โปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR INFINITE SERIES

ณรงค์ รุจิรนนท์

สุกัณยา จันโทศรี

สุนิสา เชิดเกียรติสกุล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR INFINITE SERIES

NARONG RUJIRANON

SUKANYA JANTOSRI

SUNISA CHIRDKIATSAKUL

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2004

หัวข้อปัญหาพิเศษ โปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์

COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR INFINITE SERIES

ชื่อนักศึกษา นายณรงค์ รุจิรนนท์ 44050013

นางสาวสุกัญญา จันโทศรี 44050050

นางสาวสุนิสา เชิดเกียรติสกุล 44050054

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

รศ.ภัคคินี ชิตสกุล

รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้กับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อ.วรรณพร สรรประเสริฐ	
กรรมการ	ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	โปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์
ชื่อนักศึกษา	นายณรงค์ รุจิรนนท์ 44050013
	นางสาวสุกัญญา จันโทศรี 44050050
	นางสาวสุนิสา เชิดเกียรติสกุล 44050054
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2547
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

บทคัดย่อ

การศึกษาอนุกรมอนันต์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับอุดมศึกษาชั้นปีที่ 1 และ 2 เป็นเรื่องที่มีรายละเอียดและขั้นตอนในการหาผลเฉลยที่ค่อนข้างมาก เพื่อเป็นการเสริมกับการศึกษาในห้องเรียน จึงได้นำเทคโนโลยีสารสนเทศ ด้านสื่ออิเลคทรอนิกส์ในรูปแบบของอินเทอร์เน็ต มาพัฒนาสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์ผ่านทางอินเทอร์เน็ต เพื่อความสะดวกกับผู้สนใจศึกษา ค้นคว้า หรือทบทวนเกี่ยวกับเนื้อหาอนุกรมอนันต์ได้ดียิ่งขึ้น

รูปแบบของโปรแกรมช่วยสอนที่ออกแบบมา เพื่อให้ผู้ใช้สามารถเลือกศึกษาในส่วนที่ต้องการได้ ซึ่งในแต่ละส่วนประกอบไปด้วยนิยาม ทฤษฎีบท ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด

Special Project Title	**COMPUTER ASSISTED INSTRUCTION FOR INFINITE SERIES**
Student	MR.Narong Rujiranon 44050013
	MS.Sukanya Jantosri 44050050
	MS.Sunisa Chirdkiatsakul 44050054
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2004
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk
	Assoc.Prof. Pakkinee Chitsakul
	Assoc.Prof. Pongpan Rattanathanawan

ABSTRACT

The study of infinite series has many details and steps in order to solve the problem. To exterminate the above difficulties and to help the user to study research and repeat a lesson for more understanding in the content of infinite series. We shall use the information technology with the electronics communication in the fashion of internet application to create the computer-assisted instuction to be the media in the study of infinite series.

Designed programs will help the user to choose any interested part of the content which contains definitions, theories, examples and exercises.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง โปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์ สามารถสำเร็จลุล่วงด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข รศ.ภัคคินี ชิตสกุล และรศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ไขปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่สนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ ทำให้การทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆ และพี่ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือเกี่ยวกับปัญหาพิเศษและสนับสนุนทางด้านกำลังใจไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2548

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

อนุกรมอนันต์เป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ที่มุ่งศึกษาเกี่ยวกับผลบวกของอนุกรมทั้งอนุกรมของค่าคงตัวและอนุกรมกำลัง เนื่องจากเนื้อหาเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์เป็นเรื่องที่แพร่หลายมานานแล้วแต่ทำความเข้าใจได้ค่อนข้างยาก ดังนั้นจึงได้นำคอมพิวเตอร์มาช่วยสร้างสื่อในการเรียนการสอนที่เรียกว่าโปรแกรมช่วยสอน และ เพื่อเป็นการสะดวกสำหรับผู้ที่สนใจศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านอนุกรมอนันต์นี้จึงได้นำเสนอโปรแกรมช่วยสอนนี้ผ่านทางสื่ออินเตอร์เน็ทแทนการเข้าไปศึกษาในห้องเรียน สามารถใช้ในการพัฒนาทักษะทางด้านความคิดนอกเหนือจากการศึกษาในห้องเรียน และเสริมเพิ่มเติมให้เข้าใจในบทเรียนดียิ่งขึ้น การศึกษาจะเสริมสร้างความรู้ความสามารถทางการคิด ความเข้าใจ และยังสามารถนำความรู้เหล่านี้ ไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูงหรือความรู้ในสาขาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องได้อีกด้วย

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์แก่นักเรียน นักศึกษา และผู้ที่สนใจมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปใช้ได้อย่างกว้างขวางผ่านทางสื่ออินเตอร์เน็ต

