

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การตรวจจับความเร็วมอเตอร์กระแสตรงด้วยตัวกรองคาลมาน  
โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ

SPEED SENSORLESS DC MOTOR USING KALMAN FILTER



ฉพ.  
๗๗๙๒๗  
๒๕๔๙

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 61633  
วัน,เดือน,ปี..... 19 ก.ค. 2549

b. 116.004๑๔  
i. ....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม  
บัณฑิตวิทยาลัย  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2549  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ISBN 974-15-2534-6  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# **SPEED SENSORLESS DC MOTOR USING KALMAN FILTER**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATIONS ENGINEERING  
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2006**

**ISBN 974-15-2534-6**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**COPYRIGHT 2006**

**SCHOOL OF GRADUATE STUDIES**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การตรวจจับความเร็วมอเตอร์กระแสตรงด้วยตัวกรองคาลมาน โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ
นักศึกษา	นายเนรมิต หว่ามูข
รหัสนักศึกษา	47061035
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโทรคมนาคม
พ.ศ.	2549
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการประยุกต์ใช้งานตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน(Kalman Filter) ในการประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง (DC Motor) แบบไม่ใช้ตัวตรวจจับ (Sensorless) โดยตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมานสามารถที่จะประมาณค่าตัวแปรสถานะ (State Variable) ของระบบได้อย่างถูกต้องแม้ว่าอินพุทของระบบมีสัญญาณรบกวนปะปนมาก็ตาม การออกแบบทำโดยการสร้างรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงในรูปสเตตสเปซแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete State Space Model) จากนั้นจะใช้ ตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมานทำการประมาณค่าความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง ในการสร้างจริงทำบนบอร์ดทดลองตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลขจุดทศนิยมลอย TMS320C31 การทดลองได้กำหนดให้อินพุทของระบบไม่มีสัญญาณรบกวนปะปน และมีสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม (Random Noise) ปะปน ผลการทดลองพบว่าความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงที่ถูกประมาณค่าโดยตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมานมีความเที่ยงตรงเมื่อเทียบกับความเร็วที่วัดจากตัวตรวจจับความเร็วรอบทางกล (Tachometer) แม้ว่าจะมีสัญญาณรบกวนปะปนมากับอินพุทของระบบก็ตาม

<b>Thesis Title</b>	Speed Sensorless DC Motor Using Kalman Filter
<b>Student</b>	Mr. Neramit Whamook
<b>Student ID.</b>	47061035
<b>Degree</b>	Master of Engineering
<b>Programme</b>	Telecommunications Engineering
<b>Year</b>	2006
<b>Thesis Advisor</b>	Assoc. Prof. Dr. Kobchai Dejhan

## ABSTRACT

This thesis proposes a new application of Kalman filter to estimate speed of DC motor. Kalman filter can estimate the system state variables accurately, even the system input is disturbed with noise. In the design, the mathematical model of DC motor in discrete state-space form will be created; the speed of DC motor which is considered as state variable and can be estimated by using Kalman filter. In the experiment, TMS320C31 floating point digital signal processor is used for hardware implementation, the input is disturbed with White noise and without White noise in the experiment. The experimental results show the speed of DC motor which is estimated by Kalman filter has good accuracy when compared with the results from tachometer.

# กิตติกรรมประกาศ

ไม่ว่าสิ่งใดก็ตามที่ทำให้ผู้เขียนรู้ มิ และเป็นเช่นวันนี้ ผู้เขียนอยากขอบคุณเพื่อนๆ ที่ได้ให้การช่วยเหลือ ในสิ่งต่างๆ ที่ไม่ใช่แค่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ แต่เกี่ยวข้องกับผู้เขียนทุกเรื่อง โดยเฉพาะน้องอู๋ (ศศิพร อนุมาศ) เพื่อนจิ (จิรวัตร อีสริยานนท์) เพื่อนป๊อป เพื่อนสุ น้องต๋ก IM114 ที่มีส่วนช่วยในวิทยานิพนธ์นี้ และเพื่อนเบียร์ เพื่อนกรานต์ รวมไปถึงเพื่อนๆ IMI ทุกคนที่เรียนต่อที่ สจล. ด้วยกัน

ขอบคุณคณาจารย์ที่สั่งสอนศิษย์คนนี้ โดยเฉพาะอาจารย์พุง เดชอยู่ รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ และ อาจารย์สุรพันธ์ ชัมมัน ซึ่งเป็นอาจารย์คนเดียว ที่คู่ คำว่า แล้วศิษย์ไม่เคยโกรธหรือเคือง มีเพียงความศรัทธาในความเป็นครูของท่าน เป็นบุคคลที่ผู้เขียนจะเคารพและบูชาไปตลอด ผู้เขียนอยากขอบคุณ คุณพ่อ (พ.ต.ท.สมศักดิ์ หว่ามูข) และคุณแม่ (วิลาสินี หว่ามูข) ที่ได้ให้กำเนิดบุตร และเลี้ยงดูบุตรคนนี้มาด้วยความยากลำบากตั้งแต่เล็กจนวันนี้ ซึ่งไม่สามารถบรรยายความจริงและความรู้สึกขอบพระคุณที่มีต่อท่านในกระดาษแผ่นเดียวได้ ถึงแม้ว่าผู้เขียนจะไม่เชื่อเรื่องบุญหรือกรรม แต่ผู้เขียนก็ยังสำนึกในพระคุณอยู่เสมอ

ตลอดเวลาที่ผ่านมา ผู้เขียนได้รับความยากลำบาก ความกดดัน และอุปสรรคต่างๆ ในการทำวิทยานิพนธ์นี้ หากปราศจากบุคคลเหล่านี้จะไม่สามารถทำให้ผู้เขียนเป็นเช่นวันนี้ได้ จึงขอประกาศคำขอบคุณอย่างซาบซึ้งไว้ในวิทยานิพนธ์นี้ด้วย.

เนรมิต หว่ามูข

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญภาพ.....	VII
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	1
1.4 ทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	2
บทที่ 2 ทฤษฎีทางสถิติและสัญญาณ	
2.1 ความน่าจะเป็น .....	3
2.2 ตัวแปรสุ่ม .....	4
2.3 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน .....	5
2.4 เส้นโค้งปกติ .....	7
2.5 เวกเตอร์การสุ่มเกาส์เซียน .....	9
2.6 การวัดเชิงเส้น .....	11
2.7 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง.....	12
2.8 ความคลาดเคลื่อนของการประมวลผล.....	15
2.9 การแปลงแซด .....	17
2.10 คุณสมบัติของการแปลงแซด .....	22
2.11 การแปลงแซดในรูปเศษส่วน .....	24
2.12 ฟังก์ชันระบบของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา.....	30
2.13 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา .....	32

เอกสารนี้เป็น 2.14 รูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง.....36

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 ตัวกรองดิจิทัล	
3.1 ตัวกรองตัวกรองกาลมาน .....	40
3.2 ตัวกรองกาลมาน ไม่ต่อเนื่อง.....	44
3.3 การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ด้วยตัวกรองกาลมาน โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ.....	49
บทที่ 4 การออกแบบการทดลอง.....	51
บทที่ 5 ผลการทดลอง.....	54
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัย.....	77
เอกสารอ้างอิง.....	78
ภาคผนวก ก. การออกแบบด้านฮาร์ดแวร์.....	79
ภาคผนวก ข. การออกแบบด้านซอฟต์แวร์.....	91
ภาคผนวก ค. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	96
ประวัติผู้เขียน.....	102

# สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ผลของการแปลงแซด.....	23
4.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของมอเตอร์ที่ใช้ในการทดลอง .....	53
5.1 การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยใช้ตัวกรองเชิงเลขแบบ คาลมานเทียบกับตัวตรวจจับความเร็วรอบทางกล.....	54



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 ฟังก์ชันของเกาซ์ .....	8
2.2 แสดงกราฟแจกแจงปกติ $X \sim N(0,1)$ .....	9
2.3 การสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน .....	13
2.4 สัญญาณสุ่มตัวอย่าง .....	13
2.5 สเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง .....	14
2.6 ความคลาดเคลื่อนของราวด์ควอ ไตรเซชันและทรันเคท-ควอ ไตรเซชัน .....	15
2.7 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน .....	16
2.8 ROC ของ $X(z)$ ในตัวอย่างที่ 2.5 .....	20
2.9 Pole – Zero Plot ของระบบในตัวอย่างที่ 2.8 .....	24
2.10 Pole – Zero Plot ของระบบในตัวอย่างที่ 2.9 .....	25
2.11 ตำแหน่งการวาง Zero และ Pole ของตัวอย่างที่ 2.10 .....	26
2.12 ตำแหน่งการวาง Zero และ Pole ของตัวอย่างที่ 2.11 .....	26
2.13(a) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ .....	28
2.13(b) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ .....	28
2.13(c) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ .....	29
2.13(d) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ .....	29
2.14 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $H(z) = \frac{z+1}{z}$ .....	34
2.15 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$ .....	36
2.16 รูปจำลองทางไฟฟ้าของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง .....	36
3.1 การประมาณค่า $x_n$ จากการวัด $y_n$ ของสถานะ $n$ .....	48
3.2 ลำดับการคำนวณการกรองกาลมาน .....	48
3.3 แสดงลักษณะการนำตัวกรองกาลมานมาใช้สำหรับประมาณค่าความเร็ว มอเตอร์โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ .....	49
4.1 แสดงแผนภาพการต่อชุดขับเคลื่อนมอเตอร์เพื่อการทดสอบ .....	51
4.2 ภาพจริงของชุดขับเคลื่อนมอเตอร์ที่ใช้ทดสอบ .....	52
4.3 แผนภาพการต่ออุปกรณ์ที่ใช้ทดสอบการประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ.....	52
5.1 กราฟแสดงผลการวัดความเร็วในรูปของแรงดันที่ได้จากตัวตรวจจับ เทียบกับแรงดันที่ได้ จากตัวกรองกาลมาน.....	55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านธุรกิจ  
จากตัวกรองกาลมาน.....

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในการวัดค่าความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง สามารถกระทำได้โดยใช้ตัวตรวจจับความเร็วรอบทางกล ซึ่งตัวตรวจจับก็คือเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสตรงแบบหนึ่งที่ทำหน้าที่เปลี่ยนความเร็วมาเป็นแรงดันไฟฟ้า ตัวตรวจจับความเร็วรอบจะประกอบด้วยส่วนประกอบทางกลเป็นส่วนมากทำให้เมื่อใช้งานไปนานๆ ส่วนประกอบทางกลจะเสื่อมสภาพ มีผลให้การวัดความเร็วรอบของมอเตอร์เกิดความผิดพลาดขึ้น ซึ่งค่าผิดพลาดจากการวัดความเร็วรอบของมอเตอร์นี้ ถ้ามีการนำไปใช้ควบคุมความเร็วมอเตอร์ก็จะทำให้การควบคุมความเร็วมอเตอร์เกิดความผิดพลาดไปด้วย จึงนำเสนอวิธีการประมาณความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงแบบไม่มีตัวตรวจจับ โดยใช้เทคนิคของตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน เพื่อลดปัญหาที่เกิดจากความผิดพลาดทางกลของตัวตรวจจับแบบเดิม

### 1.2 ความมุ่งหมาย และวัตถุประสงค์ของการศึกษา

การตรวจวัดความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงด้วยตัวกรองคาลมานโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ มีจุดมุ่งหมายเพื่อแก้ปัญหาการวัดความเร็วรอบของมอเตอร์ที่ผิดพลาดจากการสีกหรือทางกล ซึ่งใช้วิธีการทาง ดิจิตอลแทนการใช้อุปกรณ์ทางกล โดยเลือกใช้กระบวนการประมวลผลสัญญาณทางดิจิตอล ในการสร้างจะใช้ตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 ซึ่งเป็นตัวประมวลผลแบบจุดทศนิยมลอย ขนาด 32 บิต และมีการนำหลักการของตัวกรองคาลมานมาใช้ในการคำนวณ เพื่อให้ได้ความเร็วรอบของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

### 1.3 สมมติฐานของการศึกษา

จากที่กล่าวข้างต้น การประมาณค่าความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ต้องใช้ตัวตรวจจับนั้นสามารถที่จะทำได้โดยการสร้างรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง แล้วนำมาคำนวณร่วมกับทฤษฎีตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน โดยกำหนดให้อินพุทของระบบเป็นกระแสและแรงดันอามเพอร์ จะสามารถคำนวณความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับได้

## 1.4 ทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัย

ตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมานใช้สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ ของระบบแบบไดนามิก ซึ่งในการประมาณค่าระบบไดนามิก จำเป็นจะต้องสร้างรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบนี้ขึ้น แล้วนำไปคำนวณร่วมกับตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน ในการประมาณค่าความเร็วของมอเตอร์ ไฟฟ้ากระแสตรงก็เช่นกัน ถ้าสามารถสร้างรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ได้ก็จะสามารถ ประมาณค่าความเร็วได้

## 1.5 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอ การตรวจจับความเร็วรอบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ ซึ่งอาศัยหลักการของตัวกรองกาลมาน และรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของ มอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง มาคำนวณร่วมกัน โดยมีอินพุทของระบบเป็นกระแสและแรงดันอา เมเจอร์ โดยที่อินพุทของระบบที่เป็นกระแสจะไม่มีการปะปนและมีการปะปนสัญญาณรบกวน เข้าไปด้วย ผลที่ได้จะเป็นความเร็วของมอเตอร์ที่แสดงอยู่ในรูปของแรงดัน และทำการ เปรียบเทียบผลการตรวจจับความเร็วรอบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับนี้เทียบ กับการตรวจจับที่เป็นเชิงกลซึ่งวัดได้ในรูปแรงดันเช่นกัน

## 1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

ขั้นตอนการศึกษาวิจัย จะเริ่มจากการศึกษาการสร้างรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของ มอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงด้วยค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของมอเตอร์ที่ใช้ทดลองรวมถึงการแปลงตัว แปรของระบบที่อยู่ในรูปของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาไปเป็นระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา จากนั้นศึกษาทฤษฎีบทตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน เพื่อการประมาณค่าความเร็วของมอเตอร์ ไฟฟ้ากระแสตรงโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ แล้วจึงศึกษาการใช้งานตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 พร้อมทั้งออกแบบวงจรในส่วนที่เป็นการติดต่อกับแอนาลอก แล้วจึงทำการทดลอง สร้างตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมานบนตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 เพื่อทำการ ประมาณค่าความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ โดยการทดลองได้ กำหนดอินพุทของระบบไม่มีสัญญาณรบกวนปะปน และมีสัญญาณรบกวนขาวปะปนด้วย

## บทที่ 2

### ทฤษฎีทางสถิติและสัจญาณ

#### 2.1 ความน่าจะเป็น (Probability)[1,2,3]

ความน่าจะเป็นหมายถึง ตัวเลขที่แสดงถึง โอกาสการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจว่ามีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด การเลือกสิ่งของออกจากกล่องหรือการหยิบของจากเหตุการณ์หนึ่งนั้น เรียกว่า การสุ่ม (Random) และผลลัพธ์ที่เป็น ไปทั้งหมดจากเหตุการณ์หรือการทดลองหนึ่งเรียกว่า แซมเปิล สเปส (Sample Space) โดยความน่าจะเป็นซึ่งเกิดจากการหยิบจากเหตุการณ์หนึ่งนั้น สามารถหาได้จาก

$$P(A) = \frac{\text{ความเป็นไป ได้ที่เลือก ของจากเหตุ การณ์ } A}{\text{ผลรวมทั้งหมดของจำนวน การเลือกที่ เป็นไปได้}}$$

ความน่าจะเป็นของความพอใจที่จะเลือกจากเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B ใดๆอย่างหนึ่งนั้น สามารถเขียน ดังสมการที่ 2.1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

ถ้าความน่าจะเป็นของการเลือกสิ่งที่น่าสนใจ จากเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ที่เป็นอิสระต่อกัน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นพร้อมกัน สามารถเขียน ได้ดังสมการที่ 2.2

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2.2)$$

ความน่าจะเป็นจากการเลือกเหตุการณ์ A ที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากการเลือกจากเหตุการณ์ B เรียกความน่าจะเป็นแบบนี้ว่า ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) เขียน ได้ดังสมการที่ 2.3

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.3)$$

## 2.2 ตัวแปรสุ่ม (Random variable)[4,5]

ในการกำหนดค่าเชิงเลขให้กับผลลัพธ์ของการทดลองถ้าแซมเปิลสเปซ (Sample Space) ของค่าของตัวแปรสุ่มสามารถนับได้แล้ว ตัวแปรสุ่มนั้นเป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) แต่ถ้าแซมเปิลสเปซ ของค่าของตัวแปรสุ่มไม่สามารถนับได้แล้ว ตัวแปรสุ่มนั้นเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) เมื่อพิจารณาในกรณีของการสุ่มแรงดันไฟฟ้าหรือการเคลื่อนที่บางอย่างมีค่าที่เป็นไปได้มากมาย จนนับไม่ได้หรือไม่สามารถจะเกลี่ยความน่าจะเป็นให้ลงกับแต่ละจุดได้ ดังนั้นจึงจัดเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งการหาความน่าจะเป็นจะกระทำโดยการกำหนดเป็นช่วงของค่า ดังสมการที่ 2.4

$$F_X(x) = P(-\infty, X) \quad (2.4)$$

เมื่อ  $X$  คือ ตัวแปรสุ่ม  
 $x$  คือ ค่าของตัวแปรสุ่ม

ฟังก์ชันนี้แสดงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  จากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น คุณสมบัติของฟังก์ชัน การกระจายสะสม คือ

1.  $F_X(x) \rightarrow 0$  โดยที่  $X \rightarrow -\infty$
2.  $F_X(x) \rightarrow 1$  โดยที่  $X \rightarrow +\infty$
3.  $F_X(x)$  มีค่าไม่เพิ่มขึ้นขณะที่  $x$  มีค่าเพิ่มขึ้น

ในกรณี ถ้าต้องการหาความหนาแน่นของฟังก์ชัน สามารถทำการหาอนุพันธ์ ดังสมการที่ 2.4 ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function) แสดงดังสมการที่ 2.5

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.5)$$

คุณสมบัติของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น คือ

1.  $f_X(x) \geq 0$  (ฟังก์ชันไม่เป็นลบ)
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา  $[a, b]$  หาได้จากสมการที่ 2.6

$$P_X[a, b] = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.3 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน (Mean and Variance)[1,2,3]

ค่าเฉลี่ยของจำนวนลำดับ จากการสุ่มจำนวน  $n$  ตัวจากตัวแปรสุ่ม  $X$  หาได้จากสมการที่ 2.7

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \quad (2.7)$$

$\bar{X}$  = ค่าเฉลี่ย

$X_1, \dots, X_n$  = ตัวแปรสุ่ม

$n$  = จำนวนของตัวแปรสุ่ม

ในการบอกค่าสัญญาณที่ต่อเนื่องที่เป็นจำนวนอนันต์ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริงและการตอบสนองจากการเลือก ควรคาดหวังจากเหตุการณ์ที่พบจริง ค่าตัวแปรสุ่มนั้นเป็นอนันต์แต่ละครั้ง จากความน่าจะเป็น  $P_n$  เมื่อเลือกเหตุการณ์  $X_1, \dots, X_n$  ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องสามารถประมาณได้จากน้ำหนักความน่าจะเป็นเฉลี่ย ดังสมการที่ 2.8

$$\bar{X} \approx \frac{(P_1 n)_{X_1} + (P_2 n)_{X_2} + \dots + (P_n n)_{X_n}}{n} \quad (2.8)$$

$\bar{X}$  = ค่าเฉลี่ย

$(P_n n)_{X_n}$  = ค่าคาดหวังที่เกิดขึ้นจากเหตุการณ์  $X_n$

ดังนั้นถ้าตัวแปรสุ่มทั้งหมด  $n$  ครั้ง ค่าความคาดหวังที่เกิดขึ้นจากเหตุการณ์  $X_1$  เมื่อมีค่าการสุ่มอนันต์สามารถหาความคาดหวังที่เกิดขึ้น ของตัวแปรการสุ่มไม่ต่อเนื่องจากสมการที่ 2.9

$$E[X] = \sum_{i=1}^N P_i X_i \quad (2.9)$$

$E[X]$  = ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม  $X$

$P_i$  = ความน่าจะเป็นของการตอบสนอง

สำหรับค่าคาดหวังตัวแปรสุ่มที่ต่อเนื่องหาได้จากสมการที่ 2.10

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x) dx \quad (2.10)$$

จากสมการที่ 2.8 และ 2.9 ถ้าแทน  $X$  ด้วยตัวแปรสุ่มฟังก์ชันคั่นคั่นนั้นสามารถเขียนเป็นสมการของฟังก์ชันความคาดหวัง เป็นของการสุ่มไม่ต่อเนื่องและต่อเนื่อง ดังสมการที่ 2.11 และ 2.12

$$E(g(x)) = \sum_{i=1}^N P_i g(x_i) \quad (2.11)$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x) dx \quad (2.12)$$

ค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่มที่เป็น  $k^{\text{th}}$  Order Statistical Moment คือ  $g(x) = x^k$  ดังนั้น  $1^{\text{st}}$  Order Statistical Moment ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.13

$$E[X^1] = \int_{-\infty}^{\infty} x^1 f_x(x) dx \quad (2.13)$$

และถ้าเป็น  $2^{\text{nd}}$  Order Statistical Moment ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง  $X$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.14

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (2.14)$$

ความแปรปรวน คือ คุณสมบัติการเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ย เมื่อเพิ่มหรือลดค่าตัวแปรสุ่มจะไม่ทำให้ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มเปลี่ยนแปลง เพียงแต่ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไปทางซ้ายหรือทางขวามือเท่านั้น สามารถหาความแปรปรวนของสัญญาณจากค่าเฉลี่ยดังสมการที่ 2.15

$$V[X] = E[X - E[X]]^2 = E[X^2] - E[X]^2 \quad (2.15)$$

รากของความแปรปรวนคือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( Standard Deviation ) ซึ่งหาได้จากสมการที่ 2.16

$$s = \sqrt{V[X]} = \sigma \quad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $V[X]$  และ  $\sigma^2$  คือ ความแปรปรวน  
 $s$  คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

## 2.4 เส้นโค้งปกติ (Normal Curve)[1,2,3]

สมการเส้นโค้งกระจายปกติ สามารถเขียนเป็นรูปแบบแตกต่างกันหลายแบบ เมื่อต้องการหาเส้นโค้งกระจายความถี่ปกติ สมการที่ได้คือพื้นที่ใต้เส้นโค้งจะเท่ากับจำนวนของจุดสังเกตการกระจายจำนวน  $n$  โดยที่ค่าความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการกระจาย  $y$  หาได้จากฟังก์ชันของเกาส์ ดังสมการที่ 2.17 และแสดงดังภาพที่ 2.1

$$y = Ce^{-(x^2/2\sigma^2)} \quad (2.17)$$

และผลรวมของฟังก์ชันการกระจายจำนวน  $n$  หาได้จากสมการที่ 2.18

$$\int_{-\infty}^{\infty} y dx = n \quad (2.18)$$

แทนค่า  $y$  จะได้ดังสมการที่ 2.19

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = n \quad (2.19)$$

จากสมการที่ 2.17 ได้ค่าของ  $C$  ดังสมการที่ 2.20

$$C = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (2.20)$$

แทนค่าสมการที่ 2.20 ลงในสมการที่ 2.17 ดังสมการที่ 2.21

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (2.21)$$

สังเกตที่จุด  $X$  จากค่าเฉลี่ย  $\mu$  จำนวน  $n$  สามารถเขียนสมการเส้นโค้งความถี่ปกติดังสมการที่ 2.22

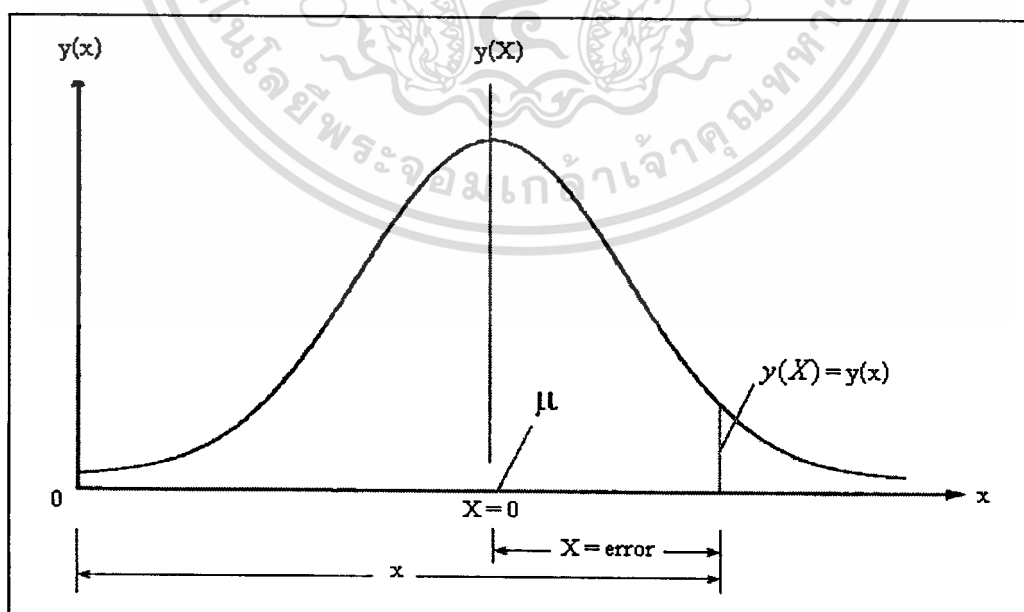
$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.22)$$

การเขียนเป็นฟังก์ชันการแจกแจงปกติ ที่มีพื้นที่ใต้เส้นโค้งเป็น 1 หน่วย และเรียกฟังก์ชันนี้ว่า นอร์มัลไลซ์ (Normalized) เขียนดังสมการที่ 2.23

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (2.23)$$

กำหนดให้

- $p(x)$  = ความหนาแน่นความน่าจะเป็น
- $y$  = เส้นโค้งแจกแจงความถี่ปกติ
- $C$  = ค่าคงที่
- $X$  = ความคลาดเคลื่อนจากค่าเฉลี่ย
- $\sigma$  = เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
- $y(X)$  = ความหนาแน่นความน่าจะเป็นที่เกิดการคลาดเคลื่อน



ภาพที่ 2.1 ฟังก์ชันของเกาส์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.5 เวกเตอร์การสุ่มเกาส์เซียน ( Gaussian Random Vector)[1-4]

ตัวแปรสุ่ม  $X \in R^n$  เป็นเกาส์เซียน โดยมีความหนาแน่นดังสมการที่ 2.23 สามารถเขียนในรูปสมการเมื่อมีองค์ประกอบหลายตัวแปรอินพุตได้ดังสมการที่ 2.24

$$p(V) = (2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(V - \bar{X})^T (\Sigma^{-1})(V - \bar{X})\right) \quad (2.24)$$

โดยให้  $\Sigma = \Sigma^T > 0, \bar{X} \in R^n$  และค่า  $X$  มีการแจกแจงปกติเป็น  $X \sim N(\bar{X}, \Sigma)$  เมื่อให้ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม  $X$  ภายใต้เส้นโค้งปกติ สามารถหาค่านั้นได้ดังสมการที่ 2.25

$$\bar{X} = E[X] = \int V p(V) dV \quad (2.25)$$

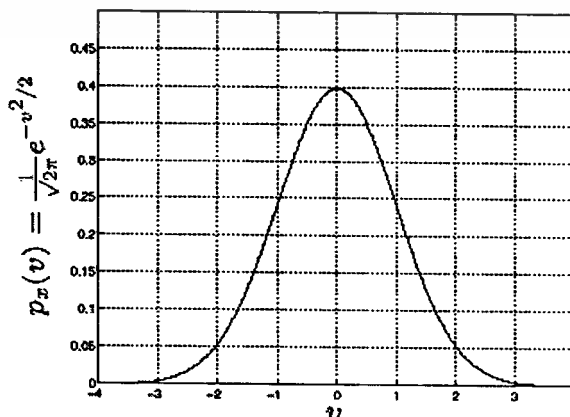
ให้  $\Sigma = \Sigma^T > 0$  เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix) ของตัวแปร  $X$  ความแปรปรวนนั้นหาได้จากสมการที่ 2.26

$$\Sigma = E\left[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T\right] \quad (2.26)$$

$$\Sigma = E[XX^T] - E[\bar{X}\bar{X}^T] \quad (2.27)$$

$$\Sigma = \int (V - \bar{X})(V - \bar{X})^T p_X(V) dV \quad (2.28)$$

ความหนาแน่นของ  $X$  ที่มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนเป็น 1 เขียนเป็นรูปกราฟโค้งปกติได้ดังภาพที่ 2.2



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ **ภาพที่ 2.2** แสดงกราฟแจกแจงปกติ  $X \sim N(0,1)$  ให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรการสุ่มสเกลล่า หาได้ดังสมการที่ 2.29 และสมการที่ 2.30 และค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม  $x_i$  หาได้จากสมการที่ 2.31

$$E[x_i] = \bar{X} \quad (2.29)$$

$$E[x_i - \bar{x}_i]^2 = \Sigma_{ii} = P \quad (2.30)$$

$$x_i = \sqrt{\Sigma_{ii}} \quad (2.31)$$

ดังนั้นเมื่อมีตัวแปรสุ่ม 2 ตัว จะหาค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปรสุ่ม  $x_i$  และตัวแปรสุ่ม  $x_j$  ได้ดังสมการที่ 2.32 และค่าสัมประสิทธิ์ของสหสัมพันธ์  $\rho_{ij}$  (Correlation coefficient) ได้ดังสมการสมการที่ 2.33 และค่าของการเบี่ยงเบนกำลังสองเฉลี่ยได้ดังสมการที่ 2.34

$$E[(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)^T] = \Sigma_{ij} = P_{ij} \quad (2.32)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_i \Sigma_j}} \quad (2.33)$$

$$E\|X - \bar{X}\| = ETr[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] = Tr\Sigma = \sum_{i=1}^n \Sigma_{ii} \quad (2.34)$$

จากความสัมพันธ์ของสมการดังกล่าว หากความสัมพันธ์ฟังก์ชันของสมการที่ 2.35 ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น กำหนดให้  $x$  เป็นอินพุต  $b$  เป็นค่าคงที่ และ  $y$  เป็นเอาต์พุต ให้เมตริกซ์  $A \in R^{m \times n}$  และ  $b \in R^m$  โดย  $z$  เป็นเกาซ์เซียน โดยค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันนี้ได้ดังสมการที่ 2.36

$$y = Ax + b \quad (2.35)$$

$$Ey = E(Ax + b) \quad (2.36)$$

$$= AEx + b$$

$$= A\bar{x} + b$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าความแปรปรวนร่วมของสมการที่ 2.35 หาได้จากสมการที่ 2.37

$$\Sigma_z = E[(z - \bar{z})(z - \bar{z})^T] \quad (2.37)$$

$$= AE[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T] A^T$$

$$\Sigma_z = A \Sigma_x A^T \quad (2.38)$$

## 2.6 การวัดเชิงเส้น (Linear Measurement)[2,4]

ระบบการวัดสัญญาณที่เป็นเชิงเส้น ประกอบด้วยส่วนที่เป็นสัญญาณการวัดเชิงเส้นและส่วนสัญญาณรบกวน ซึ่งเขียนเป็นสมการเชิงเส้นดังสมการที่ 2.39

$$y = Ax + v \quad (2.39)$$

ในที่นี้ให้  $x$  เป็นสัญญาณที่ทำการวัดหรือประมาณค่า โดยที่  $x \in R^n$  และ  $y$  เป็นค่าที่ได้จากการวัด โดยที่  $y \in R^m$  และ เมตริกซ์  $A$  แสดงลักษณะของตัวตรวจจับ โดยที่  $A \in R^{m \times n}$  และ  $v$  เป็นการรบกวนของสัญญาณ สมมุติให้  $x$  มีค่าเฉลี่ยเป็น  $\bar{x}$  มีความแปรปรวนร่วมเป็น  $\Sigma_x$  เขียนการแจกแจงปกติได้เป็น  $x \sim N(\bar{x}, \Sigma_x)$  โดยที่  $N(\bar{x}, \Sigma_x)$  เป็นการแจกแจงปกติก่อน และ  $v$  มีค่าเฉลี่ย  $\bar{v}$  เป็นการแจกแจงรบกวนที่มีความแปรปรวนร่วมเป็น  $\Sigma_v$  ทั้งสัญญาณที่วัดและสัญญาณรบกวนเป็นอิสระต่อกัน สามารถเขียนเป็นการแจกแจงปกติ ดังนั้นเขียนเป็นสมการที่ 2.40

