt \\ &= 1 - (1!)\varepsilon + (2!)\varepsilon^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+\varepsilon t)^3} dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้วิธีแยกส่วนใหม่อีกครั้งได้เป็น

$$I(\varepsilon) = 1 - (1!) \varepsilon + (2!) \varepsilon^2 - \dots + (-1)^{n-1} ([n-1]!) \varepsilon^{n-1} + (-1)^n (n!) \varepsilon^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+\varepsilon t)^{n+1}} dt \quad (2.24)$$

ซึ่งรูปแบบที่ได้นี้จะสามารถเขียนเป็นอนุกรมอนันต์ได้คือ

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n!) \varepsilon^n \quad (2.25)$$

ซึ่งจะลู่ออกสำหรับทุกๆ ค่าของ  $\varepsilon$  แต่สำหรับ  $\varepsilon$  ที่มีค่าน้อยๆ อนุกรมในสมการ (2.25) จะทำการตัดทอนที่มีค่าน้อยๆ โดยใช้การประมาณที่เหมาะสมของการหาปฏิยานุพันธ์

#### 2.1.6.4 สมการเชิงอนุพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' + \varepsilon y = 0 \quad (2.26)$$

เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$y(0) = 1$$

(2.27)

และคำตอบเป็น

$$y = e^{-\varepsilon x}$$

(2.28)

ซึ่งเกิดการกระจายเชิงเส้นกำกับที่ทำให้  $y(x, \varepsilon)$  สามารถเขียนได้เป็น

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x) \quad (2.29)$$

แทนการกระจายนี้ในสมการ (2.26) ได้ผลเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k' + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} y_k = 0 \quad (2.30)$$

จัดรูปสมการใหม่ ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (y_k' + y_{k-1}) = 0 \quad (2.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดย  $y_{k-1} = 0$  และใส่  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  จะได้  $y'_0 = 0$  (2.32)

โดยทั่วไปแล้วผลที่ได้ของสมการ (2.32) นี้ เมื่อหารทั้งสองข้างโดย  $\varepsilon$  และใส่  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  อีกครั้ง จะได้

$$y'_1 = -y_0 \quad (2.33)$$

ทำวิธีการเหล่านี้ซ้ำ จะได้  $y'_k = -y_{k-1}$  ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (2.34)

สามารถเขียนสมการ (2.34) ให้เป็นแบบแผน โดยการกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของ  $\varepsilon^k$  เป็นศูนย์ในสมการ (2.31) สำหรับแต่ละค่าของ  $k$  โดยการใส่เพิ่มในเงื่อนไขเริ่มต้นของการกระจายเชิงเส้นกำกับในสมการ (2.29) ได้เป็น

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon^k y_k(0) = 1 \quad (2.35)$$

และผลที่ได้เป็น

$$y_k(0) = \delta_{k_0} \quad (2.36)$$

โดยที่  $\delta_{ij} = 1$  เมื่อ  $i = j$  และในกรณีอื่น ๆ จะมีค่าเป็น 0 จะเรียกว่าครอนเนกเกอ เดลตา (Kronecker Delta) คำตอบของ  $y'_0 = 0$  เป็น  $y_0 = 1$  เมื่อ  $y_0(0) = 1$  นำคำตอบที่ได้ไปใช้เพื่อหาคำตอบของสมการสำหรับ  $y_1$  ซึ่งเป็น  $y'_1 = -y_0 = -1$  เมื่อ  $y_1(0) = 0$  ทำจนกระทั่งได้ผลเป็น  $y_1 = -x$  โดยทำวิธีการนี้อย่างต่อเนื่องเพื่อหา  $y_2(x) = x^2/2!$ ,  $y_3 = -x^3/3!$  และทำต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้คำตอบสำหรับ  $y(x, \varepsilon)$  เป็น

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\varepsilon x)^k}{k!} \quad (2.37)$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) สำหรับฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล (Exponential Function)  $y = e^{-\varepsilon x}$  อนุกรมนี้เกิดขึ้นเมื่อผู้เข้าสำหรับทุกๆ ค่าของ  $\varepsilon$  และของ  $x$  ในตัวอย่างนี้พยายามจะหาการกระจายอนุกรมกำลังใน  $\varepsilon$  ทำให้เกิดอนุกรมที่ผู้เข้า อย่างไรก็ตามจะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้

เอกสารนี้กับปัญหาทุกปัญหาไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.6.5 ข้อสรุปและข้อคิดเห็น

ถ้าโดเมนของฟังก์ชันเป็นแบบไม่จำกัดเช่นเดียวกับที่ปรากฏในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นจินตนาการ (Idealized Mathematical Problem) ปัญหาเหล่านี้จะทำให้ได้ผลสำเร็จโดยใช้เทคนิคเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)

## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปีค.ศ. 1972 R.S. Johnson [10] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries Equation (with application to solitary wave development on a shelf).” งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยบางตัวที่เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ Korteweg-de Vries (KdV) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรซึ่งเป็นสมการลักษณะเฉพาะ ผลเฉลยที่หาได้มาจากการอธิบายการพัฒนาของคลื่นโซลิตอนที่มีการเคลื่อนไปบนชั้นของคลื่นเท่านั้น การสร้างโซลิตอนบนชั้นถูกทำนาย และสามารถยืนยันได้ ผลที่ได้นำกลับมาพิจารณาสอง และสามโซลิตอนใหม่ และพิจารณาความลึกของชั้น ต่อมาในปีค.ศ. 1973 R.S. Johnson [11] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “On an asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation with slowly varying coefficients” ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่มีรูปแบบของสมการเป็น

$$H_x + \frac{3}{2}d^{-\frac{7}{4}}HH_x + \frac{1}{6}kd^{\frac{1}{2}}H_{xxx} = 0$$

โดยที่  $d = d(\varepsilon, X)$  เป็นการพิจารณารูปร่างเริ่มต้นของคลื่นโซลิตอน ผลเฉลยเชิงเส้นกำกับที่หามาได้โดยตรงจากการสร้างของคลื่นโซลิตอน และแสดงถึงความแตกต่างกันของด้านหน้า และด้านหลังของคลื่นโซลิตอน โดยด้านหน้าเป็นการปรับปรุงให้ดีขึ้นโดยการเข้าคู่กันอย่างเหมาะสม ในรูปแบบของพหุนาม (Exponential Form) และพิจารณาความสัมพันธ์ของสมการกับกฎทรงมวล (Conservation Laws) ส่วนผลเฉลยด้านหลังของคลื่นโซลิตอนโดยทั่วไป ทำให้ได้ผลเฉลยในการแกว่งของทางเกี่ยวกับการเข้าคู่อีกครั้ง

ในปีค.ศ. 1999 Woopyo Hong and Young-Dae Jung [12] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “Auto-Bäcklund transformation and analytic solutions for general variable-coefficient KdV equation.” สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการ KdV ทั่วไป ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่มีรูปแบบเป็น

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งจะใช้การประยุกต์การกระจายแบบตัดของเพนแล (Painleve) และการประยุกต์การคำนวณแบบสัญลักษณ์ (Symbolic Computation) เพื่อจะหาการแปลงแบบออโตแบคคูลัน (Auto-Bäcklund) และผลเฉลยบางตัวของ  $f(t)$  และ  $g(t)$  ด้วย

ในปีพ.ศ. 2542 ศุภชัย ราชอาจ [13] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับโซลิตอนเชิงเดี่ยวโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า” ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงโดยอาศัยผลเฉลยทางตัวเลข ในงานวิจัยนี้สนใจในการประมาณค่าเฉลยของสมการคลื่นไม่เชิงเส้นที่เรียกว่า สมการโซลิตอน โดยใช้กระบวนการทางตัวเลขที่ไม่ยุ่งยากมาก เพื่อประมาณค่าของผลเฉลยของสมการคลื่นไม่เชิงเส้นที่เป็นที่รู้จักกันคือสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ เพื่อศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากกระบวนการผลต่างสี่เหลี่ยมข้างหน้า โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยตรง และกราฟของผลเฉลยได้จากกระบวนการของ Nikrad Toomarian และ Jacob Barhen

ในปีค.ศ. 2000 S.M. Killen and R.S. Johnson [9] ได้เขียนเรื่อง “Propagation of Axisymmetric Nonlinear Shallow Water Waves over Slowly Varying Depth” ที่เกี่ยวกับการอธิบายถึงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำบนพื้นผิว โดยกำหนดให้ของไหล (น้ำ) ไม่มีความหนืด และเป็นของไหลที่ไม่มีการไหล (หยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่) โดยคลื่นพื้นผิวขึ้นต้นเป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของคลื่นทรงกระบอกแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Cylindrical wave) ในขณะที่ความลึกสมมุติให้ค่อยๆ เปลี่ยนตามทิศทางของเรเดียลทั้งหมด (Radial Direction) และพิจารณาในรูปแบบ  $\text{sech}^2$  ที่เรเดียลเริ่มต้น (ภายหลังจากการเปลี่ยนสเกลรีให้ใหญ่พอสมควร) อธิบายการแผ่ขยายภายนอกเขตเรเดียล รูปแบบเริ่มต้นนี้ถูกเลือกเพราะสามารถเปลี่ยนแปลงเหนือความลึกที่คงที่ โดยเป็นที่เข้าใจทั้งเชิงวิเคราะห์ และเชิงตัวเลข แม้ว่าจะไม่มีผลเฉลยที่เป็นคลื่นโซลิตอนรีเบบแม่นยำตรงของสมการ KdV ที่เป็นทรงกระบอก (Cylindrical KdV Equation) เกิดขึ้นก็ตาม นอกจากนี้จะอธิบายการแผ่ขยายที่กำหนดการสะท้อนกลับ (Reflected) และ re-reflected ซึ่งปกติแล้วการสะท้อนกลับจะถูกกำหนดโดยกฎทรงมวล สำหรับผลที่ได้จากการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีรูปแบบเป็น  $Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^n \sigma^m Q_{nm}$ ,  $\Delta \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$  จะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของคลื่นขึ้นต้น (Primary Wave) ที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร  $2\sqrt{DS}H_{00x} + \frac{3}{D}H_{00}H_{00\xi} + \frac{D}{3}H_{00\xi\xi\xi} = 0$  โดยที่  $D(Y) = 1 - B(Y)$  เป็นความลึกเฉพาะที่ และเพื่อความสะดวกจะกำหนดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน  $B(Y)$  ในกรณีของภายนอกเขตที่มีชั้น และภายในเขต (สะท้อนกลับ) ที่มีชั้น โดยผลที่ได้เป็นรูปแบบสำหรับที่มีการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกเฉพาะที่

ในปีค.ศ. 2003 R.S. Johnson [14] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “The Camassa-Holm equation for water waves moving over a shear flow” โดยที่งานวิจัยชิ้นนี้จะอธิบายบทบาทของสมการคามาสสา-ฮอลม (Camassa – Holm, CH) ซึ่งรูปแบบสมการคือ

$$u_t + 2ku_x + 3uu_x - u_{xx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

