

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและการออกแบบ

The Study of Nonlinear System Analysis and Design



เลขหน้า.....  
เลขทะเบียน.....**61977**.....  
วัน,เดือน,ปี.....**25 ก.ค. 2549**.....

b.....  
i.....

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การศึกษาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและการออกแบบ  
The Study of Nonlinear System Analysis and Design



โดย  
นางสาวฉัฐวรรณ โลราช 44010158  
นางสาวอังรา พุทธิพันธ์ 44010605

อาจารย์ที่ปรึกษา  
ดร.ประเมษฐ์ ประยานันท์

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญาานิพนธ์ปีการศึกษา 2547

ภาควิชา วิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การศึกษาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและการออกแบบ

ผู้จัดทำ

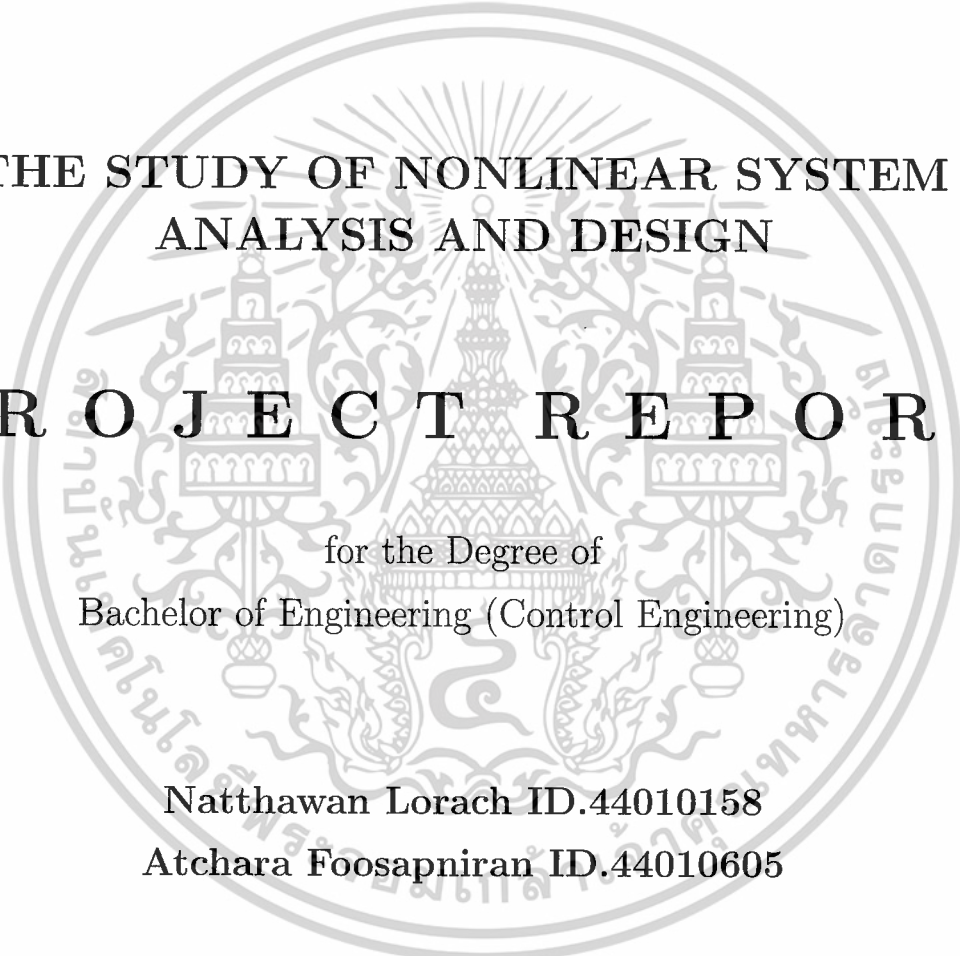
นางสาวณัฐวรรณ โลราช

นางสาวอัจฉรา พุทธิพันธ์นรินทร์



.....อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ดร.ประเมษฐ์ ประนยานันท์)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**THE STUDY OF NONLINEAR SYSTEM  
ANALYSIS AND DESIGN**

**P R O J E C T R E P O R T**

for the Degree of  
Bachelor of Engineering (Control Engineering)

**Natthawan Lorach ID.44010158**  
**Atchara Foosapniran ID.44010605**

**March 2005**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# THE STUDY OF NONLINEAR SYSTEM ANALYSIS AND DESIGN

## PROJECT REPORT

Submitted in Partial Fulfillment  
of the REQUIREMENTS for the

Degree of

**Bachelor of Engineering (Control Engineering)**

at the

**King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang**

by

**Natthawan Lorach ID.44010158**

**Atchara Foosapniran ID.44010605**

**March 2005**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Approved by the Project Advisor:

P. Pranayanuntana

Dr.Poramate Pranayanuntana

MAR 27, 2005

Date



## VITA

**Natthawan Lorach** was born in Nan, on November 8, 1982. She received her high school diploma from Thawangphapittayakhom. Now she is a forth-year Control engineering student at King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. She was trainee in Rolling Stock Department, BTS Sky Train Maintenance, Siemens(Thailand) Ltd. Treasurer of Electronics Club, Faculty of Engineering, Silver Medal Thai Chess, Kaesad Game.

**Atchara Foosapniran** was born in Nakhorn Rajasima, on July 7, 1982. She received her high school diploma from Phimai Wittaya School. Now she is a forth-year Control engineering student at King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. She was trainee in industrial instrument engineering department, Kanit Engineering, Bangkok.

The work presented in this project was undertaken between June 2004 and March 2005 under the supervision of Professor Poramate Pranayanuntana.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ACKNOWLEDGMENT

We wish to thank Dr.Poramate Pranayanuntana for his guidance, both in the selection of this topic and in its writing. He teaches us a lot of useful things. He spends lots of times with us, about 10 hours a day. Sometimes, we thought we were so tired to do anything but when we saw his persistent face, we have a willpower to fight again. Without him, it is impossible to come this far in this project. He also provides many essential text books for us. His reading room can be defined as a small library contain knowledges that proved useful. Thanks for such a good text editing program as LaTeX that make a mathematical typing as easy as peeling bananas.

And we also thank his family, his wife with one naughty daughter and one childish son. His wife is very kind. She acts as if we are part of her family. They have never complained us for coming to their apartment everyday.

We wish to thank Dr.Khongsak for his guidance in using *Visio*. And also thank all my teachers at the Department of Control engineering for a knowledge given to us for four years. At last, we absolutely thank our family for their willpower giving to us all the times. We will not disappointed you all, we promised.

## AN ABSTRACT

# THE STUDY OF NONLINEAR SYSTEM ANALYSIS AND DESIGN

by

**Natthawan Lorach ID.44010158**

**Atchara Foosapniran ID.44010605**

**Advisor : Dr. Poramate Pranayanuntana**

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the  
Degree of Bachelor of Engineering (Control Engineering)

March 2005

Nonlinear systems can be found everywhere in everyday life. It is known that Non-linear Systems can give very close approximation. Despite in modelling any practical systems the usefulness of a nonlinear application, a linear control system is more widely used because of its simplicity and requiring less knowledge. So most systems are recently modeled to be linear. PID is a good example for a linear control law used in most factory.

The study in nonlinear system has become popular for last fifty years ago in order to describe some characteristic of any systems caused by unexpected conditions

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

such as disturbances and environments. The goal is to linearize them into an equivalent linear systems that possible to solve by linear algebra. We will separate nonlinear challenges into two method that are “Feedback Linearization” and “Backstepping Technic”. Feedback Linearization absolutely linearize the nonlinear system, on the other hand, backstepping technic leaves an essential nonlinear part which decrease a settling time for example.

In this project, we study a nonlinear system theory such as systems stability, feedback linearization method, backstepping technic and some application. We also review linear algebra and linear system theory for further use in nonlinear systems. We now conclude all the knowledge into our thesis. We also apply these nonlinear control theory to oscillatory systems. We do so in two ways. One is an application of the describing function method in building a nonlinear oscillator where the main purpose is to study the behavior of oscillations. The other one is an application of adaptive backstepping and tuning function design in base isolation device where the main purpose is to reduce or rid of unpleasant oscillation of large structure or high buildings.

## การศึกษาาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและออกแบบ

นางสาวณัฐวรรณ โลราช 44010158  
นางสาวอัจฉรา พุทธิพันธ์รัตน์ 44010605  
ดร.ปรเมษฐ์ ประณยานันท์ อาจารย์ที่ปรึกษา  
ปีการศึกษา 2547

### บทคัดย่อ

ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถพบได้ทุกหนทุกแห่งในชีวิตประจำวัน ซึ่งเป็นที่รู้กันดีว่าการอธิบายคุณลักษณะและพฤติกรรมของระบบด้วย nonlinear model จะดีกว่า linear model ถึงแม้ว่าการอธิบายคุณลักษณะและพฤติกรรมของระบบโดย nonlinear model จะมีประโยชน์กว่า linear model ก็ตาม แต่ก็ดูเหมือนว่าการอธิบายระบบด้วย linear model จะถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางกว่า นั่นก็อาจเป็นเพราะว่าสามารถทำได้ง่ายกว่านั่นเอง ตัวอย่างของการควบคุมระบบโดยใช้ linear model ออกแบบก็มีให้เห็นอยู่ทั่วไป เช่น ตัวควบคุมแบบ P, PI, PID ซึ่งตัวควบคุมแบบ PID เป็นตัวอย่าง ของการควบคุมแบบ linear model ที่เป็นที่ยอมรับอย่างมากในทุกๆ โรงงาน

การศึกษาทฤษฎีทาง nonlinear control กลายเป็นหัวข้อที่ได้รับความนิยมอย่างมากในช่วงระยะเวลากว่า 50 ปีที่ผ่านมา เพื่อการอธิบายถึงคุณลักษณะบางประการของความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบใดๆ ที่ถูกทำให้เปลี่ยนไปโดยตัวรบกวนหรือการเปลี่ยนแปลงสภาวะแวดล้อมทำให้ระบบมีความไม่เป็นเชิงเส้น. การที่จะกำจัดความไม่เป็นเชิงเส้นออกไป เราได้แบ่งการศึกษาเป็น 2 วิธี คือ Feedback Linearization และ Backstepping Technic. วิธี Feedback Linearization คือ การทำให้ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นกลายเป็นเชิงเส้นโดยใช้วิธีป้อนกลับ ส่วน Backstepping Technic คือ การป้อนกลับให้กับระบบโดยใช้ Lyapunov Based design ซึ่งเราสามารถลดความไม่เป็นเชิงเส้นบางตัวของระบบเอาไว้ ซึ่งค่าของความไม่เป็นเชิงเส้นนี้จะช่วยลด settling time ของระบบ

ในโครงการนี้ เราได้ศึกษาถึงทฤษฎีของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วยการพิจารณาเสถียรภาพของระบบ, feedback linearization technic, backstepping technic และการนำเอาทฤษฎีต่างๆ มาประยุกต์ใช้ นอกจากนี้เรายังได้ศึกษาทฤษฎีระบบที่เป็นเชิงเส้นและพีชคณิตเพื่อนำมาใช้ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในการศึกษาาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นเราได้ศึกษาถึงทฤษฎีการเกิดการสั่น ซึ่งแบ่งการศึกษาเป็น 2 แนวทางด้วยกันคือ การศึกษาถึงทฤษฎีการเกิดการสั่นของระบบและนำทฤษฎีที่ได้ศึกษาไปคือ describing function มาสร้างเป็น nonlinear oscillator และในกรณีที่ระบบเกิดการสั่นเราได้ศึกษาถึงความเป็นไปได้ในการใช้เทคนิคที่เราได้ทำการศึกษาไปคือ backstepping technic มาแก้ปัญหาในระบบของอุปกรณ์แยกฐานเพื่อให้การสั่นลดลงหรือหมดไป

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Objective . . . . .	1
1.2	Achievements of adaptive linear control . . . . .	1
1.3	Adaptive control as dynamic nonlinear feedback . . . . .	3
1.4	Lyapunov-based design . . . . .	5
1.5	Early results . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Stability Theory</b>	<b>10</b>
2.1	Fundamentals of Lyapunov Theory . . . . .	12
2.1.1	Nonlinear Systems and Equilibrium Points . . . . .	12
2.1.2	Concepts of Stability . . . . .	15
2.1.3	Linearization and Local Stability . . . . .	23
2.2	Lyapunov's Direct Method . . . . .	28
2.2.1	Positive Definite Function and Lyapunov Functions . . . . .	31
2.2.2	Equilibrium Point Theorems . . . . .	33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การเรียงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3	Lyapunov Analysis of Linear Time-Invariant Systems . . .	38
<b>3</b>	<b>Feedback Linearization</b>	<b>42</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Input-State Linearization . . . . .	43
3.3	Input-Output Linearization . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Backstepping Technic</b>	<b>58</b>
4.1	Backstepping . . . . .	58
4.2	Control Laypunov functions (clf) . . . . .	60
4.3	Integrator Backstepping . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Nonlinear oscillatory system</b>	<b>71</b>
5.1	Study of Oscillation Theory . . . . .	77
5.2	Mass spring damper . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Linear Algebra</b>	<b>90</b>
<b>B</b>	<b>LM 13700 Datasheet</b>	<b>102</b>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# List of Figures

1.1	Lyapunov-based adaptive scheme for the scalar system $\dot{x} = u + x\theta$ .	6
2.1	Response of the nonlinear system.	11
2.2	Response of the linearized system.	11
2.3	Unstable origin of the Van der Pol oscillator.	18
2.4	Concepts of stability.	19
2.5	State convergence does not imply stability.	20
2.6	A nonlinear mass-damper-spring-system.	29
2.7	Typical shape of a positive definite function $V(x_1, x_2)$ .	32
4.1	The block diagram of system. (4.2.7)	62
4.2	The block diagram of system. (4.2.13)	63
4.3	The block diagram of system (4.2.14).	64
4.4	Introducing $\alpha(x)$ as the desired value for $\xi$ .	65
4.5	Closing the feedback loop in the dashed box with $+\alpha$ and “back-stepping” $-\alpha$ through the integrator.	67

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1	RLC circuits. . . . .	71
5.2	Nonlinear Inductor. . . . .	72
5.3	The block diagram of feedback linearization method. . . . .	74
5.4	Simulation of Feedback Linearization Method. . . . .	74
5.5	The block diagram of Lyapunov based design. . . . .	76
5.6	Simulation of Lyapunov based design. . . . .	76
5.7	Describing function block diagram. . . . .	78
5.8	Band pass filter using CCII. . . . .	80
5.9	Bandpass filter simulate. . . . .	81
5.10	Differential Amplifier. . . . .	82
5.11	Nonlinear oscillator circuits. . . . .	83
5.12	Simulate using MATLAB. . . . .	83
5.13	Simulate using PSpice. . . . .	84
5.14	Mass Spring System. . . . .	85
5.15	Mass Spring Damper System. . . . .	86
5.16	A nonlinear RLC circuits having 3 distinct(subharmonic steady-state response). . . . .	87
5.17	Nonlinear resistor . . . . .	87

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Objective

1. Study nonlinear system, characteristic of system, stability theory, feedback linearization and backstepping technic.
2. Use the describing function method to design a nonlinear oscillator.
3. Study the phenomenon of oscillation and take adaptive backstepping to decreasing the oscillation.

### 1.2 Achievements of adaptive linear control

While in this project we will be preoccupied with nonlinear system, we must not forget that the control of linear plants with unknown parameters was a formidable problem which took almost twenty years to solve. The adaptive control community deserves full credit for providing not only one, but several solutions to this fundamental problem [10, 16, 18, 37, 46, 47, 49, 55]. Each of this solutions was a

breakthrough in the development of adaptive control. By the early 1980's, several  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ภายใต้การคุ้มครองของสำนักงานลิขสิทธิ์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา. การนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตถือว่าผิดกฎหมาย. ค่า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

types of adaptive schemes were proven to provide stable operations and asymptotic tracking. We refer to the results from that period as *adaptive linear control* or *traditional adaptive control*. Traditional adaptive schemes are classified as “direct” and “indirect” and as “Lyapunov-based” and “estimation-based.” They involve parameter identification with “parameter estimators” or “identifiers.” The vital part of the identifier is the parameter adaption algorithm, commonly referred to as the “parameter update law.” The direct-indirect classification reflects the fact that the updated parameters are either those of the plant (indirect). According to this classification, all the schemes in this project are indirect.

The distinction between Lyapunov-based design and estimation-base schemes is more substantial and is dictated in part by the type of parameter update law and the corresponding proof of stability and convergence. Lyapunov-based design is one of the oldest results of adaptive control. Until recently, however, its applicability was restricted to linear plants with relative degree one or two. This limitation has been remove by the recursive design procedures presented in this project, commonly referred to as *backstepping*.

An important feature of traditional adaptive control is its reliance on “certainty equivalence” controllers. This means that a controller is first design as if all the plant parameters were known. The controller parameters are determined as functions of the plants parameters. Given the true values of the plants parameters, the controller parameters are calculated by solving design equations for model-matching, pole-zero, or optimality. When the true plant parameters are unknown, the controller parameters are either estimated directly (direct schemes) or computed by solving the same design equations with plant parameter estimates (indirect schemes). The resulting controller, which is either estimated (direct) or designed for the estimated plant (indirect), is called a *certainty equivalence controller*.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

It is not at all obvious that a certainty equivalence controller will work inside and adaptive feedback loop and achieve stabilization and tracing. Even when the plant is stable, bad parameter estimates may yield a destabilizing controller. The situation is more critical when the plant is unstable, because then the controller must achieve stabilization in addition to its tracking task. It is therefore significant that certainty equivalence controllers have been proven to be satisfactory for adaptive control of linear systems.

In spite of major advances in the development of adaptive control schemes for linear system, they have not yet become tools for systematic engineering design. Each adaptive scheme leaves up to the designer the choice of various filters, design coefficients, initialization rules, and so on. It is still unclear how the adaptive system's performance, especially its transient performance, depends on these design choices. Current research activity is aimed at providing the designer with clearer choices and trade-offs between transient performance and robustness. Transient performance improvement is one of the prominent features of the nonlinear control design schemes that we are studying.

### 1.3 Adaptive control as dynamic nonlinear feedback

If a linear plant contains unknown parameters without any information about their bounds, then in general, it cannot be stabilized by a linear controller. This is true for the simplest scalar plant

$$\dot{x} = u + \theta x, \quad (1.3.1)$$

where  $u$  is the control and  $\theta$  is an unknown constant. If an a priori bound  $\bar{\theta}$  were known,  $|\theta| \leq \bar{\theta}$ , then  $u = -2\bar{\theta}x$  would be a linear stabilizing controller. If such

เอกสารนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนเท่านั้น หากมีการนำเอกสารนี้ไปใช้โดยไม่ผ่านการอนุญาตจากเจ้าของเอกสารจะถือว่าผิดกฎหมาย

abound is not known, no linear controller can be designed to guarantee stability of 1.3.1

To examine whether a static nonlinear controller can help, let us try the controller

$$u = -k_1 - k_2x^3, \quad (1.3.2)$$

where  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . The resulting feedback system is

$$\dot{x} = (\theta - k_1)x - k_2x^3. \quad (1.3.3)$$

For  $\theta > k_1$ , the equilibrium  $x = 0$  is unstable, but the nonlinear term  $-k_2x^3$  prevents  $x(t)$  from growing unbounded. It is easy to see that  $x(t)$  will converge to one of the two new equilibria  $\pm \sqrt{\frac{\theta - k_1}{k_2}}$ . Thus, the static nonlinear controller (1.3.2) has achieved boundedness of  $x(t)$  without any knowledge of a bound on  $\theta$ .

Our goal is more ambitious than just boundedness of  $x(t)$ . We also want to achieve its regulation:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Can this be accomplished by a dynamic nonlinear controller? The answer is affirmative: One such controller is

$$u = -(p + \xi)x, \quad \dot{\xi} = x^2, \quad (1.3.4)$$

where  $p > 0$  is a design parameter. The resulting feedback system is of second order:

$$\dot{x} = -(p + \xi)x + \theta x, \quad (1.3.5-a)$$

$$\dot{\xi} = x^2. \quad (1.3.5-b)$$

Its stability properties can be checked by examining the derivative of the Lyapunov function

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ  $V(x, \xi) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\xi - \theta)^2$ , อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (1.3.6) รัค้ำ  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which turns out to be nonpositive:

$$\dot{V} = -px^2 - \xi x^2 + \theta x^2 + (\xi - \theta)x^2 = -px^2. \quad (1.3.7)$$

Thus,  $V(x(t), \theta(t))$  evaluated along the solution of (1.3.5) is a nonincreasing function of time. This proves that  $x(t)$  and  $\theta(t)$  remain bounded for all  $t \geq 0$ .

How was the dynamics nonlinear controller (1.3.4) conceived? Not as a nonlinear controller, but rather as a parameter adaption scheme! Its dynamics part  $\dot{\xi} = x^2$  is, in fact, an update law for  $\xi$  as an estimate of  $\theta$ . Consequently, the estimation error  $\xi - \theta$  is penalized in the Lyapunov function (1.3.6).

## 1.4 Lyapunov-based design

The controller (1.3.4) is an outcome of a systematic Lyapunov design procedure. In this procedure we seek a parameter update law for the estimate of  $\hat{\theta}(t)$ ,

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau(x, \hat{\theta}), \quad (1.4.1)$$

which, along with a control law  $u = \alpha(x, \hat{\theta})$ , will make the Lyapunov function

$$V(x, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^2, \quad (1.4.2)$$

a nonincreasing function of time:

$$V(x(t), \hat{\theta}) \leq V(x(t_0), \theta(t_0)) \forall t \geq t_0, \forall t_0 \geq 0. \quad (1.4.3)$$

To this end, we express  $\dot{V}$  as a function of  $u$  and  $\hat{\theta}$  and seek  $\alpha(x, \hat{\theta})$  and  $\tau(x, \hat{\theta})$  to guarantee that  $\dot{V} \leq -px^2$  with  $p > 0$ , namely

$$\dot{V} = x(u + \theta x) + (\hat{\theta} - \theta)\dot{\hat{\theta}} \leq -px^2. \quad (1.4.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

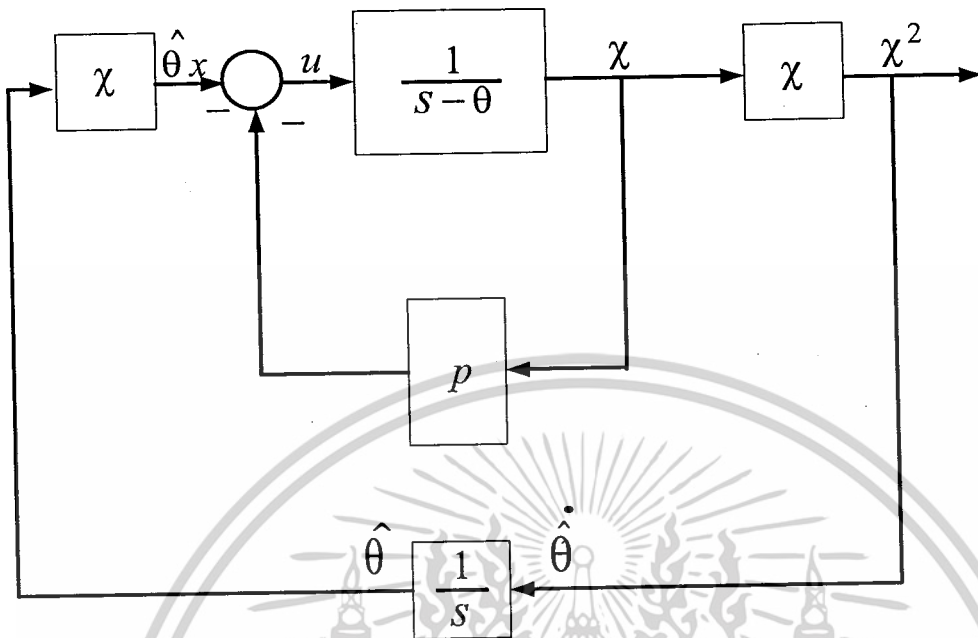


Figure 1.1: Lyapunov-based adaptive scheme for the scalar system  $\dot{x} = u + x\theta$ .

Rearranging terms we get

$$xu + \hat{\theta}\dot{\theta} + \theta(x^2 - \dot{\theta}) \leq -px^2. \quad (1.4.5)$$

Since neither  $\alpha(x, \hat{\theta})$  nor  $\tau(x, \hat{\theta})$  is allowed to depend on the unknown  $\theta$ , we must take  $\tau(x, \hat{\theta}) = x^2$ , that is,

$$\dot{\theta} = x^2. \quad (1.4.6)$$

The remaining condition

$$xu + \hat{\theta}x^2 \leq -px^2. \quad (1.4.7)$$

allows us to select  $\alpha(x, \hat{\theta})$  in various ways. The choice which results in the dynamic nonlinear controller (1.3.4) is

$$u = -(p + \hat{\theta})x. \quad (1.4.8)$$

We have thus designed our first Lyapunov-based adaptive scheme shown in Figure 1.1, where  $s$  is the complex variable of the Laplace transform. This scheme already

exhibits some features of more general schemes to be designed.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 1.5 Early results

Interest in adaptive control of nonlinear systems was stimulated by major advances in the differential-geometric theory of nonlinear feedback control in the mid-1980's.

A thorough treatment of this theory was given by Isidori in his seminal book [20] which unified a decade of results by many researchers. Particularly popular were the results on “feedback linearization,” that is, the state and feedback transformation of nonlinear system into linear ones [15, 19, 22, 38, 39]. This methodology heled convert many previously intractable nonlinear problem into much simpler problems solvable by familiar linear methods.

It soon became clear, that along with their many advantages, the nonlinear geometric methods have some shortcomings. One of is their inability to handle the presence of unknown parameters. This motivated the first series of adaptive nonlinear control schemes. They were all restricted to systems satisfying the matching condition. Examples of such systems are rigid models of robotic manipulators. While the first robotic adaptive scheme by Craig [14] required measurement of joint accelerations, this impractical assumption was soon removed by Slotine and Li [57, 58], Middleton and Goodwin [45], and Ortega and Spong [50], among others. A more general treatment of adaptive nonlinear regulation under the matching condition was given by Taylor, Kokotović, Marino and Kanelakopoulos [61], including unmodeled dynamics which violated the matching condition, The matching condition was relaxed to the *extended matching* condition by Kanellakopoulos, Kokotović and Marino [26] and Campion and Bastin [11, 13]. For a period , the extended matching condition was the frontier which could not be crossed by Lyapunov-base designs. Nam and Arapostathis [48] and Sastry and Isidori [56] combined feedback linearization with adaptation techniques from adaptive linear control. However, to achieve global stability, these schemes re-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

quired that the nonlinearities be restricted by linear growth conditions. Similar restriction on system nonlinearities were imposed by Kanellakopoulos, Kokotović and Marino [28, 29] and Teel, Kadiyala, Kokotović and Sastry [62]. The only nonlinear estimation-based results which went beyond the linear growth constraints were obtained by Pomet and Praly [51, 52, 53], who used Lyapunov functions to characterize relationships between nonlinear growth constraints and controller stabilizing properties. In the absence of matching conditions, their schemes still involved some growth restrictions but were able to handle the benchmark third-order example.

The state-of-the-art of adaptive control, including adaptive nonlinear control, was reviewed in the 1990 Grainger lecture [33]. One of these lectures presented the result of Kanellakopoulos, Kokotović and Morse [29, 34], which finally broke the extended matching barrier. This was achieved with a new recursive design procedure called *adaptive backstepping*. Adaptive backstepping, developed by Ioannis Kanellakopoulos [25] in collaboration with Peter Kokotović and Steve Morse, emerged as a confluence of the adaptive estimation idea, on one side, and, on the other side, nonlinear control idea expressed in works of Tsiniias [63], Byrnes and Isidori [12], Sontag and Sussman [60], Kokotović and Sussman [32], and Saberi, Kokotović and Sussman [54]. Adaptive backstepping was also strongly influenced by the properties of an early adaptive scheme by Feuer and Morse [17], which, although designed for linear systems, preserved global stability under output feedback for a class of output nonlinearities, as shown by Kanellakopoulos, Kokotović and Morse [30, 31]. Adaptive backstepping influenced further developments in adaptive nonlinear control. Mario and Tomei [42, 43, 44] combined it with their filtered transformations [40, 41] to solve the adaptive output-feedback problem for a class of nonlinear systems that has not since been enlarged. Adaptive backstepping also stimulated efforts to reduce its overparametrization. A partial reduction

was achieved by Jiang and Praly [23]. With the invention of *turning functions*,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Miroslav Krstić [35, 36], introduction a new design which completely removed the overparameterization.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# Chapter 2

## Stability Theory

Nonlinear systems frequently have more than one equilibrium point (an equilibrium point is a point where the system can stay forever without moving, as we shall formalize later). This can be seen by the following simple example.

**Example 2.0.1** Consider the first order system

$$\dot{x} = -x + x^2. \quad (2.0.1)$$

with initial condition  $x(0) = x_0$ . Its linearization is

$$\dot{x} = -x. \quad (2.0.2)$$

The solution of this linear equation is  $x(t) = x_0 e^{-t}$ .

The linearized system clearly has a unique equilibrium point at  $x = 0$ . By contrast, integrating equation  $dx/(-x + x^2) = dt$ , the actual response of the nonlinear dynamics (2.0.1) can be found to be

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}.$$

This response is plotted in Figure 2.1 for various initial conditions, while the response of its linearized system is plotted in Figure 2.2. The system has two

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่ออกเสียงเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

equilibrium points,  $x = 0$  and  $x = -1$ , and its qualitative behavior strongly depends on its initial conditions.

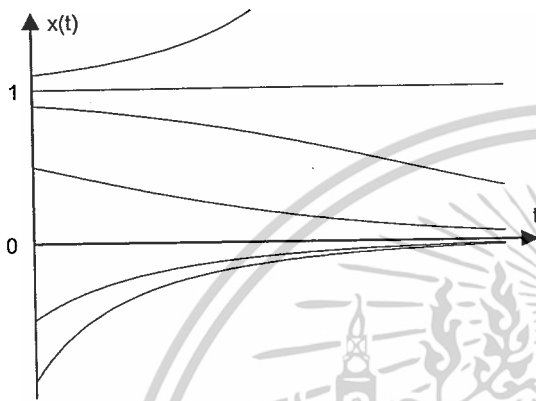


Figure 2.1: Response of the nonlinear system.

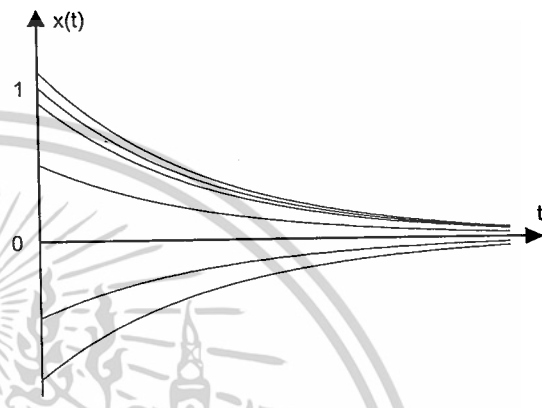


Figure 2.2: Response of the linearized system

The issue of motion stability can also be discussed with the aid of the above example. For the linearized system, stability is seen by nothing that for any initial condition, the motion always converges to the equilibrium point  $x = 0$ . However, consider now the actual nonlinear system. While motions starting with  $x_0 < 1$  will indeed converge to the equilibrium point  $x = 0$ , those starting with  $x_0 > 1$  will go to infinity (actually in finite time, a phenomenon known as finite escape time). This means that the stability of nonlinear systems may depend on initial conditions.