1.2.3 สามารถใช้งานได้ง่าย และสร้างความสนใจแก่ผู้ใช้งาน

1.2.4 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียน ซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของอนุกรมอนันต์ทั้งหมด

1.3.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องอนุกรมอนันต์

1.3.2 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของอนุกรมอนันต์

1.3.3 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์

1.4.2 ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาเรื่องอนุกรมอนันต์

1.4.3 โปรแกรมช่วยสอนสะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1.5.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์

1.5.2 ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการเขียนโปรแกรม

1.5.3 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียนบนอินเตอร์เน็ต

1.5.4 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์

1.5.5 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

1.5.6 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

1.5.7 จัดทำเอกสารประกอบการทำโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 กระดาษ A4

1.6.2 Mobile Rack

1.6.3 Hard disk 20.0 GB

1.6.4 คอมพิวเตอร์ Operation “window xp” Ram 64 MB up

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.1 ความหมายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน คือ การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้เพื่อช่วยเป็นสื่อการสอน โดยที่คอมพิวเตอร์ จะทำการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนแทนอาจารย์ผู้สอน และผู้เรียนสามารถเรียนเนื้อหาของบทเรียนได้ด้วยตนเอง นอกจากนั้นคอมพิวเตอร์ยังมีความสามารถในการตอบสนองต่อข้อมูล ที่ผู้เรียนหรือผู้สอนป้อนเข้าไปได้ ซึ่งเป็นการช่วยเสริมสร้างความเข้าใจ และดึงดูดความสนใจของผู้เรียน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในปัจจุบันจะพบว่ามีการนำสื่อผสม (สื่อผสม คือ การผสมผสานเนื้อหาหลายๆชนิด เช่น ข้อความ เสียง ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว ฯลฯ รวมเข้าด้วยกัน) หรือ มัลติมีเดียเข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนซึ่งทำให้ผู้เรียนรู้สึกสนุกสนานกับการเรียนและไม่รู้สึกเบื่อหน่าย

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้น จะอาศัยหลักการของแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่กระตุ้นหรือสิ่งเร้ากับการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อประเมินการตอบสนองของผู้เรียน ให้ข้อมูลย้อนกลับเพื่อเป็นการสร้างเสริมแรงกระตุ้นในการเรียน และให้ผู้เรียนมีสิทธิที่จะเลือกสิ่งเร้าในลำดับต่อไป

กระบวนการเรียนการสอน คือ การสื่อสารข้อมูลระหว่างอาจารย์ผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้รับข้อมูลแล้วประมวลผลก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

2.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

2.2.1.1 การสื่อสารแบบทางเดียว หรือ ระบบวงจรเปิด (Open - Loop System) เป็นการสื่อสารข้อมูลโดยเน้นไปทางผู้เรียนเพียงทางเดียว ซึ่งผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารข้อมูลไปยังอาจารย์ผู้สอนได้ เช่น การเรียนทางไกลจากตำราและเอกสารหรือการเรียนโดยผ่านดาวเทียมสำหรับผู้เรียนที่อยู่ในชนบท

2.2.1.2 การสื่อสารแบบสองทาง หรือ ระบบวงจรปิด (Close – Loop System) เป็นการสื่อสารข้อมูลที่ผู้เรียนและอาจารย์ผู้สอนสามารถตอบโต้และแลกเปลี่ยนข้อมูลและความคิดเห็นกันได้ เช่น การเรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งเป็นการสื่อสารข้อมูลที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เพราะเมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนก็สามารถถามอาจารย์ผู้สอนได้ทันที

2.2.2 การจัดการศึกษาตามเอกัตภาพ

เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างกันทั้งในด้านร่างกาย ความรู้ ความคิดความสามารถ และระดับสมอง จึงได้มีการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนให้เป็นเอกัตภาพตามระดับความสามารถของผู้เรียน ซึ่งเรียกว่า "การศึกษาตามเอกัตภาพ"

การศึกษาตามเอกัตภาพมี 3 ลักษณะ คือ

2.2.2.1 บทเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction)

การเรียนการสอนแบบนี้จะทำการจัดเป็นหน่วยๆ โดยมีทั้งกระบวนการเรียนรู้ และกระบวนการวัดผลเรียบร้อย ซึ่งเมื่อผ่านเกณฑ์ในหน่วยหนึ่งก็สามารถเรียนหน่วยต่อไปได้ ซึ่งบทเรียนโปรแกรมแบบนี้ สกินเนอร์ (B.F. Skinner) เป็นผู้คิดค้นขึ้นมา

2.2.2.2 บทเรียนโมดูล (Module Instruction)