โดยที่  $u = u(x, t)$  และ  $k$  เป็นพารามิเตอร์ สำหรับสมการนี้จะอยู่ในปัญหาคลื่นน้ำแบบดั้งเดิม (Classical Water – Wave Problem) ซึ่งรวมถึงการไหลพื้นฐานที่อยู่บริเวณใต้คลื่นน้ำเหนือการไหลร่วมกับกระแสน้ำวนที่ไม่เป็นศูนย์ สมการสำหรับคลื่นจากแรงโน้มถ่วงของโลก และจะกำหนดพารามิเตอร์ 2 ตัว ได้แก่  $\varepsilon$  แทนแอมพลิจูด,  $\delta$  แทนคลื่นยาว วิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการนี้จะอยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีรูปแบบเป็น  $q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \delta^{2m} q_{nm}$  สำหรับ  $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$  โดยจะพิจารณาเฉพาะเทอม  $O(1), O(\varepsilon), O(\delta^2)$  และ  $O(\varepsilon\delta^2)$  เท่านั้น ซึ่งได้รับการพัฒนาโดยเริ่มต้นจะกำหนดสำหรับการไหลแบบเฉือนพื้นฐาน และบางเทอมในการกระจายเชิงเส้นกำกับจะแสดงสำหรับกรณีทั่วไป อย่างไรก็ตามเป็นที่น่าสนใจว่าความซับซ้อนที่เกิดขึ้นจะชัดเจนขึ้นโดยไปสู่ขอบเขตการบรรยายที่สมบูรณ์สำหรับการไหลใดๆ ดังนั้นการคำนวณถูกทำให้สมบูรณ์สำหรับกรณีแบบเฉือนเชิงเส้น นั่นคือการไหลพื้นฐานมีกระแสน้ำวนเป็นค่าคงที่ สมการ CH ถูกแสดงว่าสามารถใช้ได้ (ที่อันดับนี้) สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้นเชิงเดียว (Simple Nonlinear Function) ขององค์ประกอบของสนามความเร็วในแนวราบที่การไหลถูกรบกวน และความลึกคงที่ ผลลัพธ์ที่จะได้จะเป็นทำนองเดียวกันกับที่หามาได้ก่อนหน้านี้ สำหรับกรณีที่ไม่มีแบบเฉือน ดังนั้นสมการ CH เป็นที่ถูกต้องสำหรับองค์ประกอบของความเร็ว นอกจากนี้การแสดงผลการไหลพื้นฐานยังมีความสำคัญ และทำให้ได้ผลใหม่ๆ ถึงแม้ว่าคลื่นที่ทุกครั้งเป็นการแผ่ขยายตามกระแสน้ำ (Downstream) จะมีความสัมพันธ์กับสมการ CH ที่ความลึกต่ำกว่าพื้นผิว (และเหนือก้นน้ำ) แต่จะไม่จริงสำหรับการแผ่ขยายทวนกระแสน้ำ (Upstream) ขณะที่ความแตกต่างระหว่างความเร็วที่ด้านบน และท้องน้ำของการไหลพื้นฐานเพิ่มขึ้น (นั่นคือกระแสน้ำวนที่คงที่เพิ่มขึ้น) ดังนั้นความลึกที่สมการ CH นี้อธิบายได้สำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นลงข้างล่างที่ค่าวิกฤต (Critical Value) ของความแตกต่างนี้ ซึ่งสมการ CH สามารถใช้ได้บนท้องน้ำ และหลังจากนั้นจะเคลื่อนที่ภายนอกสนามการไหลเชิงกายภาพ (Physical Flow) การเปลี่ยนแปลงของความลึกสำหรับแต่ละทิศทางของการแผ่ขยายที่เป็นลักษณะเดียวกันกับการค่อยๆ เปลี่ยนของแบบเฉือนเชิงเส้นซึ่งจะถูกนำเสนอในรูปแบบของผลลัพธ์ของสมการ CH

จากการค้นคว้าในส่วนนี้ทำให้ทราบว่าสมการ KdV มีผู้ให้ความสนใจอย่างมาก ทั้งในเชิงวิเคราะห์ และเชิงตัวเลข ในรูปแบบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ซึ่งผู้ศึกษาเหล่านั้นพยายามที่จะพัฒนาให้สมการสามารถมองเห็นได้ชัดเจนขึ้น และสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้มากขึ้นด้วย จากการค้นคว้าทำให้เกิดแนวทางในการที่จะนำไปสู่การศึกษา KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยมีสัมประสิทธิ์เฉพาะ ที่ได้จากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และสามารถพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่มีความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้รับจากการศึกษาครั้งนี้ด้วย



### บทที่ 3

## เพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแปลงสมการออยเลอร์ที่สอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล และเงื่อนไขค่าขอบเขตต่างๆ ให้เหมาะสม เพื่อที่จะนำไปใช้ในการหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปของสมการ  $KdV$  ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่ได้จากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ซึ่งทำโดยการใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

### 3.1 การไร้มิติ (Nondimensionalisation)

การไร้มิติเป็นการทำให้ตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณไม่มีหน่วย โดยใช้สเกลของระยะทาง และของเวลาที่มีความเหมาะสมเป็นตัวกำหนด เช่นเดียวกับที่ได้กล่าวในส่วนที่ 2.1.5 โดยอันดับแรกขอกกล่าวถึงสเกลของระยะทาง ได้แก่  $h_0$  แทนความลึกที่ไม่ถูกรบกวน (เป็นค่าคงที่) ที่  $x' < 0$ ,  $a$  แทนแอมพลิจูดของคลื่น และ  $\lambda$  แทนความยาวคลื่นพื้นผิว สำหรับสเกลของเวลาจะนำมาใช้เพื่อหาตัวที่เหมาะสมที่จะใช้เป็นสเกลของความเร็ว ที่ได้จากการประมาณการแผ่ขยายของคลื่นยาวเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกบนพื้นผิวที่ความลึก  $h_0$  เป็น  $\sqrt{gh_0}$  โดย  $g$  แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่มีค่าคงที่ ตัวแปรต่างๆ (จากรูปที่ 2.6) ที่ถูกกำหนดให้ไร้มิติเป็น ดังนี้

$$x' = \lambda x, \quad z' = h_0 z, \quad t' = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t,$$

$$u' = \sqrt{gh_0} u, \quad w' = \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} w, \quad b' = h_0 b$$

ร่วมกับพื้นผิวอิสระ

$$h'(x', t') = h_0 h(x, t)$$

สำหรับความดันจะใช้  $\rho gh_0$  ทำให้เป็นสเกลที่ไร้มิติ ดังนั้นความดันสามารถเขียนได้เป็น

$$P' = P_a - \rho g z' + \rho g h_0 p$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $p$  แทนความดันที่เปลี่ยนให้ไร้มิติ

รูปแบบของสมการออยเลอร์ (Euler's Equation) ร่วมกับสมการของกฎทรงมวล สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.1)$$

โดยที่

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

เหล่านี้เป็นสมการที่เขียนในเทอมของตัวแปรที่ไร้มิติ โดยที่  $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$  เป็นความยาวคลื่นของคลื่นยาว หรือ คลื่นน้ำตื้น

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบเขตบนพื้นผิว  $z' = h'(x', t')$  แล้วใช้  $h' = h_0 h(x, t)$  และ  $z' = h_0 z$  ที่ไร้มิติ จะได้

$$z = h$$

และในทำนองเดียวกันเงื่อนไขค่าขอบเขตล่างเป็น

$$z = b$$

จะเห็นว่าบนพื้นผิว  $z = h$  เป็นรูปแบบของพื้นผิวที่ไร้มิติ แล้วเงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์ (Kinematic Condition) (ในตอนที่ 2.1.4.1.1) และเงื่อนไขพลศาสตร์ (Dynamic Condition) (ในตอนที่ 2.1.4.1.2) สามารถเขียนในรูปตัวแปรที่ไร้มิติได้ดังนี้

$$w = h_t + u h_x \quad \text{และ} \quad p = h \quad \text{ตามลำดับ} \quad (3.3)$$

สำหรับเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (Bottom Boundary Condition) (ในตอนที่ 2.1.4.2) ที่

ไร้มิติเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$w = u \frac{db}{dx} \quad \text{บน} \quad z = b(x) \quad (3.4)$$

เมื่อนำสมการ และเงื่อนไขต่างๆ เหล่านั้นมารวมกัน จะทำให้ได้สมการ และเงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับสภาวะพื้นฐาน (Background State) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$u_t + uu_x + wu_z + p_x = 0; \quad (3.5)$$

$$\delta^2(w_t + uw_x + ww_z) + p_z = 0; \quad (3.6)$$

$$u_x + w_z = 0 \quad (3.7)$$

ร่วมกับ

$$\left. \begin{aligned} p &= h; \\ w &= h_t + uh_x \end{aligned} \right\} \text{บน } z = h, \quad (3.8)$$

และ

$$w = u \frac{db}{dx} \quad \text{บน} \quad z = b(x) \quad (3.9)$$

เนื่องจากสมการต่างๆ เหล่านี้ถูกเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปรที่ไร้มิติ ดังนั้นเมื่อนำสมการต่างๆ ไปใช้ จะสามารถใช้ได้โดยง่าย

### 3.2 การเปลี่ยนสเกลสำหรับตัวแปรต่างๆ (Scaling Of The Variables)

เมื่อพิจารณาพื้นผิวของคลื่นที่มีการเคลื่อนที่ไปทางขวาจากที่  $x < 0$  โดยที่ความลึกของพื้นผิวที่ไร้มิติของของพื้นผิวแทนด้วย  $h$  (ในส่วนของ 2.1.5) สามารถเขียนได้เป็น

$$h = 1 + \varepsilon \eta(x, t), \quad x < 0 \quad (4.10)$$

ดังนั้นพื้นผิวที่ไม่ถูกรบกวน ( $h=1$ ) จะถูกรบกวนโดยกำหนดให้เป็นคลื่น  $\varepsilon \eta(x, t)$  และกำหนดให้  $\varepsilon$  เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ ที่อธิบายถึงแอมพลิจูดที่ไร้มิติของคลื่น ตัวอย่างเช่น  $\varepsilon = (\text{ค่าเฉลี่ยของแอมพลิจูด}/h_0)$

ในการศึกษาจะพิจารณากรณีที่ เป็นรูปแบบ KdV ที่มีความสมดุลระหว่างแบบไม่เชิงเส้น และผลจากการแพร่กระจาย (ที่อันดับนำ (Leading Order)) โดยอันดับนำที่ได้จากเทอมแพร่กระจาย และจากแบบไม่เชิงเส้นจะมีอันดับที่เท่ากัน ซึ่งอันดับดังกล่าวจะนำมาใช้ในการอธิบายคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) ในระบบนี้

ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่าสำหรับ  $\delta$  ใดๆ ที่  $\varepsilon \rightarrow 0$  มีค่าขอบเขตเป็น  $(x, t)$  ซึ่งค่าขอบเขตนี้จะเปลี่ยนรูปโดยใช้ตัวแปรอิสระ [15-16] ได้เป็น

$$\chi = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} x, \quad \tau = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} t \quad (3.11)$$