In the presence of a bounded external input, stability may also be dependent on the input value. This input dependence is highlighted by the so-called bilinear system

$$\dot{x} = xu.$$

If input  $u$  is chosen to be  $-1$ , then the state  $x$  converge to  $0$ . If  $u = 1$ , then  $absx$  tends to infinity.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.1 Fundamentals of Lyapunov Theory

### 2.1.1 Nonlinear Systems and Equilibrium Points

#### Nonlinear Systems

A nonlinear dynamic system can usually be represented by a set of nonlinear differential equations in the form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t). \quad (2.1.1)$$

where  $\vec{f}$  is an  $n \times 1$  nonlinear vector function, and  $\vec{x}$  is the  $n \times 1$  state vector. A particular value of the state vector is also called a point because it corresponds to a point in the state-space. The number of states  $n$  is called the *order* of the system. A solution  $\vec{x}(t)$  of the equation (2.1.1) usually corresponds to a curve in state space as  $t$  varies from zero to infinity, as already seen in phase plane analysis for the case  $n = 2$ . This curve is generally referred to as a *state trajectory* or a *system trajectory*.

It is important to note that although equation (2.1.1) does not explicitly contain the control input as a variable, it is directly applicable to feedback control systems. The reason is that equation (2.1.1) can represent the *closed-loop* dynamics of a feedback control system, with the control input being a function of state  $\vec{x}$  and time  $t$ , and therefore disappearing in the closed-loop dynamics. Specifically, if the plant dynamics are

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t).$$

and some control law has been selected

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}, t).$$

then the closed-loop dynamics is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งาน  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x}, t), t)$ . ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which can be rewritten in the form (2.1.1). Of course, equation (2.1.1) can also represent dynamic systems where no control signals are involved, such as a freely swinging pendulum.

A special class of nonlinear systems is that of *linear* systems. The dynamics of linear systems are of the form

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}.$$

where  $A(t)$  is an  $n \times n$  matrix.

## AUTONOMOUS AND NON-AUTONOMOUS SYSTEMS

**Definition 2.1.1** *The nonlinear system (2.1.1) is said to be **autonomous** if  $\vec{f}$  does not depend explicitly on time, i.e., if the system's state equation can be written*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (2.1.2)$$

*Otherwise, the system is called **non-autonomous**.*

A time-invariant plant with dynamics

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}).$$

may lead to a non-autonomous closed-loop system if a controller dependent on time  $t$  is chosen, i.e., if  $\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}, t)$ .

## EQUILIBRIUM POINTS

It is possible for a system trajectory to correspond to only a single point. Such a point is called an equilibrium point. As we shall see later, many stability problems are naturally formulated with respect to equilibrium points.

**Definition 2.1.2** *A state  $\vec{x}^e$  is an **equilibrium state** (or **equilibrium point**)*

*of the system if once  $\vec{x}(t)$  is equal to  $\vec{x}^e$ , it remains equal to  $\vec{x}^e$  for all future time.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่วางไว้สำหรับการใช้วงจรรีโอดีพอนเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้หรือเผยแพร่  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Mathematically, this means that the constant vector  $\vec{x}^e$  satisfies

$$\vec{0} = \vec{f}(\vec{x}^e). \quad (2.1.3)$$

A linear time-invariant system

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \quad (2.1.4)$$

has a single equilibrium point (the origin  $\vec{0}$ ) if  $A$  is nonsingular. If  $A$  is singular, it has infinitely many equilibrium points, which are contained in the null-space of the matrix  $A$ , i.e., the subspace defined by  $A\vec{x} = \vec{0}$ . This implies that the equilibrium points are not isolated, as reflected by the example  $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ , for which all points on the  $x$  axis of the phase plane are equilibrium points.

A nonlinear system can have several (or infinitely many) isolated equilibrium points. The following example involves a familiar physical system.

**Example 2.1.3** Consider the pendulum, whose dynamics are given by the following nonlinear autonomous equation

$$MR^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + MgR\sin\theta = 0 \quad (2.1.5)$$

where  $k$  is a friction coefficient,  $M$  the mass,  $R$  the pendulum length, and  $g$  the gravity constant. Letting  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , the corresponding state-space equation is

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1.6)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{MR^2}x_2 - \frac{g}{R}\sin x_1. \quad (2.1.7)$$

Therefore, the equilibrium points are given by

$$x_2 = 0, \sin x_1 = 0.$$

which leads to the points  $(0[2\pi], 0)$  and  $(\pi[2\pi], 0)$ . Physically, these points correspond to the pendulum resting exactly at the vertical up and down positions.

In linear system analysis and design, for notational and analytical simplicity, we often transform the linear system equation in such a way that the equilibrium point of interest is  $\bar{x}^e$ . Then, by introducing a new variable

$$\bar{y} = \bar{x} - \bar{x}^e.$$

and substituting  $\bar{x} = \bar{y} + \bar{x}^e$  into the equation (2.1.2), a new set of equations on the variable  $\bar{y}$  are obtained

$$\dot{\bar{y}} = \bar{f}(\bar{y} + \bar{x}^e). \quad (2.1.8)$$

One can easily verify that there is a one-to-one correspondence between the solution of (2.1.2) and those of (2.1.8), and that in addition,  $\bar{y} = \vec{0}$ , the solution corresponding to  $\bar{x} = \bar{x}^e$ , is an equilibrium point of (2.1.8). Therefore, instead of studying the behavior of the equation (2.1.2) in the neighborhood of  $\bar{x}^e$ , one can equivalently study the behavior of the equations (2.1.8) in the neighborhood of the origin.

**NOMINAL MOTION** In some practical problems, we are not concerned with stability around an equilibrium point, but rather with the stability of a *motion*, i.e., whether a system will remain close to its original motion trajectory if slightly perturbed away from it, as exemplified by the aircraft trajectory control problem. We can show that this kind of motion stability problem can be transformed into an equivalent stability problem around an equilibrium point, although the equivalent system is now non-autonomous.

### 2.1.2 Concepts of Stability

In the beginning of this chapter, we introduced the intuitive notion of stability as a kind of well-behavedness around a desired operating point. However, since nonlinear systems may have much more complex and exotic behavior than linear systems, the mere notion of stability is not enough to describe the essential features

of their motion. A number of more refined stability concepts, such as asymptotic stability, exponential stability and global asymptotic stability, are needed. In this section, we define these stability concepts formally, for autonomous systems, and explain their practical meanings.

A few simplifying notions are defined at this point. Let  $B_R$  denote the spherical region (or ball) defined by  $\|\vec{x}\| < R$  in state-space, and  $S_R$  the sphere itself, defined by  $\|\vec{x}\| = R$ .

## STABILITY AND INSTABILITY

Let us see the basic concepts of stability and instability.

**Definition 2.1.4** *The equilibrium state  $\vec{x} = \vec{0}$  is said to be **stable** if, for any  $R > 0$ , there exists  $r > 0$ , such that if  $\|\vec{x}(0)\| < r$ , then  $\|\vec{x}(t)\| < R$  for all  $t \geq 0$ . Otherwise, the equilibrium point is **unstable**.*

Essentially, stability (also called **stability in the sense of Lyapunov**, or **Lyapunov stability**) means that the system trajectory can be kept arbitrarily close to the origin by starting sufficiently close to it. More formally, the definition states that the origin is stable, if, given that we do not want the state trajectory  $\vec{x}(t)$  to get out of a ball of arbitrarily specified radius  $B_R$ , a value  $r(R)$  can be found such that starting the state from within the ball  $B_r$  at time 0 guarantees that the state will stay within the ball  $B_R$  thereafter. The geometrical implication of stability is indicated by curve 2 in Figure 2.4 ([54]).

Using mathematical symbols Definition 2.1.4 can be written

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \|\vec{x}(0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq 0, \|\vec{x}(t)\| < R.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

or, equivalently

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \vec{x}(0) \in B_r \Rightarrow \forall t \geq 0, \vec{x}(t) \in B_R.$$

Conversely, an equilibrium point is unstable if there exists at least **one** ball  $B_R$ , such that for **every**  $r > 0$ , no matter how small, it is always possible for the system trajectory to start somewhere within the ball  $B_r$  and eventually leave the ball  $B_R$

(Figure 2.4 [54]). Unstable nodes or saddle points in second-order systems are examples of unstable equilibria. Instability of an equilibrium point is typically undesirable, because it often leads the system into limit cycles or results in damage to the involved mechanical or electrical components.

It is important to point out the qualitative difference between instability and the intuitive notion of “blowing up” (all trajectories close to origin move further and further away to infinity). In linear systems, instability is equivalent to blowing up, because unstable poles always lead to exponential growth of the system states. However, for nonlinear systems, blowing up is only one way of instability. The following example illustrates this point.

**Example 2.1.5 (Instability of the Van der Pol oscillator)** *The Van der Pol oscillator is described by*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2.\end{aligned}$$

*The system has an equilibrium point at the origin, as seen in its phase portrait (Figure 2.8 [54]).*

*System trajectories starting from any non-zero initial states all asymptotically approach a limit cycle. Furthermore, the ball  $B_1$  ( $R = 1$ ) is easily shown to*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

be within the phase-plane region enclosed by the limit cycle. Therefore, system trajectories starting from an arbitrarily small ball  $B_r$  will eventually get out of the ball  $B_1$  to approach the limit cycle Figure 2.3. This implies instability of the origin.

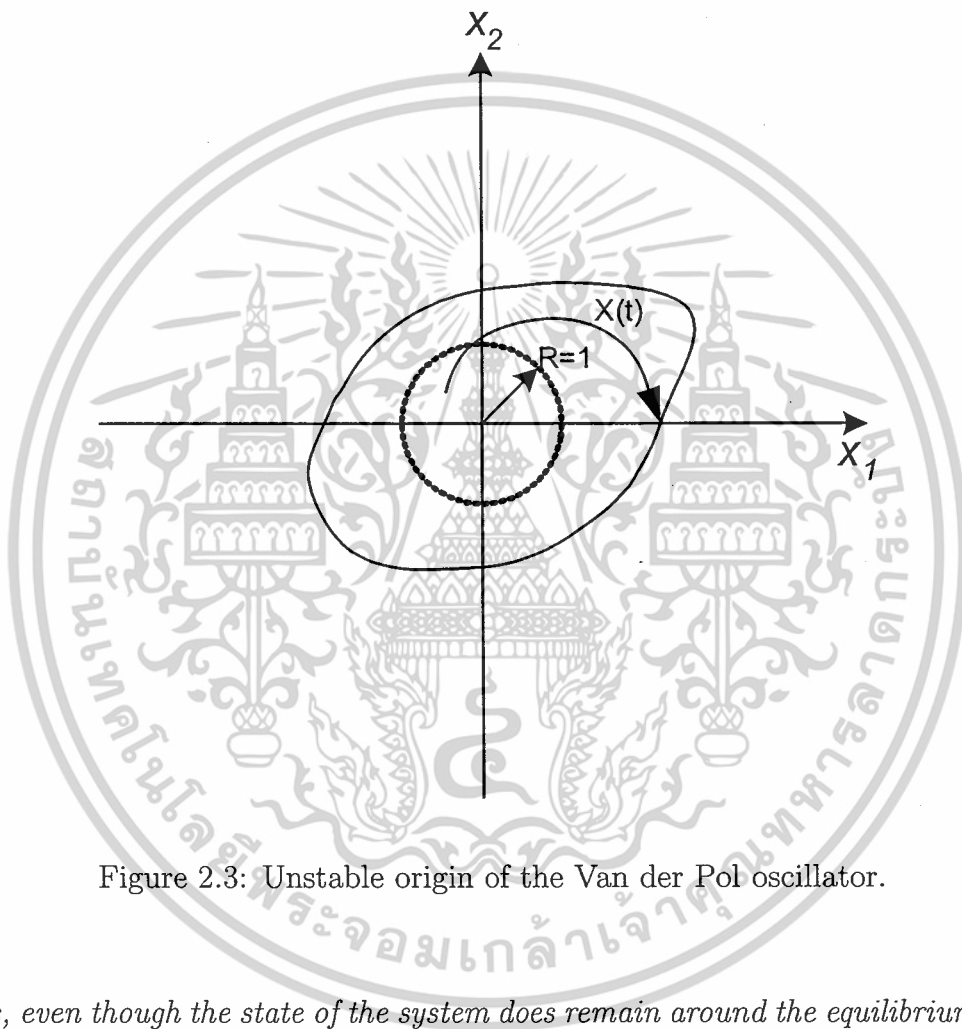


Figure 2.3: Unstable origin of the Van der Pol oscillator.

Thus, even though the state of the system does remain around the equilibrium point in the certain sense, it cannot stay arbitrarily close to it. This is the fundamental distinction between stability and instability.

## ASYMPTOTIC STABILITY AND EXPONENTIAL STABILITY

In many engineering applications, Lyapunov stability is not enough. For example when a satellite's attitude is disturbed from its nominal position, we not only want the satellite to maintain its attitude in a range determined by the magnitude of the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น ไม่ควรนำไปทำซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

disturbance, i.e., Lyapunov stability, but also require that the attitude gradually go back to its original value. This type of engineering requirement is captured by the concept of asymptotic stability.

**Definition 2.1.6** *An equilibrium point  $\vec{0}$  is asymptotically stable if it is stable, and if in addition there exists some  $r > 0$  such that  $\|\vec{x}(0)\| < r$  implies that  $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{0}$  as  $t \rightarrow \infty$ .*

Asymptotic stability means that the equilibrium is stable, and that in addition, states started close to  $\vec{0}$  actually converge to  $\vec{0}$  as time  $t$  goes to infinity.

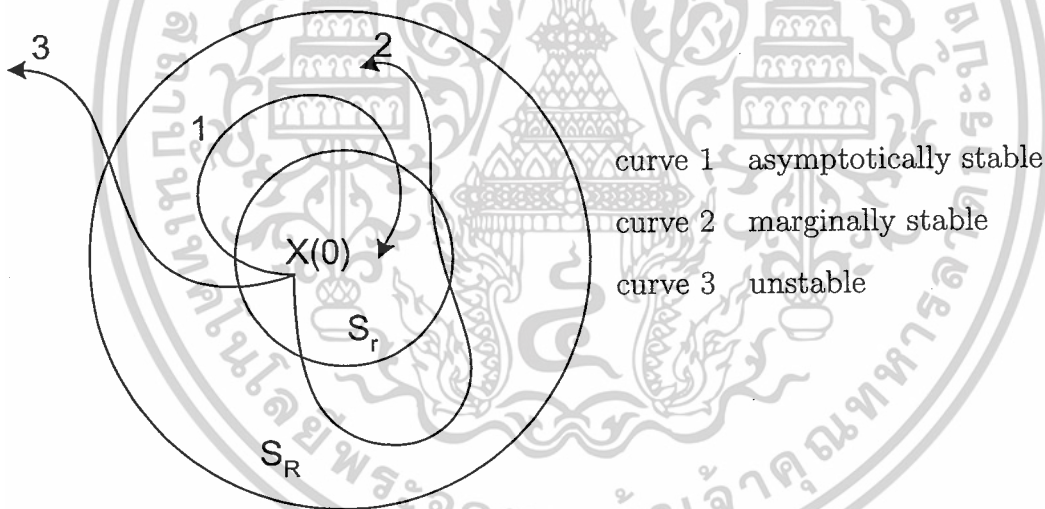


Figure 2.4: Concepts of stability.

Figure 2.4 shows that the system trajectories starting from within the ball  $B_r$  converge to the origin. The ball  $B_r$  is called a **domain of attraction** of the equilibrium point (while the domain of attraction of the equilibrium point refers to the largest such region, i.e., to the set of all points such that trajectories initiated at these points eventually converge to the origin). An equilibrium point which is

Lyapunov stable but not asymptotically stable is called **marginally stable**.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

One may question the need for the explicit stability requirement in the definition above, in view of the second condition of state convergence to the origin. However, it is easy to build counter-example that show that state convergence does not necessarily imply stability. For instance, a simple system studied by Vinograd has trajectories of the form shown in Figure 2.5.

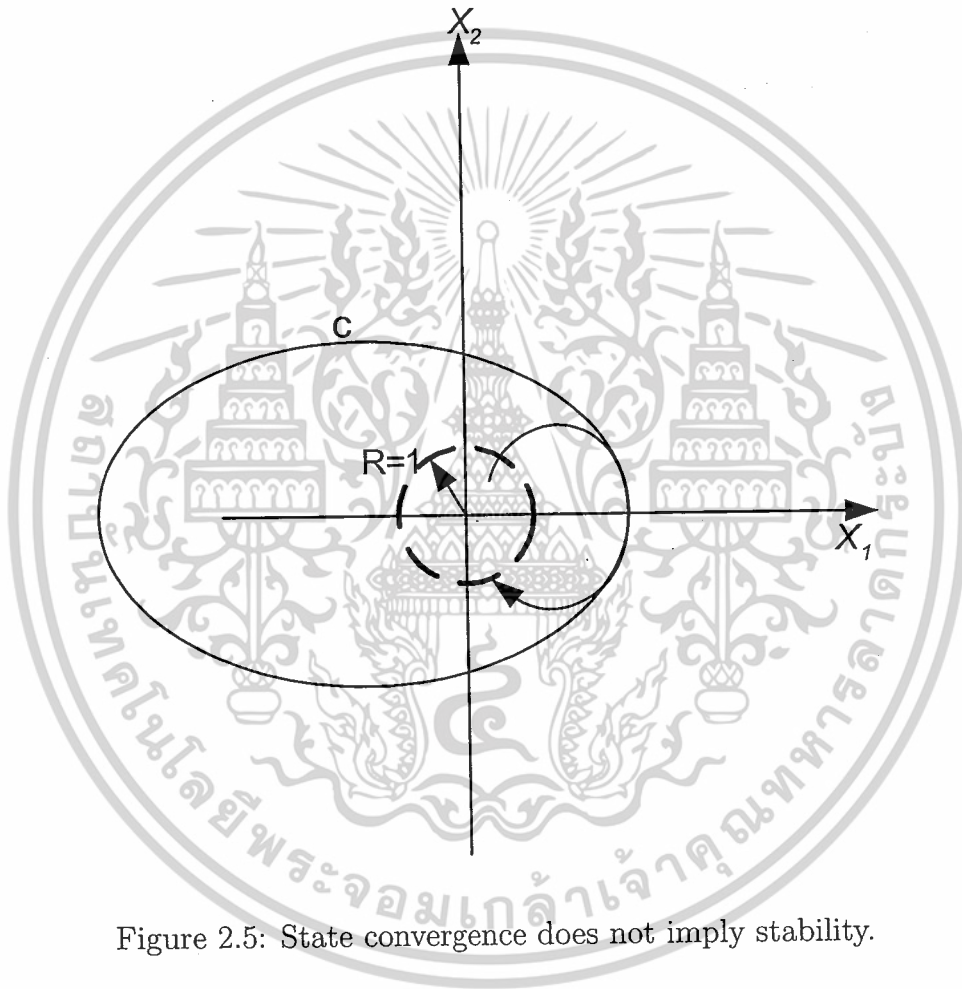


Figure 2.5: State convergence does not imply stability.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

All the trajectories starting from non-zero initial points within the unit disk first reach the curve  $C$  before converging to the origin. Thus, the origin is **unstable** in the sense of Lyapunov, despite the state convergence. Calling such a system unstable is quite reasonable, since a curve such as  $C$  may be outside the region where the model is valid - for instance, the subsonic and super sonic dynamics of a high-performance aircraft are radically different, while, with the problem under study using subsonic dynamic models,  $C$  could be in the supersonic range.

In many engineering applications, it is still not sufficient to know that a system will converge to the equilibrium point after infinite time. There is a need to estimate how fast the system trajectory approaches  $\vec{0}$ . The concept of **exponential stability** can be used for this purpose.

**Definition 2.1.7 (Exponential Stability)** *An equilibrium point  $\vec{0}$  is exponentially stable if there exist two strictly positive numbers  $\alpha$  and  $\lambda$  such that*

$$\forall t > 0, \|\vec{x}(t)\| \leq \alpha \|\vec{x}(0)\| e^{-\lambda t}. \quad (2.1.9)$$

*in some ball  $B_r$  around the origin.*

In words, (2.1.9) means that the state vector of an exponentially stable system converges to the origin faster than an exponential function. The positive number  $\lambda$  is often called the rate of exponential convergence. For instance, the system

$$\dot{x} = -(1 + \sin^2 x)x.$$

is exponentially convergent to  $x = 0$  with a rate  $\lambda = 1$ . Indeed, its solution is

$$x(t) = x(0)e^{-\int_0^t [1 + \sin^2(x(\tau))] d\tau}.$$

and therefore

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Note that exponential stability implies asymptotic stability. But asymptotic stability does not guarantee exponential stability, as can be seen from the system

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1. \quad (2.1.10)$$

whose solution is  $x = \frac{1}{1+t}$ , a function slower than any exponential function  $e^{-\lambda t}$  (with  $\lambda > 0$ ).

The definition of exponential convergence provides an explicit bound on the state at any time, as seen in (2.1.9). By writing the positive constant  $\alpha$  as  $\alpha = e^{\lambda\tau_0}$ , it is easy to see that, after a time of  $\tau_0 + \frac{1}{\lambda}$ , the magnitude of the state vector decreases to less than 35% ( $\approx e^{-1}$ ) of its original value (at  $t = 0$ ), similarly to the notion of time-constant in a linear system. After  $\tau_0 + \frac{3}{\lambda}$ , the state magnitude  $\|\vec{x}(t)\|$  will be less than 5% ( $\approx e^{-3}$ ) of  $\|\vec{x}(0)\|$ .

## LOCAL AND GLOBAL STABILITY

The above definitions are formulated to characterize the **local** behavior of systems, i.e., how the state evolves after starting near the equilibrium point. Local properties tell little about how the system will behave when the initial state is some distance away from the equilibrium as seen for the nonlinear system in Example 2.1.3. Global concepts are required for this purpose.

**Definition 2.1.8** *If asymptotic (or exponential) stability holds for any initial states, the equilibrium point is said to be asymptotically (or exponentially) stable in the large, it is also called globally asymptotically (or exponentially) stable.*

For instance, in Example 2.0.1 the linearized system is globally asymptotically stable, but the original system is not. The simple system in (2.1.10) is also global asymptotically stable, as can be seen from its solutions.

Linear time-invariant systems are either asymptotically stable, of marginally stable, or unstable, as can be seen from the modal decomposition of linear system

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์อาจารย์ใช้เฉพาะที่สอนเท่านั้น ไม่สามารถนำออกนอกห้องเรียนได้  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

solutions; linear asymptotic stability is always global and exponential, and linear instability always implies exponential blow-up. **This explains why the refined notion of stability introduced here were not previously encountered in the study of linear systems.** They are explicitly needed only for nonlinear systems.

### 2.1.3 Linearization and Local Stability

Lyapunov's linearization method is concerned with the **local** stability of a nonlinear system. It is a formalization of the intuition that a nonlinear system should behave similarly to its linearized approximation for small range motions. Because all physical systems are inherently nonlinear, Lyapunov's linearization method serves as the fundamental **justification of using linear control techniques** in practice, i.e., shows that stable design by linear control guarantees the stability of the original physical system locally.

Consider the autonomous system in (2.1.2), and assume that  $\vec{f}(\vec{x})$  is continuously differentiable. Then the system dynamics can be written as

$$\dot{\vec{x}} = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}} \vec{x} + \vec{f}_{h.o.t}(\vec{x}) \quad (2.1.11)$$

where  $\vec{f}_{h.o.t}$  stands for higher-order terms in  $\vec{x}$ . Note that the above Taylor expansion starts directly with the first-order term, due to the fact that  $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ , since  $\vec{0}$  is an equilibrium point. Let us use the constant matrix  $A$  to denote the Jacobian matrix of  $\vec{f}$  with respect to  $\vec{x}$  at  $\vec{x} = \vec{0}$  (an  $n \times n$  matrix of elements  $\partial f_i / \partial x_j$ )

$$A = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}}$$

Then, the system

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (2.1.12)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

is called the **linearization** (or **linear approximation**) of the original nonlinear system at the equilibrium point  $\vec{0}$ .

Note that, similarly, starting with an autonomous nonlinear system with a control input  $\vec{u}$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}).$$

such that  $\vec{f}(\vec{0}, \vec{0}) = \vec{0}$ , we can write

$$\dot{\vec{x}} = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}, \vec{u}=\vec{0}} \vec{x} + \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}, \vec{u}=\vec{0}} \vec{u} + \vec{f}_{h.o.t}(\vec{x}, \vec{u}).$$

where  $\vec{f}_{h.o.t}$  stands for higher-order terms in  $\vec{x}$  and  $\vec{u}$ . Letting  $A$  denote the Jacobian matrix of  $\vec{f}$  with respect to  $\vec{x}$  at  $(\vec{x} = \vec{0}, \vec{u} = \vec{0})$ , and  $B$  denote the Jacobian matrix of  $\vec{f}$  with respect to  $\vec{u}$  at the same point (an  $n \times m$  matrix of elements  $\partial f_i / \partial u_j$ , where  $m$  is the number of inputs)

$$A = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}, \vec{u}=\vec{0}} \quad B = \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}, \vec{u}=\vec{0}}$$

the system

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}.$$

is the linearization (or linear approximation) of the originally nonlinear system at  $(\vec{x} = \vec{0}, \vec{u} = \vec{0})$ .

Furthermore, the choice of a control law of the form  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$  (with  $\vec{u}(\vec{0}) = \vec{0}$ ) transforms the original system into an autonomous closed-loop system, having  $\vec{x} = \vec{0}$  as an equilibrium point. Linearly approximating the control law as

$$\vec{u} = \left( \frac{d\vec{u}}{d\vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{0}} \vec{x} = G\vec{x}.$$

the closed-loop dynamics can be linearly approximated as

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}(\vec{x})) = (A + BG)\vec{x}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Of course, the same linear approximation can be obtained by directly considering the autonomous closed-loop system

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}(\vec{x})) = \vec{f}_1(\vec{x}).$$

and linearizing the function  $\vec{f}_1$  with respect to  $\vec{x}$ , at its equilibrium point  $\vec{x} = \vec{0}$ .

In practice, finding a system's linearization is often most easily done simply by neglecting any term of order higher than 1 in the dynamics, as we now illustrate.

**Example 2.1.9** Consider the system

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + x_1 \cos x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + (x_1 + 1)x_1 + x_1 \sin x_2.$$

Its linearized approximation about  $\vec{x} = \vec{0}$  is

$$\dot{x}_1 \approx 0 + x_1 \cdot 1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 \approx x_2 + 0 + x_1 + x_1 x_2 \approx x_2 + x_1.$$

The linearized system can thus be written

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

A similar procedure can be applied for a controlled system. Consider the system

$$\ddot{x} + 4\dot{x}^5 + (x^2 + 1)u = 0.$$

The system can be linearly approximated about  $\vec{x} = \vec{0}$  as

$$\ddot{x} + 0 + (0 + 1)u \approx 0.$$

i.e., the linearized system can be written

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Assume that the control law for the original nonlinear system has been selected to be

$$u = \sin x + x^3 + \dot{x} \cos^2 x.$$

then the linearized closed-loop dynamics is

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

The following result makes precise the relationship between the stability of the linear system (2.1.12) and that of the original nonlinear system (2.1.2).

**Theorem 2.1.10 (Lyapunov's Linearization Method)**

- If the linearized system is strictly stable (i.e., if all eigenvalues of  $A$  are strictly in the left-half complex plane), then the equilibrium point is asymptotically stable (for the actual nonlinear system).
- If the linearized system is unstable (i.e., if at least one eigenvalue of  $A$  is strictly in the right-half complex plane), then the equilibrium point is unstable (for the nonlinear system).
- If the linearized system is marginally stable (i.e., all eigenvalues of  $A$  are in the left-half complex plane, but at least one of them is on the  $j\omega$  axis), then one cannot conclude anything from the linear approximation (the equilibrium point may be stable, asymptotically stable, or unstable for the nonlinear system).

A summary of the theorem is that it is true by **continuity**. If the linearized system is strictly stable, or strictly unstable, then since the approximation is valid “not too far” from the equilibrium, the nonlinear system itself is locally stable, or locally unstable. However, if the linearized system is marginally stable, the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์ใช้เท่านั้นเอกสารนี้อาจมีลิขสิทธิ์หรือเครื่องหมายการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

higher-order terms in (2.1.11) can have a decisive effect on whether the nonlinear system is stable or unstable. As we shall see in the next section, simple nonlinear systems may be globally asymptotically stable while their linear approximations are only marginally stable: one simply cannot infer any stability property of a nonlinear system from its marginally stable linear approximation.

**Example 2.1.11** *As expected, it can be shown easily that the equilibrium states  $(x_1 = \pi[2\pi], \dot{x}_1 = 0)$  of the pendulum of Example 2.1.3 are unstable. Indeed, first note that, in a neighborhood of  $x_1 = \pi$*

$$\sin x_1 = \sin \pi + (\pi - x_1) + h.o.t. = (\pi - x_1) + h.o.t..$$

*Thus, the matrix  $A$  corresponding to the system's linearization in that neighborhood is*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

*Since  $a_1 > 0$  and  $a_2 > 0$ , the linear approximation is unstable, and therefore so is the nonlinear system at that equilibrium point.*

**Example 2.1.12** *Consider the first order system*

$$\dot{x} = ax + bx^5.$$

*The origin 0 is one of the two equilibrium points of this system. The linearization of this system around the origin is*

$$\dot{x} = ax.$$

*The application of Lyapunov's linearization method indicates the following stability properties of the nonlinear system*

- $a < 0$ : asymptotically stable;

- $a > 0$ : *unstable*;
- $a = 0$ : *cannot tell from linearization*.

In the third case, the nonlinear system becomes

$$\dot{x} = bx^5$$

The linearization method fails while, as we shall see, the direct method to be described can easily solve this problem.

Lyapunov's linearization theorem shows that linear control design is a matter of consistency: one must design a controller such that the system remain in its "linear range". It also stresses major limitations of linear design: how large is the linear range? What is the extent of stability (how large is  $r$  in Definition 2.1.4? These questions motivate a deeper approach to the nonlinear control problem, Lyapunov's direct method.

## 2.2 Lyapunov's Direct Method

The basic philosophy of Lyapunov's direct method is the mathematical extension of a fundamental physical observation: if the total energy of a mechanical (or electrical) system is continuously dissipated, then the system, **whether linear or nonlinear** must eventually settle down to an equilibrium point. Thus, we may conclude the stability of a system by examining the variation of a single scalar function.

