

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

เสถียรภาพการสะสมของแรงตามแนวแกน

THE STABILITY OF AXIAL FORCE ACCUMULATION



เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 61403
วัน,เดือน,ปี..... 17 ต.ค. 2549

b.....
i.....

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE STABILITY OF AXIAL FORCE ACCUMULATION



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
BACHELOR OF CIVIL ENGINEERING
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING, FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT 'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2004

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองโครงการพิเศษ


หัวข้อโครงการพิเศษ เสถียรภาพการสะสมของแรงตามแนวแกน

THE STABILITY OF AXIAL FORCE ACCUMULATION

นักศึกษา นาย ณิชพล เหล่าชูเจริญกิจ รหัสประจำตัว 44010699
นาย ธนวรรณ โสภณมหาผล รหัสประจำตัว 44010720
หลักสูตร วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา
ภาควิชา วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.สุวัฒน์ ธีรเศรษฐ์
ผศ.ศักดิ์ชัย สกานูพงษ์

คณะกรรมการสอบโครงการพิเศษ	ลายมือชื่อ
ผศ.สุวัฒน์ ธีรเศรษฐ์ ผศ.ดร.ศรีกริช หิรัญมาศ อ.ทรงกลด แซ่อึ้ง	

ภาควิชาวิศวกรรมโยธารับรองแล้ว


(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุพจน์ ศรีนิล)
หัวหน้าภาควิชาวิศวกรรมโยธา
วันที่ 31 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2548

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อโครงการพิเศษ	เสถียรภาพการสะสมของแรงตามแนวแกน		
	THE STABILITY OF AXIAL FORCE ACCUMULATION		
นักศึกษา	นาย ณัฐพล	เหล่าชูเจริญกิจ	รหัสประจำตัว 44010699
	นาย ธนวรรณ	โสภณมหาผล	รหัสประจำตัว 44010720
หลักสูตร	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
ภาควิชา	วิศวกรรมโยธา		
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.สุวัฒน์ ธิรเศรษฐ์		
	ผศ.ศักดิ์ชัย สกานูพงษ์		
ปีการศึกษา	2547		

บทคัดย่อ

การคำนวณระยะการค้ำโก่งทางข้าง (Lateral Bracing) ของโครงสร้างประเภท โครงสร้างค้ำ
 หมุนจะเริ่มจากการศึกษาพฤติกรรมภายใต้สมมติฐานที่ว่า โครงสร้างประเภทนี้มีพฤติกรรมการโก่งใน
 ลักษณะที่คล้ายกับ โครงสร้างประเภทเสา แต่มีข้อแตกต่างที่ลักษณะการกระทำของแรงตามแนวแกน นั้น
 คือจะมีแรงกระทำตามแนวแกนที่กลางช่วงของเสาแทนที่จะมีเพียงแรงกระทำตามแนวแกนที่หัว-ท้าย
 อย่างเช่นเสาทั่วไปเท่านั้น ซึ่งสิ่งที่เราต้องการหาคือ หน้าตัดที่เล็กที่สุดและเพียงพอกับการรับแรงตาม
 แนวแกนได้โดยที่ไม่เกิดการ โกงพอดิ และหลักการที่สามารถทำการวิเคราะห์เพื่อรองรับความต้องการ
 ดังกล่าวได้อย่างเหมาะสมก็คือหลักการทางเสถียรภาพของ โครงสร้างแต่ในการวิเคราะห์นั้นจะต้อง
 กระทำร่วมกับหลักการทางคณิตศาสตร์ โดยหลักการทางเสถียรภาพที่นี้ประกอบไปด้วย ทฤษฎีอิลลา
 สติก และ วิธีการทางพลังงาน เหตุผลที่เราทำการวิเคราะห์ทั้งสองวิธีก็เพื่อที่จะใช้เปรียบเทียบผลเฉลยว่า
 จะมีความใกล้เคียงกันหรือไม่ ซึ่งจากการวิเคราะห์เปรียบเทียบกันแล้วพบว่าค่าที่ได้ใกล้เคียงกันอย่างชัด
 เจน แต่หากทำการพิจารณาให้ดีแล้วจะพบว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีอิลลา สติกนั้นมีค่าที่ถูกต้องมากกว่าค่าที่ได้
 จากวิธีการทางพลังงานเนื่องจากวิธีการทางพลังงานนั้นมีหลักการมาจากการประมาณค่า แต่การใช้
 ทฤษฎีอิลลา สติกกับเสาที่มีแรงกระทำกลางช่วงมากกว่าหนึ่งแรงขึ้นไปมีความซับซ้อนและเป็นไปได้ยาก
 ในการที่จะหาผลเฉลย ดังนั้นเราจึงเลือกวิเคราะห์เสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนมากกว่าหนึ่งแรง
 บริเวณกลางช่วงด้วยวิธีการทางพลังงานที่ให้ค่าใกล้เคียงกันมาทำการวิเคราะห์เมื่อเราสามารถสร้างสม
 การในการวิเคราะห์แล้วเราจะนำผลที่ได้มาทำการสรุปเพื่อที่จะนำไปหาค่าระยะการค้ำ โกงที่เราต้องการ
 ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title : THE STABILITY OF AXIAL FORCE ACCUMULATION
Name : NATTAPOL LAOCHOOCHALERNKIT
TANAWAT SOPONMAHAPHOL
Field : CIVIL ENGINEERING
Department : CIVIL ENGINEERING
Faculty : ENGINEERING
Advisor : SUWAT TEERASET
SAKCHAI SKANUPONG

ABSTRACT

Locations of lateral bracings on an axially loaded member can be determined by assuming that the buckling behavior of the member is the same as that of column-type members. However, this assumption is valid only when loads are applied at both ends of the member. With additional loads applied between member ends, additional analysis procedure is required. Two different analysis methods were studied: the elastic stability and the energy method. Both methods yield very close results although the energy method is considered to be only an approximated method. With more than one load applied between member ends, the elastic stability analysis, however, requires tremendous amount of work; the energy method was thus selected as the sole analysis method. The analysis results, in terms of applied loads and the smallest cross sectional areas required just to prevent buckling, were collected and converted to the locations of lateral bracing required on members.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

โครงการพิเศษฉบับนี้ได้รับความกรุณาและความอนุเคราะห์จากผ.ศ.สุวัฒน์ ธีรเศรษฐ์ และ ผ.ศ.ศักดิ์ชัย สกานุพงษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการพิเศษฉบับนี้ ตลอดระยะเวลาของงานศึกษา โดยทั้งสอง ท่านนี้ได้ให้คำแนะนำและการสั่งสอนที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งกับการดำเนินโครงการพิเศษ พร้อมทั้งประสบการณ์นอกเหนือจากเนื้อหาที่ทำการศึกษาอันเป็นสมบัติที่ล้ำค่ายิ่งสำหรับวิศวกร ขอกล่าวคำขอบคุณแด่ ผ.ศ.สุวัฒน์ ธีรเศรษฐ์ และ ผ.ศ.ศักดิ์ชัย สกานุพงษ์

ขอขอบคุณแด่ ผศ.ดร.ศรีกริช หิรัญมาศและดร.อุมา สีนุญเรื่อง ที่ได้ให้อุเคราะห์เกี่ยวกับการเขียนบทความในรูปแบบของภาษาอังกฤษ และ ขอกล่าวคำขอบคุณแด่อาจารย์แหลมทอง เหล่าคงถาวร ที่ได้มอบความอนุเคราะห์ในส่วนของคุณรู้เกี่ยวกับวิธีการใช้เครื่องมือสำหรับทดสอบวัสดุ พร้อมทั้งคำชี้แนะอันเป็นการเอื้อประโยชน์ให้โครงการนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้ที่ขาดไม่ได้เลยก็คือการได้รับความช่วยเหลือจากคุณชัชยา อำนวย เจ้าหน้าที่ควบคุมงานทดสอบวัสดุที่ให้ความช่วยเหลือในส่วนของการคุมเครื่องทดสอบและให้ความกรุณาเสมือนพี่น้อง ดังนั้นในฐานะน้องชายขอกล่าวคำขอบคุณแด่พี่ชัชยาด้วยความเคารพ

และขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาในภาควิชาวิศวกรรมโยธาที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจมาตลอดจนโครงการสำเร็จลุล่วงไปได้ในที่สุด

ท้ายที่สุดนี้ขอกล่าวคำขอบคุณทุกสิ่งทุกอย่างที่ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังที่มอบให้โดยเฉพาะอย่างยิ่งโอกาสในการศึกษาตลอดหลักสูตรวิศวกรรมบัณฑิตอันถือเป็นเกียรติสูงสุดสำหรับผู้จัดทำ

นายณัฐพล เหล่าชูเจริญกิจ

นายชนนวรรธน์ โสภณมหาผล

ผู้ประพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

บทที่	เรื่อง	หน้า
	ปกใน (ภาษาไทย)	ก
	ปกใน (ภาษาอังกฤษ)	ข
	หน้าอำนวยการ	ค
	บทคัดย่อภาษาไทย	ง
	บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
	กิตติกรรมประกาศ	ฉ
	สารบัญ	ช
	สารบัญตาราง	ญ
	สารบัญรูป	ฎ
	คำอธิบายสัญลักษณ์	ฏ
1	บทนำ	
	1.1. กล่าวนำ	1
	1.2. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย	2
	1.3. วัตถุประสงค์ของการศึกษา	3
	1.4. ขอบเขตของการศึกษา	3
	1.5. วิธีการดำเนินงาน โครงการพิเศษ	4
	1.5.1 การวิเคราะห์ปัญหาด้วยทฤษฎีทางเสถียรภาพและหลักการทางคณิตศาสตร์	4
	1.5.2 การทดสอบแบบจำลอง	5
	1.5.2.1 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบ	5
2	วรรณกรรมปริทัศน์	6
	2.1. กล่าวนำ	6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3	พฤติกรรมกรรับแรงของโครงข้อมุม	7
	3.1. ส่วนประกอบของโครงข้อมุม	7
	3.2. พฤติกรรมกรรับแรงและการ โกงทางข้างที่แท้จริงของ โครงข้อมุม	8
4	การวิเคราะห์แรงในโครงข้อมุมในส่วนรับแรงอัดตลอดแนว	10
	4.1. การวิเคราะห์โดยวิธีอีลาสติก	10
	4.1.1. การใช้ทฤษฎีอีลาสติกในการวิเคราะห์แรงตามแนวแกน	11
	4.1.2. การวิเคราะห์พฤติกรรมกร โกงเดาะและตำแหน่งที่ เกิดการ โกงตัวสูงสุด	19
	4.2. การวิเคราะห์แรงโดยทฤษฎีพลังงาน	21
	4.2.1. การใช้ทฤษฎีพลังงานในการวิเคราะห์แรงตามแนวแกน	22
5	การทดสอบการรับแรงอัด	36
	5.1. กล่าวนำ	36
	5.2. การทดสอบเพื่อหาค่า โมดูลัสของวัสดุ	36
	5.2.1. รายการทดสอบ	36
	5.2.2. การเตรียมวัสดุ	37
	5.2.3. วิธีการทดสอบ	37
	5.2.4. ผลการทดสอบ	37
	5.3. การทดสอบหาค่ารับแรงอัดของแรงสะสมในแนวแกน	38
	5.3.1. วัตถุประสงค์	38
	5.3.2. รายการทดสอบ	38
	5.3.3. การเตรียมวัสดุ	38
	5.3.4. วิธีการทดสอบ	40
	5.3.4.1. การทดลองการรับแรงอัด 2 แรงตามแนวแกน	40
	5.3.4.2. การทดลองการรับแรงอัด 3 แรงตามแนวแกน	40
	5.3.5. ผลการทดสอบ	41
6	สรุปและวิเคราะห์ผลการศึกษา	43

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.1. กล่าวนำ	43
6.2. การเปรียบเทียบพฤติกรรมการ โกงตัวและตำแหน่ง โกงตัวสูงสุด ที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน	43
6.3. การเปรียบเทียบหน้าตัดทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน	45
6.3.1. เปรียบเทียบเมื่อค่าของแรงเปลี่ยนแปลง	45
6.3.1.1. เมื่อแรงกระทำ P_1 เปลี่ยนแปลง	45
6.3.1.2. เปรียบเทียบเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง	47
6.4. เปรียบเทียบทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงาน และวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD)	48
6.5. เปรียบเทียบทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและผลการทดลอง	65
บรรณานุกรม	68
ภาคผนวก การหาผลเฉลยสมการเชิงเส้น	๗1



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	ชื่อตาราง	หน้า
4.1	แสดงค่า $\frac{L_n}{l}$	14
6.1	แสดงการเปรียบเทียบระยะที่เกิดการโค้งตัวสูงสุด เมื่อให้แรง P_1 เปลี่ยนแปลง	44
6.2	แสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียเมื่อ P_1 เปลี่ยนแปลง	46
6.3	แสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง	47
6.4	แสดงการเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จาก ทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและASD ของแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน	53
6.5	แสดงการเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จาก ทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและASD ของแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน	59
6.6	แสดงการเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จาก ทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและASD ของแรงสะสม 4 แรงตามแนวแกน	65
6.7	แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกนที่ได้จากการ แทนสมการที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงาน และการทดสอบ	66
6.8	แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกนที่ได้จากการ แทนสมการที่ได้จากทฤษฎีพลังงาน และการทดสอบ	66

สารบัญรูป

รูปที่	ชื่อรูป	หน้า
1.1	ภาพแสดงลักษณะของ โครงข้อหมุนที่พบ โดยทั่วไป	2
1.2	ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกน ที่บริเวณกลางช่วง 1 แรง	4
3.1	ภาพแสดงส่วนประกอบของ โครงข้อหมุน	7
3.2	ภาพแสดงการรับน้ำหนักของ โครงข้อหมุน	8
3.3	ภาพขยายแสดงการ โกงเคาะของ โครงข้อหมุน ขณะรับน้ำหนักกระทำเมื่อมองจากมุมบน	8
4.1	ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 1 แรง	11
4.2	ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 2 แรง	15
4.3	ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 1 แรงสำหรับกร วิเคราะห์โดยทฤษฎีพลังงาน	22
4.4	ภาพแสดงเส้นโค้ง	25
5.1	ภาพแสดงการทดสอบหาค่าโมดูลัส	37
5.2	ภาพแสดงวัสดุการทดสอบรับแรง 2 แรงในแนวแกน	39
5.3	ภาพแสดงฐานรองรับที่ใช้ทดสอบ	39
5.4	ภาพแสดงการติดตั้งเพื่อทดสอบ 2 แรงในแนวแกน	40
5.5	ภาพแสดงการติดตั้งเมื่อทดสอบ 3 แรงในแนวแกน	41
5.6	ภาพแสดงการเสียรูปของการทดสอบแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน	42
5.7	ภาพแสดงการเสียรูปของการทดสอบแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน	42
6.1	กราฟแสดงเปรียบเทียบ โมเมนต์อินเนอร์เซียของ ทั้งสองทฤษฎีเมื่อ P_1 เปลี่ยนแปลง	46
6.2	กราฟแสดงเปรียบเทียบ โมเมนต์อินเนอร์เซีย ของทั้งสองทฤษฎีเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง	48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.3	ภาพแสดงลักษณะของโครงหลังคาที่มีช่อง 4 ช่องซึ่งเป็น โครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา	49
6.4	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section a'-a'	49
6.5	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section a-a	50
6.6	ภาพแสดงลักษณะของโครงหลังคาที่มีช่อง 6 ช่องซึ่งเป็น โครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา	54
6.7	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	54
6.8	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	55
6.9	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	55
6.10	ภาพแสดงลักษณะของโครงหลังคาที่มีช่อง 8 ช่องซึ่งเป็น โครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา	59
6.11	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	60
6.12	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	60
6.13	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	61
6.14	ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section	61

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์

ความหมาย

D	คือการโก่งตัวเนื่องมาจากแรงกระทำตามแนวแกน
$D_{maximum}$	คือการโก่งสูงสุดเนื่องมาจากแรงกระทำตามแนวแกน
L_n	คือ ความยาวหลังคาน้ำปรับลด
x	คือระยะที่ก่อให้เกิดการโก่งตัวสูงสุด
y	คือระยะการโก่งตัว
S	คือความยาวเส้นโค้งการโก่งตัวเนื่องมาจากแรงกระทำตามแนวแกน
U	คือพลังงานภายในที่เกิดจากการกระทำของโมเมนต์
E	คือค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุ
I	คือค่าโมเมนต์ต่อฟอนเนอร์เซียของวัสดุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 กล่าวนำ

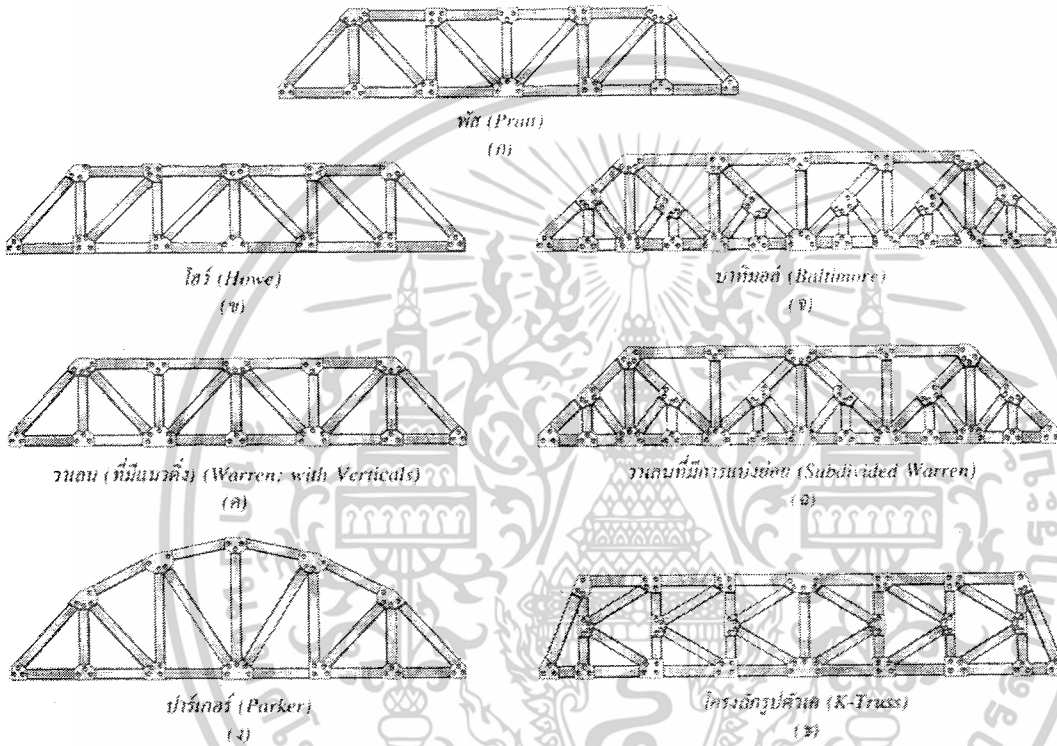
ในประเทศไทยมีการก่อสร้างมากมาย และโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุน(Truss) ก็เป็นส่วนประกอบอย่างหนึ่งของการก่อสร้างหลายประเภท โดยเฉพาะโครงสร้างอาคารสำหรับช่วงยาว อาทิเช่น โครงหลังคาของบ้านพักอาศัย โรงจอดรถโรงงานอุตสาหกรรม ลานจำหน่ายและแสดงสินค้า สนามกีฬา โครงสะพาน ป้ายโฆษณา เป็นต้น โดยในอดีตโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุน (Truss) นิยมใช้ไม้เป็นวัสดุในการประกอบ แต่ปัจจุบัน ไม้มีจำนวนลดลงจึงทำให้มีราคาสูง และมีอายุการใช้งานที่สั้น การก่อสร้างในปัจจุบันจึงนิยมใช้โครงข้อหมุนที่ใช้เหล็กเป็นวัสดุในการก่อสร้างเพราะนอกจากสามารถต้านทานทั้งแรงดึงและแรงอัดได้ดี แล้วยังมีกำลังที่สูงกว่าไม้ด้วย ซึ่งในการก่อสร้างโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุนทุกครั้งจำเป็นจะต้องมีการค้ำยันทางข้าง(Lateral Bracing) เพื่อป้องกันการโก่งทางด้านข้าง(Lateral Buckling) เนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกนโดยใน ปัจจุบันระยะค้ำยันที่ใช้ในการออกแบบอยู่นั้นเป็นเพียงระยะปลอดภัยเท่านั้น โดยที่ยังไม่ทราบถึงระยะค้ำยันที่แท้จริง ถือได้ว่าระยะค้ำยันที่แท้จริง โดยความสำคัญของการทราบระยะค้ำยันที่แท้จริงนั้นถือว่ามีความสำคัญและเป็นหัวข้อที่น่าสนใจอย่างยิ่งสำหรับการวิจัย โดยการศึกษาระยะค้ำยันยังเป็นอีกช่องทางหนึ่งที่จะก่อให้เกิดประโยชน์ในการดำเนินงานและพัฒนาการก่อสร้างด้วยโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุนต่อไปในอนาคต

ประเภทของโครงข้อหมุน

โครงถักเป็นโครงสร้างที่ประกอบขึ้นด้วยชิ้นส่วนที่มีลักษณะเรียวยาวต่อกันบริเวณจุดปลายของชิ้นส่วนโดยทั่วไปชิ้นส่วนของโครงถักจะทำจากท่อนไม้ แท่งโลหะ เหล็กฉาก หรือเหล็กรูปตัวซี การต่อเชื่อมจุดต่อส่วนใหญ่มักจะเป็นแบบขันด้วยสลักเกลียว และมักใช้ในโครงสร้างประเภทสะพาน

รูปแบบ โครงข้อมุมที่พบ โดยทั่วไป

รูปแบบของโครงข้อมุมในความเป็นจริงแล้วมีรูปแบบมากมายแต่นำมาแสดงนี้เป็นรูปแบบอย่างง่ายของโครงข้อมุมที่นิยมใช้กันทั่วไปสำหรับความยาวช่วงเดียว โดยเฉพาะอย่างยิ่งโครงถักพัส(Pratt) , โฮว์ (Howe)และวาลเลน(Warren)จะใช้ช่วงความยาวที่มากที่สุดคือ 180 ft (55m.) ถึง 200ft (61m.)