สำหรับ  $\varepsilon$  และ  $\delta$  ใดๆ การเปลี่ยนรูปนี้จะต้องมีความสอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล จึงสามารถเปลี่ยนรูปได้เป็น

$$w \rightarrow \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} w$$

โดยกำหนดให้ “ $\rightarrow$ ” หมายความว่า “แทนที่ด้วย” เมื่อเกิดการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นที่ของน้ำต้อง สมมุติสเกลที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนความลึกที่เกิดขึ้น ได้แก่พารามิเตอร์  $\alpha$  ที่เป็นสเกลของการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นที่ของน้ำ ดังนี้

$$b(x) = B(Y), \quad Y = \alpha x \quad (3.12)$$

โดยปกติแล้วจะกำหนด  $B(Y) = 0$  ที่  $x < 0$  เพราะว่าคลื่นแผ่ขยายจากขอบเขตของความลึกคงที่ ดังนั้นสมการ (3.5)-(3.9) กลายเป็น

$$u_\tau + uu_\chi + wu_z + p_\chi = 0; \quad (3.13)$$

$$\varepsilon(w_\tau + uw_\chi + ww_z) + p_z = 0; \quad (3.14)$$

$$u_\chi + w_z = 0 \quad (3.15)$$

ร่วมกับ

$$\left. \begin{aligned} p &= h; \\ w &= h_r + uh_x \end{aligned} \right\} \text{บน } z = h \quad (3.16)$$

และ

$$w = \alpha u B' \quad \text{บน} \quad z = B(Y) \quad (3.17)$$

สุดท้ายผลของการเปลี่ยนรูปจะแทนที่  $\delta^2$  ด้วย  $\varepsilon$  ในสมการ (3.6) และการแสดงที่ว่า  $h = 1 + \varepsilon \eta$  จะใช้เฉพาะที่  $x < 0$  เท่านั้น แต่รูปแบบของ  $h$  ที่  $x > 0$  จะถูกอธิบายต่อไป

### 3.3 ภาวะพื้นฐาน (The Background State)

เมื่อไม่เกิดคลื่นพื้นผิว จะทำการพิจารณาการไหลแบบคงที่ และการแพร่กระจายใดๆ ของกระแสน้ำวนที่  $x < 0$  นอกจากนั้นยังคงพิจารณาการไหลแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งมีการค่อยๆ เปลี่ยนแปลงบนสเกล  $\alpha x (= Y)$  ที่  $x > 0$  เช่นเดียวกับการค่อยๆ เปลี่ยนท้องถิ่น  $z = B(Y)$  โดยจะสามารถอธิบาย Background State [4] ได้เป็น

$$\begin{aligned} u &= U(z, Y; \varepsilon); & w &= \alpha W(z, Y; \varepsilon); \\ p &= P(z, Y; \varepsilon); & h &= 1 + H(Y; \varepsilon) \end{aligned}$$

(โดยที่ '1' เป็นนิยามสำหรับ  $h$  เท่านั้น เพื่อความเหมาะสม) ดังนั้น

$$UU_Y + WW_Z = -P_Y; \quad (3.18)$$

$$P_Z = -\varepsilon \alpha^2 (UW_Y + WW_Z); \quad (3.19)$$

$$U_Y + W_Z = 0, \quad (3.20)$$

ร่วมกับ

$$\left. \begin{aligned} P &= 1 + H; \\ W &= UH' \end{aligned} \right\} \text{บน } z = 1 + H, \quad (3.21)$$

และ

$$W = UB' \quad \text{บน } z = B \quad (3.22)$$

สามารถอธิบาย  $P$  ได้โดยตรงจาก

$$P = 1 + H + O(\varepsilon\alpha^2) \quad (B \leq z \leq 1 + H) \quad (3.23)$$

และดังนั้นจะได้

$$UU_Y + WU_Z = -H'(Y) + O(\varepsilon\alpha^2); \quad U_Y + W_Z = 0$$

สิ่งที่กล่าวมาข้างต้นเหมาะสมที่จะนำไปสู่ฟังก์ชันสายธาร (Stream Function) ซึ่งกำหนดเป็น  $\Psi(z, Y; \varepsilon)$  [4] (เป็นไปตามสมการกฏทรงมวล (3.20)) ร่วมกับ

$$U = \Psi_z, \quad W = -\Psi_Y \quad (3.24)$$

เพราะฉะนั้นสมการ (3.18) กลายเป็น

$$\Psi_z \Psi_{zY} - \Psi_Y \Psi_{zz} = -H'(Y) + O(\varepsilon\alpha^2) \quad (3.25)$$

จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ  $z$  แล้วสมการ (3.25) กลายเป็น

$$\Psi_z \Psi_{yz} - \Psi_Y \Psi_{zzz} = O(\varepsilon\alpha^2)$$

ดังนั้นจะได้กลุ่มคำตอบคือ

$$\Psi_{zz} = \frac{1}{2} F'(\Psi) + O(\varepsilon\alpha^2) \quad \text{หรือ} \quad \Psi_z^2 = F(\Psi) + A(Y) + O(\varepsilon\alpha^2) \quad (3.26)$$

โดยที่  $F$  และ  $A$  เป็นฟังก์ชันใดๆ กระแสน้ำวนในการไหล (การไหลในท่อปลายปิดในทิศทางของ  $y$ ) เป็น

$$\Psi_{zz} + O(\varepsilon\alpha^2)$$

Background State เป็นการแสดงโดยทางเลือกที่เหมาะสมของ  $\Psi$  ที่เป็นไปตามสมการ (3.25) และเงื่อนไขค่าขอบเขต 2 เงื่อนไขจะถูกกำหนดในสมการ (3.21) และ (3.22) (ภายหลังจากไม่กำหนดเทอมที่มีขนาดเล็ก  $O(\varepsilon\alpha^2)$  การวัดค่าคลาดเคลื่อนก็จะหายไปในการอธิบายถึง Background State)

สำหรับตัวอย่างง่ายๆ ของ Background Flow ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$\Psi = \phi(Y)z + \beta(Y) \quad (3.27)$$

ดังนั้น  $F(\Psi) \equiv 0$  และ  $\Psi_{zz} = 0$  นั่นคือกระแสน้ำวนเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นจะเป็นไปตามสมการ (3.26) สำหรับการใส่  $\beta$  ในสมการ (3.27) เพื่อปฏิบัติตามกฎขององค์ประกอบ  $Y$  ของฟังก์ชันสายนอร์มัลอันดับที่เป็นไปตามสมการ (3.25) กำหนดดังนี้

$$\phi^2 + 2H = U_0^2 \quad (3.28)$$

โดยที่  $\phi = U_0$  ที่  $Y < 0$  ( $H = 0$ ) เงื่อนไขค่าขอบเขต (3.21) และ (3.22) กลายเป็น

$$\phi(1+H) + \beta = U_0 + \beta_0 \quad (3.29)$$

$$\phi B + \beta = \beta_0 \quad (4.30)$$

โดยที่  $\beta = \beta_0 =$  ค่าคงที่ ที่  $Y < 0$  ( $B = 0$ ) เมื่อนำเงื่อนไข (3.29) ลบกับ (3.30) ผลที่ได้เป็น

$$\phi D = U_0 \quad (3.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $D(Y) = 1 + H - B$  เป็นความลึกเฉพาะที่ ดังนั้น  $D(Y)$  จะถูกกำหนดโดยใช้สมการ (3.28) และ (3.31) เพื่อไปสู่การกำหนด  $H(Y)$  และ  $U = \Psi_z = \phi(Y)$  (เป็นอันดับของการประมาณ)

### 3.4 กรณีพิเศษ (Special Case)

จุดมุ่งหมายของการศึกษาคือสามารถวิเคราะห์รายละเอียดต่างๆ สำหรับการไหลที่มีการค่อยๆ เปลี่ยน  $U$  (ค่อยๆ เปลี่ยนความลึก) ดังนั้นการศึกษาดังนี้ขึ้นแรกจะสนใจการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ไป แต่สุดท้ายแล้วจะเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ และอธิบายรายละเอียดขององค์ประกอบในการไหล

จากที่เลือกสมการ (3.27) และมี Background Flow จะได้

$$U = \Psi_z = \phi(Y) \quad (3.32)$$

และจากสมการ (3.28) คือ

$$H = \frac{1}{2}(U_0^2 - \phi^2) = \frac{1}{2}(U_0^2 - U^2) \quad (3.33)$$

ดังนั้นสมการ (3.31) ที่สอดคล้องกับสมการ (3.32) ผลที่ได้เป็น

$$U_0 = UD \quad (3.34)$$

โดยที่

$$D = 1 + H - B$$

ในกรณีที่  $Y < 0$  โดย  $B = 0$  และ  $U = U_0 =$  ค่าคงที่ จะได้  $D = 1$  ในกรณีที่  $Y > 0$ ,  $U(Y)$  จะค่อยๆ เปลี่ยนเช่นเดียวกับ  $D(Y)$  ที่ค่อยๆ เปลี่ยน

### 3.5 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (The Bottom Boundary)

จุดมุ่งหมายในการศึกษาจะอธิบายการแผ่ขยายของพื้นผิวของคลื่นที่ความลึกระดับต่างๆ ดังนั้นเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับความลึกระดับต่างๆ ในปัญหาจึงมีความสำคัญ นอกจากนี้ยังจะแบ่งท้องน้ำ ตามลักษณะทางภูมิศาสตร์ซึ่งขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างสเกลบนท้องน้ำที่ค่อยๆ

เปลี่ยน และสเกลบนคลื่นพื้นผิวที่ค่อยๆ เปลี่ยน โดยมีการกำหนดพารามิเตอร์ที่อธิบายการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นผิวท้องน้ำบนสเกล  $\alpha$  เป็น

$$b(x) = B(Y) \quad , \quad Y = \alpha x = \alpha \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} x \quad (3.35)$$

โดยที่  $\alpha^{-1}$  เป็นสเกลที่เปลี่ยนความลึก นอกจากนั้นยังมี 3 กรณีที่น่าสนใจ ซึ่งแต่ละกรณีจะถูกควบคุมโดยขนาดของ  $\alpha$  ที่สัมพันธ์กับ  $\varepsilon$  และมีการกำหนดพารามิเตอร์  $\sigma$  ซึ่งจะถูกใช้ในการคำนวณต่อไปที่เกี่ยวข้องกับการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก จะอธิบายกรณีทั้ง 3 ที่มีความเกี่ยวข้องกันกับสเกล  $x$  ที่กำหนดในสมการ (3.11) และ (3.35) ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกันกับ  $\varepsilon$  และ  $\sigma$  ผลที่ตามมาเป็น

กรณีที่ 1 เกิดการเปลี่ยนความลึกบนสเกลที่ยาวกว่าสเกลที่เกี่ยวข้องกับการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้นเป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2} \alpha}{\delta} = \varepsilon \sigma \quad , \quad \varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$$

ปัญหานี้เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป และเป็นที่น่าสนใจอย่างมากจึงทำให้เกิดผลงานมากมาย โดยจะศึกษาตามกระบวนการที่คล้ายกันกับที่ใช้ในจอร์นสัน [15] และนี่เคอะบอเคิส และ นีเวว [16] สำหรับการศึกษารังนี้ จะทำการศึกษารังนี้ เพื่อที่จะทำให้เกิดผลลัพธ์แบบใหม่

กรณีที่ 2 สเกลของความลึกเป็นเช่นเดียวกับของการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้นเป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} = \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

ในกรณีนี้ จะได้สมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร [4] คือ

$$2\sqrt{D}\eta_{0x} + \frac{1}{2}\frac{D}{\sqrt{D}}\eta_0 + \frac{3}{D}\eta_0\eta_{0\xi} + \frac{1}{3}D\eta_{0\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.36)$$

โดยที่  $D = D(Y)$ ,  $Y = \varepsilon x$  สำหรับ  $D = 1$  สมการ (3.36) ลดรูปเป็นสมการ KdV แบบดั้งเดิม (The Classical KdV Equation) คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2\eta_{0x} + 3\eta_0\eta_{0\xi} + \frac{1}{3}\eta_{0\xi\xi\xi} = 0$$