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_x & 0 \\ 0 & \Sigma_v \end{bmatrix} \right) \quad (2.40)$$

จากสมการที่ 2.40 จัดรูป ได้ดังสมการที่ 2.41

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

ดังนั้นจะได้สมการที่ 2.42

$$E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ A\bar{x} + \bar{v} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

และจากสมการที่ 2.41 และสมการ 2.42 เขียนได้ดังสมการที่ 2.43 และ 2.44

$$E \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_x & 0 \\ 0 & \Sigma_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \quad (2.43)$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_x & \Sigma_x A^T \\ A \Sigma_x & A \Sigma_x A^T + \Sigma_v \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

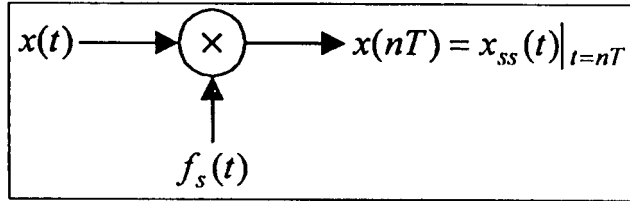
จะได้ค่าความแปรปรวนร่วมของการวัด  $y$  คือ  $A \Sigma_x A^T + \Sigma_v$  และ  $A \Sigma_x A^T$  เป็นความแปรปรวนร่วมของสัญญาณ และ  $\Sigma_v$  เป็นความแปรปรวนร่วมของสัญญาณรบกวน

## 2.7 ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง [1, 2, 3]

ในการเปลี่ยนสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลาไปเป็นสัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลานั้น จำเป็นจะต้องมีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling) ซึ่งความถี่ในการสุ่มตัวอย่างโดยที่ไม่ทำให้สัญญาณสูญเสียข้อมูลที่สำคัญไปนั้นต้องเป็นไปตามทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Theory) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าสัญญาณเชิงอุปมาน  $x(t)$  ซึ่งมีแบนด์วิดท์เท่ากับ  $f_0$  แล้ว จะสามารถทำการสุ่มตัวอย่างโดยสัญญาณที่ได้ ไม่สูญเสียข้อมูลที่สำคัญ ก็ต่อเมื่อความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง  $f_s$  มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของความถี่  $f_0$  ดังสมการที่ 2.54

$$f_s \geq 2f_0 \quad (2.45)$$

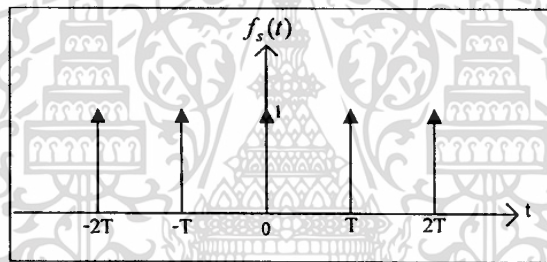
โดยทั่วไปอาจทำการสุ่มตัวอย่างด้วยความถี่  $f_{sn} = 2f_0$  พอดี ซึ่งค่าความถี่นี้เรียกว่า ความถี่ไนควิสต์ (Nyquist Frequency) และคาบเวลา  $T_n = 1/2f_0$  นี้ เรียกว่า ช่วงเวลาสุ่มตัวอย่างไนควิสต์ (Nyquist Interval) แต่ในทางปฏิบัติเพื่อหลีกเลี่ยงผลของปรากฏการณ์ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity) ที่อาจเกิดจากการสุ่มตัวอย่าง จึงมักใช้ความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง  $f_s$  มากกว่าค่าความถี่ไนควิสต์  $f_{sn}$  ขึ้นไป ส่วนจะมีค่ามากกว่าเท่าใดนั้นขึ้นกับลักษณะงาน ไม่ได้มีการกำหนดค่าที่แน่นอน



ภาพที่ 2.3 การสุ่มตัวอย่างสัญญาณเชิงอุปมาน

ภาพที่ 2.3 แสดงการสุ่มตัวอย่างในโดเมนเวลาซึ่งก็คือการคูณสัญญาณที่ต่อเนื่องทางเวลา  $x(t)$  กับลำดับของอิมพัลส์หนึ่งหน่วย  $f_s(t)$  โดยที่อิมพัลส์แต่ละตัวสมมุติให้มีความห่างเท่ากับ  $T$  วินาที ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.46)$$

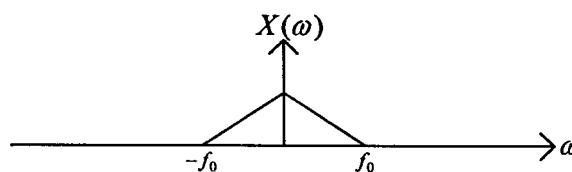


ภาพที่ 2.4 สัญญาณสุ่มตัวอย่าง

และเมื่อทำการแปลงฟูรีเยร์ เพื่อทำการหาค่าสเปกตรัมความถี่ของ  $f_s(t)$  จะได้

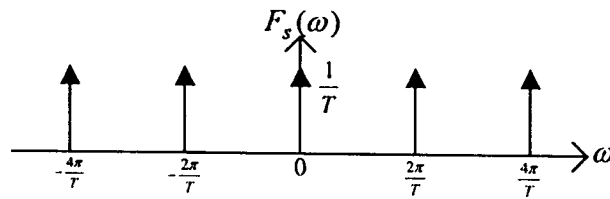
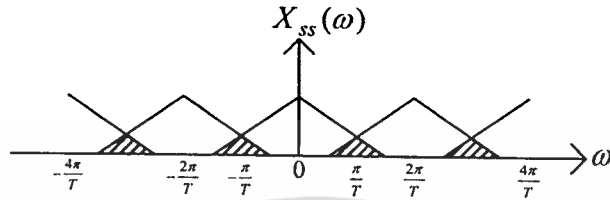
$$F_s(\omega) = \mathcal{F}\{f_s(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (2.47)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาในโดเมนความถี่ สเปกตรัมความถี่ของสัญญาณ  $f_s(t)$  เป็นอิมพัลส์ที่วางตัวห่างเท่าๆ กัน ไปบนแกนความถี่เช่นกัน ดังภาพที่ 2.5(b)



(a) สเปกตรัมของสัญญาณเชิงอุปมาน  $x(t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(b) สเปกตรัมของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง  $f_s(t)$ (c) สเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง  $x_{ss}(t)$ 

ภาพที่ 2.5 สเปกตรัมของสัญญาณจากการสุ่มตัวอย่าง

ถ้าให้  $x_{ss}(t)$  เป็นสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง ดังนั้น

$$x_{ss}(t) = f_s(t)x(t) \quad (2.48)$$

และถ้าให้  $X(\omega)$  เป็นสเปกตรัมความถี่ของ  $x(t)$  เนื่องจากใน โดเมนเวลาสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง เป็นการคูณกันของสองสัญญาณ ดังนั้นในโดเมนความถี่จึงเป็นการทำคอนโวลูชัน (Convolution) ของสเปกตรัมของ  $f_s(t)$  และ  $x(t)$

$$X_{ss}(\omega) = F_s(\omega) * X(\omega) \quad (2.49)$$

การคอนโวลูชันนี้แสดงเป็นแผนรูปดังภาพที่ 2.5 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเห็นว่าสเปกตรัมของสัญญาณที่ได้จากการสุ่มตัวอย่าง  $X_{ss}(\omega)$  เป็นการนำสเปกตรัมของ  $X(\omega)$  มาวางเรียงห่างเท่าๆ กัน ไปตลอดบนแกนความถี่  $\omega$  ซึ่งจากภาพที่ 2.5(c) จะเห็นว่า ถ้าความถี่ของสัญญาณสุ่มตัวอย่าง  $f_s(t)$  มีค่าน้อยกว่าความถี่ในควิสดจะทำให้ช่วงห่างของแต่ละกลุ่มของสเปกตรัมเข้ามาซ้อนทับกัน ผลนี้ทำให้เกิดความผิดเพี้ยนไปของสเปกตรัมของสัญญาณเดิมซึ่งผลนี้มีชื่อเรียกว่า ผลการเอเลสซิง (Aliasing Effect) นอกจากนี้ ภาพที่ 2.5 ยังแสดงให้เห็นว่าผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองสัญญาณเชิงเลข จะมีผลตอบสนองความถี่ที่มีลักษณะเป็นคาบ คือ เริ่มซ้ำค่าเดิมที่จุดที่มีค่าความถี่เป็น  $2\pi/T$  หรือ  $f_s/2$  ซึ่งความถี่นี้เรียกว่า ความถี่พับ ซึ่งการที่ผลตอบสนองความถี่มีลักษณะเป็นคาบก็เนื่องมาจากการสุ่มตัวอย่างสัญญาณนั่นเอง

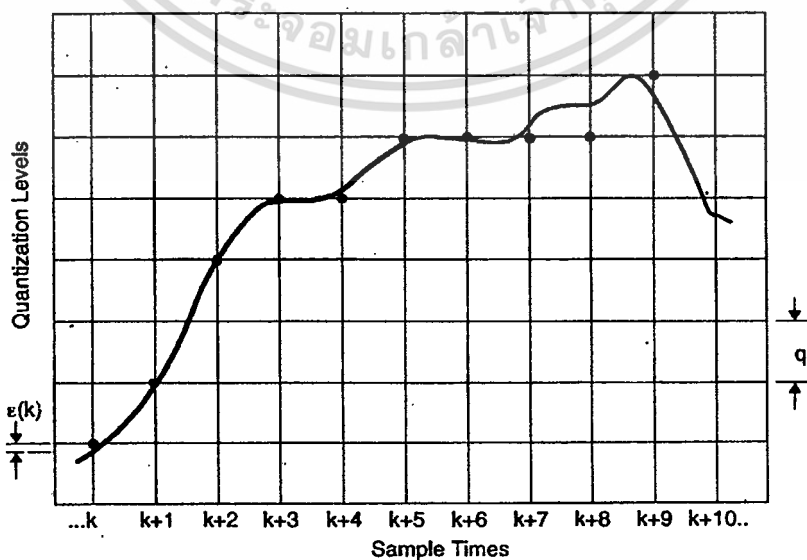
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.8 ความคลาดเคลื่อนของการประมวลผล[6,7]

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเมื่อรับสัญญาณมาจากอินพุต จะมีผลกับเอาต์พุตอย่างมากอันเนื่องมาจากความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของเอาต์พุต สัญญาณที่มาจากภายนอกจะถูกส่งต่อเข้าไปอินพุตของตัวแปลงสัญญาณอนาลอกเป็นดิจิทัล (Analog to Digital Converter) ซึ่งผลของการคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น เนื่องจากจำนวนบิตของตัวแปลงสัญญาณแบบอนาลอกเป็นดิจิทัล ตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัล (Digital signal Processing : DSP) และสัญญาณที่ส่งออกไปที่เอาต์พุตของ ตัวแปลงจำนวนบิตของตัวแปลงสัญญาณแบบดิจิทัลเป็นอนาลอก (Digital to Analog Converter) ในส่วนของตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัลเมื่อมีการประมวลผลสัญญาณทางคณิตศาสตร์ เป็นลักษณะในรูปเมตริกซ์หรือเป็นการกระทำซ้ำๆ ของการคูณหรือการหาร มีผลให้จำนวนบิตเพิ่มขึ้นแต่ในตัวประมวลผลสัญญาณดิจิทัลนั้นมีจำนวนบิตที่จำกัด จึงเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นได้ ขบวนการที่เปลี่ยนแอมพลิจูดของสัญญาณต่อเนื่องแบบไม่ต่อเนื่องกับเวลาเป็นสัญญาณดิจิทัลเรียกว่า ควอนไทซ์เซชัน (Quantization) ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการแปลงสัญญาณนี้เรียกว่าความคลาดเคลื่อนควอนไทซ์เซชัน (Quantization Error) หรือ การรบกวนควอนไทซ์เซชัน (Quantization Noise) ความคลาดเคลื่อน

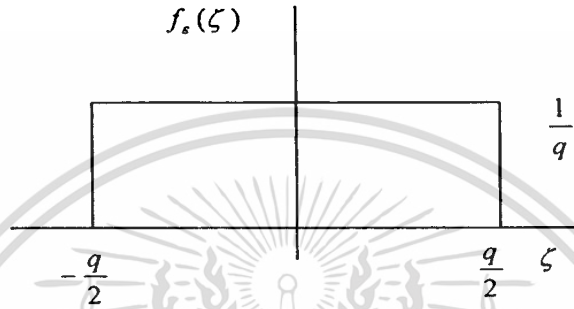
ควอนไทซ์เซชันเป็นความแตกต่างระหว่างค่าควอนไทซ์เซชันกับค่าการสุ่มความคลาดเคลื่อนควอนไทซ์เซชันที่พิจารณาได้เป็น 2 แบบคือ

1. ความคลาดเคลื่อนราวด์ควอนไทซ์เซชัน (Rounded Quantization error,  $q$ ) เป็นความแตกต่างระหว่างค่าจริงของควอนไทซ์เซชันกับค่าใกล้เคียงจริง
2. ความคลาดเคลื่อนทริกเคทควอนไทซ์เซชัน (Truncate Quantization error,  $\varepsilon$ ) คือค่าความแตกต่างระหว่างค่าจริงควอนไทซ์เซชันกับค่าระดับต่ำสุดดังภาพที่ 2.6



เอกสารนี้เป็น ภาพที่ 2.6 ความคลาดเคลื่อนของราวด์ควอนไทซ์เซชันและทริกเคท-ควอนไทซ์เซชัน ด้านการคำนวณ  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากความแตกต่างของระดับควอนไทซ์เซชันเป็น  $q$  ความคลาดเคลื่อน  $\varepsilon$  ระหว่างสัญญาณที่ต่อเนื่องกับระดับควอนไทซ์เซชัน มากที่สุดเป็น  $\pm \frac{q}{2}$  การเปลี่ยนแปลงของสัญญาณมากกว่า  $q$  จากลำดับปัจจุบันถึงลำดับถัดไป โดยความคลาดเคลื่อน  $\varepsilon$  ขณะการสุ่มแต่ละตัวจะเป็นอิสระกันทางด้านสถิติ และมีความน่าจะเป็นอยู่ระหว่าง  $\pm \frac{q}{2}$  ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันการคลาดเคลื่อนแสดงดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน

จากภาพที่ 2.7 หาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อน ( $\mu_\varepsilon$ ) ที่เกิดขึ้น ได้ดังสมการที่ 2.50

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon &= E\{\varepsilon\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta f_\varepsilon(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{-q/2}^{q/2} \zeta \frac{1}{q} d\zeta \\ \mu_\varepsilon &= \frac{1}{q} \zeta^2 \Big|_{-q/2}^{q/2} = 0\end{aligned}\quad (2.50)$$

และความแปรปรวน ( $\sigma_\varepsilon^2$ ) ของการคำนวณหาได้จากสมการที่ 2.51

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^2 &= E\{(\varepsilon - \mu_\varepsilon)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta - 0)^2 f_\varepsilon(\zeta) d\zeta = \int_{-q/2}^{q/2} (\zeta)^2 \frac{1}{q} d\zeta \\ &= \frac{1}{q} \left[ \frac{\zeta^3}{3} \right]_{-q/2}^{q/2} = \frac{1}{q} \left[ \frac{1}{3} (q/2)^3 - \frac{1}{3} (-q/2)^3 \right] \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \frac{1}{3q} \left[ \frac{q^3}{8} + \frac{q^3}{8} \right] = \frac{q^2}{12}\end{aligned}\quad (2.51)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.9 การแปลงแซด [6]

การแปลงแซด (z-transform) ของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถนิยามอยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ (Power Series) ดังสมการที่ 2.52 เรียกสมการที่ 2.52 นี้ว่า การแปลงแซดแบบตรง (Direct z-transform)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.52)$$

เมื่อ  $z$  คือ ตัวแปรเชิงซ้อน (Complex Variable)

$x(n)$  คือ ลำดับสัญญาณ (Sequence Signal)

แต่สำหรับระบบแบบ Causal การแปลงแซดของสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.53 เรียกสมการที่ 2.53 นี้ว่า การแปลงแซดด้านเดียว (One-Side z-transform)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.53)$$

การแปลงแซดของสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องเขียนแทนได้อีกรูปแบบหนึ่ง ดังสมการที่ 2.54

$$X(z) = Z\{x(n)\} \quad (2.54)$$

และจากสมการที่ 2.52 และ 2.53 จะเห็นได้ว่าผลการแปลงแซด ก็คืออนุกรมอนันต์ ดังนั้นจะมีค่า  $z$  ที่ทำให้  $X(z)$  หาคำตอบได้เรียกค่า  $z$  นี้ว่า Region of Convergence (ROC) โดยค่า  $z$  นี้จะมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน

เช่นกรณีที่ 2.1 จงหา z-transform ของสัญญาณไม่ต่อเนื่องแบบ Finite-duration

$$x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.52  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$\text{ดังนั้น} \quad X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 1z^0 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 0z^{-4} + 1z^{-5}$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5} \quad (2.55)$$

ส่วน ROC นั้นหาได้จากสมการที่ 2.55

$$X(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \frac{1}{z^5} \quad (2.56)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลง 61633 อย่างถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ 2.56 พบว่าเมื่อ  $z = 0$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ROC ก็คือ ทุกๆค่าของ  $z$  ยกเว้น  $z = 0$  ซึ่งเมื่อ  $z = \infty$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้

**เช่่นกรณีที่ 2.2** จงหา z-transform ของสัญญาณไม่ต่อเนื่อง แบบ Finite-duration

$$x(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

วิธีการ จากสมการที่ 2.52  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

จะได้  $X(z) = 1z^2 + 2z^1 + 5z^0 + 7z^{-1} + 0z^{-2} + 1z^{-3}$  (2.57)

$$X(z) = z^2 + 2z^1 + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$
 (2.58)

ROC หาได้จากสมการที่ 2.58 จัดสมการใหม่จะได้

$$X(z) = z^2 + 2z^1 + 5 + \frac{7}{z} + \frac{1}{z^3}$$
 (2.59)

จากสมการที่ 2.59 จะเห็นได้ว่าถ้า  $z = 0$  หรือ  $z = \infty$  จะทำให้  $X(z)$  หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ROC ก็คือ ทุกๆค่า  $z$  ยกเว้น  $z = 0$  และ  $z = \infty$

**เช่่นกรณีที่ 2.3** จงหา z-transform ของ  $\delta(n)$

วิธีการ กำหนดให้  $x(n) = \delta(n) = \{\dots, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$  (2.60)

จากสมการที่ 2.52

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 1z + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = 1$$
 (2.61)

**เช่่นกรณีที่ 2.4** จงหา z-transform ของ  $\delta(n-k)$

วิธีการ กำหนดให้  $x(n) = \delta(n) = \{\dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$  (2.62)

จากสมการที่ 2.52

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(z) = \dots + 0z^2 + 0z^1 + 0z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots + 1z^{-k} + 0z^{-(k+1)} + 0z^{-(k+2)} + \dots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$X(z) = z^{-k} \quad (2.63)$$

**เช่นกรณีที่ 2.5** จงหา z-transform ของสัญญาณ

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq \infty \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

จากสมการที่ 2.52

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots + z^{-\infty} \quad (2.65)$$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \quad (2.66)$$

จากสมการอนุกรมอนันต์ดังสมการที่ 2.67

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \dots = \frac{1}{1-A} \quad |A| < 1 \quad (2.67)$$

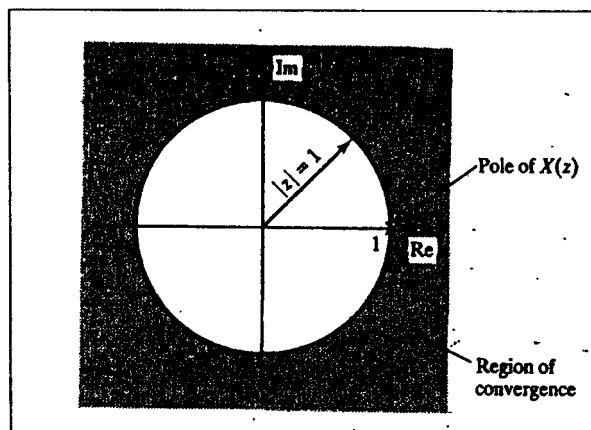
จัดสมการที่ 2.66 ใหม่ได้ดังสมการที่ 2.68

$$X(z) = 1 + \left(\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^4 + \left(\frac{1}{z}\right)^5 + \dots \quad (2.68)$$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการที่ 2.67 กับสมการที่ 2.68 จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.69

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \text{ หรือ } 1 < |z| \quad (2.69)$$

เนื่องจาก  $z$  เป็นตัวแปรเชิงซ้อนดังนั้นค่า  $z$  ที่ทำให้  $X(z)$  หาค่าได้ หรือ ค่า ROC ของ  $X(z)$  สามารถเขียนได้ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 ROC ของ  $X(z)$  ในกรณีที่ 2.5

เช่นกรณีที่ 2.6 จงหา z-transform ของสัญญาณ  $x(n) = a^n u(n)$

$$x(n) = \{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots\}$$

จากสมการที่ 2.52  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$  จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.70

$$X(z) = a^0 z^0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots + a^n z^{-n} \quad (2.70)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots + \frac{a^n}{z^n}$$

$$X(z) = 1 + \left(\frac{a}{z}\right) + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^n \quad (2.71)$$

จากสมการของอนุกรมอนันต์ที่ 2.67 ในกรณีที่ 2.5 ทำให้จัดสมการที่ 2.71 ได้ใหม่ดังสมการที่ 2.72

โดย  $A = \frac{a}{z}$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \quad \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \quad (2.72)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |a| < |z| \quad (2.73)$$

ค่า ROC ทุกๆค่า  $z$  ที่มากกว่า  $a$

เช่นกรณีที 2.7 จงหา z-transform ของสัญญาณ  $x(n) = \sin(n\omega T)u(n)$

วิธีการ จากสมการ  $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$  และ  $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

จากสมการที่ 2.52 จะได้  $X(z)$  ดังสมการที่ 2.74

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{jn\omega T} - e^{-jn\omega T}}{2j} \right) z^{-n} \quad (2.74)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega T} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn\omega T} z^{-n} \right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega T} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\omega T} z^{-1})^n \right) \quad (2.75)$$

จากสมการของอนุกรมอนันต์ที่ 2.67 ในกรณีที 2.5 ทำให้จัดสมการที่ 2.75 ใ้ใหม่ดังสมการที่ 2.76

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} \right) - \left( \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \right] \quad (2.76)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \right) - \left( \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \right]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{(z^2 - ze^{-j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} - \frac{(z^2 - ze^{j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right] \quad (2.77)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{(ze^{j\omega T} - ze^{-j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right]$$

$$X(z) = \frac{z}{2j} \left[ \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{z^2 - ze^{j\omega T} - ze^{-j\omega T} + e^{j\omega T}e^{-j\omega T}} \right]$$

$$X(z) = \frac{z}{2j} \left[ \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right]$$

$$X(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad (2.78)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.10 คุณสมบัติของการแปลงแซด [5,6]

### 2.10.1 คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น (Linearity Property)

แสดงดังสมการที่ 2.79

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (2.79)$$

### 2.10.2 คุณสมบัติการเลื่อน (Shift Property)

กำหนดให้  $y(n) = x(n-m) \quad m \geq 0$

การแปลงแซดของ  $y(n) = Y(z)$  เขียนแทนได้ ดังสมการที่ 2.80 และ 2.81

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (2.80)$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \quad (2.81)$$

กำหนดให้ระบบที่กำลังพิจารณาเป็นระบบแบบคอซอล ดังนั้นสมการที่ (2.81) สามารถเขียนได้ใหม่ดังสมการที่ 2.82 - 2.85

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \quad (2.82)$$

$$Y(z) = z^{-m} [x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(n)z^{-n}] \quad (2.83)$$

$$Y(z) = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.84)$$

$$Y(z) = X(z)z^{-m} \quad (2.85)$$

### 2.10.3 คุณสมบัติการประสาน (Convolution Property)

จากสมการผลการประสาน

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.86)$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (2.87)$$

ทำการแปลงแซด  $x(n)$ ,  $h(n)$  ให้เป็น  $X(z)$ ,  $H(z)$  จะได้การประสาน ดังสมการที่ 2.88

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.88)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งผลการแปลงแซคของฟังก์ชันสัญญาณไม่ต่อเนื่อง ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ผลของการแปลงแซค

Entry number	Discrete-time Sequence	$z$ -transform $X(z)$	Region of convergence of $X(z)$
1	$\delta[n]$	1	All $z$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
3	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
4	$\delta[n-m]$	$z^{-m}$	All $z$ except 0 (if $m > 0$ ) or $\infty$ (if $m < 0$ )
5	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
7	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
8	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
9	$[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
10	$[\sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
11	$[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
12	$[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
13	$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z  > 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.11 การแปลงแซดในรูปเศษส่วน [4-6]

สัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง  $x(n)$  หรือระบบแบบไม่ต่อเนื่อง  $y(n)$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูป  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  ได้โดยการแปลงแซด ค่า  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  นี้เมื่อจัดให้อยู่ในรูปเศษส่วน (Rational) สามารถบอกรายละเอียดคุณลักษณะของสัญญาณและระบบได้

### 2.11.1 โพลและซีโร่ (Pole and Zero)[6,10-11]

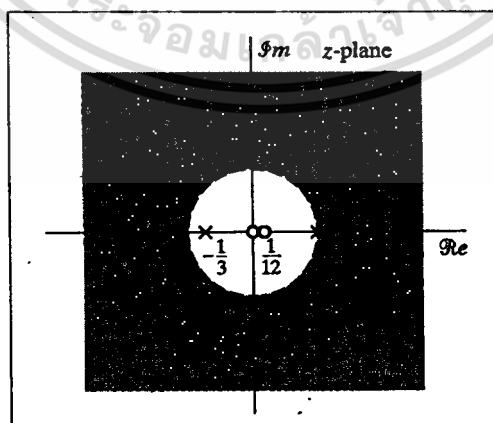
เป็นการนำค่า  $X(z)$  หรือ  $Y(z)$  ไปแก้สมการหาค่า  $z$  และนำคำตอบของ  $z$  ไป Plot ลงในระนาบแซดเชิงซ้อน (Complex  $z$  plane) ค่า  $z$  ที่เป็นคำตอบของเศษเรียกว่า ซีโร่ แทนด้วยสัญลักษณ์  $\circ$  ค่า  $z$  ที่เป็นคำตอบของส่วนเรียกว่า โพล แทนด้วยสัญลักษณ์  $\times$  เช่นการหาค่าแห่ง โพลและซีโร่ของสัญญาณ

เช่นกรณีที่ 2.8 จงเขียน Pole-Zero ของระบบ  $H(z) = \frac{12 - z^{-1}}{6 - z^{-1} - z^{-2}}$

วิธีการ จากสมการ  $H(z)$  ที่โจทย์กำหนดมาให้สามารถจัดสมการใหม่ได้ดังสมการที่ 2.89

$$H(z) = \frac{2z(z - \frac{1}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} \quad (2.89)$$

จากสมการที่ 2.89 พบว่า Zero จะอยู่ที่ตำแหน่ง 0 และ  $\frac{1}{12}$  ส่วน Pole นั้นจะอยู่ที่ตำแหน่ง  $\frac{1}{2}$  และ  $-\frac{1}{3}$  นำไปเขียนลงระนาบ  $z$  ดังภาพที่ 2.9



ภาพที่ 2.9 Pole-zero Plot ของระบบในกรณีที่ 2.8

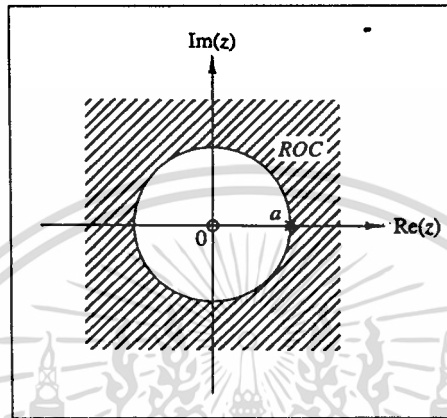
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่นกรณี 2.9 จงหา Plot-zero Plot ของสัญญาณ  $x(n) = a^n u(n)$  ;  $a > 0$

วิธีการ จากตารางที่ 2.1 z-transform ของ  $x(n)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.90

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (2.90)$$

นำไปเขียนลง z-plane ได้ดังภาพที่ 2.10



ภาพที่ 2.10 Pole-zero Plot ของระบบในกรณี 2.9

เช่นกรณี 2.10 จงหา Plot-zero Plot ของสัญญาณ

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

วิธีการ จากที่โจทย์กำหนดพบว่า  $n$  เริ่มต้นจาก 0 ถึง  $M-1$  จะได้สมการ z-transform ดังสมการที่ 2.91

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a^n z^{-n} \quad (2.91)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n \quad (2.92)$$

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{z}\right)^{M-1} \quad (2.93)$$

จัดสมการที่ 2.93 ได้ใหม่ [12] ดังสมการที่ 2.94

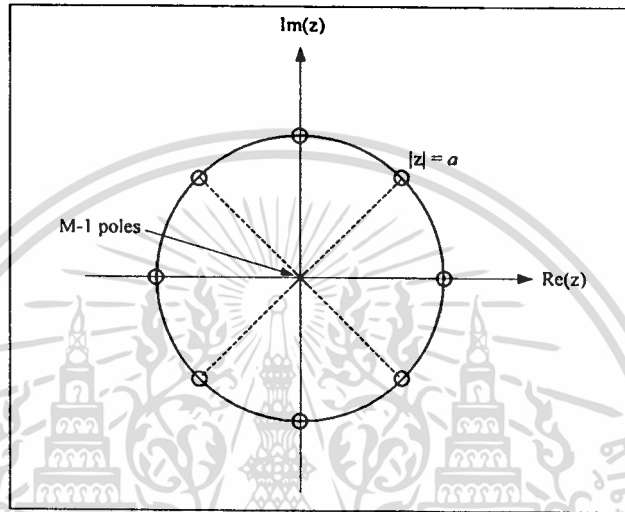
$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}} \quad (2.94)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ  $z^M$  คูณตลอดทั้งเศษและส่วน

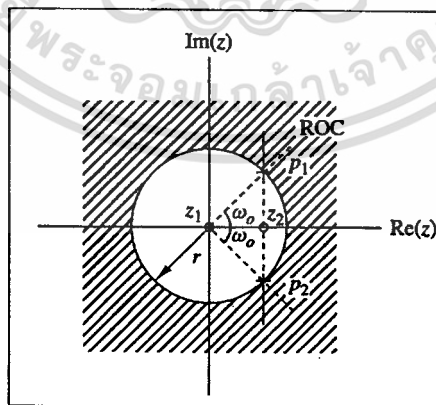
$$X(z) = \frac{z^M - a^M}{z^M - az^{M-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)} \quad (2.95)$$

นำสมการที่ 2.95 เฉพาะเศษมาเขียนเป็น Zero และเฉพาะส่วนมาเขียนเป็น Pole ดังภาพที่ 2.11



ภาพที่ 2.11 ตำแหน่งการวาง Zero และ Pole ของกรณีที่ 2.10

เช่นกรณีที่ 2.11 จงหาสัญญาณ  $x(n)$  จากระนาบ  $z$  ดังภาพที่ 2.12



ภาพที่ 2.12 ตำแหน่งการวาง Zero และ Pole ของกรณีที่ 2.11

**วิธีการ** จากภาพที่ 2.12 พบว่ามี Zero อยู่ 2 ตัว โดย  $z_1$  อยู่ที่จุด Origin หรืออยู่ที่ตำแหน่ง 0 ส่วน  $z_2$

อยู่ที่ตำแหน่ง  $r \cos(\omega_0)$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.96 และ 2.97