รูปที่ 1.1 ภาพแสดงลักษณะของโครงข้อมุมที่พบ โดยทั่วไป

1.2 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

โดยปกติแล้ว โครงสร้างประเภทโครงข้อมุม(Truss) แกนหลักด้านล่างจะมีพฤติกรรมในการรับแรงดึง ส่วนแกนหลักบนจะมีพฤติกรรมในการรับแรงอัด แนวโน้มของแกนหลัก มีลักษณะแรงค่อยๆเพิ่มมากขึ้นจากทางด้านจตุรรองรับ (support) และค่อยๆเพิ่มขึ้นจนถึงค่ามากที่สุดบริเวณช่วงกึ่งกลางของโครงสร้าง สิ่งที่น่าสนใจคือ ในชิ้นส่วนของการรับแรงอัด เมื่อมีแรงกระทำที่เพิ่มมากขึ้นในโครงสร้างก็จะก่อให้เกิดแรงดันเข้าหากัน อันจะทำให้เกิดการโก่งเดาะ(Buckling)ขึ้น ซึ่งการแก้ปัญหาของส่วนที่รับแรงอัดนี้โดยทั่วไปจากหลักการออกแบบคือมีการค้ำยันและยึดโยงโครงสร้าง (Bracing)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อให้โครงสร้างมีเสถียรภาพ (stability) สามารถต้านทานแรงทางขวางและแรงตามยาวที่กระทำกับโครงสร้างได้ ซึ่งระยะที่ใช้ในการออกแบบกันอยู่ในปัจจุบัน กล่าวถึงระยะค้ำโดยประมาณเท่านั้น

แนวความคิดการใช้ระยะค้ำโครงชั้น ซึ่งมีความชันเป็น 1:5 ถึง 1:6 ความยาวโครงอยู่ระหว่าง 6-25 เมตร ใช้ค่าระยะค้ำ 1.50-3.00 เมตร, โครงแบนที่มีความชัน 1:7 ถึง 1:10 ความยาวโครงอยู่ระหว่าง 12-45 เมตร ใช้ระยะค้ำ 1.50-3.00 เมตร และโครงโค้งความชัน 1:6 ถึง 1:8 ความยาวโครง 10-65 เมตร ใช้ระยะค้ำ 2.00-3.50 เมตร [1]

แนวความคิดโดยหาจากอัตราส่วนความลึกต่อช่วงความยาวที่โครงมีช่วงความยาว (Truss Span Length) ระหว่าง 8-25 เมตร มีระยะระหว่างโครง (Bay Length) ประมาณ 3-6 เมตร ระยะค้ำโครงโค้งให้อัตราส่วน $1/6$ ถึง $1/8$, โครงหลังคาชั้นใช้ระยะค้ำ $1/6$ หรือมากกว่า, โครงหลังคาแบบใช้ระยะค้ำ $1/8$ ถึง $1/10$ [2]

จะเห็นได้ว่าเป็นเพียงระยะค้ำที่ปลอดภัย ไม่ใช่ระยะค้ำที่แท้จริง ดังนั้นหากเราทราบระยะค้ำที่แท้จริงได้ ก็จะเพิ่มความมั่นใจให้กับผู้ออกแบบมากยิ่งขึ้น

1.3. วัตถุประสงค์ของการศึกษา

วัตถุประสงค์ของการศึกษาโครงงานพิเศษนี้คือ เพื่อหาระยะค้ำด้านข้างที่แท้จริงในโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุน (Truss) ตามหลักการทางเสถียรภาพของโครงสร้าง (Stability) โดยเราจะเริ่มวิเคราะห์จากพฤติกรรมของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนเพิ่มเข้าไปบริเวณกลางช่วง ซึ่งมีพฤติกรรมคล้ายกับโครงข้อหมุนตามที่ตั้งสมมติฐาน

1.4. ขอบเขตของการศึกษา

1. วิเคราะห์การเกิดระยะ โกงเดาะ (Buckling) เนื่องจากการอิทธิพลของแรงตามแนวแกน (Axial Force) โดยหลักการทางเสถียรภาพ
2. พิจารณาเฉพาะวัสดุที่มีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous)
3. แรงกระทำตามแนวแกนทั้งหมดเป็นแรงอัด
4. เส้นโค้งการ โกงเดาะมีลักษณะเป็น โค้งเดี่ยว (Single Curve)
5. ในการศึกษาจะเน้นเฉพาะ โครงข้อหมุนประเภท โครงหลังคาเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5. วิธีการดำเนินงานโครงการพิเศษ

สำหรับการศึกษาโครงการพิเศษนี้จะแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 ส่วนหลักๆซึ่งประกอบไปด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1.5.1 การวิเคราะห์ปัญหาด้วยทฤษฎีทางเสถียรภาพและหลักการทางคณิตศาสตร์

การคำนวณระยะการโก่งทางข้าง (Lateral Buckling) ของโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุนจะเริ่มจากการศึกษาพฤติกรรมภายใต้สมมติฐานที่ว่าโครงสร้างประเภทนี้มีพฤติกรรมการโก่งในลักษณะที่คล้ายกับ โครงสร้างประเภทเสา แต่มีข้อแตกต่างที่ลักษณะการกระทำของแรงตามแนวแกน นั่นคือจะมีแรงกระทำตามแนวแกนที่กลางช่วงของเสา แทนที่จะมีเพียงแรงกระทำตามแนวแกนที่หัว-ท้าย อย่างเช่นเสาทั่วไปเท่านั้น โดยหลักการในการวิเคราะห์ภายใต้สมมติฐานข้างต้นจะนำเอาทฤษฎีทางเสถียรภาพทางโครงสร้างมาวิเคราะห์ร่วมกับหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทฤษฎีที่ว่านี้ก็คือ ทฤษฎีอีลาสติก และเมื่อเราสามารถสร้างสมการในการวิเคราะห์แล้วเราจะนำผลที่ได้มาทำการประมาณค่าระยะการค้ำโก่งเบื้องต้นเพื่อประกอบการพิจารณาการค้ำยันทางข้างในโครงข้อหมุน (Lateral Bracing)



รูปที่ 1.2 ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 1 แรง เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5.2 การทดสอบแบบจำลอง

1.5.2.1 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดสอบ

ในการทดสอบมีวัสดุและอุปกรณ์ที่ใช้ดังนี้

1. แท่งอะลูมิเนียมกลางหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. Hinge Support (เหล็กกลึง)
3. เกจวัดระยะ(Dial Gauge) หรือ Strain Gauge ก็ได้
4. เครื่องทดสอบวัสดุUTM ขนาด 1ton
5. ตั้มน้ำหนักที่ถ่วงบริเวณกลางช่วงเพื่อให้เกิดแรงกระทำตามแนวแกนบริเวณกลางช่วง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

วรรณกรรมปริทัศน์

2.1. กล่าวนำ

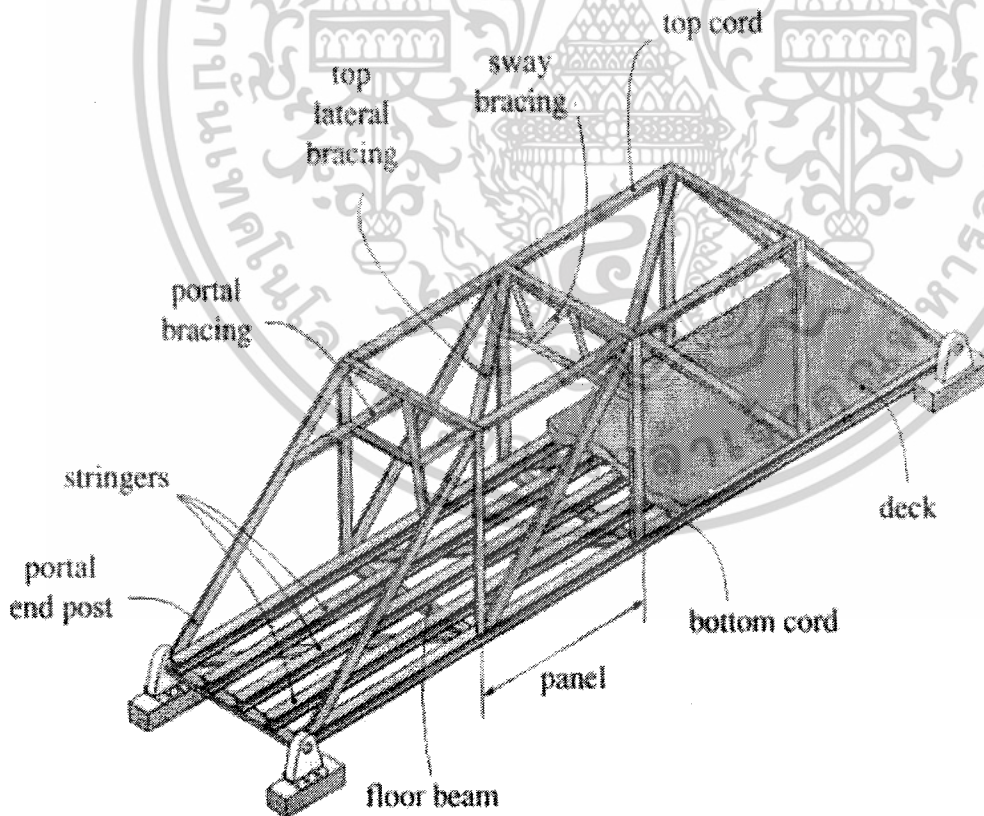
การหาระยะค่าที่เหมาะสมโดยขอบเขตกำหนดเพื่อความปลอดภัยมีหลายวิธีทั้งนี้การนำไปใช้งานก็ขึ้นกับผู้ออกแบบที่ใช้ตามความเหมาะสม แต่การหาระยะค่าที่แท้จริงในโครงข้อหมุนนั้นแล้ว ยังมีได้มีผู้ใดที่ทำการศึกษอย่างจริงจัง พฤติกรรมที่ใกล้เคียงที่สุดนั้นก็คงจะเป็นการเปรียบเทียบโครงข้อหมุนให้มีพฤติกรรมรับแรงตามแนวแกนที่บริเวณกลางช่วงเพิ่มเข้าไปยังเสาธรรมชาติต่างๆไป และผู้ที่ทำการศึกษาก็ คือ Stephon P. Timochenko[3] ที่ได้กล่าวถึงสมการและพฤติกรรมการโก่งเดาะเนื่องจาก การเพิ่มแรงตามแกน 1 แรงที่บริเวณกลางช่วงและวิเคราะห์หาผลเฉลยออกมาโดยหลักการทางเสถียรภาพ แต่ผลเฉลยที่ได้นั้น Timochenko ได้สรุปออกมาในรูปแบบของสมการแรงกระทำตามแนวแกนวิกฤต (critical loads ; P_{cr}) โดยยังมีได้กล่าวถึงพฤติกรรมที่เกี่ยวกับ โครงข้อหมุนและระยะที่ก่อให้เกิดการโก่งเดาะสูงสุดแต่อย่างไร แต่ทั้งนี้การศึกษาของ Stephon P. Timochenko เป็นการศึกษาการรับแรงตามแกนของเสา ซึ่งหากวิเคราะห์โดยละเอียดแล้วพบว่าสามารถประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์โครงข้อหมุนได้ โดยการเพิ่มแรงตามแกนให้เป็นแรงกระทำเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงขึ้นวัสดุทดสอบตามการศึกษาของ Stephon P. Timochenko ก็จะมีพฤติกรรมคล้ายคลึงโครงข้อหมุนในด้านการรับแรงอัดที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดโครงสร้าง เช่นเดียวกับการศึกษาของ M.S.el naschie[4] ที่กล่าวถึงการสะสมของแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเองในการรับแรงอัดของเสาแต่ก็ยังไม่มีการระบุถึงพฤติกรรมที่คล้ายคลึงกับโครงข้อหมุน(Truss)เช่นเดียวกัน หากนำบทสรุปพฤติกรรมการสะสมของแรงโดยวิเคราะห์สมการทางคณิตศาสตร์และทฤษฎีอีลาสติก ก็จะทำให้ทราบถึงระยะค่าที่แท้จริงจากผลเฉลยของสมการนั่นเอง

บทที่ 3

พฤติกรรมการรับแรงของโครงข้อหมุน

3.1 ส่วนประกอบของโครงข้อหมุน

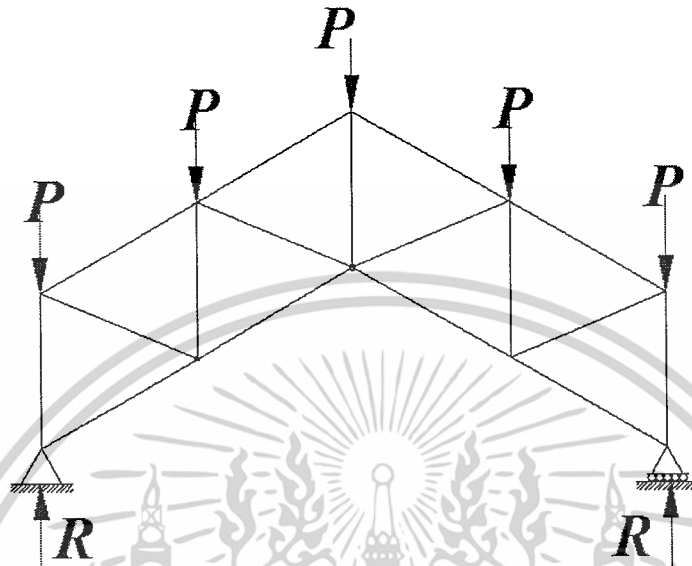
ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน เราวิเคราะห์โดยวิเคราะห์ทีละชั้นส่วน เพื่อหาแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละชั้นส่วน จากการศึกษาและการสังเกตพบว่าโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนมีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับพฤติกรรมของคาน คือ ในชั้นส่วนบนเมื่อพิจารณาทั้งชั้นส่วนพบว่าจะมีลักษณะรับแรงอัด ส่วนในชั้นส่วนล่างเมื่อพิจารณาทั้งชั้นส่วนพบว่าจะมีลักษณะรับแรงดึง ในชั้นส่วนของการรับแรงอัดจะมีลักษณะแรงสะสมตามแนวแกน หากไม่คำนึงถึงการเอนตัวในแนวดิ่งเมื่อพิจารณาทางด้านข้าง พฤติกรรมดังกล่าวเมื่อแรงสะสมทางปลายจะเกิดลักษณะเอนตัวออกไปทางแรงสะสมทางด้านที่มีแรงมากกว่าซึ่งแสดงได้ดังรูป



รูปที่ 3.1 ภาพแสดงส่วนประกอบของโครงข้อหมุน

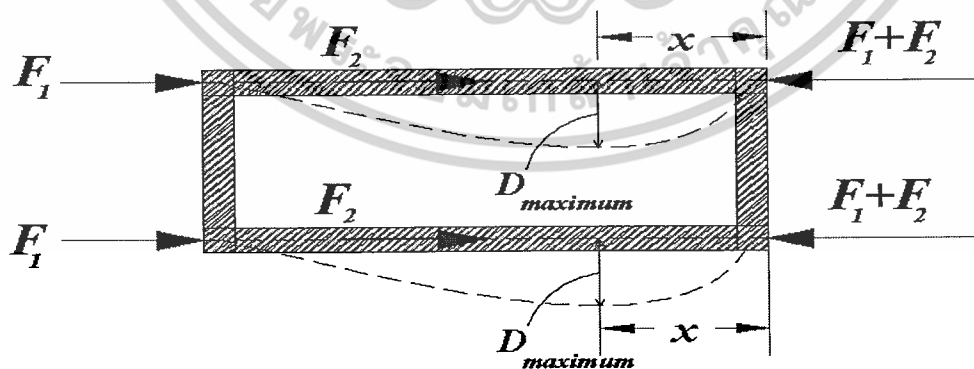
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 พฤติกรรมการรับแรงและการโก่งทงข้างที่แท้จริงของโครงข้อหมุน



รูปที่ 3.2 ภาพแสดงการรับน้ำหนักของโครงข้อหมุน

จากรูปเป็น โครงข้อหมุนแบบง่ายเพื่อประกอบการอธิบายให้เข้าใจมากขึ้น เมื่อพิจารณาในส่วนที่รับแรงอัดจะมีแรงจาก F_1 และ F_2 ส่งถ่ายแรงในชิ้นส่วนบน เกิดเป็นแรงสะสมในชิ้นส่วนรับแรงอัดทำให้ชิ้นส่วนถูกดันออกทางด้านข้างไปทางแรงที่สะสมในส่วนปลาย



รูปที่ 3.3 ภาพขยายแสดงการโก่งเดาะของโครงข้อหมุนขณะรับน้ำหนักกระทำเมื่อมองจากมุมบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยแรงสะสมทั้งหมดคือ $F_1 + F_2$ แรงที่เกิดขึ้น F_1 และ F_2 ขึ้นอยู่กับลักษณะของโครงข้อ
หมุนซึ่ง F_1 อาจมากกว่าหรือน้อยกว่า F_2 ในการศึกษาจะทดสอบในกรณีที่ $F_1 > F_2$ เพราะควบคุมตัว
แปรและการทดสอบได้ง่ายกว่า



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การวิเคราะห์ระยะการโก่งทางข้าง (LATERAL BUCKLING)

4.1 การวิเคราะห์โดยทฤษฎีอีลาสติก

งานวิจัยเรื่องระยะแอนตัวของการโก่งดัดด้านข้างเราสามารถทดลองได้จากทฤษฎีได้หลายทฤษฎีโดยในขั้นต้นจะใช้ทฤษฎีอีลาสติก ในการพิจารณาถึงระยะค้ำด้านข้าง เพื่อให้ได้ค่าระยะที่ก่อให้เกิดการโก่งตัวมากที่สุด โดยทฤษฎีอีลาสติก ได้ทำการจำลอง โครงข้อหมุนให้มีพฤติกรรมมารับแรงตามแนวแกนของแท่งวัสดุในลักษณะที่แรงกระทำตามแนวแกนจะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดความยาวของแท่งวัสดุ และเมื่อวัสดุนั้นรับแรงกระทำตามแนวแกนในปริมาณที่แตกต่าง ก็จะทำให้เกิดการโก่งคาะเนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกนที่แตกต่างกัน ไปด้วย ซึ่งตรงจุดนี้ทำให้เราสามารถบอกได้ว่าระยะสูงสุดของการโก่งคาะเนื่องจากแรงกระทำตามแนวแกนมีค่าเป็นเท่าไรซึ่งหาผลสรุปจากการแก้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์กับระยะแอนตัว ของแท่งวัสดุผนวกกับวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ก็จะทำให้ได้ผลสรุปออกมา

ผลงานชิ้นนี้ได้ทำการทดลองเพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เกิดขึ้น ณ จุดที่มีการเปลี่ยนแปลงแรงกระทำตามแนวแกน (ซึ่งในความเป็นจริงก็คือจุดต่อของ โครงข้อหมุนนั่นเอง) กับการโก่งตัวทางด้านข้างที่เกิดขึ้น

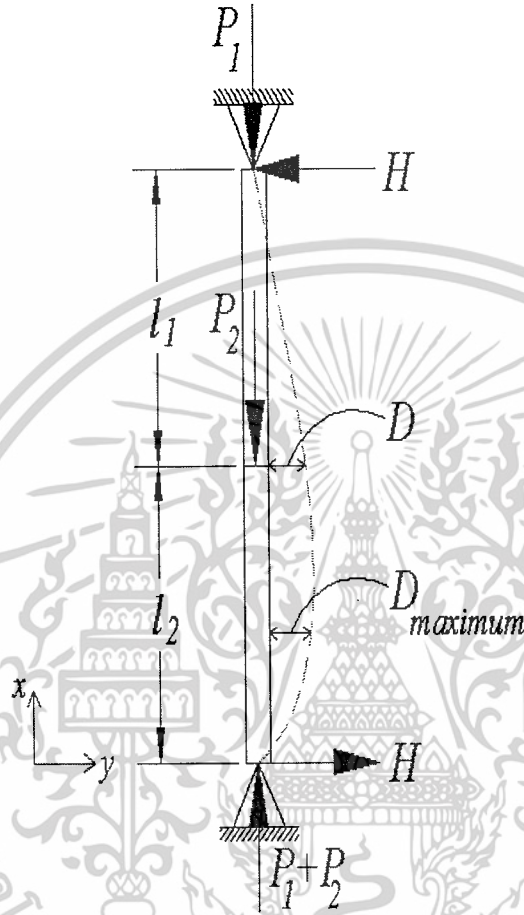
การวิเคราะห์เราจะเปรียบเทียบให้แบบจำลองของ โครงสร้างเป็น โครงสร้างประเภทเสา และอยู่ภายใต้สมมติฐานดังต่อไปนี้

1. แรงกระทำตามแนวแกนทั้งหมดเป็นแรงอัด
2. โครงสร้างเสาที่ทำการวิเคราะห์มีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) ตลอดความยาว
3. เส้นโค้งการโก่งคาะมีลักษณะเป็น โค้งเดี่ยว (Single Curve) ที่มีการโก่งคาะสูงสุดอยู่ในช่วงปลายใกล้ด้านที่รับแรงมากของความยาว (ตามรูปที่ 3 ในช่วง L_2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.1 การใช้ทฤษฎีอิลาสติกในการวิเคราะห์แรงตามแนวแกน

สมการ 1 แรงตามแนวแกนบริเวณกลางช่วง (2 แรงตามแนวแกน)



รูปที่ 4.1 ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 1 แรง

ในช่วงที่ 1

จากรูปเราจะได้สมการที่เกิดจากโมเมนต์ คือ

$$EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P_1 y_1 - \frac{DP_2}{l} (l-x)$$

$$EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P_1 y_2 - \frac{DP_2}{l} (l-x) + P_2 (D - y_2)$$

โดยค่า D คือระยะการโก่งเนื่องมาจากแรงกระทำตามแนวแกน P_2

เราจะได้สมการ โมเมนต์ของแรงในแนวแกน 2 แรง

จากสมการอนุพันธ์อันดับสองของพจน์ y_1 คือ

$$EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P_1 y_1 - \frac{DP_2}{l} (l-x) \tag{4.1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{P_1 y_1}{EI_1} - \frac{DP_2}{lEI_1}(l-x) \quad (4.2)$$

โดย $k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}, k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}, k_3^2 = \frac{P_1+P_2}{EI_2}, k_4^2 = \frac{P_2}{EI_1}$