นี่เป็นกรณีหนึ่งที่ไม่ทำให้เกิดความเจริญก้าวหน้าในการวิเคราะห์ (ที่น้อยที่สุดสำหรับความลึกใดๆ  $D(Y)$ ) และสมการ (3.36) นี้ไม่เป็นส่วนหนึ่งของสมการลักษณะเฉพาะที่หาปฏิยานุพันธ์ได้อย่างสมบูรณ์ เพราะฉะนั้นรูปแบบของสมการ KdV ประเภทนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ ดังนั้นจะไม่พิจารณารายละเอียดใดๆ สำหรับกรณีนี้

กรณีที่ 3 การเปลี่ยนความลึกเปลี่ยนแบบช้าๆ แต่ยังเร็วกว่าการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้น และเกี่ยวกับ  $\varepsilon = \Delta\sigma$  เป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2}\alpha}{\delta} = \sigma, \quad \sigma \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$$

ในกรณีนี้  $\Delta^{-1}\sigma^{-1}$  ใหญ่กว่า  $\sigma^{-1}$  และมีความสอดคล้องกับสมมติฐานอย่างเดียวกับที่ใช้สำหรับสมการ KdV ในจอร์นตัน [11] ซึ่งเป็นการแสดงที่ทำให้ได้ผลลัพธ์บางตัว ที่เหมือนกับกรณีที่อธิบายในจอร์นตัน [15] สำหรับโครงสร้างต่างๆ ไปที่มีความสำคัญจะเป็นเช่นเดียวกับกรณีที่ 1 ที่มีการเปลี่ยนความลึกอย่างช้าๆ แต่มีรายละเอียดบางอย่างที่แตกต่างกัน ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จะไม่พิจารณากรณีนี้

### 3.6 กฎทรงมวล (Mass Conservation)

กฎทรงมวลถือเป็นหลักที่สำคัญในการศึกษาปัญหาคลื่นน้ำ รูปแบบของคลื่นเริ่มต้น (คือคลื่นโซลิตอนรี, โซลิตอน และอื่นๆ อีก) ซึ่งเกิดจากทางซ้าย (โดยความลึกคงที่) พร้อมกับปริมาณของน้ำ ดังนั้นจะพามวลมาด้วย จากนั้นรูปแบบของคลื่นเริ่มต้นนี้มีเคลื่อนที่ (ไปทางขวา) โดยที่ความลึกจะค่อยๆ เปลี่ยน ปริมาณทั้งหมดของน้ำในระบบต้องยังคงเท่าเดิม และอธิบายได้เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ในการอธิบายระบบนี้สามารถทำได้ โดยเมื่อพิจารณาสมการของกฎทรงมวล (3.15) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

หาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ  $z$  ผลที่ได้คือ

$$\int u_x dz + w|_b^{1+\varepsilon\eta} = 0 \quad (3.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับบริการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเมื่อก้าวถึงวิธีการของการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายของการหาปริพันธ์จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{1+\varepsilon\eta} u dz = \int_b^{1+\varepsilon\eta} u_x dz + u_s \frac{\partial}{\partial x} (1 + \varepsilon\eta) - u_b \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.38)$$

แทนสมการ (3.38) รวมทั้งเงื่อนไขค่าขอบเขต  $w$  ในสมการ (3.8) และ (3.9)

$$w = \eta_t + \varepsilon u_s \eta_x \quad \text{บน} \quad z = 1 + \varepsilon\eta$$

และ

$$w = u_b \frac{\partial b}{\partial x} \quad \text{บน} \quad z = b$$

ในสมการ (3.37) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{1+\varepsilon\eta} u dz - \varepsilon u_s \eta_x + u_b \frac{\partial b}{\partial x} + (\eta_t + \varepsilon u_s \eta_x) - u_b \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

สุดท้ายแล้วสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

โดย  $\bar{u} = \int_b^{1+\varepsilon\eta} u(x, z, t) dz$  เป็นค่าเฉลี่ยที่เป็นองค์ประกอบของความเร็ว

ถ้ามีเงื่อนไขที่ไม่ถูกรบกวนเกิดขึ้นในด้านหน้า และด้านหลังแล้วจะได้

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, t) dx = 0$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, t) dx = \text{ค่าคงที่} \quad (3.39)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีความหมายว่าสำหรับทุกๆ เวลา และทุกๆ คลื่นพื้นผิว (Surface Waves) ที่แทนด้วย  $\eta(x,t)$  มวลของของไหลที่ยังคงอยู่จะมีความสอดคล้องกับคลื่น โดยที่คลื่นจะพามวลมาด้วย ซึ่งมวลนั้นก็คือค่าคงที่ในสมการ (3.39)

### 3.7 ตัวแปรต่างๆ

สำหรับกรณีของการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกอย่างช้าๆ จะต้องมีกำหนดพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ 2 ตัว [15] ได้แก่  $\varepsilon$  ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เป็นสเกลการวัดขนาดแอมพลิจูดของคลื่น และมีความสัมพันธ์กับสเกลของการแผ่แบบไม่เชิงเส้นของคลื่นพื้นผิว,  $\sigma$  เป็นพารามิเตอร์ที่มีความจำเป็นซึ่งอธิบายเกี่ยวกับสเกลของการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก

Blackground Flow ในการศึกษาครั้งนี้จะเลือกการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) ดังนั้น Blackground Flow มีเงื่อนไขเป็น

$$\Psi = \phi(Y)z + \beta(Y)$$

ร่วมกับ

$$U = \Psi_z = \phi(Y)$$

และกำหนดให้

$$U = \frac{U_0}{D} \tag{3.40}$$

และ

$$D(Y) = 1 + H - B$$

โดยที่รายละเอียดของกรณีพิเศษ (Special Case) จะได้มาจากการใช้การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow)

ปัญหาที่จะศึกษาเป็นแบบไม่เชิงเส้น และมีการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกขณะที่น้ำกำลังไหล ดังนั้นสเกลที่ใช้เพื่ออธิบายปัญหานี้ต้องมี 2 ตัว และมีความแตกต่าง โดยที่สเกลที่อธิบายการแผ่แบบไม่เชิงเส้นของคลื่นคือ  $X$  [9] สามารถเขียนได้เป็น

$$X = \frac{1}{\sigma} \int_0^r S(y) dy \tag{3.41}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเป็นสเกลของการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของคลื่นเริ่มต้น (Primary Wave) และสเกลที่อธิบายการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกคือ  $Y$  ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับสมการที่ (3.35) แต่ในที่นี้ต้องการที่จะแสดงความหมายของ  $\alpha$  ในเทอมของ  $\varepsilon$  ซึ่งกำหนดให้เพื่ออธิบายลักษณะเฉพาะของพื้นที่หนึ่งได้น้ำสุดท้ายที่มีความสัมพันธ์กับคลื่น ดังนั้นจะได้  $\alpha = \sigma\varepsilon$  แล้วสามารถอธิบายถึงการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกได้เป็น

$$Y = \varepsilon\sigma\chi \quad (3.42)$$

ต่อไปต้องการหาตัวแปรที่เหมาะสมสำหรับการแผ่ขยายขององค์ประกอบต่างๆ ดังนั้นจะให้รูปแบบของคลื่นเริ่มต้น ก็คือคลื่นเริ่มต้น (Primary Wave) ( $\eta = O(1)$ ) ที่มีการเคลื่อนที่ไปทางขวา (โดยมีการแผ่ขยายจากทางซ้ายไปทางขวา) ลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางขวา [9] (สำหรับองค์ประกอบต่างๆ) เป็น

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon\sigma} \int_0^y R_+(y) dy - \tau \quad \text{โดยที่} \quad Y = \varepsilon\sigma\chi \quad (3.43)$$

ฟังก์ชัน  $R(Y)$  และ  $S(Y)$  เป็นการแสดงในเทอมของ  $D(Y)$  สำหรับกรณีของคลื่นที่เคลื่อนที่เหนือความลึกคงที่ สามารถเขียน  $D =$  ค่าคงที่ (ประมาณ = 1)

ถ้ากำหนด  $R(Y) =$  ค่าคงที่ (ประมาณ = 1) และ  $S(Y) = 1$  แล้วนำไปแทนค่าในสมการ (3.41) และ (3.43) ดังนั้นจะได้

$$X = \varepsilon\chi, \quad \xi = \chi - \tau$$

ลักษณะเฉพาะดั้งเดิมสำหรับความลึกคงที่ ที่มีความสัมพันธ์กับการค่อยๆ เปลี่ยนของแต่ละสเกลตามลำดับ

และสามารถคาดหวังได้ว่าการแผ่ขยายจะทำให้เกิดองค์ประกอบของการสะท้อน ซึ่งเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม ในปัญหาเหล่านี้จะเคลื่อนที่ไปทางซ้าย และเคลื่อนที่อย่างช้าๆ ซึ่งเกี่ยวกับลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางซ้าย ดังนั้นในขณะนี้สเกลของการเปลี่ยนแปลงความลึกที่ใช้ [9] เป็น

$$\zeta = \int_0^y R_-(y) dy + T \quad (3.44)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$T = \varepsilon\sigma\tau$$

ลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางซ้ายจะมีรูปแบบที่เหมือนกับลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางขวา นอกจากนี้จะเกิดขึ้นบนสเกลที่เปลี่ยนอย่างช้าๆ และตัวแปรที่เป็นความลึกจะมีขนาดเป็น  $\frac{dD}{dx}$  นั่นคือ  $\varepsilon\sigma \times$  สเกลของลักษณะเฉพาะทางขวา

ผลเฉลยสำหรับคลื่นพื้นผิวจะอยู่ในเทอมของตัวแปร  $(\xi, \zeta, X, Y)$  และพารามิเตอร์  $(\varepsilon, \sigma)$

### 3.8 สมการต่างๆ

เมื่อ Background State ที่อธิบายในตอนที่ 3.3 ถูกปรับ โดยพื้นผิวที่มีการรบกวนของ  $O(\varepsilon)$  สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} u &\rightarrow U(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon u; & w &\rightarrow \alpha W(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon w; \\ p &\rightarrow P(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon p; & h &= 1 + H(Y; \varepsilon) + \varepsilon \eta \end{aligned}$$

เทอมที่รบกวน (ทางด้านขวา) เป็นฟังก์ชันของตัวแปร  $u, w, p$  และ  $\eta$  ในตอนที่ 3.7 ซึ่งทำให้สมการ (3.13)-(3.17) เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจะเขียนอนุพันธ์เทียบกับ  $\chi$  และ  $\tau$  ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \equiv R \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon\sigma R \frac{\partial}{\partial \zeta} + \varepsilon S \frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon\sigma \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv \varepsilon\sigma \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi}$$