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z_1 = 0 \quad (2.96)$$

$$Z_2 = r \cos(\omega_0) \quad (2.97)$$

สำหรับ Pole จากภาพที่ 2.12 มีอยู่ 2 ตัวโดย  $P_1$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $re^{j\omega_0}$  ส่วน  $P_2$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $re^{-j\omega_0}$  เขียนได้ดังสมการที่ 2.98 และสมการที่ 2.99

$$P_1 = re^{j\omega_0} \quad (2.98)$$

$$P_2 = re^{-j\omega_0} \quad (2.99)$$

จากสมการที่ 2.96-2.99 นำไปเขียนเป็น  $X(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.100 และ 2.101

$$X(z) = G \frac{(z - Z_1)(z - Z_2)}{(z - P_1)(z - P_2)} \quad (2.100)$$

$$X(z) = G \frac{(z - 0)(z - r \cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \quad (2.101)$$

เมื่อ  $G$  เป็นค่าคงที่ จัดสมการที่ 2.101 ได้ใหม่ดังสมการที่ 2.102

$$X(z) = G \left[ \frac{z(z - r \cos(\omega_0))}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})} \right]$$

$$X(z) = G \left[ \frac{1 - rz^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1} \cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}} \right] \quad (2.102)$$

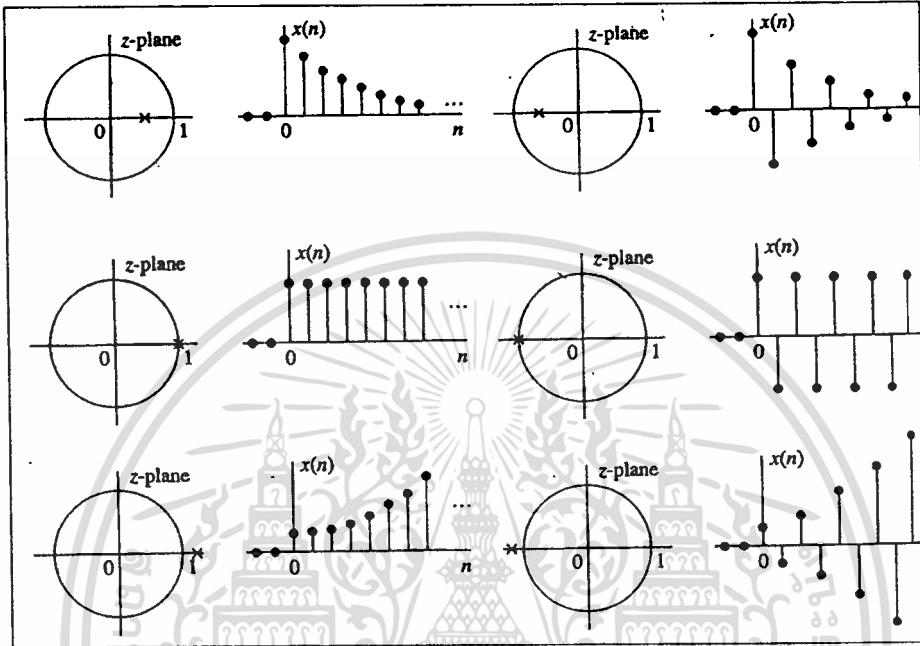
และจากตารางที่ 2.1 (ข้อที่ 11) z-transform ของสมการที่ 2.102 สามารถแปลงเป็น  $x(n)$  ได้ดังสมการที่ 2.103

$$x(n) = G[r^n \cos(\omega_0 n)u(n)] \quad (2.103)$$

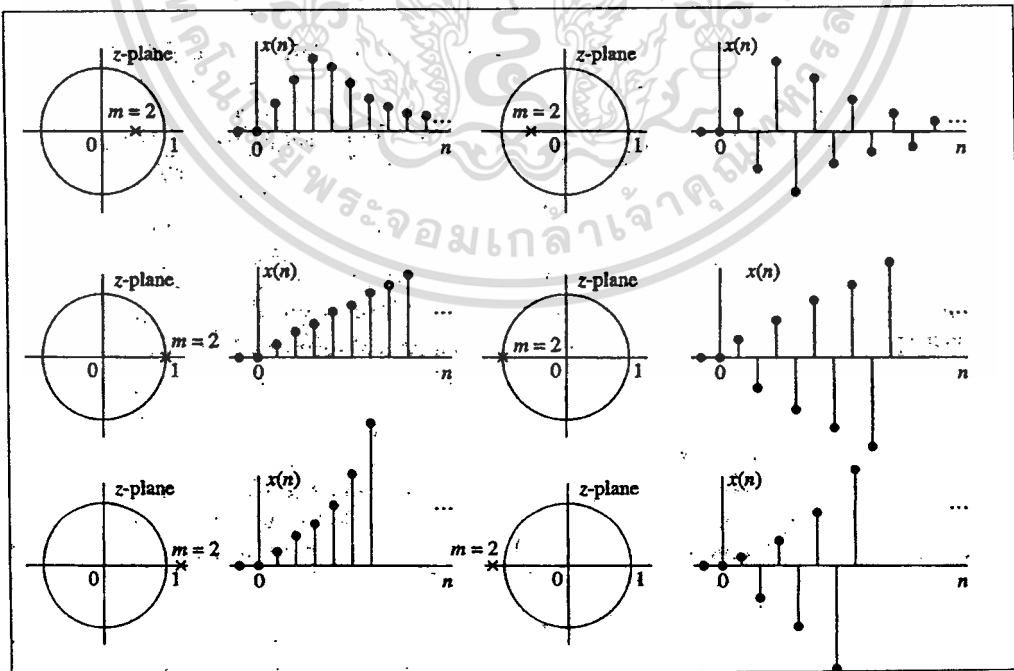
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.11.2 ลักษณะสัญญาณกับการวางตำแหน่งของโพล

ตำแหน่งของโพล ในระนาบซัด สามารถบ่งบอกลักษณะของลำดับสัญญาณใน Time-domain ได้ ซึ่งลักษณะของลำดับสัญญาณที่เกิดขึ้นสามารถคำนวณได้จากการแปลงซัดผกผัน (Inverse z-transform) และแสดงได้ดังภาพที่ 2.13

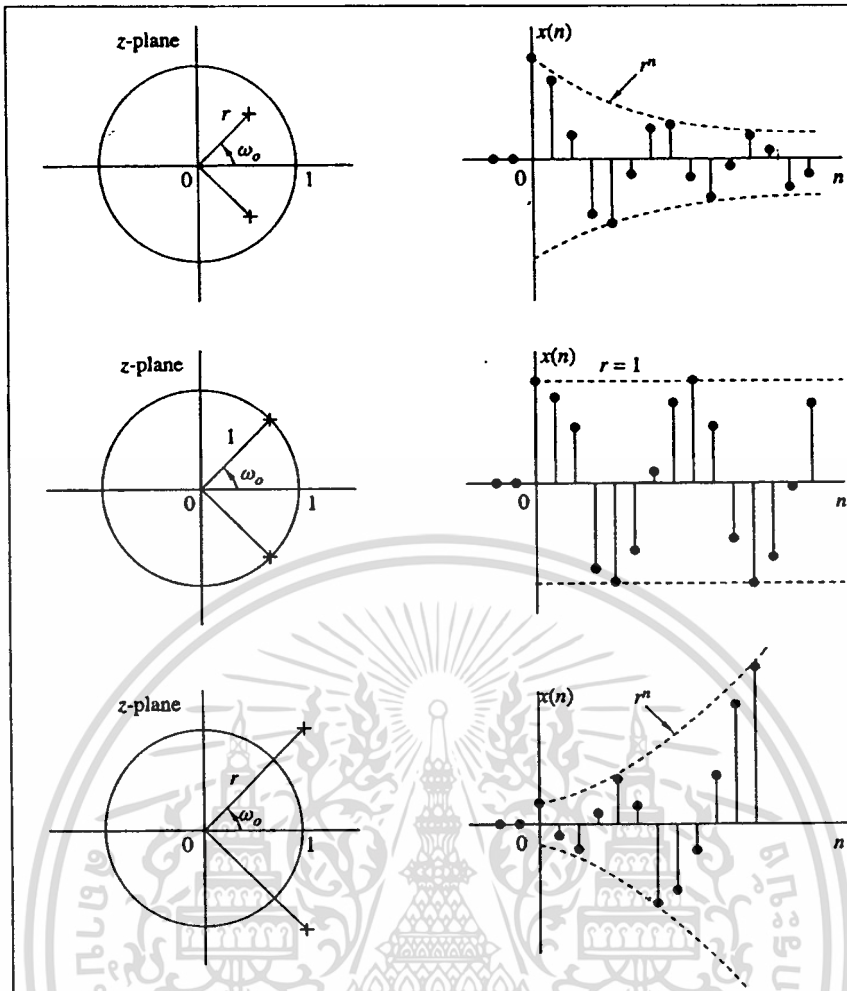


ภาพที่ 2.13(a) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

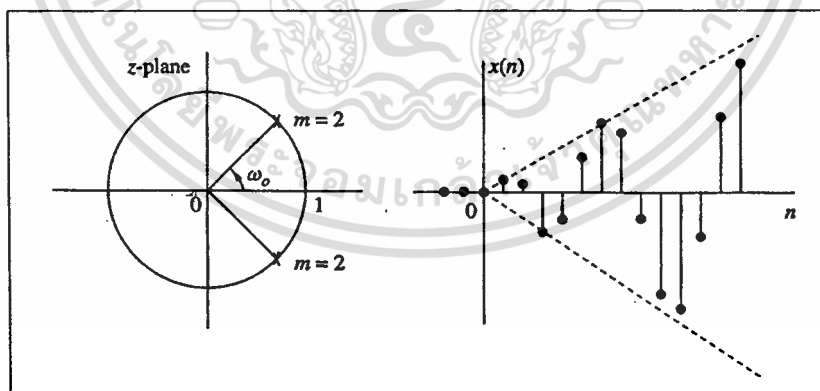


ภาพที่ 2.13(b) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.13(c) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ



ภาพที่ 2.13(d) ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของโพลกับลำดับสัญญาณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.12 ฟังก์ชันระบบของระบบเชิงเส้นที่แปรตามเวลา

ในการหาผลตอบสนองทาง Output ของระบบที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาสามารถกระทำได้โดยใช้หลักการ Convolution ซึ่งการหาจะต้องทราบค่าของ  $x(n)$  และ  $h(n)$  แต่จากคุณสมบัติของการแปลงแซดทำให้การหาผลตอบสนองทาง Output หาได้จากสมการที่ 2.104

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.104)$$

เมื่อ  $Y(z)$  คือ การแปลงแซดของ Output sequence  $y(n)$

$X(z)$  คือ การแปลงแซดของ Input sequence  $x(n)$

$H(z)$  คือ การแปลงแซดของ Unit sample response  $h(n)$

ดังนั้นถ้ารู้ค่า  $x(n)$  และ  $h(n)$  ก็สามารถหาค่า  $X(z)$  และ  $H(z)$  ได้โดยการแปลงแซด และเมื่อนำมาคูณกันดังสมการที่ 2.104 ก็จะได้  $Y(z)$  และสามารถหาค่า  $y(n)$  ได้โดยการแปลงแซดผกผัน  $Y(z)$  และในทางกลับกันถ้ารู้ค่า  $x(n)$  และ  $y(n)$  ก็สามารถหาค่า  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.105

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.105)$$

เพื่อความชัดเจนจะเห็นได้ว่าคุณสมบัติของระบบนั้นอธิบายได้ 2 ลักษณะคือ  $h(n)$  และ  $H(z)$  โดย  $h(n)$  นั้นจะอธิบายถึงคุณสมบัติของระบบในโดเมนเวลา ส่วน  $H(z)$  จะอธิบายถึงคุณสมบัติในโดเมนแซด ซึ่งแท้ที่จริงแล้ว  $H(z)$  และ  $h(n)$  นั้นเหมือนกันเพียงแต่อยู่กันคนละโดเมน และโดยทั่วไปจะเรียก  $H(z)$  ในสมการที่ 2.105 ว่า ฟังก์ชันระบบ (System function) หรือ ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer Function)

สำหรับระบบที่เป็นแบบเชิงเส้นและมีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ (Linear Constant-coefficient Difference Equation) ดังสมการที่ 2.106 สามารถใช้คุณสมบัติของการแปลงแซดเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.107

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.106)$$

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z)z^{-k}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y(z) \left( 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X(z) \left( \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.107)$$

และระบบที่เป็นแบบ Non-recursive ดังสมการที่ 2.108 สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังสมการที่ 2.109

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k) x(n-k) \quad (2.108)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M h(k) X(z) z^{-k}$$

$$Y(z) = X(z) \left( \sum_{k=0}^M h(k) z^{-k} \right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M h(k) z^{-k} \quad (2.109)$$

เช่นการหาฟังก์ชันระบบและผลตอบสนองของ Unit sample กำหนดให้ระบบแบบไม่ต่อเนื่องมีสมการผลต่างดังสมการที่ 2.110

$$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + 2x(n) \quad (2.110)$$

ใช้ z-transform แปลงสมการที่ 2.110 และจัดสมการได้ฟังก์ชันระบบดังสมการที่ 2.111

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + 2X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2.111)$$

ส่วนผลตอบสนองของ Unit sample หาได้จากสมการที่ 2.112

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} X(z) \quad (2.112)$$

เมื่อ Input ของระบบ  $x(n) = \delta(n)$  ดังนั้น  $X(z) = 1$  จะได้  $Y(z)$  ดังสมการที่ 2.113

$$Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (2.113)$$

จากตารางที่ 2.1 สามารถแปลง  $Y(z)$  ให้เป็น  $y(n)$  (ใช้สูตรที่ 5) ดังสมการที่ 2.114

$$y(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (2.114)$$

### 2.13 ผลตอบสนองความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา [5,6]

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(z)$  ดังสมการที่ 2.115

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots} \quad (2.115)$$

ในการหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบแบบไม่ต่อเนื่องนั้นจะแทน  $z = e^{j\omega}$  ลงใน  $H(z)$  ดังสมการที่ 2.115

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-2j\omega} + \dots}{1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-2j\omega} + \dots}$$

$$H(\omega) = H_R(\omega) + H_I(\omega) \quad (2.116)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเห็นว่าสมการที่ 2.116 จะประกอบด้วยค่าที่เป็นจำนวนจริงและค่าที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งในการหาผลตอบสนองทางความถี่จะแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ลักษณะคือ

### 2.13.1 ผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude Response)

คำนวณได้โดยการหาค่าสัมบูรณ์ของสมการที่ 2.116 เขียนได้ดังสมการที่ 2.117

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \quad (2.117)$$

### 2.13.2 ผลตอบสนองทางเฟส (Phase Response)

คำนวณได้จากสมการที่ 2.118 ซึ่งผลตอบสนองทางเฟสจะถูกแทนด้วย  $\Theta(\omega)$  หรือ  $\angle H(\omega)$

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \quad (2.118)$$

เช่นการหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบไม่ต่อเนื่องดังสมการที่ 2.119

$$H(z) = \frac{1+z}{z} \quad (2.119)$$

กำหนดให้  $z = e^{j\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1+e^{j\omega}}{e^{j\omega}} = \frac{1}{e^{j\omega}} + 1 \quad (2.120)$$

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega} \quad (2.120)$$

และจากสมการ  $re^{j\omega} = r \cos(\omega) + jr \sin(\omega)$  ดังนั้นสมการที่ 2.120 สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการที่ 2.121

$$H(\omega) = 1 + [\cos(-\omega) + j \sin(-\omega)]$$

$$H(\omega) = 1 + \cos(\omega) - j \sin(\omega) \quad (2.121)$$

จากสมการที่ 2.121 จะพบว่าส่วนที่เป็นจำนวนจริงคือ  $H_R(\omega) = 1 + \cos(\omega)$  และส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ  $-\sin(\omega)$  ดังนั้นผลตอบสนองทางขนาดจะมีค่าดังสมการที่ 2.122

$$|H(\omega)| = \sqrt{[1 + \cos(\omega)]^2 + [-\sin(\omega)]^2}$$

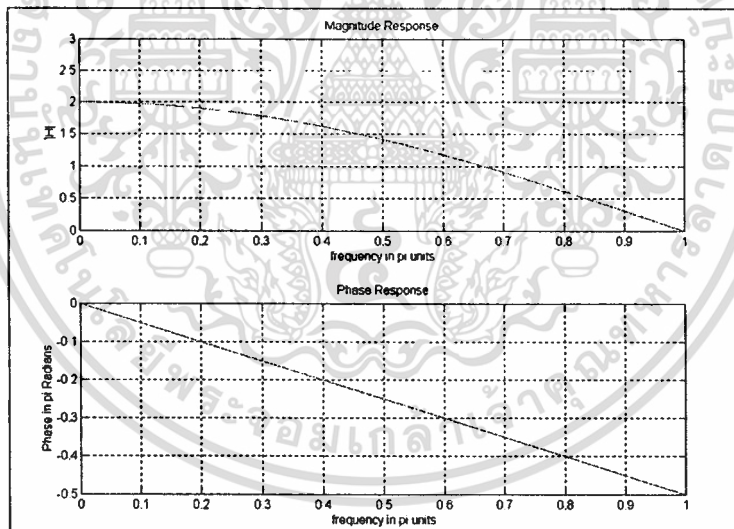
$$|H(\omega)| = \sqrt{1 + 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{2 + 2\cos(\omega)} \quad (2.122)$$

และผลตอบสนองทางเฟสเขียนได้จากสมการที่ 2.118 โดยนำค่าจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนจากสมการที่ 2.121 แสดงได้ดังสมการที่ 2.123

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{-\sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)} \quad (2.123)$$

และจากสมการที่ 2.123 และ 2.124 เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า  $\omega$  ในช่วง  $0-\pi$  ทำให้เขียนกราฟผลตอบสนองความถี่ได้ดังภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ  $H(z) = \frac{z+1}{z}$

เช่นการหาผลตอบสนองความถี่จากสมการผลต่าง

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) \quad (2.124)$$

สมการที่ 2.124 สามารถแปลงให้เป็น  $H(z)$  ได้ดังสมการที่ 2.125

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Y(z) = 0.9Y(z)z^{-1} + X(z)$$

$$Y(z) - 0.9Y(z)z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)[1 - 0.9z^{-1}] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad (2.125)$$

แทนค่า  $z = e^{j\omega}$  ลงในสมการที่ 2.125

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$

พิจารณาเฉพาะส่วน

$$1 - 0.9e^{-j\omega} = (1 - 0.9\cos\omega) + j0.9\sin\omega$$

มีค่าสัมบูรณ์ดังสมการที่ 2.126 และมีมุมดังสมการที่ 2.127

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 - 0.9\cos\omega)^2 + (0.9\sin\omega)^2}$$

$$|1 - 0.9e^{-j\omega}| = \sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.126)$$

$$\angle(1 - 0.9e^{-j\omega}) = \tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1 - 0.9\cos\omega} \quad (2.127)$$

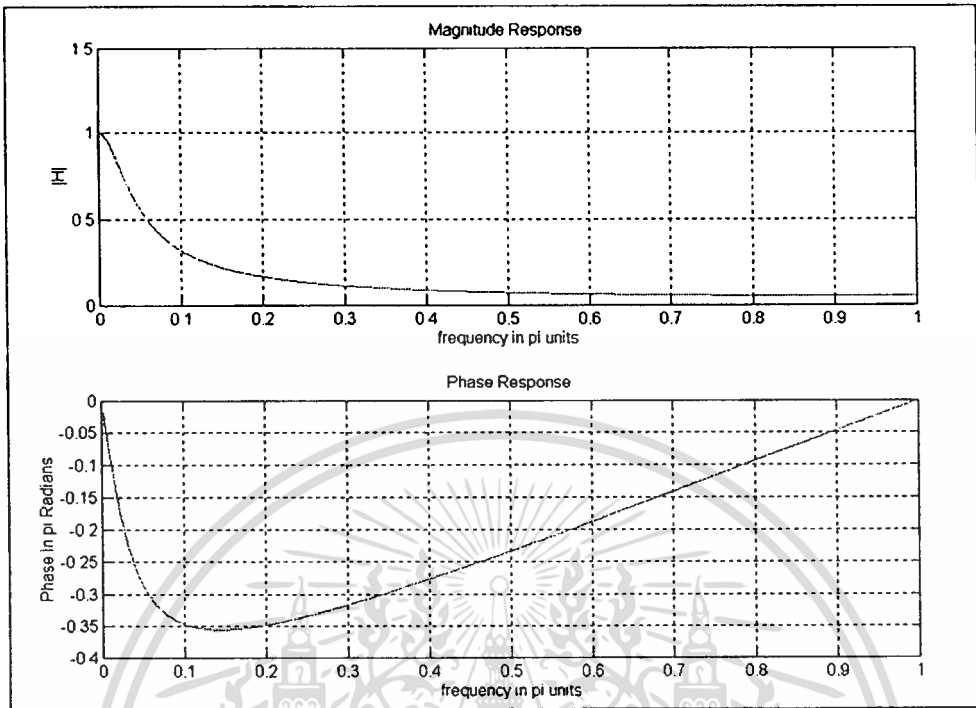
ดังนั้นสมการที่ 2.124 จะมีค่า Magnitude Response ดังสมการที่ 2.128 และมี Phase Response ดังสมการที่ 2.129

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.81 - 1.8\cos\omega}} \quad (2.128)$$

$$\Theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{0.9\sin\omega}{1.81 - 1.8\cos\omega} \quad (2.129)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

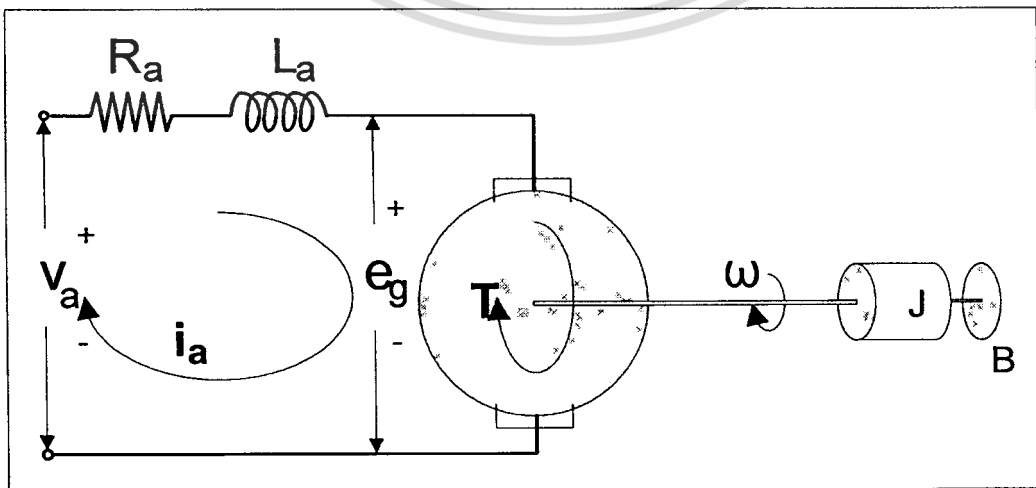
นำไปเขียนเป็นกราฟผลตอบสนองความถี่ได้ดังภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ  $y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$

2.14 รูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง[8,10]

พิจารณามอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงดังที่แสดงในภาพที่ 2.16 ที่สมมุติให้สนามกระแส  $i_f$  เป็นค่าคงที่ และแรงดัน  $v_a$  เป็นกระแสที่ได้จากอาร์มาเจอร์ ซึ่งมีความต้านทาน  $R_a$  และมีภาระเหนี่ยวนำเพียงเล็กน้อย ผลที่ได้จากการใส่ค่า  $v_a$  จะทำให้อาร์เมเจอร์หมุน ความสัมพันธ์ระหว่าง  $v_a$  และ  $\omega$  สามารถอธิบายได้จากสมการดังนี้



ภาพที่ 2.16 รูปจำลองทางไฟฟ้าของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

จากภาพที่ 2.16 เมื่อ

- $v_a$  : Armature Voltage.
- $e_g$  : Back EMF.
- $i_a$  : Armature Current.
- $T$  : Torque Produced by Motor.
- $\omega$  : Angular Velocity of Motor Shaft.
- $R_a$  : Armature Resistance.
- $L_a$  : Armature Inductance.
- $J$  : Moment of Inertia of Motor Shaft.
- $B$  : Coefficient of Viscous Friction.

นอกจากนี้ตัวแปรที่ไม่แสดงในภาพที่ 2.16 คือ

- $K_T$  : Torque Constant.
- $K_b$  : Back EMF Constant.
- $\theta$  : Angular Position of Motor shaft.

จากภาพที่ 2.16 สามารถแสดงความสัมพันธ์ของกระแส และแรงดันของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงได้ดังนี้

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_g \quad (2.130)$$

ซึ่ง  $e_g$  คือ แรงดันที่เกิดขึ้นภายในตัวมอเตอร์ซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วของมอเตอร์ ( $\omega$ ) คือ

$$e_b = K_b \omega \quad (2.131)$$

ดังนั้นสามารถเปลี่ยนสมการที่ 2.130 ได้เป็น

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega \quad (2.132)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ 2.132 จะแสดงความสัมพันธ์ของกระแส แรงดันของอาร์มเจอร์และความเร็วของเพลาอาร์มเจอร์ เมื่อเส้นแรงของฟลักซ์เป็นชนิดค่าคงที่ แรงบิดของแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดขึ้นแก่ โรเตอร์ (Rotor) ของมอเตอร์จะเป็นสัดส่วนกับกระแสอาร์มเจอร์ดังนี้[A1]

$$T = K_T i_a \quad (2.133)$$

$T$  คือ แรงบิดที่เกิดขึ้นในมอเตอร์

$K_T$  คือ ค่าคงที่ของแรงบิดมอเตอร์

ส่วนแรงบิดของมอเตอร์ที่ได้จากโหลดที่ต่ออยู่กับเพลามอเตอร์ สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (2.134)$$

กำหนดให้ไม่มีการสูญเสียเกิดขึ้นกับมอเตอร์ ดังนั้นแรงบิดทางไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับแรงบิดทางกล ดังนั้นจะสามารถจัดสมการที่ 2.133 และ 2.134 ใหม่ได้ดังสมการที่ 2.135

$$K_T i_a = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (2.135)$$

สมการที่ 2.132 และสมการที่ 2.135 นำมาจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลได้ดังสมการที่ 2.136 และ 2.137

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{Ri_a}{L_a} - \frac{K_b\omega}{L_a} + \frac{e_a}{L_a} \quad (2.136)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_T i_a}{J} - \frac{B\omega}{J} \quad (2.137)$$

จากนั้นนำสมการที่ 2.136 และ 2.137 จัดให้อยู่ในรูปสเตตสเปซแบบต่อเนื่อง (Continuous State Space) ได้ดังสมการที่ 2.138 และ 2.139

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} e_a \quad (2.138)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{so}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

และเมื่อนำสมการที่ 2.138 มาจัดให้อยู่ในรูปสมการสถานะ (State Equation) จะทำให้ได้ค่าของตัวแปรสถานะที่อยู่ในเมตริก **A** และ เมตริก **B** ดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L_a} & \frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & \frac{B}{J} \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3

### ตัวกรองดิจิทัล

#### 3.1 ตัวกรองตัวกรองกาลมาน (Kaman filter)[9,10]

ตัวกรองกาลมานที่ใช้กันสามารถแบ่งออกเป็น 3 แบบ คือ

1. ตัวกรองกาลมานต่อเนื่อง (Continuous Kalman Filter, CKD)
2. ตัวกรองกาลมานต่อเนื่องเป็นช่วง (Continuous Discrete Kalman filter, CDKF)
3. ตัวกรองกาลมานแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Kalman, DKF)

ในที่นี้จะเริ่มต้นจะพิจารณาการประมาณค่าของปริมาณสเกลาร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ก่อน โดยให้  $x$  เป็นปริมาณสเกลาร์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาซึ่งมีสัญญาณรบกวนที่มีการแจกแจงเกาส์เจ็ลลีเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนเท่ากันกระทำอยู่ ให้  $n$  เป็นจำนวนครั้งของการวัด ดังนั้นการประมาณค่าที่ดีที่สุดที่สามารถหาค่าเฉลี่ยของ  $x$  และในการวัดแต่ละครั้งเป็น  $\hat{y}_i$  ซึ่งการประมาณค่าที่ดีที่สุดหลังจากวัดจำนวน  $n$  ครั้งเป็น  $\hat{x}_n$  เขียนได้ดังสมการที่ 3.1

$$\hat{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \quad (3.1)$$

จัดรูปสมการที่ 3.1 เป็นสมการที่ 3.2

$$n\hat{x}_n = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \quad (3.2)$$

จากสมการที่ 3.2 แทนค่า  $n$  ด้วย  $n+1$  ได้ดังสมการที่ 3.3

$$(n+1)\hat{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{y}_i \quad (3.3)$$

$$= \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \hat{y}_i + \hat{y}_{n+1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และส่งอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= nx_n + \hat{y}_{n+1} \quad (3.4)$$

จากสมการที่ 3.4 จัดรูปใหม่ได้ดังสมการที่ 3.5

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \hat{x}_n + \frac{\hat{y}_{n+1}}{n+1} \quad (3.5)$$

ให้นำ  $-\frac{x_{n+1}}{n+1}$  และ  $+\frac{x_{n+1}}{n+1}$  บวกกับสมการที่ 3.5 เขียนการประมาณค่าใหม่ได้ดังสมการที่ 3.6

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \hat{x}_n + \frac{\hat{y}_{n+1}}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{n+1} - \frac{x_{n+1}}{n+1}$$

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{(n+1)x_{n+1} + \hat{y}_{n+1} - x_{n+1}}{n+1}$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} [\hat{y}_{n+1} - \hat{x}_n] \quad (3.6)$$

จากสมการที่ 3.6 ทำให้ได้ประมาณค่าใหม่  $\hat{x}_{n+1}$  จากการประมาณค่าเดิม  $\hat{x}_n$  บวกกับผลต่างระหว่างค่าที่วัดได้ใหม่  $\hat{y}_{n+1}$  กับการประมาณค่าเดิม  $\hat{x}_n$  และคูณกับเฟกเตอร์  $\frac{1}{n+1}$  ซึ่งในการเปลี่ยนแปลงการประมาณค่าใหม่จากการตรวจสอบการประมาณค่าเป็นแนวความคิดของกาลมานเมื่อพิจารณาลักษณะของการเปลี่ยนแปลงตามเวลา พบว่าปริมาณสเกลค่า  $x$  ไม่ต่อเนื่องกับเวลา โดยสมมุติมีการเปลี่ยนแปลงปริมาณ  $x$  จากการวัดลำดับที่  $n$  เป็นลำดับที่  $n+1$  เขียนได้ดังสมการที่ 3.7

$$x_{n+1} = \Phi_n x_n + w_n \quad (3.7)$$

ให้  $w_n$  มีค่าการแจกแจงเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมีผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงไม่แน่นอนกับการเปลี่ยนแปลงเวลาของปริมาณ  $x$  เขียนแทนด้วย  $\Phi_n$  และ  $w_n$  คือ สัญญาณรบกวนระบบ (Process Noise) เมื่อต้องการหาประมาณค่าของลำดับที่  $n$  แทนด้วย  $x_n$  จากการประมาณค่า  $\hat{x}_n$  นั้น การประมาณค่าที่ดีที่สุดของลำดับที่  $n$  แทนด้วย  $\hat{x}_{n+1}$  ได้จากการประมาณค่าก่อนลำดับที่  $n+1$  แทนด้วย  $\hat{x}_{n+1}$  ดังสมการที่ 3.8

$$\hat{x}_{n+1} = \Phi_n \hat{x}_n \quad (3.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้การประมาณค่า  $\hat{x}_n$  มีความแปรปรวนดังสมการที่ 4.18 โดยที่ค่าความแปรปรวนของ  $\hat{x}_{n+1}$  เป็น  $\Phi_n^2 P_n$  จากจุดเริ่มต้นของ  $\hat{x}_n$  และความแปรปรวนของการรบกวนดังสมการที่ 3.9 ดังนั้นเขียนความแปรปรวนประมาณค่า  $\hat{x}_{n+1}$  ดังสมการที่ 3.11

$$P_n = E\{(\hat{x}_n - x_n)^2\} \quad (3.9)$$

$$Q_n = E\{w_n^2\} \quad (3.10)$$

$$P_{n+1} = \Phi_n^2 P_n + Q_n \quad (3.11)$$

สมการการวัดสเกลล่า  $y_{n+1}$  เป็นเชิงเส้นตาม  $\hat{x}_{n+1}$  ได้รับความสัมพันธ์ดังสมการที่ 3.12 และให้การวัดจริงดังสมการที่ 3.13

$$y_{n+1} = H_{n+1} x_{n+1} \quad (3.12)$$

$$y_{n+1} = H_{n+1} x_{n+1} + v_{n+1} \quad (3.13)$$

จากสมการที่ 3.13 ให้  $v_{n+1}$  เป็นการรบกวนจากการวัดที่มีค่าการแจกแจงเฉลี่ยเป็นศูนย์ ความแปรปรวนของการวัดหาได้จากสมการที่ 3.14

$$R_{n+1} = E\{v_{n+1}^2\} \quad (3.14)$$

การประมาณค่าลำดับที่  $n+1$  มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้น ขณะไม่แปรตามกับเวลาได้ดังสมการที่ 3.15