บทเรียนโมดูลจะทำการจัดทำเป็นชุด ๆ (Package) ประกอบด้วยบทเรียน อุปกรณ์สื่อการเรียนการสอนเพื่อการเรียนรู้ครบวงจร อยู่ในชุดการเรียนรู้ ซึ่งผู้เรียนสามารถทดสอบบทเรียนโดยหาประสบการณ์ด้วยตนเองได้

2.2.2.3 บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI: Computer Assisted Instruction)

บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นการพัฒนามาจากบทเรียนโปรแกรม แต่ต่างกันตรงที่บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจะใช้คอมพิวเตอร์ในการนำเสนอบทเรียนโปรแกรม ซึ่งเป็นการจัดการสอนและการศึกษาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

2.3 ลักษณะบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยเป็นสื่อในการสอนได้นั้น จะต้องประกอบด้วยองค์ประกอบและอุปกรณ์ต่างๆดังต่อไปนี้

2.3.1 ฮาร์ดแวร์ (Hardware)

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นสื่อในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนให้แก่ผู้เรียนโดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้ จำเป็นที่จะต้องมีความสามารถเพียงพอที่จะรองรับและสนับสนุนการทำงานของซอฟท์แวร์ (Software) ซึ่งจะนำมาสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.2 ซอฟท์แวร์ (Software)

ซอฟท์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการและโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.3.3 คอร์สแวร์ (Courseware)

คอร์สแวร์ คือ บทเรียนที่ต้องการจะนำมาสร้างโปรแกรมช่วยสอนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย เนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัด

2.4 ประเภทของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (CAI) สามารถแบ่งออกเป็น 8 ประเภท คือ

2.4.1 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทติวเตอร์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ซึ่งนำมาเสนอเนื้อหาแก่ผู้เรียน ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาใหม่ หรือ การทบทวนเนื้อหาเดิมก็ตาม ส่วนใหญ่คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้จะมีแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัด เพื่อเป็นการทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนว่ามีความเข้าใจมากน้อยเพียงใด อย่างไรก็ตาม ผู้เรียนมีอิสระพอที่จะเลือกตัดสินใจว่าจะทำแบบทดสอบหรือแบบฝึกหัดหรือไม่อย่างไร หรือ จะเลือกเนื้อหาส่วนไหนเพราะการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนนั้นผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนของตนได้ตามความต้องการของตนเอง

2.4.2 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบฝึกหัด ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่ต้องการมุ่งเน้นให้ผู้ใช้ทำแบบฝึกหัดจนสามารถเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้นๆได้ ซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้เป็นประเภทที่ได้รับความนิยมมากโดยเฉพาะในระดับอุดมศึกษา ทั้งนี้เนื่องจากเป็นการเปิดโอกาสทำความเข้าใจบทเรียนที่สำคัญ ๆ ได้ โดยที่ผู้สอนไม่ต้องเสียเวลาในชั้นเรียนเพื่อที่จะอธิบายเนื้อหาเดิมที่ผู้เรียนไม่เข้าใจซ้ำแล้วซ้ำอีก

2.4.3 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทแบบทดสอบ ได้แก่ การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการสร้างแบบทดสอบ ซึ่งจะทำการจัดการทดสอบ การตรวจ การให้คะแนน การคำนวณผลสอบ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้ คือ การที่ผู้เรียน ได้รับการประเมินผลจากแบบทดสอบย้อนกลับโดยทันที (immediate feedback) ซึ่งเป็นข้อจำกัดของการทดสอบที่ใช้กันอยู่ทั่วๆไป

2.4.4 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเกมส์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ ที่ทำให้ผู้ใช้มีความสนุกสนานเพลิดเพลินกับบทเรียนจนลืมไปว่ากำลังเรียนอยู่ ซึ่งเกมส์คอมพิวเตอร์ทางการศึกษาเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทที่สำคัญประเภทหนึ่ง เนื่องจากเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นตัวตัวกระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้ นิยมใช้กับเด็กตั้งแต่ระดับประถมศึกษาไปจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย นอกจากนี้ ยังสามารถนำมาใช้ได้กับผู้เรียนในระดับอุดมศึกษา เพื่อเป็นการปูทางให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ และความรู้สึกที่ดีกับบทเรียนทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

2.4.5 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการณ์จำลอง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทเหตุการณ์จำลอง ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่นำเสนอเนื้อหาของบทเรียนในรูปแบบของการจำลองแบบ (Simulation) โดยการจำลองสถานการณ์ที่เหมือนจริงขึ้น และบังคับให้ผู้เรียนต้องตัดสินใจในการแก้ปัญหา โดยในตัวบทเรียนจะมีคำแนะนำเพื่อช่วยในการตัดสินใจของผู้เรียน และแสดงผลลัพธ์ในการตัดสินใจนั้น ๆ ข้อดีของการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทนี้คือ การลดค่าใช้จ่ายและลดอันตรายที่อาจเกิดขึ้นได้ จากการเรียนรู้ที่เกิดจากสถานการณ์จริง