ผลที่ได้จะขึ้นอยู่กับความลึกเฉพาะที่ของน้ำ และเพื่อความสะดวกจะกำหนดฟังก์ชันที่ใช้อธิบายเพื่อให้ชัดเจน ซึ่งแสดงได้เป็น

$$D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y) \quad (> 0)$$

โดยที่  $B(Y)$  จะอธิบายลักษณะทางภูมิศาสตร์ของเงื่อนไคค่าที่องน้ำ ดังนั้นสมการ (3.13)-(3.17) กลายเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& (RU-1)u_\xi + \varepsilon\sigma(RU+1)u_\zeta + \varepsilon SUu_x + \varepsilon\sigma(uU)_y \\
& + \varepsilon u \{ R(u_\xi + \varepsilon\sigma u_\zeta) + \varepsilon S u_x + \varepsilon\sigma u_y \} \\
& + w(U_z + \varepsilon u_z) + \varepsilon\sigma W u_z + R(p_\xi + \varepsilon\sigma p_\zeta) \\
& + \varepsilon S p_x + \varepsilon\sigma p_y = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \{ (RU-1)w_\xi + \varepsilon\sigma(RU+1)w_\zeta + \varepsilon S U w_x + \varepsilon\sigma U w_y \\
& + (\varepsilon\sigma)^2 u W_y + \varepsilon u [ R(w_\xi + \varepsilon\sigma w_\zeta) + \varepsilon S w_x + \varepsilon\sigma w_y ] \\
& + \varepsilon\sigma (W w)_z + \varepsilon w w_z \} + p_z = 0
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$R(u_\xi + \varepsilon\sigma u_\zeta) + \varepsilon S u_x + \varepsilon\sigma u_y + w_z = 0 \tag{3.47}$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$p = \eta;$$

$$w = (UR-1)\eta_\xi - \sigma(W - UH_\gamma) + \varepsilon\sigma\eta_\zeta$$

$$+ \varepsilon \{ US\eta_x + u [ R(\eta_\xi + \varepsilon\sigma\eta_\zeta) + \varepsilon S\eta_x + \varepsilon\sigma\eta_y ] \} \tag{3.48}$$

$$+ \varepsilon\sigma U (R\eta_\zeta + \eta_\gamma) + \varepsilon\sigma u H_\gamma$$

บน  $z = 1 + H + \varepsilon\eta$

และ

$$w = \varepsilon\sigma u B'(Y) \quad \text{บน } z = B \tag{3.49}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นหาผลเฉลยของระบบสมการเหล่านี้ โดยต้องการผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] ซึ่งสามารถเขียนตัวแปรที่ไม่มีอิสระทั้งหมดในรูปแบบ

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma^m Q_{nm}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$$

โดยที่  $Q$  แทนแต่ละตัวของ  $u, w, p$  และ  $\eta$

เงื่อนไขค่าขอบเขตของพื้นผิวอิสระ ต้องหาค่าบน  $z=1+H+\varepsilon\eta$  ซึ่งไม่เหมาะที่จะใช้วิธีดังกล่าวเป็นหลักในการแก้ปัญหา ถ้าใช้การกระจายเทเลอร์ (Taylor Expansion) แล้วจะสามารถหาค่าของพื้นผิวอิสระบน  $z=1+H$  (และตรงกันกับรูปแบบที่ถูกสมมุติไว้ของการกระจายเชิงเส้นกำกับ) ดังนั้นเงื่อนไขค่าขอบเขตบนกลายเป็น

$$p + \varepsilon\eta p_z + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 p_{zz} \Big|_{z=1+H} = \eta \quad (3.50)$$

และ

$$\begin{aligned} & \sigma \left[ (W + \varepsilon\eta W_z \dots) \Big|_{z=1+H} - H_Y \left( (U + \varepsilon\eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right) \right] + (w + \varepsilon\eta w_z + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 w_{zz} \dots) \Big|_{z=1+H} \\ &= \left[ R(U + \varepsilon\eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} - 1 \right] \eta_\xi + \varepsilon\sigma \eta_\zeta + \varepsilon \left\{ \left[ (U + \varepsilon\eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right] S\eta_X \right. \\ & \left. + u \left[ R(\eta_\xi + \varepsilon\sigma \eta_\zeta) + \varepsilon S\eta_X + \varepsilon\sigma \eta_Y \right] \right\} + \varepsilon\sigma \left[ (U + \varepsilon\eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right] [R\eta_\zeta + \eta_Y] + \varepsilon\sigma u H_Y \end{aligned} \quad (3.51)$$

ทั้งสองเป็นการหาค่าบน  $z=1+H$  จากนั้นนำสมการ (3.45)-(3.47) , สมการ (3.50)-(3.51) และสมการ (3.49) ไปหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และพิจารณาที่  $O(1)$  และ  $O(\varepsilon)$  เท่านั้น

## บทที่ 4

### ผลของงานวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่มีรูปแบบเป็น

$$2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0$$

โดยได้มาจากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ที่ใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] สัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวแปรเหล่านี้จะเขียนอยู่ในรูปของความถี่ จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความถี่ระดับต่างๆ สำหรับผลเฉลยที่ได้ที่อันดับ  $O(1)$  และ  $O(\varepsilon)$  จะกล่าวเป็นลำดับได้ดังนี้

#### 4.1 ผลเฉลยที่ $O(\varepsilon^n \sigma^m)$

พิจารณาระบบสมการที่ถูกสร้างขึ้นที่แต่ละอันดับของ  $\varepsilon^n \sigma^m$  โดยการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ที่มีความจำเป็น ซึ่งทำให้ทราบว่า การกระจายนี้มีรูปแบบของการกระจายที่อยู่ในรูปของระยะทาง และเวลา เพื่อที่จะหาค่า  $\eta_{00}$  ที่เป็นคลื่นขั้นต้น และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นขั้นต้นนี้ที่ความถี่ระดับต่างๆ

เมื่อนำสมการ (3.45) มาหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) จะได้

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 [\sigma^0 (RU - 1)u_{00\xi} + \sigma^0 \varepsilon \sigma (RU + 1)u_{00\xi} + \sigma^0 \varepsilon S U u_{00x} + \sigma^0 \varepsilon \sigma u_{00} U_Y + \sigma^0 \varepsilon \sigma u_{00Y} U \\ & + \sigma^0 \varepsilon u_{00} \{R(u_{00\xi} + \varepsilon \sigma u_{00\xi}) + \varepsilon S u_{00x} + \varepsilon \sigma u_{00Y}\} + \sigma^0 w_{00} (U_z + \varepsilon u_{00z}) + \sigma^0 \varepsilon \sigma W u_{00z} \\ & + \sigma^0 R(p_{00\xi} + \varepsilon \sigma p_{00\xi}) + \sigma^0 \varepsilon S p_{00x} + \sigma^0 \varepsilon \sigma p_{00Y}] + \varepsilon^1 [\sigma^0 (RU - 1)u_{10\xi} + \sigma^0 \varepsilon \sigma (RU + 1)u_{10\xi} \\ & + \sigma^0 \varepsilon S U u_{10x} + \sigma^0 \varepsilon \sigma u_{10} U_Y + \sigma^0 \varepsilon \sigma u_{10Y} U + \sigma^0 \varepsilon u_{10} \{R(u_{10\xi} + \varepsilon \sigma u_{10\xi}) + \varepsilon S u_{10x} + \varepsilon \sigma u_{10Y}\}] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\sigma^0 w_{10}(U_z + \varepsilon n_{10z}) + \sigma^0 \varepsilon \sigma W u_{10z} + \sigma^0 R(p_{10\xi} + \varepsilon \sigma p_{10\zeta}) + \sigma^0 \varepsilon S p_{10x} + \sigma^0 \varepsilon \sigma p_{10y} + \dots = 0$$

สำหรับสมการ (3.46) , (3.47) และเงื่อนไขค่าขอบเขตบนจะพิจารณาจากสมการ (3.50) , (3.51) แต่เงื่อนไขค่าขอบเขตล่างจะพิจารณาจากสมการ (3.49) ก็จะทำในทำนองเดียวกันนี้ จะได้เทอมต่างๆ ดังนี้

เทอม  $\varepsilon^0 \sigma^0$

พิจารณาสมการต่างๆ ที่ถูกสร้างขึ้นที่  $O(1)$  แล้วทำการอธิบายสมการเหล่านั้นที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่างๆ ที่อันดับนี้ สมการต่างๆ ที่สร้างขึ้นคือ

$$(RU - 1)u_{00\xi} + U_z w_{00} + R p_{00\xi} = 0; \quad (4.1)$$

$$p_{00z} = 0; \quad (4.2)$$

$$R u_{00\xi} + w_{00z} = 0; \quad (4.3)$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\left. \begin{aligned} p_{00} &= \eta_{00}; \\ w_{00} &= (UR - 1)\eta_{00\xi} \end{aligned} \right\} \text{บน } z = 1 + H \quad (4.4)$$

และ

$$w_{00} = 0 \quad \text{บน } z = B \quad (4.5)$$

ดังนั้น

$$p_{00} = \eta_{00} \quad B \leq z \leq 1 + H,$$

จากสมการ (4.3) จะได้

$$u_{00\xi} = -\frac{1}{R} w_{00z}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นนำ  $u_{00\xi} = -\frac{1}{R}w_{00z}$  แทนลงในสมการ (4.1) ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขตบน  $z = B$  จะได้

$$(RU-1)\left(-\frac{1}{R}w_{00z}\right) + Rp_{00\xi} = 0 \quad (\because w_{00} = 0)$$

$$w_{00z} = \frac{R^2\eta_{00\xi}}{(RU-1)}$$

$$w_{00} = R^2\eta_{00\xi} \int_B^z \frac{dz}{(UR-1)} + F$$

นั่นคือ  $F = 0$  เพราะว่า  $w_{00} = 0$  ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} w_{00} &= R^2(UR-1)\eta_{00\xi} \int_B^z \frac{dz}{(UR-1)^2} \\ &= \eta_{00\xi} I \end{aligned} \quad (4.6)$$

โดยจะเขียน (เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้  $C(Y) = \frac{1}{R(Y)}$ )

$$I(z, Y) = (UR-1) \int_B^z \frac{dz}{(U-C)^2} \quad (4.7)$$

และจากสมการ (4.6) ทำให้สมการ  $u_{00\xi} = -\frac{1}{R}w_{00z}$  กลายเป็น

$$u_{00\xi} = -\frac{1}{R}\eta_{00\xi} I_z$$

$$\therefore u_{00} = -\frac{1}{R}\eta_{00} I_z$$

และจากเงื่อนไข (4.4) บน  $z = 1 + H$

$$w_{00} = (UR-1)\eta_{00\xi}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\int_B^{1+H} \frac{dz}{(U(z,Y)-C(Y))^2} = 1 \quad (4.8)$$

$$\therefore w_{00} = R^2 \eta_{00z} (UR-1) \int_B^{1+H} \frac{dz}{R^2 (U-C)^2}$$

ผลลัพธ์ที่ (4.8) เป็นเงื่อนไขเบิร์นแบบดั้งเดิม (Classical Burns Condition) [17] ที่กำหนดให้  $U(z,Y)$  แสดงความเร็วของคลื่นในแนวตรง ซึ่งความเร็วเป็น  $C(Y)$