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + K_{n+1} [y_{n+1} - H_{n+1} \hat{x}_n] \quad (3.15)$$

หาค่าอัตราขยายกาลามานโดยหาค่าความแปรปรวน  $P_{n+1}$  ต่ำสุดของ  $\hat{x}_{n+1}$  ที่เกิดขึ้นไม่แน่นอนจากสมการที่ 3.15 ถ้าให้  $\Delta$  แทนการเปลี่ยนแปลงตัวแปรเขียนการเปลี่ยนแปลง  $\hat{x}_{n+1}$  ดังสมการที่ 3.14 และความแปรปรวน  $P_{n+1}$  ที่ได้จากสมการที่ 3.16 ได้ดังสมการที่ 3.17

$$\Delta \hat{x}_{n+1} = (1 - K_{n+1} H_{n+1}) \Delta \hat{x}_n + K_{n+1} \Delta y_{n+1} \quad (3.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการแข่งขันเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_{n+1} = (1 - K_{n+1}H_{n+1})^2 P_{n+1} + K_{n+1}^2 R_{n+1} \quad (3.17)$$

ดิฟเฟอเรนเชียลสมการที่ 3.17 เทียบกับ  $K_{n+1}$  ดังสมการที่ 3.18

$$\frac{\partial P_{n+1}}{\partial K_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial K_{n+1}} ((1 - K_{n+1}H_{n+1})^2 P_{n+1} + K_{n+1}^2 R_{n+1}) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial K_{n+1}} ((1 - 2K_{n+1}H_{n+1} + K_{n+1}^2 H_{n+1}^2) P_{n+1} + K_{n+1}^2 R_{n+1}) \\ &= (-2H_{n+1} + 2K_{n+1}H_{n+1}^2) P_{n+1} + 2K_{n+1} R_{n+1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

เทียบสมการที่ 3.19 เท่ากับศูนย์ เพื่อหาค่าอัตราขยายคาถมาน  $K_{n+1}$  ได้ดังสมการที่ 3.20

$$K_{n+1} = \frac{P_{n+1} H_{n+1}}{(H_{n+1}^2 P_{n+1} + R_{n+1})} \quad (3.20)$$

และค่าของความแปรปรวนที่เกิดขึ้นในลำดับที่  $n+1$  หาได้จากสมการที่ 3.21

$$P_{n+1} = (1 - K_{n+1}H_{n+1}) P_n \quad (3.21)$$

เมื่อระบบการวัดไม่เป็นเชิงเส้นแล้วสมการที่ 3.21 จะใช้สมการที่ 3.22 หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของการประมาณค่า ซึ่งสมการนี้เรียกว่า เอ็กเทนเดด คาลมาน (Extended Kalman)

$$\Delta \hat{x}_{n+1} = (1 - K_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} H(x_{n+1})) \Delta \hat{x}_{n+1} + K_{n+1} \Delta y_{n+1} \quad (3.22)$$

### 3.2 ตัวกรองกาลมานไม่ต่อเนื่อง(Discrete Kalman,DKF)[9,10]

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะตัวกรองกาลมานไม่ต่อเนื่องเท่านั้น เพราะตัวกรองกาลมานแบบไม่ต่อเนื่องมีความคลาดเคลื่อนความแปรปรวนร่วมน้อยกว่าตัวกรองกาลมานต่อเนื่อง และ ค่าเฉลี่ยดีกว่าแบบตัวกรองกาลมานต่อเนื่องเป็นช่วงตัวกรองกาลมานเป็นการหาค่าประมาณที่ดีที่สุดให้ระบบเชิงเส้นสโตคาสติกไม่ต่อเนื่องถูกควบคุมด้วยระบบไดนามิกดังสมการที่ 3.23

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \quad (3.23)$$

ให้ระบบการวัด ดังสมการที่ 3.24

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad (3.24)$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนร่วม ของระบบและของระบบการวัดได้ดังสมการที่ 3.25

$$E[\mathbf{w}] = 0, E[\mathbf{v}] = 0, E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = \mathbf{Q}, E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R}, E[\mathbf{w}\mathbf{v}^T] = 0 \quad (3.25)$$

สำหรับการหาค่าประมาณค่าที่ดีที่สุดของสถานะ  $\mathbf{x}$  ปัจจุบันนั้นต้องอาศัยค่าจากอดีตทำการคูณกับสัมประสิทธิ์หรือได้มาจากความแปรปรวนร่วมของระบบ ซึ่งสามารถบอกสถานะที่เอาต์พุตได้ แต่การประมาณค่าก่อนสถานะหนึ่งจะเกิดขึ้นได้เมื่อมีการทราบคุณสมบัติทางไดนามิกและความแปรปรวนร่วมของระบบและการวัดก่อน สมมุติให้อินพุต  $\mathbf{x}$  เป็นสถานะ  $n$  ซึ่งทราบค่าของขบวนการไดนามิกของระบบ และให้สถานะก่อนหน้าแทนด้วย  $n-1$  ดังนั้นสามารถเขียนการประมาณค่าเอาต์พุตปัจจุบันจากสถานะอินพุตจากอดีต 1 ชั้น ดังสมการที่ 3.26

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1} \quad (3.26)$$

จากนั้นเพิ่มการวัดด้านเอาต์พุตที่สถานะปัจจุบัน กำหนดให้เป็น สถานะ  $n$  โดยกำหนดให้เป็นตัวแปร  $\mathbf{y}_n$  เรียกว่า เอาต์พุตที่สถานะ  $n$  อย่างไรก็ตามค่าที่เหมาะสมสำหรับรวมเอาการประมาณค่าและการวัดให้ได้โครงสร้างใหม่ที่ดีที่สุดของค่าจริง  $\mathbf{x}$  คือ ได้ดังสมการที่ 3.27

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n) \quad (3.27)$$

ในที่นี้จะทราบอย่างไรว่าเป็นค่าที่เหมาะสมของตัวกรองคาลมาน จำเป็นต้องหาค่าอัตราขยายคาลมานหรือค่า  $K$  ควรจะมีค่าเท่าไร ซึ่งจากการพิจารณาค่าของเมตริกซ์  $K$  ต้องเป็นพารามิเตอร์เปิดในตัวกรองแบบคาลมาน ดังนั้นจำเป็นจะต้องเลือกค่า  $K$  ให้มีความคลาดเคลื่อนประมาณค่าหลังต่ำสุด (ในค่าที่คาดหวัง) ซึ่งหาค่าได้ดังสมการที่ 3.28

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n \quad (3.28)$$

ในการหาค่าคาดหวังความแปรปรวนคลาดเคลื่อนต่ำสุดที่สภาวะปัจจุบันนั้นสามารถหาดังสมการที่ 3.29

$$E\{\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T\} = E\{(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T\} \quad (3.29)$$

แทนค่า  $\hat{\mathbf{x}}_n$  ด้วยสมการที่ 3.28 ในสมการที่ 3.29 ได้ดังสมการที่ 3.30

$$E\{\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T\} = E\{(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n - \mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n - \mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))^T\} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} &= E\{(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)^T\} + E\{(\mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))(\mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))^T\} \\ &\quad - E\{(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))^T\} + E\{(\mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n))(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

จากสมการที่ 3.29 แทน  $\tilde{\mathbf{P}}_n = E\{\tilde{\mathbf{e}}_n \tilde{\mathbf{e}}_n^T\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= \tilde{\mathbf{P}}_n + \mathbf{K}E\{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)^T\}\mathbf{K}^T - E\{(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)^T\}\mathbf{K}^T \\ &\quad - \mathbf{K}E\{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

แทนค่าในสมการที่ 3.32 ด้วยสมการที่ 3.24 จะได้ดังสมการที่ 3.33 – สมการที่ 3.35

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= \tilde{\mathbf{P}}_n + \mathbf{K}E\{(\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)^T\}\mathbf{K}^T \\ &\quad - E\{(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)^T\}\mathbf{K}^T - \mathbf{K}E\{(\mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$P_n = \bar{P}_n + KCE\{(x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)^T\}C^TK^T + KRK^T$$

$$-E\{(x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)^T\}C^TK^T - KCE\{(x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)^T\} \quad (3.34)$$

$$= \bar{P}_n + KC\bar{P}_nC^TK^T + KRK^T - \bar{P}_nC^TK^T - KC\bar{P}_n \quad (3.35)$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียลในสมการที่ 3.35 และเทียบสมการที่ได้จากการดิฟเฟอเรนเชียลเท่ากับ ศูนย์เพื่อหาค่าอัตราขยายกาลมาน

$$A = AxA^T, \frac{\partial A}{\partial x} = 2xA^T \quad (3.36)$$

จากสมการที่ 3.36 สามารถหาค่าสมการที่ 3.35 ได้ดังสมการที่ 3.37 และ สมการที่ 3.38

$$\frac{\partial E\{e_n e_n^T\}}{\partial K} = 2C\bar{P}_nC^TK^T + 2RK^T - C\bar{P}_n - (\bar{P}_nC^T)^T = 0$$

$$K^T = (C\bar{P}_nC^T + R)^{-1} C\bar{P}_n \quad (3.37)$$

$$K = \bar{P}_nC^T (C\bar{P}_nC^T + R)^{-1} \quad (3.38)$$

หาค่าการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนร่วมในสถานะ  $n$  หาได้จากสมการที่ 3.39

$$P_n = E\{e_n e_n^T\} \quad (3.39)$$

แทนค่า  $K$  เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรร่วมกับค่าอัตราขยายกาลมานในสถานะ  $n$  โดย แทนสมการที่ 3.35 ด้วยสมการที่ 3.36 ได้ดังสมการที่ 3.40 และสมการที่ 3.41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
P_n &= \tilde{P}_n + K\tilde{C}\tilde{P}_n C^T K^T + K R K^T - \tilde{P}_n C^T K^T - K\tilde{C}\tilde{P}_n \\
&= \tilde{P}_n + K(\tilde{C}\tilde{P}_n C^T K^T + R)K^T - \tilde{P}_n C^T K^T - K\tilde{C}\tilde{P}_n \\
&= \tilde{P}_n + \tilde{P}_n C^T (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R)^{-1} (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R) (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R)^{-1} \tilde{C}\tilde{P}_n \\
&\quad - \tilde{P}_n C^T (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R)^{-1} \tilde{C}\tilde{P}_n - K\tilde{C}\tilde{P}_n \\
&= \tilde{P}_n + \tilde{P}_n C^T (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R)^{-1} \tilde{C}\tilde{P}_n - \tilde{P}_n C^T (\tilde{C}\tilde{P}_n C^T + R)^{-1} \tilde{C}\tilde{P}_n - K\tilde{C}\tilde{P}_n \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{P}_n + K\tilde{C}\tilde{P}_n \\
&= (\mathbf{I} - K\mathbf{C})\tilde{P}_n \tag{3.41}
\end{aligned}$$

หาค่าการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนร่วมสภาวะ  $n+1$  ได้ดังสมการที่ 4.41

$$\tilde{P}_{n+1} = E\{e_{n+1}e_{n+1}^T\} = E\{(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1})(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1})^T\} \tag{3.42}$$

แทนสมการที่ 4.41 ด้วยสมการที่ 4.38 ได้ดังสมการที่ 4.42

$$\tilde{P}_{n+1} = E\{(Ax_n + Bu_n + w_n - A\hat{x}_n - Bu_n)(Ax_n + Bu_n + w_n - A\hat{x}_n - Bu_n)^T\} \tag{3.43}$$

$$= E\{(Ax_n - A\hat{x}_n)(Ax_n - A\hat{x}_n)^T + w_n(Ax_n - A\hat{x}_n)^T + (Ax_n - A\hat{x}_n)w_n^T + w_n w_n^T\} \tag{3.44}$$

$$= AE\{(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)\} A^T + E\{w_n w_n^T\} \tag{3.45}$$

แทนสมการที่ 3.44 ด้วยสมการที่ 3.39 ได้ความแปรปรวนร่วมสภาวะ  $n+1$  ดังสมการที่ 3.46

$$\tilde{P}_{n+1} = AP_n A^T + Q \tag{3.46}$$

จากสมการที่ 3.27 ถึง สมการที่ 3.47 เป็นสมการคานมานฟิลเตอร์ไม่ต่อเนื่อง (The Discrete Kalman Filter Equations) ประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นสมการเปลี่ยนแปลงตามเวลา (The time update equations) ได้ดังสมการที่ 3.47 และสมการที่ 3.48 ส่วนที่สองเป็นสมการไม่วากรณใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งยังมีเทคนิคแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เปลี่ยนแปลงตามการวัด (measurement of updated equations) ได้ดังสมการที่ 3.49 - 3.51 ซึ่งเขียนเป็นไดอะแกรมแสดงการประมาณค่าได้ดังภาพที่ 3.1 และลำดับขั้นการคำนวณของการกรองคาลมานแสดงดังภาพที่ 3.2

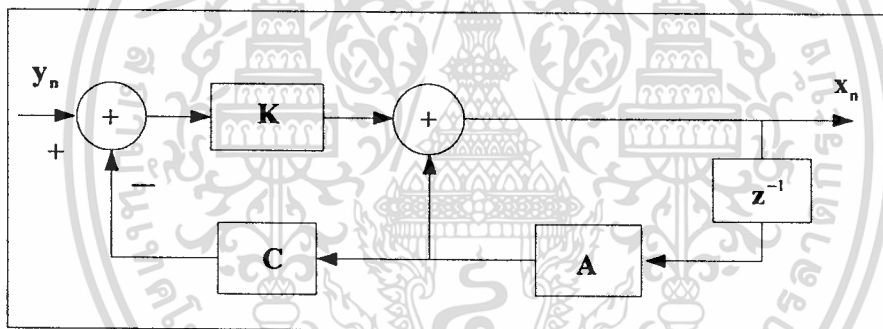
$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1} \tag{3.47}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} = \mathbf{A}_n\mathbf{P}_n\mathbf{A}_n^T + \mathbf{Q} \tag{3.48}$$

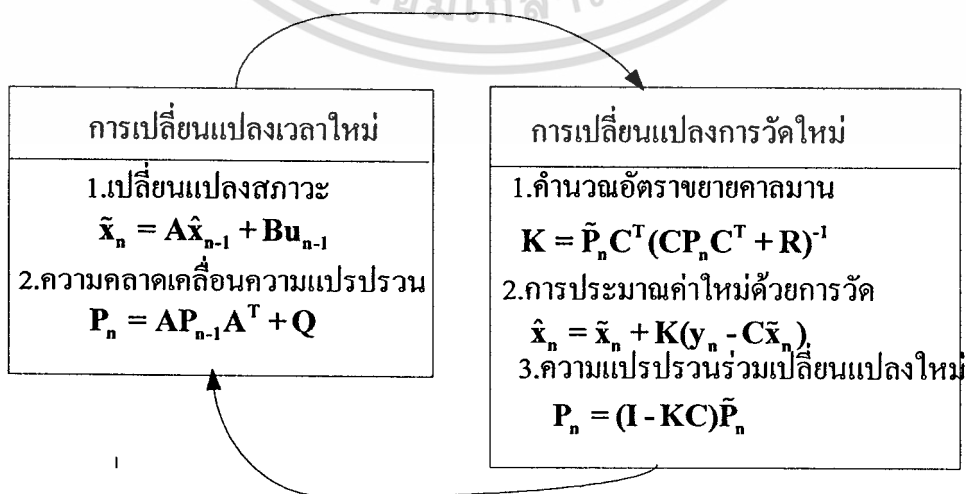
$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{P}}_n\mathbf{C}^T (\mathbf{C}_n\tilde{\mathbf{P}}_n\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \tag{3.49}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{K}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_n) \tag{3.50}$$

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{P}}_n \tag{3.51}$$



ภาพที่ 3.1 การประมาณค่า  $\mathbf{x}_n$  จากการวัด  $\mathbf{y}_n$  ของสถานะ  $n$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้ **ภาพที่ 3.2** ลำดับการคำนวณการกรองคาลมาน ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการพิจารณาสมการที่ 3.47 ถึงสมการที่ 3.51 สรุปได้ว่า ถ้าการประมาณภายหลังของสัญญาณรบกวนมีค่าเป็นศูนย์ อัตราขยายกาลมาน  $K = 0$  และถ้าสัญญาณรบกวนจากการวัดมีค่าเป็นศูนย์ อัตราขยายกาลมาน  $K = C^{-1}$  โดยที่ตัวกรองกาลมานสามารถใช้ได้ดีกับระบบที่มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

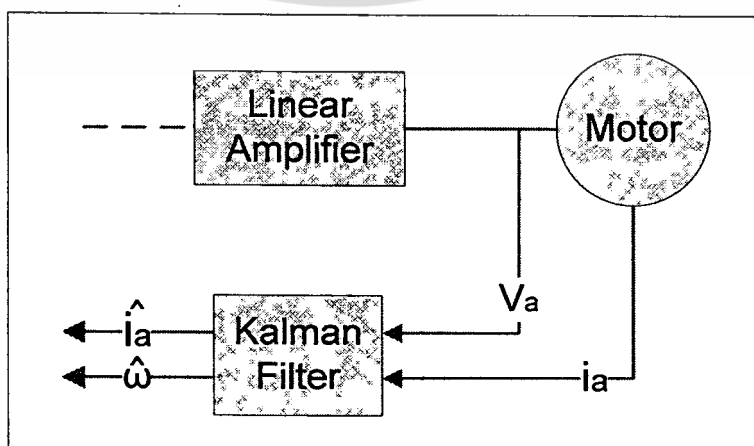
1. ขอมให้ประมาณค่าสภาวะอดีต สภาวะปัจจุบันและสภาวะในอนาคต
2. ระบบต้องการรูปแบบของระบบไดนามิก (ที่ประมาณค่าน้อยๆ)
3. ต้องเป็นคิจิตอลฟิลเตอร์ที่สามารถสร้างขึ้นได้
4. เป็นการประมาณค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบเชิงเส้น
5. ถ้าต้องการใช้กับระบบไม่เชิงเส้นแล้วจะใช้เอ็กเทนเดดคาลมาน (Extended Kalman)

### 3.3 การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ด้วยตัวกรองกาลมานโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ [8,9,10]

ระบบไดนามิกอีกระบบหนึ่งที่น่าสนใจคือ การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ มีหลักการคือ ระบบจะตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของแรงดันและกระแสไฟฟ้าของมอเตอร์ ดังรายละเอียดที่จะกล่าวต่อไปเพื่อหาความเร็วของมอเตอร์ออกมา

ระบบการประมาณค่าความเร็วมอเตอร์โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับนั้นในปัจจุบันนิยมใช้เข้ามาแก้ไขปัญหาบางจุดที่ตัวตรวจจับทำให้เกิดปัญหาเช่น มีสัญญาณรบกวนหรือยากต่อการติดตั้งระบบการประมาณค่าความเร็วโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับนี้มีเทคนิคในการสร้างอยู่หลายวิธี และตัวกรองกาลมานเป็นอีกวิธีที่นิยมใช้ โดยเฉพาะกับระบบการวัดที่มีสัญญาณรบกวนจำนวนมากมาเกี่ยวข้อง

ลักษณะการนำตัวกรองกาลมานมาใช้เพื่อประมาณค่าความเร็วมอเตอร์โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับความเร็วได้แสดงดังภาพ



ภาพที่ 3.3 แสดงลักษณะการนำตัวกรองกาลมานมาใช้สำหรับประมาณค่าความเร็วมอเตอร์โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น ยกเว้นให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากภาพที่ 3.3 ที่แสดงวิธีการประยุกต์ตัวกรองกาลมานที่มีการคำนวณ ตามสมการที่ 3.47 ถึงสมการที่ 3.51 โดยมีอินพุทของระบบที่เป็นกระแสและแรงดันอาร์เมเจอร์ ซึ่งความสัมพันธ์ของกระแส แรงดัน และความเร็วของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงเป็นไปตามที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 (การสร้างรูปจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง) จากสมการที่ 2.140 ที่จะได้ค่าตัวแปรเมตริกซ์ A และ เมตริกซ์ B ซึ่งอยู่ในรูปของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาดังนั้นการนำค่าของตัวแปรดังกล่าวมาใช้ในการคำนวณตัวกรองกาลมานจำเป็นจะต้องทำการแปลงระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาให้อยู่ในรูปของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเสียก่อน ใช้ตัวแปรดังกล่าวแทนค่าลงในสมการของระบบตัวกรองกาลมาน ในสมการที่ 3.47 และ 3.48 เพื่อทำการประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ ระบบการคำนวณของตัวกรองกาลมาน จะทำการเปรียบเทียบกระแสที่ได้จากการคำนวณและกระแสที่ได้จากการวัดของขดลวดอาร์เมเจอร์ โดยกระแสที่ถูกวัดจะอยู่ในเงื่อนไขของการมีสัญญาณรบกวนเข้ามาปะปน และไม่มีสัญญาณรบกวนปะปน ผลการเปรียบเทียบจะได้ค่าผิดพลาด (Error) ซึ่งค่าผิดพลาดนี้จะนำไปเป็นเงื่อนไขเพื่อแก้ไขค่าตัวแปรสถานะของระบบไดนามิก เพื่อให้ผลการคำนวณมีค่าผิดพลาดน้อยที่สุด เอาท์พุทที่ได้จากการคำนวณจะมีทั้งค่ากระแสอาร์เมเจอร์ และค่าความเร็วมอเตอร์

จากทฤษฎีของตัวกรองกาลมานในบทที่ 3 ทำให้ทราบว่าการทำงานที่แนะนำเอาตัวกรองกาลมานมาใช้งานจำเป็นจะต้องทราบคุณสมบัติของระบบไดนามิกที่จะใช้ตัวกรองกาลมานมาทำการประมาณค่าตัวแปรสถานะของระบบก่อน สำหรับกรณีการประยุกต์ใช้ตัวกรองกาลมานเพื่อประมาณค่าความเร็วมอเตอร์โดยไม่มีตัวตรวจจับ ก็เช่นกัน จำเป็นจะต้องทราบคุณสมบัติระบบของมอเตอร์ และทราบพารามิเตอร์หรือสัมประสิทธิ์ของระบบก่อน เพื่อนำไปใช้เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวกรองกาลมานต่อไป

## บทที่ 4

### การออกแบบการทดลอง

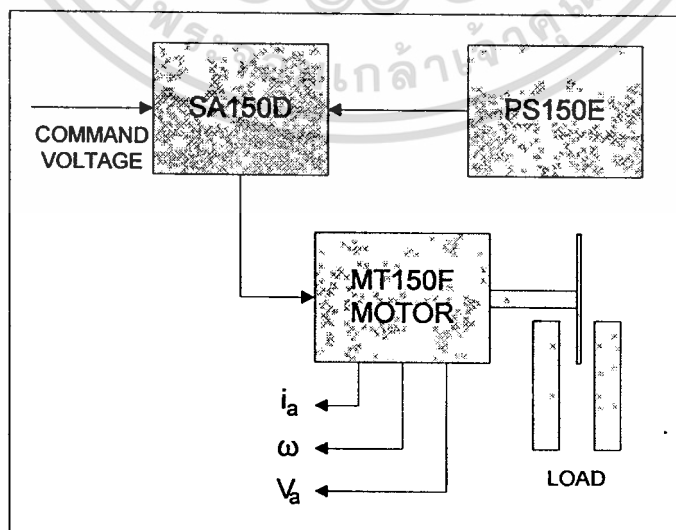
การออกแบบและทดลอง การตรวจวัดความเร็วมอเตอร์กระแสตรงด้วยตัวกรองกาลมาน โดยไม่ใช้ตัวตรวจจับจะแบ่งออกเป็นส่วนต่างๆ ซึ่งอาศัยอุปกรณ์และเครื่องมือต่างๆ ดังนี้

อุปกรณ์และเครื่องมือ

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลองมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

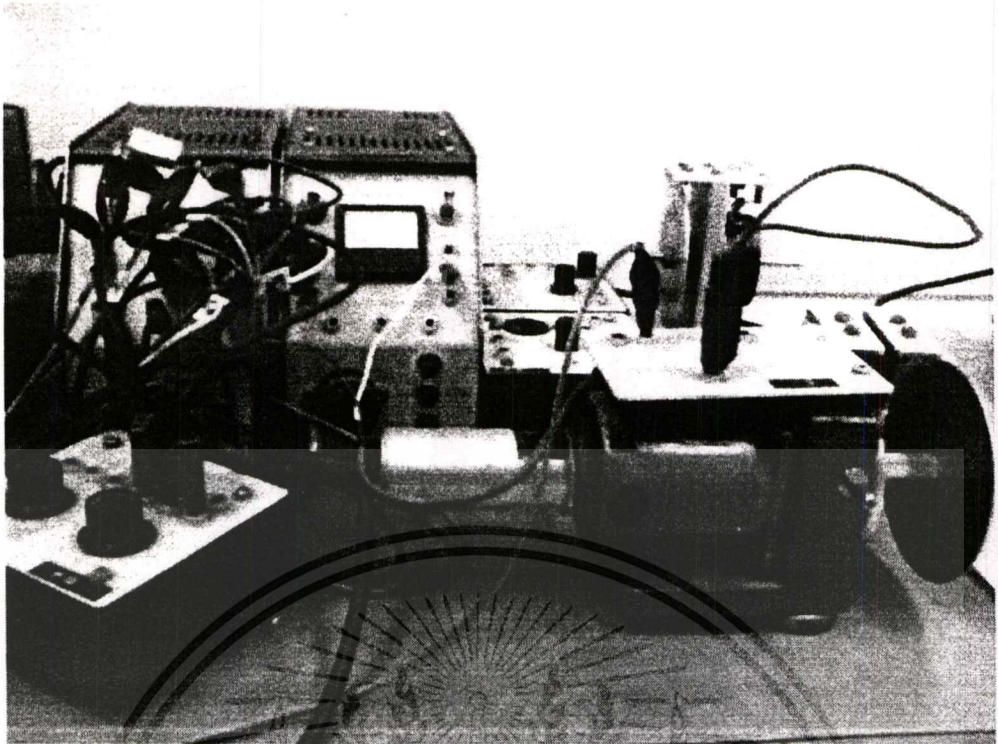
- |                            |           |
|----------------------------|-----------|
| 1. ไมโครคอมพิวเตอร์        | 1 เครื่อง |
| 2. เครื่องกำเนิดสัญญาณ     | 2 เครื่อง |
| 3. ออสซิลโลสโคป            | 1 เครื่อง |
| 4. แหล่งจ่ายไฟ             | 1 ชุด     |
| 5. TMS320C31 DSK Board     | 1 ชุด     |
| 6. โปรแกรม MATLAB          |           |
| 7. ชุดควบคุมแอนะล็อกสวิตช์ | 1 ชุด     |
| 8. ชุดขับเคลื่อนมอเตอร์    | 1 ชุด     |

โดยที่ชุดขับเคลื่อนมอเตอร์ที่ใช้ในการทดลองจะเป็นชุดขับเคลื่อนมอเตอร์ของบริษัท ฟีดแบค (Feed Back Instrument Inc.) ซึ่งประกอบด้วย ชุดขับเคลื่อนมอเตอร์ SA150D ชุดแหล่งจ่ายไฟ PS150E และชุดมอเตอร์ MT150F ซึ่งประกอบกันดังแสดงในภาพที่ 4.1 และภาพที่ 4.2



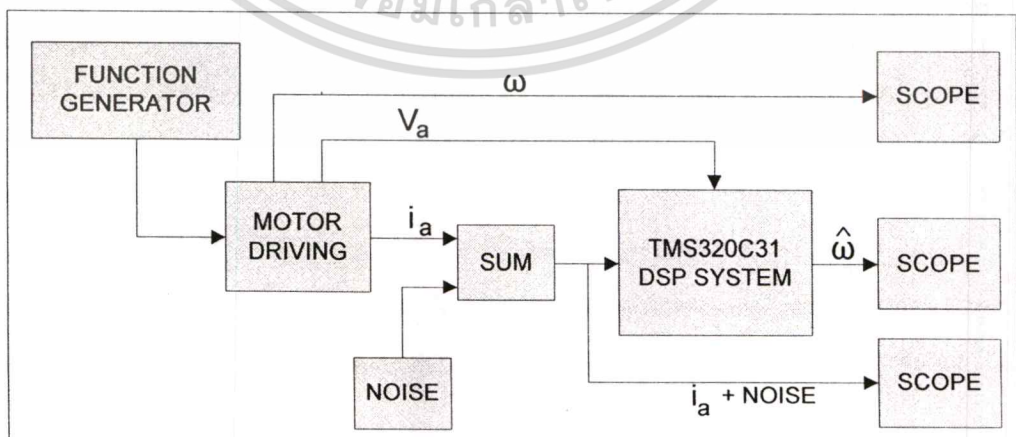
ภาพที่ 4.1 แสดงแผนภาพการต่อชุดขับเคลื่อนมอเตอร์เพื่อการทดสอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 4.2 ภาพจริงของชุดขับเคลื่อนมอเตอร์ที่ใช้ทดสอบ

การนำตัวกรองคาลมานมาประยุกต์ใช้กับการตรวจจับความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ต้องตรวจจับ ในการทดสอบจะทำการต่อวงจรของการทดลองดังแสดงในภาพที่ 4.3 โดยที่ระบบคาลมานฟیلเตอร์จะมีแรงดัน  $v_a$  เป็นสัญญาณทางอินพุต ของระบบและมีกระแส  $i_a$  เป็นข้อมูลการวัดโดยกระแส  $i_a$  นี้จะถูกรวมเข้ากับสัญญาณรบกวนก่อนป้อนเข้าระบบคาลมานฟیلเตอร์ ความเร็วของมอเตอร์  $\hat{\omega}$  ที่ได้จากระบบคาลมานฟیلเตอร์จะถูกวัดเทียบกับ  $\omega$  ซึ่งเป็นความเร็วที่วัดได้จากตัวตรวจจับ และค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของมอเตอร์ แสดงดังตาราง ที่ 4.1



ภาพที่ 4.3 แสดงแผนภาพการต่ออุปกรณ์เพื่อการทดสอบการประมาณค่าความเร็ว

มอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง โดยไม่ต้องตรวจจับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญขาดให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของมอเตอร์ที่ใช้ในการทดลอง

ตัวแปร	ค่าที่แสดง
$R_a$	3.0 Ohm
$L_a$	5.16 mH
$J$	$3 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$
$B$	0.0158
$K_T$	0.0282 Nm/A
$K_b$	2.78 V/krpm

ในการออกแบบเพื่อหาสัมประสิทธิ์สำหรับระบบพลศาสตร์การประมาณค่าความเร็วโดยไม่มีตัวตรวจจับนี้ จะอาศัยสมการที่ 2.139 และ 2.140 ในบทที่ 2 ซึ่งเป็นสมการสเตตสเปซ ที่แสดงความสัมพันธ์ของกระแส  $i_a$  ความเร็ว  $\omega$  และแรงดันที่ตกคร่อมมอเตอร์  $v_a$  โดยสมการที่ 2.140 เป็นสมการของระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา ในการสร้างจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณจำเป็นต้องเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านั้นให้อยู่ในรูปของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลาเสียก่อน โดยการแทนค่า พารามิเตอร์ ต่างๆ ลงในสมการที่ 2.140 ซึ่งจะได้ เมตริกซ์ A และ เมตริกซ์ B ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} -581.40 & -538.76 \\ 28.20 & 15.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 193.8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

จากนั้น เปลี่ยนสมการ ที่ 4.1 ให้อยู่ ในรูปของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา และเพื่อให้ง่ายต่อการวิจัยจะอาศัยคำสั่งมาตรฐาน ของโปรแกรม MATLAB คือคำสั่ง C2D ในการแปลงตัวแปรระบบที่ต่อเนื่องทางเวลาให้อยู่ในรูปของระบบที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา โดยได้กำหนดให้ใช้การแปลงเป็นแบบการแปลงเชิงเส้นคู่ ที่ความถี่ 10 kHz ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0.94344 & -0.05229 \\ 0.00273 & 0.99834 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.01882 \\ 0.00002 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