แทนค่าในสมการ(4.2) จะได้

$$y_1'' + k_1^2 y_1 = -k_4^2 D + \frac{k_4^2 x D}{l} \quad (4.3)$$

จากสมการช่วย

$$m^2 + k_1^2 = 0$$

จะได้ $m = \pm k_1 i$

ดังนั้น $y_c = c_1 \cos k_1 x + c_2 \sin k_1 x$

หาค่า y_p โดยสมมติสมการ

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p'' = 0$$

แทนค่าในสมการ (4.3) จะได้

$$k_1^2 (Ax + B) = -k_4^2 D + \frac{k_4^2 D}{l} x$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$B = -\frac{k_4^2 D}{k_1^2}$$

$$A = \frac{k_4^2 D}{lk_1^2}$$

แต่จากสมการ $y = y_c + y_p$ ดังนั้น

$$y_1 = c_1 \cos k_1 x + c_2 \sin k_1 x + \frac{Dk_4^2}{lk_1^2}(l-x) \quad (4.4)$$

หาค่า c_1, c_2 จาก

$$(y_1)_{x=l} = 0 \text{ และ } (y_1)_{x=l_2} = D$$

แทนค่าใน(4.4) จะได้

$$c_1 = -c_2 \tan k_1 l$$

และ $c_2 = -\frac{D(k_1^2 l + k_4^2 l_1) \cos k_1 l}{k_1^2 \sin k_1 l_1}$

ดังนั้นเราจะได้สมการ y_1 ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_1 = -\frac{D(k_1^2 l + k_4^2 l_1) \cos k_1 l}{k_1^2 \sin k_1 l_1} \sin k_1 x - c_1 \tan k_1 l_1 \cos k_1 x - \frac{Dk_4^2}{lk_1^2} (l-x)$$

ในช่วงที่ 2

เราจะได้สมการโมเมนต์ของแรงในแนวแกน 2 แรง ของสมการอนุพันธ์กำลังสองของพจน์ y_2 คือ

$$EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P_1 y_2 - \frac{DP_2}{l} (l-x) + P_2 (D - y_2)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{-P_1 y_2}{EI_2} - \frac{DP_2}{EI_2 l} + \frac{P_2 D}{EI_2} - \frac{P_2 y_2}{EI_2}$$

ให้ $k_1^2 = \frac{P_1}{EI_1}, k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}, k_3^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI_2}, k_4^2 = \frac{P_2}{EI_1}$

แทนค่าในสมการ

$$y_2'' = -\frac{(P_1 + P_2)}{EI_2} y_2 + \frac{DP_2}{lEI_2} x$$

$$y_2'' = -k_3^2 y_2 + \frac{D}{l} k_2^2 x$$

$$y_2'' + k_3^2 y_2 = \frac{D}{l} k_2^2 x \quad (4.5)$$

จากสมการช่วย

$$m^2 + k_3^2 = 0$$

จะได้ $m = \pm k_3 i$

ดังนั้น $y_c = c_1 \cos k_3 x + c_2 \sin k_3 x$

หาค่า y_p โดยสมมติสมการ

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p'' = 0$$

แทนค่าในสมการ(4.5) จะได้

$$k_3^2 (Ax + B) = \frac{D}{l} k_2^2 x$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$A = \frac{Dk_2^2}{lk_3^2}, B = 0$$

แต่จากสมการ $y = y_c + y_p$

ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_2 = c_1 \cos k_3 x + c_2 \sin k_3 x + \frac{Dk_2^2}{lk_3^2} x \quad (4.6)$$

หาค่า c_1, c_2 จากเงื่อนไข

$$(y_2)_{x=0} = 0 \text{ และ } (y_2)_{x=l_2} = D$$

แทนค่าจะได้

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{D(k_3^2 - k_2^2 l_2)}{lk_3^2 \sin k_3 l_2}$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ y_2 ดังนี้

$$y_2 = \frac{D(k_3^2 - k_2^2 l_2)}{lk_3^2 \sin k_3 l_2} \sin k_3 x + \frac{Dk_2^2}{lk_3^2} x \quad (4.7)$$

เราสามารถทำการ trial and error คำน้อยๆของแรง $P_1 + P_2$ โดยแทนลงในสมการ

$$\frac{k_4^2}{k_1^2} - \frac{k_1 l + k_4 l_1}{k_1 \tan k_1 l_1} = \frac{k_2^2}{k_3^2} + \frac{k_3 l - k_2^2 l_2}{k_3 \tan k_3 l_2}$$

ซึ่งสมการได้มาจากการแทน

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_2} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=l_2}$$

เราจะได้สรุปได้เป็นสมการ

$$(P_1 + P_2)_{CR} = \frac{\pi^2 EI_2}{L_n^2} \quad (4.8)$$

ซึ่ง L_n คือ ความยาวหลังคูณค่าปรับลด

สำหรับค่าปรับลดสามารถหาได้ดังตาราง

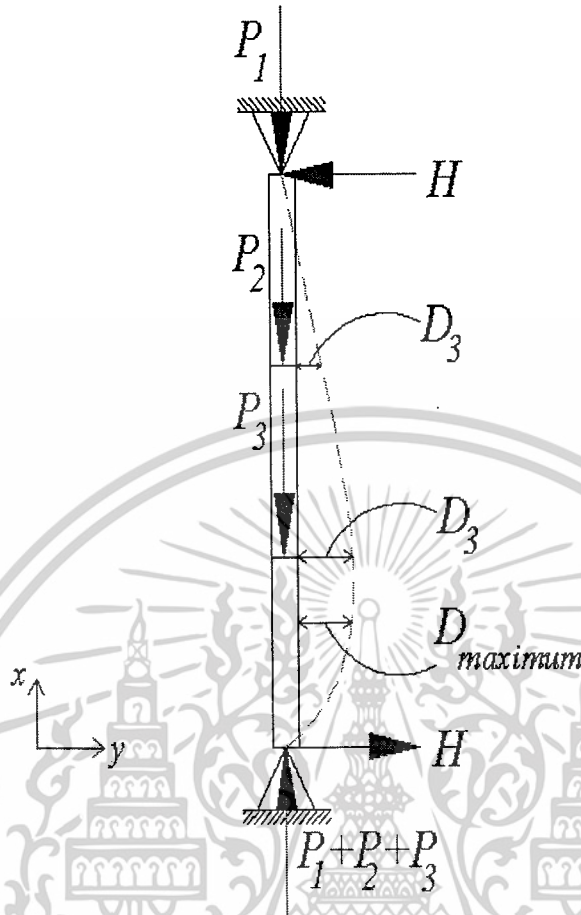
ตารางที่ 4.1 แสดงค่า $\frac{L_n}{l}$ (Stephon P. Timochenko, 1963)[3]

n	m					
	1	1.25	1.5	1.75	2	3
1	1	0.95	0.91	0.89	0.87	0.82
1.25	1.06	1.005	0.97	0.94	0.915	
1.5	1.12	1.06	1.02	0.99	0.96	
1.75	1.18	1.11	1.07	1.04	1.005	
2	1.24	1.16	1.12	1.08	1.05	

หมายเหตุ ตารางดังกล่าวใช้เมื่อ $l_1 = l_2$ โดยที่ $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$; $n = \frac{I_2}{I_1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 2 แรง

สมการ 2 แรงตามแนวแกนบริเวณกลางช่วง (3 แรงตามแนวแกน)

$$M_1 = -P_1 y_1 - H(l - x_1) \quad ; \quad \frac{2l}{3} \leq x_1 \leq l$$

$$M_2 = -P_1 y_2 - P_2(y_2 - D_1) - H(l - x_2) \quad ; \quad \frac{l}{3} \leq x_2 \leq \frac{2l}{3}$$

$$M_3 = -P_1 y_3 - P_2(y_3 - D_1) - P_3(y_3 - D_2) - H(l - x_3) \quad ; \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{l}{3}$$

จาก $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_1 y_1 - \left(\frac{P_2 D_1 + P_3 D_2}{l} \right) (l - x_1)$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-P_1 y_1}{EI} + \left(\frac{P_2 D_1 + P_3 D_2}{EI} \right) \left(\frac{x_1}{l} - 1 \right)$$

กำหนดให้

$$k_1^2 = \frac{P_1}{EI}, \quad k_2^2 = \left(\frac{P_1 + P_2}{EI} \right), \quad k_3^2 = \left(\frac{P_1 + P_2 + P_3}{EI} \right), \quad k_4^2 = \frac{P_2}{EI}, \quad k_5^2 = \frac{P_3}{EI}$$

จะได้ว่า

$$y_1'' = -k_1^2 y_1 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \left(\frac{x_1}{l} - 1 \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_1'' + k_1^2 y_1 = (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \left(\frac{x_1}{l} - 1 \right)$$

$$\therefore y_c = c_1 \sin k_1 x_1 + c_2 \cos k_1 x_1$$

$$\text{ให้ค่า } y_p = Ax_1 + B$$

$$\text{ดังนั้น } y'' = 0$$

$$k_1^2 (Ax_1 + B) = \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{l} \right) (x_1) - (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)$$

$$A = \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{lk_1^2} \right)$$

$$B = - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{lk_1^2} \right)$$

$$\therefore y_1 = c_1 \sin k_1 x_1 + c_2 \cos k_1 x_1 + \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{lk_1^2} \right) (x_1) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{k_1^2} \right)$$

จากเงื่อนไขที่ว่า $(y_1)_{x_1=l} = 0$ และ $(y_1)_{x_1=\frac{2l}{3}} = D_1$

$$D_1 = \left(-c_2 \frac{\cos k_1 l}{\sin k_1 l} \right) \sin k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) + c_2 \cos k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) + \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{lk_1^2} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{k_1^2} \right)$$

$$D_1 = c_2 \cos k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) - c_2 \frac{\cos k_1 l}{\sin k_1 l} \left(\sin k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) \right) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2} \right)$$

นำ $\sin k_1 l$ คูณทั้ง 2 ข้างของสมการข้างต้น

$$\text{จะได้ } D_1 \sin k_1 l = c_2 \cos k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) \sin k_1 l - c_2 (\cos k_1 l) \left(\sin k_1 \left(\frac{2l}{3} \right) \right) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2} \right) \sin k_1 l$$

$$D_1 \sin k_1 l = c_2 \sin k_1 \left(\frac{l}{3} \right) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2} \right) \sin k_1 l$$

$$\text{ดังนั้น } c_2 = \left(\frac{D_1 + \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2} \right)}{\sin \frac{k_1 l}{3}} \right) (\sin k_1 l)$$

$$c_2 = \left(\frac{3k_1^2 D_1 + k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2 \sin \frac{k_1 l}{3}} \right) (\sin k_1 l)$$

$$\text{หรือ } c_2 = \left[\frac{(3k_1^2 + k_4^2) D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2 \sin \frac{k_1 l}{3}} \right] (\sin k_1 l)$$

ดังนั้นจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\therefore y_1 = -\left[\frac{(3k_1^2 + k_4^2)D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2 \sin \frac{k_1 l}{3}}\right](\sin k_1 l) \left(\frac{\cos(k_1 l)}{\sin(k_1 l)}\right) +$$

$$\left[\frac{(3k_1^2 + k_4^2)D_1 + k_5^2 D_2}{3k_1^2 \sin \frac{k_1 l}{3}}\right](\sin k_1 l)(\cos(k_1 x_1)) + \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{lk_1^2}\right)(x_1) - \left(\frac{k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2}{k_1^2}\right)$$

สำหรับชั้นที่ 2

$$y_2'' = -k_2^2 y_2 + k_4^2 D_1 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \left(\frac{x_2}{l} - 1\right)$$

$$y_2'' + k_2^2 y_2 = k_4^2 D_1 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \left(\frac{x_2}{l} - 1\right)$$

$$\therefore y_c = c_3 \sin k_2 x_2 + c_4 \cos k_2 x_2$$

ให้ค่า $y_p = Ax_1 + B$

ดังนั้น $y'' = 0$

$$k_2^2 (Ax + B) = k_4^2 D_1 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \left(\frac{x_2}{l} - 1\right)$$

ดังนั้นเราจะได้

$$A = \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{k_2^2 l}$$

$$B = -\frac{k_5^2}{k_2^2} D_2$$

$$\therefore y_3 = c_3 \sin k_2 x_2 + c_4 \cos k_2 x_2 + \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)x}{k_2^2 l} - \frac{k_5^2}{k_2^2} D_2$$

จากเงื่อนไขที่ว่า $(y)_{x=\frac{2l}{3}} = D_1$ และ $(y)_{x=\frac{l}{3}} = D_2$

จะได้

$$D_1 = c_3 \sin \frac{(2k_2 l)}{3} + c_4 \cos \frac{(2k_2 l)}{3} + \frac{2(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{3k_2^2} - \frac{k_5^2}{k_2^2} D_2 \quad (4.9)$$

และ

$$D_2 = c_3 \sin \frac{(k_2 l)}{3} + c_4 \cos \frac{(k_2 l)}{3} + \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{3k_2^2} - \frac{k_5^2}{k_2^2} D_2 \quad (4.10)$$

นำ $\frac{\sin \frac{(2k_2 l)}{3}}{\sin \frac{(k_2 l)}{3}}$ คูณตลอดสมการ(4.10) จะได้

กำหนดให้ค่า $y_p = Ax_1 + B$

ดังนั้น $y'' = 0$

$$k_3^2(Ax + B) = k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)\left(\frac{x_3}{l} - 1\right)$$

ดังนั้น

$$A = \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{k_3^2 l}$$

$B = 0$

จะได้

$$\therefore y_3 = c_5 \sin k_3 x_3 + c_6 \cos k_3 x_3 + \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{k_3^2 l} x_3$$

แทนเงื่อนไขที่ว่า $(y_1)_{x_1=0} = 0$ และ $(y_1)_{x_1=\frac{l}{3}} = D_2$

จะได้

$$D_2 = c_5 \sin\left(\frac{k_3 l}{3}\right) + \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{3k_3^2}$$

ดังนั้น

$$c_5 = \frac{(3k_3^2 - k_5^2)D_2 - k_4^2 D_1}{3k_3^2 \sin\left(\frac{k_3 l}{3}\right)}$$

ดังนั้น

$$\therefore y_3 = \frac{(3k_3^2 - k_5^2)D_2 - k_4^2 D_1}{3k_3^2 \sin\left(\frac{k_3 l}{3}\right)} \sin k_3 x_3 + \frac{(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{k_3^2 l} x$$

4.1.2 การวิเคราะห์หาพฤติกรรมของการโก่งเดาะและตำแหน่งที่เกิดการโก่งเดาะสูงสุด

จากสมมติฐานที่เราได้กำหนดเอาไว้ในช่วงต้นที่ว่า “เส้นโค้งการโก่งเดาะมีลักษณะเป็นโค้งเดี่ยว (Single Curve) ที่มีการโก่งเดาะสูงสุดอยู่ในช่วงปลายใกล้ด้านที่รับแรงมากของความยาว” (ตามรูปที่ 3 ในช่วง l_2) ซึ่งหลังจากที่เราทำการวิเคราะห์การโก่งตัวจนทำให้เราได้สมการระยะโก่งในรูปความสัมพันธ์ของตัวแปร y, x จากหัวข้อที่แล้ว ตามสมมติฐานการโก่งเดาะสูงสุดจะเกิดขึ้นในช่วงที่รับแรงกระทำตามแนวแกนมากกว่าซึ่งในที่นี้ก็คือช่วง $0 \leq x \leq l_2$ นั่นเอง และจากหลักการทางคณิตศาสตร์ที่ว่าเมื่อเราต้องการหาจุดสูงสุดของเส้นโค้งใดๆ ให้เราทำการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของสมการเส้นโค้งนั้นแล้วหาค่าอนุพันธ์ดังกล่าวมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากที่จุดสูงสุดของเส้นโค้งมีค่าความชันเท่ากับศูนย์นี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับกรณีแรงกระทำตามแนวแกน 1 แรงกลางช่วง (2 แรงในแนวแกน)

จากผลเฉลยของ 2 แรงในแนวแกน

ในช่วง $0 \leq x \leq l_2$

$$y_2 = \frac{D(k_3^2 - k_2^2 l_2)}{lk_3^2 \sin k_3 l_2} \sin k_3 x + \frac{Dk_2^2}{lk_3^2} x$$

โดยเราจะทำการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของผลเฉลยนี้และให้มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อหาดำแหน่งของการเกิดระยะ โกงสูงสุดที่เกิดขึ้นในช่วงนี้ตามสมมติฐาน

$$y_2 = \frac{D(k_3^2 l - k_2^2 l_2)}{k_3^2 l \sin k_3 l_2} \sin k_3 x + \left(\frac{D}{l} \right) \left(\frac{k_2}{k_3} \right)^2 x \quad ; 0 \leq x \leq l_2$$

$$\frac{\cos k_3 x}{k_3} = \frac{-\left(\frac{k_2}{k_3} \right)^2 \sin k_3 l_2}{k_3^2 l - k_2^2 l_2}$$

$$\cos k_3 x = \frac{k_3 \left(\frac{k_2}{k_3} \right)^2 \sin k_3 l_2}{k_2^2 l_2 - k_3^2 l}$$

$$\cos k_3 x = \frac{\sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{EI_2} \right) \left[\frac{P_2}{P_1 + P_2} \right] \sin k_3 l_2}}{\left(\frac{P_2}{EI_2} \right) l_2 - \left(\frac{P_1 + P_2}{EI_2} \right) l}$$

$$= \frac{EI_2 \sqrt{\left(\frac{P_1 + P_2}{EI_2} \right) \left[\frac{P_2}{P_1 + P_2} \right] \sin k_3 l_2}}{P_2 l_2 - P_1 l - P_2 l}$$

$$\cos k_3 x = \frac{\sqrt{EI_2}}{\sqrt{P_1 + P_2}} \frac{P_2 \sin k_3 l_2}{P_2 (l_2 - l) - P_1 l}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_3 x = \cos^{-1} \left[\frac{\frac{\sqrt{EI_2}}{\sqrt{P_1 + P_2}} P_2 \sin k_3 l_2}{P_2(l_2 - l) - P_1 l} \right]$$

$$x = \frac{1}{k_3} \cos^{-1} \left[\frac{-P_2 \sin k_3 l_2}{k_3(P_2 l_1 + P_1 l)} \right]; 0 \leq x \leq l_2$$

โดยที่ค่า $k_3^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI_2}$

ในการทำงานเดียวกันจากผลเฉลยของ 3 แรงในแนวแกน

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{((3k_3^2 - k_5^2)D_2 - k_4^2 D_1) \cos k_3 x_3 + (k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2)}{3k_3 \sin\left(\frac{k_3 l}{3}\right) + k_3^2 l}$$

ซึ่งท้ายสุดจะได้ผลสรุปสมการของตำแหน่งที่เกิดการโก่งสูงสุดของแรงสะสมตามแนวแกน 3 แรงคือ

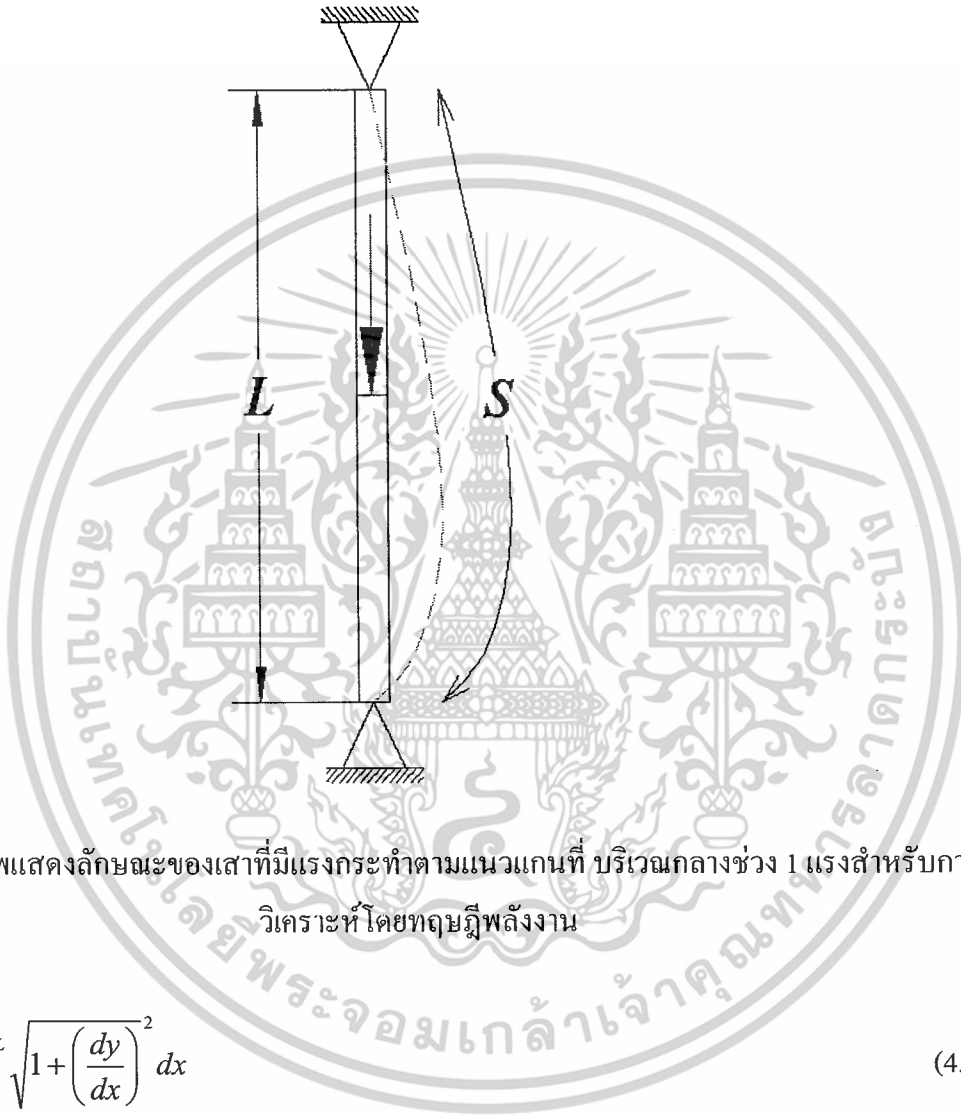
$$x_3 = \frac{1}{k_3} \cos^{-1} \left(\frac{-3(k_4^2 D_1 + k_5^2 D_2) \sin \frac{k_3 l}{3}}{k_3 l ((3k_3^2 - k_5^2) D_2 - k_4^2 D_1) \cos k_3 x_3} \right)$$

4.2 การวิเคราะห์โดยทฤษฎีพลังงาน

การวิเคราะห์โดยทฤษฎีพลังงานมีหลักการคล้ายกับการวิเคราะห์โดยทฤษฎีelasติกแต่มีข้อแตกต่างกันในส่วนของสมการที่ใช้จะเป็นสมการในรูปแบบของพลังงานภายในของวัสดุหรือStrain Energy แต่ทั้งนี้แบบจำลองที่ใช้วิเคราะห์ก็ยังคงเป็นเช่นเดียวกับการวิเคราะห์โดยทฤษฎีelasติกซึ่งก็คือเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนบริเวณกลางช่วงเช่นเดิม