ผลเฉลยของ (4.8) สำหรับ  $C(Y)$  จะเกิดขึ้น ภายใต้เงื่อนไข  $U(z,Y) \neq C(Y)$  เมื่อ  $0 \leq z \leq 1$  เท่านั้น ถ้า  $U(z_c, Y) = C(Y)$  สำหรับบางค่าที่  $z_c \in (0,1)$  และ  $U(0) = C$  หรือ  $U(1) = C$  ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ แล้วทางด้านซ้ายมือของสมการ (4.8) ไม่นิยาม และ  $z = z_c$  เรียกว่า Critical Level or Layer [4] เพราะฉะนั้นเงื่อนไขเบิร์นพอเพียงสำหรับที่จะแสดงว่าผลเฉลยของสมการ (4.8) จะสามารถหาได้ และสำหรับโครงสร้าง Monotonic ที่เป็นไปตาม  $U(0) \leq U(z) \leq U(1)$  โดยที่ทุกครั้งที่ความเร็วน้อยที่สุด 2 ตัวของการแผ่ขยายหนึ่งครั้งเป็น  $C(Y) > U(1, Y)$  และนอกเหนือจากนี้เป็น  $C(Y) < U(0, Y)$  สำหรับกรณีที่เป็นการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) ( $U$  ไม่เป็นฟังก์ชันของ  $z$  เช่นเดียวกับสมการ (3.32)) จะได้

$$C(Y) = U \pm \sqrt{D} \quad (4.9)$$

โดยที่

$$D = 1 + H - B \quad (4.10)$$

ดังนั้นไม่เกิด Critical Layer คือสามารถหาค่าสมการได้ ในการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) ในกรณีที่การแผ่ขยายไม่เกิดขึ้นใน Background Flow ใดๆ (ถ้า  $U = 0$ ) ความเร็วของคลื่นเป็น  $C(Y) = \pm \sqrt{D}$  [15] เท่านั้น สำหรับการแผ่ขยายของคลื่นทางด้านซ้าย และทางด้านขวา ในขณะที่  $U = U(Y)$  ( $U$  เปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกับการเปลี่ยนความลึก) ความเร็วทั้งสองของการแผ่ขยายจะถูกกำหนดเป็น  $C(Y) = U \pm \sqrt{D}$

เทอม  $O(\varepsilon^1 \sigma^0)$

ในขณะนี้จะพิจารณาสมการที่ได้จาก  $O(\varepsilon)$  ในการกระจายเชิงเส้นกำกับ สมการเหล่านั้นคือ

$$(RU - 1)u_{10\varepsilon} + SUu_{00X} + Ru_{00}u_{00\varepsilon} + w_{10}U_z$$

$$w_{00}u_{00z} + Rp_{10\varepsilon} + Sp_{00X} = 0; \quad (4.11)$$

$$(RU - 1)w_{00\varepsilon} + p_{10z} = 0; \quad (4.12)$$

$$Ru_{10\varepsilon} + Su_{00X} + w_{10z} = 0; \quad (4.13)$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$p_{10} = \eta_{10};$$

$$w_{10} = (UR - 1)\eta_{10\varepsilon} - \eta_{00}w_{00z} + RU_z\eta_{00}\eta_{00\varepsilon} + US\eta_{00X} + Ru_{00}\eta_{00\varepsilon} \quad \left. \vphantom{w_{10}} \right\} \text{บน } z = 1 + H \quad (4.14)$$

และ

$$w_{10} = 0 \quad \text{บน } z = B \quad (4.15)$$

จากสมการ (4.12), (4.13) และผลที่ได้จากอันดับที่ต่ำกว่า จะสามารถเขียนสมการ (4.11) ใหม่ ได้ เป็น

$$(RU - 1)[-C(Su_{00X} + w_{10z})] + SUu_{00X} + CI_z^2\eta_{00}\eta_{00\varepsilon}$$

$$+ w_{10}U_z - CII_{zz}\eta_{00}\eta_{00\varepsilon} + Rp_{10\varepsilon} + S\eta_{00X} = 0; \quad (4.16)$$

และจากสมการ (4.6) และ (4.7) จะได้

$$w_{00\varepsilon} = \eta_{00\varepsilon\varepsilon}I(z, Y) \quad (4.17)$$

$$p_{10z} = -(RU-1)^2 \eta_{00\xi\xi} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \quad (4.18)$$

เมื่อหาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ  $z$  และหาค่าบน  $z=1+H$  ดังนั้นสมการ (4.18) กลายเป็น

$$\begin{aligned} p_{10} &= -\eta_{00\xi\xi} \int_B^z [(RU-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz] dz + F \\ &= -\eta_{00\xi\xi} \int_B^z [(RU-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz] dz + \eta_{10} \quad (\text{บน } z=1+H; F = \eta_{10}) \end{aligned}$$

$$\therefore p_{10} = J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10} \quad (4.19)$$

โดยที่

$$J(z, Y) = \int_z^{1+H} \left[ (UR-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \right] dz$$

จากสมการ (4.16) เมื่อแทนค่า  $u_{00} = -\frac{1}{R}\eta_{00}I_z$  และ  $p_{10} = J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10}$  ที่ได้ลงไป จะได้

$$\begin{aligned} (RU-1)[-C(S(-\frac{1}{R}\eta_{00}I_z)_x + w_{10z})] + SU(-\frac{1}{R}\eta_{00}I_z)_x + CI_z^2\eta_{00}\eta_{00\xi} \\ + w_{10}U_z - CII_{zz}\eta_{00}\eta_{00\xi} - R(J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10})_\xi + S\eta_{00x} = 0 \end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่ และนำ  $\left(-\frac{1}{(U-C)^2}\right)$  คูณตลอด ได้เป็น

$$\begin{aligned} \left(\frac{w_{10}}{(U-C)}\right)_z &= -\frac{C^2SI_z}{(U-C)^2}\eta_{00x} + \frac{S}{(U-C)^2}\eta_{00x} + \frac{C}{(U-C)^2}\eta_{00}\eta_{00\xi}(I_z^2 - II_{zz}) \\ &+ \frac{J}{C(U-C)^2}\eta_{00\xi\xi\xi} + \frac{1}{C(U-C)^2}\eta_{10\xi} \end{aligned} \quad (4.20)$$

เมื่อหาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ  $z$  สมการ (4.20) กลายเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\frac{w_{10}}{(U-C)} &= -C^2 S \eta_{00x} \int_B^z \frac{I_z}{(U-C)^2} dz + S \eta_{00x} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \\
&+ C \eta_{00} \eta_{00\xi} \int_B^z \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2} dz + \frac{1}{C} \eta_{00\xi\xi\xi} \int_B^z \frac{J}{(U-C)^2} dz \\
&+ \frac{1}{C} \eta_{10\xi} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz + F(\xi, \zeta, X, Y)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

โดยที่  $F$  เป็นฟังก์ชันใดๆ แต่เมื่อหาค่าบน  $z=B$  และใช้สมการ (4.15) ดังนั้น  $F=0$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{w_{10}}{(U-C)} &= -C^2 S \eta_{00x} \int_B^z \frac{I_z}{(U-C)^2} dz + S \eta_{00x} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \\
&+ C \eta_{00} \eta_{00\xi} \int_B^z \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2} dz + \frac{1}{C} \eta_{00\xi\xi\xi} \int_B^z \frac{J}{(U-C)^2} dz \\
&+ \frac{1}{C} \eta_{10\xi} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz
\end{aligned} \tag{4.22}$$

เมื่อหาค่าบน  $z=1+H$  โดยแทนค่า  $u_{00} = -\frac{1}{R} \eta_{00} I_z$  และ  $w_{00} = \eta_{00\xi} I_z$  ในสมการ (4.14) ได้เป็น

$$w_{10} = -2\eta_{00}\eta_{00\xi} I_z + \frac{1}{C}(U-C)\eta_{10\xi} + \frac{1}{C}U_z\eta_{00}\eta_{00\xi} + US\eta_{00x}$$

จากนั้นแทนค่า  $I_z = \frac{1}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C}$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
w_{10} &= -2\eta_{00}\eta_{00\xi} \left[ \frac{1}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C} \right] + \frac{1}{C}(U_1-C)\eta_{10\xi} + \frac{1}{C}U_{1z}\eta_{00}\eta_{00\xi} + U_1S\eta_{00x} \\
&= -\eta_{00}\eta_{00\xi} \left[ \frac{2}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C} \right] + \frac{1}{C}(U_1-C)\eta_{10\xi} + U_1S\eta_{00x}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนสมการ (4.23) ในสมการ (4.22) พิจารณาคณ  $z=1+H$  จะได้

$$S\eta_{00x} \left[ C^2 \int_B^{1+H} \frac{I_z}{(U-C)^2} dz + \frac{U_1}{(U_1-C)} - 1 \right] - \frac{1}{C} \eta_{00\xi\xi\xi} \int_B^{1+H} \frac{J}{(U-C)^2} dz$$

$$- \eta_{00}\eta_{00\xi} \left[ C \int_B^{1+H} \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2} dz + \frac{2}{C(U_1-C)^2} + \frac{U_{1z}}{C(U_1-C)} \right] = 0$$

จากนั้นแทนค่า  $C \int_B^{1+H} \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2} dz = \frac{3}{C} I_4 - \frac{2}{C(U_1-C)^2} - \frac{U_{1z}}{C(U_1-C)}$  และ

$$\int_B^{1+H} \frac{I_z}{(U-C)^2} dz = \frac{2}{C} I_3 - \frac{1}{C(U_1-C)} \quad \text{จะได้}$$

$$2CI_3S\eta_{00x} - \frac{3}{C} I_4\eta_{00}\eta_{00\xi} - \frac{J_1}{C^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.24)$$

โดยที่

$$J_1 = \int_B^{1+H} \int_z^{1+H} \int_B^{z_1} \frac{[U(z_1-C)]^2}{[U(z)-C]^2 [U(z_2)-C]^2} dz_2 dz_1 dz \quad (4.25)$$

สมการ (4.24) เป็นรูปแบบของสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$I_n(z, Y) = \int_B^{1+H} \frac{dz}{(U-C)^n} \quad (4.26)$$

สมการ (4.24) เป็นรูปแบบสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร [18] และถ้า  $U=0$  จะเป็นเช่นเดียวกับที่ได้รับจากการประมาณในจอร์นตัน [15] สมการ (4.24) สมการนี้เหมาะที่จะสร้างโครงร่างตอนแรกใน  $Y < 0$  โดย  $U = U(z, Y)$

ที่อันดับนี้ทำให้ได้ผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยที่เกิดขึ้นนั้นเป็นคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) สำหรับ  $\eta_{00}$

โดยกำหนดให้คลื่นขั้นต้นเป็นแนวทางของการสะท้อนกลับ (Reflection) และ Re-Reflection โดยการแผ่ขยายไปทางด้านขวาภายในขอบเขตของความถี่ระดับต่างๆ ดังนั้นเมื่อ

เอกสารนี้เป็นการศึกษาที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.2 กรณีพิเศษ (Special Case) สำหรับผลเฉลย

จะเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่จะก่อให้เกิดผลลัพท์ และอธิบายรายละเอียดของผลเฉลย เพราะฉะนั้นจะได้กรณีพิเศษสำหรับ Background Flow (สมการ 3.32) คือ

$$U = \Psi_z = \phi(Y)$$

จากสมการ (3.33) และสมการ (4.9) เป็น

$$H = \frac{1}{2}(U_0^2 - \phi^2) = \frac{1}{2}(U_0^2 - U^2)$$

$$C = U \pm \sqrt{D}$$

ตามลำดับ เมื่อแทนค่า  $U_0 = UD$ ;  $D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y)$  (สมการ (3.34)) ใน  $C$  จะได้

$$C = \frac{U_0}{D} \pm \sqrt{D}$$

$$\therefore C = \left( \frac{U_0 \pm D\sqrt{D}}{D} \right)$$

จากสมการ (4.26) เมื่อแทนค่า  $U$  และ  $C$  ที่อยู่ในเทอมของ  $U_0$  และ  $D$  แล้วหาปฏิยานุพันธ์ จะได้

$$I_3 = \int_B^{1+H} \frac{dz}{\left( \frac{U_0}{D} - \left( \frac{U_0}{D} + \frac{D\sqrt{D}}{D} \right) \right)^3}$$

$$I_3 = \frac{1+H-B}{-D\sqrt{D}}; \quad D = 1+H-B$$

$$\therefore I_3 = -\frac{1}{\sqrt{D}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการทำงานเดียวกัน

$$I_4(z, Y) = \frac{1}{D}$$

และจากสมการ (4.25) จะได้

$$J_1 = \int_B^{1+H} \int_z^{1+H} \int_B^{z_1} \frac{[U(z_1) - C]^2}{[U(z) - C]^2 [U(z_2) - C]^2} dz_2 dz_1 dz$$