Specifically, let us consider the nonlinear mass-damper-spring system in Figure 2.6 ([54]), whose dynamic equation is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่การศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (2.2.1) ค่า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

with  $b\dot{x}|\dot{x}|$  representing nonlinear dissipation or damping, and  $(k_0x + k_1x^3)$  representing a nonlinear spring term. Assume that the mass is pulled away from the natural length of the spring by a large distance, and then released. Will the resulting motion be stable? It is very difficult to answer this question using the definitions of stability, because the general solution of this nonlinear equation is unavailable. The linearization method cannot be used either because the motion starts outside the linear range (and in any case the system's linear approximation is only marginally stable). However, examination of the system energy can tell us a lot about the motion pattern. The total mechanical energy of the system is the

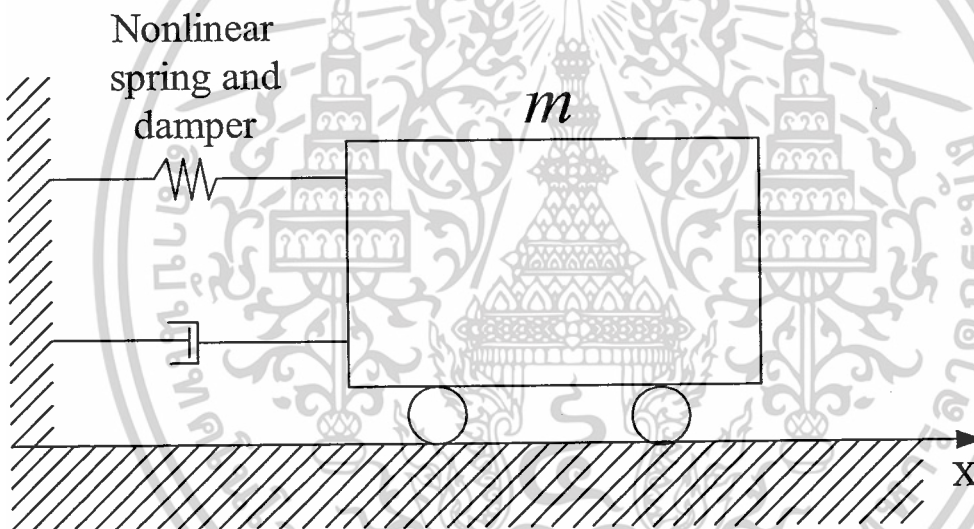


Figure 2.6: A nonlinear mass-damper-spring-system.

sum of its kinetic energy and its potential energy

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0y + k_1y^3) dy = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4. \quad (2.2.2)$$

Comparing the definitions of stability and mechanical energy, one can easily see some relations between the mechanical energy and the stability concepts described earlier:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- zero energy corresponds to the equilibrium point ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ).
- asymptotic stability implies the convergence of mechanical energy to zero.
- instability is related to the growth of mechanical energy.

These relations indicate that the value of a scalar quantity, the mechanical energy, indirectly reflects the magnitude of the state vector; and furthermore, that the stability properties of the system can be characterized by the variation of the mechanical energy of the system.

The rate of energy variation during the system's motion is obtained easily by differentiating the first equality in (2.2.2) and using (2.2.1)

$$\dot{V}(\vec{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3. \quad (2.2.3)$$

Equation (2.2.3) implies that the energy of the system, starting from some initial value is continuously dissipated by the damper until the mass settles down, i.e., until  $\dot{x} = 0$ . Physically, it is easy to see that the mass must finally settle down at the natural length of the spring, because it is subjected to a non-zero spring force at any position other than the natural length.

The direct method of Lyapunov is based on a generalization of the concepts in the above mass-spring-damper system to more complex systems. Faced with a set of nonlinear differential equations, the basic procedure of Lyapunov's direct method is to generate a scalar "energy-like" function for the dynamic system, and examine the time variation of that scalar function. In this way, conclusions may be drawn on the stability of the set of differential equations without using the difficult stability definitions or requiring explicit knowledge of solutions.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.2.1 Positive Definite Function and Lyapunov Functions

The energy function in (2.2.2) has two properties. The first is a property of the function itself: it is strictly positive unless both state variables  $x$  and  $\dot{x}$  are zero. The second property is a property associated with the dynamics (2.2.1): the function is monotonically decreasing when the variables  $x$  and  $\dot{x}$  vary according to (2.2.1). In the Lyapunov's direct method, the first property is formalized by the notion of positive definite functions, and the second is formalized by the so-called Lyapunov functions.

Let us discuss positive definite functions first.

**Definition 2.2.1** A scalar continuous function  $V(\vec{x})$  is said to be locally positive definite if  $V(\vec{0}) = 0$  and, in a ball  $B_{R_0}$

$$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow V(\vec{x}) > 0.$$

If  $V(\vec{0}) = 0$  and the above property holds over the whole state space, then  $V(\vec{x})$  is said to be globally positive definite.

For instance, the function

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}MR^2x_2^2 + MR(1 - \cos x_1).$$

which is the mechanical energy of the pendulum of Example 2.1.3, is locally positive definite. The mechanical energy (2.2.2) of the nonlinear mass-damper-spring system is globally positive definite. Note that, for that system, the kinetic energy  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$  is **not** positive definite by itself, because it can equal zero for non-zero value of  $x$ .

The above definition implies that the function  $V$  has a unique minimum at the origin  $\vec{0}$ . Actually, given any function having a **unique** minimum in a certain ball,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์เท่านั้น ไม่อนุญาตให้ผู้อื่นไปเผยแพร่ได้  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

we can construct a locally positive definite function simply by adding a constant to that function. For example, the function  $V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$  is a lower bounded function with a unique minimum at the origin, and the addition of the constant 1 to it makes it a positive definite function. Of course, the function shifted by a constant has the same time-derivative as the original function.

Let us describe the geometrical meaning of locally positive definite functions. Consider a positive definite function  $V(\vec{x})$  of two state variable  $x_1$  and  $x_2$ . Plotted in a 3-dimensional space,  $V(\vec{x})$  typically corresponds to a surface looking like an upward cup (Figure 2.7 [54]). The lowest point of the cup is located at the origin.

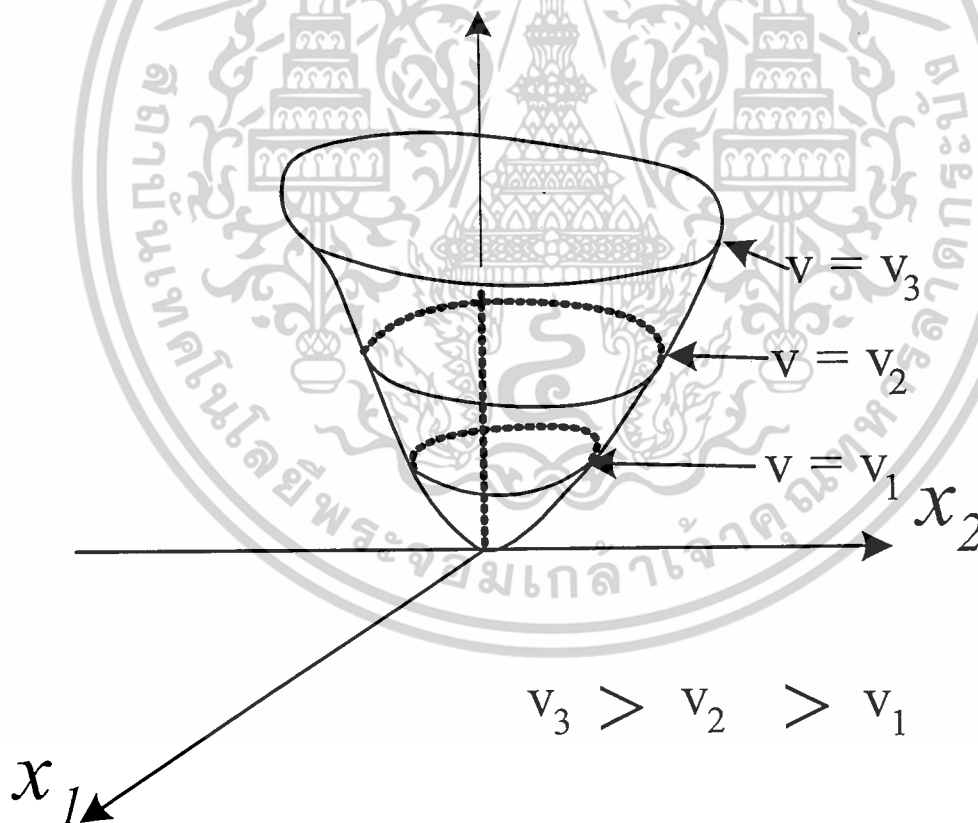


Figure 2.7: Typical shape of a positive definite function  $V(x_1, x_2)$ .

A few related concepts can be defined similarly, in a local or global sense, i.e., a function  $V(\vec{x})$  is **negative definite** if  $-V(\vec{x})$  is positive definite;  $V(\vec{x})$  is **positive** ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**semi-definite** if  $V(\vec{0}) = 0$  and  $V(\vec{x}) \geq 0$  for  $\vec{x} \neq \vec{0}$ ;  $V(\vec{x})$  is **negative semi-definite** if  $-V(\vec{x})$  is positive semi-definite. The prefix “semi” is used to reflect the possibility of  $V$  being equal to zero for  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . These concepts can be given geometrical meanings similar to the ones given for positive definite functions.

With  $\vec{x}$  denoting the state of the system (2.1.2), a scalar function  $V(\vec{x})$  actually represents an implicit function of time  $t$ . Assuming that  $V(\vec{x})$  is differentiable, its derivative with respect to time can be found by the chain rule,

$$\dot{V} = \frac{dV(\vec{x})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \dot{\vec{x}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \vec{f}(\vec{x}).$$

We see that, because  $\vec{x}$  is required to satisfy the autonomous state equations (2.1.2),  $\dot{V}$  only depends on  $\vec{x}$ . It is often referred to as “the derivative of  $V$  along the system trajectory”. For the system (2.2.1),  $\dot{V}(\vec{x})$  is computed in (2.2.3) and found to be negative. Functions such as  $V$  in that example are given a special name because of their importance in Lyapunov’s direct method.

**Definition 2.2.2** *If, in a ball  $B_{R_0}$ , the function  $V(\vec{x})$  is positive definite and has continuous partial derivatives, and if its time derivative along any state trajectory of system (2.1.2) is negative semi-definite, i.e.,*

$$\dot{V}(\vec{x}) \leq 0.$$

*Then  $V(\vec{x})$  is said to be a Lyapunov function for the system (2.1.2).*

## 2.2.2 Equilibrium Point Theorems

The relations between Lyapunov functions and the stability of systems are made precise in a number of theorems in Lyapunov’s direct method. Such theorems usually have local and global versions. The local versions are concerned with stability properties in the neighborhood of equilibrium point and usually involve a locally positive definite function.

## LYAPUNOV THEOREM FOR LOCAL STABILITY

**Theorem 2.2.3 (Local Stability)** *If, in a ball  $B_{R_0}$ , there exists a scalar function  $V(\vec{x})$  with continuous first partial derivatives such that*

- $V(\vec{x})$  is positive definite (locally in  $B_{R_0}$ )
- $\dot{V}(\vec{x})$  is negative semi-definite (locally in  $B_{R_0}$ )

*then the equilibrium point  $\vec{0}$  is stable. If, actually, the derivative  $\dot{V}(\vec{x})$  is locally negative definite in  $B_{R_0}$ , then the stability is asymptotic.*

In applying the above theorem for analysis of a nonlinear system, one goes through the two steps of choosing a positive definite function, and then determining its derivative along the path of the nonlinear systems. The following example illustrates this procedure.

**Example 2.2.4 (Local Stability)** *A simple pendulum with viscous damping is described by*

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0.$$

*Consider the following scalar function*

$$V(\vec{x}) = (1 - \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}^2}{2}.$$

*One easily verifies that this function is locally positive definite. As a matter of fact, this function represents the total energy of the pendulum, composed of the sum of the potential energy and the kinetic energy. Its time-derivative is easily found to be*

$$\dot{v}(\vec{x}) = \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \leq 0.$$

*Therefore, by invoking the above theorem, one concludes that the origin is a stable equilibrium point. In fact, using physical insight, one easily sees the reason why*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ , namely that the damping term absorbs energy. Actually,  $\dot{V}$  is precisely the power dissipated in the pendulum. However, with this Lyapunov function, one cannot draw conclusions on the asymptotic stability of the system, because  $\dot{V}(\vec{x})$  is only negative semi-definite.

The following example illustrates the asymptotic stability result.

**Example 2.2.5 (Asymptotic stability)** *Let us study the stability of the non-linear system defined by*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1).\end{aligned}$$

*around its equilibrium point at the origin. Given the positive definite function*

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

*its derivative along any system trajectory is*

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

*Thus,  $\dot{V}$  is locally negative definite in the 2-dimensional ball  $B_1$ , i.e., in the region defined by  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ . Therefore, the above theorem indicates that the origin is asymptotically stable.*

## LYAPUNOV THEOREM FOR GLOBAL STABILITY

The above theorem applies to the local analysis of stability. In order to assert **global asymptotic stability** of a system, one might naturally expect that the ball  $B_{R_0}$  in the above local theorem has to be expanded to be the whole state-space. This is indeed necessary, but it is not enough. An additional condition on the function  $V$  has to be satisfied:  $V(\vec{x})$  must be **radially unbounded**, by which we mean that  $V(\vec{x}) \rightarrow \infty$  as  $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$  (in other words, as  $\vec{x}$  tends to infinity in

any direction). We then obtain the following powerful result:

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Theorem 2.2.6 (Global Stability)** *Assume that there exists a scalar function  $V$  of the state  $\vec{x}$ , with continuous first order derivatives such that*

- $V(\vec{x})$  is positive definite
- $\dot{V}(\vec{x})$  is negative definite
- $V(\vec{x}) \rightarrow \infty$  as  $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$

*then the equilibrium at the origin is globally asymptotically stable.*

The reason for the radial unboundedness condition is to assure that the contour curves (or contour surfaces in the case of higher order systems)  $V(\vec{x}) = V_\alpha$  correspond to closed curves. If the curves are not closed, it is possible for the state trajectories to drift away from the equilibrium point, even though the state keeps going through contours corresponding to smaller and smaller  $V_\alpha$ 's. For example, for the positive definite function  $V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ , the curves  $V(\vec{x}) = V_\alpha$  for  $V_\alpha > 1$  are open curves.

**Example 2.2.7 (A class of first-order systems)** *Consider the nonlinear system*

$$\dot{x} + c(x) = 0.$$

*where  $c$  is any continuous function of the same sign as its scalar argument  $x$ , i.e.,*

$$xc(x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0.$$

*Intuitively, this condition indicates that  $-c(x)$  “pushes” the system back towards its rest position  $x = 0$ , but is otherwise arbitrary. Since  $c$  is continuous, it also*

*implies that  $c(0) = 0$ .* เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Consider as the Lyapunov function candidate the square of the distance to the origin

$$V = x^2.$$

The function  $V$  is radially unbounded, since it tends to infinity as  $|x| \rightarrow \infty$ . Its derivative is

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xc(x).$$

Thus  $\dot{V} < 0$  as long as  $x \neq 0$ , so that  $x = 0$  is globally asymptotically stable equilibrium point.

For instance, the system

$$\dot{x} = \sin^2 x - x.$$

is globally asymptotically convergent to  $x = 0$ , since for  $x \neq 0$ ,  $\sin^2 x \leq |\sin x| < |x|$ . Similarly, the system

$$\dot{x} = -x^3.$$

is globally asymptotically convergent to  $x = 0$ . Notice that while this system linear approximation ( $\dot{x} \approx 0$ ) is inconclusive, even about local stability, the actual nonlinear system enjoys a strong stability property (global asymptotic stability).

**Example 2.2.8** Consider the system

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

The origin of the state-space is an equilibrium point for this system. Let  $V$  be the positive definite function

$$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2.$$

The derivative of  $V$  along any system trajectory is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เฉพาะในชั้นเรียนเท่านั้น ห้ามเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้เฉพาะในชั้นเรียนเท่านั้น ห้ามเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
 ไม่ว่าการณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which is negative definite. Therefore, the origin is a globally asymptotically stable equilibrium point. Note that the globalness of this stability result also implies that the origin is the **only** equilibrium point of the system.

## REMARKS

Many Lyapunov functions may exist for the same system. For instance, if  $V$  is a Lyapunov function for a given system, so is

$$V_1 = \rho V^\alpha.$$

where  $\rho$  is any strictly positive constant and  $\alpha$  is any scalar (not necessarily an integer) larger than 1. Indeed, the positive-definiteness of  $V$  implies that of  $V_1$ , the positive definiteness (or positive semi-definiteness) of  $-\dot{V}$  implies that of  $-\dot{V}_1$ , and (the radial unboundedness of  $V$  (if applicable) implies that of  $V_1$ .

More importantly, for a given system, specific choices of Lyapunov functions may yield more precise results than others. (See p.67 [54])

Along the same lines, it is important to realize that the theorems in Lyapunov analysis are all **sufficiency** theorems. If for a particular choice of Lyapunov function candidate  $V$ , the conditions on  $\dot{V}$  are not met, one cannot draw any conclusions on the stability or instability of the system – the only conclusion one should draw is that a different Lyapunov function candidate should be tried.

### 2.2.3 Lyapunov Analysis of Linear Time-Invariant Systems

**Definition 2.2.9** A square matrix  $M$  is symmetric if  $M = M^T$ . A square matrix  $M$  is skew-symmetric if  $M = -M^T$ .

**Definition 2.2.10** A square  $n \times n$  matrix  $M$  is **positive definite (P.D.)** if

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในของมหาวิทยาลัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In other words, a matrix  $M$  is positive definite if the quadratic function  $\vec{x}^T M \vec{x}$  is a positive definite function. This definition implies that to every positive definite matrix is associated a positive definite function. Obviously, the converse is not true.

## LYAPUNOV FUNCTIONS FOR LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

Given a linear system of the form  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ , let us consider a quadratic Lyapunov function candidate

$$V = \vec{x}^T P \vec{x}.$$

where  $P$  is a given symmetric positive definite matrix. Differentiating the positive definite function  $V$  along the system trajectory yields another quadratic form

$$\dot{V} = \dot{\vec{x}}^T P \vec{x} + \vec{x}^T P \dot{\vec{x}} = -\vec{x}^T Q \vec{x}. \quad (2.2.4)$$

where

$$A^T P + P A = -Q. \quad (2.2.5)$$

The question, thus, is to determine whether the symmetric matrix  $Q$  defined by the so-called **Lyapunov equation** (2.2.10) above, is itself P.D. . If this is the case, then  $V$  satisfies the conditions of the basic theorem of last section, and the origin is globally asymptotically stable. However, this “natural” approach may lead to inconclusive result, i.e.,  $Q$  may be not positive definite even for stable systems.

### Example 2.2.11

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}.$$

If we take  $P = I$ , then

$$-Q = A^T P + P A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -24 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The matrix  $Q$  is not positive definite. Therefore, no conclusion can be drawn from the Lyapunov function on whether the system is stable or not.

A more useful way of studying a given linear system using scalar quadratic functions is, instead, to derive a positive matrix  $P$  from a given positive definite matrix  $Q$ , i.e.,

- choose a positive definite matrix  $Q$
- solve for  $P$  from the Lyapunov equation (2.2.5)
- check whether  $P$  is P.D.

If  $P$  is P.D., then  $\frac{1}{2}\vec{x}^T P \vec{x}$  is a Lyapunov function for the linear system and global asymptotical stability is guaranteed. Unlike the previous approach of going from a given  $P$  to a matrix  $Q$ , this technique of going from a given  $Q$  to a matrix  $P$  always leads to conclusive results for stable linear systems, as seen from the following theorem.

**Theorem 2.2.12** *A necessary and sufficient condition for a LTI system  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  to be strictly stable is that, for any symmetric P.D. matrix  $Q$ , the unique matrix  $P$  solution of the Lyapunov equation (2.2.5) be symmetric positive definite.*

The above theorem shows that **any** positive definite matrix  $Q$  can be used to determine the stability of a linear system. A simple choice of  $Q$  is the identity matrix.

**Example 2.2.13** *Consider again the second-order system of Example 2.2.11. Let us take  $Q = I$  and denote  $P$  by*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

where, due to symmetry of  $P$ ,  $p_{21} = p_{12}$ . Then the Lyapunov equation is

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

whose solution is

$$p_{11} = 5, p_{12} = p_{22} = 1.$$

The corresponding matrix

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

is positive definite, and therefore the linear system is globally asymptotically stable.

Note that we have solved for  $P$  directly.

Even though the choice  $Q = I$  is motivated by computational simplicity, it has a surprising property: the resulting Lyapunov analysis allows us to get the best estimate of the state convergence rate, as we shall see in later courses.

# Chapter 3

## Feedback Linearization

### 3.1 Introduction

Consider a class of nonlinear systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u. \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

and pose the question of whether there exist a state feedback control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v.$$

and a change of variables

$$z = T(x).$$

that transform the nonlinear system into an equivalent linear system. We start with *input-state linearization*, where the full state equation is linearized. Next, we introduce the notion of *input-output linearization*, where the emphasis is on linearizing the input-output map from  $u$  to  $y$  even if the state equation is only

partially linearized. State feedback control of feedback linearizable systems is

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

discussed where we deal with stabilization, tracking and regulation via integral control problems. Finally, we present the differential geometric approach to feedback linearization which allows us to characterize the class of feedback linearizable systems by geometric conditions.

## 3.2 Input-State Linearization

Inspection of the state equation.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2. \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu.\end{aligned}$$

shows that we can choose  $u$  as

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{v}{c}.$$

to cancel the nonlinear term  $a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta]$ . This cancellation results in the linear system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2. \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v.\end{aligned}$$

Thus, the stabilization problem for the nonlinear systems has been reduced to a stabilization problem for a controllable linear system. We can proceed to design a stabilizing linear state feedback control

$$v = k_1x_1 + k_2x_2.$$

to locate the eigenvalues of the closed-loop system

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

in the open left-half plane. The overall state feedback control law is given by

$$u = \left(\frac{a}{c}\right)[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{1}{c}(k_1 x_1 + k_2 x_2).$$

The general idea of nonlinearity cancellation is that we should not be expected to be able to cancel nonlinearities in every nonlinear system. There must be a certain structural property of the system that allows us to perform such cancellation. It is not hard to see that to cancel a nonlinear term  $\alpha(x)$  by subtraction, the control  $u$  and the nonlinearity  $\alpha(x)$  must always appear together as a sum  $u + \alpha(x)$ . To cancel a nonlinear term  $\gamma(x)$  by division, the control  $u$  and the nonlinearity  $\gamma(x)$  must always appear as a product  $\gamma(x)u$ . If the matrix  $\gamma(x)$  is nonsingular in the domain of interest, then it can be cancelled by  $u = \beta(x)v$ , where  $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$  is the inverse of the matrix  $\gamma(x)$ . Therefore, the ability to use feedback to convert a nonlinear state equation into a controllable linear state equation by cancelling nonlinearities requires the nonlinear state equation to have structure

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]. \quad (3.2.1)$$

where  $A$  is  $n \times n$ ,  $B$  is  $n \times p$ , the pair  $(A, B)$  is controllable, and the functions  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  and  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$  are defined in a domain  $D_x \subset \mathbb{R}^n$  that contains the origin. The matrix  $\beta(x)$  is assumed to be nonsingular for every  $x \in D_x$ . Notice that  $\beta^{-1}$  here denotes the inverse of the matrix  $\beta(x)$  for every  $x$ , and not the inverse map of the function  $\beta(x)$ . If the state equation takes the form (3.2.1), then we can linearize it via the state feedback

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v. \quad (3.2.2)$$

to obtain the linear state equation

$$\dot{x} = Ax + Bv. \quad (3.2.3)$$

For stabilization, we design  $v = Kx$  such that  $A + BK$  is Hurwitz. The overall nonlinear stabilizing state feedback control is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษานั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใด  

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx. \quad (3.2.4)$$
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Even if the state equation does not have the structure (3.2.1) for one choice of state variable, it might do so for another choice. Consider, for example, the system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin(x_2). \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u.\end{aligned}$$

We cannot simply choose  $u$  to cancel the nonlinear term  $a \sin x_2$ . However, if we first change the variables by the transformation

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1. \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x}_1.\end{aligned}$$

then  $z_1$  and  $z_2$  satisfy

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2. \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2(-x_1^2 + u).\end{aligned}$$

and the nonlinearity can be cancelled by the control

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos(x_2)}v.$$

which is well defined for  $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$ . The state equation in the new coordinate  $(z_1, z_2)$ ; that is,

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1. \\ x_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right).\end{aligned}$$

which is well defined for  $-a < z_2 < a$ . The transformed state equation is given by

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2. \\ \dot{z}_2 &= a \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\right)(-z_1^2 + u).\end{aligned}$$

When a change of variable  $z = T(x)$  is used to transform the state equation from the  $x$ -coordinates to the  $z$ -coordinates, the map  $T$  must be invertible, that is, it

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

must have an inverse map  $T^{-1}(\cdot)$  such that  $x = T^{-1}(z)$  for all  $z \in T(D_x)$  where  $D_x$  is the domain of  $T$ . Moreover, since the derivatives of  $z$  and  $x$  should be continuous, we require that both  $T(\cdot)$  and  $T^{-1}(\cdot)$  be continuously differentiable map with a continuously differentiable inverse is known as a *diffeomorphism*. Now we have all the elements we need to define input-state linearizable systems.

**Definition 3.1** *A nonlinear system*

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u. \quad (3.2.5)$$

where  $f : D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $G : D_x \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$  are sufficiently smooth on a domain  $D_x \subset \mathbb{R}^n$ , is said to be input-state linearizable if there exists a diffeomorphism  $T : D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that  $D_x = T(D_x)$  contains the origin and the change of variables  $z = T(x)$  transforms the system (3.2.5) into the form

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]. \quad (3.2.6)$$

with  $(A, B)$  controllable and  $\beta(x)$  nonsingular for all  $x \in D_x$ .

Setting

$$\alpha_o(z) = \alpha(T^{-1}(z)) \text{ and } \beta_o(z) = \beta(T^{-1}(z)).$$

we can write equation (3.2.6) as

$$\dot{z} = Az + B\beta_o^{-1}(z)[u - \alpha_o(z)]. \quad (3.2.7)$$

which takes the form (3.2.1). It is more convenient, however, to express  $\alpha$  and  $\beta$  in the  $x$ -coordinates since the state the state feedback control is implemented in these coordinate.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Suppose we are given an input-state linearizable system (3.2.5). Let  $z = T(x)$  be a change of variables that brings the system into the form (3.2.6). We have

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + G(x)u]. \quad (3.2.8)$$

On the other hand, from (3.2.6),

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]. \quad (3.2.9)$$

From (3.2.8) and (3.2.9), we see that the equality

$$\frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + G(x)u] = AT(x) + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)].$$

must hold for all  $x$  and  $u$  in the domain of interest. By first taking  $u = 0$ , we split the equation into two:

$$\frac{\partial T}{\partial x} f(x) = AT(x) - B\beta^{-1}(x)\alpha(x). \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} G(x) = B\beta^{-1}(x). \quad (3.2.11)$$

Therefore, we conclude that any function  $T(\cdot)$  that transform (3.2.5) into the form (3.2.6) must satisfy the partial differential equation (3.2.10)-(3.2.11). Alternatively, if there is a map  $T(\cdot)$  that satisfy (3.2.10) - (3.2.11) for some  $\alpha, \beta, A$  and  $B$  with the desired properties, then it can be easily seen that the change of variable  $z = T(x)$  transforms (3.2.5) into (3.2.6). Hence, the existence of  $T, \alpha, \beta, A,$  and  $B$  that satisfy the partial differential equations (3.2.10) - (3.2.11) is a necessary and sufficient condition for the system (3.2.5) to be input-state linearizable.

When a nonlinear system is input-state linearizable, the map  $z = T(x)$  that transforms the system into the form (3.2.6) is not unique. Probably the easiest way to see this point is to notice that if we apply the linear state transformation  $\zeta = Mz$ , with a nonsingular  $M$ , to (3.2.6) then the state equation in the  $\zeta$ -coordinates will be

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 $\zeta = MAM^{-1}\zeta + MB\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$   
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which is still of the form (3.2.6), but with different  $A$  and  $B$  matrices. Therefore, the composition of the transformations  $z = T(x)$  and  $\zeta = Mz$  gives a new transformation that transform the system into the special structure of (3.2.6). The nonuniqueness of  $T$  can be exploited to simplify the partial differential equations (3.2.10)-(3.2.11). To illustrate the idea without complications, we will restrict our discussions to single-input systems ( $p = 1$ ) and write the single-column input matrix  $G$  as  $g$ . In this case, for any controllable pair  $(A, B)$  we can find a nonsingular matrix  $M$  that transforms  $(A, B)$  into a controllable canonical form; that is,  $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^T$  and  $MB = B_c$ , where

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{and} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

The term  $B_c\lambda^T\zeta = B_c\lambda^TMT(x)$  can be include in the term  $B_c\beta^{-1}(x)\alpha(x)$ . Therefore, without loss of generality, we can assume that the matrices  $A$  and  $B$  in (3.2.10)-(3.2.11) are the canonical form matrices  $A_c$  and  $B_c$ . Let

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_{n-1}(x) \\ T_n(x) \end{bmatrix}$$

It can be easily verified that

$$A_cT(x) - B_c\beta^{-1}(x)\alpha(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_{n-1}(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B_c\beta^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\beta(x) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

where  $\alpha$  and  $\beta$  are scalar functions. Using these expressions in (3.2.10)-(3.2.11) simplifies the partial differential equations. Equation (3.2.10) simplifies to

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) &= T_2(x) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) &= T_3(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x) \\ \frac{T_n}{\partial x} f(x) &= -\alpha(x)/\beta(x).\end{aligned}$$

The first  $n - 1$  equations show that the components  $T_2$  to  $T_n$  of  $T$  are determined functions of the first component  $T_1$ . The last equation defines  $\alpha/\beta$  in terms of  $T_1$

Equation (3.2.11) simplifies to

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0 \\ \frac{T_n}{\partial x} g(x) &= -1/\beta(x) \neq 0.\end{aligned}$$

We need to search for a function  $T_1(x)$  that satisfies

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1; \quad \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) \neq 0. \quad (3.2.12)$$

where

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

If there is a function  $T_{i+1}(x)$  that satisfies (3.2.12), then  $\beta$  and  $\alpha$  are given by

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}; \quad \alpha(x) = -\frac{(\partial T_n / \partial x) f(x)}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}. \quad (3.2.13)$$

Thus we have reduced the problem to solving (3.2.12) for  $T_1$ . We will see that

the existence of a function  $T_1$  that satisfies (3.2.12) can be characterized by a

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

necessary and sufficient condition in terms of the functions  $f, g$ , and their partial derivatives. Furthermore, if  $T_1(x)$  satisfies (3.2.12) in a domain  $D$ , then for each  $x_o \in D$  there is a neighborhood  $N$  of  $x_o$  such that the restriction of  $T(x)$  to  $N$  is a diffeomorphism.

**Example 3.1** *As a first example, we reconsider the system*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = f(x) + gu.$$

and see how we can arrive at the transformation we used earlier by solving (3.2.12). The open-loop system has an equilibrium point at  $x = 0$ . We want to find  $T_1(x)$  that satisfies the conditions

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g \neq 0.$$

with  $T_1(0) = 0$ , where

$$T_2 = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x).$$

From the condition  $[\partial T_1 / \partial x]g = 0$ , we have

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0.$$

So,  $T_1$  must be independent of  $x_2$ . Therefore,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} a \sin(x_2).$$

The condition

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos(x_2) \neq 0.$$

is satisfied in the domain where  $\cos(x_2) \neq 0$  by any choice of  $T_1 = T_1(x_1)$  such that  $\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$ . Taking  $T_1(x_1) = x_1$  results in the transformation we used earlier.