นำค่าที่ได้ ในสมการที่ 4.2 ไปทดสอบจริงในระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 DSK ซึ่งจะได้ผลการทดลองในบทต่อไป

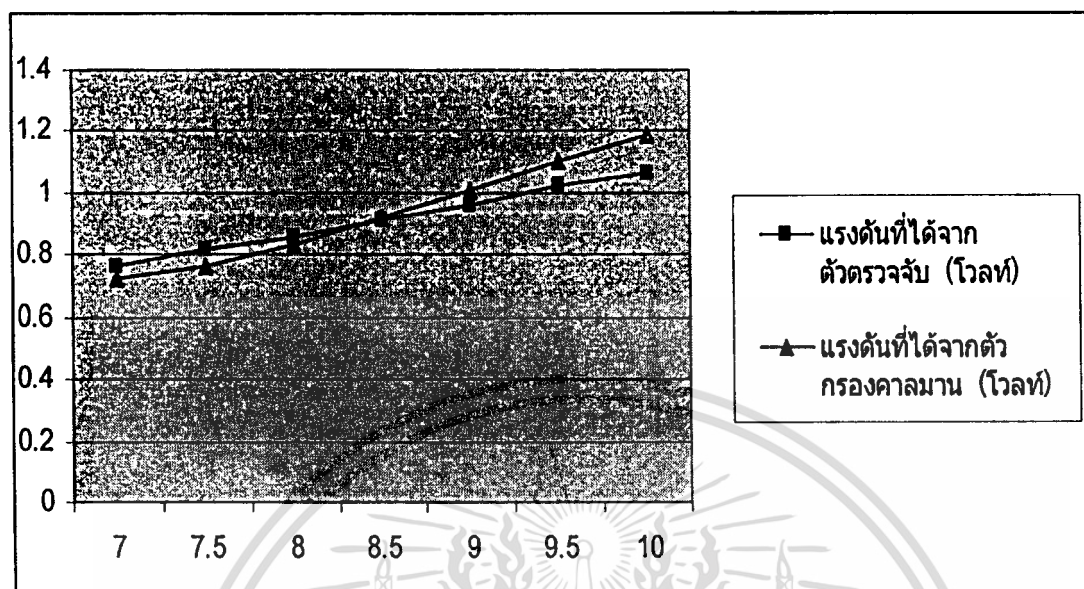
## บทที่ 5

### ผลการทดลอง

ในการทดลองสำหรับการประมาณค่าความเร็วมอเตอร์โดยไม่มีการตรวจจับจะทดสอบโดยเทียบค่าความเร็วของตัวตรวจจับซึ่งเป็นระบบของชุดทดลอง ดังรายละเอียดตามภาพที่ 60 ถึง 66 ในการทดลองจะทำการผสมสัญญาณรบกวนเข้ากับกระแส ซึ่งเป็นข้อมูลการวัดให้กับระบบกาลมานฟิลเตอร์ โดยระดับความแรงของสัญญาณรบกวนจะมีค่าโควาเรียน เท่ากับ  $1 \text{ V}^2$  ระดับแรงดันอินพุตคำสั่งที่ใช้จะเริ่มจาก 7 โวลต์ ถึง 10 โวลต์ และผลการทดลองโดยสรุปจะแสดงดังตารางที่ 5.1 และกราฟแสดงผลการวัดความเร็วในรูปของแรงดันที่ได้จากตัวตรวจ จับ เทียบกับแรงดันที่ได้จากตัวกรองกาลมาน แสดงในรูปที่ 5.1

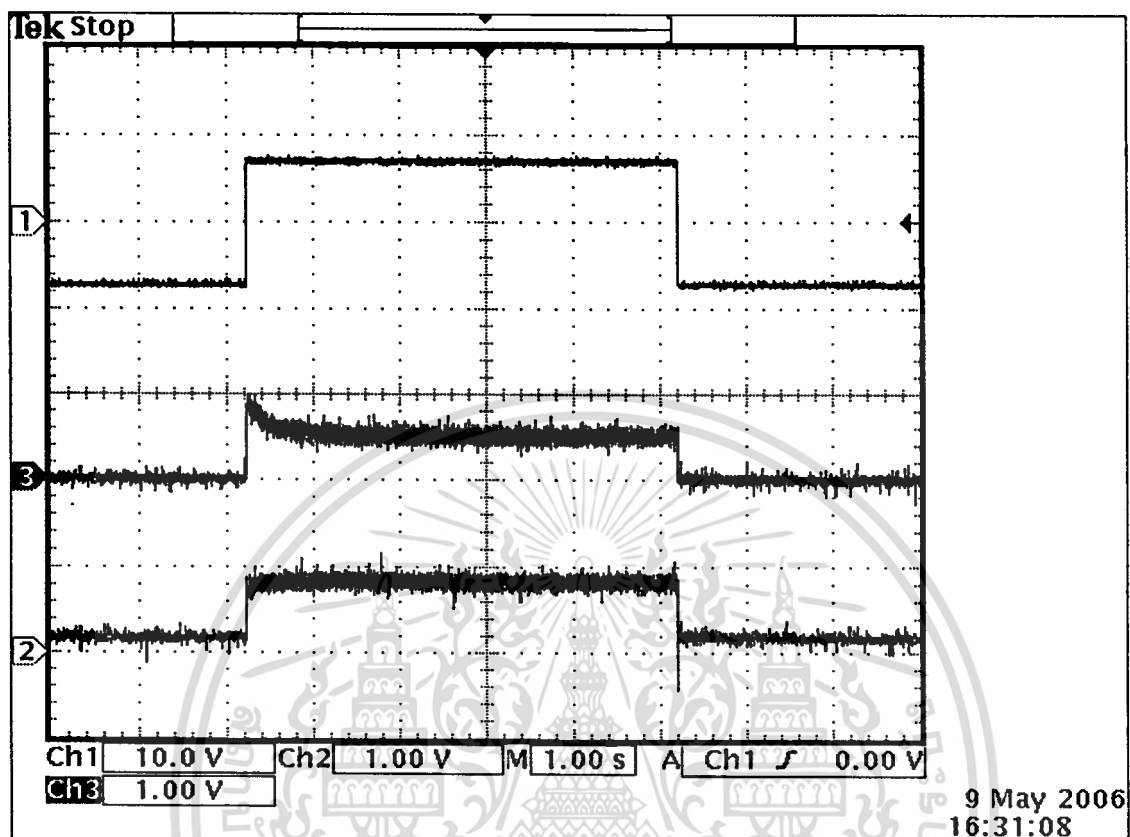
ตารางที่ 5.1 การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยใช้ตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมานเทียบกับตัวตรวจจับความเร็วรอบทางกล

Command Voltage (โวลต์)	แรงดันที่ได้จาก ตัวตรวจจับ (โวลต์)	แรงดันที่ได้จากตัวกรองกาลมาน (โวลต์)
7.0	0.76	0.72
7.5	0.82	0.76
8.0	0.86	0.83
8.5	0.91	0.92
9.0	0.96	1.01
9.5	1.02	1.10
10.0	1.06	1.19



ภาพที่ 5.1 กราฟแสดงผลการวัดความเร็วในรูปของแรงดันที่ได้จากตัวตัวจับ เทียบกับแรงดันที่ได้จากตัวกรองคาบมาน

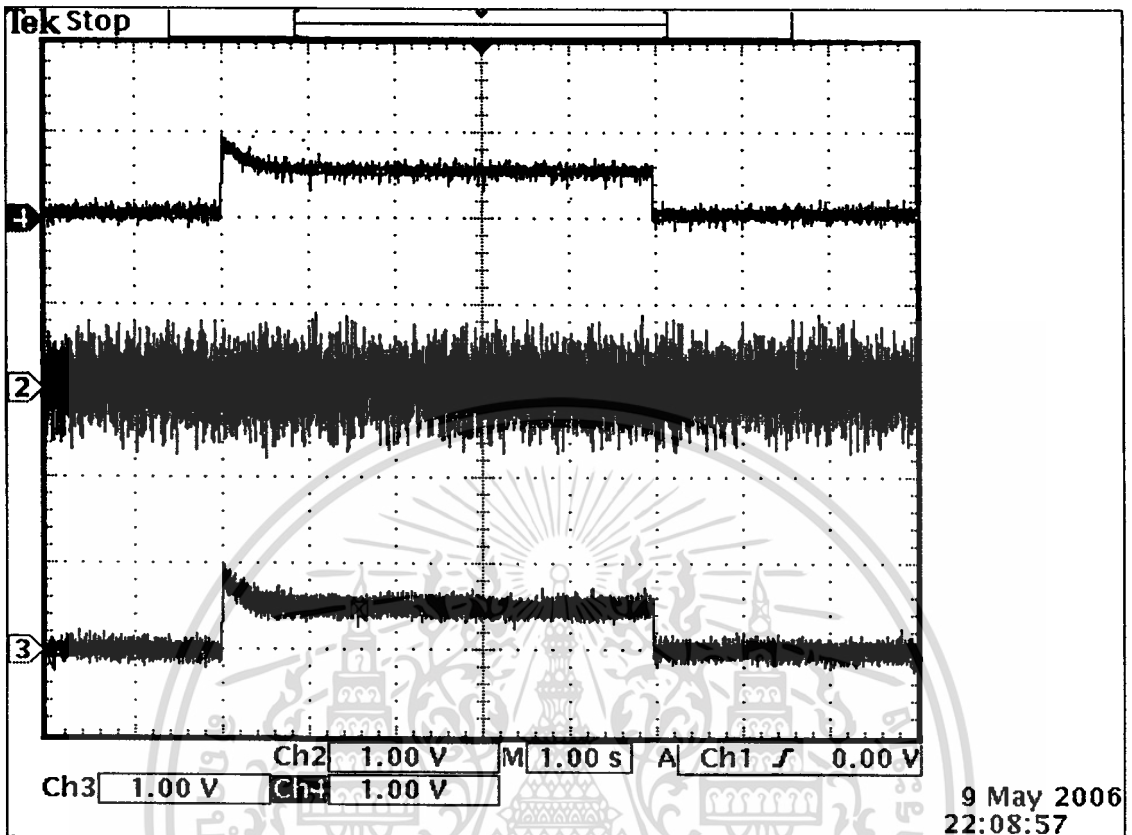
นอกจากนี้ยังได้กำหนด Command Voltage ขนาด 7 โวลต์ ถึง 10 โวลต์ เป็นสัญญาณแบบ Square Wave ความถี่ 0.1 Hz และได้รวมสัญญาณรบกวนขาวที่มีความแปรปรวนร่วมขนาด  $1 \text{ V}^2$  เข้ากับกระแสมอเตอร์ ผลการทดลองวัดด้วย Oscilloscope แสดงดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 5.2a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 7.0 โวลต์

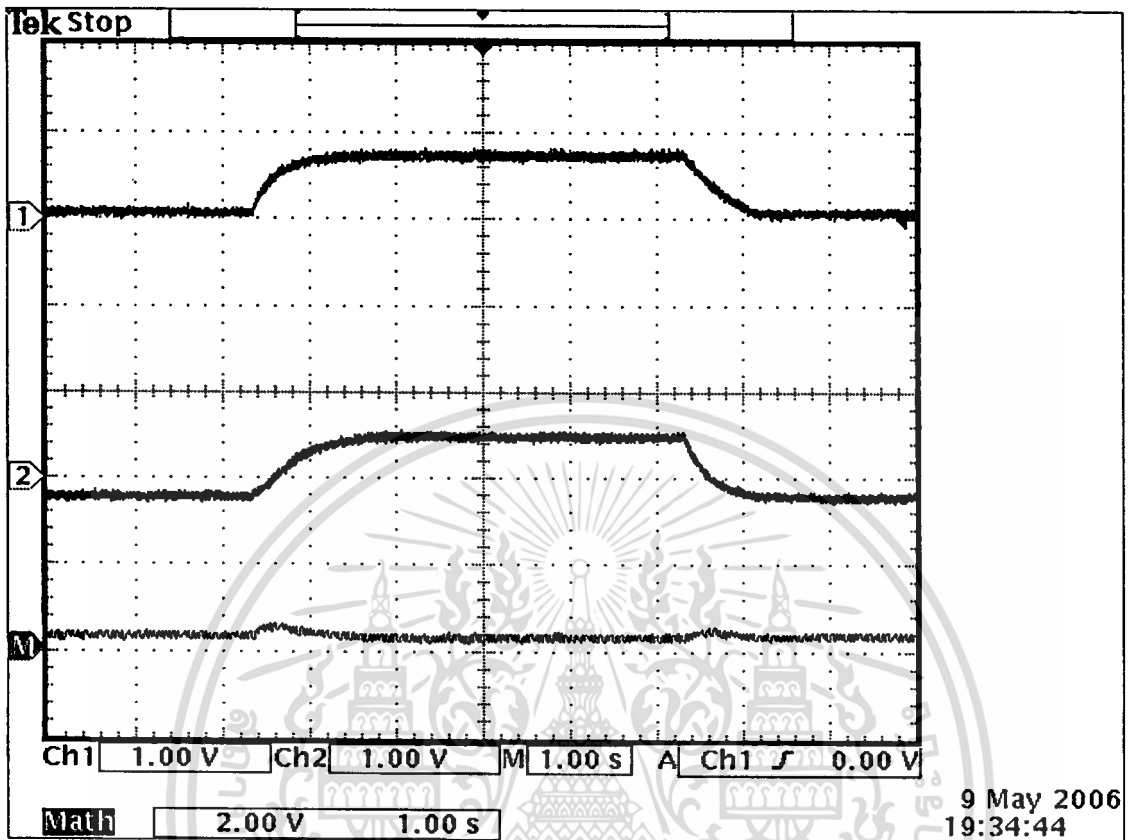
สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์

สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์



ภาพที่ 5.2b สัญญาณด้านบน กระแสแอมเพอร์ที่ Command Voltage 7.0 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสแอมเพอร์

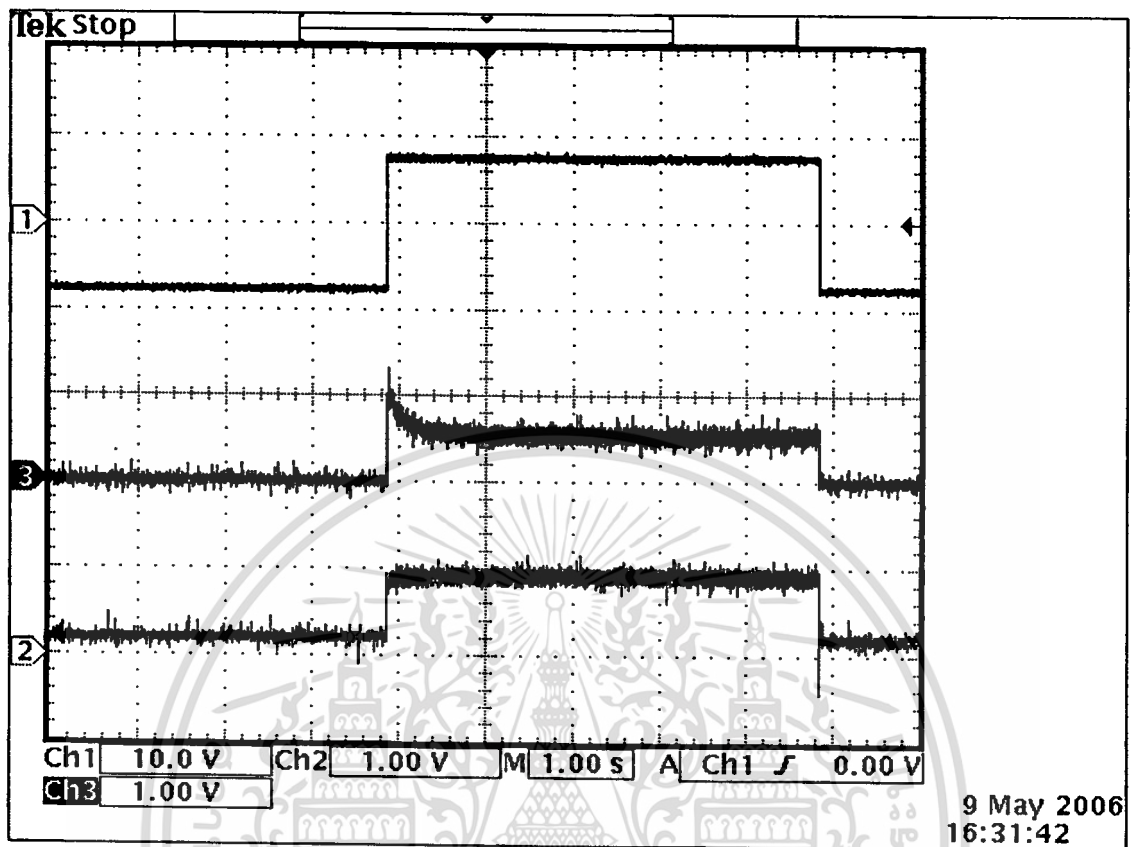
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



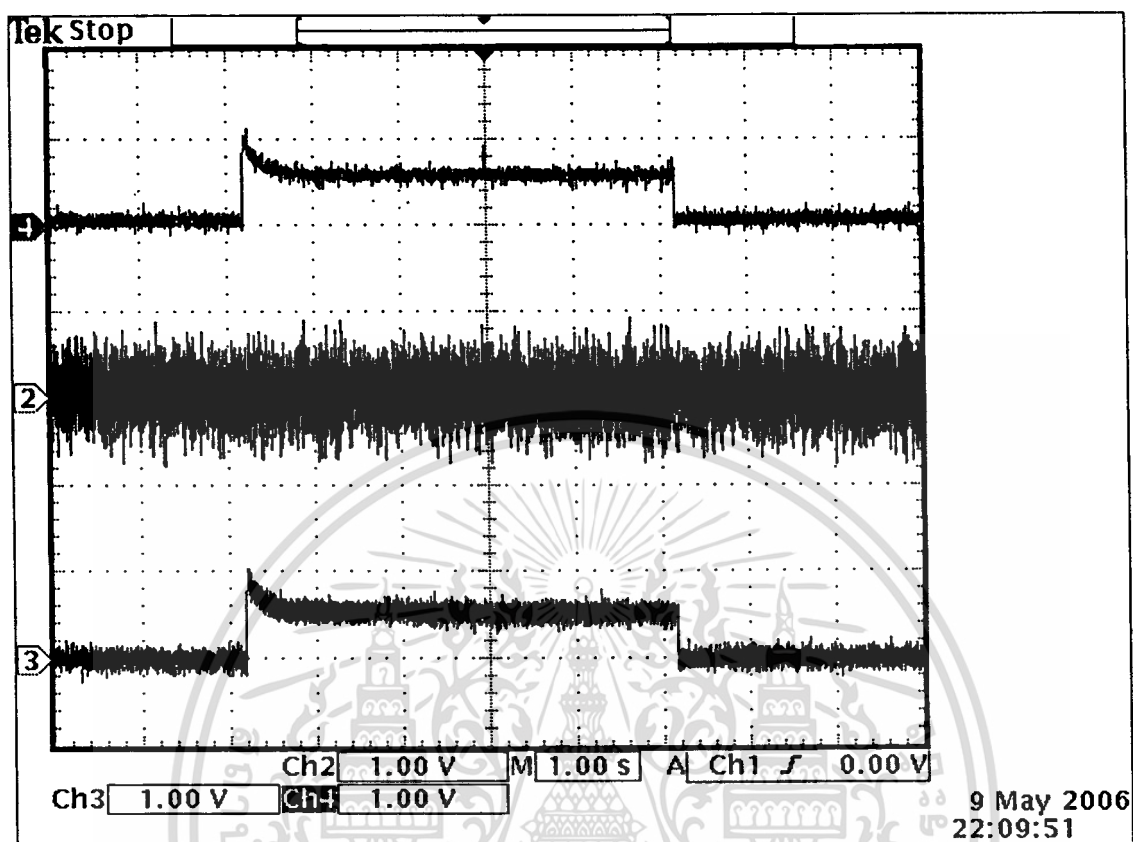
ภาพที่ 5.2c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล

สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน

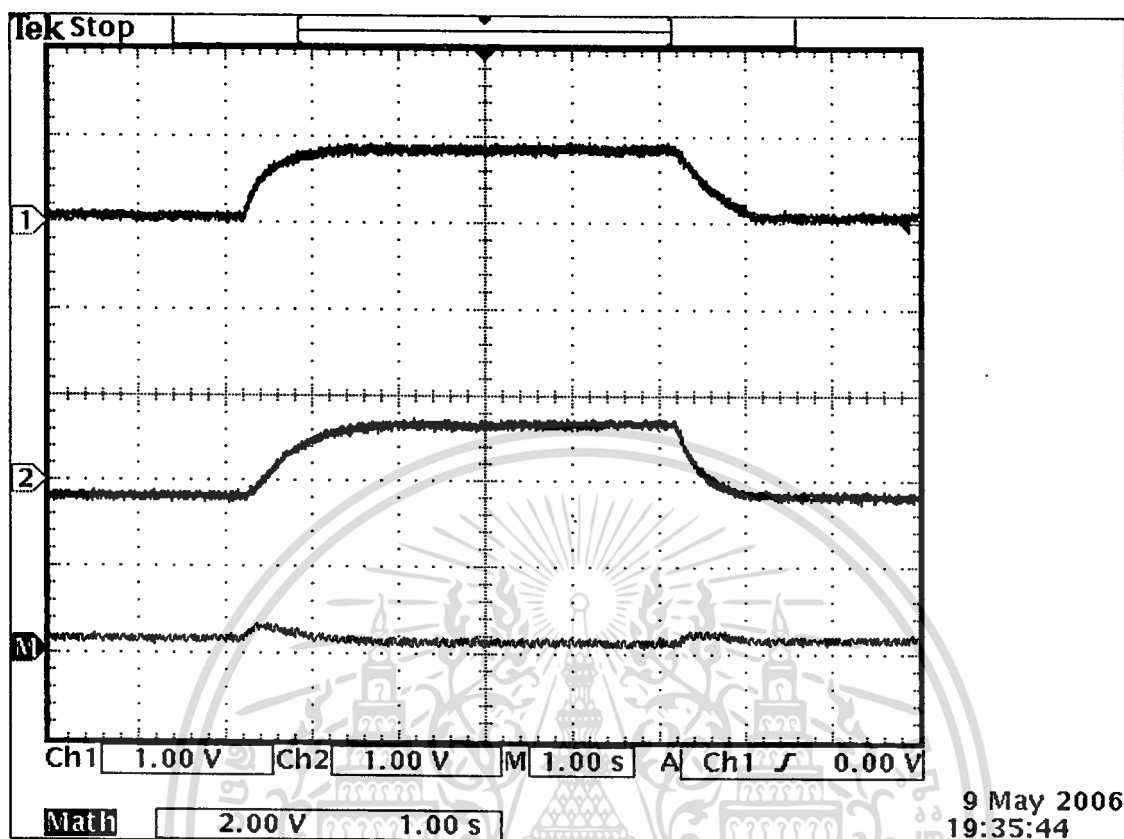
สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน



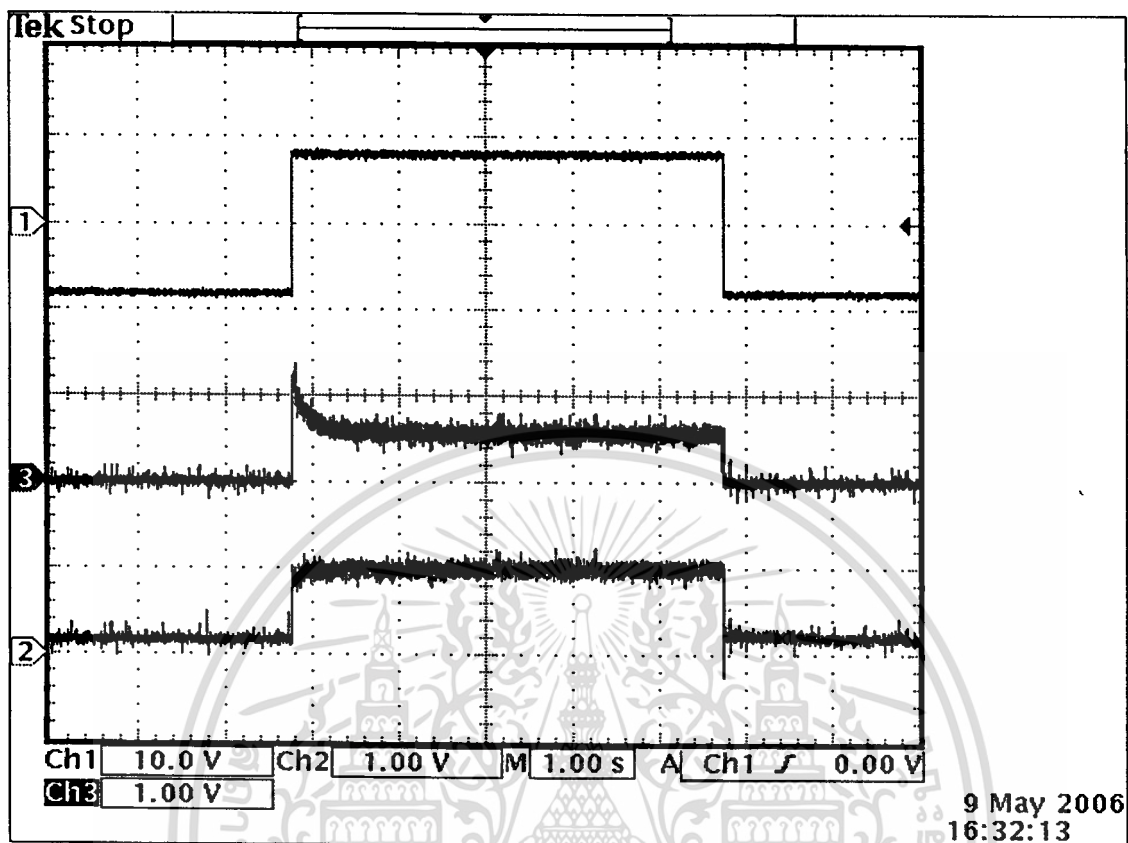
ภาพที่ 5.3a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันกำลัง ที่ 7.5 โวลต์  
สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์  
สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์



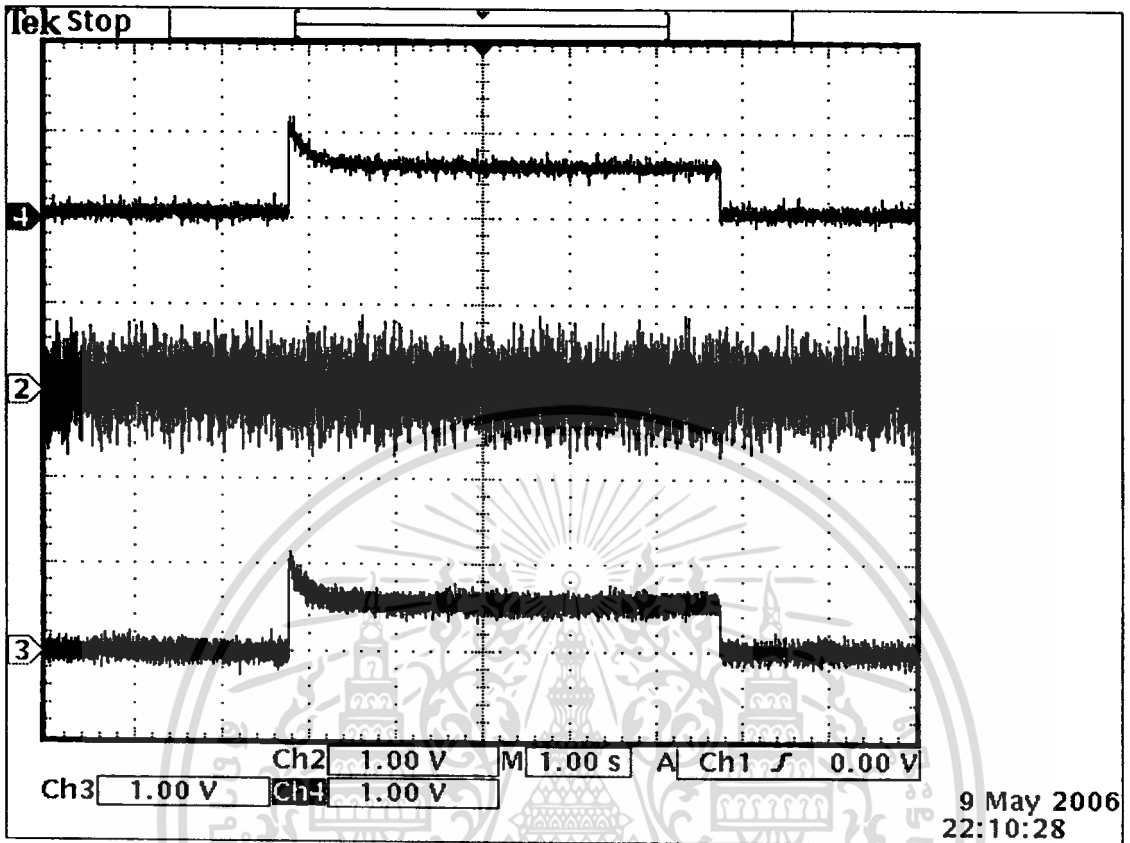
ภาพที่ 5.3b สัญญาณด้านบน กระแสแอมเพอร์ที่ Command Voltage 7.5 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสแอมเพอร์



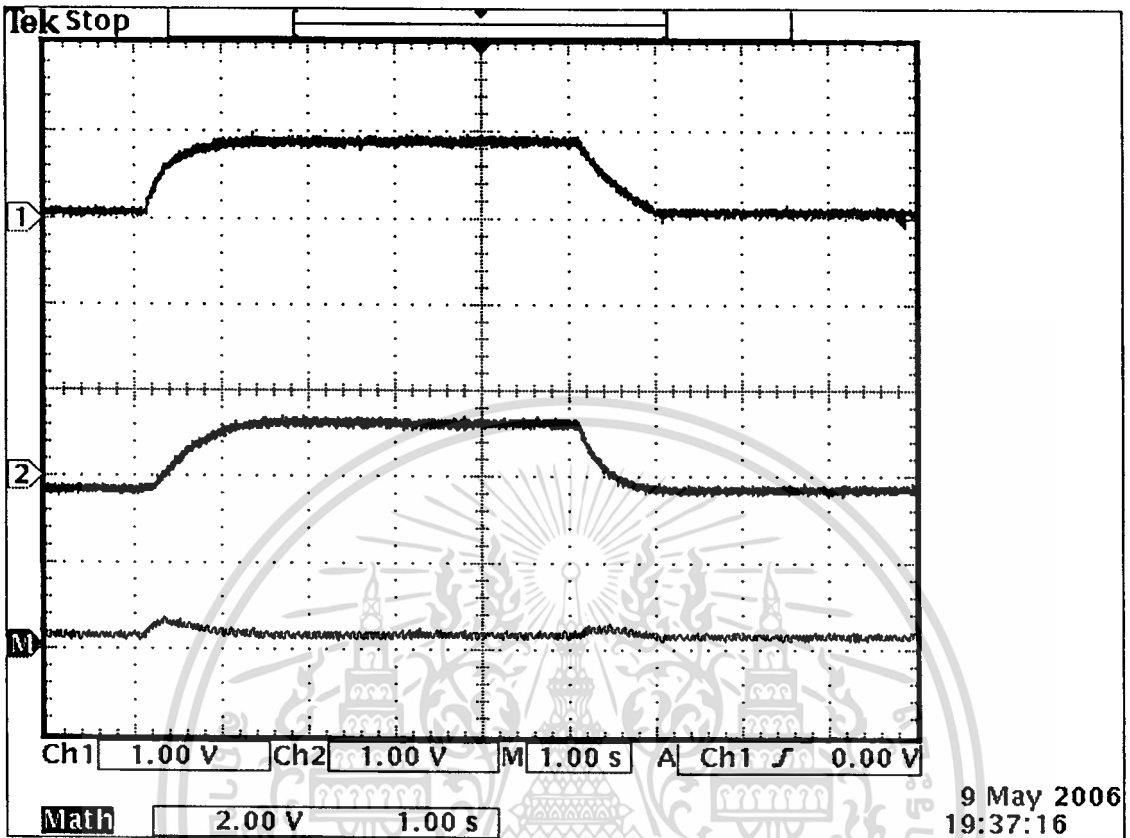
ภาพที่ 5.3c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
 สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน  
 สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
 ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน