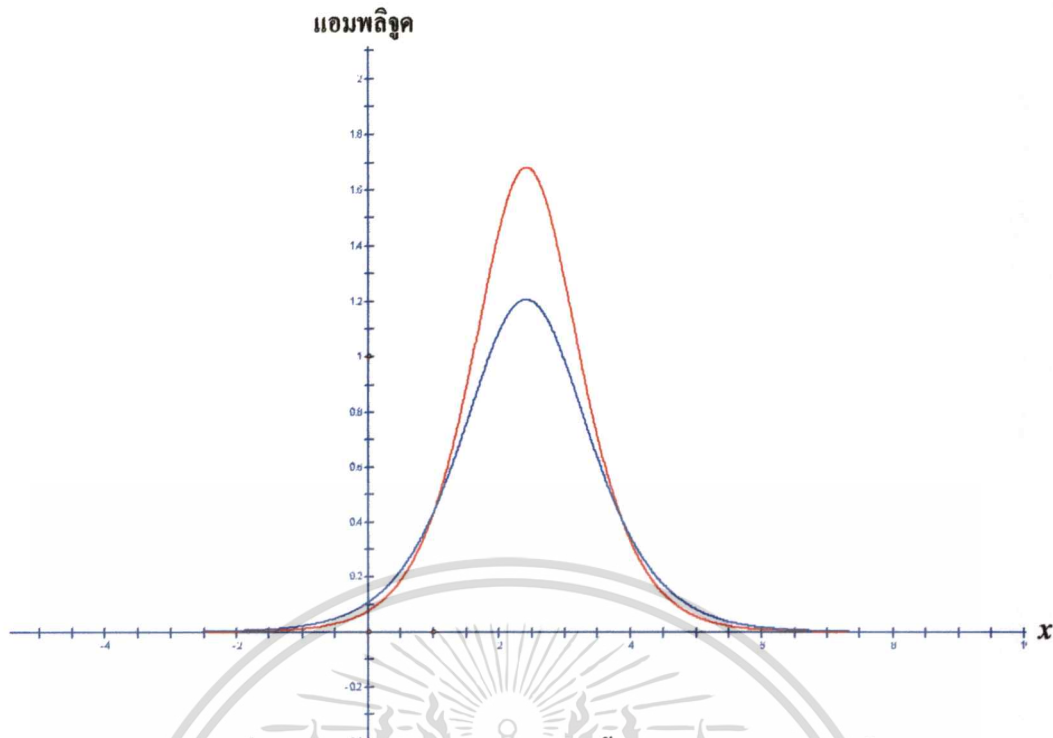
เมื่อจัดให้อยู่ในเทอมของ  $U_0$  และ  $D$  แล้วหาปฏิยานุพันธ์ จะได้

$$J_1(z, Y) = \frac{D^2}{3}$$

จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ต่างๆ แทนค่าในสมการ (4.24) เป็น

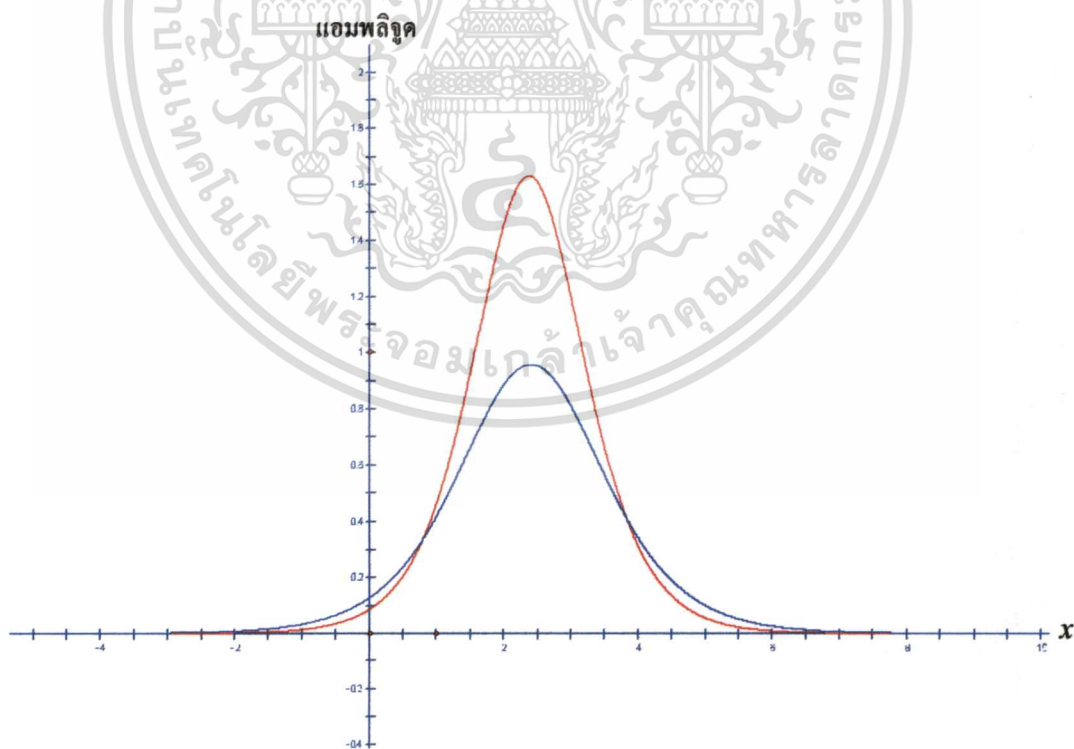
$$2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0 \quad (4.27)$$

นั่นคือสมการ (4.27) เป็นรูปแบบสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร สำหรับกรณีที่ทำการศึกษา จากนั้นจะพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรดังกล่าว ที่ความลึกระดับต่างๆ โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.1-4.4 โดยรูปที่ 4.1 และ 4.2 จะกำหนดค่า  $U_0$  ให้คงที่ แล้วเปลี่ยนค่า  $D$  ส่วนรูปที่ 4.3 และ 4.4 จะกำหนดค่า  $D$  ให้คงที่ แล้วเปลี่ยนค่า  $U_0$  ซึ่งผลที่ได้เป็นดังนี้



**รูปที่ 4.1** แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 1)

กรณีที่ 1 กำหนดให้  $U_0 = 2$  สำหรับความลึก  $D=2$  (—) และ  $D=10$  (—)

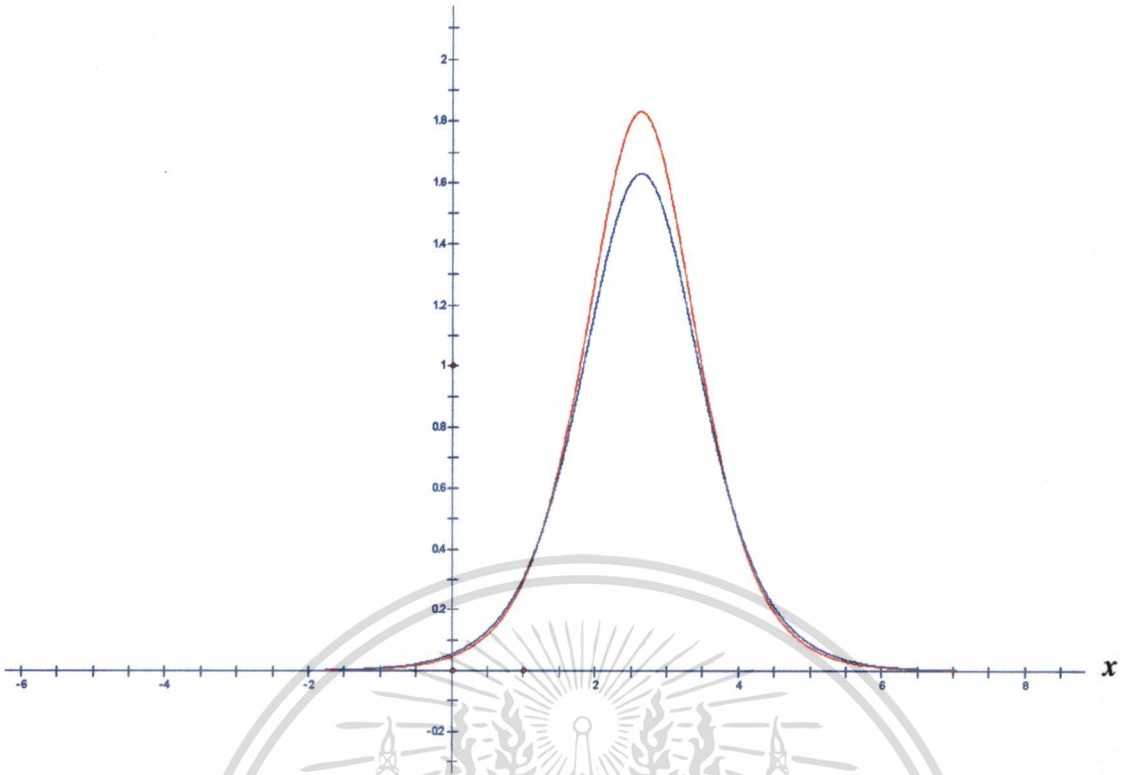


**รูปที่ 4.2** แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 2)

กรณีที่ 2 กำหนดให้  $U_0 = 1$  สำหรับความลึก  $D=2$  (—) และ  $D=10$  (—)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

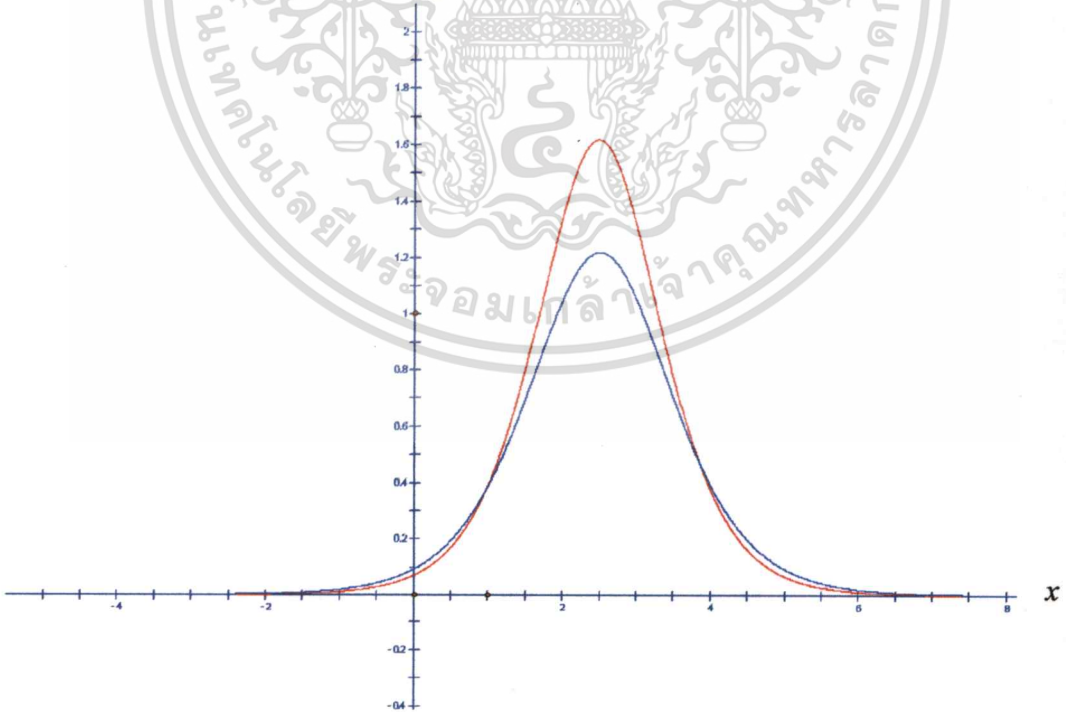
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 3)