Other choices of  $T_1$  could have been made. For example,  $T_1(x_1) = x_1 + x_1^3$  would

give another change of variables that transforms the system into the form (3.2.6).  
 เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านธุรกิจ  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Example 3.2** A synchronous generator connected to an infinite bus may be represented by a third-order model

$$\dot{x} = f(x) + gu.$$

with

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos(\delta)] \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

where  $a, b, c, d$ , and  $\delta$  are positive constants. The open-loop system has equilibrium at  $x = 0$ . We want to find  $T_1 = T_1(x)$  that satisfies the conditions

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g = 0; \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} g \neq 0.$$

with  $T_1(0) = 0$ , where

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x); \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x).$$

from the condition  $[\partial T_1 / \partial x]g = 0$ , we have

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0.$$

We choose  $T_1$  independent of  $x_3$ . Therefore,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] + bx_2.$$

from the condition  $[\partial T_2 / \partial x]g = 0$ , we have

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0.$$

We choose  $T_1$  independent of  $x_2$ . Therefore,  $T_2$  simplifies to

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ส่วนบุคคลเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและห้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] + bx_2.$$

Hence,

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} g = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_1}.$$

and the condition  $[\partial T_3 / \partial x]g \neq 0$  is satisfied in the domain  $0 < x_1 + \delta < \pi$  with any choice of  $T_1 = T_1(x_1)$  such that  $(\partial T_1 / \partial x_1) \neq 0$  on this domain. The simple choice  $T_1 = x_1$  satisfies this requirement as well as the condition  $T_1(0) = 0$ . Thus, we choose  $\partial T_1 = x_1$  and find from the previous expressions that the change of variables  $z = T(x)$  is given by

$$z_1 = T_1(x) = x_1.$$

$$z_2 = T_2(x) = x_2.$$

$$z_3 = T_3(x) = a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin(\delta)] + bx_2.$$

The inverse of this transformation  $x = T^{-1}(z)$  is defined for all  $0 < z_1 + \delta < \pi$  and given by

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = z_2$$

$$x_3 = -1 - \frac{z_3 + bz_2 - a \sin(\delta)}{a \sin(z_1 + \delta)}.$$

The functions  $\beta$  and  $\alpha$  are given by

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_3 / \partial x)g} = \frac{1}{(\partial T_3 / \partial x_3)} = \frac{1}{a \sin(x_1 + \delta)}$$

$$\alpha(x) = -\frac{(\partial T_3 / \partial x)f(x)}{(\partial T_3 / \partial x)g(x)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์โดยมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและเผยแพร่ไปยังผู้ใดของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The state equation in the  $z$ -coordinates is

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2. \\ \dot{z}_2 &= z_3. \\ \dot{z}_3 &= -a \sin(x_1 + \delta)[u + \alpha(x)].\end{aligned}$$

which can be linearized by the linearizing feedback control

$$u = \alpha(x) - \frac{1}{a \sin(x_1 + \delta)} v.$$

Notice that the state equation in the  $z$ -coordinates is valid only in the domain  $0 < z_1 + \delta < \pi$ , which is the domain over which the change of variables  $z = T_1(x)$  is a well-defined diffeomorphism.

### 3.3 Input-Output Linearization

When certain output variable are interest, as in tracking control problems, the state model is described by state and output equations. Linearizing the state equation, as we have done in the previous section, does not necessarily linearize the output equation. For example, if the system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2. \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u.\end{aligned}$$

has an output  $y = x_2$ , then the change of variables and state feedback control

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \sin x_2, \quad \text{and} \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v.$$

yield

$$\dot{z}_1 = z_2.$$

$$\dot{z}_2 = v.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

While the state equation is linear, solving a tracking control problem for  $y$  is still complicated by the nonlinearity of the output equation. Inspection of both the state and output equations in the  $x$ -coordinates shows that, if we use the state feedback control  $u = x_1^2 + v$ , we can linearize the input-output map from  $u$  to  $y$ , which will be described by the linear model

$$\dot{x}_2 = v.$$

$$y = x_2.$$

We can now proceed to solve the tracking control problem using linear control theory. This discussion shows that sometimes it is more beneficial to linearize the input-output map even at the expense of leaving part of the nonlinear state equation. This is the input-output linearization problem which we will address in this section. One catch about input-output linearization is that the linearized input-output map may not account for all the dynamics of all the dynamics of the system. In the foregoing example, the full system is described by

$$\dot{x}_1 = a \sin x_2.$$

$$\dot{x}_2 = v.$$

$$y = x_2.$$

Note that the state variable  $x_1$  is not connected to the output  $y$ . In other words, the linearizing feedback control has mode  $x_1$  unobservable from  $y$ . When we design tracking control, we should make sure that the variable  $x_1$  is well behaved; that is, stable or bounded in some sense. A naive control design that uses only the linear input-output map may result in an ever-growing signal  $x_1(t)$ . For example, suppose we design a linear control to stabilize the output  $y$  at a constant value  $y_R$ . The corresponding solution of the  $x_1(t)$  equation is  $x_1(t) = x_1(0) + ta \sin y_R$ .

So, for any  $y_R \neq 0$ , the variable  $x_1(t)$  will grow unbounded. This internal stability

issue will be address in the context of input-output linearization.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Consider the single-input-single-output:(SISO) system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u. \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

where  $f, g$ , and  $h$  are sufficiently smooth in a domain  $D \subset \mathbb{R}^n$ . The simplest case of input-output linearization arises when the system is both input-state linearizable. Starting with an input-state linearizable system, let  $T_1(x)$  be a solution of (3.2.12). Suppose the output function  $h(x)$  happens to be equal to  $T_1(x)$ . For example, in the robotic manipulator example 12.3, we choose  $T_1(x) = x_1$ ; this could indeed be the output of interest, since in this problem we are usually interested in controlling the angle  $x_1$ . If  $h(x) = T_1(x)$ , then the change of variables  $z = T(x)$  and state feedback control  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  yield the system

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + B_c v. \\ y &= C_c z.\end{aligned}$$

where  $(A_c, B_c, C_c)$  is a canonical form representation of a chain of  $n$  integrators; that is,  $A_c$  and  $B_c$  take the form (3.2) and

$$C_c = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]_{1 \times n}. \quad (3.3.1)$$

In this system, both the state and output equations are linear. For a given output function  $h(x)$ , we can find out whether or not  $h(x)$  satisfies the condition (3.2.12) by direct verification; we do not need to solve partial differential equations. The condition (3.2.12) can be interpreted as a restriction on the way the derivatives of  $y$  depend on  $u$ . To see this point, set  $\psi_1(x) = h(x)$ . The derivative  $\dot{y}$  is given by

$$\dot{y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} [f(x) + g(x)u].$$

If  $[\partial \psi_1 / \partial x]g(x) = 0$ , then

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายใน (ลิขสิทธิ์) ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

If we continue to calculate the second derivative of  $y$ , denoted by  $y^{(2)}$ , we obtain

$$y^{(2)} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} [f(x) + g(x)u].$$

Once again, if  $[\partial \psi_2 / \partial x]g(x) = 0$  then

$$y^{(2)} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(x) \triangleq \psi_3(x).$$

Repeating this process, we see that if  $h(x) = \psi_1(x)$  satisfies (3.2.12); that is,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) \neq 0.$$

where

$$\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

then  $u$  does not appear in the equations of  $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$  and appears in the equation of  $y^{(n)}$  with a nonzero coefficient

$$y^{(n)} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)u.$$

This equation shows clearly that the system is input-output linearizable since the state control

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)} \left[ -\frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + v \right].$$

reduces the input-output map to

$$y^{(n)} = v.$$

which is a chain of  $n$  integrators. If  $u$  appears in the equation of one of the derivative  $\dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$  and the coefficient of  $u$  (when it appear) is nonzero, then we can again linearize the input-output map. In particular, if  $h = \psi_1(x)$  satisfies

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} g(x) \neq 0.$$

for some  $1 \leq r < n$ , then the equation of  $y^{(r)}$  is given by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับครูใช้เพื่อการศึกษาค้นคว้าวิจัย ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and the state feedback control

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_r}{\partial x} g(x)} \left[ -\frac{\partial \psi_r}{\partial x} f(x) + v \right].$$

linearizes the input-output map to the chain of  $r$  integrators

$$y^{(r)} = v.$$

In this case, the integrator  $r$  is called the “relative degree” of the system, according to the following definition.

**Definition 3.2** A nonlinear system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.3.2)$$

$$y = h(x). \quad (3.3.3)$$

where  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , and  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  are sufficiently smooth on a domain  $D \subset \mathbb{R}^n$ , is said to have relative degree  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ , in a region  $D_o \subset D$  if

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} g(x) \neq 0. \quad (3.3.4)$$

for all  $x \in D_o$  where

$$\psi_1(x) = h(x) \quad \text{and} \quad \psi_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, r-1. \quad (3.3.5)$$

If the system (3.3.2)-(3.3.3) has relative degree  $r$ , then it is input-output linearizable. If it has relative degree  $n$ , then it both input-state and input-output linearizable.

# Chapter 4

## Backstepping Technic

### 4.1 Backstepping

Consider a nonlinear control system

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t). \quad (4.1.1)$$

**Theorem 4.1.1 (LaSalle-Yoshizawa)** *Let  $\vec{x} = \vec{0}$  be an equilibrium point of (4.1.1) and suppose  $f$  is locally Lipschitz in  $\vec{x}$  uniformly in  $t$ . Let  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuously differentiable, positive definite and radially unbounded function  $V(\vec{x})$  such that*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x})f(\vec{x}, t) \leq -W(\vec{x}) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1.2)$$

where  $W$  is a continuous function. Then, all solutions of (4.1.1) are globally uniformly bounded and satisfy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\vec{x}(t)) = 0. \quad (4.1.3)$$

In addition, if  $W(\vec{x})$  is positive definite, then the equilibrium  $\vec{x} = \vec{0}$  is globally

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

For the regulation task, the designed system is usually time-invariant,

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}), \quad (4.1.4)$$

in which case we are interested in its *invariant sets*. A set  $M$  is called an invariant set of (4.1.4) if any solution  $\vec{x}(t)$  that belongs to  $M$  at some time instant  $t_1$  must belong to  $M$  for all future and past time:

$$\vec{x}(t_1) \in M \Rightarrow \vec{x}(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1.5)$$

A set  $\Omega$  is *positively invariant* if this is true for all future time only:

$$\vec{x}(t_1) \in \Omega \Rightarrow \vec{x}(t) \in \Omega, \quad \forall t \geq t_1. \quad (4.1.6)$$

Can we guarantee convergence to a desired invariant set? A rewarding answer to this question is provided by LaSalle's Invariant Theorem and its asymptotic stability corollary:

**Theorem 4.1.2 (LaSalle)** *Let  $\Omega$  be a positively invariant set of (4.1.4). Let  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuously differentiable function  $V(\vec{x})$  such that  $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \Omega$ . Let  $E = \{\vec{x} \in \Omega \mid \dot{V}(\vec{x}) = 0\}$ , and let  $M$  be the largest invariant set contained in  $E$ . Then every bounded solution  $\vec{x}(t)$  starting in  $\Omega$  converges to  $M$  as  $t \rightarrow \infty$ .*

**Corollary 4.1.3 (Asymptotic Stability)** *Let  $\vec{x} = \vec{0}$  be the only equilibrium of (4.1.4). Let  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuously differentiable, positive definite, radially unbounded function  $V(\vec{x})$  such that  $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Let  $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(\vec{x}) = 0\}$ , and suppose that no solution other than  $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$  can stay forever in  $E$ . Then the origin is globally asymptotically stable (GAS).*

These invariance results motivate us to closely examine the invariant subsets of  $E$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำไปใช้ประโยชน์ด้วยวิธีการ  
The convergence properties of the designed system are stronger if the dimension  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

of  $M$  is lower. In the most favorable case of asymptotic stability, the largest invariant subset  $M$  of  $E$  is just the origin  $\vec{x} = \vec{0}$ . Our aim in backstepping technic thus is to render the dimension of  $M$  as low as possible.

## 4.2 Control Laypunov functions (clf)

This is about control design: Our objective is to create closed-loop systems with desirable stability properties, rather than analyze the properties of a given system. For this reason, we are interested in an extension of the Lypunov function concept, called a control Control Laypunov functions (clf).

Suppose that our problem for the time-invariant system

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, f(0, 0) = 0. \quad (4.2.1)$$

is to design a feedback control law  $\alpha(x)$  for the control variable  $u$  such that the equilibrium  $x = 0$  of the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x)). \quad (4.2.2)$$

is globally asymptotically stable. We can pick a function  $V(x)$  as a Lypunov candidate, and require that its derivative along the solutions of (4.2.2) satisfy  $\dot{V} \leq W(x)$ , Where  $W(x)$  is a positive definite function. We therefore need to find  $\alpha(x)$  to guarantee that for all  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, \alpha(x)) \leq -W(x). \quad (4.2.3)$$

This is difficult task. A stabilizing control law for (4.2.1) may exist but we may fail to satisfy (4.2.3) because of a poor choice of  $V(x)$  and  $W(x)$ . A system for which a good choice of  $V(x)$  and  $W(x)$  exists is said to possess a clf. Let is make

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
this notion precise.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition 4.2.1** A smooth positive definite and radially unbounded function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  is called a control Lyapunov function (clf) for (4.2.1) if

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \right\} < 0, \forall x \neq 0. \quad (4.2.4)$$

The clf concept of Artstein [9] and Sontag [59] is a generalization of Lyapunov design results by Jacobson [21] and Judjevic and Quinn [24]. Artstein [9] show that (4.2.4) is not only necessary, but also sufficient for the existence of a control law satisfying (4.2.3), that is, the existence of a clf is equivalent to global asymptotic stabilizing. For systems affine in the control,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, f(0) = 0, \quad (4.2.5)$$

the clf inequality (4.2.3) becomes

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \alpha(x) \leq -W(x). \quad (4.2.6)$$

The main deficiency of the clf concept as a design tool is that for most nonlinear systems a clf is not know. The task of finding an appropriate clf may be as complex as that of designing a stabilizing feedback law. For several important classes of nonlinear system, we will solve these two tasks simultaneously using a backstepping procedure. To initiate this procedure we need to be able to find  $V(x)$  and  $\alpha(x)$  at least for scalar systems. Fortunately, for scalar systems,  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  is always a reasonable clf and the inequality (4.2.6) is easy to satisfy. This is illustrated by an example which also issues a warning that some designs may lead to a waste of control effort.

**Example 4.1** For the scalar system shown in Figure 4.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้วยประการ  

$$\dot{x} = \cos x - x^3 + u, \quad (4.2.7)$$
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

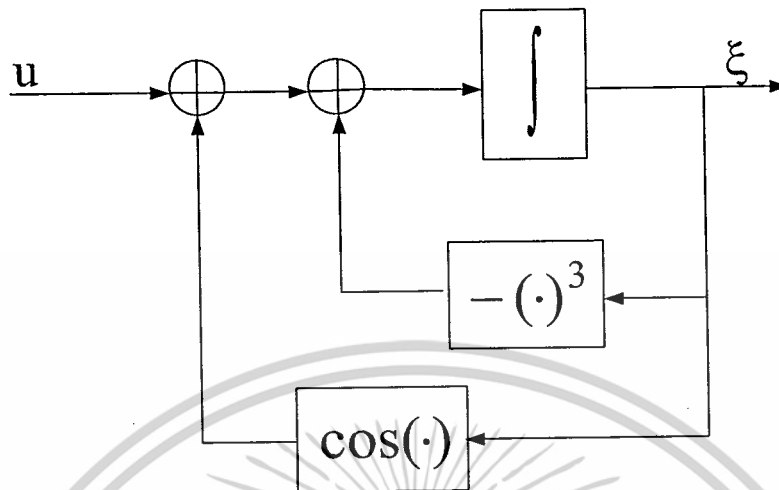


Figure 4.1: The block diagram of system. (4.2.7)

our task is to design , a feedback control law which creates and globally stabilizes the equilibrium at  $x = 0$ . We will compare three different designs.

In a *feedback linearization* design, the control law

$$u = -\cos x + x^3 - x, \tag{4.2.8}$$

cancels both nonlinearities ( $\cos x$  and  $-x^3$ ) and replaces them by  $-x$  so that the resulting feedback system is linear:  $\dot{x} = -x$ . Taking

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2. \tag{4.2.9}$$

as a clf for (4.2.7), we see that the control law (4.2.8) satisfies the requirement (4.2.6) with  $W(x) = x^2$ , that is,  $\dot{V} \leq -x^3$ . However, there is an obvious irrationality of this control law: It cancels not only  $\cos x$ , but also  $-x^3$ . For stabilization at  $x = 0$ , the negative feedback term  $-x^3$  is helpful, especially for large values of  $x$ . On the other hand, the presence of  $x^3$  in the control law (4.2.8) is harmful: It leads to large magnitudes of  $u$  and may cause nonrobustness.

A more reasonable design is not to cancel  $-x^3$ . With  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  as before, we take  $W(x) = x^2 + x^4$ , so that the control law satisfying (4.2.6) becomes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = -\cos(x) - x \triangleq \alpha(x). \tag{4.2.10}$$

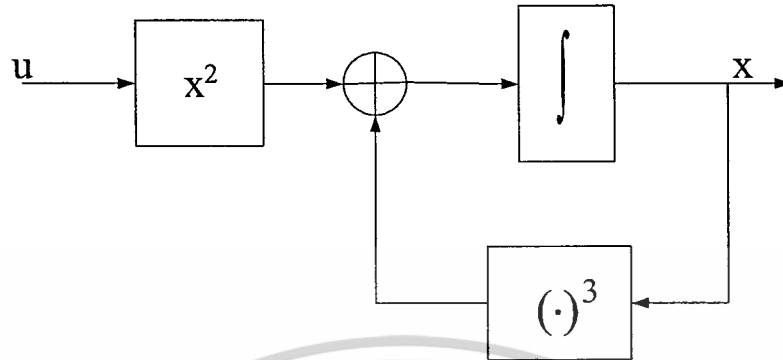


Figure 4.2: The block diagram of system. (4.2.13)

In this case, the magnitude of  $u$  grows only linearly with  $|x|$

**Example 4.2** *The scalar system shown in Figure 4.2*

$$\dot{x} = x^3 + x^2u. \quad (4.2.11)$$

is of interest because it is smoothly stabilizable in spite of the singularity at  $x = 0$ .

We proceed with  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  and, because of the term  $x^3$ , we choose

$W(x) = c_1x^4$  where  $c_1 > 0$ . Solving

$$\dot{V}(x, u) = x[x^3 + x^2u] = -c_1x^4, \quad (4.2.12)$$

for  $u$ , we obtain the control law

$$u = -(1 + c_1)x \triangleq \alpha(x). \quad (4.2.13)$$

which yields the globally asymptotically stable closed-loop system  $\dot{x} = -c_1x^2$

### 4.3 Integrator Backstepping

The simplicity of scalar designs motivates us to use them as starting points of recursive designs for higher-order systems. Let us first construct clf's for second-order systems. We start with a second-order system. The first step is to construct a control law for the first-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  and a control law  $u = -x$ . This control law stabilizes the first-order system. The second step is to backstep the design to the second-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x}$ . This control law stabilizes the second-order system. The third step is to backstep the design to the third-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x}$ . This control law stabilizes the third-order system. The fourth step is to backstep the design to the fourth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x}$ . This control law stabilizes the fourth-order system. The fifth step is to backstep the design to the fifth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x}$ . This control law stabilizes the fifth-order system. The sixth step is to backstep the design to the sixth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \mathring{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{x}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x} - \mathring{x}$ . This control law stabilizes the sixth-order system. The seventh step is to backstep the design to the seventh-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \mathring{x}, \mathring{\dot{x}}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\dot{x}}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x} - \mathring{x} - \mathring{\dot{x}}$ . This control law stabilizes the seventh-order system. The eighth step is to backstep the design to the eighth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \mathring{x}, \mathring{\dot{x}}, \mathring{\ddot{x}}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\dot{x}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{x}}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x} - \mathring{x} - \mathring{\dot{x}} - \mathring{\ddot{x}}$ . This control law stabilizes the eighth-order system. The ninth step is to backstep the design to the ninth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \mathring{x}, \mathring{\dot{x}}, \mathring{\ddot{x}}, \mathring{\ddot{\dot{x}}}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\dot{x}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{x}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{\dot{x}}}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x} - \mathring{x} - \mathring{\dot{x}} - \mathring{\ddot{x}} - \mathring{\ddot{\dot{x}}}$ . This control law stabilizes the ninth-order system. The tenth step is to backstep the design to the tenth-order system. This is done by choosing a Lyapunov function  $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}, \mathring{x}, \mathring{\dot{x}}, \mathring{\ddot{x}}, \mathring{\ddot{\dot{x}}}, \mathring{\ddot{\dot{\dot{x}}}}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddot{x}^2 + \frac{1}{2}\dddot{x}^2 + \frac{1}{2}\ddddot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{x}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\dot{x}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{x}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{\dot{x}}}^2 + \frac{1}{2}\mathring{\ddot{\dot{\dot{x}}}}^2$  and a control law  $u = -x - \dot{x} - \ddot{x} - \dddot{x} - \ddddot{x} - \mathring{x} - \mathring{\dot{x}} - \mathring{\ddot{x}} - \mathring{\ddot{\dot{x}}} - \mathring{\ddot{\dot{\dot{x}}}}$ . This control law stabilizes the tenth-order system.

### 4.3 Integrator Backstepping

The simplicity of scalar designs motivates us to use them as starting points of recursive designs for higher-order systems. Let us first construct clf's for second-order systems. We begin augmenting the system (4.2.7) with an integrator:

$$\dot{x} = \cos x - x^3 + \xi. \quad (4.3.1-a)$$

$$\dot{\xi} = u. \quad (4.3.1-b)$$

Let the design objective be the regulation of  $x(t)$ , that is,  $x(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , for all  $x(0), \xi(0)$ . Of course,  $\xi(t)$  must remain bounded. From (4.3.1-a), the only equilibrium with  $x = 0$  is at  $(x, \xi) = (0, -1)$ . We will meet our design objective by rendering this equilibrium GAS.

In the block diagram in Figure 4.3 the scalar system (4.2.7) of Figure 4.1 appears in the dashed box. To construct a clf for (4.2.14) we will exploit the fact that a clf is known for its subsystem in the dashed box. Indeed, if  $\xi$  were the control input, then (4.3.1-a) would be identical to (4.2.7), and the corresponding clf and control law would be  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  and  $\xi = -c_1x - \cos x$ . Of course  $\xi$  is just a state

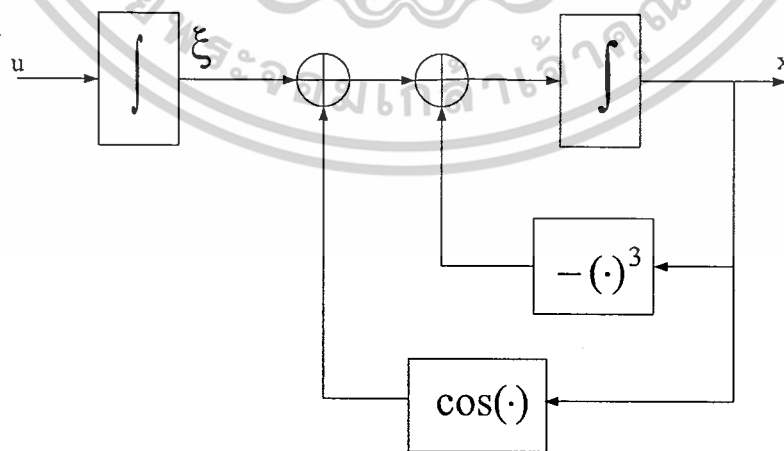


Figure 4.3: The block diagram of system (4.2.14).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

variable and not the control. Nevertheless, as its “desired value” we prescribe

$$\xi_{des} = -c_1x - \cos x \triangleq \alpha(x). \quad (4.3.2)$$

Let  $z$  be the deviation of  $\xi$  from its desired value:

$$z = \xi - \xi_{des} = \xi - \alpha(x) = \xi + c_1x + \cos x. \quad (4.3.3)$$

We call  $\xi$  a “virtual control”, and its desired value  $\alpha(x)$  a “stabilizing function”. The variable  $z$  is the corresponding *error variable*. Now we rewrite the system (4.2.14) in the  $(x, z)$ -coordinates in which it takes on a more convenient form, as illustrated in Figure 4.4 and 4.5. Starting from (4.2.14) and Figure 4.3, we add and subtract the stabilizing function  $\alpha(x)$  to the  $\dot{x}_1$ -equation as shown in Figure 4.4.

Then we use  $\alpha(x)$  as the feedback control inside the dashed box and “backstep”  $-\alpha(x)$  through the integrator, as in Figure 4.5. In the new coordinates  $(x, z)$  the system is expressed as

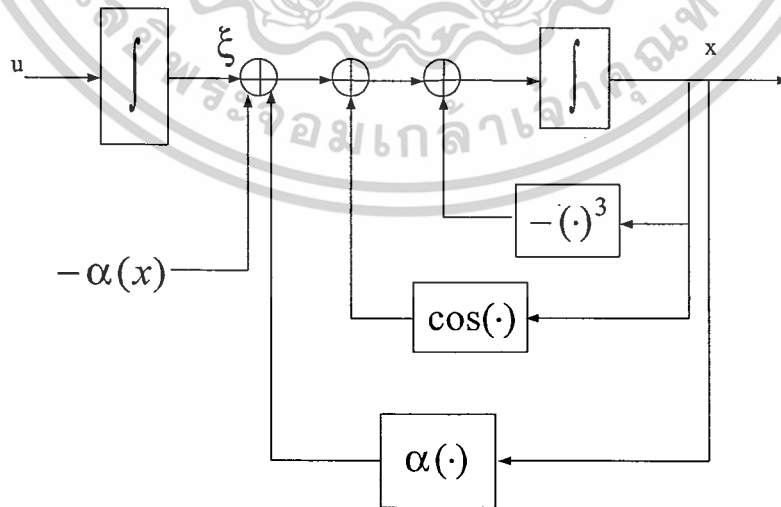


Figure 4.4: Introducing  $\alpha(x)$  as the desired value for  $\xi$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dot{x} = \cos x - x^3 + [\xi + c_1 x + \cos x] - c_1 x - \cos x \quad (4.3.4-a)$$

$$= -c_1 x - x^3 + z$$

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\alpha} \quad (4.3.4-b)$$

$$= \dot{\xi} + (c_1 - \sin x)\dot{x} = u + (c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3 + z).$$

The first key feature of backstepping is that we don't use a differentiator to implement the time derivative  $\dot{\alpha}$  in (4.3.4-b); since  $\alpha(x)$  is a known function, it is easy to compute its time derivative analytically as

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \dot{x} = -(c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3 + z). \quad (4.3.5)$$

We now need to select a clf  $V_a$  for the system (4.2.14). We try to construct it by augmenting  $V(x)$  with a quadratic term in the error variable  $z$ :

$$V_a(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\xi + c_1 x + \cos x)^2 \quad (4.3.6)$$

The derivative of  $V_a$  along the solutions of (4.3.4) is computed as

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x, z, u) &= x[-c_1 x - x^3 + z] + z[u + (c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3 + z)] \\ &= -c_1 x^2 - x^4 + z[x + u + (c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3 + z)] \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

As always, we let  $\dot{V}_a$  be an explicit function of  $u$  and design  $u$  to satisfy the clf inequality (4.2.6). For this reason, the cross-term  $xz$ , which is due to the presence of  $z$  in (4.3.4-a), is grouped together with  $u$ . This is possible because  $u$  is multiplied by  $z$  due to the chosen form of  $V_a$ . This is the second key feature of backstepping. Now we choose the control  $u$  to make  $\dot{V}_a$  negative definite in  $x$  and  $z$ . The simplest way to achieve this is to make the bracketed term in (4.3.7) equal to  $-c_2 z^2$ , where  $c_2 > 0$ :

$$u = -c_2 z - x - (c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3 + z)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 =  $-c_2(\xi + c_1 x + \cos x) - x - (c_1 - \sin x)(\xi + \cos x - x^3)$  (4.3.8)  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

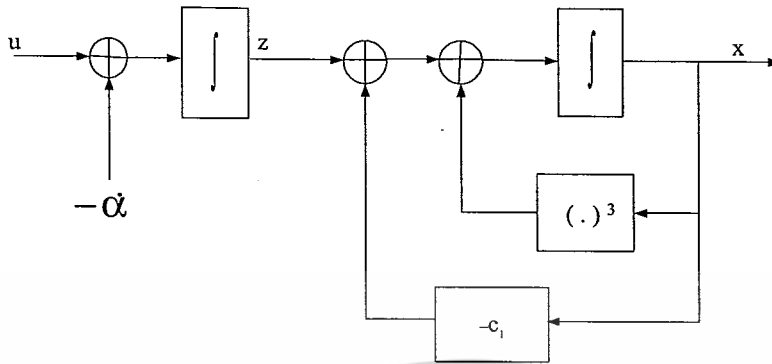


Figure 4.5: Closing the feedback loop in the dashed box with  $+\alpha$  and “backstepping”  $-\alpha$  through the integrator.

With this control, the clf derivative is

$$\dot{V}_a = -c_1 x^2 - c_2 z^2 \tag{4.3.9}$$

which proves that in the  $(x, z)$  coordinates the equilibrium  $(0, 0)$  is GAS. In view of (4.3.3), the equilibrium  $(0, -1)$  in the  $(x, \xi)$  coordinates has the same property.

The resulting closed-loop system in the  $(x, z)$ -coordinates is

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 - x^2 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{4.3.10}$$

Although written in a linear-like form, this system is nonlinear. An important structural property of this system is that its nonlinear “system matrix” is the sum of a *negative diagonal* and a *skew-symmetric* matrix function of  $x$ . This is the third key feature of backstepping, which will be extremely useful in other designs.

**Avoiding cancellation.** The above control law is not the best way to achieve negativity of  $V(a)$ , because it involves at least one unnecessary cancellation. A closer examination of (4.3.7) reveals that the term  $-z^2 \sin x$  need not be cancelled because it can be dominated by  $-c_2 z^2$ . A control law which avoids this

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอญูญาติให้หน้าไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

cancellation is

$$u = -c_2 z - x - (c_1 - \sin x)(-c_1 x - x^3), c_2 > c_1 + 1 \quad (4.3.11)$$

With this control, the clf derivative is

$$\dot{V}_a = -c_1 x^2 - x^4 - (c_2 - c_1 + \sin x) z^2 \quad (4.3.12)$$

Although more complicated than (4.3.9), this function is easily rendered negative definite by the choice  $c_2 > c_1 + 1$ . The resulting system in  $(x, z)$  coordinates preserves its skew-symmetric form

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 - x^2 & 1 \\ -1 & -c_2 + c_1 - \sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

The simplified control law (4.3.11) is an illustration of design flexibilities in satisfying the clf inequality  $\dot{V}_a \leq 0$  and at the same time avoiding unnecessary cancellations. In fact, more detailed calculations show that the control law can be further simplified to

$$u = -k_1 z - k_2 x^2 z, \quad (4.3.14)$$

with

$$k_1 > 0, c_2 + c_1 + \frac{(c_1^2 + c_1 + 1)^2}{2c_1}, k_2 \geq \frac{(c_1 + 1)^2}{4} \quad (4.3.15)$$

Using this control we obtain

$$\dot{V}_a \leq -\frac{1}{2} c_1 x^2 - c_2 z^2 \quad (4.3.16)$$

**Assumption 4.3.1** Consider the system

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + g(\vec{x})u, \quad f(\vec{0}) = \vec{0}, \quad (4.3.17)$$

where  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  is the state and  $u \in \mathbb{R}$  is the control input. There exist a continuously differentiable feedback control law

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้  $u = \alpha(\vec{x})$ ,  $\alpha(\vec{0}) = 0$  นั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ (4.3.18) ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and a smooth, positive definite, radially unbounded function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) [f(\vec{x}) + g(\vec{x})\alpha(\vec{x})] \leq -W(\vec{x}) \leq 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3.19)$$

where  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is positive semidefinite.