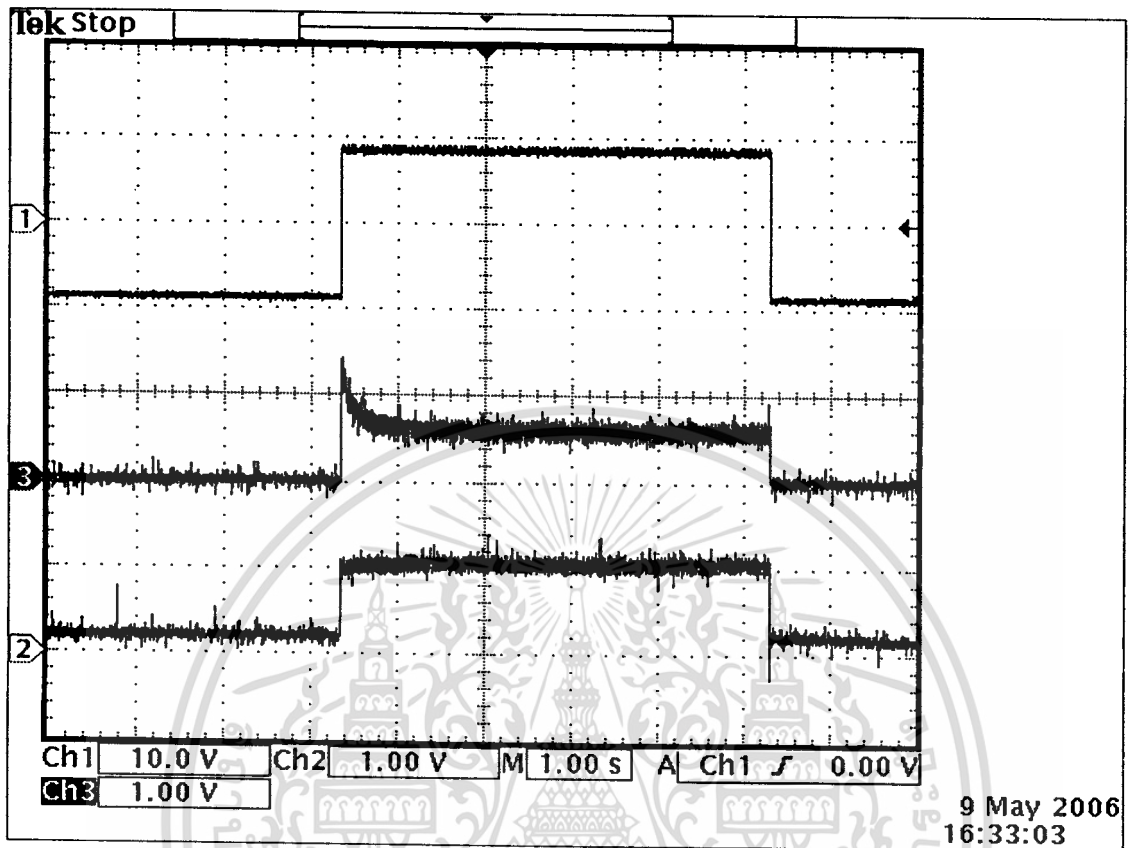
ภาพที่ 5.4a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 8.0 โวลต์  
 สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์  
 สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์



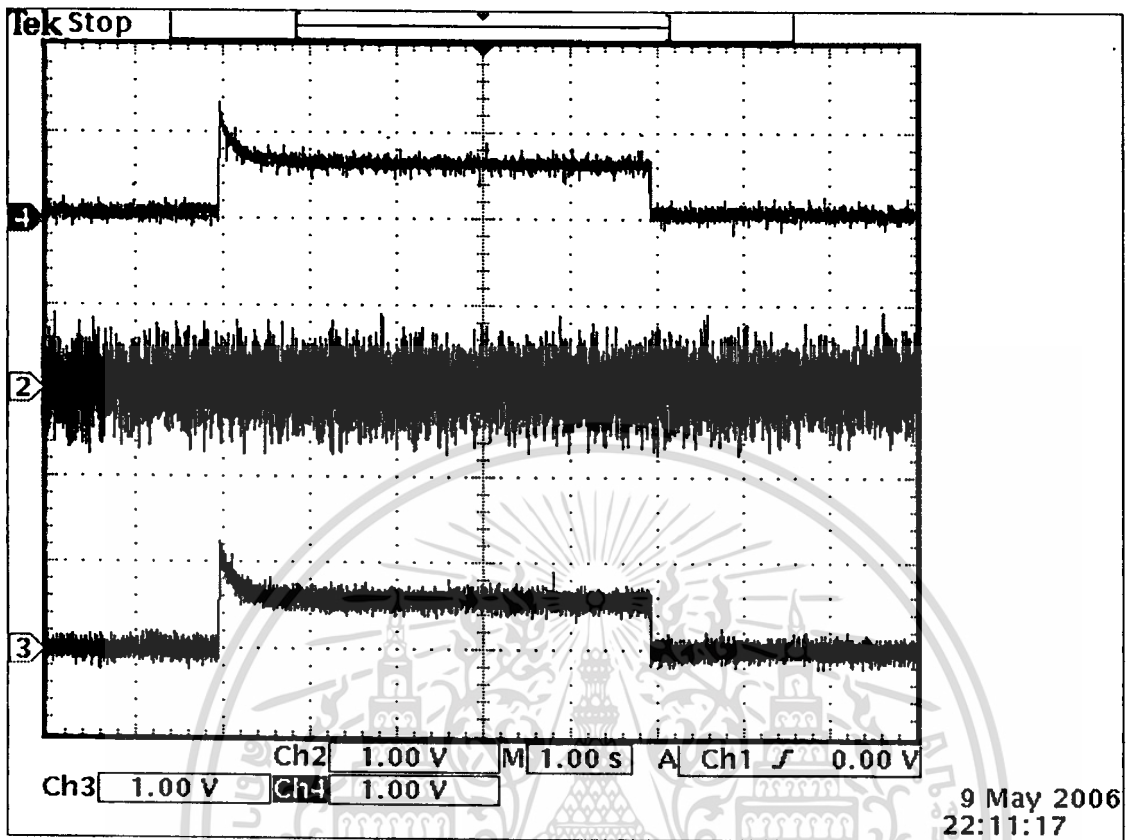
ภาพที่ 5.4b สัญญาณด้านบน กระแสแอมเพอร์ที่ Command Voltage 8.0 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสแอมเพอร์



ภาพที่ 5.4c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
 สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน  
 สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
 ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน

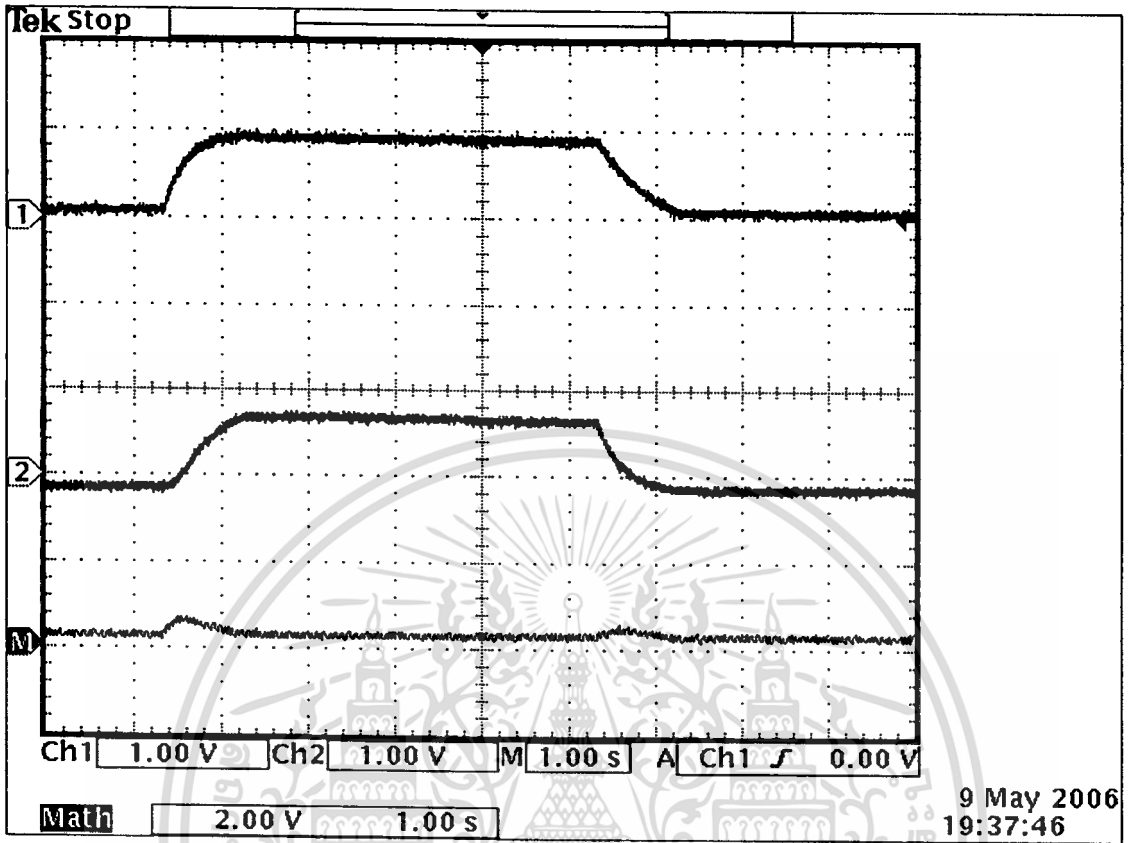


ภาพที่ 5.5a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 8.5 โวลต์  
 สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์  
 สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์

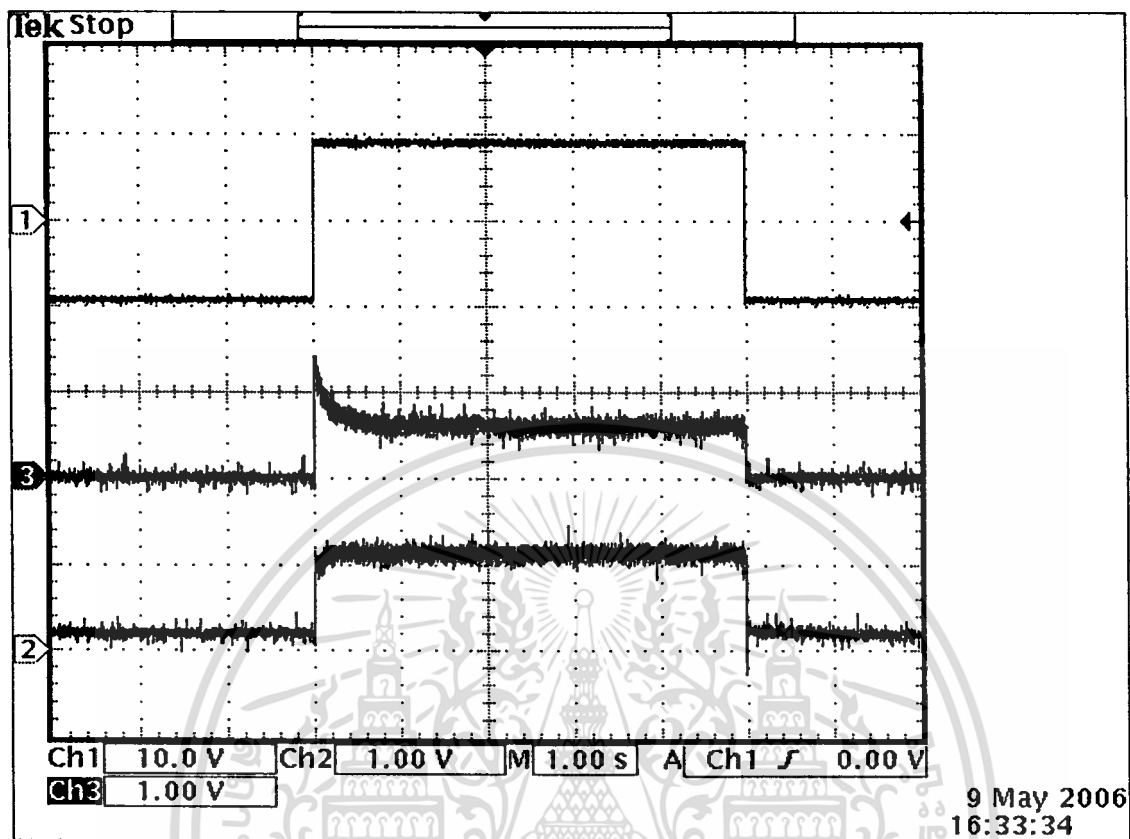


ภาพที่ 5.5b สัญญาณค่านบน กระแสอเมเจอร์ที่ Command Voltage 8.5 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสอเมเจอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

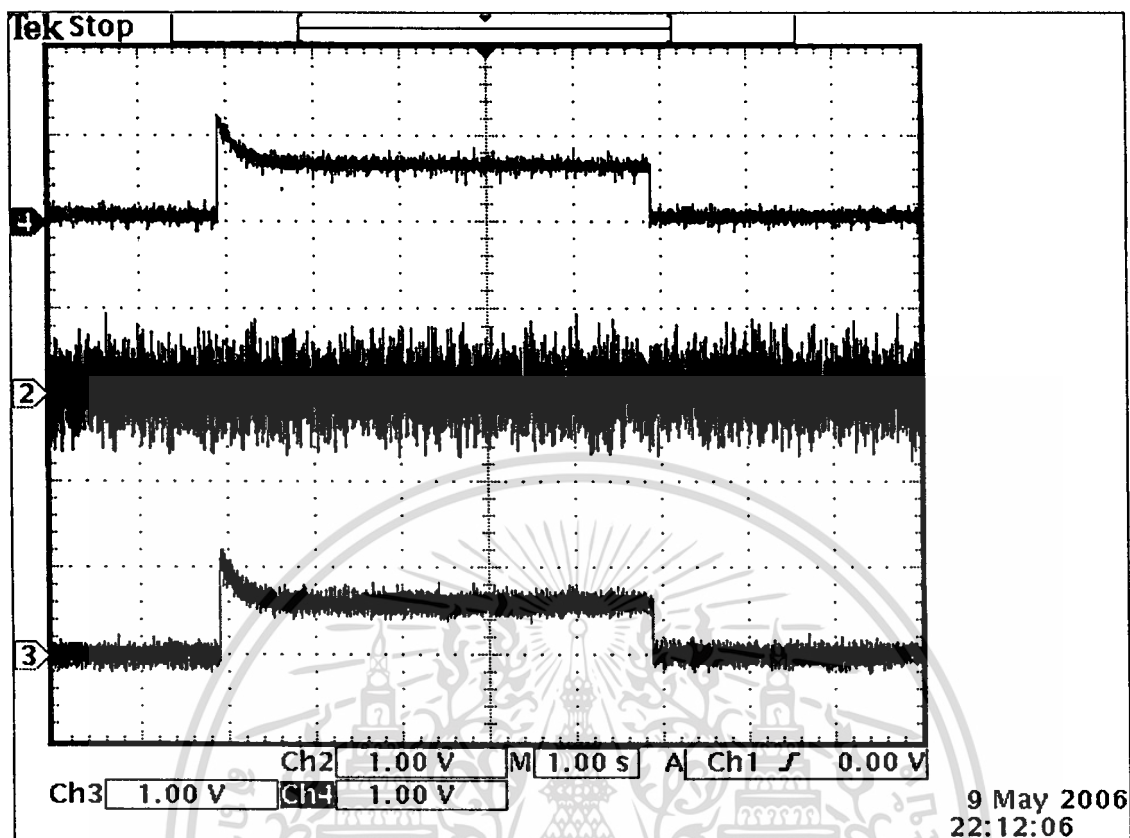


ภาพที่ 5.5c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
 สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน  
 สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
 ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน

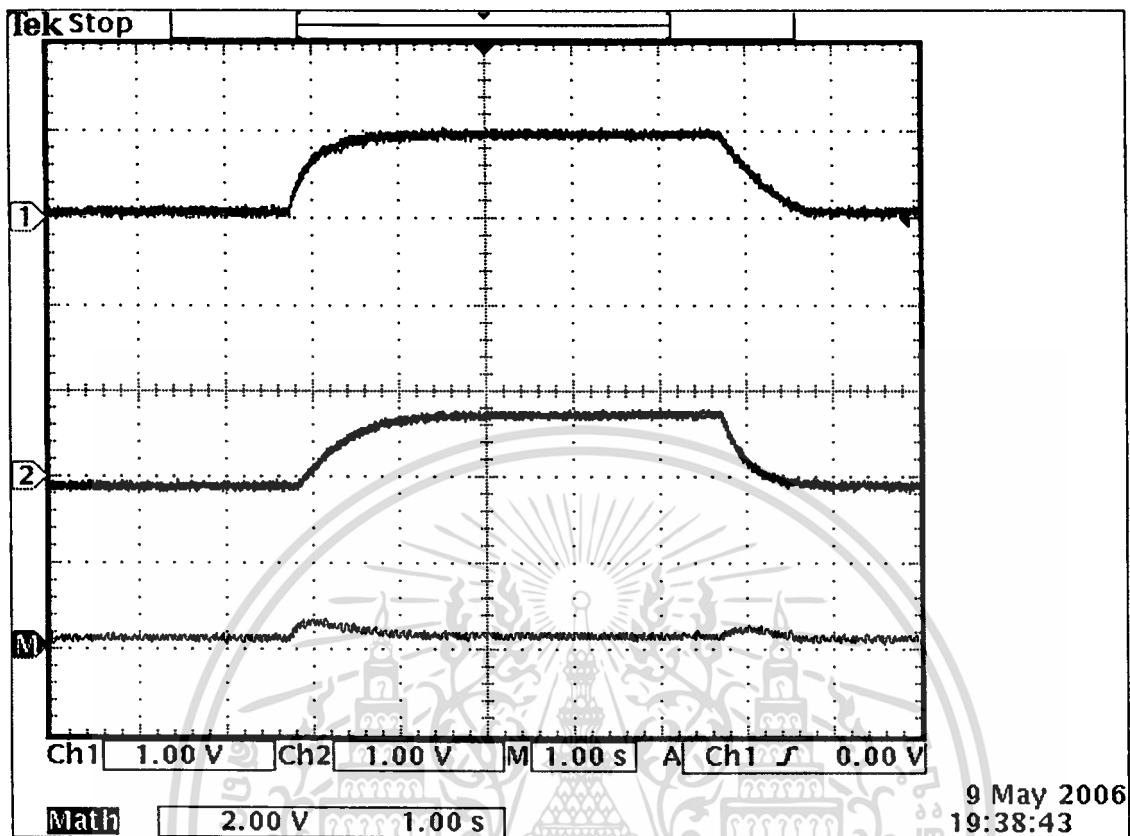


ภาพที่ 5.6a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 9.0 โวลต์  
 สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์  
 สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

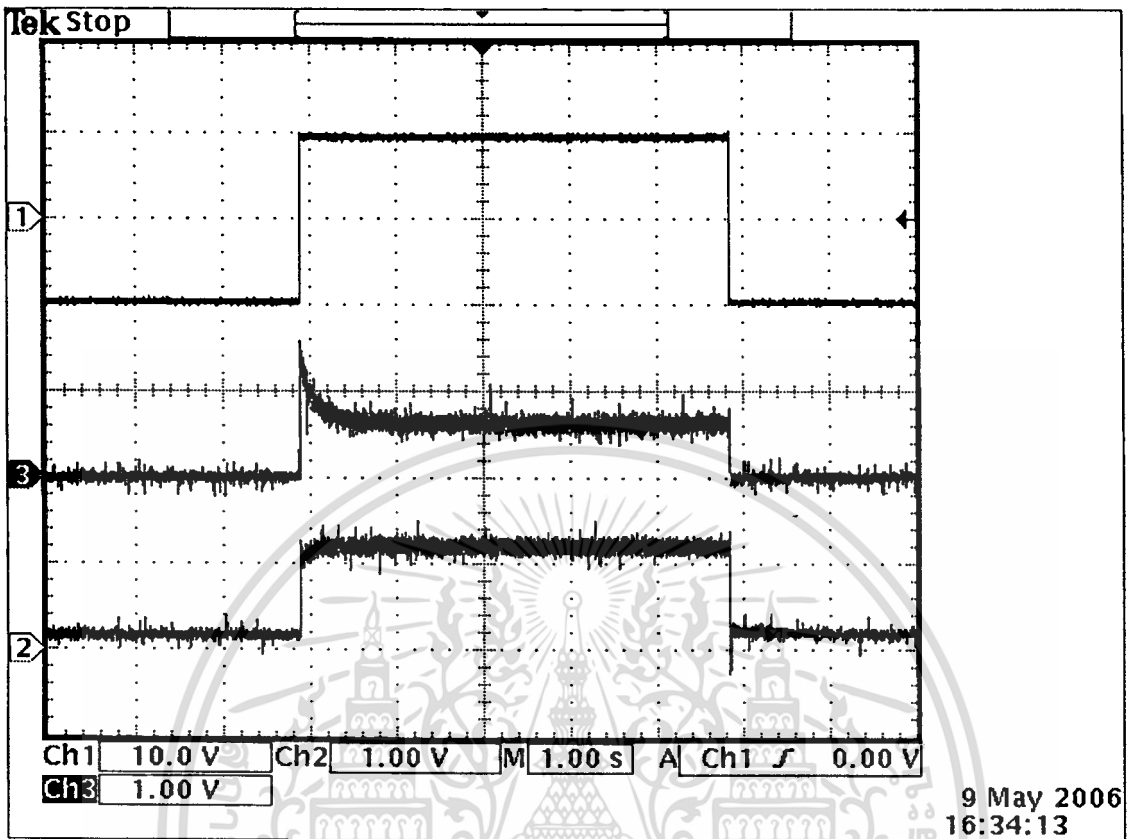


ภาพที่ 5.6b สัญญาณด้านบน กระแสแอมเพอร์ที่ Command Voltage 9.0 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสแอมเพอร์



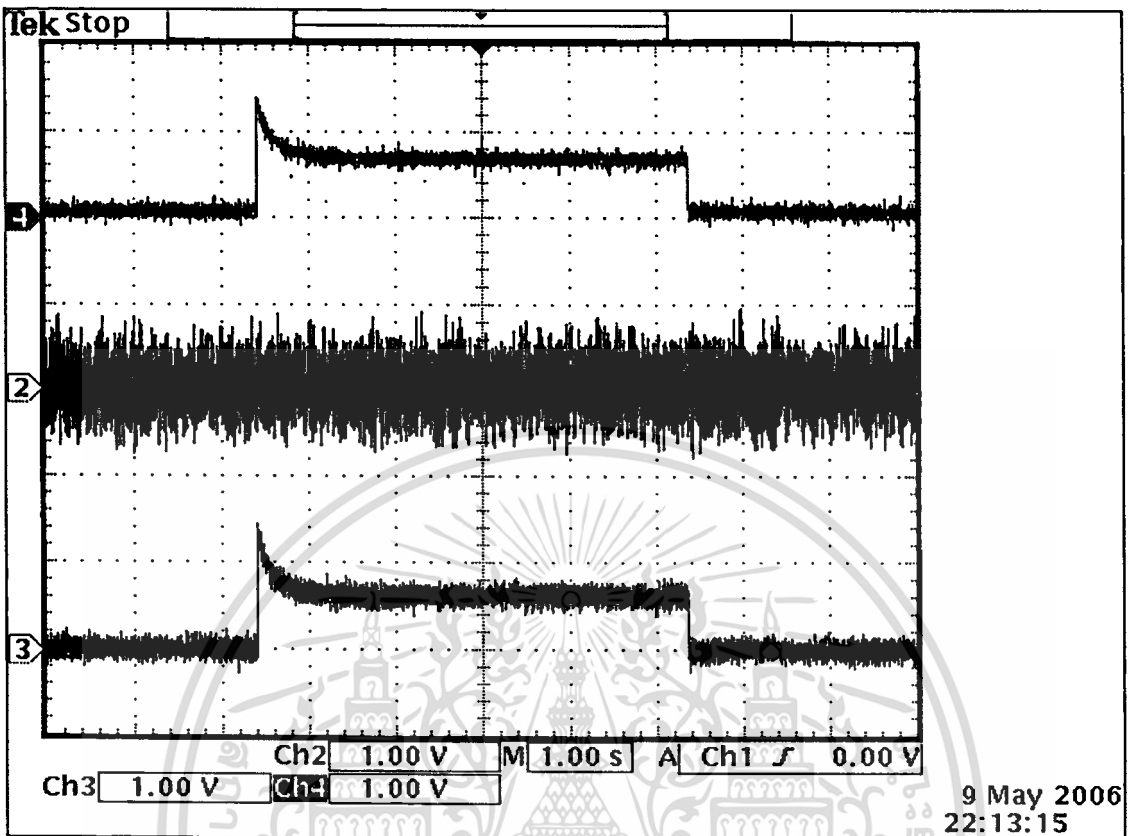
ภาพที่ 5.6c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน  
สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบกาลมาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



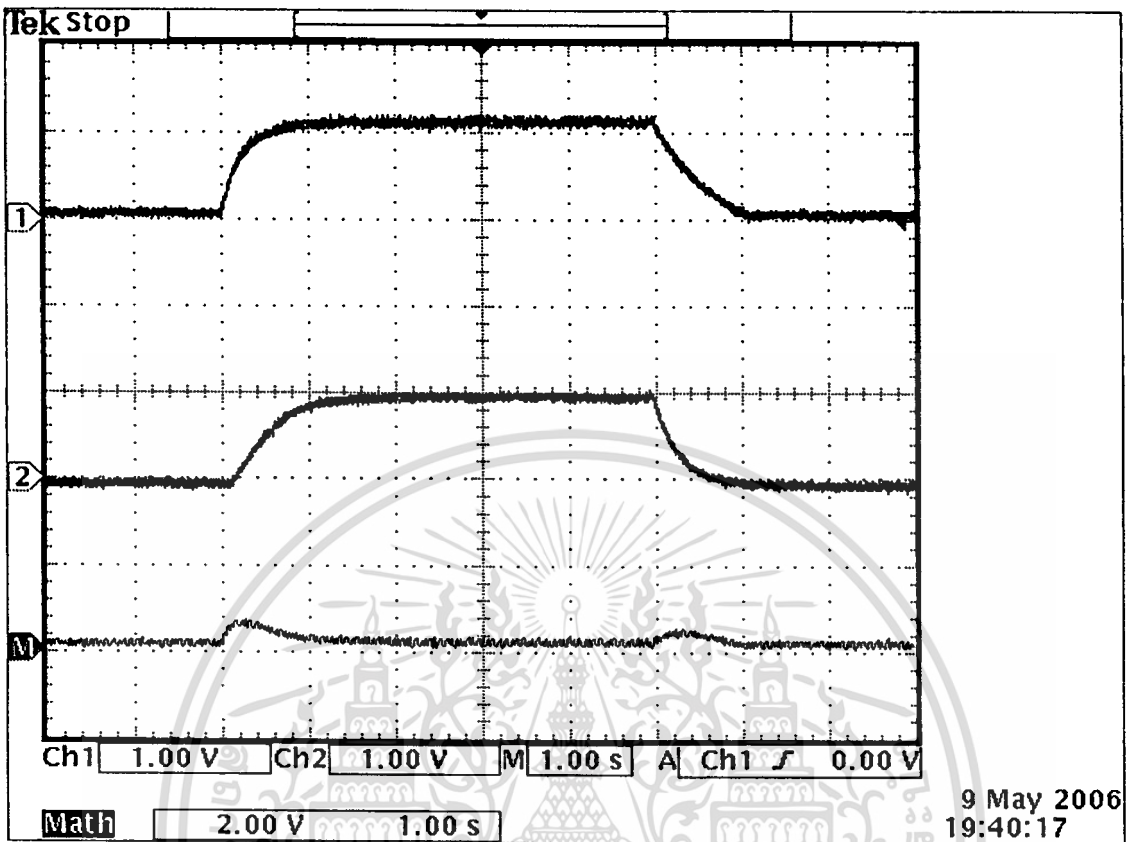
ภาพที่ 5.7a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 9.5 โวลต์  
 สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดฮาแมเจอร์  
 สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดฮาแมเจอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

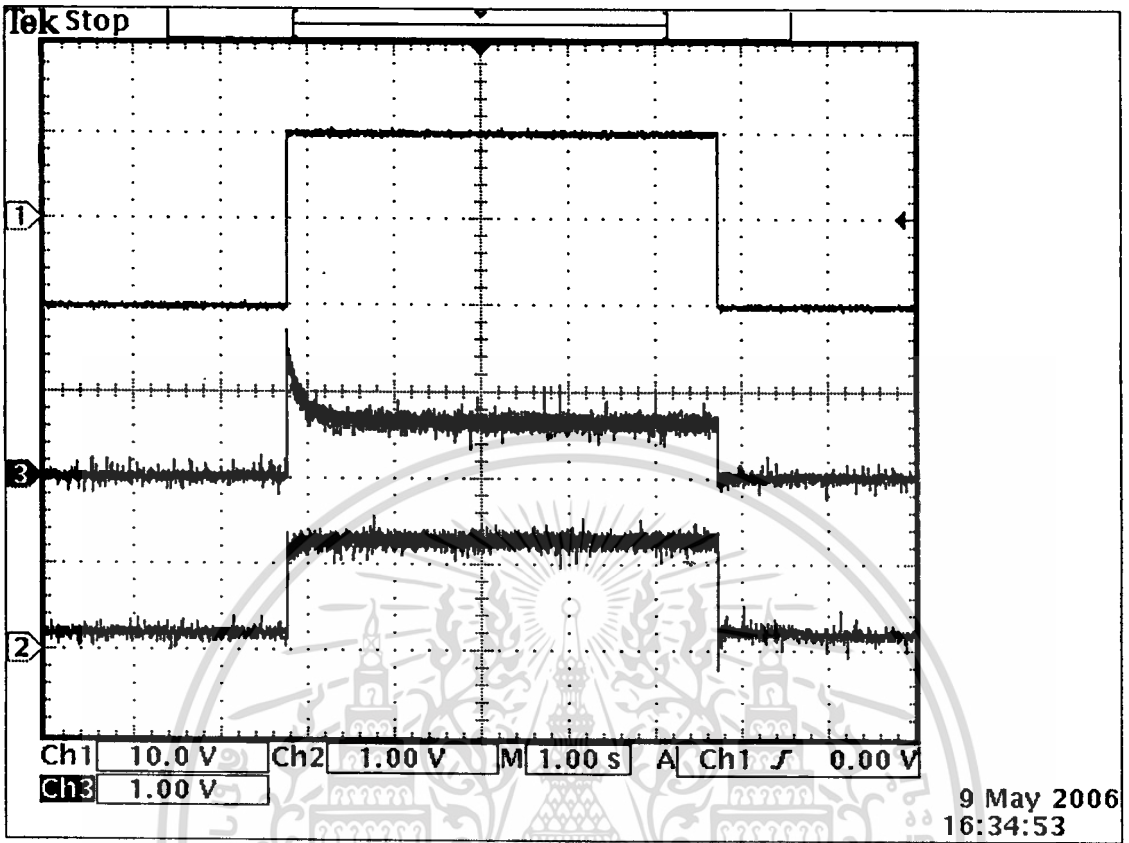


ภาพที่ 5.7b สัญญาณด้านบน กระแสอเมเจอร์ที่ Command Voltage 9.5 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสอเมเจอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