2.4.6 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ ได้แก่ บทเรียนทางคอมพิวเตอร์ที่มีพื้นฐานมาจากการจำลองบทเรียนในลักษณะที่ปรากฏอยู่ในหนังสือแบบเรียน จึงมีส่วนประกอบที่คล้ายคลึงกับส่วนประกอบของหนังสือแบบเรียน คือ ปก คำนำ สารบัญ บทเนื้อหา แบบฝึกหัด เป็นต้น

2.4.7 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทกำหนดสถานการณ์ในการแก้ปัญหา ได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ให้ผู้เรียนศึกษาแล้วตอบคำถามเพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์นั้นๆ

2.4.8 คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่อง

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนประเภทวินิจฉัยข้อบกพร่องเป็นการถามคำถาม หรือ ทดสอบนักเรียน เพื่อดูว่าผู้เรียนมีจุดบกพร่องในมโนทัศน์นั้นๆอย่างไร แล้วดำเนินการแก้ไขข้อบกพร่องที่พบนั้น

2.5 การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การจัดหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมาใช้ช่วยในการเรียนการสอนมีอยู่ 3 วิธีด้วยกัน ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบเสียเปรียบต่างกันออกไปดังนี้

2.5.1 การใช้บทเรียนที่ผู้อื่นได้สร้างไว้แล้ว ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือประหยัดเวลาและนำมาใช้ได้ทันที

แต่ข้อเสียเปรียบคือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่มักมีราคาแพง และนอกจากนี้ยังอาจจะได้งานที่ไม่ตรงกับความต้องการเสียทีเดียว จึงต้องมีการประเมินคุณค่าของบทเรียนก่อน

2.5.2 การสร้างบทเรียนโดยใช้โปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยโปรแกรมช่วยสร้างคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเป็นโปรแกรมที่เรียนรู้ได้ง่าย เนื่องจากการเขียนสคริปต์ต่างๆในโปรแกรมประเภทนี้จะใช้ภาษาระดับสูง กล่าวคือ ใกล้เคียงกับภาษามนุษย์

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ ได้ผลงานที่ออกมาดีและใช้งานได้ง่ายในเวลาไม่นานนักจึงทำให้ไม่เสียเวลา แต่ข้อเสียคือไม่เหมาะกับงานที่มีความซับซ้อน เช่น บทเรียนที่ต้องการความสามารถทางคณิตศาสตร์

2.5.3 การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนโดยการเขียนโปรแกรมขึ้นเองโดยภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาซี ภาษาแอสแซมบลี และภาษาปาสคาล ฯลฯ

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ สามารมสร้างบทเรียนที่มีความสลับซับซ้อนและได้ซอฟท์แวร์ที่ทำงานได้รวดเร็ว แต่ข้อเสียคือใช้เวลาในการทำนานกว่า 2 วิธีแรก

2.6 ข้อดีและข้อจำกัดของคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

2.6.1 ข้อดี

2.6.1.1 คอมพิวเตอร์จะช่วยเพิ่มแรงจูงใจ และดึงดูดความสนใจในการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียน เนื่องจากการเรียนโดยใช้คอมพิวเตอร์นั้นเป็นประสบการณ์ที่แปลกใหม่

2.6.1.2 การใช้สี ภาพลายเส้นที่เคลื่อนไหว ตลอดจนเสียงคนตรี จะเป็นการเพิ่มความ

เหมือนจริงและเร้าใจแก่ผู้เรียนทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้ทำแบบฝึกหัดหรือทำกิจกรรมต่างๆเหล่านี้ เป็นต้น

2.6.1.3 ลักษณะของโปรแกรมเป็นบทเรียนที่ทำให้เกิดความเป็นส่วนตัวแก่ผู้เรียนมีไว้ สำหรับช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนช้า สามารถเรียนไปได้ตามความสามารถของตนเองได้อย่างสะดวกไม่ต้องรีบเร่ง และเวลาตอบผิดไม่ต้องอายผู้อื่น

2.6.1.4 เป็นการช่วยขยายขีดความสามารถของผู้สอน ในการควบคุมผู้เรียนได้อย่างใกล้ชิด เนื่องจากสามารถบรรจุเนื้อหาข้อมูลได้ง่าย และมีความสะดวกในการนำมาใช้

2.6.1.5 ความสามารถของหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ช่วยในการบันทึกคะแนนจาก การทำแบบทดสอบ และพฤติกรรมต่างๆของผู้เรียนไว้ใช้ในการวางแผนบทเรียนในขั้นต่อไปได้