Under this assumption, the control (4.3.18), applied to the system (4.3.17), guarantees global boundedness of  $\vec{x}$ , and via the LaSalle-Yoshizawa Theorem (Theorem 4.1.1), the regulation of  $W(\vec{x})$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\vec{x}(t)) = 0. \quad (4.3.20)$$

A stronger convergence result is obtained using LaSalle's Theorem (Theorem 4.1.2) with  $\Omega = \mathbb{R}^n$ :  $\vec{x}(t)$  converges to the largest invariant set  $M$  contained in the set  $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid W(\vec{x}) = 0\}$ . Clearly, if  $W(\vec{x})$  is positive definite, the control (4.3.18) renders  $\vec{x} = \vec{0}$  the GAS equilibrium of (4.3.17).

**Lemma 4.3.2 (Integrator Backstepping)** *Let the system (4.3.17) be augmented by an integrator:*

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + g(\vec{x})\xi \quad (4.3.21-a)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad (4.3.21-b)$$

and suppose that (4.3.21-a) satisfies Assumption 4.3.1 with  $\xi \in \mathbb{R}$  as its control.

(i) *If  $W(\vec{x})$  is positive definite, then*

$$V_a(\vec{x}, \xi) = V(\vec{x}) + \frac{1}{2} [\xi - \alpha(\vec{x})]^2 \quad (4.3.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

is a CLF for the full system (4.3.21), that is, there exists a feedback control  $u = \alpha(\vec{x}, \xi)$  which renders  $\vec{x} = \vec{0}, \xi = \alpha(\vec{0}) = 0$  the GAS equilibrium of (4.3.21). One such control is

$$u = -c(\xi - \alpha(\vec{x})) + \dot{\alpha}(\vec{x}) - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x})g(\vec{x}), \quad c > 0. \quad (4.3.23)$$

(ii) If  $W(\vec{x})$  is positive semidefinite, then there exists a feedback control which renders  $\dot{V}_a \leq -W_a(\vec{x}, \xi) \leq 0$  such that  $W_a(\vec{x}, \xi) > 0$  whenever  $W(\vec{x}) > 0$  or  $\xi \neq \alpha(\vec{x})$ . This guarantees global boundedness and convergence of  $\begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$  to the largest invariant set  $M_a$  contained in the set

$$E_a = \left\{ \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid W(\vec{x}) = 0, \xi = \alpha(\vec{x}) \right\}$$

While the choice of control (4.3.23) is simple, this control may not be desirable because it involves cancellation of nonlinearities, some of which may be useful.

# Chapter 5

## Nonlinear oscillatory system

All real system are nonlinear for example the RLC circuits in Fig 5.1

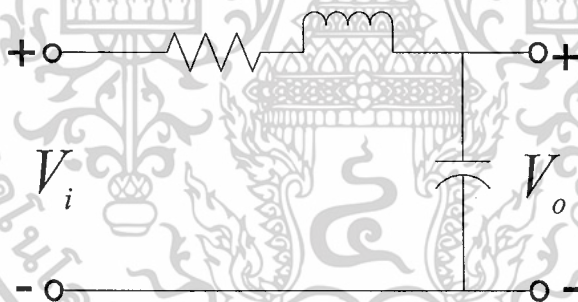


Figure 5.1: RLC circuits.

The  $i - \varphi$  relationship of a linear inductor  $L$  is given by

$$\varphi = Li$$

where  $\varphi$  is flux,  $i$  is the current through the inductor and the constant  $L$  is called an inductance.

Now consider a nonlinear inductor as shown in Fig 5.2 The relationship of  $i$  and  $\varphi$  is not linear. เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

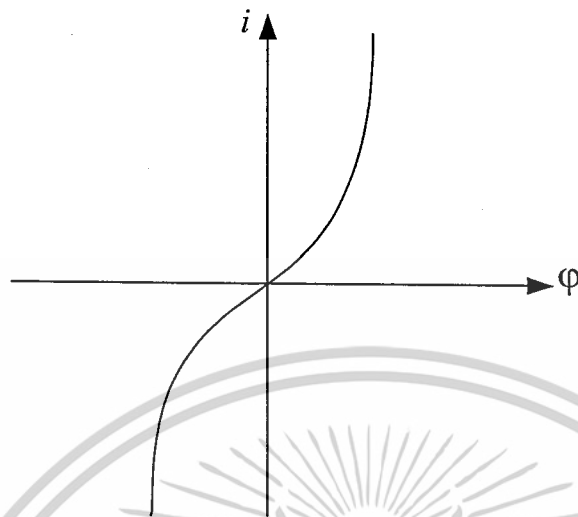


Figure 5.2: Nonlinear Inductor.

$\varphi$  is governed by the following equation

$$i = a\varphi + b\varphi^3$$

where  $a, b$  are constants peculiar to the inductor. Since the  $i - \varphi$  relationship of a linear inductor  $L$  is nonlinear so using  $L$  will cause nonlinearity of the system. Sometime using a linear model for a system is not sufficient in letting stability of the original system.

In particular when the system has disturbances or change of environment that make the operating point move away from linear range.

There are several important differences between linear systems and nonlinear systems.

1. In the case of linear systems described by a set of linear ordinary differential equations, it is often possible to derive “closed-form” expressions for the

เอกสารฉบับนี้ขอสงวนลิขสิทธิ์เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In general, this is not possible in the case of nonlinear systems described by a set of nonlinear ordinary differential equations.

2. The analysis of nonlinear systems makes use of a wider variety of approaches and mathematical tools than does the analysis of linear systems.
3. In general, the level of mathematics needed to master the basic ideas of nonlinear systems analysis is higher than that for the linear case.

Since we know differences between linear systems and nonlinear systems, we will study 2 topics of nonlinear control systems.

1. Feedback Linearization is to find a feedback control law that will make the system to be linear.

Feedback linearization method as shown in Fig 5.3

**Example 5.1** Assume the system is

$$\dot{x} = \cos x - x^3 + u$$

our task is to design a feedback linearization, the control law :

$$u = -\cos x + x^3 - x + v$$

cancels both nonlinearities ( $\cos x$  and  $-x^3$ ) and replace them by  $-x$  so that

the resulting feedback system is linear:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับอาจารย์และบุคลากรที่ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

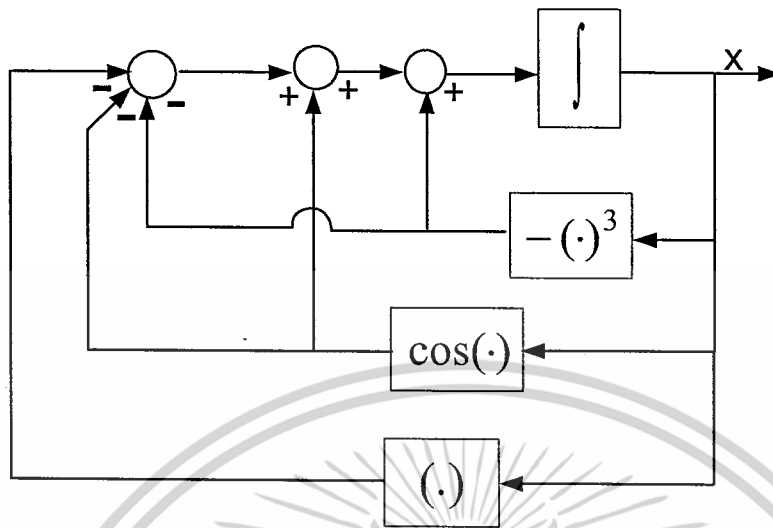


Figure 5.3: The block diagram of feedback linearization method.

$$\dot{x} = -x + v$$

This is shown in block diagram of Fig 5.3

And the response of the system is shown in Fig 5.4

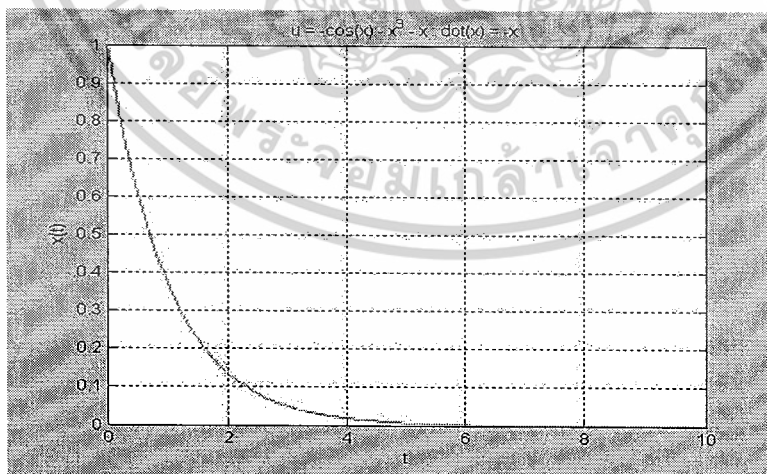


Figure 5.4: Simulation of Feedback Linearization Method.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 2. Backstepping based design.  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Backstepping-based control is a powerful method for stabilizing nonlinear systems both for tracking and regulation purposes. The main advantage of these designs is the systematic construction of a Lyapunov function for the closed loop, allowing the analysis of its stability properties.

Adaptive Backstepping designs, especially the tuning functions design, offers the possibility to synthesize in a systematic way controllers for a wide class of nonlinear systems (those under the strict feedback form) whose structure is known but with unknown parameters.

For the class of nonlinearities studied, in the unmodeled dynamics enter to the systems state equations as functions which can be unbounded with respect to the time.

**Example 5.2** Consider the system

$$\dot{x} = \cos x - x^3 + u$$

our task is to design a Lyapunov based design function, the control law :

$$u = -\cos x - x$$

After feedback to the system by Lyapunov based design :

$$\dot{x} = -x - x^3$$

This is shown in block diagram of Fig 5.5

And the response of the system after feedback are shown in Fig 5.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

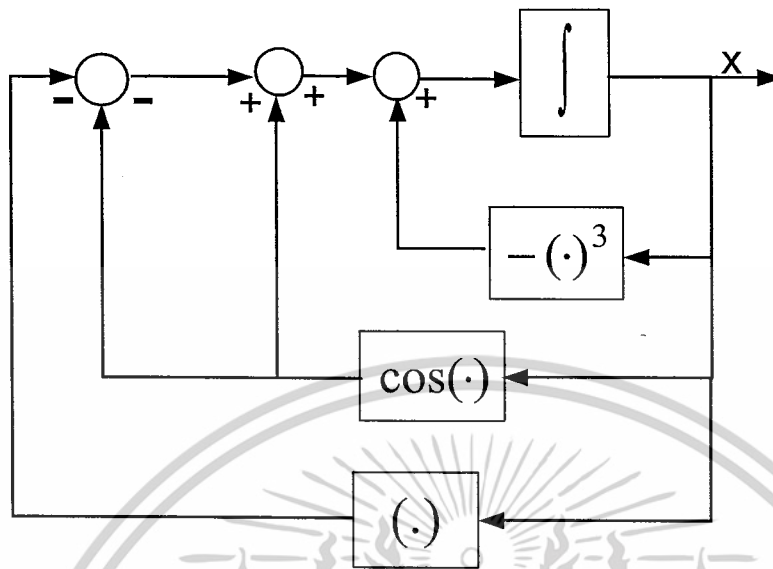


Figure 5.5: The block diagram of Lyapunov based design.

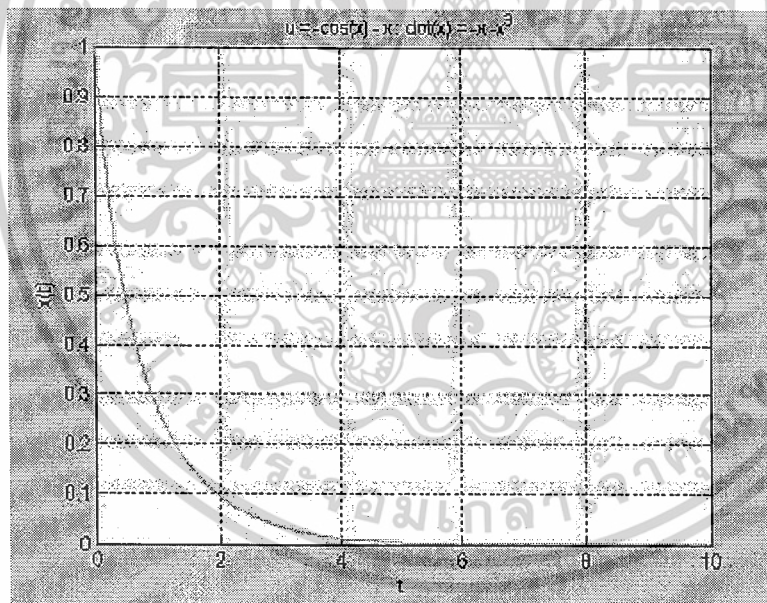


Figure 5.6: Simulation of Lyapunov based design.

When we compare differences between feedback linearization technic and lyapunov base design, we find the feedback linearization technic cancels not only  $\cos x$ , but also  $-x^3$ . For stabilization at  $x = 0$ , the negative feedback term  $-x^3$  is helpful, especially for large values of  $x$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

On the other hand, the presence of  $x^3$  is harmful. It leads to large magnitudes of  $u$  and may cause nonrobustness.

A more reasonable is not to cancel  $-x^3$  is technic as not to cancel  $-x^3$ , in this case the magnitude of  $u$  grows only linearly with  $x$ .

After that we take a nonlinear theory to create a nonlinear oscillator.

## 5.1 Study of Oscillation Theory

The oscillation of system that has many causes such as, from excitation force. For example, the oscillation of automobile while running on rough way, the oscillation of building while earthquake or there occur from that we design the system is oscillating itself.

For phenomenon of standardly oscillation in system, the system must all be periodic function. By periodic  $T$  offer that.

$$y(t + T) = x(t), \forall t \geq 0$$

Describing function method is the approximation which is extension for the response of linear method.

Main idea of describing function method is, can predict limit cycle of nonlinear system by analyze frequency response.

We can transforming about the relationship between nonlinear component and linear component, present in Fig 5.7.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

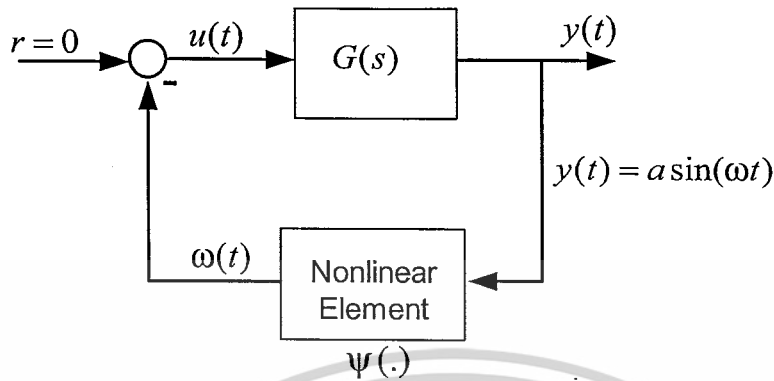


Figure 5.7: Describing function block diagram.

From block diagram, can present the relationship that is  $\omega(t) = \psi(y(t))$  where  $y(t) = a \sin(\omega_0 t)$  and  $y(t)$  is periodic function there for,  $w(t)$  is periodic function too. Using Fourier series, this periodic function can be expanded as.

$$\omega(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(\omega_0 t))$$

where

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(t) d(\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(t) \cos(n\omega_0 t) d(\omega_0 t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(t) \sin(n\omega_0 t) d(\omega_0 t)$$

The system has to satisfy the following four conditions:

1. There is only a single nonlinear component.
2. The nonlinear component is time-invariant.
3. Corresponding to a sinusoidal input  $e = a \sin(\omega t)$  only fundamental in the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 output.  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. The nonlinearity is odd.

We can define the describing function of nonlinear element to be the complex ratio of the fundamental component of the nonlinear element by the input sinusoid.

$$N(a, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi_1)}}{a e^{j\omega t}} = \frac{M e^{j\phi_1}}{a} = \frac{1}{a} (b_1 + j a_1)$$

From four conditions and Fourier series we can obtain

$$N(a, \omega) = N(a) = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t)$$

By analyzing the nonlinear system from the block diagram in Fig 5.7 we have

$$\begin{aligned} N(a)G(s) + 1 &= 0 \\ N(a) &= \frac{-1}{G(s)}, s = j\omega \end{aligned}$$

Using a band pass filter

$$G(s) = \frac{-10s}{s^2 + 2.1s + 100}$$

and because

$$N(a) = \frac{-1}{G(s)}, s = j\omega, \omega = 10 \text{ rad/sec}$$

we then obtain

$$N(a) = 0.21$$

And since nonlinear component is  $\psi(y(t)) = \tanh(y(t))$  therefore

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \\ 0.21 &= \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

For building self-sustained oscillator or a nonlinear oscillator circuits we use an electronic circuit that consists of a band-pass filter and a nonlinear function tanh (nonlinear element).

Now consider a current conveyor circuit as shown in Fig 5.8. The current conveyor

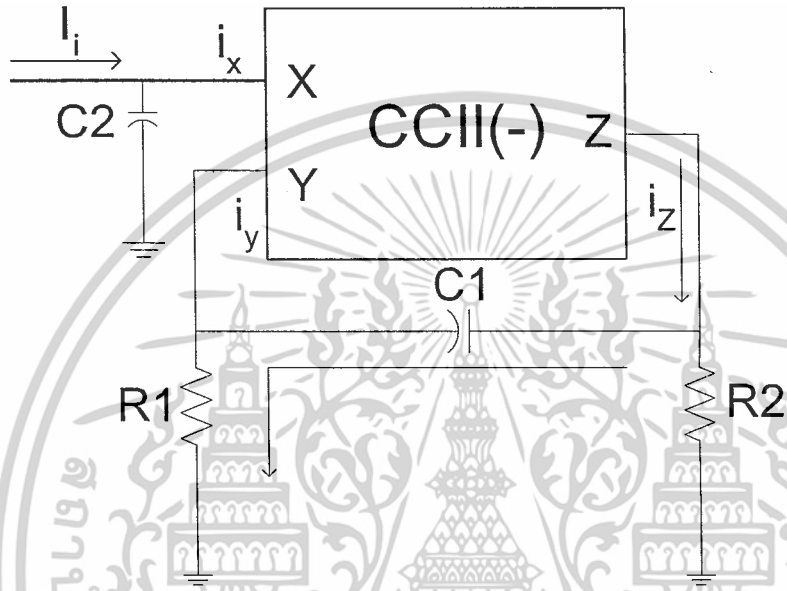


Figure 5.8: Band pass filter using CCII.

has its terminal characteristic as follows:

$$\begin{bmatrix} i_y \\ v_x \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ i_x \\ v_z \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

The transfer function of the current conveyor circuit in Fig 5.8 is  $\frac{i_{r1}}{i_i} = G(s) =$

$$\frac{\frac{s}{c_2 r_1}}{s^2 + \frac{1}{c_2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) s + \frac{1}{c_1 c_2 r_1 r_2}} \text{ where we define } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{c_1 c_2 r_1 r_2}}.$$

If we want a band-pass filter which has a transfer function of

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งาน  $G(s) = \frac{-10s}{s^2 + 2.15s + 100}$  นี้ ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

we can used r,c values as follows:  $r_1 = 100k\Omega$ ,  $r_2 = 100k\Omega$ ,  $c_1 = 1\mu$  and  $c_2 = 1\mu$  when we took band-pass filter to test in PSpice as shown in Fig 5.9

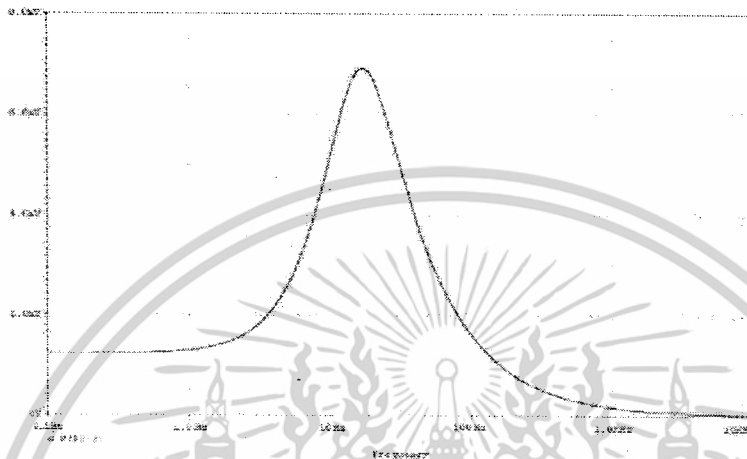


Figure 5.9: Bandpass filter simulate.

The nonlinear part is due to the operational transconductance amplifier which has a  $\tanh$  current-voltage relationship. Its internal circuit consists of a current mirror and a differential amplifier. Main reason for choosing operational transconductance amplifier is because of its feature of being a voltage controlled current source that can be feeded into the CCII band-pass filter. This circuits is a non-linear element which we want to use.

Consider an operational transconductance amplifier internal circuit in Fig 5.10.

from this circuit:

$$I_o = I_B \left[ \frac{e^{\frac{v_{in}}{2v_T}} - e^{-\frac{v_{in}}{2v_T}}}{e^{\frac{v_{in}}{2v_T}} + e^{-\frac{v_{in}}{2v_T}}} \right]$$

and since  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  therefore,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

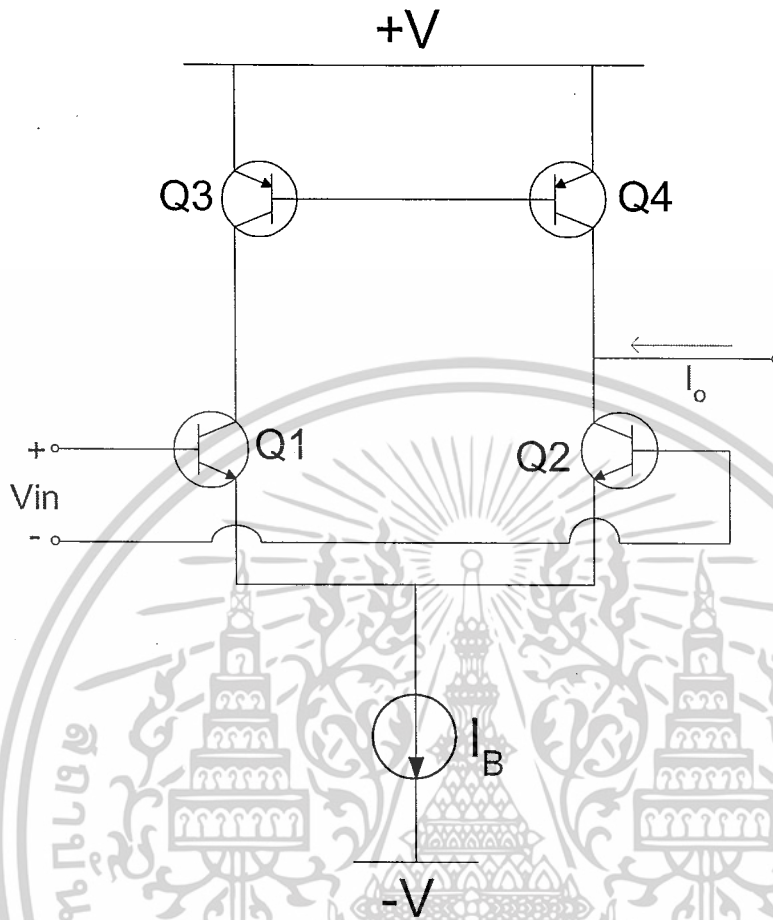


Figure 5.10: Differential Amplifier.

Both CCII and tanh used are IC AD844 and LM13700, respectively. When we interconnected them as shown in Fig 5.11. We then obtain a nonlinear oscillator. Its output was obtained using MATLAB and PSpice as shown in Fig 5.12 and Fig 5.13, respectively. We built our first nonlinear oscillator using CCII band-pass filter and a tanh OTA. Simulation using MATLAB its limit cycle has magnitude equal to 6 agreeing with theoretical result because the MATLAB model doesn't have uncertainties. Simulation using PSpice its limit cycle has magnitude equal to 7 not agreeing with theoretical result because PSpice introduces uncertainties in R, C. If we build a real device there will be error certainly because

1. R, C values from our design may not be found in the market therefore we  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

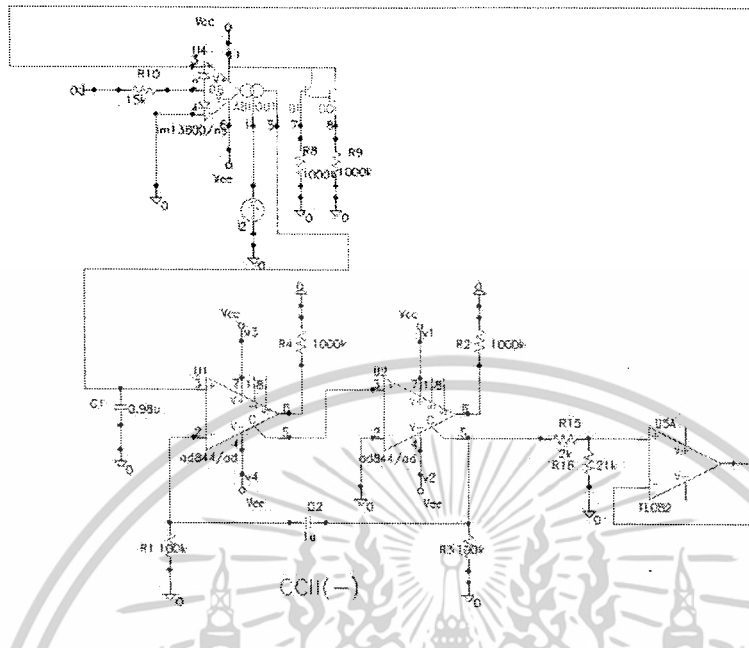


Figure 5.11: Nonlinear oscillator circuits.

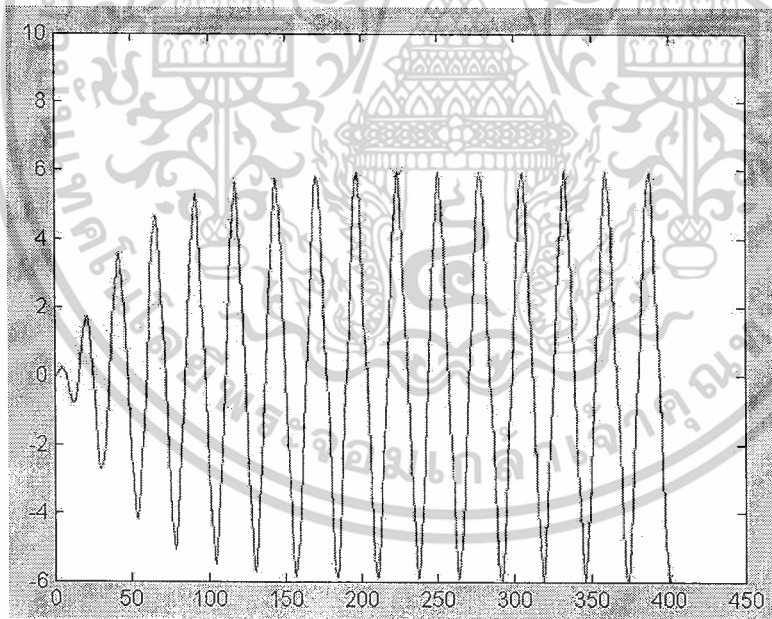


Figure 5.12: Simulate using MATLAB.

have to choose those that are closet. Moreover R, C in the market has percent error therefore two resistors of the same color-coat are most likely of different values. Their value can also depend on temperature these can

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

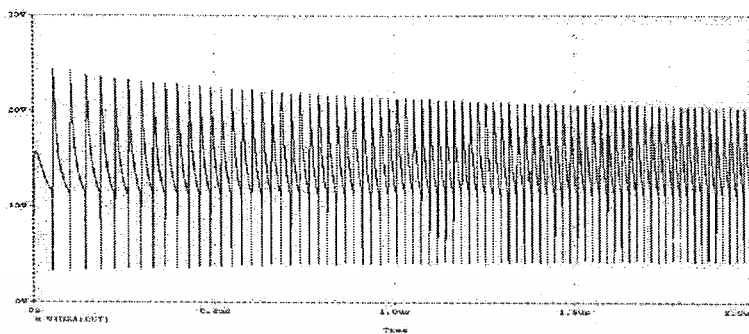


Figure 5.13: Simulate using PSpice.

cause unknown error factor in our circuits.

2. Each equipment that we use has a nonlinear characteristic (not perfectly linear)

Plan for further study: We try to solve the problem of unknown constant parameter.

For a case of base-isolation device we try to simulate it using nonlinear RLC circuit.

## 5.2 Mass spring damper

When the system has oscillation. We study the possibility how to use nonlinear theory to solve this problem. For decrease or eliminate the oscillation. The equation of base isolation is :

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}, t) + \Phi(x, t) = f(t) + u(t), \tag{5.2.1}$$

where

$m$  : is real parameter mass

$c, \Phi$  : is nonlinear component

การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$f(t)$  : is external input(disturbance)

$u(t)$  : is control input

The equation above can be compared with mechanic system as follows :

$m$  : is mass

$c$  : is damping force

$\Phi(x, t)$  : is nonlinear restoring force

$f(t)$  : is external input(excitation).Example : earthquake force

$u(t)$  : is control force

Then, we study the mass-spring damper system. Which separate in two section.

Section 1 : A linear system with only mass and spring.

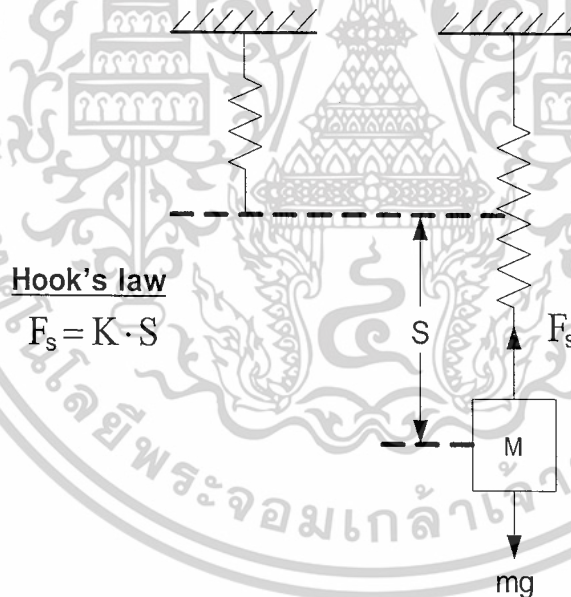


Figure 5.14: Mass Spring System.

Let  $X_0$  be an equilibrium point of system and spring displace  $s$ .