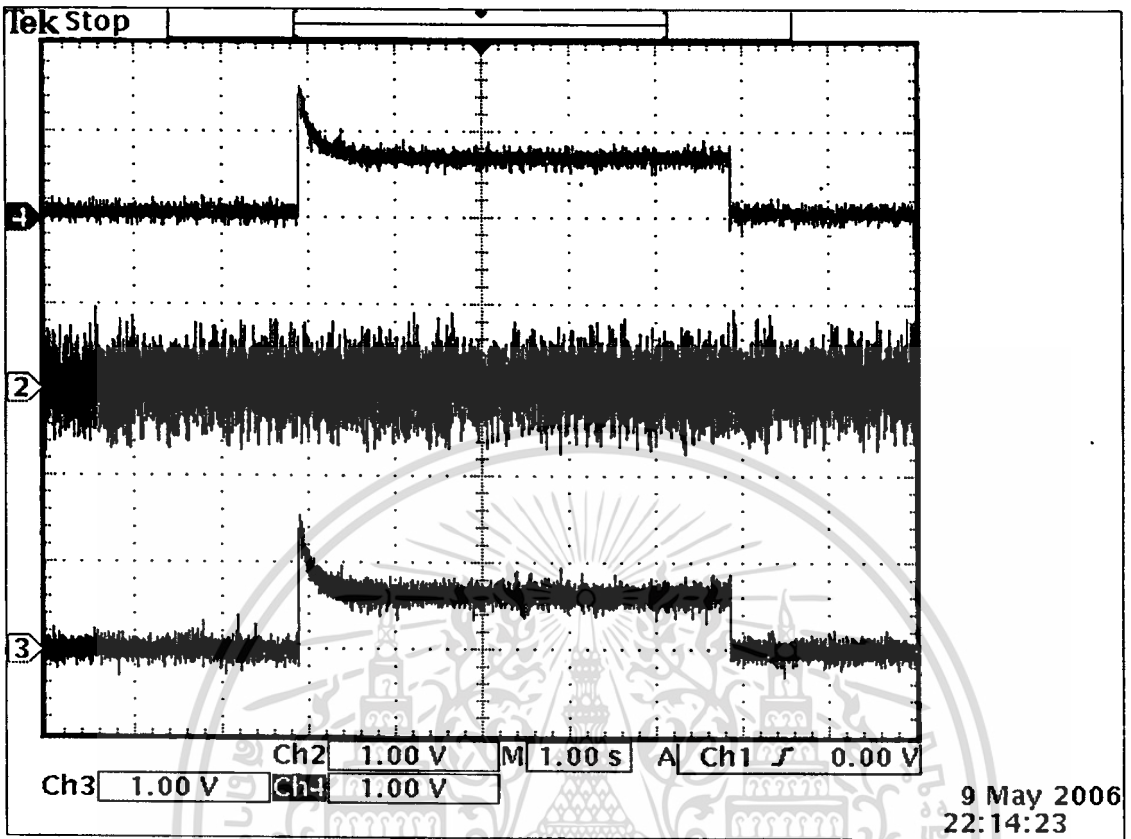


ภาพที่ 5.7c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
 สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน  
 สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
 ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน

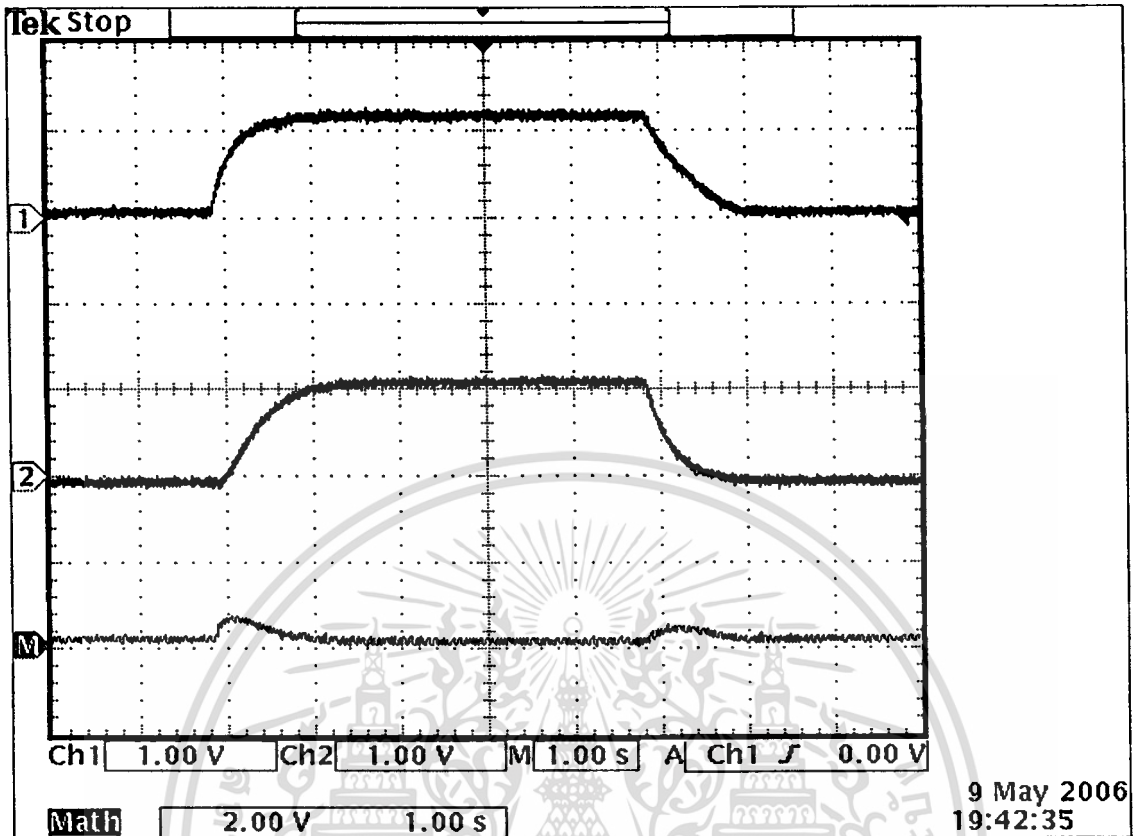


ภาพที่ 5.8a สัญญาณด้านบน แสดงแรงดันคำสั่ง ที่ 10.0 โวลต์  
 สัญญาณตรงกลางเป็นกระแสที่ขดลวดอาเมเจอร์  
 สัญญาณด้านล่างเป็นแรงดันที่ขดลวดอาเมเจอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.8b สัญญาณด้านบน กระแสแอมเพอร์ที่ Command Voltage 10.0 Volt  
 สัญญาณตรงกลางเป็นสัญญาณรบกวนขาวที่มี Covariance  $1 \text{ v}^2$   
 สัญญาณด้านล่าง การรวมสัญญาณรบกวนขาวเข้ากับกระแสแอมเพอร์



ภาพที่ 5.8c สัญญาณด้านบนคือความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับทางกล  
 สัญญาณตรงกลางคือความเร็วมอเตอร์จากตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน  
 สัญญาณด้านล่างเป็น ผลการเปรียบเทียบความเร็วมอเตอร์จากตัวตรวจจับ  
 ทางกลกับตัวกรองเชิงเลขแบบคาลมาน

## บทที่ 6

### สรุปผลการวิจัย

จากผลการทดลองพบว่า การประมาณค่าความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงด้วยตัวกรองคาบมาน จะให้ผลที่ถูกต้องใกล้เคียงกันเมื่อเทียบกับตัวตรวจจับทางกล และนอกจากนี้เมื่อมีการรวมสัญญาณรบกวนขาว เข้ากับกระแสอาเมเจอร์ซึ่งเป็นอินพุทของ ตัวกรองเชิงเลขแบบคาบมาน ผลการประมาณค่าความเร็วก็ยังถูกต้อง และมีความใกล้เคียงกันเมื่อเทียบกับตัวตรวจจับทางกล และในการทดลองนี้ จะพบว่า การรวมกันของสัญญาณรบกวนขาวที่มีขนาด  $1V^2$  เข้ากับกระแสอาเมเจอร์ ผลของการรวมสัญญาณพบว่าขนาดของสัญญาณรบกวนที่รวมกับกระแสอาเมเจอร์จะมีขนาดน้อยลงทั้งนี้เนื่องมาจากวงจรรวมสัญญาณและวงจรขยายสัญญาณแบบกลับเฟส มีแบนด์วิดท์ต่ำ ทำให้ลดทอนขนาดของสัญญาณรบกวนที่มีความถี่สูงลง ดังนั้นจึงเป็นผลทำให้ผลการรวมสัญญาณมีขนาดเล็กลงไปด้วย

อย่างไรก็ตามจากการทดลองนี้ สามารถแสดงให้เห็นว่า ตัวกรองเชิงเลขแบบคาบมานสามารถที่จะประมาณค่าตัวแปรสถานะในระบบไดนามิกได้อย่างมีประสิทธิภาพ แม้ว่าจะมีสัญญาณรบกวนเกินขึ้นเป็นจำนวนมากก็ตาม ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านระบบเครื่องมือวัด ระบบควบคุม เป็นต้น

# เอกสารอ้างอิง

- [1] J. B. Kenedyand and A. M. Neville, Basic Statistical Methods for Engineers and Scientists, Harper & Row Publishers, Inc., 1986.
- [2] P. G. Hoel, Introduction to mathematical statistics, John Wiley & Sons Inc., 1971.
- [3] ศันสนีย์ สุภภา, ความน่าจะเป็นและสถิติประยุกต์สำหรับวิศวกรสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2539.
- [4] R. E. Mortensen, Random Signals and Systems, John Wiley & Sons, Inc.,
- [5] Brian, D. O. Andersonand, J. B. Moore, Optimal Filter, Prentice-Hall, 1979.
- [6] J. G. Proakisand, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing, Prentice Hall ,1996
- [7] Texas Instruments, "Minimizing Quantization Effects Using the TMS320 Digital Signal Processor Family," 1994.
- [8] G.F. Franklin, J. D. Powell and M.L. Workman, Digital control of dynamic system, Addison Wesley Publishing Company, Inc.,1990
- [9] Texas Instrument., Sensorless Control with Kalman Filter on TMS320 Fixed-Point DSP. U.S.A.
- [10] Manfred Schroll., Sensorless Control of Permanent Magnet Synchronous Motor. Electrical Machine and Power System., Vol.22., U.S.A., Taylor & Francis In., 1994

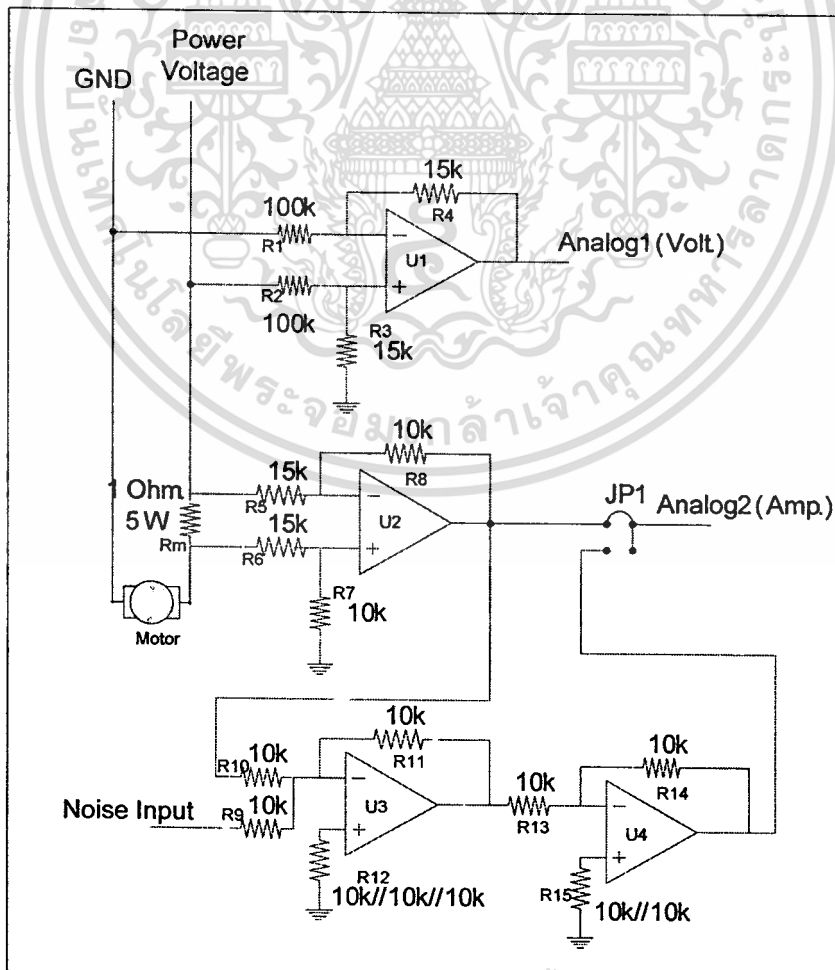


**ภาคผนวก ก.**  
**การออกแบบฮาร์ดแวร์**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## วงจรรขยายสัญญาณ และการนำสัญญาณเข้าสู่ TMS320C31 DSK

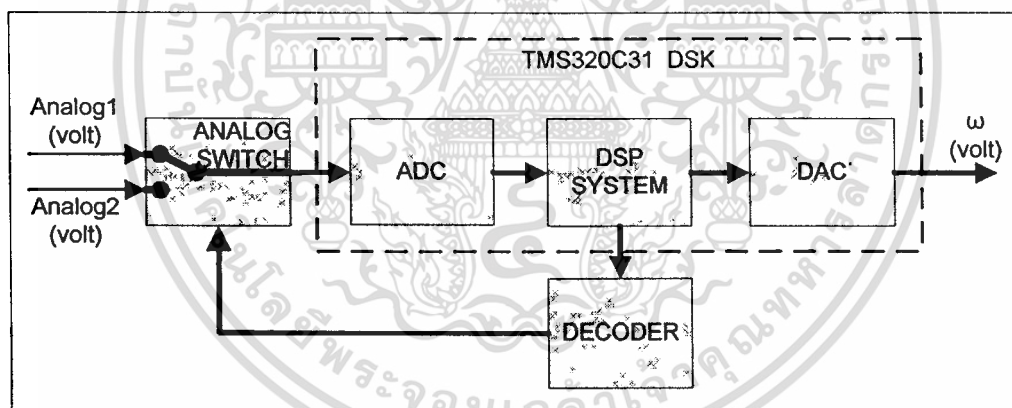
การตรวจวัดความเร็วมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงด้วยตัวกรองคาบมานโดยไม่ใช้ตัวตรวจจับ จำเป็นจะต้องมีอินพุทของระบบที่เป็น กระแสและแรงดันอาร์เมเจอร์ ซึ่งการนำอินพุทของระบบในส่วนที่เป็นแรงดันเข้าสู่ระบบทำได้โดยการนำแรงดันที่ตกคร่อมมอเตอร์ มาทำการขยายแรงดันด้วยวงจร Differential Amplifier (U1) มีกำลังขยายเป็น 0.15 เท่า เพื่อให้แรงดันที่ได้อยู่ในช่วงที่เหมาะสมกับวงจรแปลงแอนาลอกเป็นดิจิตอล และการนำอินพุทของระบบในส่วนที่เป็นกระแสเข้าสู่ระบบทำได้ โดยการแปลงกระแสให้อยู่ในรูปแรงดันเสียก่อนด้วยการนำตัวต้านทาน  $R_m$  ต่ออนุกรมเข้ากับมอเตอร์ จากนั้นจะใช้วงจร Differential Amplifier (U2) ขยายแรงดันที่ตกคร่อม  $R_m$  โดยมีกำลังขยายเป็น 0.667 เท่า เพื่อทำให้แรงดันที่ได้มีขนาดอยู่ในช่วงที่เหมาะสมกับวงจรแปลงแอนาลอกเป็นดิจิตอล นอกจากนี้การขยายสัญญาณของกระแสอาร์เมเจอร์ที่อยู่ในรูปแรงดันนี้จะมีการนำไปรวมเข้ากับสัญญาณรบกวนที่อยู่ในรูปแรงดัน ด้วยวงจรรวมสัญญาณ Summing Amplifier (U3) โดยมีกำลังขยายสัญญาณเป็น 1.0 ผลจากการรวมสัญญาณด้วยวงจร Summing Amplifier ให้ผลที่กลับเฟสกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องนำสัญญาณนี้กลับเฟสของสัญญาณให้ด้วยวงจร Inverting Amplifier (U4)



ภาพภาคผนวก ก.1 แสดงวงจรรขยายสัญญาณและวงจรรวมสัญญาณ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากวงจรดังกล่าวข้างต้นจะทำให้ได้สัญญาณอินพุทของระบบที่เป็นแรงดันอาร์เมเจอร์ (Analog1) และกระแสอาร์เมเจอร์ที่อยู่ในรูปแรงดัน (Analog2) เพื่อป้อนให้กับตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข โดยการผ่านวงจรแปลงแอนาลอกเป็นดิจิตอล ที่มีอยู่บนบอร์ดทดลองประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 DSK แต่เนื่องจากบอร์ดทดลองดังกล่าวมีวงจรแปลงสัญญาณแอนาลอกเป็นดิจิตอลเพียง 1 ช่องสัญญาณ จึงจำเป็นต้องตั้งที่การควบคุมช่องสัญญาณด้วยแอนาลอกสวิตช์เพื่อสลับช่องสัญญาณที่ป้อนให้กับวงจรแปลงสัญญาณแอนาลอกเป็นดิจิตอล การควบคุมการสลับช่องสัญญาณจะส่งค่าออกมาจากบอร์ดทดลอง ที่ตำแหน่ง 100000H เมื่อต้องการนำสัญญาณ Analog1 เข้าสู่วงจรแปลงแอนาลอกเป็นดิจิตอล และส่งค่าออกมาจากบอร์ดทดลองที่ตำแหน่ง 700000H เมื่อต้องการนำสัญญาณ Analog2 เข้าสู่วงจรแปลงแอนาลอกเป็นดิจิตอล เพื่อเป็นอินพุทของการประมวลผลเชิงเลข โดยที่ตำแหน่งดังกล่าวจะถูกถอดรหัสตำแหน่งด้วย PLD เมื่อตำแหน่งที่ส่งมาจากบอร์ดทดลองตรงกับตำแหน่งที่ถูกโปรแกรมไว้แล้วคือแห่ง 100000H และ 700000H ตัวถอดรหัสจะส่งสัญญาณระดับ TTL ออกมาเพื่อควบคุมการทำงานของแอนาลอกสวิตช์ จึงสามารถนำสัญญาณจากแรงดันอาร์เมเจอร์และกระแสอาร์เมเจอร์เข้าสู่ระบบประมวลผลได้โดยอธิบายไว้ในไดอะแกรมและแสดงการตั้งรหัสตำแหน่งดังนี้



ภาพภาคผนวก ก.2 ไดอะแกรมการนำสัญญาณอินพุทเข้าสู่ระบบประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

```

CHIP C3X GAL20V8          ;700000 - 70ffff
NC RW STRB A15 A16 A17 A18 A19 A20 A21 A22 GND
OE A23 T1 T2 T11 T22 CES2 CES1 OEF CEF NC VCC
EQUATIONS
/CES1 = /STRB*/A23*/A22*/A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15
;0x100000-107fff
/CES2 = /STRB*/A23*A22*A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15
;0x700000-707fff
/CEF = /STRB*/A23*A22*/A21*/A20*/A19*/A18*/A17
OEF = /RW
/T1 = /A23*/A22*A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15 ;300000
/T2 = A23*/A22*/A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15 ;900000
/T11 = /STRB*/A23*/A22*A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15
;300000
/T22 = /STRB*A23*/A22*/A21*A20*/A19*/A18*/A17*/A16*/A15

```

EQN2JED - Boolean Equations to JEDEC file assembler  
(Version V003)

Copyright (R) National Semiconductor Corporation  
1990, 1991

Document file for 3x\_2.eqn

Device: 20V8

```
$LABELS 24 NC RW STRB A15 A16 A17 A18 A19 A20 A21 A22
GND OE A23 T1 T2 T11
T22 CES2 CES1 OEF CEF NC VCC
```

Pin	Label	Type
1	NC	unused
2	RW	com input
3	STRB	com input
4	A15	com input
5	A16	com input
6	A17	com input
7	A18	com input
8	A19	com input
9	A20	com input
10	A21	com input
11	A22	com input
12	GND	ground pin
13	OE	unused
14	A23	com input
15	T1	neg, com output
16	T2	neg, com output
17	T11	neg, com output
18	T22	neg, com output
19	CES2	neg, com output
20	CES1	neg, com output
21	OEF	pos, com output
22	CEF	neg, com output
23	NC	unused
24	VCC	power pin

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้เฉพาะเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาตจากบริษัท

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

EQN2JED - Boolean Equations to JEDEC file assembler  
 (Version V003)  
 Copyright (R) National Semiconductor Corporation  
 1990,1991

Chip diagram (DIP)

	W_/		
NC	1		24   VCC
RW	2		23   NC
STRB	3		22   CEF
A15	4		21   OEF
A16	5		20   CES1
A17	6		19   CES2
A18	7		18   T22
A19	8		17   T11
A20	9		16   T2
A21	10		15   T1
A22	11		14   A23
GND	12		13   OE

REVISEMENTS		DATE	APPROVED
REV	DESCRIPTION	DATE	APPROVED
A	ECN563640(E) M. DANG 3-5-96		J. CLARK
	FORMAL RELEASE		

NOTES, UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:

- VCC IS APPLIED TO PIN 8 OF ALL 8-PIN IC'S, PIN 14 OF ALL 14-PIN IC'S, PIN 16 OF ALL 16-PIN IC'S, PIN 20 OF ALL 20-PIN IC'S, ETC.
- GROUND IS APPLIED TO PIN 4 OF ALL 8-PIN IC'S, PIN 7 OF ALL 14-PIN IC'S, PIN 8 OF ALL 16-PIN IC'S, PIN 10 OF ALL 20-PIN IC'S, ETC.
- RESISTANCE VALUES ARE IN OHMS.
- CAPACITANCE VALUES ARE IN MICROFARADS.
- HIGHEST REFERENCE DESIGNATOR USED:

A. CAPACITORS  
 B. RESISTORS  
 C. DIODES  
 D. IC'S  
 E. PORTS  
 F. HEADERS  
 G. CONNECTORS

C57  
 R55  
 D2  
 U9  
 P1  
 JP6  
 J3

REV	SH	REV	SH	REV	SH	REV	SH	REV	SH
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
1	2	3	4	5	6				

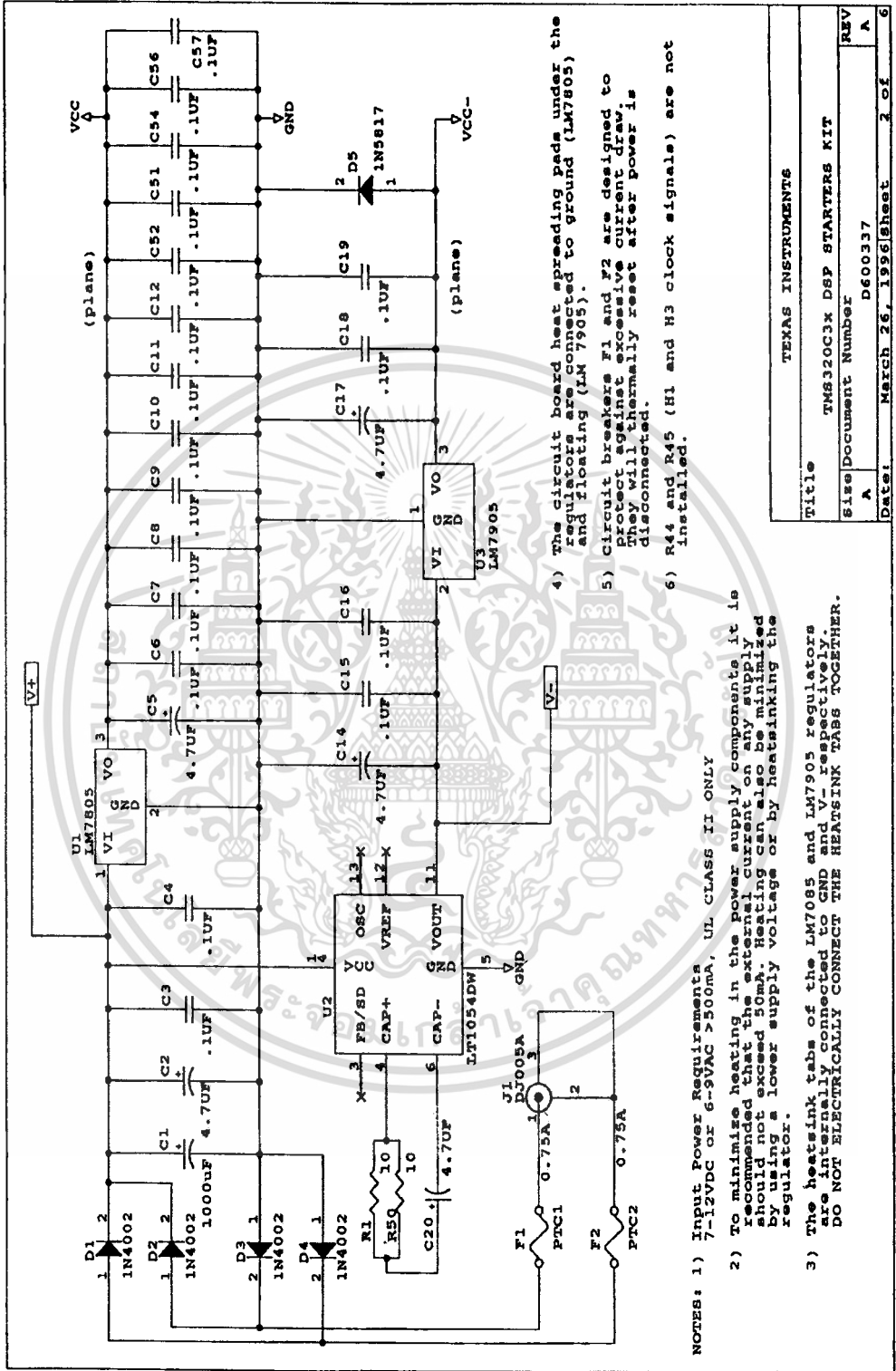
DWN	DATE	CHK	DATE
M. DANG	2-19-96	M. DANG	2-19-96
K. DAWKINS		K. DAWKINS	
K. JARSON		K. JARSON	
ENGR-MGR		ENGR-MGR	
J. COOHES		J. COOHES	
QA		QA	
M.G. WHISONANT		M.G. WHISONANT	
M.G. JACKSON		M.G. JACKSON	
RUSE		RUSE	
J. CLARK		J. CLARK	

REVISION	STATUS	OF SHEETS	DATE	BY	DESCRIPTION
D600335		7257			
NEXT ASSY	USED ON				
APPLICATION					

TEXAS INSTRUMENTS	SOFTWARE DEVELOPMENT SYSTEMS	SEMICONDUCTOR GROUP	HOUSTON, TEXAS
Title			
TMS320C3x DSP STARTERS KIT			
Size			
Document Number	D600337	REV	A
Date:	March 7, 1996	Sheet	1 of 6

ภาพภาคผนวก ก.3 วงจรของบอร์ดประมวลผลสัญญาณ TMS320C31 DSP Starter Kit

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



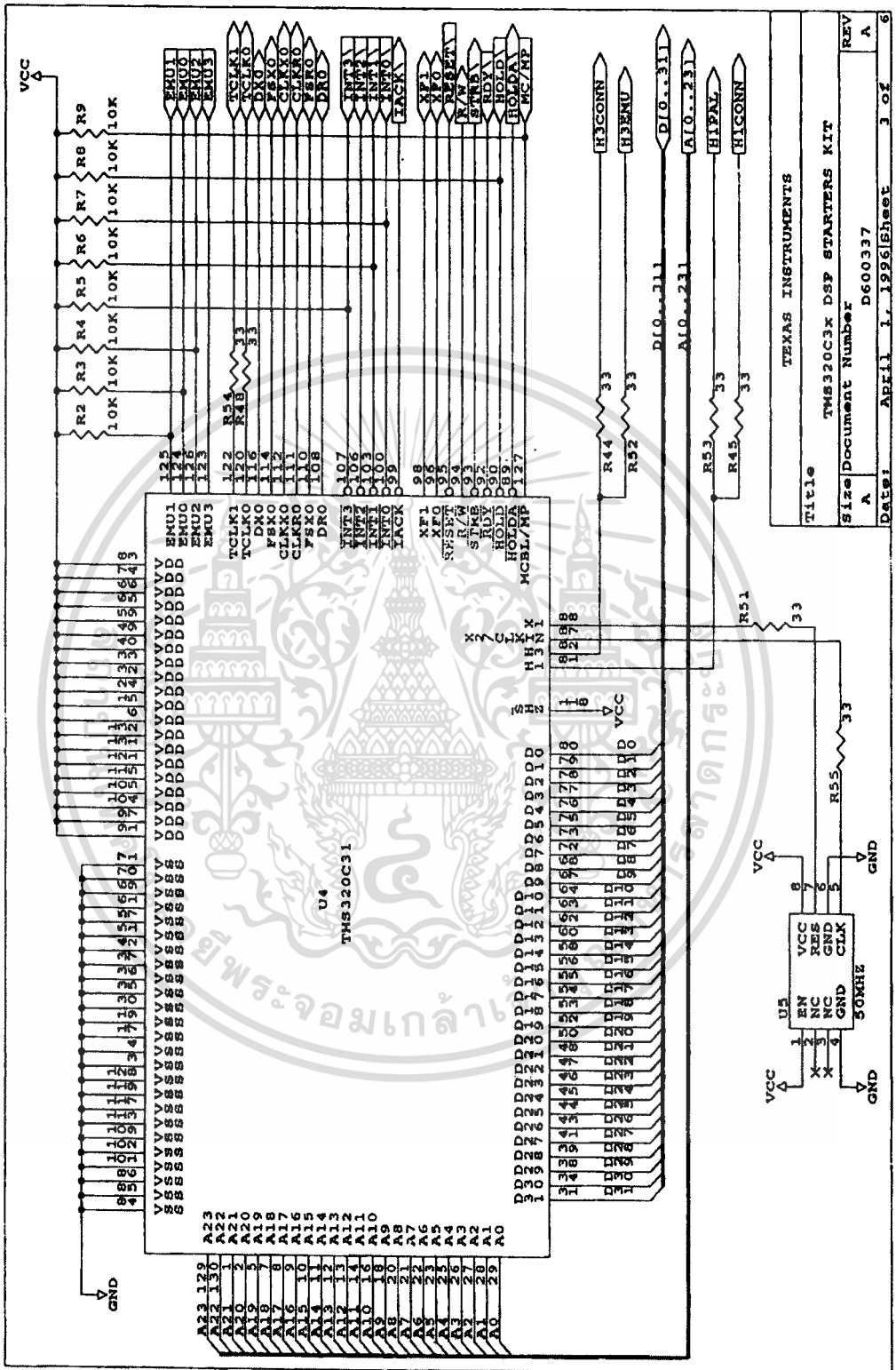
ภาพภาคผนวก ก.4 วงจรเรกูเรเตอร์และวงจรเรียงกระแส

- 4) The circuit board heat spreading pads under the regulators are connected to ground (LM7805) and floating (LM 7905).
- 5) Circuit breakers F1 and F2 are designed to protect against excessive current draw; they will be thermally reset after power is disconnected.
- 6) R44 and R45 (H1 and H3 clock signals) are not installed.

- NOTES: 1) Input Power Requirements 7-12VDC or 6-9VAC >500mA, UL CLASS II ONLY
- 2) To minimize heating in the power supply components it is recommended that the external current on any supplied component should not exceed 100mA. Heating should be avoided by using a lower supply voltage or by heatsinking the regulator.
- 3) The heatsink tabs of the LM7085 and LM7905 regulators are internally connected to GND and V- respectively. DO NOT ELECTRICALLY CONNECT THE HEATSINK TABS TOGETHER.