2.6.1.6 ความสามรถในการเก็บข้อมูลของเครื่อง ทำให้สามารถนำมาใช้ได้ในลักษณะของการศึกษาเป็นรายบุคคลได้เป็นอย่างดี โดยสามารถกำหนดบทเรียนให้แก่ผู้เรียนแต่ละคนได้ตามความต้องการและแสดงผลความก้าวหน้าของผู้เรียนให้เห็นได้ทันที

2.6.2 ข้อจำกัด

2.6.2.1 การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการเรียนการสอนนั้นนับว่ายังมีน้อยมากเมื่อเทียบกับการออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในวงการด้านอื่นๆ ทำให้โปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนมีจำนวน และขอบเขตที่จำกัดที่จะนำมาใช้ในวิชาต่างๆ

2.6.2.2 อุปกรณ์ยังขาดคุณภาพมาตรฐานระดับเดียวกัน เพื่อให้สามารถใช้ได้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ต่างระบบกัน เป็นต้นว่าซอฟท์แวร์ที่ผลิตขึ้นมาใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ระบบของ IBM ไม่สามารถใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ของ Macintosh ได้

2.6.2.3 การที่จะให้อาจารย์ผู้สอนออกแบบโปรแกรมบทเรียนเองนั้น นับว่าเป็นงานที่ต้องอาศัยเวลา สติปัญญา และความสามารถ เป็นอย่างมาก จึงทำให้เป็นการเพิ่มภาระให้แก่อาจารย์ผู้สอนมากยิ่งขึ้น

2.7 การเรียนการสอนใน E-Learning

เทคโนโลยีสารสนเทศเป็นปัจจัยที่ทำให้การศึกษาเปิดกว้างกระจายไปได้กว้างไกล นำสังคมให้เปลี่ยนแปลงไปเป็นสังคมแห่งการเรียนรู้ เทคโนโลยีในเว็บได้สร้างหนทางของการประยุกต์ใช้เพื่อการศึกษามากขึ้น โดยเฉพาะการพัฒนามัลติมีเดียบนเว็บ ทำให้สามารถแสดงผลเพื่อตอบสนองกระบวนการเรียนรู้ตามแนวการเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้จากการมีปฏิสัมพันธ์โดยการเรียนรู้ร่วมกัน

ความหมาย E-Learning

ข้อมูลจากเว็บไซต์ http://www.capella.edu/elearning/ ให้ความหมายของ E-Learning ว่าเป็นนวัตกรรมทางการศึกษาที่เปลี่ยนแปลงวิธีเรียนที่เป็นอยู่เดิม เป็นการเรียนที่ใช้เทคโนโลยีที่ก้าวหน้า เช่น อินเทอร์เน็ต อินทราเน็ต เอ็กซ์ทราเน็ท ดาวเทียม วิดีโอเทป แผ่นซีดี ฯลฯ

คำว่า E-Learning ใช้ในสถานการณ์การเรียนรู้ที่มีความหมายกว้างขวาง มีความหมายรวมถึง การเรียนทางไกล การเรียนผ่านเว็บ ห้องเรียนเสมือนจริง และอื่นๆ มากมาย โดยสถานการณ์ดังกล่าวมีสิ่งที่มีเหมือนกันอยู่ประการหนึ่งคือ การใช้เทคโนโลยีการสื่อสารเป็นสื่อสารของการเรียนรู้

2.8 ข้อดีของ E-learning

1. E-Learning ช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ที่ผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง การเรียนร่วมกัน การเสริมแรงในการเรียนรู้เนื้อหา การเข้าถึงข้อมูลทั่วโลก การเข้าถึงข้อมูลที่เป็นปัจจุบัน การเรียนรู้อย่างมีปฏิสัมพันธ์ การเรียนรู้เนื้อหาที่นำเสนอในลักษณะมัลติมีเดีย เป็นการเรียนทางไกลที่ไร้ระยะทาง

2. E-Learning ช่วยทำให้ผู้สอนและผู้เรียนเป็นอิสระจากปัญหาการจัดตารางเรียนตารางสอน สามารถเข้าถึงสื่อการเรียนการสอนนั้นเมื่อมีความสะดวก ผู้เรียนเป็นผู้ควบคุมการเรียนของตนเอง ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่เป็นไปตามก้าวจังหวะของตนเอง ช่วยในการปรับเปลี่ยนบทบาทผู้สอนจากผู้บอกและถ่ายทอดมาเป็นผู้ให้คำแนะนำ ให้คำปรึกษา และอำนวยความสะดวก ในขณะ

ที่ผู้เรียนมีบทบาทเป็นผู้ศึกษาค้นคว้าและสำรวจข้อมูลในลักษณะการเรียนรู้ร่วมกันและมีปฏิสัมพันธ์ต่อกัน เป็นผู้เรียนที่ลงมือปฏิบัติไม่ใช่เป็นเพียงผู้รอรับ