4.2.1 การใช้ทฤษฎีพลังงานในการวิเคราะห์แรงตามแนวแกน

สมการ 1 แรงตามแนวแกนบริเวณกลางช่วง



รูปที่ 4.3 ภาพแสดงลักษณะของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนที่ บริเวณกลางช่วง 1 แรงสำหรับการวิเคราะห์โดยทฤษฎีพลังงาน

$$\text{จากรูป } S = \int_b^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4.13)$$

จากการกระจายเลขยกกำลัง

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$

ถ้าเราไม่พิจารณาพจน์ที่มีค่าน้อย โดยพิจารณาเฉพาะ 2 พจน์แรก สมการจะเหลือเพียง

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b \quad (4.14)$$

แทนค่า $a = 1, b = \frac{dy}{dx} = y', n = \frac{1}{2}$ ลงในสมการ(4.14) จะได้

$$\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{(y')^2}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และแทนในสมการ (4.13) จะได้

$$S = \int_0^L \left(1 + \frac{(y')^2}{2} \right) dx$$

แต่จากรูป

$$\lambda = S - L = \int_0^L \left(1 + \frac{(y')^2}{2} \right) dx - \int_0^L (1) dx$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

ดังนั้น

$$\Delta W = P \lambda = \frac{P}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

จากพลังงานภายในที่เกิดจากการกระทำของโมเมนต์

$$U = \frac{1}{2} M \theta$$

ซึ่งค่า U หาจากพื้นที่ใต้กราฟระหว่าง M และ θ

เนื่องจากโมเมนต์ที่กระทำนั้นไม่สม่ำเสมอ ดังนั้น U รวมที่เกิดในชิ้นส่วนต้องมาจากโมเมนต์ที่กระทำจากชิ้นเล็กๆ ดังนั้นเราจะได้

$$dU = \frac{1}{2} M d\theta$$

ดังนั้น

$$U = \frac{1}{2} \int M d\theta$$

จาก

$$\theta = \frac{ML}{EI} \text{ แทนลงในสมการได้}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

ถ้าสมมติให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

จากสมการ

$$dU = \frac{1}{2}Md\theta$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{d\theta^2}{dx} \left(\frac{EI}{2} \right) dx$$

$$\Delta U = \int \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \left(\frac{EI}{2} \right) dx = \int (y'')^2 \left(\frac{EI}{2} \right) dx$$

เงื่อนไขและขอบเขต

เนื่องจากทฤษฎีพลังงานต้องใช้ค่า deflection ในการคำนวณ ดังนั้นเราจะมีสมมติค่า y เพื่อใช้ในการคำนวณ

เนื่องจากพฤติกรรมการรับแรงอัดจะมีลักษณะเป็นรูปแบบทางตรีโกณมิติโดยอยู่ในรูปอนุกรมดังนี้คือ

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

จากการศึกษาของ stephen P. timoshenko ได้กำหนด $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่

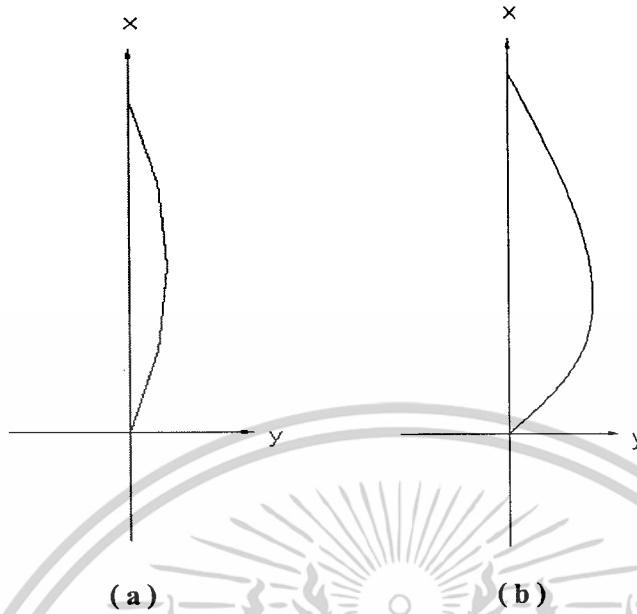
เสาแอนตัวสูงสุดที่กึ่งกลางแต่หากพิจารณาจากรูปแล้วจะพบว่าควรสมมติ $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

มากกว่าเพราะเสาจะมีพฤติกรรมแอนตัวไปทางแรงที่มากกว่า ดังแสดงค่าของ

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \text{ จึงน่าจะใกล้เคียงมากกว่าค่าของ } y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} \text{ ในรูป}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 ภาพแสดงเส้นโค้ง (a) $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ (b) $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

ซึ่งกราฟ $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$ เป็นกราฟที่เกิดจากการรวมค่ากราฟของ $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ และ $y = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$ ทำให้มีลักษณะแอนตัวไปทางส่วนที่แรงมากกว่า

การพิจารณาแรงกระทำ 2 แรงในแนวแกน

จากการศึกษาของ Stephon P. Timochenko ได้ศึกษาถึงแรงสะสมตามแนวแกนโดยสมมติสม

การการแอนตัวเป็น $y = a_2 \sin \frac{\pi x}{l}$

จาก ทฤษฎีพลังงานโดยสมมติ Deflection

$$y = D \sin \frac{\pi x}{l} \text{ เมื่อ } l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

$$M_1 = P_1 y + \frac{DP_2 x}{l} (l - x)$$

$$M_2 = (P_1 + P_2) y - \frac{DP_2 x}{l}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\Delta u = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_1^2 dx}{2EI_1} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2^2 dx}{2EI_2}$$

$$= \frac{D^2}{2EI_1} \left(\frac{P_1^2 l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} + \frac{P_1 P_2 2l}{\pi^2} \right) + \frac{D^2}{2EI_2} \left((P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right)$$

$$\Delta T = \frac{P_1}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \frac{P_2}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{D^2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

จาก $\Delta u = \Delta T$ จะได้

$$\frac{D^2}{2EI_1} \left(\frac{P_1^2 l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} + \frac{P_1 P_2 2l}{\pi^2} \right) + \frac{D^2}{2EI_2} \left((P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right) = \frac{D^2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

เอา EI_2 คูณตลอด

$$\frac{I_2}{2I_1} \left(\frac{P_1^2 l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} + \frac{P_1 P_2 2l}{\pi^2} \right) + \frac{1}{2} \left((P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

แทนค่า $\frac{l}{2} = \frac{l}{1}$

$$\frac{n}{2} \left(\frac{P_1^2 l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} + \frac{P_1 P_2 2l}{\pi^2} \right) + \frac{1}{2} \left((P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

เอา P_1^2 ทหารตลอด

$$\frac{n}{2} \left(\frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{P_1^2 24} + \frac{P_2 2l}{P_1 \pi^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{P_1 + P_2}{P_1} \right)^2 \frac{l}{4} + \frac{P_2^2 l}{P_1^2 24} - \frac{P_2 (P_1 + P_2) 2l}{P_1^2 \pi^2} \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l P_1^2} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

เอา l ทหารตลอด

$$\frac{n}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{P_2^2}{24 P_1^2} + \frac{2 P_2}{P_1 \pi^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{P_1 + P_2}{P_1} \right)^2 \frac{1}{4} + \frac{P_2^2}{24 P_1^2} - \frac{2 P_2 (P_1 + P_2)}{P_1^2 \pi^2} \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l^2 P_1^2} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

$$\frac{n}{2} \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{P_2 + P_1 - P_1}{P_1} \right)^2 \left(\frac{1}{24} \right) + \left(\frac{2 P_2 + 2 P_1 - 2 P_1}{P_1 \pi^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{P_1 + P_2}{P_1} \right)^2 + \frac{(P_2 + P_1 - P_1)^2}{24 P_1^2} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{P_1 + P_2}{P_1} \right) \left(\frac{P_2 + P_1 - P_1}{P_1} \right) \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l^2 P_1^2} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

แทนค่า $\frac{P_1 + P_2}{P_1} = m$ ในสมการข้างต้น

$$\frac{n}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{(m-1)^2}{24} + \frac{2}{\pi^2} (m-1) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{4} + \frac{(m-1)^2}{24} - \frac{2}{\pi^2} m(m-1) \right) = \frac{EI_2 \pi^2}{4l^2 P_1^2} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

นำ 8 คูณตลอด

$$n \left(1 + \frac{(m-1)^2}{6} + \frac{8}{\pi^2} (m-1) \right) + \left(m^2 + \frac{(m-1)^2}{6} - \frac{8}{\pi^2} m(m-1) \right) = \frac{2EI_2 \pi^2}{l^2 P_1^2} \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)$$

แทน $P_1 = \frac{P_1 + P_2}{m}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
n\left(1 + \frac{(m-1)^2}{6} + \frac{8}{\pi^2}(m-1)\right) + \left(m^2 + \frac{(m-1)^2}{6} - \frac{8}{\pi^2}m(m-1)\right) &= \frac{EI_2\pi^2 m (P_1 + P_2 + P_1)}{l^2 P_1^2 (P_1 + P_2) P_1} \\
&= \frac{EI_2\pi^2}{l^2} \left(\frac{P_1 + P_2}{(P_1 + P_2) P_1} + \frac{P_1}{(P_1 + P_2) P_1} \right) m \\
&= \frac{EI_2\pi^2}{l^2} \left(\frac{m}{(P_1 + P_2)} + \frac{1}{(P_1 + P_2)} \right) m \\
\left(m^2 + \frac{(m-1)^2}{6} - \frac{8}{\pi^2}m(m-1)\right) + n\left(1 + \frac{(m-1)^2}{6} + \frac{8}{\pi^2}(m-1)\right) &= \frac{EI_2\pi^2 m(m+1)}{l^2 (P_1 + P_2)} \\
\therefore (P_1 + P_2)_{CR} &= \frac{\left(\frac{EI_2\pi^2}{l^2}\right)(m+1)}{m + \frac{(m-1)^2}{6m} - \frac{8}{\pi^2} \frac{(m-1)}{m} + n\left(\frac{1}{m} + \frac{(m-1)^2}{6m} + \frac{8}{\pi^2} \frac{(m-1)}{m}\right)}
\end{aligned}$$

สรุป

$$\therefore (P_1 + P_2)_{CR} = \frac{\left(\frac{EI_2\pi^2}{l^2}\right)(m+1)}{m + \frac{m(m-1)^2}{6} - \frac{8}{\pi^2} \frac{(m-1)}{m} + n\left(\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)^2}{6} + \frac{8}{\pi^2} \frac{(m-1)}{m}\right)}$$

เป็นสมการที่ได้จากการศึกษาของ Stephon P. Timochenko

จากสมมติฐานข้างต้น เราให้ค่าการแอ่นตัว $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

จาก $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

ดังนั้นจะได้

$$y' = a_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \left(\frac{2\pi}{L}\right) \cos \frac{2\pi x}{L}$$

$$y'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - 4 \frac{\pi^2}{L^2} a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

จากสมการ

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx \text{ จะได้}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 4a_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

ในกรณีเดียวกัน

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 4a_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

จาก $\Delta W = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

จะได้ $\Delta W = \frac{P_1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2) + \frac{P_2}{8} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$

และจาก $\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx$

จะได้ $\Delta U = \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1^2 + 16a_2^2)$

จากกฎของพลังงาน $\Delta W = \Delta U$

$$\Delta U - \Delta W = \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1^2 + 16a_2^2) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (P_1 + \frac{P_2}{2}) (a_1^2 + 4a_2^2) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการพบว่ามี 2 ตัวแปรคือ a_1 และ a_2 เป็นตัวแปรเพิ่มดังนั้นเราจะแก้ปัญหาโดยทำให้ค่าแรงกระทำต่ำสุดในการหาค่าแรงกระทำวิกฤตจะทำให้สามารถแก้สมการเพื่อหาแรงกระทำวิกฤตได้ดังนี้

$$\frac{\partial P}{\partial a_i} = 0 \text{ หรือ } \frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_i} = 0$$

ผลที่ได้จะอยู่ในรูปสมการ homogenous ในเทอม a_i ซึ่งทุกค่าของ a_i เมื่อหา determinant ของ $\frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_i} = 0$ ต้องเท่ากับ 0 จากการหาค่า determinant ทำให้เราสามารถคำนวณค่าของ P_{cr} ได้

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_1} = \frac{EI\pi^4}{2L^3} a_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{L}\right) (P_1 + \frac{P_2}{2}) a_1 = 0$$

จัดรูปสมการใหม่โดยให้ $P_e = \frac{EI\pi^2}{L^2}$

$$\text{ดังนั้น } \left(P_e \left(\frac{\pi^2}{2L}\right) - \left(\frac{\pi^2}{2L}\right) (P_1 + \frac{P_2}{2})\right) a_1 = 0$$

และ

$$\frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_2} = 8P_e \left(\frac{\pi^2}{L}\right) a_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L}\right) (P_1 + \frac{P_2}{2}) 8a_2 = 0$$

จัดรูป a_1 และ a_2 ในรูป determinant เพื่อแก้สมการ จะได้

$$\begin{vmatrix} \left(P_e \left(\frac{\pi^2}{2L}\right) - \left(\frac{\pi^2}{2L}\right) (P_1 + \frac{P_2}{2})\right) & 0 \\ 0 & \left(8P_e \left(\frac{\pi^2}{L}\right) - 2\left(\frac{\pi^2}{L}\right) (P_1 + \frac{P_2}{2})\right) \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ $P_1 + \frac{P_2}{2} = P_e$

หรือ $P_1 + \frac{P_2}{2} = EI \frac{\pi^2}{L^2}$

การหาค่าแ่งการแอ่นตัวสูงสุด โดยทฤษฎีพลังงานสามารถหาได้ดังนี้

จาก $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

การแอ่นตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = a_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \frac{\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} = 0$$

ดังนั้นจะได้

$$a_1 = -2a_2 \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\cos \frac{\pi x}{L}}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = -2 \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\cos \frac{\pi x}{L}}$$

และจากทฤษฎีพลังงาน

$$\Delta W = \Delta U$$

จะได้

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1^2 + 16a_2^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

จัดให้อยู่ในรูป $\frac{a_1}{a_2}$ ได้

$$\frac{EI\pi^2}{L^2} (a_1^2 + 16a_2^2) = \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

$$\frac{EI\pi^2}{L^2} = \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) \frac{(a_1^2 + 4a_2^2)}{(a_1^2 + 16a_2^2)}$$

ดังนั้น

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\left(4 - \left(\frac{16EI\pi^2}{L^2 \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)} \right) \right)}{\left(\frac{EI\pi^2}{L^2 \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right)} \right)}} \quad (4.15)$$

ซึ่งสมการที่ได้หาค่า x โดยการ Trial and error ของทั้ง 2 สมการ เนื่องจากไม่สามารถแก้สมการตรีโกณในรูป x ได้ และกรณีนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่ออัตราส่วนระหว่าง $\frac{a_1}{a_2}$ ต้องมากกว่าขึ้นไป เพราะหากค่าน้อยกว่านี้กราฟที่ได้จะไม่เป็นไปตามสมมติฐาน

สำหรับรูปภาพสามารถหาได้จากการแทนค่า x ในสมการของ y โดยที่เงื่อนไข a_1 และ a_2 ต้องเป็นดังสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_1 + a_2 = y$$

ทั้งนี้เนื่องจาก x คือค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นจากการรวมค่าแอมพลิจูด (Amplitude) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติของสมการ

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

การพิจารณาแรงกระทำ 3 แรงในแนวแกน

จากการสมมติค่าการแอ่นตัว $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

จาก $y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$

ดังนั้นจะได้

$$y' = a_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cos \frac{2\pi x}{L}$$

$$y'' = -a_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - 4 \frac{\pi^2}{L^2} a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 4a_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2L}{3}} (y')^2 dx$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2L}{3}} \left(\left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} \right) + a_2^2 \left(\frac{4\pi^2}{L^2} \right) \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{3}} (y')^2 dx$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right)$$

จาก $\Delta W = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\Delta W = \frac{P_1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2) + \frac{P_2}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right) + \frac{P_3}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right)$$

และจาก

$$\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L (y''')^2 dx$$

จะได้

$$\Delta U = \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1^2 + 16a_2^2)$$

จากกฎของพลังงาน

$$\Delta W - \Delta U = \frac{P_1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2) + \frac{P_2}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right) +$$

$$\frac{P_3}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(a_1^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + 4a_2^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \right) \right) - \frac{EI\pi^4}{4L^3} (a_1^2 + 16a_2^2) = 0$$

$$\text{จาก } \frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_1} = 0 \text{ และ } \frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_2} = 0$$

สามารถแก้สมการได้เป็น

$$P_1 + P_2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + P_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) = P_e$$

หาค่าแห่งการโก่งตัวสูงสุดได้

$$\text{จาก } y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

การแอ่นตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = a_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \frac{\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} = 0$$

ดังนั้นจะได้

$$a_1 = -2a_2 \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\cos \frac{\pi x}{L}}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{a_1}{a_2} = -2 \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\cos \frac{\pi x}{L}}$$

จากกฎของพลังงาน

$$\Delta W = \Delta U$$

จะได้

$$\frac{EI\pi^2}{L^2}(a_1^2 + 16a_2^2) = P_1(a_1^2 + 4a_2^2) + P_2(a_1^2(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) + 4a_2^2(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi})) + P_3(a_1^2(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) + 4a_2^2(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi}))$$

เอา a_1^2 หารตลอด

$$\frac{EI\pi^2}{L^2}(1 + 16\frac{a_2^2}{a_1^2}) = P_1(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}) + P_2((\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) + 4\frac{a_2^2}{a_1^2}(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi})) + P_3((\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) + 4\frac{a_2^2}{a_1^2}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi}))$$

และได้

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{(16\frac{EI\pi^2}{L^2}) - 4P_1 - 4P_2(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}) - 4P_3(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi})}{P_1 + P_2(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) + P_3(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}) - \frac{EI\pi^2}{L^2}}} \quad (4.16)$$

ซึ่งสมการที่ได้หาค่า x โดยการ Trial and error ของทั้ง 2 สมการ เนื่องจากไม่สามารถแก้สมการตรีโกณในรูป x ได้ และกรณีนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่ออัตราส่วนระหว่าง $\frac{a_1}{a_2}$ ต้องมากกว่าขึ้นไป เพราะหากค่าน้อยกว่านี้กราฟที่ได้จะไม่เป็นไปตามสมมติฐาน

สำหรับรูปกราฟสามารถหาได้จากการแทนค่า x ในสมการของ y โดยที่เงื่อนไข a_1 และ a_2 ต้องเป็นดังสมการ

$$a_1 + a_2 = y$$

ทั้งนี้เนื่องจาก x คือค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นจากการรวมค่าแอมพลิจูด (Amplitude) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติของสมการ

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การพิจารณาแรงกระทำ 4 แรงในแนวแกน

จาก

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (y')^2 dx$$

จะได้

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

และ

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3L}{4}} (y')^2 dx$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3L}{4}} \left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} + a_2^2 4 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{\pi^2}{4L} \left(a_1^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) + 3a_2^2 \right)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} (y')^2 dx$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(a_1^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 4a_2^2 \frac{\pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^2}{L} \right) (a_1^2 + 4a_2^2)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{4}} (y')^2 dx$$

จะได้

$$\lambda_4 = \frac{\pi^2}{4L} \left(a_1^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right) + a_2^2 \right)$$

จาก

$$\Delta W = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$$

จะได้

$$\Delta W = \left(\frac{\pi^2}{L} \right) \left(\left(\frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) + \frac{P_3}{8} + \frac{P_4}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right) \right) a_1^2 + \left(P_1 + \frac{3P_2}{4} + \frac{P_3}{2} + \frac{P_4}{4} \right) a_2^2 \right)$$

$$\text{และจาก } \Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L (y'')^2 dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{จะได้ } \Delta U = \frac{EI\pi^4}{4L^3}(a_1^2 + 16a_2^2)$$

จากกฎของพลังงาน

$$\Delta W = \Delta U$$

$$\text{และจาก } \frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_1} = 0 \text{ และ } \frac{\partial(\Delta U - P\lambda)}{\partial a_2} = 0$$

สามารถแก้สมการได้เป็น

$$P_1 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi}\right)P_2 + \frac{P_3}{2} + P_4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

การทดสอบการรับแรงอัด

5.1. กล่าวนำ

การทดสอบโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนโดยทั่วไปการทดสอบตลอดทั้งโครงสร้างสามารถทำได้ยาก เราจึงจำลองโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนในส่วนรับแรงอัดตลอดแนวโดยสมมติฐานเป็นเสาในการทดสอบการรับแรงสะสมตามแนวแกนของโครงสร้างแบบโครงข้อหมุน โดยทั้งนี้เราเลือกหน้าตัดแบบสี่เหลี่ยมเพื่อควบคุมทิศการโก่งตัวในการทดสอบเพื่อให้เหมาะสมกับเครื่องวัดและสามารถหาพฤติกรรมการโก่งตัวได้ง่าย ท้ายที่สุดการทดสอบก็จะทำให้ทราบถึงพฤติกรรมการโก่งตัวและตำแหน่งการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงานและนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าขั้นทางด้านข้างต่อไป ในการทดสอบจะแบ่งได้เป็น 2 หัวข้อ คือ การทดสอบเพื่อหาค่าโมดูลัสของวัสดุ และการทดสอบกำลังรับแรงอัดของแรงสะสมในแนวแกน

5.2. การทดสอบเพื่อหาค่าโมดูลัสของวัสดุ

วัตถุประสงค์

เพื่อหาโมดูลัส (E) ของอะลูมิเนียมไปใช้ในการคำนวณแรงสะสมในแนวแกน

5.2.1 รายการทดสอบ

อุปกรณ์ในการทดสอบ

1. อะลูมิเนียมแผ่นขนาดหน้าตัด 20.3 มิลลิเมตรหนา 0.6 มิลลิเมตร
2. เครื่องทดสอบรับแรงดึง (instron5566)