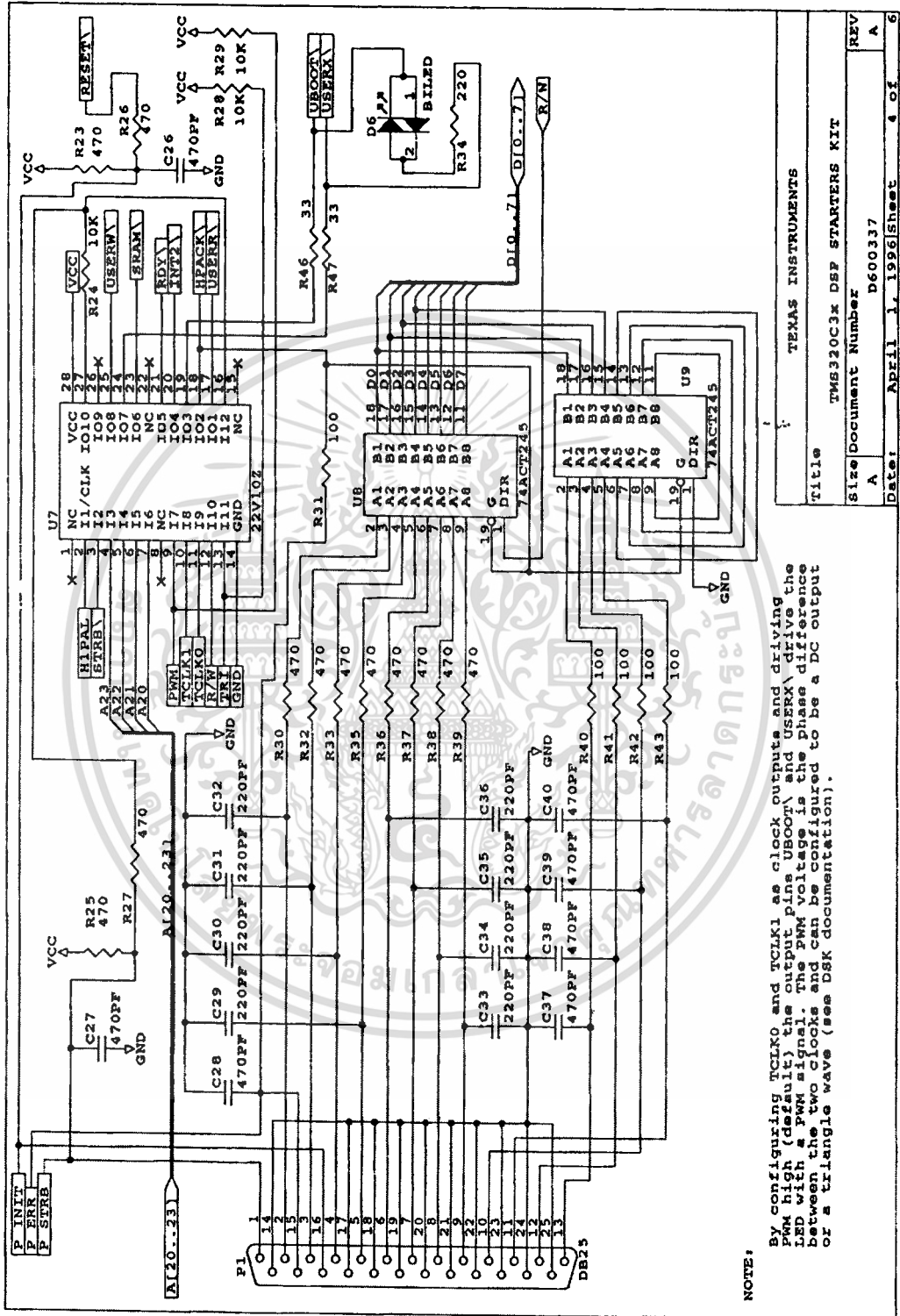
TEXAS INSTRUMENTS	
Title TMS320C3x DSP STARTERS KIT	
Size	Document Number
A	D600337
Date:	March 26, 1996
Sheet	2 of 6
REV	A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพภาคผนวก ก. 5 วงจรและขาของตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข

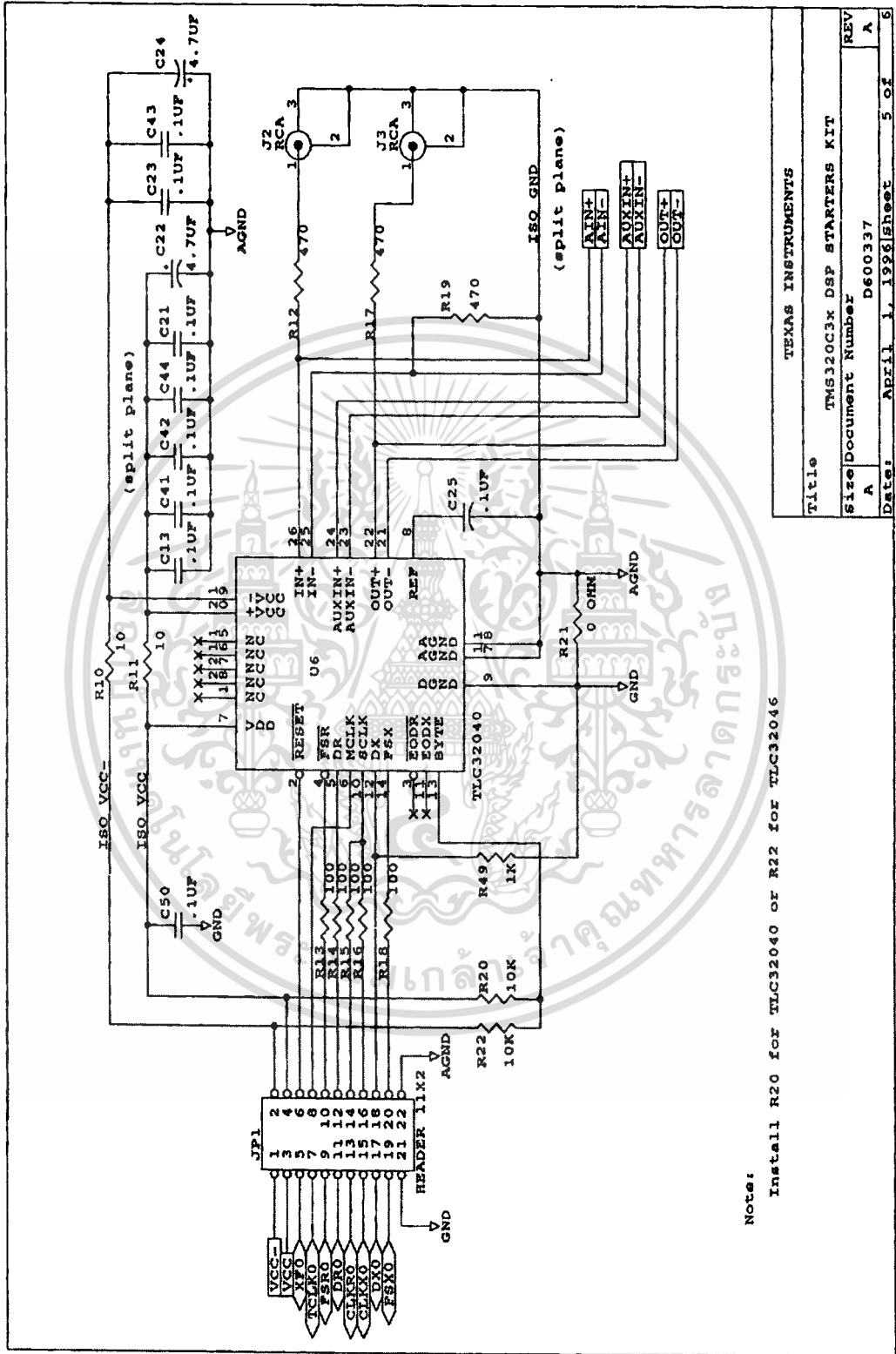
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพภาคผนวก ก.6 วงจรติดต่อระหว่างบอร์ด DSK กับ คอมพิวเตอร์

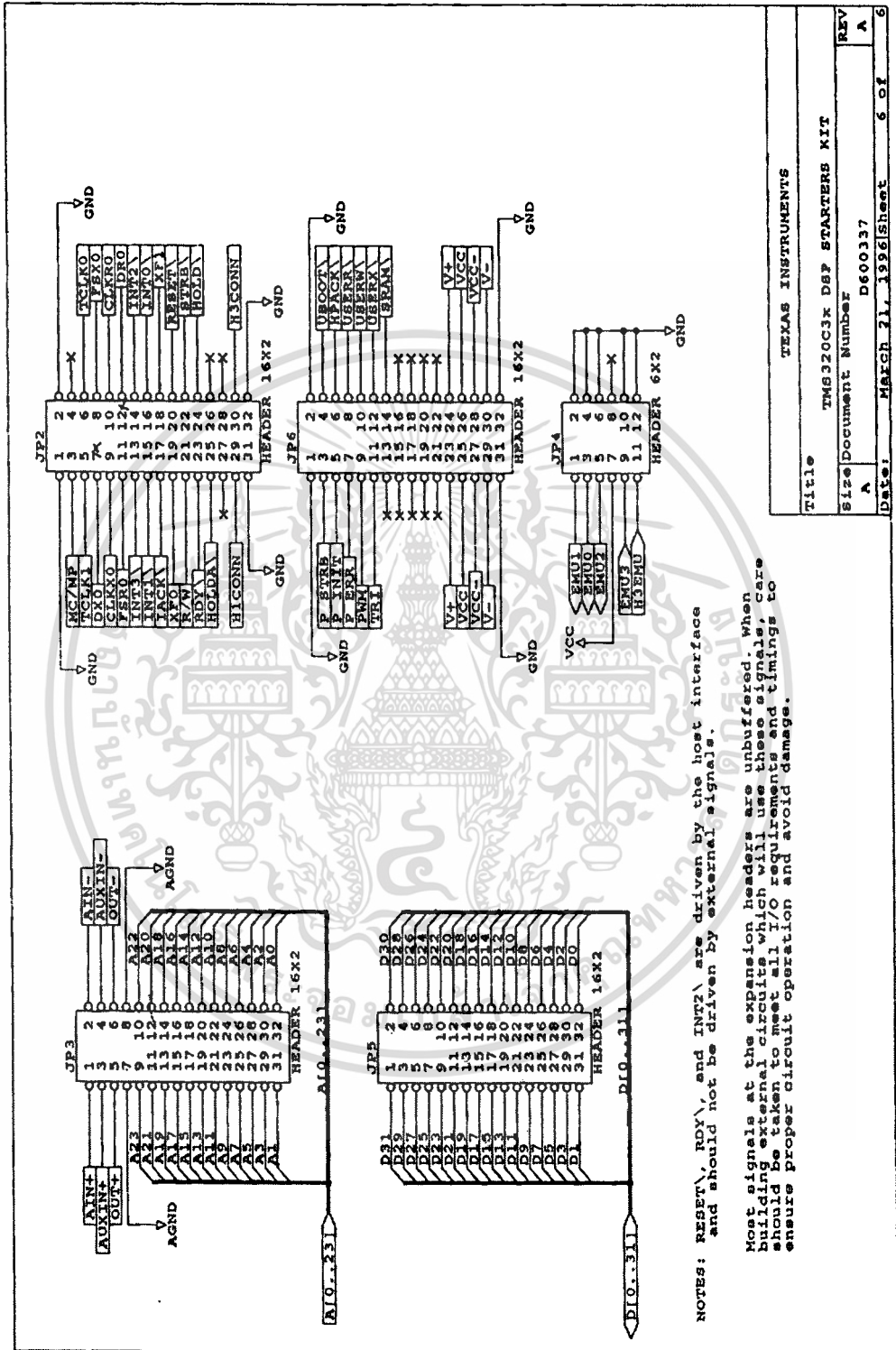
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

TEXAS INSTRUMENTS	
Title TMS320C3x DSP STARTERS KIT	
Size/Document Number	D600337
REV	A
Date:	April 1, 1996
Sheet	4 of 6



ภาพภาคผนวก ก.7 วงจรแปลงสัญญาณจากแอนะล็อกเป็นดิจิทัล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



NOTES: RESET, RDY, and INT2 are driven by the host interface and should not be driven by external signals.

Most signals at the expansion headers are unbuffered. When building external circuits which will use these signals, care should be taken to meet all I/O requirements and timings to ensure proper circuit operation and avoid damage.

TEXAS INSTRUMENTS	
Title	TMS320C3X DSP STARTERS KIT
Size/Document Number	D600337
REV	A
Date:	MARCH 31, 1996/Sheet 6 of 6

ภาพภาคผนวก ก.8 คอนเนคเตอร์ของบอร์ด DSK

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## M.C

```

#include <d:\lingdsp\dsp3x\c3x_lab\ch3\aiccom.c>
#include <d:\lingdsp\dsp3x\include\math.h>
int AICSEC[4]= {0x162c, 0x01,0x3872,0x63}; // fs = 20K

float ys;
int result, Vin;
void c_int05()
{
    Vin = UPDATE_SAMPLE(result);
    ys = Vin * 1.0;
}
void main(void)
{
    int vin=0x000001, iin= 0x000002;
    int Ain, Iin, Iin_;
    float xn = 0.5, xni=0.5, yn = 0.5 , yni=0.5;

    float A = 1.567/10000;
    float B = 0.9995;

    volatile int *my_port = (volatile int*) 0x100000;

    float Q0=2.36848e-15;
    float Q1=0;
    float Q2=0;
    float Q3=2.36848e-15;
    float A0=0.9999999;
    float A1=-0.0000;
    float A2=0.0000000;
    float A3=1.0000;
    float B0=0.3876e-4, B3=0.0000e-4;

```

```

float r =          1.2418e-11;
float H0=1;
float H1=0;
float P0=5;
float P1=0;
float P2=0;
float P3=1;
float X0=1;
float X2=0;
float P10=0;
float P11=0;
float P12=0;
float P13=0;
float Xp0=0;
float Xp2=0;
float K0=0;
float K2=0;
float U0=0;
float U2=0;
float c, t, yd, yd1, yd2, yd_;
ys = 10;

*my_port = vin;
U0=B0;
U2=B3;
AICSET();

```

```

    *my_port = vin;

Vin = UPDATE_SAMPLE(result);
xn = Vin;

////////////////////////////////////
while(1)
{
    Xp0 = A0*X0+A1*X2+U0;
    Xp2 = A2*X0+A3*X2+U2;

    P10 = A0*P0*A0 + A1*P2*A0 + A0*P1*A1 + A1*P3*A1 + Q0;
    P11 = A0*P0*A2 + A1*P2*A2 + A0*P1*A3 + A1*P3*A3 + Q1;
    P12 = A2*P0*A0 + A3*P2*A0 + A2*P1*A1 + A3*P3*A1 + Q2;
    P13 = A2*P0*A2 + A3*P2*A2 + A2*P1*A3 + A3*P3*A3 + Q3;

    Vin = UPDATE_SAMPLE(result);
    *my_port = vin;
    c = 1/(H0*P10*H0 + H1*P12*H0 + H0*P11*H1 + H1*P13*H1 + r);
    K0 = P10*H0*c + P11*H1*c;
    K2 = P12*H0*c + P13*H1*c;

    yd2 = yd1;
    yd1 = yd;
    yd = H0*Xp0+H1*Xp2;

    result = (int)(yd)/16500;

```

```

//asm(" IDLE ");
Iin = UPDATE_SAMPLE(result);
*my_port = iin;

ys = Vin*1.0+10;

X0 = Xp0 + K0 * (ys*(ys-Iin) - yd );
X2 = Xp2 + K2 * (ys*(ys-Iin) - yd );

```

```

P0 = P10 - (K0*H0*P10 + K0*H1*P11);
P1 = P11 - (K0*H0*P11 + K0*H1*P13);
P2 = P12 - (K2*H0*P10 + K2*H1*P11);
P3 = P13 - (K2*H0*P11 + K2*H1*P13);

```

```
U0 = Iin * B0;
```

```
U2 = Iin * B3;
```

```
}
```

```
/* Xp = A*X+ U*B;
```

```
P1 = A*P*A' + G*Q*G' ;
```

```
Yd(i) = H*Xp;
```

```
c = (H*P1*H' + R);
```

```
K = P1*H' / c;
```

```
P = (1-H*K)*P1;
```

```
U = [Ya(i) 0; 0 Ya(i)];*/
```



ภาคผนวก ก.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

Naramit Whamook, Surapan Yimman, Manoon Puangpool, Sorawat Chivapreecha  
and Kobchai Dejhan ,” Speed Sensorless DC Motor Using Kalman Filter”,  
ICCAS2004 – August 25-27 2004

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ICCAS '04

# ICCAS 2004

International Conference on Control,  
Automation and Systems

August 25-27, 2004, The Shangri-La Hotel, Bangkok, Thailand

Organized by:

Research Center for Communications and Information Technology, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
The Institute of Control, Automation, and Systems Engineers, Korea



**ICASE**

In association with:



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## Speed Sensorless DC Motor Using Kalman Filter

Naramit Whamook\*, Surapan Yimman\*\*, Manoon Puangpool\*\*, Sorawat Chivapreecha\* and Kobchai Dejhan\*

\*Faculty of Engineering and Research Center for Communication and Information Technology,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand  
Tel: +66-2-326-4238, +66-2-326-4242, Fax: +66-2-326-4554; E-mail : kobchai@telecom.kmitl.ac.th

\*\*King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Bangkok, 10800, Thailand  
Tel. +66-2-913-2500; E-mail : sym@kmitnb.ac.th

**Abstract:** This paper proposes a new application of Kalman filter to estimate speed sensorless DC motor. Kalman filter can estimate the system state variables accurately; even the system input is disturbed with noise. In the design, the mathematical model of DC motor in discrete state-space form will be created; the speed of DC motor which is considered as state variable and can be estimated by using Kalman filter. In the experiment; TMS320C31 floating point digital signal processor is used for hardware implementation, the input is disturbed with/and without white noise in the experiment. The experimental results show the speed of DC motor which is estimated by Kalman filter has good accuracy when compared with the results from tacho-meter.

**Keywords:** Kalman filter, speed sensorless,

### 1. INTRODUCTION

In the past, the motor speed is measured by using to sense. Actually, the tacho-meter is used for converting the speed-to-voltage; because the structure of DC motor consists of brush, commutator, mechanical components and etc. To use the tacho-meter for a long time, those components will be deteriorated and give the error in speed measurement. Also, the motor speed measurement system without mechanical components was proposed. The design process uses the continuous time system of motor in transfer function or state-space form [1] where the system inputs are armature voltage and armature current, system output determines the speed. Hence, the transform of continuous time system to discrete time system [2] and implement to digital signal processor chip is considered and proposed. This method of motor speed estimation should be correct when the system input separates from noise but whenever noise interferes in the system input such as voltage or current, the speed estimation will be error.

To overcome this problem, this paper proposes the design and implementation of motor speed estimation system using Kalman filter. Presently, Kalman filter is widely used for applying in digital signal processing [3] such as signal filtering, digital control by Kalman filter is a state variable estimation of dynamic system which can be operated even the dynamic system will be disturbed with noise. The design stage begins from determine mathematical model of DC motor in discrete state-space form and defined system input as voltage and current, the system output is speed. Since Kalman filter is used to estimate the speed of DC motor and give the result in voltage; as same as the voltage that gets from tacho-meter, not only the noise interferes with the system input, the speed estimation by using Kalman filter can be endured and give results correctly. Whatever the algorithm of Kalman filter has the complexity computation, also in an implementation must be necessary computing on floating point processor for accuracy in processing [4, 5].

### 2. THEORY

The Kalman filter uses the continuous state-space and can be classified into 3 type [6], continuous Kalman filter (CKF), continuous discrete Kalman filter (CDKF) and discrete

Kalman filter (DKF). DKF has the error covariance less than CKF when compared with the average value if DKF is better than CDKF [6]. This paper proposes the design by using the DKF type, the Eq. form is divided into two types, consists of the time update period. It is assigned as shown in Eq.s (1) and (2).

$$P_1(K) = A * P(K-1) * A' + BQB' \quad (1)$$

$$\hat{X}_p(K) = A * \hat{X}(K-1) \quad (2)$$

Where  $K=1, 2, 3, \dots$

$P_1(K)$  and  $P(K)$  is the error covariance,  $Q$  is covariance matrix,  $\hat{X}_p(K)$  and  $X(K-1)$  are state-vectors,  $A$  is matrix variable or system matrix of dynamic system.  $B$  is input of dynamic system. The measurements during the variation period can be shown in Eqs. (3)-(5) [7 - 9].

$$K(K) = P_1(K) * C' * [C * P_1(K) * C' + R]^{-1} \quad (3)$$

$$\hat{X}(K) = \hat{X}_p(K) + K(K) * [y(K) - C * \hat{X}_p(K)] \quad (4)$$

$$P(K) = P_1(K) - K(K) * C * P_1(K) \quad (5)$$

Where  $K(K)$  is Kalman gain

$y(K)$  is measurement of  $y(1), y(2), \dots, y(k)$

The dynamic state variable system is shown in Eq. (6) [10].

$$X(K+1) = A(K) * X(K) + B(K) * W(K) \quad (6)$$

The measurement system is rewritten as shown in Eq. (7).

$$y(K+1) = C(K+1)X(K+1) + v(k+1) \quad (7)$$

$W(K)$  is noise in the dynamic system and  $v(K+1)$  is the measured signal.

### 3. PROPOSED DESIGN METHOD

To estimate sensorless motor speed by using Kalman filter is proposed as shown in Fig. 1.

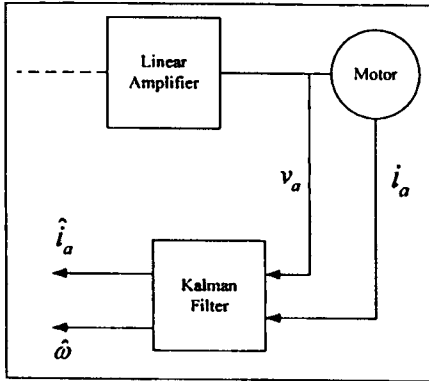


Fig. 1 Block diagram of sensorless motor speed estimation based on Kalman filter

Fig. 1, Kalman filter is able to estimate the speed of DC motor and it uses armature voltage ( $v_a$ ) and armature current ( $i_a$ ) as input of Kalman filter for speed ( $\omega$ ) calculation. The algorithm of Kalman filter cooperates with the others parameters of DC motor. The design has to know the characteristics and parameters of DC motor.

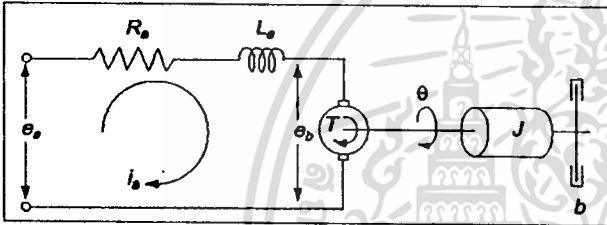


Fig. 2 DC motor electrical model

The schematic diagram of an armature controlling by DC servomotor is shown in Fig.2. The system variables are;

- $e_a$ : Armature voltage
- $e_b$ : Back emf.
- $i_a$ : Armature current
- $T$ : Torque produced by motor
- $\theta$ : Angular position of motor shaft
- $\omega$ : Angular velocity of motor shaft

The parameters of the system are;

- $R_a$ : Armature resistance
- $L_a$ : Armature inductance
- $J$ : Moment of inertia of motor shaft
- $B$ : Coefficient of viscous friction

The system parameters (are not shown in Fig.2) are;

- $K_T$ : Torque constant
- $K_b$ : Back emf constant

Fig. 2, the armature voltages can be found as in Eq. (8);

$$\begin{aligned} v_a &= L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b \\ e_b &= K_b \omega \\ v_a &= L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega \end{aligned} \quad (8)$$

The occurred electrical torque in motor will change depending on the armature current as shown in Eq. (9);

$$T = K_T i_a \quad (9)$$

The mechanical torque of motor is written as in Eq. (10);

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (10)$$

For lossless motor, the electrical torque is equal to the mechanical torque. Eqs. (9) and (10) can be rewritten as in Eq. (11);

$$K_T i_a = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (11)$$

Eqs. (8), (11) can be rearranged as shown in Eqs. (12) and (13);

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b \omega}{L_a} + \frac{e_a}{L_a} \quad (12)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_T i_a}{J} - \frac{B\omega}{J} \quad (13)$$

The continuous state-space form of Eqs. (12) and (13) can be rewritten as in Eqs. (14) and (15);

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} e_a \quad (14)$$

$$y_{SO}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} \quad (15)$$

Compare Eq. (14) with state Eq. it can obtain;

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_T}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thus, transform matrix A and matrix B to discrete system by using bilinear transform and substitute matrix A and matrix B in discrete system to Eq. (1) – (7) for speed estimation.

#### 4. DESIGN EXAMPLE

The experiment uses DC motor as experimental test set from Feedback Instrument Inc., motor drive set model SA150D, power supply model PS150E and DC motor model MT150F. The block diagram of connection is shown in Fig. 3.

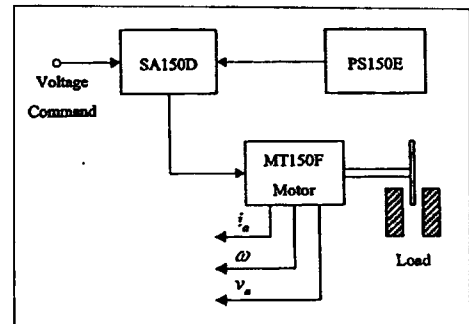


Fig. 3 Block diagram of motor drive test set

The DC motor in the experiment has parameters as shown in Table 1.

Table 1 Parameters of DC motor

Parameter	Value
$R_a$	3.0 Ohm
$L_a$	5.16 mH
$J$	$3 \times 10^{-5} \text{ Kg m}^2$
$B$	0.0158
$K_T$	0.0282 Nm/A
$K_b$	2.78 V/Krpm

The connection diagram of DC motor speed estimation in this experiment is shown in Fig. 4.

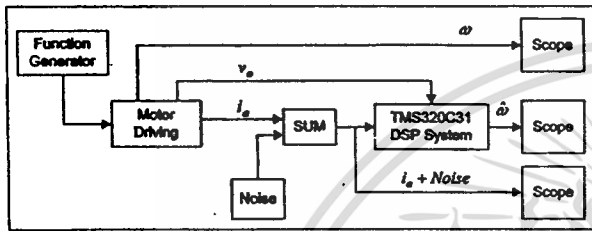


Fig.4 Connection of DC motor speed estimation in experiment

In Fig. 4,  $\omega$  is obtained speed of motor from the tachometer,  $\hat{\omega}$  is obtained speed of motor from estimation and in the experiment has the random noise signal disturbed with  $i_a$ . Substitute the parameters from Table 1 into Eq. (14), the matrix  $A$  and matrix  $B$  can be obtained as shown in Eq. (16);

$$A = \begin{bmatrix} -581.40 & -538.76 \\ 28.20 & -15.8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 193.8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Transform Eq. (16) to discrete system as shown in Eq. (17), where the given sampling frequency is 10 kHz.

$$A = \begin{bmatrix} 0.94344 & -0.05229 \\ 0.00273 & 0.99834 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.01882 \\ 0.00002 \end{bmatrix} \quad (17)$$

5. RESULTS

In the experiment, let the voltage command is between 7–10 volt, the obtained voltage from tachometer is compared with obtained voltage from Kalman filter as shown in Table 2.

Table 2 DC Comparison of motor speed

Voltage command	Output voltage obtained from tachometer ( $\omega$ )	Output voltage obtained from Kalman Filter ( $\hat{\omega}$ )
7.0	1.0	1.0
7.5	1.15	1.2
8.0	1.3	1.4
8.5	1.5	1.5
9.0	1.6	1.65
9.5	1.8	1.85
10.0	2.0	1.95

Let the voltage command 7 V and 10 V is square wave signal frequency 0.1 Hz and combined random noise with covariance  $1 \text{ V}^2$  to armature current as shown in Fig. 4. The experimental results are measured by oscilloscope as shown in Figs. 5 – 8

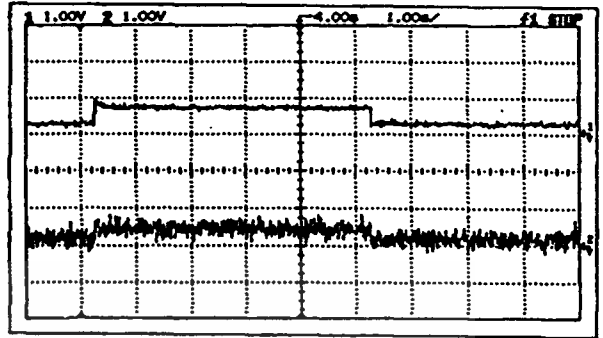


Fig. 5 The upper trace is armature current at voltage command 7.0 V, The lower trace is random noise with covariance  $1 \text{ V}^2$  adding to armature current

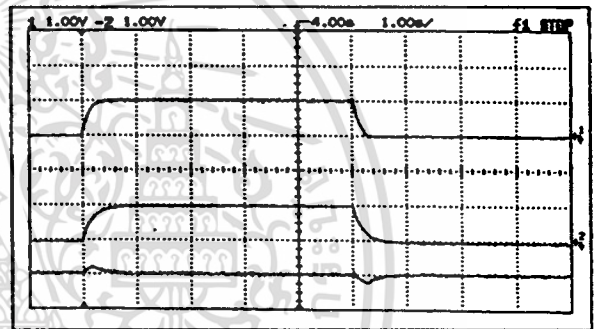


Fig. 6 The upper trace is motor speed from tachometer The middle trace is motor speed from Kalman filter, The lower trace is motor speed comparison between tachometer and Kalman filter method

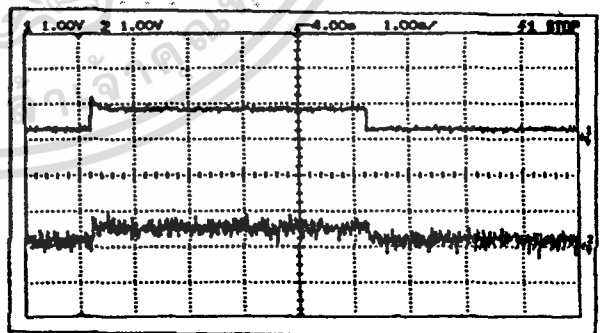


Fig. 7 The upper trace is armature current at voltage command 10.0 V, The lower trace is random noise with covariance  $1 \text{ V}^2$  adding to armature current

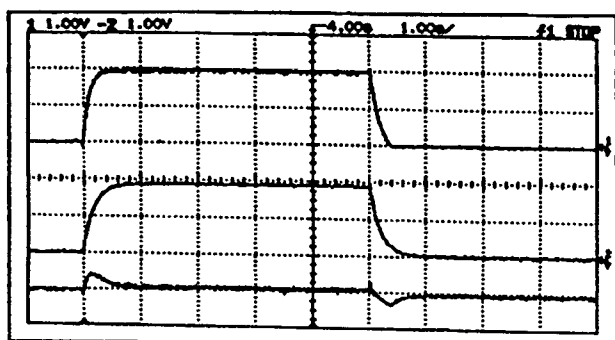


Fig. 8 The upper trace is motor speed from tachometer. The middle trace is motor speed from Kalman filter. The lower trace is motor speed comparison between tachometer with Kalman filter method.

## 6. CONCLUSION

The experimental results show that DC motor speed estimation by using Kalman filter will give the results correctly in the vicinity when compared with the results from tachometer. Although, the armature current is the input of Kalman filter and will be disturbed with random noise. Consequently, Kalman filter can be used to estimate the parameters in dynamic system with high performance and has the robustness to disturbance which has the advantages for applications with instrumentation, control system and etc.

## REFERENCES

- [1] K. Ogata, "Modern control engineering," 4th Ed., Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall, 2002.
- [2] K. Ogata, "Discrete-Time Control Systems," 2nd Ed., Prentice Hall, 1995.
- [3] K. Dejhan, S. Yimman, A. Tirat and F. Cheevasuvit, "TMS320C31-based narrow-band noise rejection Kalman filter implementation," Proc. 2002 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT'02), Bangkok, Thailand, December 11-14, 2002.
- [4] Texas Instruments, "Minimizing Quantization Effects Using the TMS320 Digital Signal Processor Family," 1994.
- [5] Texas Instruments, "TMS320C3x DSP Starter Kit," 1996.
- [6] C. M. Kwan, "A Note on Kalman filtering," IEEE Trans. Education, Vol.42, No.3, August 1999.
- [7] R. G. Brown, P. Y. C. Hwang, "Introduction to Random Signals and Applied Kalman filter," 1997.
- [8] F. L. Lewis, "Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory," School of Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, U.S.A.
- [9] J. V. Candy, "Signal Processing The Model-Based Approach," Lawrence Livermore National Laboratory and University of Santa Clara, U.S.A.
- [10] V. Strojic, "State Space Theory of Discrete Linear Control," 1981.

## ประวัติผู้เขียน

นาย เนรมิต หว้ามูช เกิดเมื่อวันที่ 16 กุมภาพันธ์ 2524 ที่จังหวัด นครราชสีมา สำเร็จ การศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์แพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ ประชุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีการศึกษา 2545

มีความสนใจทางด้านการโปรแกรมด้วยคอมพิวเตอร์ เมื่อศึกษาอยู่ในระดับมัธยมศึกษา ตอนปลาย ได้รับทุนสนับสนุนจาก NECTEC ในโครงการประกวดซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ขนาดเล็ก 1 ครั้ง และในโครงการของนักวิทยาศาสตร์รุ่นเยาว์ สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ 1 ครั้ง และมีความสนใจทางด้านระบบคอมพิวเตอร์สมองกลฝังตัว ระบบควบคุม ระบบอัตโนมัติ ด้วยตัว ประมวลผลขนาด 8-32 บิต และ PLC นอกจากนี้ยังมีความสนใจทางด้าน Image Processing และ Signal Processing ด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้