3. E-Learning จึงเป็นวิธีการเรียนรู้ที่สร้างสรรค์แห่งการเรียนรู้ให้เกิดขึ้น การศึกษาเกิดขึ้นได้ทุกที่ ทั้งที่บ้าน ที่ทำงาน สถานศึกษาและอื่นๆ การเรียนรู้เน้นการแสวงหาและการรู้จักเลือกข้อมูลเพื่อการเสริมเติมแต่งความรู้ เป็นการเรียนรู้ที่สร้างความสัมพันธ์ไปยังบุคคลภายนอกกลุ่มที่ติดต่อหรือเป็นแหล่งทรัพยากรของการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและพึ่งพาช่วยเหลือกัน ทั้งนี้การเชื่อมต่อถึงกันผ่านระบบเครือข่าย ทำให้มีช่องทางของการติดต่อระหว่างกัน ช่วยลดช่องว่างระหว่างผู้เรียนและผู้สอน และระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียน ได้อีกด้วย

บทที่ 3
อนุกรมอนันต์

3.1 ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

ลำดับอนันต์หรือเรียกสั้น ๆ ว่าลำดับ เป็นพื้นฐานสำคัญที่จะช่วยให้มีความเข้าใจในอนุกรมอนันต์ดีขึ้น ดังนั้นก่อนที่เราจะศึกษาเรื่องอนุกรมอนันต์ เราจึงควรศึกษาเรื่องลำดับอนันต์ก่อน

ในทางคณิตศาสตร์เราจะใช้คำว่า **ลำดับ** (sequence) เพื่อเรียกเลขหลาย ๆ จำนวนที่เรียงต่อกันไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ตัวอย่างเช่น

1,2,3,4,…

2,4,6,8,…

1,-1,1,-1,…

เราจะเขียนลำดับโดยไม่นิยามค่าของพจน์ต่าง ๆ เป็น $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ หรือ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $\{a_n\}$

จะเห็นว่าเราจะใช้ a_n แทนพจน์ที่ n ของลำดับ และค่าของ a_n จะขึ้นอยู่กับค่าของ n ดังนั้น a_n จึงเป็นฟังก์ชันของ n โดย n มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$a_n = f(n)$$

3.1.1 นิยามของลำดับ

นิยามที่ 1 **ลำดับ** (sequence) ของจำนวนคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก ค่าของฟังก์ชันเรียกว่า **พจน์** (term) ของลำดับ

นิยามที่ 2 ลำดับ $\{a_n\}$ มี **ลิมิตเท่ากับ** L เขียนว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ถ้าเมื่อกำหนดค่า $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็ม N (เขียนว่า $N(\varepsilon)$ หมายความว่า N ขึ้นกับ ε) ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$

นั่นหมายความว่า ไม่ว่า $\varepsilon > 0$ จะมีค่ามากน้อยเพียงใด จะมีค่า N เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งพจน์หลังจากพจน์ที่ N ทั้งหมดจะอยู่ในระยะห่างจากค่า L น้อยกว่าระยะ ε

ค่า N และ ε มีความสัมพันธ์กันคือ ถ้า ε มีค่าน้อยแล้ว N จะมีค่ามาก และถ้า ε มีค่ามากแล้ว N จะมีค่าน้อย

นิยามที่ 3 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิต L , $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ จะเรียกลำดับนี้ว่า **ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence)

นิยามที่ 4 ลำดับ $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent sequence) ก็ต่อเมื่อ ลำดับนั้นไม่ใช่ลำดับลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ ดังนั้นลำดับนี้คือ $\{1,\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},...\}$ ซึ่งจะเห็นว่าพจน์ในลำดับนี้มีค่าเล็กลงเรื่อย ๆ แต่จะไม่มีค่าเป็นลบ ดังนั้นถ้า n มีค่ามาก ๆ แล้ว a_n ก็จะมีค่าที่ใกล้เคียงกับ 0 ดังนั้น ลิมิตของ a_n เท่ากับ 0 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence)

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $a_n = (-1)^n$ ดังนั้นลำดับนี้คือ $\{-1,1,-1,1,-1,1,...\}$ จะเห็นว่า พจน์ในลำดับนี้มีค่าสลับกันระหว่าง -1 และ 1 ไม่มีค่าลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง จึงไม่มีลิมิต ดังนั้นลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence)

จากที่ได้ศึกษามาจะเห็นว่า ยังไม่มีหลักการที่แน่นอนที่จะชี้ว่าลำดับใดลู่เข้าหรือลู่ออกนอกจากจะต้องหาลิมิตของลำดับนั้น ๆ เสียก่อน ซึ่งบางครั้งการหาลิมิตของลำดับนั้นเป็นการยากมาก ดังนั้นถ้ามีหลักการที่จะชี้ว่าลำดับใดลู่เข้าหรือลู่ออกโดยไม่ต้องหาลิมิตแล้วจะเป็นประโยชน์อย่างมาก