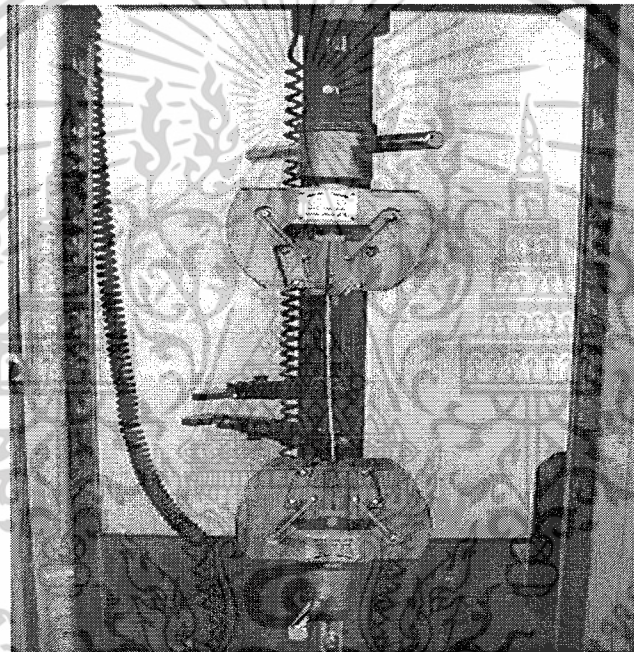
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2.2. การเตรียมวัสดุ

ใช้อะลูมิเนียมที่นำมาทดสอบตัดเป็นแผ่นขนาดหน้าตัด 20.3 มิลลิเมตรหนา 0.6 มิลลิเมตร ยาว 30 เซนติเมตร เพื่อใช้ในเครื่องทดสอบรับแรงดึงในการหาค่าโมดูลัสของอะลูมิเนียม

5.2.3. วิธีการทดสอบ

1. นำแผ่นอะลูมิเนียม เข้าเครื่องทดสอบรับแรงดึง
2. ตั้งค่าให้หัวจับพอดีกับแผ่นอะลูมิเนียม
3. ทดสอบและบันทึกค่าโมดูลัส



รูปที่ 5.1 แสดงการทดสอบหาค่าโมดูลัส

5.2.4. ผลการทดลอง

ผลการทดสอบหาค่า โมดูลัสของอะลูมิเนียมที่ใช้ทดสอบ

Section area (cm ²)	load at 0.5 mm (kgf)	load at 0.6 mm (kgf)	2%YD.STR (MPa)	Modulus (kg/cm ²)
0.1218	38.93	53.57	63.75	102,167

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3. การทดสอบกำลังรับแรงอัดของแรงผสมในแนวแกน

5.3.1 วัตถุประสงค์

เพื่อทดสอบกำลังรับแรงตามแนวแกนของแรง 2 แรงและหาการแอ่นตัวเนื่องจากการรับแรง ทั้งนี้เพื่อเปรียบเทียบพฤติกรรมกรรมการรับแรงที่หาค่าได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน

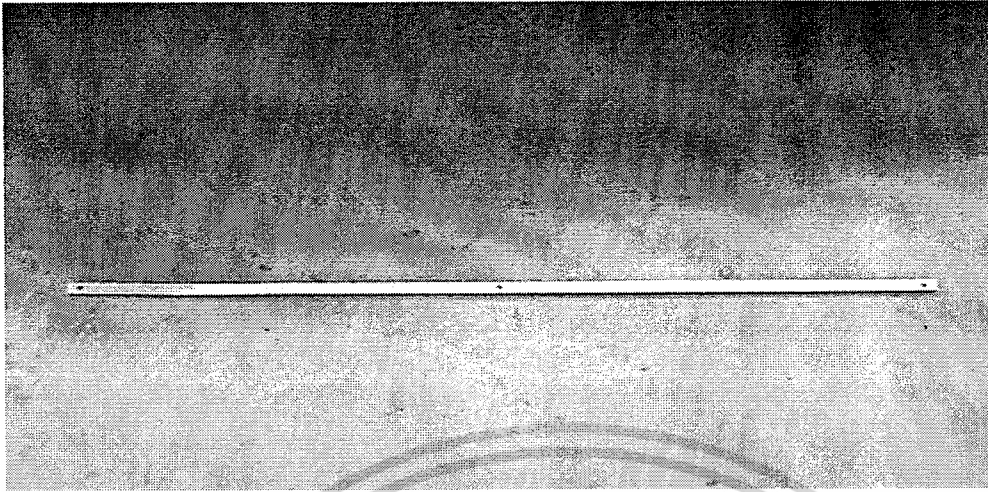
5.3.2 รายการทดสอบ

อุปกรณ์ในการทดสอบ

1. อะลูมิเนียมแบบกล่องหนา 1 มิลลิเมตรมีความกว้าง $\frac{1}{2}$ นิ้ว ยาว $\frac{1}{2}$ นิ้ว และสูง 85 เซนติเมตรเจาะรูขนาด 5 มิลลิเมตร ที่หัวท้ายและกลางแท่งอะลูมิเนียม เจาะ 3 ช่องสำหรับการทดสอบรับแรงผสม 2 แรงในแนวแกน และ 4 ช่องสำหรับรับแรงผสม 3 แรงในแนวแกน
2. ต้มน้ำหนักขนาด 5 กิโลกรัม
3. สลักเกลียวขนาด 5 มิลลิเมตรยาว 5 เซนติเมตร 3 ตัว
4. เครื่องทดสอบรับแรงกดขนาด 1 ตัน (instron5566)
5. ฐานทดสอบวัสดุแบบไม่รับโมเมนต์ 2 ชั้น

5.3.3. การเตรียมวัสดุ

เลือกใช้วัสดุเป็นอะลูมิเนียมเนื่องจากสามารถสังเกตพฤติกรรมการโก่งตัวได้ง่ายเพราะมีค่าโมดูลัสน้อยและมีลักษณะเป็นเนื้อเดียวกันใกล้เคียงกับสมมติฐาน โดยหน้าตัดอะลูมิเนียมเลือกใช้ขนาด $\frac{1}{2}$ นิ้ว x $\frac{1}{2}$ นิ้วหนา 0.6 มิลลิเมตรและยาว 85 เซนติเมตรเพราะสามารถทดสอบเห็นผลได้ง่ายและเอื้ออำนวยต่อการทดสอบ การเตรียมชิ้นทดสอบอะลูมิเนียม เตรียมการ โดยเจาะรูขนาด 5 มิลลิเมตรที่หัว กึ่งกลาง และท้ายของชิ้นทดสอบอะลูมิเนียมดังรูป



รูปที่ 5.2 แสดงวัสดุการทดสอบรับแรง 2 แรงในแนวแกน



รูปที่ 5.3 แสดงฐานรองรับที่ใช้ทดสอบ

จากรูปที่ 5.2 แสดงถึงการเตรียมชิ้นทดสอบอะลูมิเนียมของแรงสะสมตามแนวแกน 2 แรง สำหรับการเตรียมอุปกรณ์ฐานรองรับ โดยการใส่ฐานรองรับแบบหมุดมีรูเจาะขนาด 6 มิลลิเมตรเพื่อใส่สลักเกลียวขนาด 5 มิลลิเมตร ให้สามารถหมุนตัวอิสระได้โดยไม่เกิดโมเมนต์ตามลักษณะฐานรองรับแบบหมุด ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 5.3

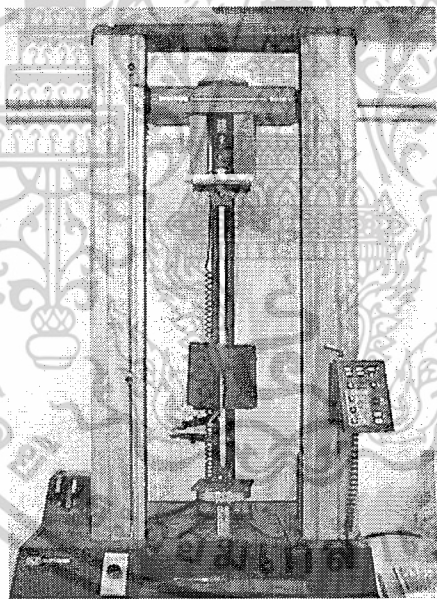
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3.4. วิธีการทดสอบ

ในการทดสอบเราจะแบ่งเป็น 2 กรณีคือพิจารณาแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน 3 แรงตามแนวแกนและการหาค่าโมดูลัสของวัสดุเพื่อใช้ในการคำนวณแบ่งดังต่อไปนี้ คือ

5.3.4.1 การทดลองการรับแรงอัด 2 แรงตามแนวแกน

1. ติดตั้งแท่งอะลูมิเนียมเข้ากับฐาน โดยใช้สลักเกลียวขนาด 5 มิลลิเมตรเป็นตัวยึดติดกับฐานแบบไม่รับโมเมนต์ และใส่สลักเกลียวไว้ที่กึ่งกลางเพื่อเตรียมแขวนน้ำหนัก
2. นำแท่งอะลูมิเนียมที่ติดตั้งเสร็จเรียบร้อยแล้วเข้ายังเครื่องอัดแรง และเปิดเครื่องอัดแรงให้ฐานของเครื่องอัดแรงสัมผัสกับฐานที่ติดตั้ง
3. นำตุ้มน้ำหนัก 5 กิโลกรัมแขวนเข้ากับสลักเกลียวที่กึ่งกลางทั้ง 2 ด้าน จะรวมได้ 10 กิโลกรัม
4. ทำการทดสอบโดยให้แรงเพิ่มขึ้น 10 กิโลกรัมต่อนาที



รูปที่ 5.4 แสดงการติดตั้งเพื่อทดสอบ 2 แรงในแนวแกน

5.3.4.2. การทดลองการรับแรงอัด3 แรงตามแนวแกน

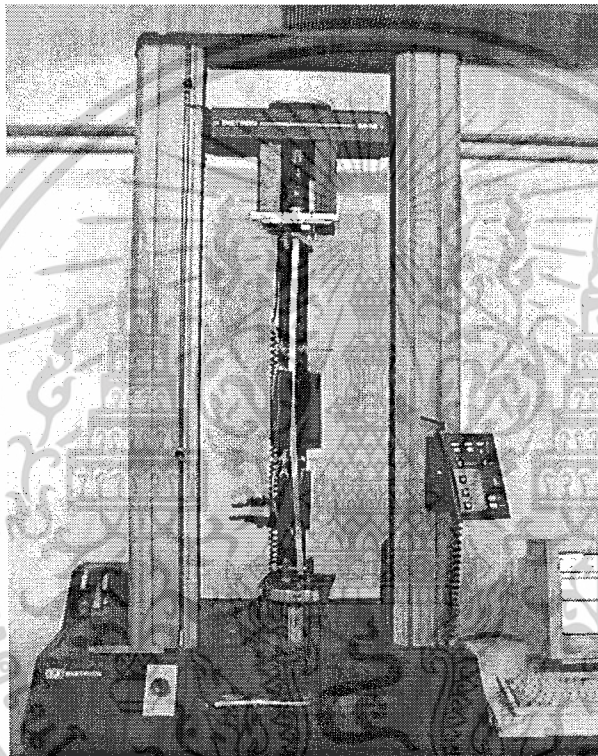
1. ติดตั้งแท่งอะลูมิเนียมเข้ากับฐาน โดยใช้สลักเกลียวขนาด 5 มิลลิเมตรเป็นตัวยึดติดกับฐานแบบไม่รับโมเมนต์ และใส่สลักเกลียวไว้ที่กึ่งกลางทั้ง 2 ช่องที่เตรียมไว้เพื่อเตรียมแขวนน้ำหนัก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. นำแท่งอะลูมิเนียมที่ติดตั้งเสร็จเรียบร้อยแล้วเข้ายังเครื่องอัดแรง และเปิดเครื่องอัดแรงให้ฐานของเครื่องอัดแรงสัมผัสกับฐานที่ติดตั้ง

3. นำตุ้มน้ำหนัก 5 กิโลกรัมแขวนเข้ากับสลักเกลียวที่ช่องบนทั้งสองข้างน้ำหนักรวมเป็น 10 กิโลกรัม ช่องล่างใส่น้ำหนักข้างละ 2 กิโลกรัมรวมเป็น 4 กิโลกรัมดังนั้นน้ำหนักรวมในแนวแกนจะเป็น 14 กิโลกรัม

4. ทำการทดสอบโดยให้แรงเพิ่มขึ้น 10 กิโลกรัมต่อนาที



รูปที่ 5.5 แสดงการติดตั้งเมื่อทดสอบ 3 แรงในแนวแกน

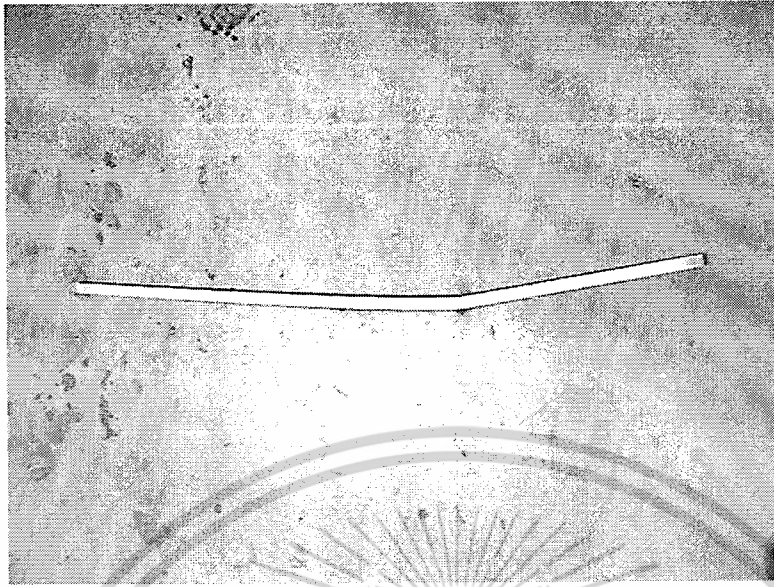
5.3.5. ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบ 2 แรงตามแนวแกน

จากผลการทดสอบได้ค่าของการรับแรง 2 แรงตามแนวแกน 2 ชั้นคือ

Number	Max Load (kgf)	Max disp (mm.)	BRK.Load (kgf)	BRK disp (mm.)	ULTLoad (kgf)	ULT disp (mm.)	Slope (kgf/mm.)
1.	47.31	1.496	47.3	1.508	47.31	1.496	43.81
2.	19.9	1.027	8.614	4.682	19.9	1.027	21.95
เฉลี่ย	33.61	1.262	27.96	3.095	33.61	1.262	32.88

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

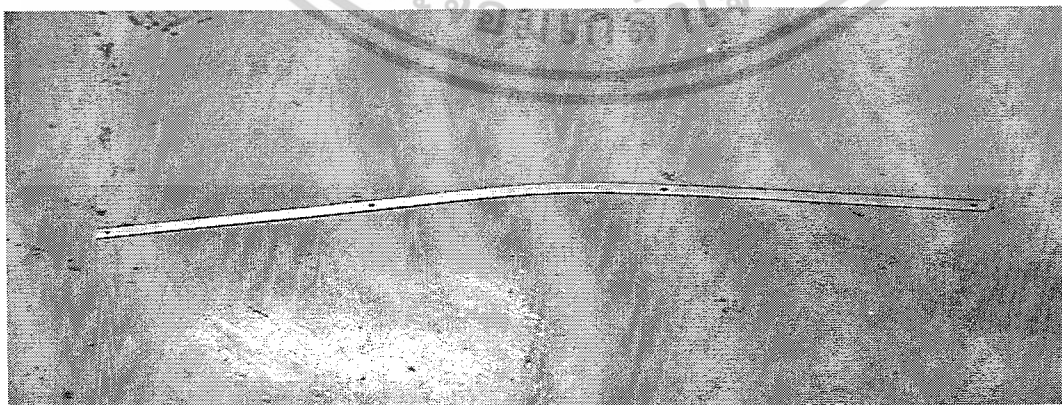


รูปที่ 5.6 แสดงการเสียรูปของการทดสอบแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน

ผลการทดสอบ 3 แรงตามแนวแกน

จากผลการทดสอบได้ค่าของการรับแรง 3 แรงตามแนวแกน 2 ชั้นคือ

Number	Max Load (kgf)	Max disp (mm.)	BRK.Load (kgf)	BRK disp (mm.)	ULTLoad (kgf)	ULT disp (mm.)	Slope (kgf/mm.)
1.	16.45	1.172	13.4	1.8	16.45	1.172	23.93
2.	39.42	1.122	39.42	1.122	39.42	1.122	62.93
เฉลี่ย	27.94	1.147	46.41	1.461	27.94	1.147	43.43



รูปที่ 5.7 แสดงการเสียรูปของการทดสอบแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6

สรุปและวิเคราะห์ผลการศึกษา

6.1. กล่าวนำ

จากการศึกษาแรงในโครงสร้างแบบโครงข้อหมุน เมื่อมีพฤติกรรมเป็นแรงสะสมตามแนวแกน โดยพิจารณาตลอดแนวในส่วนรับแรงอัดและจากพฤติกรรมการโก่งตัวของโครงสร้างรับแรงอัดโดยการจำลองเป็นเสารับแรงสะสมในแนวแกน ตามวัตถุประสงค์ข้างต้นคือ เพื่อหาระยะค้ำด้านข้างที่แท้จริงในโครงสร้างประเภทโครงข้อหมุน(Truss) ตามหลักการทางเสถียรภาพของโครงสร้าง (Stability) โดยเราจะเริ่มวิเคราะห์จากพฤติกรรมของเสาที่มีแรงกระทำตามแนวแกนเพิ่มเข้าไปบริเวณกลางช่วง ซึ่งมีพฤติกรรมคล้ายกับ โครงข้อหมุนตามที่ตั้งสมมติฐาน ตามข้อสรุปที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน รวมถึงจากผลการทดลอง จะสามารถแยกย่อยหัวข้อในการวิเคราะห์เปรียบเทียบออกเป็นหัวข้อใหญ่ๆ 2 หัวข้อดังนี้คือ

1. การเปรียบเทียบพฤติกรรมการโก่งตัวและตำแหน่งโก่งตัวสูงสุดที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน
2. การเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงาน การทดลอง และวิธีหน่วยแรงใช้งาน (ASD)

6.2. การเปรียบเทียบพฤติกรรมการโก่งตัวและตำแหน่งโก่งตัวสูงสุดที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน

ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างการนำเสนอการหาระยะที่เกิดการโก่งตัวสูงสุด โดยการเปรียบเทียบสมการที่หามาจากทฤษฎีอีลาสติกและพลังงานเราสามารถเปรียบเทียบแสดงดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 แสดงการเปรียบเทียบระยะที่เกิดการ โกงตัวสูงสุด เมื่อให้แรง P_1 เปลี่ยนแปลง

P_1 เปลี่ยนแปลง								Elastic	Energy	ผลต่าง
P_1 (kg)	P_2 (kg)	L(cm)	L_1 (cm)	L_2 (cm)	E(kg/cm ²)	I(cm ⁴)	k3	x(cm)	x(cm)	ผลต่าง
220	20	80	40	40	5000	0.981	0.221	7.1133	4.75	2.3633
200	20	80	40	40	5000	0.981	0.212	7.4386	4.98	2.4586
180	20	80	40	40	5000	0.981	0.202	7.8105	5.27	2.5405
160	20	80	40	40	5000	0.981	0.192	8.2391	5.55	2.6891
140	20	80	40	40	5000	0.981	0.181	8.7385	6	2.7385
120	20	80	40	40	5000	0.981	0.169	9.3285	6.5	2.8285
100	20	80	40	40	5000	0.981	0.156	10.04	7.1	2.9402
80	20	80	40	40	5000	0.981	0.143	10.927	7.98	2.9474
60	20	80	40	40	5000	0.981	0.128	12.098	9.29	2.8076
40	20	80	40	40	5000	0.981	0.111	13.81	11.6	2.2105
20	20	80	40	40	5000	0.981	0.09	16.931	19	-2.069

จากตารางที่แสดงโดยให้แรง P_1 เปลี่ยนแปลง พบว่าทั้ง 2 ทฤษฎี มีแนวโน้มไปทางเดียวกันคือ เมื่อเราเพิ่มแรงกระทำกับชิ้นส่วน ทำให้ตำแหน่งที่เกิดการ โกงตัวสูงสุดค่อยๆเลื่อนเข้าไปยังจุดที่รับแรงที่มาก คือการแสดงถึงการแอ่นตัวที่ไปทางแรงสะสมมากกว่าสำหรับทฤษฎีอีลาสติก ส่วนในกรณีของทฤษฎีพลังงานพบว่าค่าที่ได้แตกต่างกันแต่จะมีค่าใกล้เคียงกับทฤษฎีอีลาสติก เนื่องจากทฤษฎีพลังงานสามารถหาผลเฉลยได้ง่ายกว่าทฤษฎีอีลาสติก ถ้าหากสามารถนำสมการจากทฤษฎีพลังงานมาทดแทนได้จะทำให้เราสามารถคาดการณ์ตำแหน่ง โกงตัวสูงสุดได้โดยง่าย แต่จากการแทนค่าในสมการที่แสดงดังตารางพบว่าทฤษฎีพลังงานจะสามารถทดแทนทฤษฎีอีลาสติกได้ในช่วงขอบเขตหนึ่งเท่านั้น

เนื่องจากแรงสะสมภายในโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนมีค่าไม่แน่นอน สาเหตุมาจากลักษณะการใช้งานของโครงสร้าง การรับน้ำหนักของโครงสร้างแบบโครงข้อหมุนรวมถึง รูปแบบของโครงสร้างเป็นตัวแปรในการทำให้โครงข้อหมุนมีแรงสะสมภายในที่แตกต่างกัน นอกจากนี้การกำหนดสมการการ โกงตัวก็มีผลต่อตำแหน่งการ โกงตัวสูงสุดเช่นกัน แต่จากที่แสดงขึ้นต้นผลที่ได้สามารถนำไปทดแทนกันได้ เนื่องจากค่าที่ได้มีความแตกต่างกันน้อย สำหรับในการหาหน้าตัดเพื่อนำไปประยุกต์ใช้งานโดยเราสามารถหาแรงกระทำภายในได้โดยการคำนวณแรงภายในโครงข้อหมุนตามปกติ และเมื่อนำค่าแรงที่คำนวณได้กับค่าโมดูลัสของวัสดุก็จะทำให้เราสามารถนำไปใช้หาโมเมนต์อินเนอร์เซียได้โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแทนสูตรที่พิสูจน์มาข้างต้น ซึ่งเมื่อได้ค่าอินเนอร์เซียที่ต้องการแล้วก็จะทำให้ทราบถึงหน้าตัดสูงสุดที่ไม่ทำให้เกิดการโก่งตัวด้านข้างของโครงข้อหมุนได้ ทำให้เราสามารถเลือกหน้าตัดที่เหมาะสมโดยไม่ต้องเสริมวัสดุเพื่อป้องกันการเกิดการโก่งตัวด้านข้างได้ เป็นการใช้วัสดุได้อย่างเต็มประสิทธิภาพมากที่สุด เพื่อแสดงถึงการประยุกต์เพื่อนำไปใช้งานได้จริง เราจะนำไปเปรียบเทียบกับการทดลองดังที่จะกล่าวต่อไป