At the equilibrium point, the velocity is zero and therefore so is the acceleration.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

From Newton's law

$$\sum F = ma \tag{5.2.2}$$

$$mg - Fs = 0 \tag{5.2.3}$$

Section 2 : Consider the mass-spring damper

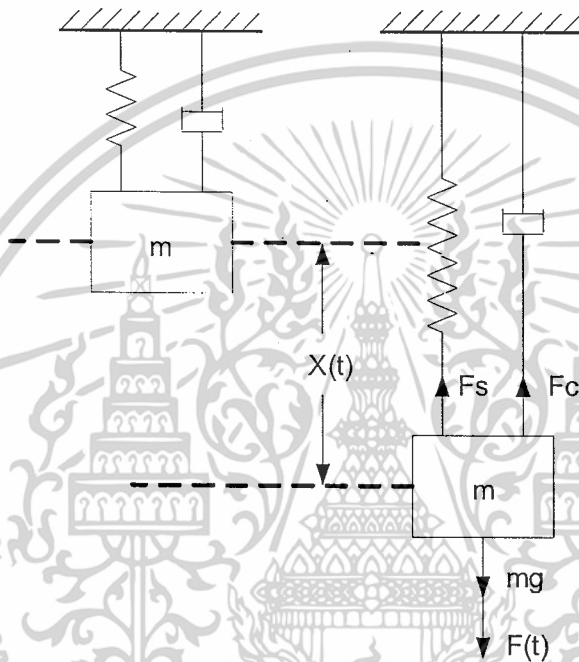


Figure 5.15: Mass Spring Damper System.

From damper's equation :  $F_c = C\dot{x} = c\frac{dx}{dt} = Cr(t)$

From Newton's law

$$\sum F = ma \tag{5.2.4}$$

$$F(t) + mg - Fs - Fc = ma \tag{5.2.5}$$

$$F(t) + kx_0 - k(x_0 + x) - c\dot{x} = ma \tag{5.2.6}$$

$$F(t) - c\dot{x} - kx = ma \tag{5.2.7}$$

$$F(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \tag{5.2.8}$$

where

$kx$  is linear restoring force as compared with general cases  $\Phi(x)$ , which is non-linear. ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

linear restoring force  $\Phi(x)$

$F$  : is  $u(t) + f(t)$

After that, analyze the RLC circuits consisting of 2-terminal nonlinear resistors, inductors, capacitors, and independent voltage and current sources. Under the following conditions

1. There are no loop and no cut set made exclusively of inductors or capacitors.
2. Every voltage source is in series with a linear positive resistor.
3. Each inductor is characterized by a differentiable  $\Phi$  and  $i$  curve with positive slopes.
4. Each resistor is eventually passive.

Consider RLC circuits in Fig 5.16

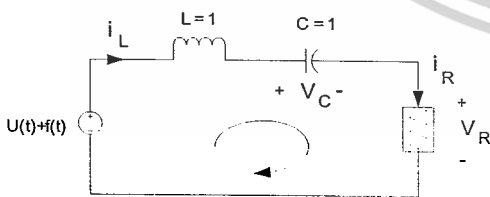


Figure 5.16: A nonlinear RLC circuits having 3 distinct(subharmonic steady-state response).

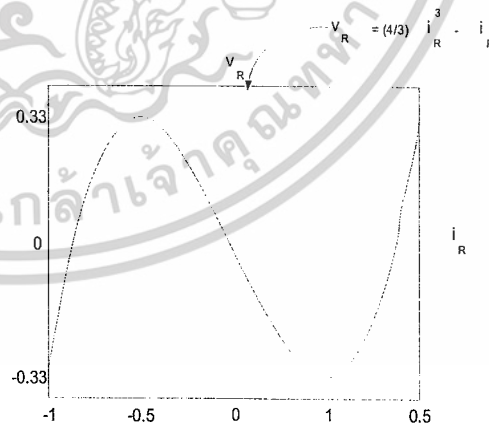


Figure 5.17: Nonlinear resistor .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then, with input  $V_s = u(t) + f(t)$

where

$$i_c = c \frac{dV_c}{dt}$$

with  $c = 1F$ ;



$$i_c = \frac{dV_c}{dt} = \dot{V}_c$$

$$i_L = \dot{V}_c \tag{5.2.9}$$

and

$$V_L = L \frac{di_L}{dt}, \text{ with } L = 1H,$$

$$V_L = i_L \tag{5.2.10}$$

from KVL

$$V_L + V_C + V_C = u(t) + f(t) \tag{5.2.11}$$

from fig 5.17,  $V_R = \frac{4}{3}i_R^3 - i_R$ , therefore

$$u(t) + f(t) = Li_L + V_C + V_R \tag{5.2.12}$$

from equation (5.2.9), (5.2.10), (5.2.12), state equation of RLC nonlinear system is

$$\dot{V}_C = i_L$$

$$i_L = i_L - \frac{4}{3}i_L^3 - V_C + (u(t) + f(t))$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารของงานวิจัยหรือการวิจัยที่จัดทำขึ้นโดยคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

from equation (5.2.13), we see that

$\frac{4}{3}\dot{V}_C^3$  is nonlinear component,  $u(t)$  is control input,  $f(t)$  is external input (disturbance). After that, we study mass-spring system and RLC circuits, we can simulate base-isolation device and we find that equation of base-isolation device is:

$$\ddot{V}_C - \dot{V}_C + \frac{4}{3}\dot{V}_C^3 + V_C = u(t) + f(t) \quad (5.2.14)$$

While, nonlinear RLC circuit has nonlinear component (nonlinear resistor) term is  $(-\dot{V}_C + \frac{4}{3}\dot{V}_C^3)$ .

If we use linear R, linear L with nonlinear capacitor then our model will be to similar the model of base isolation device.

When we compare of nonlinear components in these systems. We can see that inductor or nonlinear capacitor part of RLC circuits and nonlinear spring of mass spring damper system are comparable to the nonlinear component of base-isolation.

We can control the behavior of vibration by choose control input  $u(t)$  that is suitable for the system.

# Appendix A

## Linear Algebra

We expect you to know the following theory and know how to apply it after you finish this class.

### (Elementary Row Operation)

Before we define the elementary matrices, we define the elementary row operations.

Let  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  be any matrix (not necessarily square). There are three kinds of **elementary row operations** that may be applied to the matrix  $A$ :

1. For  $i = 1, 2, \dots, m$  and  $c \neq 0$ , the matrix  $\text{Scale}(A, i, c)$  is the matrix that results from  $A$  by multiplying the  $i$ th row by  $c$ .
2. For  $i, j = 1, 2, \dots, m$  the matrix  $\text{Swap}(A, i, j)$  is the matrix results from  $A$  by exchanging the  $i$ th and  $j$ th rows.
3. For  $i, j = 1, 2, \dots, m$  with  $i \neq j$  and any scalar  $c$ , the matrix  $\text{Shear}(A, i, j, c)$  is the matrix that results from  $A$  by adding  $c$  times the  $j$ th row to the  $i$ th row.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Theorem A.0.1** *Each elementary row operation is reversible in the sense that it can be undone by another operation of the same kind. Specifically:*

1. If  $B = \text{Scale}(A, i, c)$ , then  $A = \text{Scale}(B, i, c^{-1})$ .
2. If  $B = \text{Swap}(A, i, j)$ , then  $A = \text{Swap}(B, i, j)$ .
3. If  $B = \text{Shear}(A, i, j, c)$ , then  $A = \text{Shear}(B, i, j, -c)$ .

### (Elementary Matrices)

The elementary matrices are the simplest of all invertible matrices, except for the identity matrix. We shall see that they are the building blocks from which the invertible matrices are constructed. Here is the definition.

**Definition A.0.2** *A matrix that results from the identity matrix by applying a single elementary row operation is called an **elementary matrix**.*

*An elementary matrix is always a square matrix. There are three kinds.*

1. **Scale.** *The matrix  $E = \text{Scale}(I, i, c)$  is an elementary matrix for  $i = 1, 2, \dots, m$  and  $c \neq 0$ . It differs from the  $m \times m$  identity matrix  $I = I_m$  in that  $(E)_{ii} = c$  rather than 1.*
2. **Swap.** *The matrix  $E = \text{Swap}(I, i, j)$  is an elementary matrix for  $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$ . It differs from the identity matrix in that*

$$\begin{aligned} (E)_{ii} &= 0 & (E)_{ij} &= 1 \\ (E)_{ji} &= 1 & (E)_{jj} &= 0. \end{aligned}$$

3. **Shear.** *The matrix  $E = \text{Shear}(I, i, j, c)$  is an elementary matrix for  $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$ . It differs from the identity matrix in that*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งาน  $(E)_{ij} = c$  เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Theorem A.0.3 (Fundamental Theorem on Row Operations)** *The matrix  $EA$  that results by multiplying a matrix  $A$  on the left by an elementary matrix  $E$  is the same as the matrix that results by applying the corresponding elementary row operation to  $A$ .*

Let the elementary matrix  $E \in \mathbb{F}^{m \times m}$  result by applying some elementary row operation to the identity matrix  $I = I_m \in \mathbb{F}^{m \times m}$ . The Fundamental Theorem says that for any matrix  $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ , the matrix  $EA$  results by applying that same row operation to  $A$ . More precisely,

1.  $E = \text{Scale}(I_m, i, c) \Rightarrow EA = \text{Scale}(A, i, c)$ .
2.  $E = \text{Swap}(I_m, i, j) \Rightarrow EA = \text{Swap}(A, i, j)$ .
3.  $E = \text{Shear}(I_m, i, j, c) \Rightarrow EA = \text{Shear}(A, i, j, c)$ .

**Theorem A.0.4** *Elementary matrices are invertible. In fact,*

1.  $\text{Scale}(I, i, c)^{-1} = \text{Scale}(I, i, c^{-1})$ .
2.  $\text{Swap}(I, i, j)^{-1} = \text{Swap}(I, i, j)$ .
3.  $\text{Shear}(I, i, j, c)^{-1} = \text{Shear}(I, i, j, -c)$ .

**Corollary A.0.5** *A product of any number of elementary matrices is invertible.*

**Proof**

$$M = E_1 E_2 \cdots E_k \Rightarrow M^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}.$$

**(Reduced Row Echelon Form: RREF)**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition A.0.6** An  $m \times n$  matrix  $R$  is in **reduced row echelon form**, abbreviated **RREF**, if and only if

1. all the rows that vanish identically (if any) appear below the other (nonzero) rows;
2. the leading entry in any row appears to the left of the leading entry of any nonzero row below;
3. the leading entry in any nonzero row is 1;
4. all other entries in the column of a leading entry are 0.

The leading entry of a row is the first nonzero entry in that row. The columns which hold the leading entries are called the **leading columns**; the other columns are called the **free columns**.

**Theorem A.0.7 (Gauss-Jordan Elimination)** A matrix may be transformed to a matrix in RREF by applying a sequence of elementary row operations.

(Computing the Multiplier)

It is convenient to express the Gauss-Jordan Elimination theorem as a theorem about matrix multiplication. We can do this using the Fundamental Theorem on Row Operations.

**Theorem A.0.8 (Multiplier Theorem)** For any  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  there is an invertible matrix  $M$  such that the matrix  $R = MA$  is in RREF.

**Theorem A.0.9** It can be proved that the reduced row echelon form  $R$  is unique:

If  $M_1A = R_1$  and  $M_2A = R_2$  where  $M_1$  and  $M_2$  are invertible and  $R_1$  and  $R_2$  are in RREF, then  $R_1 = R_2$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The following handy trick, called the *Multiplier Trick*, enables us to compute the multiplier matrix  $M$  as we perform elementary row operations. Form the  $m \times (n + m)$  matrix  $[A \ I_m]$ . Using the block multiplication law, we have

$$M[A \ I_m] = [MA \ MI] = [MA \ M]$$

where  $I = I_m$  is the  $m \times m$  identity matrix.

**Theorem A.0.10 (Multiplier Trick)** *If we apply the same row operations to the matrix  $[A \ I_m]$  that we applied to  $A$  to transform it to  $MA$ , the last  $m$  columns of the result contain the matrix  $M$ .*

**Definition A.0.11** *If  $A$  is a square matrix, and if  $B$  of the same size can be found such that  $AB = I$  and  $BA = I$ , then  $A$  is said to be invertible and  $B$  is called an inverse of  $A$ . If no such matrix  $B$  can be found, then  $A$  is said to be singular or non-invertible. The inverse of  $A$  is denoted by  $A^{-1}$ .*

**Theorem A.0.12 (Laws of Inverse)** *If  $A$  and  $B$  are invertible matrices, then:*

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2.  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ .
3.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ , for any nonzero scalar  $k$ .
4.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
5.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### (How to Invert)

The Multiplier Trick provides an efficient method to <sup>๕</sup> แยกสารเป็นเอกสารที่ส่งมอบไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- decide if a square matrix  $A$  is invertible, and
- compute the inverse  $A^{-1}$  of an invertible matrix  $A$ .

We put  $A$  in reduced row echelon form  $R$ , simultaneously computing the invertible matrix  $M$  with  $MA = R$ . Of course, the matrix  $M$  is invertible. Now we apply the following.

**Theorem A.0.13 (How to Invert)** *Let  $A, M, R \in \mathbb{F}^{n \times n}$  be square matrices with  $M$  invertible,  $R$  in RREF, and*

$$MA = R.$$

Then

- $A$  is invertible if and only if  $R$  is the identity matrix.
- If  $A$  is invertible, then  $A^{-1} = M$ .

### Method for Finding the Inverse

Using row operations to find  $A^{-1}$ : Construct the matrix

$$[A \mid I]$$

and apply row operations until you can the identity matrix on the left side. At that point the matrix on the right side will be the inverse of  $A$ . So the final matrix will be

$$[I \mid A^{-1}].$$

**Corollary A.0.14 (Factorization Theorem)** *A matrix is invertible if and only if it is a product of elementary matrices.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Corollary A.0.15 (A Criterion for Invertibility)** *Suppose that  $A$  is a square matrix. Then either*

- $A$  is invertible, or else
- there is a nonzero  $\vec{x}$  with  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

**Proof**

If  $R$  is not the identity matrix, it is easy to find a nonzero  $\vec{x}$  with  $R\vec{x} = \vec{0}$ . It follows that  $A\vec{x} = M^{-1}R\vec{x} = \vec{0}$ . We will be more precise on finding such an  $\vec{x}$  when we talk about the Nullspace, but for the moment consider the example

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} -c_{13} \\ -c_{23} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Then  $R\vec{x} = \vec{0}$  but  $\vec{x} \neq \vec{0}$  since  $x_3 = 1$ .

**Remark A.0.16** *It is impossible that both alternative occur. If  $A$  is invertible and  $A\vec{x} = \vec{0}$ , then*

$$\vec{x} = A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

bf Systems of Equations and Invertibility

**Theorem A.0.17 (Equivalent Statements)** *If  $A$  is an  $n \times n$  matrix, then the following statements are equivalent:*

1.  $A$  is invertible.
2.  $A\vec{x} = \vec{0}$  has only the trivial solution.

3. The reduced row-echelon form of  $A$  is  $I_n$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใ้ใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.  $A\vec{x} = \vec{b}$  is consistent for every column vector  $\vec{b}$ .
5.  $A\vec{x} = \vec{b}$  has exactly one solution for every column vector  $\vec{b}$ , and that is  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ .

**Definition A.0.18 (Trace)** The trace of a square matrix  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  is the sum of its diagonal entries:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

for all  $\lambda_i \in \sigma(A) = \{\text{all eigenvalues of } A\}$ .

**Theorem A.0.19 (Trace)** Let  $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  and  $a, b \in \mathbb{F}$ .

1. If  $A = B$  then

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B).$$

2. The trace is linear:

$$\text{tr}(aA + bB) = a\text{tr}(A) + b\text{tr}(B).$$

3. The trace of the product is invariant when the matrices in the product are commute:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA)$$

$$\text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(B).$$

**Definition A.0.20 (Determinant)** Let  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  be a square matrix. Then

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathcal{C}A)_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D(A(i|j)), \quad 1 \leq i \leq n,$$

or

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\mathcal{C}A)_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D(A(i|j)), \quad 1 \leq j \leq n.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่รวบรวมไว้สำหรับการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Theorem A.0.21 (Trace and Determinant)** *The determinant of a matrix is the product of its eigenvalues. The trace of a matrix is the sum of its eigenvalues.*

*That is*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

for all  $\lambda_i \in \sigma(A)$ .

### Properties of the determinant function

**Theorem A.0.22** *Let  $A$  and  $B$  be  $n \times n$  matrices.*

1. *If  $A$  has a row or a column of zeroes, then  $\det(A) = 0$ .*
2.  *$\det(A) = \det(A^T)$ .*
3.  *$\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .*
4. *A square matrix  $A$  is invertible if and only if  $\det(A) \neq 0$ .*
5. *If  $A$  is invertible, then  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .*
6. *If  $k$  is a scalar, then  $\det(kA) = k^n \det(A)$ .*

### Determinant, invertibility and systems of linear equations

**Theorem A.0.23** *If  $A$  is an  $n \times n$  matrix, then the following are equivalent.*

1.  *$A$  is invertible.*
2.  *$\det(A) \neq 0$ .*

3.  *$A\vec{x} = \vec{b}$  has exactly one solution for every  $n \times 1$  matrix  $\vec{b}$ .*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์และเนื้อหาทั้งหมดนี้เป็นทรัพย์สินทางปัญญาของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.  $A\vec{x} = \vec{0}$  has only the trivial solution.

5. The reduced row-echelon form of  $A$  is  $I_n$ .

**Definition A.0.24 (Vector Space)** A vector space  $V$  is a non-empty set of objects on which two operations are defined: addition and multiplication by scalars, and these two operations satisfy the 10 axioms. (What are those 10 axioms?)

**Definition A.0.25 (Subspace)** A subset  $W$  of a vector space  $V$  is called a subspace of  $V$  if  $W$  is itself a vector space under addition and scalar multiplication.

**Theorem A.0.26 (Subspace)**  $W$  is a subspace of  $V$  if and only if

1.  $W$  is a subset of  $V$ .

2.  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W \quad \vec{u} + \vec{v} \in W$ .

3.  $\forall \vec{u} \in W \forall k \in \mathbb{F} \quad k\vec{u} \in W$ .

**Definition A.0.27 (Linear Dependence:L.D./Linear Independence:L.I.)**

A set of vectors  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$  is called linearly dependent (L.D.) if

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

for some scalars  $k_1, k_2, \dots, k_r$  not all zero. Otherwise ( $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ )

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$  are linearly independent (L.I.).

**Definition A.0.28 (Span)**  $W = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \}$  if and only if  $\exists (k_1, k_2, \dots, k_r)$

such that

$$\forall \vec{w} \in W, \quad \vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_r\vec{v}_r.$$

**Definition A.0.29 (Basis and Dimension)** A set  $\mathcal{S} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$  of vec-

tors in the vector space  $V$  is a basis of  $V$  if

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.  $S$  is linearly independent, and
2.  $S$  spans  $V$ .

The number of vectors in a basis is the dimension of the vector space  $V$ .

Notation:  $\dim(V) = n$ .

**Definition A.0.30 (Nullspace or Kernel of  $A : N(A)$ )** The *nullspace* of a matrix  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  is the set

$$N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1} : A\vec{x} = \vec{0} \}$$

of all solutions  $\vec{x}$  of the homogeneous system  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

**Definition A.0.31 (Rangespace or Column Space or Image of  $A : R(A)$ )**

The *range* of a matrix  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  is the set of all inhomogeneous terms  $A\vec{y} \in \mathbb{F}^{m \times 1}$  for which the inhomogeneous system  $\vec{y} = A\vec{x}$  has at least one solution  $\vec{x}$ . In set-theoretic notation

$$R(A) = \{ \vec{y} = A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1} \}.$$

**(Eigenvalues, Eigenvectors and Eigenspace)**

Let  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  be a square matrix. If a number  $\lambda \in \mathbb{F}$  and *nonzero* column vector  $\vec{v} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$  satisfy the equation

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

we say that  $\lambda$  is an *eigenvalue* of  $A$  and that  $\vec{v}$  is an *eigenvector* of  $A$  for the eigenvalue  $\lambda$ . (What is the geometric interpretation?) This equation can be rewritten in the form

$$(\lambda I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

where  $I = I_n$  is the  $n \times n$  identity matrix. This equation is called the *eigenequation*.

A square matrix is not invertible if and only if its nullspace is not the zero subspace.

Hence, we may reformulate the definition as follows:

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Definition A.0.32** A number  $\lambda \in \mathbb{F}$  is called an **eigenvalue** of the square matrix  $A$  if and only if the matrix  $\lambda I - A$  is not invertible. The subspace

$$\mathcal{E}_\lambda(A) = N(\lambda I - A)$$

is called the **eigenspace** of  $\lambda$ . A nonzero element of  $\mathcal{E}_\lambda(A)$  is called an **eigenvector** of  $A$  corresponding to the eigenvalue  $\lambda$ .

**Theorem A.0.33 (TFSAE)** Let  $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ;  $A : x \mapsto y$  such that  $y_{n \times 1} = A_{n \times n} x_{n \times 1}$ . Then the following statements are equivalent.

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. <math>\det A \neq 0</math></p> <p>2. <math>A</math> is nonsingular or invertible.</p> <p>3. <math>\exists A^{-1}</math> such that <math>AA^{-1} = A^{-1}A = I</math></p> <p>4. <math>A</math> is injective (1-1).</p> <p>5. <math>A</math> is surjective (onto).</p> <p>6. <math>\ker(A) = N(A) = \{\vec{0}\}</math></p> <p>7. <math>R(A) = \mathbb{F}^n</math></p> <p>8. <math>n - r = \text{nullity of } A = \dim(\ker(A)) = \dim(N(A)) = 0</math></p> <p>9. <math>r = \text{rank}(A) = \dim(R(A)) = n</math></p> <p>10. <math>\text{rref}(A) = I_n</math></p> <p>11. row (column) vectors of <math>A</math> are L.I..</p> <p>12. <math>\forall \lambda_i \in \sigma(A), \lambda_i \neq 0</math></p> | <p>1. <math>\det A = 0</math></p> <p>2. <math>A</math> is singular or non-invertible.</p> <p>3. <math>\nexists A^{-1}</math> such that <math>AA^{-1} = A^{-1}A = I</math></p> <p>4. <math>A</math> is not injective (not 1-1).</p> <p>5. <math>A</math> is not surjective (not onto).</p> <p>6. <math>\ker(A) = N(A) \supsetneq \{\vec{0}\}</math></p> <p>7. <math>R(A) \subsetneq \mathbb{F}^n</math></p> <p>8. <math>n - r = \text{nullity of } A = \dim(\ker(A)) = \dim(N(A)) \geq 1</math></p> <p>9. <math>r = \text{rank}(A) = \dim(R(A)) \leq n</math></p> <p>10. We can have either</p> $\text{rref}(A) = \left( \begin{array}{c c} I_r & C_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & 0_{n-r} \end{array} \right),$ <p>where <math>r &lt; n</math></p> <p>or <math>\text{rref}(A)</math> will have <math>r</math> nonzero rows (rows that have leading entries).</p> <p>11. row (column) vectors of <math>A</math> are L.D..</p> <p>12. <math>\exists \lambda_i \in \sigma(A), \lambda_i = 0</math></p> |
|--|--|

□

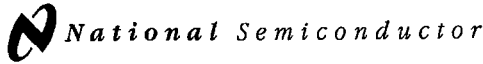
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# Appendix B

## LM 13700 Datasheet



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



November 1994

## LM13700/LM13700A Dual Operational Transconductance Amplifiers with Linearizing Diodes and Buffers

### General Description

The LM13700 series consists of two current controlled transconductance amplifiers, each with differential inputs and a push-pull output. The two amplifiers share common supplies but otherwise operate independently. Linearizing diodes are provided at the inputs to reduce distortion and allow higher input levels. The result is a 10 dB signal-to-noise improvement referenced to 0.5 percent THD. High impedance buffers are provided which are especially designed to complement the dynamic range of the amplifiers. The output buffers of the LM13700 differ from those of the LM13600 in that their input bias currents (and hence their output DC levels) are independent of  $I_{ABC}$ . This may result in performance superior to that of the LM13600 in audio applications.

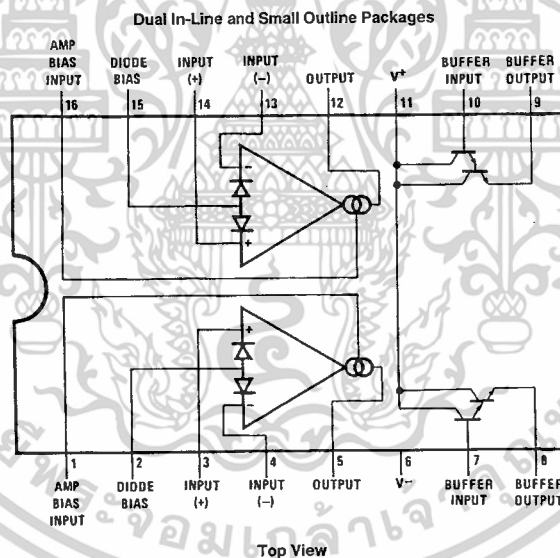
### Features

- $g_m$  adjustable over 6 decades
- Excellent  $g_m$  linearity
- Excellent matching between amplifiers
- Linearizing diodes
- High impedance buffers
- High output signal-to-noise ratio

### Applications

- Current-controlled amplifiers
- Current-controlled impedances
- Current-controlled filters
- Current-controlled oscillators
- Multiplexers
- Timers
- Sample-and-hold circuits

### Connection Diagram



TL/H/7981-2

Order Number LM13700M, LM13700N or LM13700AN  
See NS Package Number M16A or N16A

LM13700/LM13700A Dual Operational Transconductance Amplifiers with Linearizing Diodes and Buffers

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Absolute Maximum Ratings**

If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/Distributors for availability and specifications.

Supply Voltage (Note 1)	
LM13700	36 V <sub>DC</sub> or ±18V
LM13700A	44 V <sub>DC</sub> or ±22V
Power Dissipation (Note 2) T <sub>A</sub> = 25°C	
LM13700N, LM13700AN	570 mW
Differential Input Voltage	±5V
Diode Bias Current (I <sub>D</sub> )	2 mA
Amplifier Bias Current (I <sub>ABC</sub> )	2 mA
Output Short Circuit Duration	Continuous
Buffer Output Current (Note 3)	20 mA

Operating Temperature Range	
LM13700N, LM13700AN	0°C to +70°C
DC Input Voltage	+V <sub>S</sub> to -V <sub>S</sub>
Storage Temperature Range	-65°C to +150°C
Soldering Information	
Dual-In-Line Package	
Soldering (10 sec.)	260°C
Small Outline Package	
Vapor Phase (60 sec.)	215°C
Infrared (15 sec.)	220°C
See AN-450 "Surface Mounting Methods and Their Effect on Product Reliability" for other methods of soldering surface mount devices.	

**Electrical Characteristics** (Note 4)

Parameter	Conditions	LM13700			LM13700A			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Input Offset Voltage (V <sub>OS</sub> )	Over Specified Temperature Range I <sub>ABC</sub> = 5 μA		0.4	4		0.4	1	mV
			0.3	4		0.3	1	
V <sub>OS</sub> Including Diodes	Diode Bias Current (I <sub>D</sub> ) = 500 μA		0.5	5		0.5	2	mV
Input Offset Change	5 μA ≤ I <sub>ABC</sub> ≤ 500 μA		0.1	3		0.1	1	mV
Input Offset Current			0.1	0.6		0.1	0.6	μA
Input Bias Current	Over Specified Temperature Range		0.4	5		0.4	5	μA
			1	8		1	7	
Forward Transconductance (g <sub>m</sub> )	Over Specified Temperature Range	6700	9600	13000	7700	9600	12000	μmho
		5400			4000			
g <sub>m</sub> Tracking			0.3			0.3		dB
Peak Output Current	R <sub>L</sub> = 0, I <sub>ABC</sub> = 5 μA		5		3	5	7	μA
	R <sub>L</sub> = 0, I <sub>ABC</sub> = 500 μA	350	500	650	350	500	650	
	R <sub>L</sub> = 0, Over Specified Temp Range	300			300			
Peak Output Voltage	R <sub>L</sub> = ∞, 5 μA ≤ I <sub>ABC</sub> ≤ 500 μA	+12	+14.2		+12	+14.2		V
	R <sub>L</sub> = ∞, 5 μA ≤ I <sub>ABC</sub> ≤ 500 μA	-12	-14.4		-12	-14.4		V
Supply Current	I <sub>ABC</sub> = 500 μA, Both Channels		2.6			2.6		mA
V <sub>OS</sub> Sensitivity	Positive		20	150		20	150	μV/V
	Negative		20	150		20	150	
CMRR		80	110		80	110		dB
Common Mode Range		±12	±13.5		±12	±13.5		V
Crosstalk	Referred to Input (Note 5) 20 Hz < f < 20 kHz		100			100		dB
Differential Input Current	I <sub>ABC</sub> = 0, Input = ±4V		0.02	100		0.02	10	nA
Leakage Current	I <sub>ABC</sub> = 0 (Refer to Test Circuit)		0.2	100		0.2	5	nA
Input Resistance		10	26		10	26		kΩ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Electrical Characteristics (Note 4) (Continued)								
Parameter	Conditions	LM13700			LM13700A			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Open Loop Bandwidth			2			2		MHz
Slew Rate	Unity Gain Compensated		50			50		V/ $\mu$ s
Buffer Input Current	(Note 5)		0.5	2		0.5	2	$\mu$ A
Peak Buffer Output Voltage	(Note 5)	10			10			V

Note 1: For selections to a supply voltage above  $\pm 22$ V, contact factory.  
 Note 2: For operation at ambient temperatures above 25°C, the device must be derated based on a 150°C maximum junction temperature and a thermal resistance, junction to ambient, as follows: LM13700N, 90°C/W; LM13700M, 110°C/W.  
 Note 3: Buffer output current should be limited so as to not exceed package dissipation.  
 Note 4: These specifications apply for  $V_S = \pm 15$ V,  $T_A = 25^\circ$ C, amplifier bias current ( $I_{ABC}$ ) = 500  $\mu$ A, pins 2 and 15 open unless otherwise specified. The inputs to the buffers are grounded and outputs are open.  
 Note 5: These specifications apply for  $V_S = \pm 15$ V,  $I_{ABC} = 500 \mu$ A,  $R_{OUT} = 5 \text{ k}\Omega$  connected from the buffer output to  $-V_S$  and the input of the buffer is connected to the transconductance amplifier output.