เงื่อนไขหนึ่งที่พิจารณาว่าลำดับเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออกโดยไม่ต้องหาลิมิต ได้แก่ เงื่อนไขคอชี่ ซึ่งตั้งชื่อให้เป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลกชาวฝรั่งเศษ ชื่อโอกุสแตง ลุยส์ คอชี่ เงื่อนไขนี้คือ

นิยามที่ 5 ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่า**ลำดับคอชี่** (Cauchy sequence) ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็ม N ที่ทำให้

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ } m,n > N$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...\right\}$ เป็นลำดับซึ่งมี $a_n = \frac{1}{n}$

จงพิสูจน์ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอชี่

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N = \frac{2}{\varepsilon}$

จะได้ว่า $|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N}$ เมื่อ $m,n > N$

$$= \frac{2}{N} = \varepsilon$$

$$\therefore |a_m - a_n| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอชี่ ตอบ

3.1.2 ลำดับทางเดียว (Monotone Sequence)

นิยามที่ 6 จะกล่าวว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็น

1. **ลำดับเพิ่ม** (increasing sequence) ถ้า $a_n < a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่า n
2. **ลำดับไม่ลด** (nondecreasing sequence) ถ้า $a_n \le a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่า n
3. **ลำดับลด** (decreasing sequence) ถ้า $a_n > a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่า n
4. **ลำดับไม่เพิ่ม** (nonincreasing sequence) ถ้า $a_n \ge a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่า n

นิยามที่ 7 ลำดับที่มีลักษณะหนึ่งลักษณะใดใน 4 แบบข้างต้นเรียกว่า **ลำดับทางเดียว** (monotone sequence)

ลำดับในแบบที่ 1 และแบบที่ 3 เรียกว่า**ลำดับทางเดียวแท้** (strictly monotone sequence)

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$ เป็นลำดับเพิ่ม

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ เป็นลำดับลด

$2,2,3,4,5,5,6,\ldots.$ เป็นลำดับไม่ลด

$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

และ $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ ไม่เป็นลำดับทางเดียว

วิธีการตรวจสอบลำดับทางเดียว

1. <u>วิธีหาผลต่าง</u> วิธีนี้ใช้การดูเครื่องหมายของผลต่าง $a_n - a_{n+1}$ ระหว่าง 2 พจน์ที่ต่อเนื่องกันสรุปได้ดังนี้

ถ้า $a_n - a_{n+1} < 0$ เป็นลำดับเพิ่ม

ถ้า $a_n - a_{n+1} > 0$ เป็นลำดับลด

ถ้า $a_n - a_{n+1} \le 0$ เป็นลำดับไม่ลด

ถ้า $a_n - a_{n+1} \ge 0$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

จะได้ว่า $a_n = \frac{n}{n+1}$ และ $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

ดังนั้น
$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$$
$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \text{สำหรับทุก ๆ ค่า } n$$

ดังนั้นลำดับนี้เป็นลำดับเพิ่ม ตอบ

2. <u>วิธีการหาเศษส่วน</u> วิธีนี้ใช้การเทียบเศษส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ระหว่าง 2 พจน์ที่ต่อเนื่องกันกับ 1 สรุปได้ดังนี้

ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ เป็นลำดับเพิ่ม

ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ เป็นลำดับลด

ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ เป็นลำดับไม่ลด

ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

จะได้ว่า $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ และ $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

ดังนั้น $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$
$$= \frac{2}{n+1}$$

ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 สำหรับค่า n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ลำดับนี้จึงเป็นลำดับไม่เพิ่ม ตอบ

3. <u>วิธีการหาอนุพันธ์</u>

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ให้ $f(n) = a_n$ แล้วแทน n ด้วย x ได้ฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วพิจารณาอนุพันธ์ของ $f(x)$

ถ้า $f'(x) > 0$ เป็นลำดับเพิ่ม

ถ้า $f'(x) < 0$ เป็นลำดับลด

ถ้า $f'(x) \geq 0$ เป็นลำดับไม่ลด

ถ้า $f'(x) \leq 0$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> พิจารณาลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

จะได้ว่า $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

ให้ $f(n) = a_n = \dfrac{n}{n+1}$

แทน n ด้วย x จะได้ $$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

ดังนั้นลำดับ $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่ม ตอบ

3.1.3 ลำดับมีขอบเขต (Bounded)

นิยามที่ 8 ลำดับ $\{a_n\}$ กล่าวว่าเป็น **ลำดับมีขอบเขตบน** (upper bounded) ถ้ามีจำนวนจริง A ที่ $a_n \leq A$ สำหรับทุก ๆ ค่า n และเรียกค่า A นี้ว่า **ค่าขอบเขตบน** ของลำดับ