6.3. การเปรียบเทียบหน้าตัดทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน

6.3.1. เปรียบเทียบเมื่อค่าของแรงเปลี่ยนแปลง

จากการพิสูจน์ทำให้เราได้สมการ โดยทฤษฎีอีลาสติกคือ

$$(P_1 + P_2) = \frac{\pi^2 EI_2}{L_n^2}$$

และจากการพิสูจน์ทฤษฎีพลังงานได้สมการคือ

$$(P_1 + \frac{P_2}{2}) = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

จากสมการจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าแรง P_2 ที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก แตกต่างจากสมการที่ได้จากทฤษฎีพลังงานหากเราให้ค่า P_2 ที่มากจะทำให้ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกมากกว่าอินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีพลังงาน ซึ่งหมายถึงขณะที่แรงสะสมในแนวแกนที่เท่ากัน แต่ถ้าใช้สมการที่หามาจากทฤษฎีอีลาสติกจะได้หน้าตัดใหญ่กว่า ในที่นี้จะแสดงให้เห็นชัดเจนโดยแบ่งการพิจารณาเปรียบเทียบ สมการที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงานเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

6.3.1.1. เมื่อแรงกระทำ P_1 เปลี่ยนแปลง

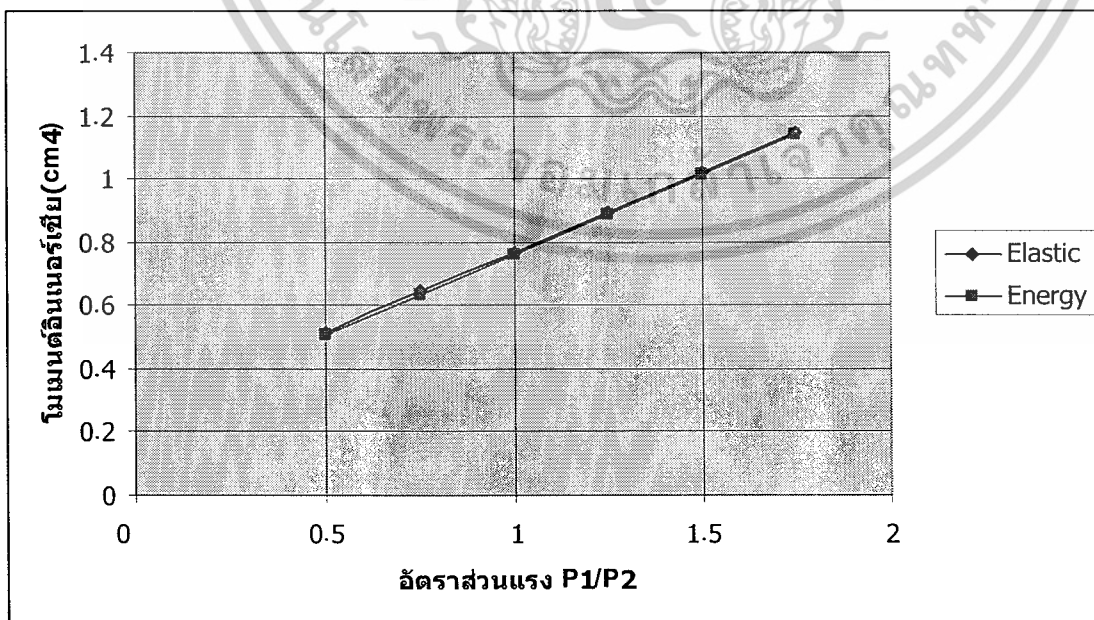
หากกำหนดให้แรง P_1 เปลี่ยนแปลง แต่ตัวแปรอื่นคงที่ โดยเราสมมติค่า P_2 เป็น 1000 kg และ P_1 เป็นจำนวนเท่าของ P_2 เพื่อพิจารณาได้โดยง่าย

ตารางที่ 6.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียเมื่อ P_1 เปลี่ยนแปลง

แรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน					Elastic	energy	ผลต่าง	ผลต่าง
P_1 (kg)	P_2 (kg)	$P1/P2$	$E(\text{kg/cm}^2)$	$L(\text{cm})$	$I(\text{cm}^4)$	$I(\text{cm}^4)$	$I(\text{cm}^4)$	%
500	1000	0.5	2×10^6	100	0.511	0.507	0.004	0.78
750	1000	0.75	2×10^6	100	0.646	0.633	0.013	2.01
1000	1000	1	2×10^6	100	0.767	0.760	0.007	0.91
1250	1000	1.25	2×10^6	100	0.895	0.887	0.018	2.01
1500	1000	1.5	2×10^6	100	1.018	1.013	0.005	0.49
1750	1000	1.75	2×10^6	100	1.147	1.140	0.007	0.61
2000	1000	2	2×10^6	100	1.259	1.267	-0.008	-0.64
2250	1000	2.25	2×10^6	100	1.392	1.393	-0.001	-0.07
2500	1000	2.5	2×10^6	100	1.520	1.520	0.000	0
2750	1000	2.75	2×10^6	100	1.652	1.646	0.006	0.36
3000	1000	3	2×10^6	100	1.780	1.773	0.007	0.39

จากตารางที่ 6.2 แสดงให้เห็นได้ว่าผลต่างของค่าตอบสมการทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน แสดงว่าทั้งสองสมการสามารถนำมาทดแทนกันได้

รูปที่ 6.1 กราฟแสดงเปรียบเทียบ โมเมนต์อินเนอร์เซียของทั้งสองทฤษฎีเมื่อ P_1 เปลี่ยนแปลง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.3.1.2 เปรียบเทียบเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง

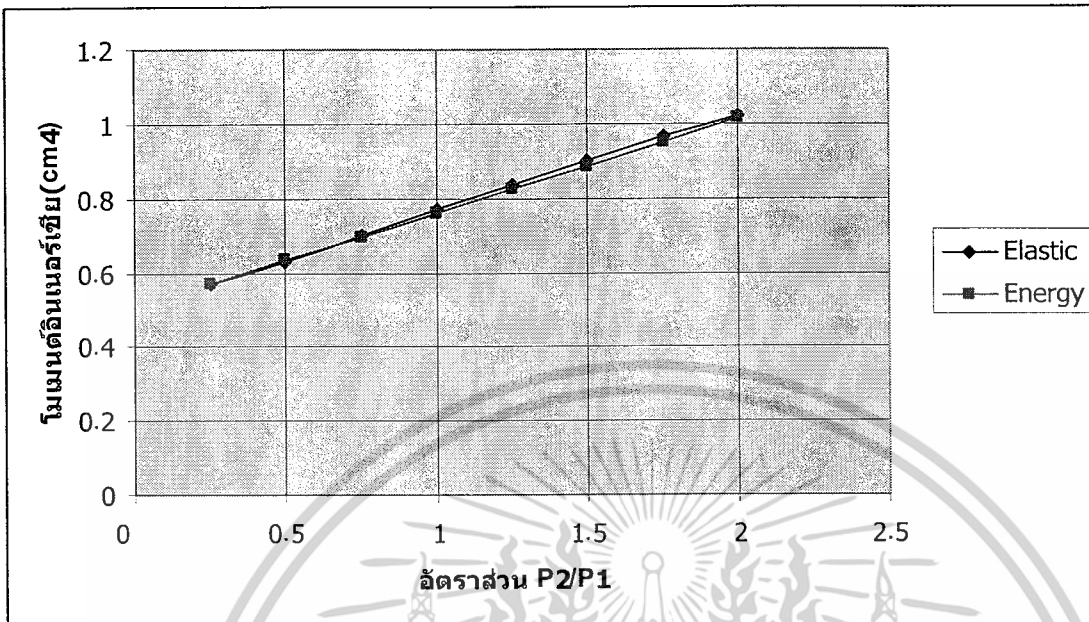
จากที่กล่าวข้างต้น P_1 จะไม่มีผลต่อความแตกต่างของทั้งสองสมการ หากกำหนดให้แรง P_2 เปลี่ยนแปลง แต่ตัวแปรอื่นคงที่ โดยเราสมมติค่า P_2 เป็นจำนวนเท่าของ P_1

ตารางที่ 6.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง

แรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน					Elastic	energy	ผลต่าง	ผลต่าง
P_1 (kg)	P_2 (kg)	P_2/P_1	E (kg/cm ²)	L (cm)	I (cm ⁴)	I (cm ⁴)	I (cm ⁴)	%
1000	250	0.25	2×10^6	100	0.570	0.570	0.000	0.00
1000	500	0.5	2×10^6	100	0.630	0.633	-0.003	-0.48
1000	750	0.75	2×10^6	100	0.700	0.697	0.003	0.43
1000	1000	1	2×10^6	100	0.770	0.760	0.010	1.30
1000	1250	1.25	2×10^6	100	0.838	0.823	0.015	1.79
1000	1500	1.5	2×10^6	100	0.904	0.887	0.007	0.77
1000	1750	1.75	2×10^6	100	0.966	0.950	0.016	1.66
1000	2000	2	2×10^6	100	1.022	1.013	0.009	0.88

จากตารางที่ 6.3 แสดงให้เห็นได้ว่าผลต่างของคำตอบสมการทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน แสดงว่าทั้งสองสมการสามารถนำมาทดแทนกันได้

รูปที่ 6.2 กราฟแสดงเปรียบเทียบ โมเมนต์อินเนอร์เซียของทั้งสองทฤษฎีเมื่อ P_2 เปลี่ยนแปลง



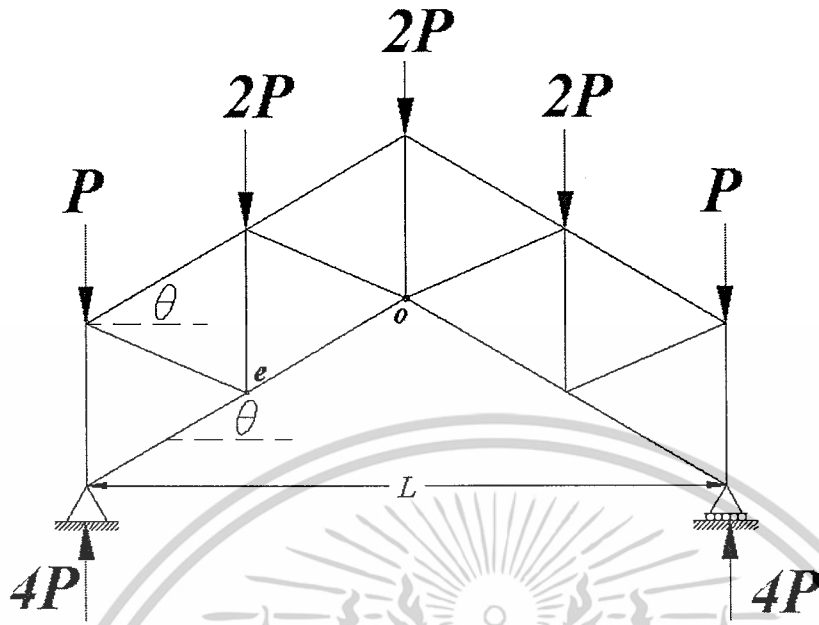
6.4. เปรียบเทียบทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงาน และวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD)

จากหัวข้อที่ผ่านมาทำให้เราถึงการเปลี่ยนแปลงของอินเนอร์เซียเมื่อตัวแปรต่างๆเปลี่ยนแปลงไป ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำสมการที่พิสูจน์มาจากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงานในการประยุกต์เพื่อนำไปใช้งานดังตัวอย่างต่อไปนี้

การประยุกต์เพื่อนำไปใช้กับโครงหลังคา

พิจารณาโครงหลังคาที่มี 4 ช่วง (4 Panel)

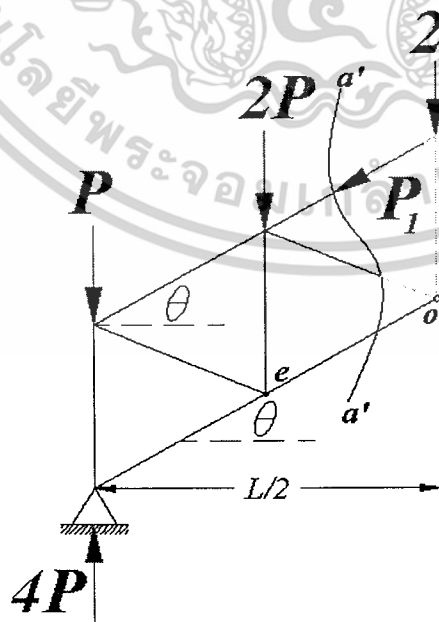
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.3 ภาพแสดงลักษณะของโครงหลังคาที่มีช่อง 4 ช่องซึ่งเป็นโครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา

หากพิจารณาผลรวมโมเมนต์รอบฐานรองรับด้านขวาเท่ากับศูนย์ ($\sum M = 0$)

ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่ฐานแต่ละด้านมีค่าเท่ากับ $4P$



รูปที่ 6.4 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section a'-a'

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

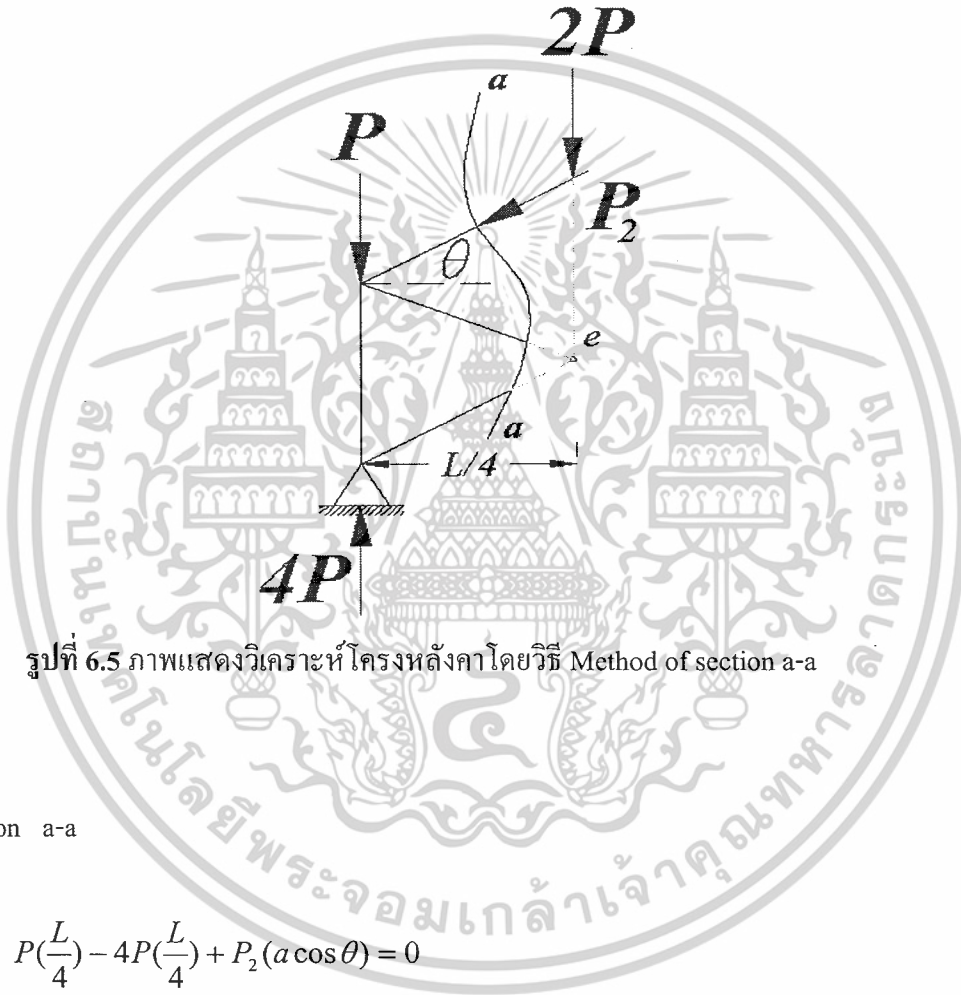
พิจารณา section a'-a'

$$\sum M_o = 0 ; P\left(\frac{L}{2}\right) + 2P\left(\frac{L}{4}\right) - 4P\left(\frac{L}{2}\right) - P_1(a \cos \theta) = 0$$

$$PL = 2PL + P_1 a \cos \theta$$

ดังนั้น

$$P_1 = \frac{PL}{a \cos \theta}$$



รูปที่ 6.5 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงสร้างหลังคาโดยวิธี Method of section a-a

พิจารณา section a-a

$$\sum M_e = 0 ; P\left(\frac{L}{4}\right) - 4P\left(\frac{L}{4}\right) + P_2(a \cos \theta) = 0$$

ดังนั้น

$$P_2 = \frac{3PL}{4a \cos \theta}$$

เมื่อเรานำมาเปรียบเทียบเป็นสัดส่วนระหว่างแรงจะได้ว่า

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{3}$$

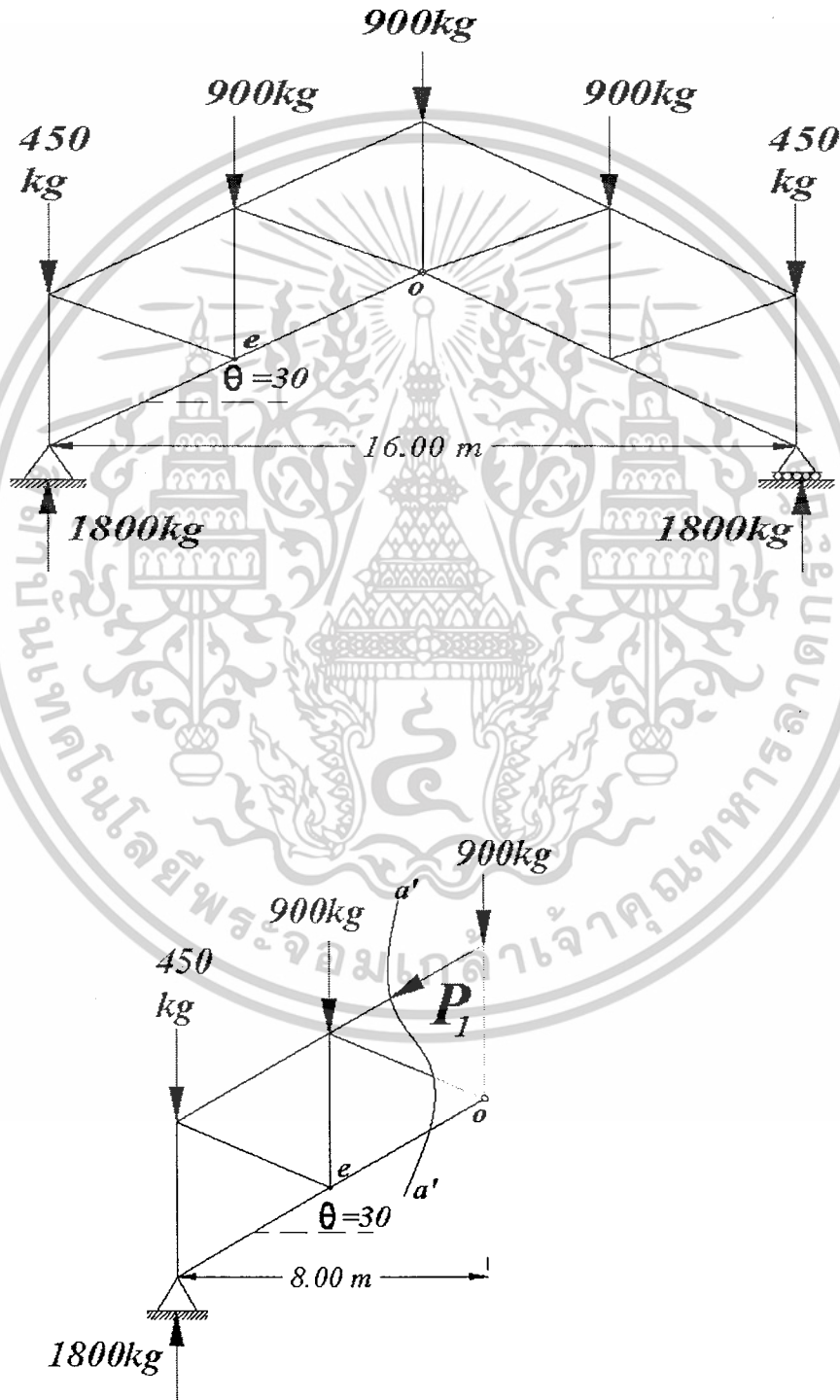
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับกรณีแรงกระทำตามแนวแกน 1 แรงกึ่งช่วง (2 แรงในแนวแกน)

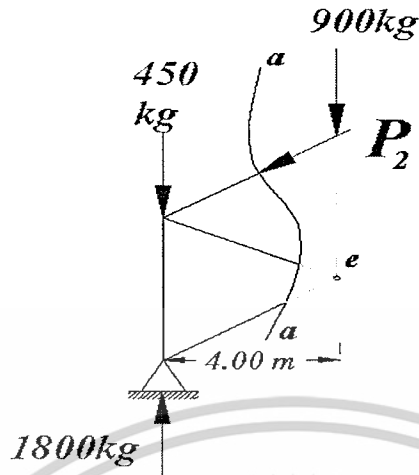
ตัวอย่างการออกแบบหน้าตัดโดยใช้ทฤษฎีพลังงานทฤษฎีอิลาสติก และ ASD

ในการพิจารณาอย่างง่ายจะวิเคราะห์ในโครงข้อหมุนที่ใช้ไม่ในการออกแบบ จากโครงข้อหมุนดังรูปที่

6.3



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ให้แรงกระทำภายนอก P เป็น 450 kg และมีมุมยก 30 องศา ระยะช่วงทั้งหมดคือ 16 เมตร
 ซึ่งเราจะวิเคราะห์ที่ได้แรงภายในจากรูปจะได้ $P_1 = 8,313.84$ kg และ $P_x = 8,313.84 \left(\frac{3}{4}\right) = 6,235.38$ kg
 ดังนั้น $P_2 = 8,313.84 - 6,235.38 = 2,078.46$ kg
 เมื่อเทียบกับทั้งสองทฤษฎีจะได้ $P_1 = 6,235.38$ kg และ $P_2 = 2,078.46$ kg