กรณีที่ 3 กำหนดให้  $D=10$  สำหรับความลึก  $U_0=1$  (—) และ  $U_0=5$  (—)

แอมพลิจูด



รูปที่ 4.4 แสดงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในสมการ KdV (กรณีที่ 4)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการแข่งขันเพื่อชิงรางวัลเทคโนโลยีแห่งชาติ โดยผู้เผยแพร่ให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่ความถี่ระดับต่างๆ จากรูปที่ 4.1 - 4.4 พบว่าเมื่อความถี่ของแม่น้ำลำคลองเกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้น จะส่งผลต่อความสูงของคลื่น ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้นด้วย แต่ทำให้ความกว้างของคลื่นลดลง ดังนั้นการเปลี่ยนความถี่มีผลกระทบต่อความสูง และความกว้างของคลื่นในแม่น้ำลำคลอง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึง สรุปผลงานวิจัยที่ได้ทำการศึกษาครั้งนี้ ซึ่งผลที่ได้เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร สำหรับพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองที่ความลึกระดับต่างๆ และข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่จะได้นำงานวิจัยชิ้นนี้มาศึกษาต่อไป

#### 5.1 สรุปผลงานวิจัย

ในงานวิจัยชิ้นนี้ ได้ทำการหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษา และได้ผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร เพื่อที่จะใช้สำหรับพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองที่ความลึกระดับต่างๆ โดยสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรนี้ ได้จากการแปลงสมการออยเลอร์ที่มีความสอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล ภายใต้เงื่อนไขพื้นผิวอิสระ และเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ ให้เหมาะสมเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} & (RU-1)u_\xi + \varepsilon\sigma(RU+1)u_\zeta + \varepsilon SUu_x + \varepsilon\sigma(uU)_y \\ & + \varepsilon u \{ R(u_\xi + \varepsilon\sigma u_\zeta) + \varepsilon S u_x + \varepsilon\sigma u_y \} \\ & + w(U_z + \varepsilon u_z) + \varepsilon\sigma W u_z + R(p_\xi + \varepsilon\sigma p_\zeta) \\ & + \varepsilon S p_x + \varepsilon\sigma p_y = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \{ (RU-1)w_\xi + \varepsilon\sigma(RU+1)w_\zeta + \varepsilon S U w_x + \varepsilon\sigma U w_y \\ & + (\varepsilon\sigma)^2 u W_y + \varepsilon u [R(w_\xi + \varepsilon\sigma w_\zeta) + \varepsilon S w_x + \varepsilon\sigma w_y] \\ & + \varepsilon\sigma(Ww)_z + \varepsilon w w_z \} + p_z = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$R(u_\xi + \varepsilon\sigma u_\zeta) + \varepsilon S u_x + \varepsilon\sigma u_y + w_z = 0 \tag{5.3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\begin{aligned}
 & p + \varepsilon \eta p_z + \frac{1}{2} (\varepsilon \eta)^2 p_{zz} \Big|_{z=1+H} = \eta \\
 & \sigma \left[ (W + \varepsilon \eta W_z \dots) \Big|_{z=1+H} - H_Y \left( (U + \varepsilon \eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right) \right] + (w + \varepsilon \eta w_z + \frac{1}{2} (\varepsilon \eta)^2 w_{zz} \dots) \Big|_{z=1+H} \\
 & = \left[ R(U + \varepsilon \eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} - 1 \right] \eta_\xi + \varepsilon \sigma \eta_\zeta + \varepsilon \left\{ \left[ (U + \varepsilon \eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right] S \eta_X \right. \\
 & \left. + u \left[ R(\eta_\xi + \varepsilon \sigma \eta_\zeta) + \varepsilon S \eta_X + \varepsilon \sigma \eta_Y \right] \right\} + \varepsilon \sigma \left[ (U + \varepsilon \eta U_z \dots) \Big|_{z=1+H} \right] \left[ R \eta_\zeta + \eta_Y \right] + \varepsilon \sigma u H_Y
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

และ

$$w = \varepsilon \sigma u B'(Y) \quad \text{บน } z = B \tag{5.5}$$

จากนั้นใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ที่มีรูปแบบเป็น

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma^m Q_{nm}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$$

โดยที่  $Q$  แทนแต่ละตัวของ  $u, w, p$  และ  $\eta$  ซึ่งเป็นตัวแปรไม่อิสระ และกำหนดให้  $\varepsilon$  เป็นขนาดแอมพลิจูดของคลื่น,  $\sigma$  เป็นการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก และพิจารณาเฉพาะเทอม  $O(1)$  และ  $O(\varepsilon)$  เท่านั้น ซึ่งทำให้ได้ผลเฉลยเป็น  $\eta_{00}$  ที่เป็นคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) ที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรคือ

$$2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0$$

โดยที่  $D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y)$  เป็นความลึกขนะที่น้ำกำลังไหล เมื่อพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรดังกล่าวนี้ สรุปได้ว่าเมื่อความลึกเกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้น จะส่งผลทำให้ความสูงของคลื่นเพิ่มขึ้นด้วย และในขณะเดียวกันความกว้างของคลื่นจะลดลง ดังนั้นเมื่อต้องการให้ความสูงของคลื่นลดลงเพื่อ

แก้ปัญหาดังกล่าวที่ก่อให้เกิดความเสียหายต่อบ้านเรือนที่อยู่ริมแม่น้ำหรือริมคลองนั้น สามารถทำได้โดยการทำให้ความลึกของแม่น้ำลำคลองลดลง ก็จะสามารถแก้ปัญหานี้ได้

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้ผลเฉลยเป็น  $\eta_{00}$  ที่เป็นคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) ที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรคือ

$$2S \frac{(U_0 + D\sqrt{D})}{D\sqrt{D}} \eta_{00x} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})} \eta_{00} \eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3(U_0 + D\sqrt{D})^3} \eta_{00\xi\xi\xi} = 0$$

ซึ่งการศึกษาค้นหาค่า  $S$  ที่เป็นเทอมของความลึก  $D$  ไว้ และสำหรับผู้ที่สนใจในส่วนนี้สามารถนำไปศึกษาต่อ โดยอาจจะพิจารณาเทอมเพิ่มขึ้นที่มาจากกรกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่เพื่อหาค่า  $S$  ซึ่งอาจจะทำให้สมการ KdV ที่มีรูปแบบใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น และทำให้เกิดความเหมาะสมกับการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

อย่างไรก็ตามสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยสัมประสิทธิ์เป็นสัมประสิทธิ์เฉพาะที่ได้จากการศึกษาค้นหาค่า  $S$  สำหรับความลึกระดับต่างๆ และสามารถพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองได้ งานวิจัยชิ้นนี้เป็นตัวอย่างสำหรับการศึกษาสมการคลื่นน้ำที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งผู้วิจัยหวังว่าตัวอย่างนี้จะเป็นอย่างเริ่มต้นที่สามารถพัฒนาไปสู่การประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นเพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] A.C. Scott **Encyclopedia Nonlinear Science**. Oxford: Oxford University Press. 2003.
- [2] สมาน เจริญกิจพูลผล, มนตรี พิรุณเกษตร. **กลศาสตร์ของไหล ฉบับเสริมประสบการณ์**. กรุงเทพมหานคร: ซีเอ็ดเคยเคชั่น. 2545.
- [3] วีระชัย ถิมพรชัยเจริญ, พงศ์ศักดิ์ ชินนาบุญ. **กลศาสตร์ของไหล 1**. กทม.: 2544.
- [4] R.S. Johnson. **A modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves**. Cambridge: Cambridge University Press. 1997.
- [5] A.H. Nayfeh. **Perturbation Methods**. New York: John Wiley & Sons. 1973.
- [6] E.J. Hinch. **Perturbation Methods**. Cambridge: Cambridge University Press. 1991.
- [7] J. Kevorkian and J.D. Cole. **Perturbation Methods in Applied Mathematics**. New York: Springer-Verlag. 1981.
- [8] M. Van Dyke. **Perturbation Methods in Fluid Mechanics**. Stanford: Parabolic Press. 1975.
- [9] S.M. Killen and R.S. Johnson. "Propagation of Axi-Symmetric Nonlinear Shallow Water Waves over Slowly Varying Depth." [Online]. Available : arXiv:lin.PS/0012047 v1. 2000
- [10] R.S. Johnson. "Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries equation (with applications to solitary wave development on a shelf).", *J. Fluid Mech.*, 54, part 1, 1972.pp.81-91.
- [11] R.S. Johnson. "On an asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation with slowly varying coefficient.", *J. Fluid Mech.*, 60, part 4, 1973.pp.813-824.
- [12] W. Hong and Y.D. Jung. "Auto-Bäcklund transformation and analytic solutions for general variable-coefficient KdV equation.", *Physics Letter A* 257., 1999.pp.149-152.
- [13] ศุภชัย ราชอาจ. "การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับโซลิตอนเชิงเดี่ยวโดยใช้ผลต่างสี่เหลี่ยมเบื้องข้างหน้า." *วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ และ วิทยาการคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง*. 2542.
- [14] R.S. Johnson. "The Camassa-Holm equation for water waves moving over a shear flow.", *Fluid Dynamics.*, 33, 2003.pp.97-111.

- [15] R.S. Johnson. “**Solitary wave, soliton and shelf evolution over variable depth.**”, J. Fluid Mech., 276, 1994.pp.125-138.
- [16] C.J. Knickerbocker and A.C. Newell. “**Reflections from solitary waves in channels of decreasing depth.**”, J. Fluid Mech., 153, 1985.pp.1-16.
- [17] J.C. Burns. “**Long waves in running water.**”, Proc. Camb. Phil. Soc. 49, 1953.pp.695-706.
- [18] R.S. Johnson. “**Nonlinear gravity waves on the surface of an arbitrary shear flow with variable depth.**”, Nonlinear Instability Analysis, 1997.pp.221-243.



## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางสาวปิยธิดา ค.ไชยสุวรรณ
วัน เดือน ปีเกิด	2 มีนาคม 2525
สถานที่เกิด	จังหวัดชลบุรี
วุฒิการศึกษาระดับปริญญาตรี	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์)
สถานศึกษาที่สำเร็จ	มหาวิทยาลัยบูรพา
ปีการศึกษาที่สำเร็จ	2546



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้