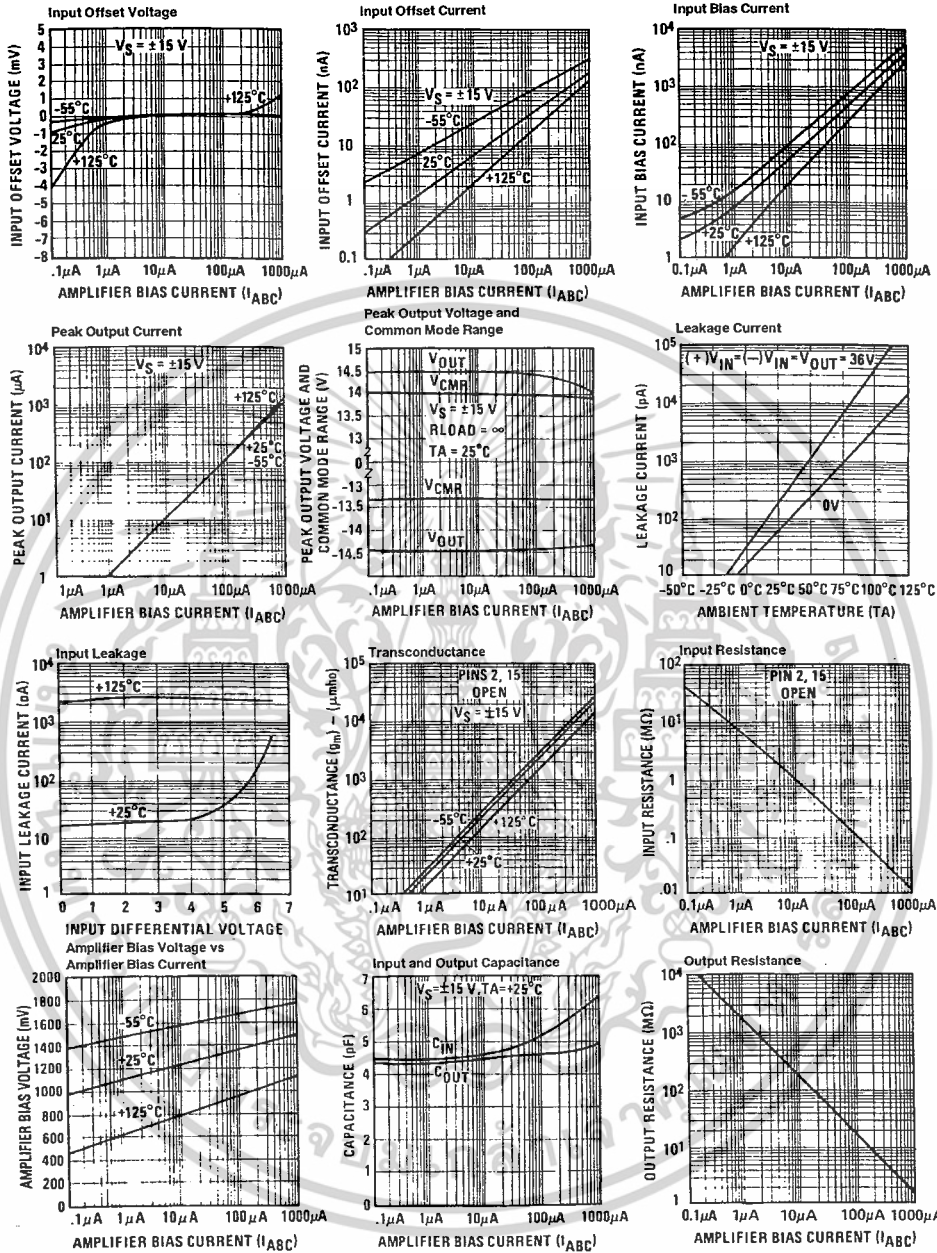
### Schematic Diagram

One Operational Transconductance Amplifier

TL/H/7981-1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

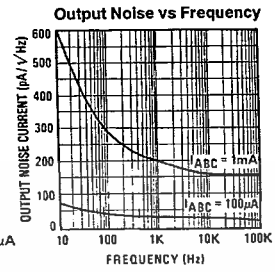
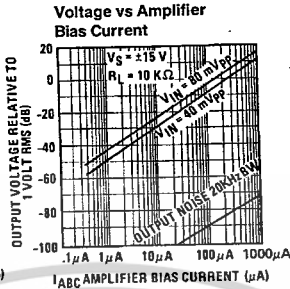
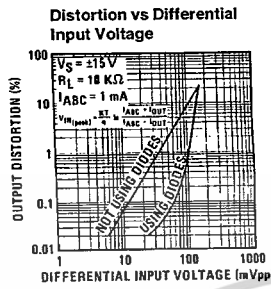
Typical Performance Characteristics



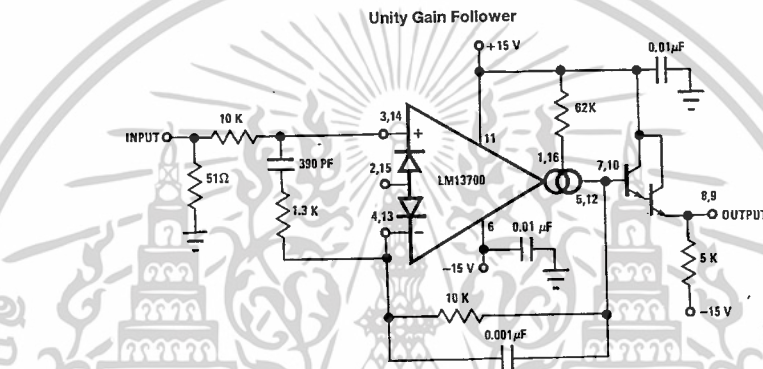
TL/H/7981-3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

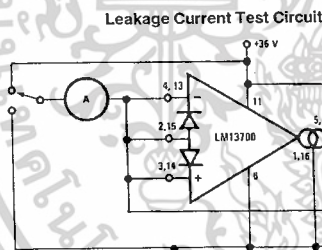
Typical Performance Characteristics (Continued)



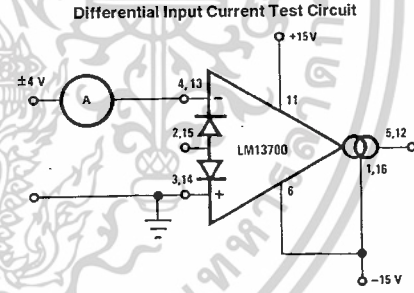
TL/H/7981-4



TL/H/7981-5



TL/H/7981-6



TL/H/7981-7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Circuit Description**

The differential transistor pair Q<sub>4</sub> and Q<sub>5</sub> form a transconductance stage in that the ratio of their collector currents is defined by the differential input voltage according to the transfer function:

$$V_{IN} = \frac{kT}{q} \ln \frac{I_5}{I_4} \quad (1)$$

where V<sub>IN</sub> is the differential input voltage, kT/q is approximately 26 mV at 25°C and I<sub>5</sub> and I<sub>4</sub> are the collector currents of transistors Q<sub>5</sub> and Q<sub>4</sub> respectively. With the exception of Q<sub>3</sub> and Q<sub>13</sub>, all transistors and diodes are identical in size. Transistors Q<sub>1</sub> and Q<sub>2</sub> with Diode D<sub>1</sub> form a current mirror which forces the sum of currents I<sub>4</sub> and I<sub>5</sub> to equal I<sub>ABC</sub>:

$$I_4 + I_5 = I_{ABC} \quad (2)$$

where I<sub>ABC</sub> is the amplifier bias current applied to the gain pin.

For small differential input voltages the ratio of I<sub>4</sub> and I<sub>5</sub> approaches unity and the Taylor series of the ln function can be approximated as:

$$\frac{kT}{q} \ln \frac{I_5}{I_4} \approx \frac{kT}{q} \frac{I_5 - I_4}{I_4} \quad (3)$$

$$I_4 \approx I_5 \approx \frac{I_{ABC}}{2} \quad (4)$$

$$V_{IN} \left[ \frac{I_{ABC}^2}{2kT} \right] = I_5 - I_4 \quad (5)$$

Collector currents I<sub>4</sub> and I<sub>5</sub> are not very useful by themselves and it is necessary to subtract one current from the other. The remaining transistors and diodes form three current mirrors that produce an output current equal to I<sub>5</sub> minus I<sub>4</sub> thus:

$$V_{IN} \left[ \frac{I_{ABC}^2}{2kT} \right] = I_{OUT} \quad (5)$$

The term in brackets is then the transconductance of the amplifier and is proportional to I<sub>ABC</sub>.

**Linearizing Diodes**

For differential voltages greater than a few millivolts, Equation 3 becomes less valid and the transconductance becomes increasingly nonlinear. Figure 1 demonstrates how the internal diodes can linearize the transfer function of the amplifier. For convenience assume the diodes are biased with current sources and the input signal is in the form of current I<sub>S</sub>. Since the sum of I<sub>4</sub> and I<sub>5</sub> is I<sub>ABC</sub> and the difference is I<sub>OUT</sub>, currents I<sub>4</sub> and I<sub>5</sub> can be written as follows:

$$I_4 = \frac{I_{ABC}}{2} - \frac{I_{OUT}}{2}, \quad I_5 = \frac{I_{ABC}}{2} + \frac{I_{OUT}}{2}$$

Since the diodes and the input transistors have identical geometries and are subject to similar voltages and temperatures, the following is true:

$$\frac{kT}{q} \ln \frac{I_D + I_S}{I_D - I_S} = \frac{kT}{q} \ln \frac{\frac{I_{ABC}}{2} + \frac{I_{OUT}}{2}}{\frac{I_{ABC}}{2} - \frac{I_{OUT}}{2}}$$

$$\therefore I_{OUT} = I_S \left( \frac{2I_{ABC}}{I_D} \right) \text{ for } |I_S| < \frac{I_D}{2} \quad (6)$$

Notice that in deriving Equation 6 no approximations have been made and there are no temperature-dependent terms. The limitations are that the signal current not exceed I<sub>D</sub>/2 and that the diodes be biased with currents. In practice, replacing the current sources with resistors will generate insignificant errors.

**Applications: Voltage Controlled Amplifiers**

Figure 2 shows how the linearizing diodes can be used in a voltage-controlled amplifier. To understand the input biasing, it is best to consider the 13 kΩ resistor as a current source and use a Thevenin equivalent circuit as shown in Figure 3. This circuit is similar to Figure 1 and operates the same. The potentiometer in Figure 2 is adjusted to minimize the effects of the control signal at the output.

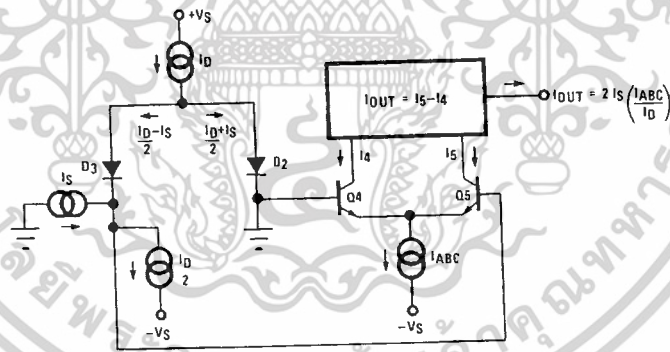


FIGURE 1. Linearizing Diodes

TL/H/7981-8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Applications:**  
**Voltage Controlled Amplifiers** (Continued)

For optimum signal-to-noise performance,  $I_{ABC}$  should be as large as possible as shown by the Output Voltage vs. Amplifier Bias Current graph. Larger amplitudes of input signal also improve the S/N ratio. The linearizing diodes help here by allowing larger input signals for the same output distortion as shown by the Distortion vs. Differential Input Voltage graph. S/N may be optimized by adjusting the magnitude of the input signal via  $R_{IN}$  (Figure 2) until the output

distortion is below some desired level. The output voltage swing can then be set at any level by selecting  $R_L$ . Although the noise contribution of the linearizing diodes is negligible relative to the contribution of the amplifier's internal transistors,  $I_D$  should be as large as possible. This minimizes the dynamic junction resistance of the diodes ( $r_d$ ) and maximizes their linearizing action when balanced against  $R_{IN}$ . A value of 1 mA is recommended for  $I_D$  unless the specific application demands otherwise.

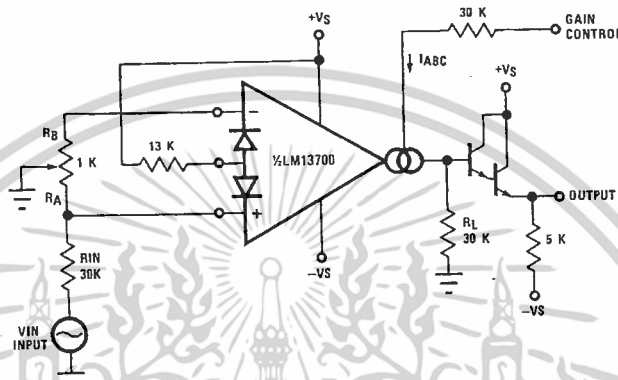


FIGURE 2. Voltage Controlled Amplifier

TL/H/7981-9

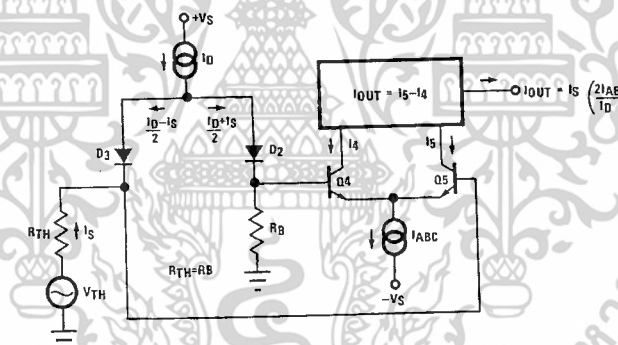


FIGURE 3. Equivalent VCA Input Circuit

TL/H/7981-10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Stereo Volume Control**

The circuit of Figure 4 uses the excellent matching of the two LM13700 amplifiers to provide a Stereo Volume Control with a typical channel-to-channel gain tracking of 0.3 dB.  $R_p$  is provided to minimize the output offset voltage and may be replaced with two 510Ω resistors in AC-coupled applications. For the component values given, amplifier gain is derived for Figure 2 as being:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = 940 \times I_{ABC}$$

If  $V_C$  is derived from a second signal source then the circuit becomes an amplitude modulator or two-quadrant multiplier as shown in Figure 5, where:

$$I_O = \frac{-2I_S}{I_D} (I_{ABC}) = \frac{-2I_S}{I_D} \frac{V_{IN2}}{R_C} - \frac{2I_S}{I_D} \frac{(V^- + 1.4V)}{R_C}$$

The constant term in the above equation may be cancelled by feeding  $I_S \times I_D R_C / 2(V^- + 1.4V)$  into  $I_O$ . The circuit of Figure 6 adds  $R_M$  to provide this current, resulting in a four-quadrant multiplier where  $R_C$  is trimmed such that  $V_O = 0V$  for  $V_{IN2} = 0V$ .  $R_M$  also serves as the load resistor for  $I_O$ .

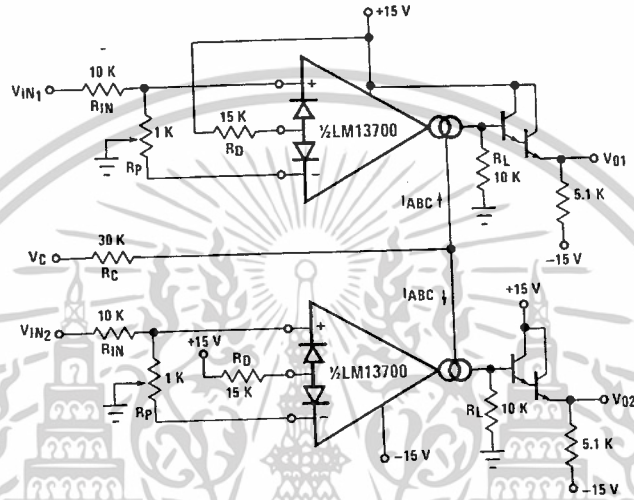


FIGURE 4. Stereo Volume Control

TL/H/7981-11

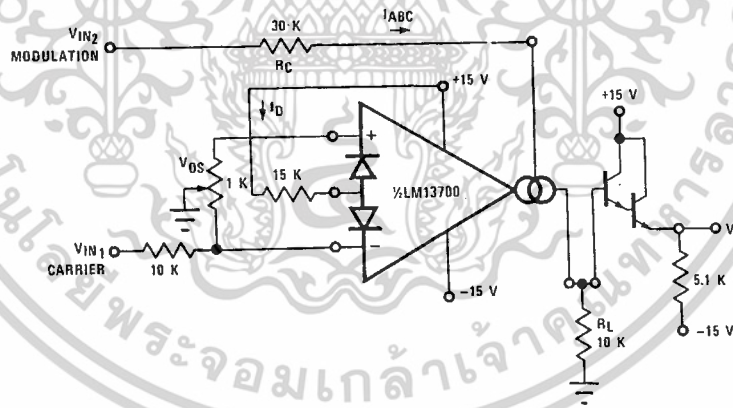
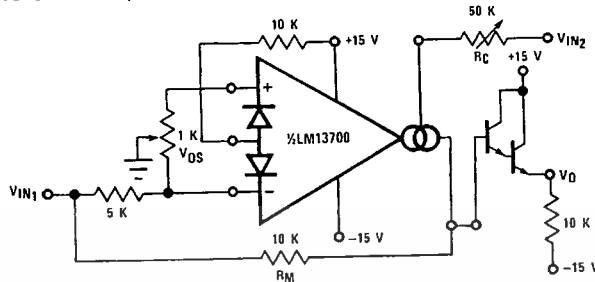


FIGURE 5. Amplitude Modulator

TL/H/7981-12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Stereo Volume Control (Continued)**



TL/H/7981-13

**FIGURE 6. Four-Quadrant Multiplier**

Noting that the gain of the LM13700 amplifier of *Figure 3* may be controlled by varying the linearizing diode current  $I_D$  as well as by varying  $I_{ABC}$ , *Figure 7* shows an AGC Amplifier using this approach. As  $V_O$  reaches a high enough amplitude ( $3V_{BE}$ ) to turn on the Darlington transistors and the linearizing diodes, the increase in  $I_D$  reduces the amplifier gain so as to hold  $V_O$  at that level.

**Voltage Controlled Resistors**

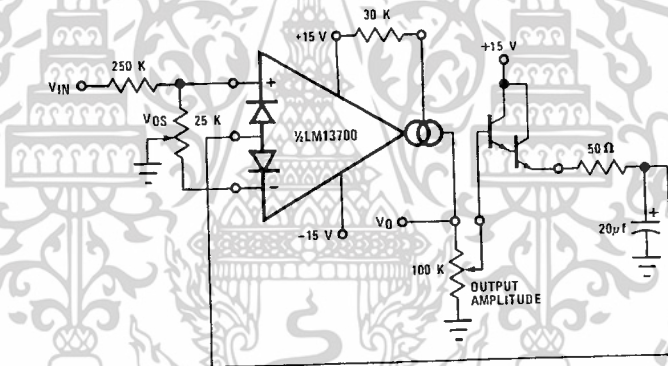
An Operational Transconductance Amplifier (OTA) may be used to implement a Voltage Controlled Resistor as shown in *Figure 8*. A signal voltage applied at  $R_X$  generates a  $V_{IN}$

to the LM13700 which is then multiplied by the  $g_m$  of the amplifier to produce an output current, thus:

$$R_X = \frac{R + R_A}{9m g_m R_A}$$

where  $g_m \approx 19.2 I_{ABC}$  at  $25^\circ C$ . Note that the attenuation of  $V_O$  by  $R$  and  $R_A$  is necessary to maintain  $V_{IN}$  within the linear range of the LM13700 input.

*Figure 9* shows a similar VCR where the linearizing diodes are added, essentially improving the noise performance of the resistor. A floating VCR is shown in *Figure 10*, where each "end" of the "resistor" may be at any voltage within the output voltage range of the LM13700.

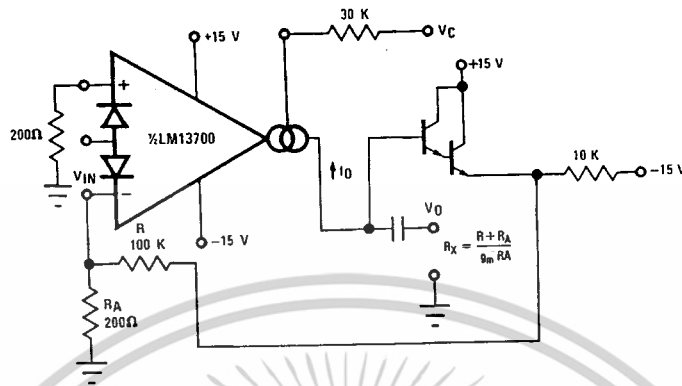


TL/H/7981-14

**FIGURE 7. AGC Amplifier**

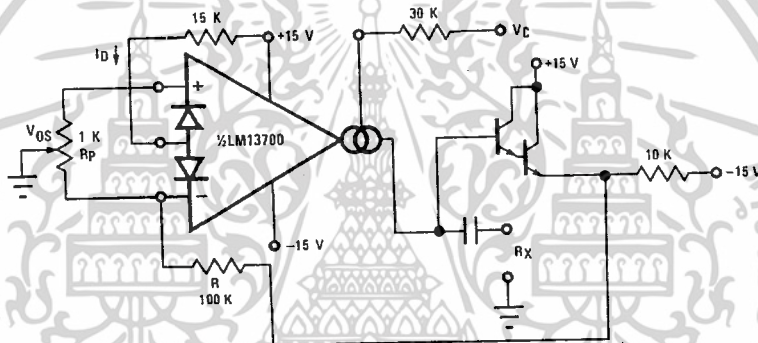
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Voltage Controlled Resistors (Continued)



TL/H/7981-15

FIGURE 8. Voltage Controlled Resistor, Single-Ended



TL/H/7981-16

FIGURE 9. Voltage Controlled Resistor with Linearizing Diodes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Voltage Controlled Filters**

OTA's are extremely useful for implementing voltage controlled filters, with the LM13700 having the advantage that the required buffers are included on the I.C. The VC Lo-Pass Filter of Figure 11 performs as a unity-gain buffer amplifier at frequencies below cut-off, with the cut-off frequency being the point at which  $X_C/g_m$  equals the closed-loop gain of  $(R/R_A)$ . At frequencies above cut-off the circuit provides a single RC roll-off (6 dB per octave) of the input signal amplitude with a  $-3$  dB point defined by the given equation, where  $g_m$  is again  $19.2 \times I_{ABC}$  at room temperature. Figure

12 shows a VC High-Pass Filter which operates in much the same manner, providing a single RC roll-off below the defined cut-off frequency.

Additional amplifiers may be used to implement higher order filters as demonstrated by the two-pole Butterworth Lo-Pass Filter of Figure 13 and the state variable filter of Figure 14. Due to the excellent  $g_m$  tracking of the two amplifiers, these filters perform well over several decades of frequency.

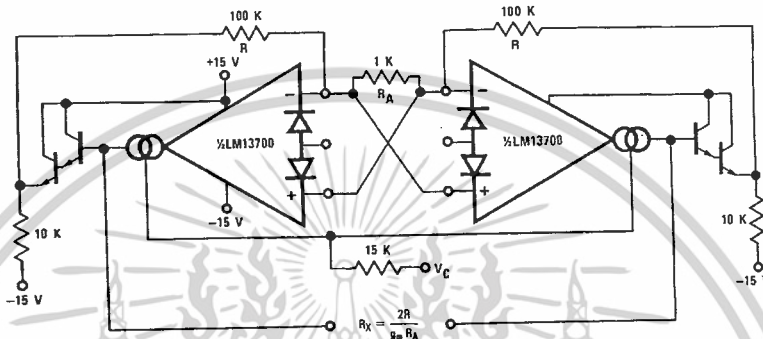


FIGURE 10. Floating Voltage Controlled Resistor

TL/H/7981-17

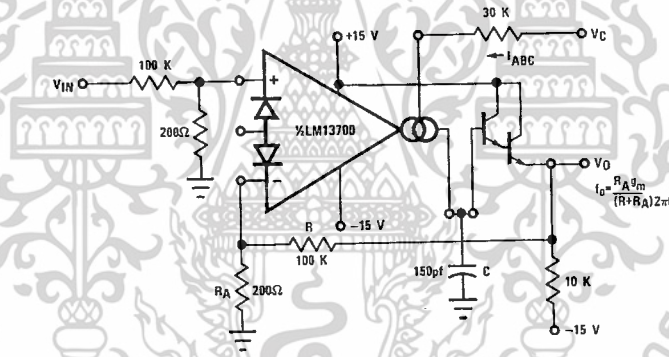
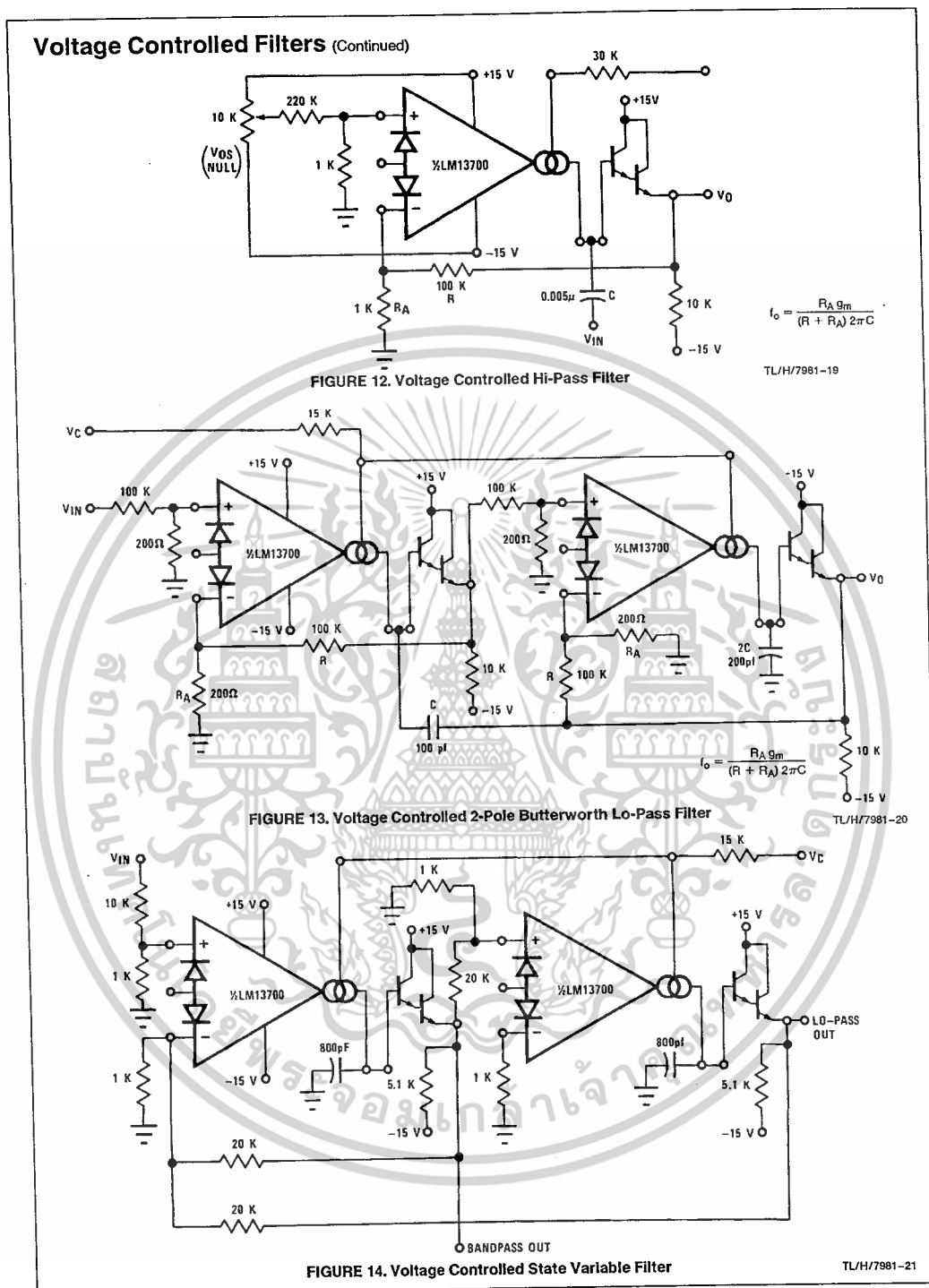


FIGURE 11. Voltage Controlled Low-Pass Filter

TL/H/7981-18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Voltage Controlled Oscillators**

The classic Triangular/Square Wave VCO of Figure 15 is one of a variety of Voltage Controlled Oscillators which may be built utilizing the LM13700. With the component values shown, this oscillator provides signals from 200 kHz to below 2 Hz as  $I_C$  is varied from 1 mA to 10 nA. The output amplitudes are set by  $I_A \times R_A$ . Note that the peak differential input voltage must be less than 5V to prevent zenering the inputs.

A few modifications to this circuit produce the ramp/pulse VCO of Figure 16. When  $V_{O2}$  is high,  $I_F$  is added to  $I_C$  to

increase amplifier A1's bias current and thus to increase the charging rate of capacitor C. When  $V_{O2}$  is low,  $I_F$  goes to zero and the capacitor discharge current is set by  $I_C$ .

The VC Lo-Pass Filter of Figure 11 may be used to produce a high-quality sinusoidal VCO. The circuit of Figure 16 employs two LM13700 packages, with three of the amplifiers configured as lo-pass filters and the fourth as a limiter/inverter. The circuit oscillates at the frequency at which the loop phase-shift is  $360^\circ$  or  $180^\circ$  for the inverter and  $60^\circ$  per filter stage. This VCO operates from 5 Hz to 50 kHz with less than 1% THD.