แทนค่าสมการ $(P_1 + P_2) = \frac{\pi^2 EI_2}{L_n^2}$ สำหรับทฤษฎีอีลาสติก

และ $(P_1 + \frac{P_2}{2}) = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ สำหรับทฤษฎีพลังงาน

และสำหรับวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD) สามารถทำได้ดังนี้

แรงอัดสูงสุด $P_1 = 8,313.84$ kg ยาว 461.88 เซนติเมตร

ให้ $F_a = 700$ kg/cm² ต้องการ $A_g = \frac{P}{F_a} = \frac{8,313.84}{700} = 11.88$ cm²

ใช้เหล็กกล่องขนาด 100 x 100 mm²หนา 3.2 mm. ดังนั้น

$$A_g = 12.13 \text{ cm}^2 \quad I = 187 \text{ cm}^4 \quad r = 3.93 \text{ cm}$$

จาก

$$\frac{KL}{r} = \frac{(1)(461.88)}{3.93} = 117.52 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2 \times \pi^2 \times 2.04 \times 10^6}{2,500}} = 126.91$$

เนื่องจาก

$$\frac{KL}{r} < C_c \text{ ดังนั้น}$$

$$F_a = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{KL}{r})^2)F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{KL}{r}) - \frac{1}{8}(\frac{KL}{r})^3} = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{117.52}{126.91})^2)(2,500)}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{117.52}{126.91}) - \frac{1}{8}(\frac{117.52}{126.91})^3} = 745.91 \text{ kg/cm}^2$$

ดังนั้น $P = A_g F_a = (12.13)(745.91) = 9,047.89 \text{ kg}$

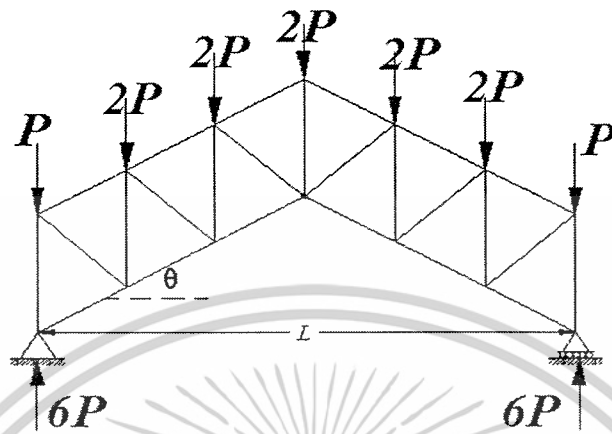
สรุปเปรียบเทียบได้ดังตารางที่ 6.4

ตารางที่ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบ โมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและ ASD ของแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน

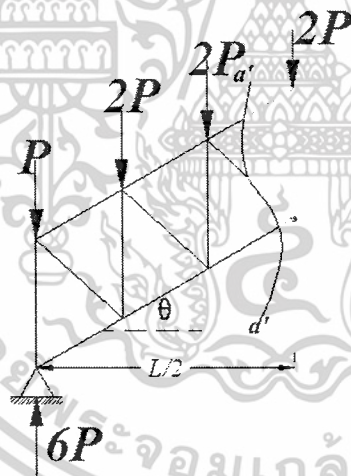
แรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน				Elastic	energy	ASD		
P_1 (kg)	P_2 (kg)	E (kg/cm ²)	L (cm)	I (cm ⁴)	I (cm ⁴)	P (kg)	L (cm)	I (cm ⁴)
6,235.38	2,078.46	2.04×10^6	923.76	309.36	308.32	8,313.84	461.88	187

จะเห็นได้ว่าการออกแบบโดยวิธี ASD จะได้โมเมนต์อินเนอร์เซียที่น้อยกว่าทั้งนี้เนื่องจากการคิณน้ำหนักคิณที่ช่วงความยาวที่สั้นกว่าของสมการที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงานที่คิดตลอดความยาวช่วง แต่โดยความเป็นจริงแล้วถ้าพิจารณาถึงทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงานพบว่าถ้าใช้หน้าตัดดั่งเช่นที่คำนวณจะเกิดการโก่งตัวทางข้างขึ้น แต่เนื่องจากการใช้งานจริงมีตัวแปที่คอยช่วยในการไม่ทำให้เกิดการโก่งตัวด้านข้างทำให้ไม่พบว่าเกิดการโก่งตัวด้านข้างขึ้น แต่หากใช้หน้าตัดจากโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน จะไม่เกิดการโก่งตัวด้านข้างและถือว่าเป็นหน้าตัดที่เล็กที่สุดก่อนที่จะเกิดการโก่งตัวด้านข้างขึ้นโดยไม่มีค้ำยันทางข้าง เป็นการบ่งบอกถึงค้ำยันที่แท้จริงของหน้าตัดนี้ ก็คือความยาวตลอดแนวที่นำมาคิณนั่นเอง เช่นจากตัวอย่างนี้ค้ำยันที่แท้จริงของหน้าตัดที่มีโมเมนต์อินเนอร์เซียก็คือ 923.76 เซนติเมตร หรือ 9.24 เมตร

สำหรับกรณีแรงกระทำตามแนวแกน 2 แรงกลางช่วง (3 แรงในแนวแกน)



รูปที่ 6.6 ภาพแสดงลักษณะของ โครงหลังคาที่มีช่อง 6 ช่อง ซึ่งเป็น โครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา

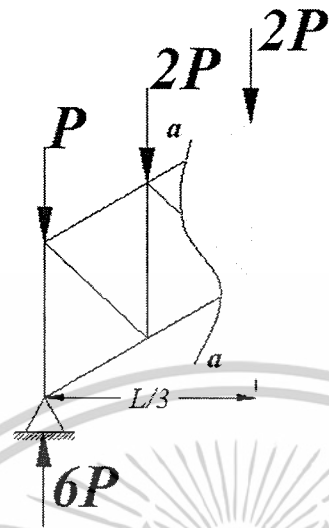


รูปที่ 6.7 ภาพแสดงวิเคราะห์ โครงหลังคา โดยวิธี Method of section

จากการวิเคราะห์ โดย method of section จะได้แรงกระทำในชิ้นส่วนบนที่ทำการตัด section เท่ากับ

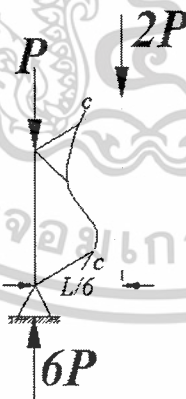
$$\frac{1.5PL}{a \cos \theta} \text{ ให้มีค่าเป็น } P_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.8 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section
จากการวิเคราะห์โดย method of section จะได้แรงกระทำในชิ้นส่วนบนที่ทำการตัด section เท่ากับ

$$\frac{4PL}{3a \cos \theta} \text{ ให้มีค่าเป็น } P_2$$



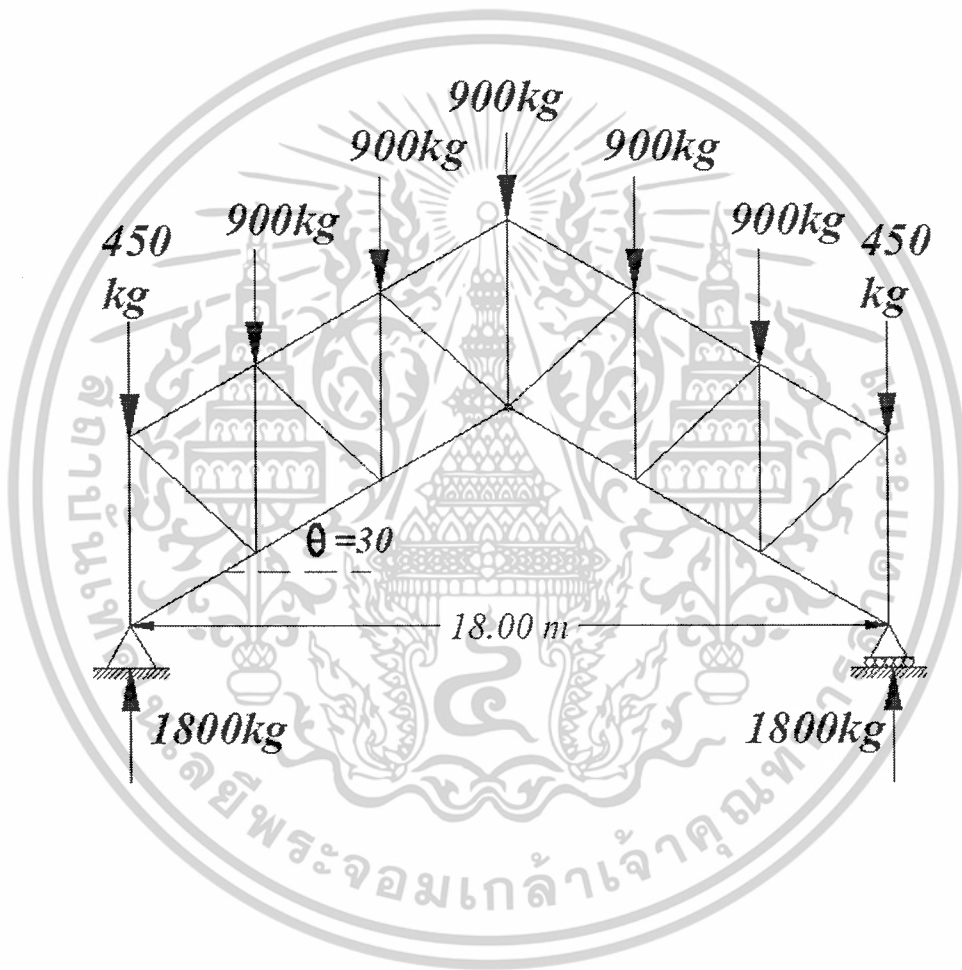
รูปที่ 6.9 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section
จากการวิเคราะห์โดย method of section จะได้แรงกระทำในชิ้นส่วนบนที่ทำการตัด section เท่ากับ

$$\frac{5PL}{6a \cos \theta} \text{ ให้มีค่าเป็น } P_3$$

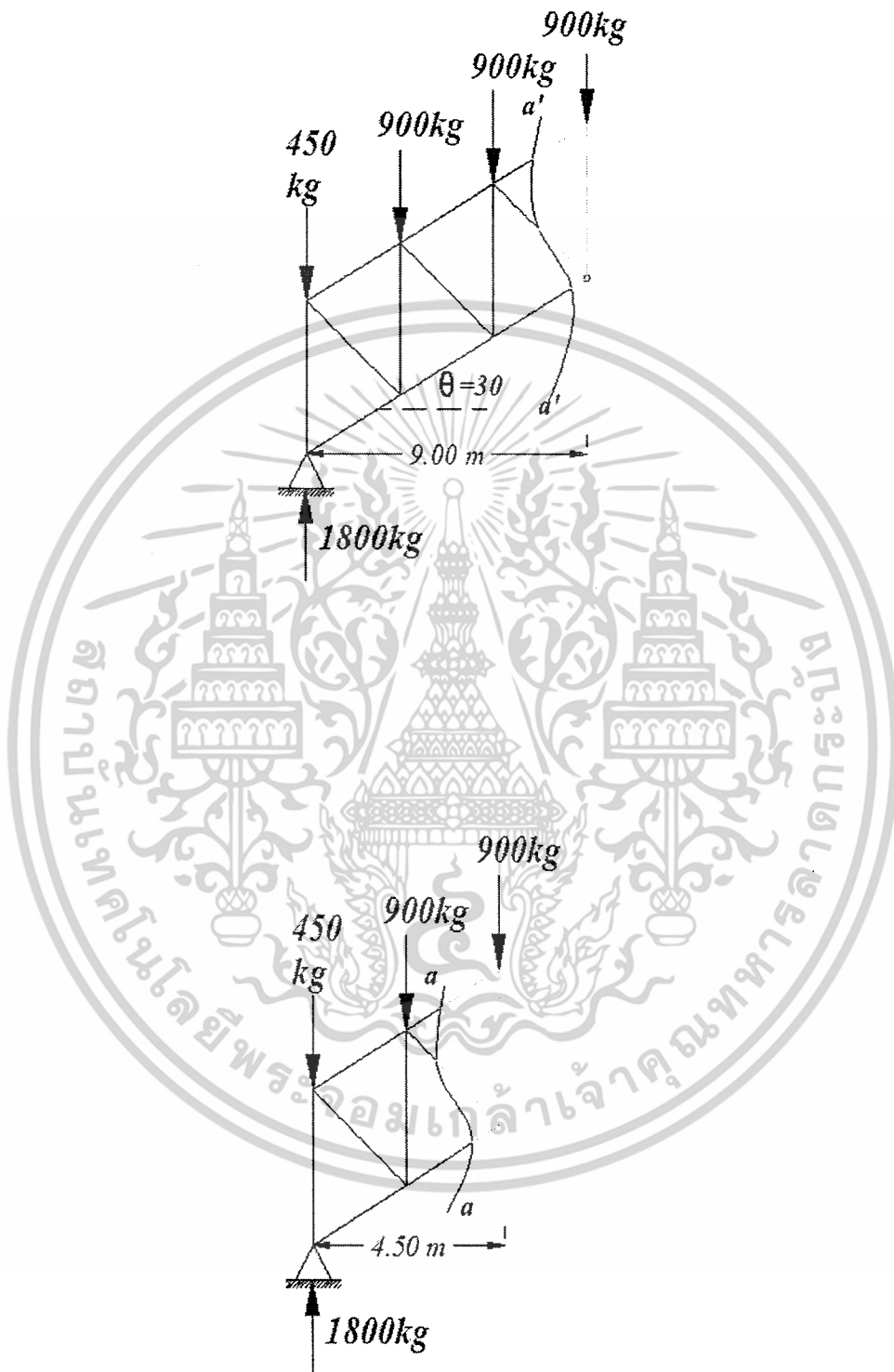
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากทฤษฎีอีลาสติกของ 3 แรงและ 4 แรงในแนวแกนวิเคราะห์เพื่อหาค่ารับแรงอัดที่วิกฤตได้ยุ่งยาก และมีค่าตัวแปรไม่ทราบค่าอีกหลายตัวแปร ทำให้เราไม่สามารถหาสมการของค่ารับแรงอัดประลัยของทฤษฎีอีลาสติกได้ แต่จากการเปรียบเทียบที่ผ่านมาสมการที่ได้จากทฤษฎีพลังงานมีค่าใกล้เคียงกับทฤษฎีอีลาสติกและหารูปแบบสมการได้ง่ายกว่าดังนั้นในที่นี้จะเปรียบเทียบเฉพาะทฤษฎีพลังงานและวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD) เท่านั้น

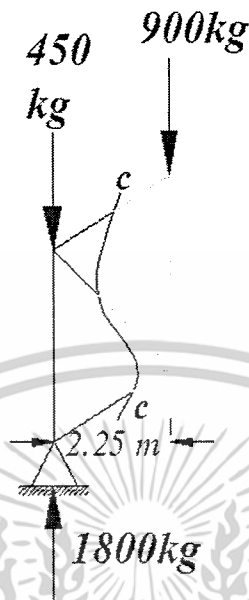
ตัวอย่างการคำนวณ ให้แรงกระทำภายนอกP เป็น 450 kg และมีมุมยก 30 องศา ระยะช่วงทั้งหมดคือ 18 เมตร



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ซึ่งเราจะวิเคราะห์ได้แรงภายในจากรูปจะได้ $P_1 = 14,029.61 \text{ kg}$ และ $P_2 = 12,470.77 \text{ kg}$
 $P_3 = 7,794.29 \text{ kg}$ ใช้ในการหาอินเนอร์โมเมนต์ของวิธีหน่วยแรงใช้งาน และแปลงเป็นค่าสำหรับใช้กับ
 ทฤษฎีพลังงานได้ดังนี้คือ

$$P_1 = 7,794.29 \text{ kg}$$

$$P_2 = 12,470.77 - 7,794.29 = 4,676.48 \text{ kg}$$

$$P_3 = 14,029.61 - 12,470.77 = 1,558.84 \text{ kg}$$

$$P_1 + P_2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + P_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ สำหรับทฤษฎีพลังงาน}$$

และสำหรับวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD) สามารถทำได้ดังนี้

แรงอัดสูงสุด $P_1 = 14,029.61 \text{ kg}$ ยาว 346.41 เซนติเมตร

$$\text{ให้ } F_a = 1,100 \text{ kg/cm}^2 \text{ ต้องการ } A_g = \frac{P}{F_a} = \frac{14,029.61}{1100} = 12.75 \text{ cm}^2$$

ใช้เหล็กกล่องขนาด $150 \times 75 \text{ mm}^2$ หนา 3.2 mm. ดังนั้น

$$A_g = 13.73 \text{ cm}^2 \quad I = 402 \text{ cm}^4 \quad r = 5.41 \text{ cm}$$

เนื่องจาก

$$\frac{KL}{r} = \frac{(1)(346.41)}{5.41} = 64.03 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2 \times \pi^2 \times 2.04 \times 10^6}{2,500}} = 126.91$$

$$\frac{KL}{r} < C_c \text{ ดังนั้น}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

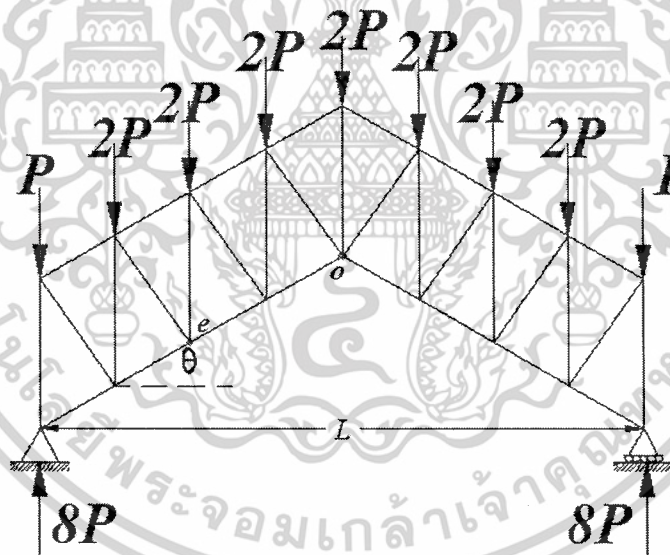
$$F_a = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{KL}{r})^2)F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{KL}{r}) - \frac{1}{8}(\frac{KL}{r})^3} = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{64.03}{126.91})^2)(2,500)}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{64.03}{126.91}) - \frac{1}{8}(\frac{64.03}{126.91})^3} = 1,185.48 \text{ kg/cm}^2$$

ดังนั้น $P = A_g F_a = (13.73)(1,185.48) = 16,276.64 \text{ kg}$

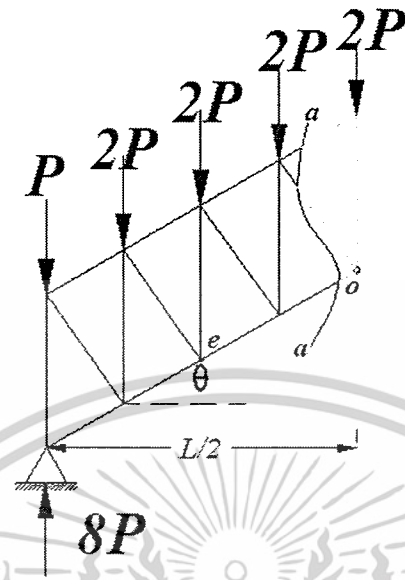
ตารางที่ 6.5 แสดงการเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและ ASD ของแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน

แรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน					energy	ASD		
P ₁ (kg)	P ₂ (kg)	P ₃ (kg)	E(kg/cm ²)	L(cm)	I(cm ⁴)	P(kg)	L(cm)	I(cm ⁴)
7,794.29	4,676.48	1,558.84	2.04x10 ⁶	1,039.23	562.26	14,029.61	346.41	402

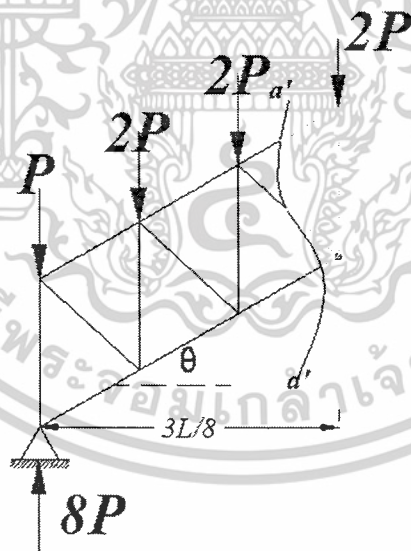
สำหรับกรณีแรงกระทำตามแนวแกน 3 แรงในช่วง (4 แรงในแนวแกน)



รูปที่ 6.10 ภาพแสดงลักษณะของ โครงหลังคาที่มีช่อง 8 ช่องซึ่งเป็น โครงหลังคาอย่างง่ายที่นำมาพิจารณา

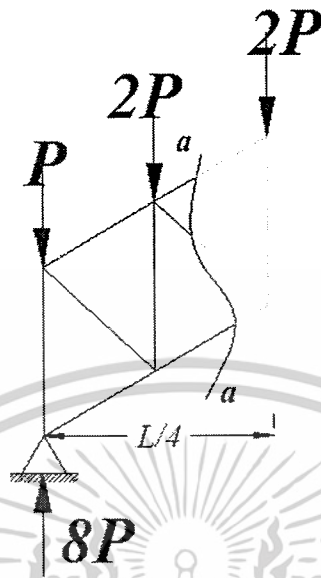


รูปที่ 6.11 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section

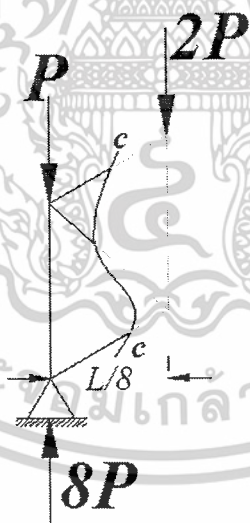


รูปที่ 6.12 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



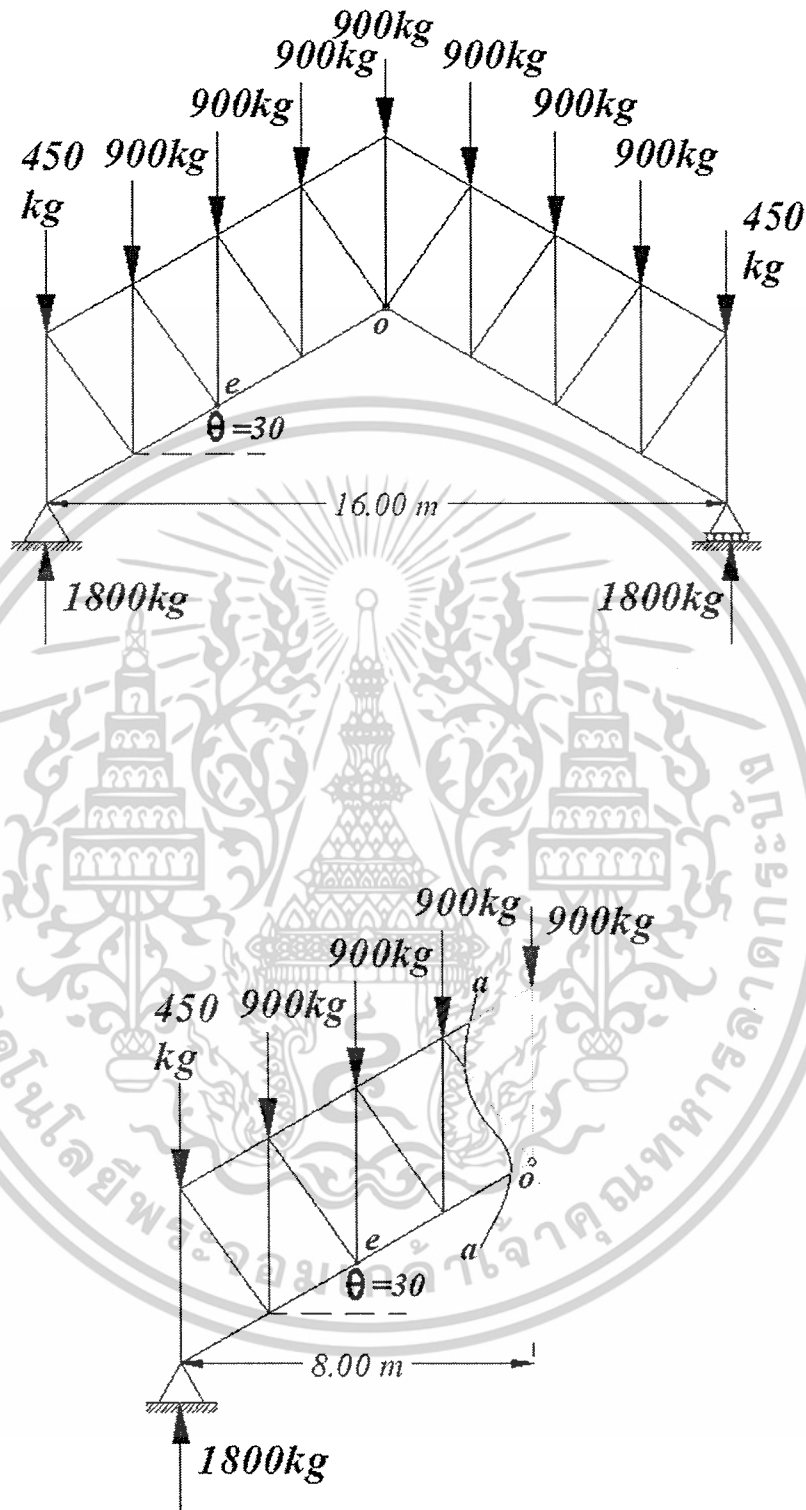
รูปที่ 6.13 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section



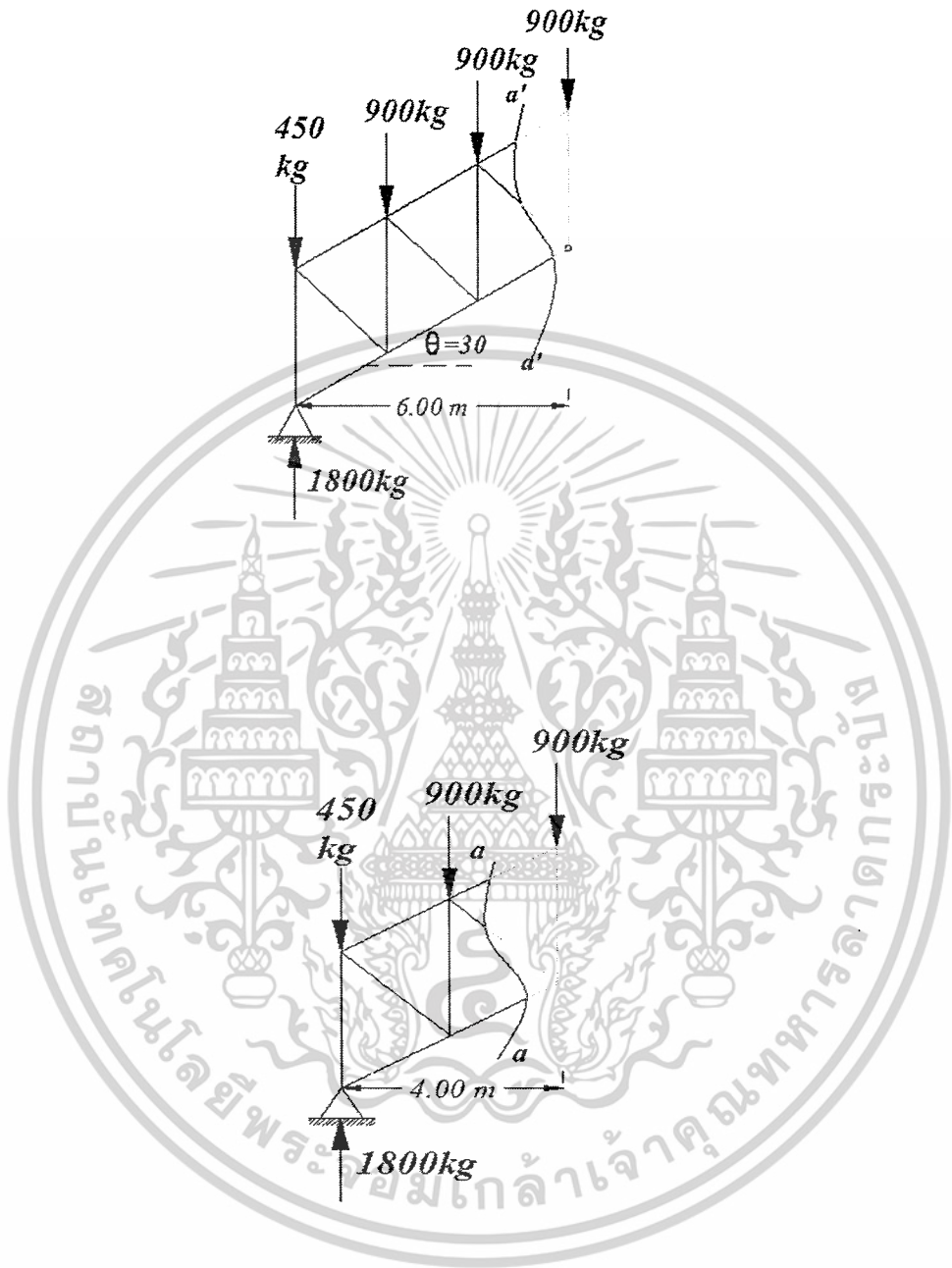
รูปที่ 6.14 ภาพแสดงวิเคราะห์โครงหลังคาโดยวิธี Method of section

ตัวอย่างการคำนวณ ให้แรงกระทำภายนอก P เป็น 450 kg และมีมุมนก 30 องศา ระยะช่วงทั้งหมดคือ 16 เมตร

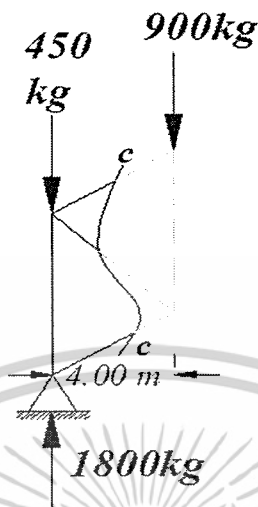
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ซึ่งเราจะวิเคราะห์ให้ได้แรงภายในจากรูปจะได้ $P_1 = 16,627.69 \text{ kg}$ และ $P_2 = 15,588.46 \text{ kg}$
 $P_3 = 12,470.77 \text{ kg}$ $P_4 = 7,274.61 \text{ kg}$ ใช้ในการหาอินเนอร์เซียของวิธีหน่วยแรงใช้งาน และแปลงเป็น
 ค่าสำหรับใช้กับทฤษฎีพลังงานได้ดังนี้คือ

$$P_1 = 7,274.61 \text{ kg}$$

$$P_2 = 12,470.77 - 7,274.61 = 5,196.16 \text{ kg}$$

$$P_3 = 15,588.46 - 12,470.77 = 3,117.69 \text{ kg}$$

$$P_4 = 16,627.69 - 15,588.46 = 1,039.23$$

สำหรับทฤษฎีพลังงาน

$$P_1 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi}\right)P_2 + \frac{P_3}{2} + P_4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

และสำหรับวิธีหน่วยแรงใช้งาน(ASD) สามารถทำได้ดังนี้

แรงอัดสูงสุด $P_1 = 16,627.69 \text{ kg}$ ยาว 346.41 เซนติเมตร

$$\text{ให้ } F_a = 1,200 \text{ kg/cm}^2 \text{ ต้องการ } A_g = \frac{P}{F_a} = \frac{16,627.69}{1,200} = 13.86 \text{ cm}^2$$

ใช้เหล็กกล่องขนาด 150 x 75 mm²หนา 3.2 mm. ดังนั้น

$$A_g = 13.73 \text{ cm}^2 \quad I = 402 \text{ cm}^4 \quad r = 5.41 \text{ cm}$$

จาก

$$\frac{KL}{r} = \frac{(1)(230.94)}{5.41} = 42.69 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2x\pi^2 x 2.04x10^6}{2,500}} = 126.91$$

เนื่องจาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{KL}{r} < C_c \text{ ดังนั้น}$$

$$F_a = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{KL/r}{C_c})^2)F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{KL/r}{C_c}) - \frac{1}{8}(\frac{KL/r}{C_c})^3} = \frac{(1 - \frac{1}{2}(\frac{42.69}{126.91})^2)(2,500)}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}(\frac{42.69}{126.91}) - \frac{1}{8}(\frac{42.69}{126.91})^3} = 1,319.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{ดังนั้น } P = A_g F_a = (13.73)(1,319.33) = 18,114.4 \text{ kg}$$

ตารางที่ 6.6 แสดงการเปรียบเทียบโมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและ ASD ของแรงสะสม 4 แรงตามแนวแกน

แรงสะสม 4 แรงตามแนวแกน					energy	ASD			
P ₁ (kg)	P ₂ (kg)	P ₃ (kg)	P ₄ (kg)	E(kg/cm ²)	L(cm)	I(cm ⁴)	P(kg)	L(cm)	I(cm ⁴)
7,275	5,196	3,118	1,039	2.04x10 ⁶	923.76	522.55	16,627.69	230.94	402

จะเห็นได้ว่าทั้งแรงสะสมสองแรงและสามแรงต่างก็ใช้โมเมนต์อินเนอร์เซียมากกว่า วิธีหน่วยแรงใช้งาน ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกนคือ หากใช้โมเมนต์อินเนอร์เซียที่ได้จากทฤษฎีพลังงานก็จะไม่เกิดการ โกงตัวด้านข้างและได้หน้าตัดที่น้อยที่สุดก่อนที่จะเกิดการ โกงตัวด้านข้างทำให้ทราบถึงระยะ โกงตัวด้านข้างที่แท้จริงด้วย

6.5. เปรียบเทียบทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงานและผลการทดลอง

โดยสมการแรงสะสม 2 แรงในแนวแกน

หน้าตัดกว้าง $\frac{1}{2}$ นิ้ว x $\frac{1}{2}$ นิ้วหนา 0.6 มิลลิเมตรและยาว 85 เซนติเมตร

ดังนั้นจะได้โมเมนต์อินเนอร์เซียเป็น 0.071 cm⁴

สมการที่ใช้ของทฤษฎีอีลาสติก

$$(P_1 + P_2) = \frac{\pi^2 EI_2}{L_n^2}$$

และจากการพิสูจน์ทฤษฎีพลังงานได้สมการคือ

$$(P_1 + \frac{P_2}{2}) = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

สามารถเปรียบเทียบได้ค่าดังตารางที่ 6.5 เมื่อแขวนน้ำหนักแรงสะสมตามแนวแกน P₂=10 kg และค่าโม

ดูลีสองอะลูมิเนียมที่ได้จากการทดสอบ E = 102,167 kg/cm²

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 6.7 แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงสะสม 2 แรงตามแนวแกนที่ได้จากการแทนสมการที่ได้จาก ทฤษฎีอีลาสติก ทฤษฎีพลังงาน และการทดลอง

แรงสะสม 2 แรงตามแนวแกน				Elastic	energy	การทดลอง
I(cm ⁴)	P ₂ (kg)	E(kg/cm ²)	L(cm)	P1(kg)	P1(kg)	P1(kg)
0.071	10	102,167	85	4.90	4.91	33.61

จากการทดลองพบว่า ค่าที่ได้จากการทดสอบมีค่ามากกว่าการแทนค่าด้วยสมการที่ได้ จากทฤษฎีอีลาสติก และทฤษฎีพลังงาน ซึ่งผลที่ได้จากทฤษฎีอีลาสติก และทฤษฎีพลังงานใกล้เคียงกัน ถือว่าทดแทนกันได้ เราสามารถนำสมการของพลังงานสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ได้ จากตารางค่าที่ได้ มากกว่าที่คำนวณอาจเนื่องมาจากความผิดพลาดในการติดตั้งและทดสอบวัสดุ

โดยสมการแรงสะสม 3 แรงในแนวแกน

หน้าตัดกว้าง $\frac{1}{2}$ นิ้ว x $\frac{1}{2}$ นิ้วหนา 0.6 มิลลิเมตรและยาว 85 เซนติเมตร

ดังนั้นจะได้โมเมนต์อินเนอร์เซียเป็น 0.071 cm⁴

เนื่องจากการหาค่าแรงสะสมวิกฤตมีตัวแปรมากที่มีอิทธิพลต่อค่าวิกฤต ซึ่งเป็นการยากในการหาสมการในรูปแรงสะสมที่วิกฤต และจากที่กล่าวมาข้างต้นสมการที่วิเคราะห์มาจากทฤษฎีพลังงานสามารถใช้ทดแทนสมการที่มาจากทฤษฎีอีลาสติก ดังนั้นเราจะกล่าวถึงสมการที่วิเคราะห์มาจากทฤษฎีพลังงานเท่านั้น

จากการพิสูจน์ทฤษฎีพลังงานได้สมการคือ

$$P_1 + P_2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) + P_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

สามารถเปรียบเทียบได้ค่าดังตารางที่ 6.6 เมื่อแวนน้ำหนักแรงสะสมตามแนวแกน P₂=10 kg , P₃=4 kg และค่าโมดูลัสของอะลูมิเนียมที่ได้จากการทดสอบ E = 102,167 kg/cm²

ตารางที่ 6.8 แสดงการเปรียบเทียบค่าแรงสะสม 3 แรงตามแนวแกนที่ได้จากการแทนสมการที่ได้จาก ทฤษฎีพลังงาน และการทดลอง

แรงสะสม 3 แรงตามแนวแกน					energy	การทดลอง
I(cm ⁴)	P ₂ (kg)	P ₃ (kg)	E(kg/cm ²)	L(cm)	P1(kg)	P1(kg)
0.071	10	4	102,167	85	2.737	27.940

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการเปรียบเทียบพบว่าการวิเคราะห์ด้วยสมการที่หาจากทฤษฎีพลังงานให้ค่าการรับแรงที่น้อยกว่าผลการทดสอบ ผลที่ได้อาจเกิดจากการที่ฐานรองรับที่ใช้มีสภาพเป็นหมุดโดยไม่สมบูรณ์ทำให้เกิดความผิดทำให้ฐานรองรับมีสภาพคล้ายฐานรองรับแบบยึดแน่น เนื่องจากการทำฐานรองรับและจำลองให้ใกล้เคียงสมมติฐานสามารถทำได้ยาก หากทำให้การทดลองมีสภาพใกล้เคียงกับสมมติฐานก็จะให้ค่าที่ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น

จากการศึกษาทั้งหมดที่กล่าวมาแสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงข้อหมุน ซึ่งแทนที่เราจะวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่ละชิ้นในการออกแบบ แต่ศึกษาถึงโครงข้อหมุนที่มีพฤติกรรมรับแรงอัดตลอดแนว โดยใช้ค่าแรงที่ได้ภายในแล้ววิเคราะห์เปรียบเทียบทั้งทฤษฎีอีลาสติกและทฤษฎีพลังงาน พบว่าแนวโน้มจะโก่งตัวด้านข้างไปทางแรงสะสมข้างมาก เมื่อศึกษาถึงทั้งสองทฤษฎีทำให้ทราบถึงสมการที่ใช้หาหน้าตัดที่เล็กที่สุดที่ไม่เกิดการโก่งตัวด้านข้าง ทำให้เราทราบถึงระยะค่าด้วยว่าหน้าตัดขนาดที่เราใช้ต้องมีการค่าที่เท่าไรถึงเพียงพอที่ไม่ทำให้เกิดการโก่งตัวด้านข้าง นอกจากนี้ทำให้เราทราบถึงตำแหน่งที่เกิดการโก่งตัวสูงสุดด้วยเพื่อช่วยในการพิจารณาแก้ปัญหาการค้ำข้างของโครงข้อหมุน ผลที่ได้จากการทดสอบเป็นส่วนที่ยืนยันข้อสมมติฐานและพฤติกรรมเกิดการโก่งตัวด้านข้างเมื่อเกิดแรงสะสมในแนวแกนอีกด้วย

บรรณานุกรม

- [1]. วินิต ช่อวิเชียร, 2545. การออกแบบโครงสร้างไม้. พิมพ์ครั้งที่ 2 : สำนักพิมพ์ หจก. ป. สัมพันธ์ พาณิชย์.
- [2]. ตระกูล อร่ามรักย์, 2529. การออกแบบโครงสร้างไม้. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [3]. Timoshenko, S. P., and Gere, J. M. (1961). Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York.
- [4]. M.S.el naschie, Stress stability and Chaos in structural engineering an energy approach, NewYork 1990.
- [5]. Hibbeler, R. C., Structural Analysis, Pearson Education Indochina.
- [6]. Alexander chajes, Principles of structural stability theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [7]. วินิต ช่อวิเชียร, 2545. การออกแบบโครงสร้างเหล็ก. พิมพ์ครั้งที่ 2 : สำนักพิมพ์ หจก. ป. สัมพันธ์ พาณิชย์.
- [8]. ภัคคินี ชิตสกุล, รองศาสตราจารย์, 2544. เอกสารประกอบการสอน การหาผลเฉลยสมการเชิงเส้น.

ภาคผนวก

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในที่นี้จะกล่าวถึงสมการเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์

สมการเอกพันธ์ คือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

สมการไม่เอกพันธ์คือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

ถ้าให้ y_1, y_2, \dots, y_n เป็นคำตอบของสมการ

ผลเฉลยของสมการ $y(x)$ ใดๆจะอยู่ในรูป

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

เมื่อ C_1, C_2, \dots, C_n เป็นค่าคงที่ใดๆ

ถ้าให้ y_p เป็นผลเฉลยที่กำหนดให้ของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับที่ n

และ y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์สมทบ

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์คือ

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

จะได้ $y = y_c(x)$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์คือ

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x)$$

จะได้

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

การหาผลเฉลยสมการเอกพันธ์

สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว อันดับที่ n อยู่ในรูปแบบ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

เมื่อ

$a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นค่าคงที่

พิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ถ้าให้ผลเฉลยของสมการอยู่ในรูป

$$y = e^{mx}$$

แทนค่าลงในสมการจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$\text{หรือ } (am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

$\therefore e^{mx} \neq 0$ สำหรับทุกค่าจริงของ x

$$\text{จะได้ } am^2 + bm + c = 0$$

เป็นสมการช่วยในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับสอง

เราจะพิจารณาเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากันคือ m_1 และ m_2

ผลเฉลยคือ

$$y_1 = e^{m_1 x} \text{ และ } y_2 = e^{m_2 x}$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเป็น

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

กรณีที่ 2

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนจริงที่เท่ากันคือ $m_1 = m_2$

จะได้ผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

และจาก

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2m_1 x}} dx$$

จะได้

$$y_2 = xe^{m_1 x}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

กรณีที่ 3

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $m_1 = \alpha + i\beta$ และ $m_2 = \alpha - i\beta$

เราจะได้ผลเฉลยคือ

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

จากสมการของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

จะได้ว่า

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

จาก

$$y = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$$

แทนค่าสมการและให้

$$C_1 + C_2 = C_1 \text{ และ } C_1 i + C_2 i = C_2$$

จะได้ผลเฉลยของสมการคือ

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

การหาผลเฉลยสมการไม่เอกพันธ์

สมการเอกพันธ์เป็นสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

และมีผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการอนุพันธ์ไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ เราต้องทำ 2 อย่างคือ

1. หาค่า y_c โดยวิธีที่กล่าวมาแล้วข้างต้น
2. หาค่า y_p ของสมการไม่เอกพันธ์ซึ่งจะไม่มีค่าคงที่ไม่ใช่จะรวมอยู่ด้วย

วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการที่ไม่ยุ่งยาก แต่ก็มีข้อจำกัดคือ สมการต้องมีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

และ $g(x)$ ต้องเป็นฟังก์ชันคงที่

ซึ่งแสดงได้โดยตัวอย่างดังต่อไปนี้

จงแก้สมการ

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

วิธีทำ

จากสมการเอกพันธ์ $y'' + 4y' - 2y = 0$

สมการช่วยคือ

$$m^2 + 4m - 2 = 0$$

จะได้

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

จะได้

$$y_c = C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{-(2-\sqrt{6})x}$$

หา y_p โดยพิจารณาจาก $g(x) = 2x^2 - 3x + 6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเป็นพหุนามกำลังสอง

ดังนั้นสมมติให้ $y_p = Ax^2 + Bx + C$ หาค่าของ A, B, C โดยการแทนค่า y_p, y_p', y_p'' ลงในโจทย์ได้

$$2A + 4(2x + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6$$

เทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$A = -1, B = -\frac{5}{2}, C = -9$$

ดังนั้น

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

ผลเฉลยของสมการทั่วไปคือ

$$y = y_c(x) + y_p(x)$$

ดังนั้นผลเฉลยตัวอย่างนี้คือ

$$y = C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