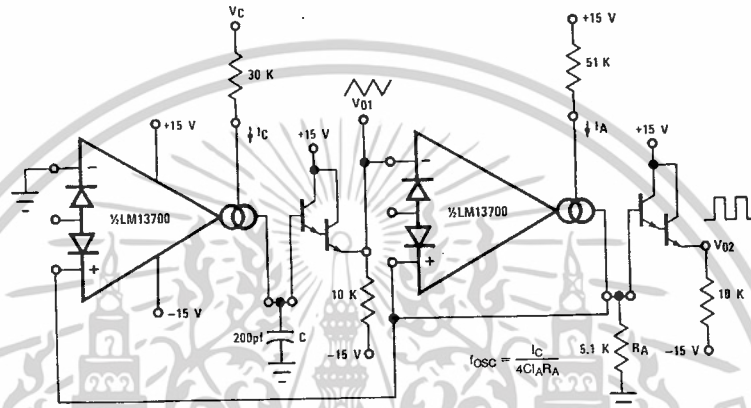


FIGURE 15. Triangular/Square-Wave VCO

TL/H/7981-22

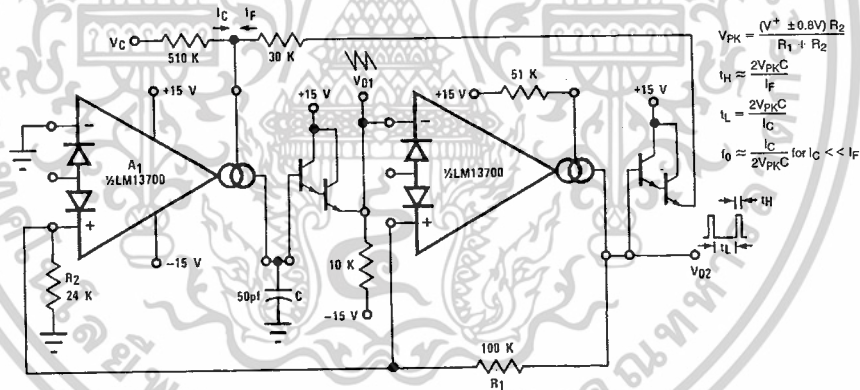
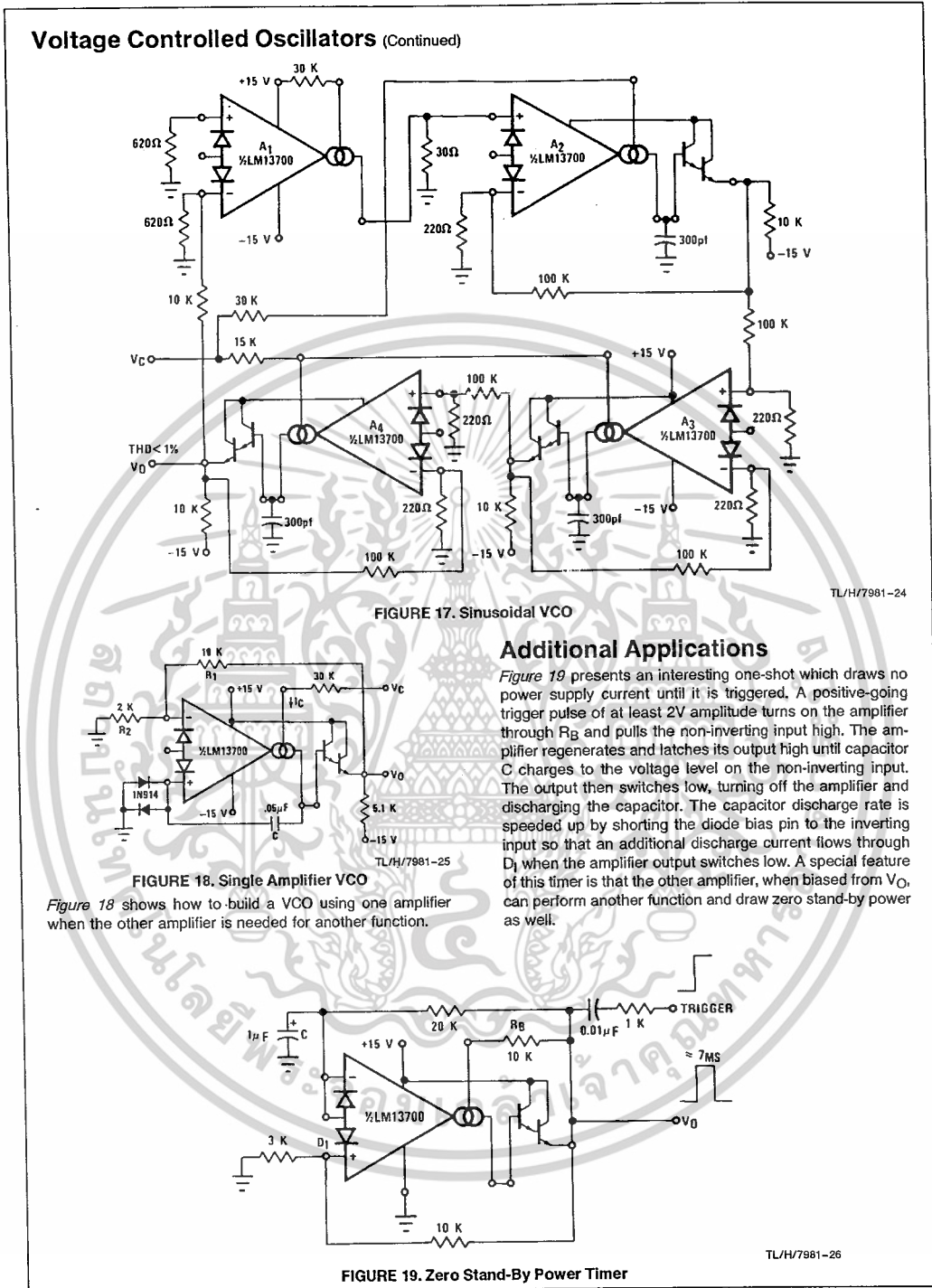


FIGURE 16. Ramp/Pulse VCO

TL/H/7981-23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Additional Applications** (Continued)

The operation of the multiplexer of Figure 20 is very straightforward. When A1 is turned on it holds  $V_O$  equal to  $V_{IN1}$  and when A2 is supplied with bias current then it controls  $V_O$ .  $C_C$  and  $R_C$  serve to stabilize the unity-gain configuration of amplifiers A1 and A2. The maximum clock rate is limited to about 200 kHz by the LM13700 slew rate into 150 pF when the  $(V_{IN1} - V_{IN2})$  differential is at its maximum allowable value of 5V.

The Phase-Locked Loop of Figure 21 uses the four-quadrant multiplier of Figure 6 and the VCO of Figure 18 to produce a PLL with a  $\pm 5\%$  hold-in range and an input sensitivity of about 300 mV.

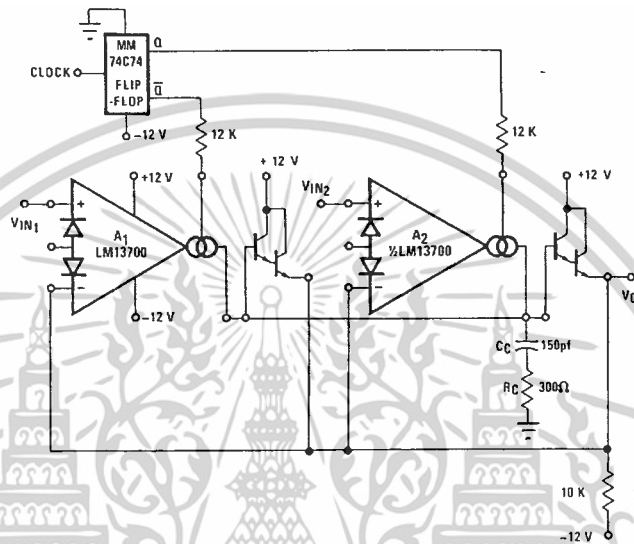


FIGURE 20. Multiplexer

TL/H/7981-27

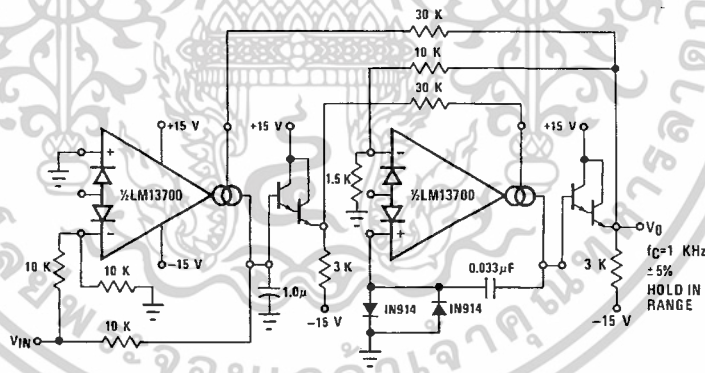


FIGURE 21. Phase Lock Loop

TL/H/7981-28

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Additional Applications** (Continued)

The Schmitt Trigger of Figure 22 uses the amplifier output current into R to set the hysteresis of the comparator; thus  $V_H = 2 \times R \times I_B$ . Varying  $I_B$  will produce a Schmitt Trigger with variable hysteresis.

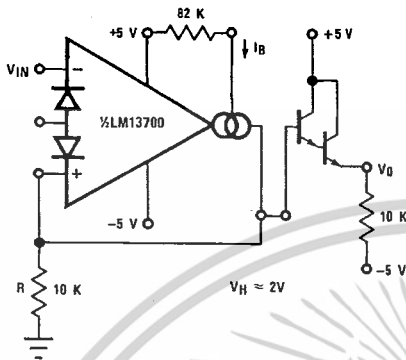


FIGURE 22. Schmitt Trigger

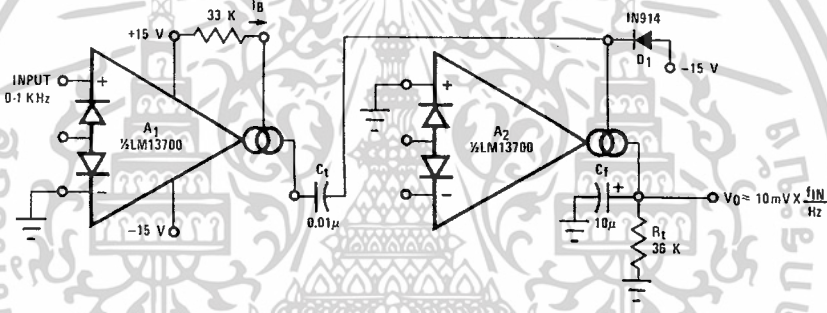


FIGURE 23. Tachometer

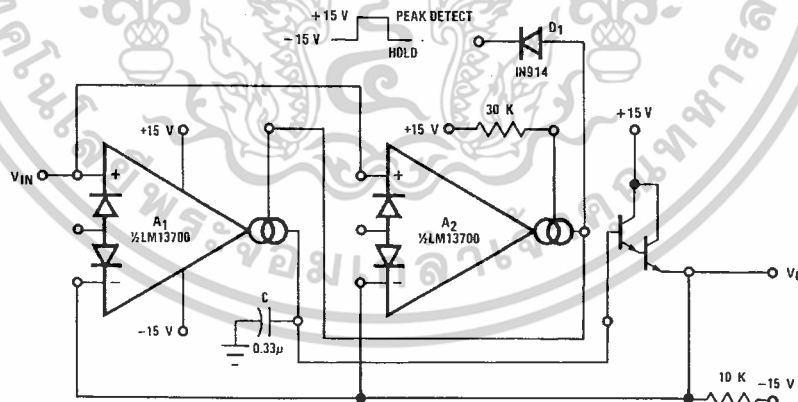


FIGURE 24. Peak Detector and Hold Circuit

Figure 23 shows a Tachometer or Frequency-to-Voltage converter. Whenever A1 is toggled by a positive-going input, an amount of charge equal to  $(V_H - V_L) C_1$  is sourced into  $C_1$  and  $R_1$ . This once per cycle charge is then balanced by the current of  $V_O/R_1$ . The maximum  $f_{IN}$  is limited by the amount of time required to charge  $C_1$  from  $V_L$  to  $V_H$  with a current of  $I_B$ , where  $V_L$  and  $V_H$  represent the maximum low and maximum high output voltage swing of the LM13700. D1 is added to provide a discharge path for  $C_1$  when A1 switches low. The Peak Detector of Figure 24 uses A2 to turn on A1 whenever  $V_{IN}$  becomes more positive than  $V_O$ . A1 then charges storage capacitor C to hold  $V_O$  equal to  $V_{IN PK}$ . Pulling the output of A2 low through D1 serves to turn off A1 so that  $V_O$  remains constant.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Additional Applications (Continued)**

The Ramp-and-Hold of Figure 26 sources  $I_B$  into capacitor C whenever the input to A1 is brought high, giving a ramp-rate of about 1V/ms for the component values shown.

The true-RMS converter of Figure 27 is essentially an automatic gain control amplifier which adjusts its gain such that the AC power at the output of amplifier A1 is constant. The output power of amplifier A1 is monitored by squaring amplifier A2 and the average compared to a reference voltage with amplifier A3. The output of A3 provides bias current to the diodes of A1 to attenuate the input signal. Because the output power of A1 is held constant, the RMS value is constant and the attenuation is directly proportional to the RMS value of the input voltage. The attenuation is also proportional to the diode bias current. Amplifier A4 adjusts the ratio of currents through the diodes to be equal and therefore the voltage at the output of A4 is proportional to the RMS value of the input voltage. The calibration potentiometer is set such that  $V_O$  reads directly in RMS volts.

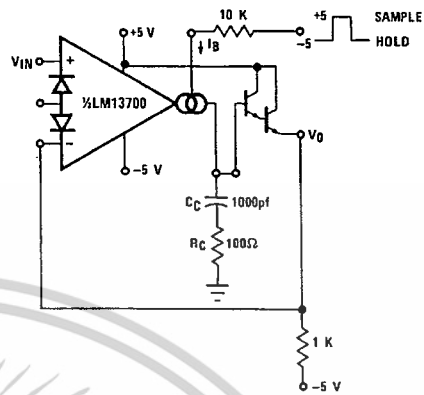


FIGURE 25. Sample-Hold Circuit

TL/H/7981-32

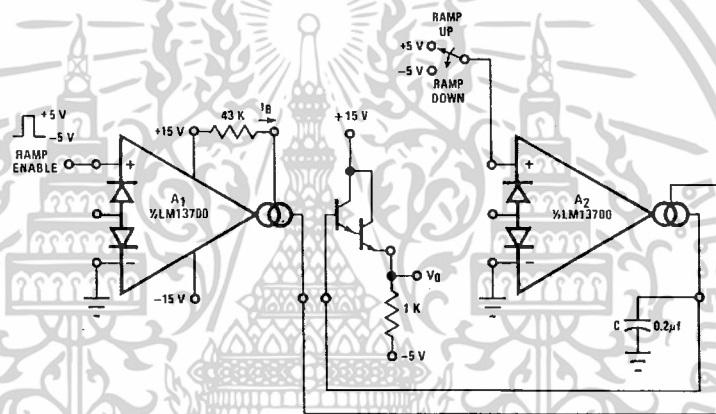


FIGURE 26. Ramp and Hold

TL/H/7981-33

Additional Applications (Continued)

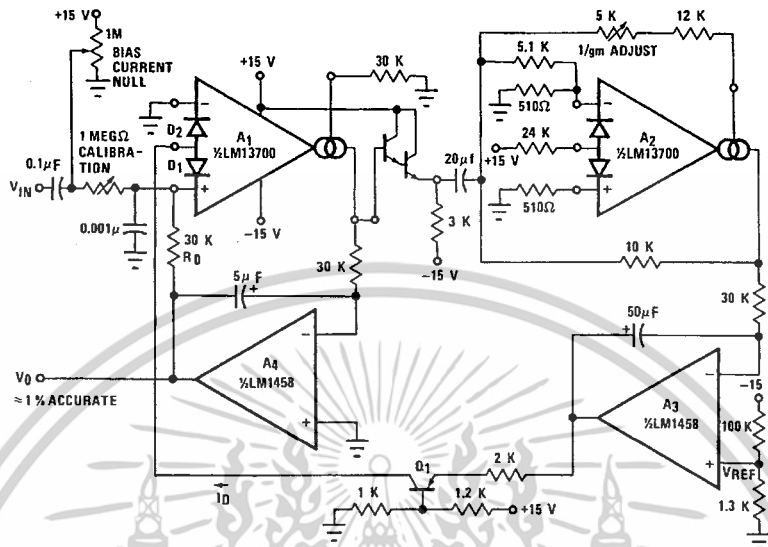


FIGURE 27. True RMS Converter

TL/H/7981-34

The circuit of Figure 28 is a voltage reference of variable Temperature Coefficient. The 100 kΩ potentiometer adjusts the output voltage which has a positive TC above 1.2V, zero TC at about 1.2V, and negative TC below 1.2V. This is accomplished by balancing the TC of the A2 transfer function against the complementary TC of D1.

The wide dynamic range of the LM13700 allows easy control of the output pulse width in the Pulse Width Modulator of Figure 29.

For generating  $I_{ABC}$  over a range of 4 to 6 decades of current, the system of Figure 30 provides a logarithmic current out for a linear voltage in.

Since the closed-loop configuration ensures that the input to A2 is held equal to 0V, the output current of A1 is equal to  $I_3 = -V_C/R_C$ .

The differential voltage between Q1 and Q2 is attenuated by the R1,R2 network so that A1 may be assumed to be

operating within its linear range. From equation (5), the input voltage to A1 is:

$$V_{IN1} = \frac{-2kT I_3}{q I_2} = \frac{-2kT V_C}{q I_2 R_C}$$

The voltage on the base of Q1 is then

$$V_{B1} = \frac{(R_1 + R_2) V_{IN1}}{R_1}$$

The ratio of the Q1 and Q2 collector currents is defined by:

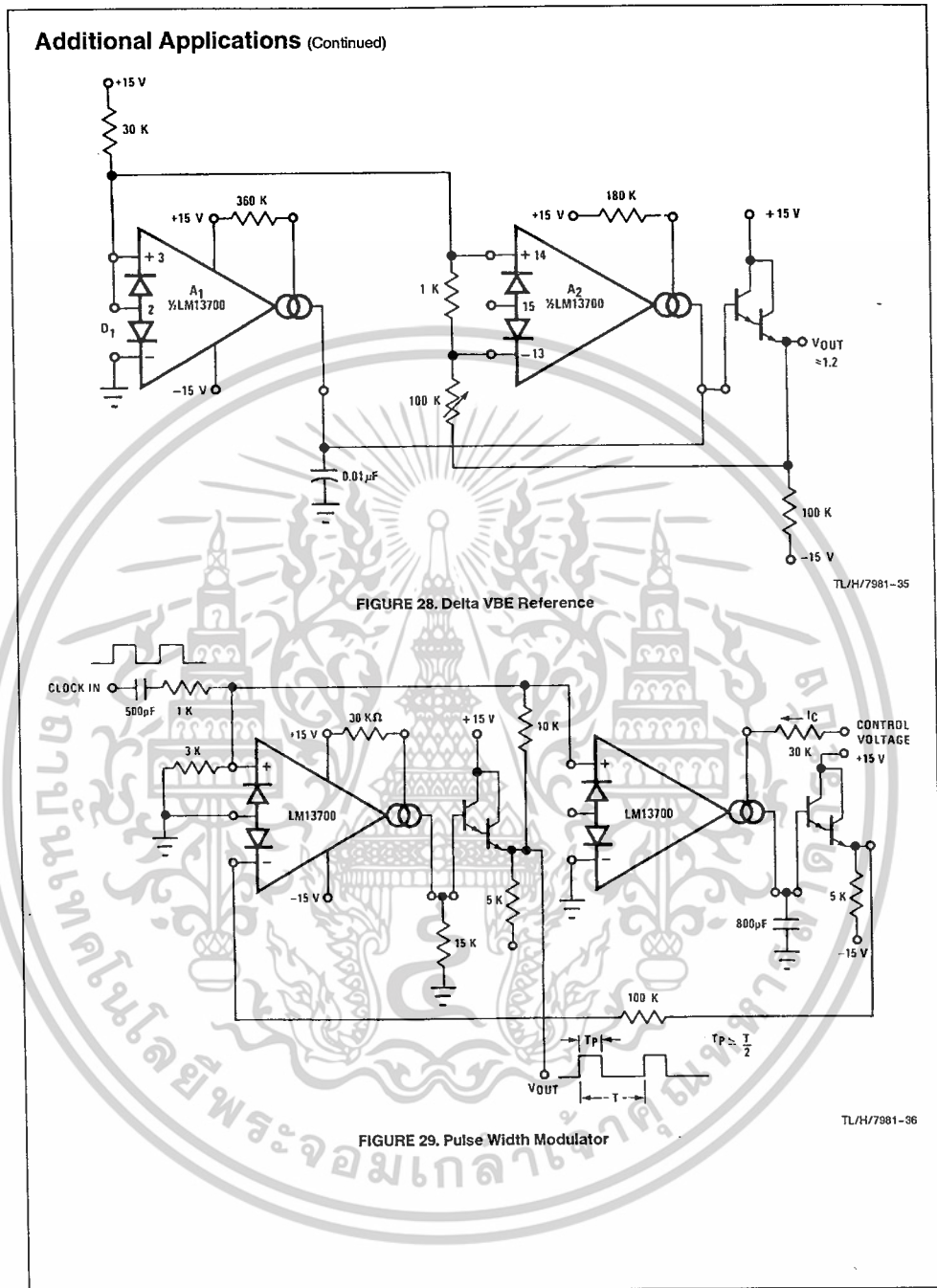
$$V_{B1} = \frac{kT}{q} \ln \frac{I_{C2}}{I_{C1}} \approx \frac{kT}{q} \ln \frac{I_{ABC}}{I_1}$$

Combining and solving for  $I_{ABC}$  yields:

$$I_{ABC} = I_1 \exp \frac{2(R_1 + R_2) V_C}{R_1 I_2 R_C}$$

This logarithmic current can be used to bias the circuit of Figure 4 to provide temperature independent stereo attenuation characteristic.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Additional Applications (Continued)

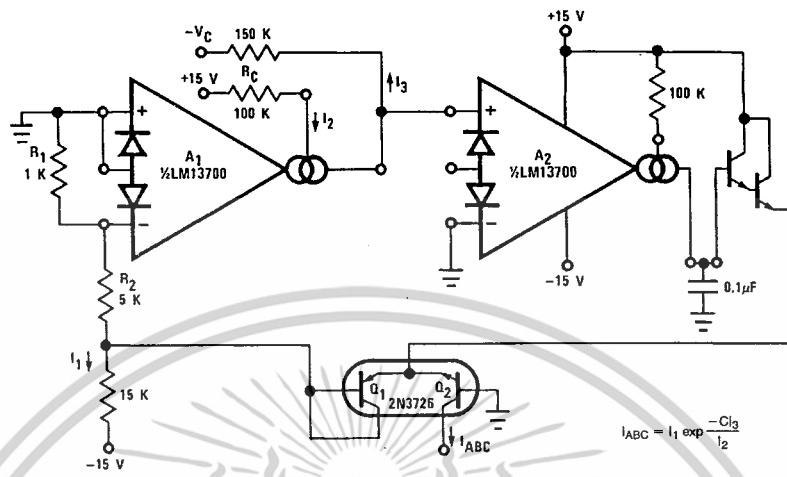
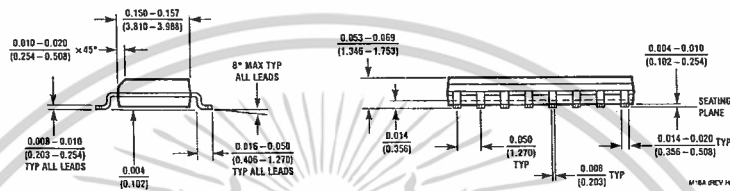
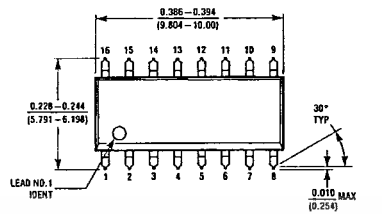


FIGURE 30. Logarithmic Current Source

TL/H/7981-37

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**Physical Dimensions** inches (millimeters)



S.O. Package (M)  
 Order Number LM13700M  
 NS Package Number M16A



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LM13700/LM13700A Dual Operational Transconductance Amplifiers with Linearizing Diodes and Buffers

**Physical Dimensions** inches (millimeters)

**Molded Dual-In-Line Package (N)**  
 Order Number LM13700N or LM13700AN  
 NS Package Number N16A

N16A (REV 6)

**LIFE SUPPORT POLICY**

NATIONAL'S PRODUCTS ARE NOT AUTHORIZED FOR USE AS CRITICAL COMPONENTS IN LIFE SUPPORT DEVICES OR SYSTEMS WITHOUT THE EXPRESS WRITTEN APPROVAL OF THE PRESIDENT OF NATIONAL SEMICONDUCTOR CORPORATION. As used herein:

1. Life support devices or systems are devices or systems which, (a) are intended for surgical implant into the body, or (b) support or sustain life, and whose failure to perform, when properly used in accordance with instructions for use provided in the labeling, can be reasonably expected to result in a significant injury to the user.
2. A critical component is any component of a life support device or system whose failure to perform can be reasonably expected to cause the failure of the life support device or system, or to affect its safety or effectiveness.

<p>National Semiconductor Corporation                  1111 West Bardin Road                  Arlington, TX 76017                  Tel: 1(800) 272-9959                  Fax: 1(800) 737-7018</p>	<p>National Semiconductor Europe                  Fax: (+49) 0-180-530 85 86                  Email: cnjwge@tevm2.nsc.com                  Deutsch Tel: (+49) 0-180-530 85 85                  English Tel: (+49) 0-180-532 78 32                  Français Tel: (+49) 0-180-532 93 58                  Italiano Tel: (+49) 0-180-534 16 80</p>	<p>National Semiconductor Hong Kong Ltd.                  13th Floor, Straight Block,                  Ocean Centre, 5 Canton Rd.                  Tsimshatsui, Kowloon                  Hong Kong                  Tel: (852) 2737-1600                  Fax: (852) 2736-9560</p>	<p>National Semiconductor Japan Ltd.                  Tel: 81-043-299-2309                  Fax: 81-043-299-2408</p>
---	---	--	--

National does not assume any responsibility for use of any circuitry described, no circuit patent licenses are implied and National reserves the right at any time without notice to change said circuitry and specifications.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# Bibliography

- [1] Robbin, Joel W., *Matrix Algebra*, A K Peters, Ltd., MA, 1985.
- [2] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York : John Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [3] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 2002.
- [4] P. Pranayanuntana, V. Riewruja, "Nonlinear Backstepping Control Design Applied to Magnetic Ball Control", IEEE Tencn Proceedings, vol.III, pp. III-304 - III-307, September 2000.
- [5] F. F. Kuo, *Network Analysis and Synthesis*, New York : John Wiley & Sons, Inc. 1966.
- [6] C. A. Desoer, M. Vidyasagar, *Feedback Systems : Input-Output Properties*, New York : Academic Press, Inc. 1975.
- [7] J. T. Wen, "Time Domain and Frequency Domain Conditions for Strict Positive Realness", IEEE Trans. Automat. Contr., 33(10): pp. 988-992, October 1988.
- [8] J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, New Jersey : Prentice Hall, Inc. 1991.
- [9] Z. Artstein, "Stabilization with relaxed controls," *Nonlinear Analysis*, vol. TMA-7, pp. 1163-1173, 1983.
- เอกสารนี้เป็นเอกสารที่เผยแพร่โดยหน่วยงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [10] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, second edition, New York : Addison-Wesley, 1995.
- [11] G. Bastin and G. Campion, "Indirect adaptive control of linearly parametrized nonlinear systems," *Proceeding of the 3rd IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control, and Signal Processing*, Glasgow, UK, 1989.
- [12] C. I. Byrnes and A. Isidori, "New results and examples in nonlinear feedback stabilization," *Systems in Control Letters*, vol. 12, pp. 437-442, 1989.
- [13] G. Campion and G. Bastin, "Indirect adaptive state-feedback control of linearly parametrized nonlinear systems," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 35, pp. 1100-1108, 1990.
- [14] J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Reading, MA : Addison-Wesley, 1988.
- [15] W. Dayawansa, W. M. Boothby and D. L. Elliott, "Global state and feedback equivalence of nonlinear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 6, pp. 229-234.
- [16] B. Egardt, *Stability of Adaptive Controllers*, New York : Springer-Verlag, 1979.
- [17] A. Feuer, A. S. Morse, "Local stability of parameter adaptive control systems," *Proceeding of the 1978 Conference on Information Sciences and Systems*, Johns Hopkins, Baltimore, MD, pp. 107-111, 1978.
- [18] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Eaglewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1984.
- [19] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Global transformation of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 24-31, 1983.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [20] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Berlins : Springer-Verlag, 1989.
- [21] D. H. Jacobson, *Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory*, New York : Academic Press, 1977.
- [22] B. Jakubczyk, W. Respondek, "On linearization of systems," *Bulletin of the Polish Academy of Science, Series on Mathematical Science*, vol. 28, no.9-10, pp. 517-522, 1980.
- [23] Z. P. Jiang and L. Praly, "Iterative designs of adaptive controllers for systems with nonlinear integrators," *Proceeding of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brington, UK, December 1991, pp. 2482- 2487.
- [24] V. Jurdjivic and J. P. Quinn, "Controllability and Stability," *Journal of Differential Equations*, vol. 28, pp. 381-389, 1987.
- [25] I. Kanellakopoulos, *Adaptive Control of Nonlinear Systems*, Ph. D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, 1991.
- [26] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. Marino, "An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control," *Automatica*, vol. 27, pp. 247-255, 1991.
- [27] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. H. Middleton, "Observer based adaptive control of nonlinear systems under matching conditions," *Proceeding of the 1990 American Control Conference*, San Diego, CA, pp. 549-552.
- [28] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and R. H. Middleton, "Indirect adaptive output-feedback control of a class of nonlinear systems," *Proceeding of the 29th IEEE conference on Decision and Control*, Honolulu, HI, December 1990, pp. 2714-2719.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [29] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1241-1253, 1991.
- [30] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Adaptive output feedback control of systems with output nonlinearities," pp. 495-525, 1991.
- [31] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Adaptive output feedback control of systems with output nonlinearities," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 1266-1282, 1992.
- [32] P. V. Kokotovic and H. J. Sussmann, "A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 13, pp. 125-133, 1989.
- [33] P. V. Kokotovic, Ed., *Foundations of Adaptive Control*, Berlin : Springer-Verlag, 1991.
- [34] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic, and A. S. Morse, "Adaptive feedback linearization of nonlinear systems," pp. 311-346, 1991.
- [35] M. Krstic, *Adaptive Nonlinear Control*, Ph. D. Dissertation, University of California, Santa Barbara, 1994.
- [36] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic, "Adaptive nonlinear control without overparametrization," *Systems and Control Letters*, vol. 19, pp. 177-185, 1992.
- [37] Y. D. Landau, *Adaptive Control*, New York : Marcel Dekker, 1979.
- [38] R. Marino, "On the largest feedback linearizable subsystem," *Systems and Control Letters*, vol. 6, pp. 345-351, 1986.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [39] R. Marino, W. M. Boothby, and D. L. Elliot, "Geometric properties of linearizable control systems," *Mathematical Systems Theory*, vol. 18, pp. 97-123, 1985.
- [40] R. Marino and P. Tomei, "Dynamic output-feedback linearization and global stabilization," *Systems and Control Letters*, vol. 17, pp. 115-121, 1991.
- [41] R. Marino and P. Tomei, "Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 37, pp. 1239-1245, 1992.
- [42] R. Marino and P. Tomei, "Global adaptive observers and output feedback stabilization for a class of nonlinear systems," pp. 455-493, 1991.
- [43] R. Marino and P. Tomei, "Global Adaptive output-feedback control of nonlinear systems, Part I : linear parametrization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 17-32, 1993.
- [44] R. Marino and P. Tomei, "Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems, PartII : nonlinear parametrization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, pp. 33-49, 1993.
- [45] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, "Adaptive computed torque control for rigid link manipulators," *System and Control Letters*, vol. 10, pp. 9-16, 1988.
- [46] R. V. Monopoli, "Model reference adaptive control with an augmented error signal," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp. 474-484, 1974.
- [47] A. S. Morse, "Global stability of parameter-adaptive control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 433-439, 1980.
- [48] K. Nam and A. Arapostathis, "A model-reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 803-811, 1988.

- [49] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Engle wood-cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1989.
- [50] R.Ortega and M. W. Spong, “Adaptive motion control of rigid robots : a tutorial,” *Automatica*, vol. 25, pp. 877-888, 1989.
- [51] J. B. Pomet and L. Praly, “Indirect adaptive nonlinear control,” *Proceeding of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, TX, December 1988, pp. 2414-2415.
- [52] J. B. Pomet and L. Praly, “Adaptive nonlinear control : an estimation based algorithm ,” in *New Trends in Nonlinear Control Theory*, J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, and D. Leborgne, Eds., Springer-Verlag, New York, 1989.
- [53] J. B. Pomet and L. Praly, “Adaptive nonlinear regulation : estimation from the Lyapunov equation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 729-740, 1992.
- [54] A. Saberi, P. V. Kokotovic, and H. J. Sussmann, “Global stabilization of partially linear composite systems,” *SIAM J. Control Opt.*, 1990, vol. 28, pp. 1491-1503.
- [55] S. S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control : Stability, Convergence and Robustness*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [56] S. S. Sastry and A. Isidori, “Adaptive control of linearizable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 1123-1131, 1989.
- [57] J. J. E. Slotine and W. Li, “On the adaptive control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, pp. 49-59, 1987.
- [58] J. J. E. Slotine and W. Li, “Adaptive manipulator control : a case study,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 995-1003, 1988.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [59] E. D. Sontag, "A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 21, pp. 462-471, 1983.
- [60] E. D. Sontag and H. J. Sussmann, "Further comments on the stability of the angular velocity of a rigid body," *System and Control Letters*, vol. 12, pp. 437-442, 1988.
- [61] D. Taylor, P. V. Kokotovic, R. Marino and I. Kanellakopoulos, "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 405-412, 1989.
- [62] A. R. Teel, R. R. Kadiyala, P. V. Kokotovic and S. S. Sastry, "Indirect techniques for adaptive input-output linearization of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 53, pp. 193-222, 1991.
- [63] J. Tsinias, "Sufficient Lyapunov-like conditions for Stabilization," *Mathematics of Control, Signal and Systems*, vol. 2, pp. 343-357, 1989.