ลำดับ $\{a_n\}$ กล่าวว่าเป็น **ลำดับมีขอบเขตล่าง** (lower bounded) ถ้ามีจำนวนจริง B ที่ $a_n \geq B$ สำหรับทุก ๆ ค่า n และเรียกค่า B นี้ว่า **ค่าขอบเขตล่าง** ของลำดับ

นิยามที่ 9 ถ้า C เป็นค่าขอบเขตบน ของลำดับ $\{a_n\}$ และ A เป็นค่าขอบเขตบนของลำดับ $\{a_n\}$ ถ้า $C \le A$ แล้ว C เป็น **ค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด** (least upper bounded : l.u.b)

ถ้า D เป็นค่าขอบเขตล่าง ของลำดับ $\{a_n\}$ และ B เป็นค่าขอบเขตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ ถ้า $B \le D$ แล้ว D เป็น **ค่าขอบเขตล่างมากที่สุด** (greatest lower bounded : g.l.b)

ตัวอย่างที่ 8 พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ลำดับนี้คือ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับลด

และ $\frac{1}{n} \le 1$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$

ดังนั้นลำดับนี้มีขอบเขตบนน้อยที่สุดคือ 1

และ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ดังนั้นลำดับนี้มีขอบเขตล่างมากที่สุดคือ 0 ตอบ

3.2 อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

นิยามที่ 10 ถ้าให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับอนันต์แล้ว ผลบวกของลำดับอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เรียกว่า**อนุกรมอนันต์** แต่ละ a_n เรียกว่า **พจน์** ของอนุกรม

ผลบวกย่อย (patial sum) ของอนุกรมคือ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ พจน์ s_n เรียกว่า**ผลบวกย่อยอันดับที่** n

ลำดับ $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \ldots$ เรียกว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** (sequence of patial sum)

เราเรียกอนุกรมอนันต์อย่างสั้น ๆ ว่า อนุกรม

นิยามที่ 11 กำหนดให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้าหาค่าลิมิต s แล้ว เราจะเรียก อนุกรมนี้ว่า **อนุกรมลู่เข้า** (convergent series) และเรียก s ว่าผลรวมหรือค่าของอนุกรม

ถ้าลำดับของผลบวกย่อยไม่ลู่เข้าจะเรียกอนุกรมนั้นว่า **อนุกรมลู่ออก** (divergent series)

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงพิจารณาว่าอนุกรม 1-1+1-1+1-1+... ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกด้วย

<u>วิธีทำ</u> $s_1 = 1$

$s_2 = 1-1 = 0$

$s_3 = 1-1+1 = 1$

$s_4 = 1-1+1-1 = 0$

ซึ่งได้ลำดับของผลบวกย่อยดังนี้ 1,0,1,0,...

พบว่า พจน์ในลำดับมีค่าสลับกันระหว่าง 1 และ 0 ไม่ลู่เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งเพียงค่าเดียว จึงไม่มีลิมิต ลำดับของผลบวกย่อยลู่ออก

ดังนั้น อนุกรมลู่ออก และหาผลบวกไม่ได้ ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงพิจารณาว่าอนุกรม $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots$ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกด้วย

<u>วิธีทำ</u> ผลบวกย่อยได้แก่

$$s_1 = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$s_2 = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2} = 0.33$$

$$s_3 = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3} = 0.333$$

จะได้ $$s_n = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots+\frac{3}{10^n} \qquad (1)$$

เพื่อหา $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ให้คูณ (1) ด้วย $\frac{1}{10}$ จะได้

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{3}{10^{n+1}} \qquad (2)$$

ลบ (2) จาก (1) จะได้

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10}-\frac{3}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

เนื่องจาก $\frac{1}{10^n} \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

ดังนั้นจะได้ว่า $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$

ดังนั้นอนุกรมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมคือ $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$ ตอบ

3.3 การทดสอบการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรม

ทฤษฎีบทที่ 1 (The Divergence Test)

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้นจากทฤษฎีบทนี้ จะใช้ทดสอบว่าอนุกรมใดเป็นอนุกรมลู่ออกหรือไม่ ด้วยการทดสอบว่าถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ อนุกรมนั้นเป็นอนุกรมลู่ออก

<u>พิสูจน์</u> พจน์ a_n ย่อมเขียนได้ดังนี้

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

ถ้า s คือผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ย่อมได้

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1})$$

$$= s - s = 0$$

ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ลู่ออก

<u>พิสูจน์</u> $$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n} = \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right) > n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \neq 0$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 2 (Cauchy's Convergence for Series)

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี N (ซึ่งขึ้นอยู่กับ ε) ที่ทำให้

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n > N \text{ และ } p = 1,2,...$$

ทฤษฎีบทที่ 3 วิธีเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนบวก และมีจำนวน N ที่ทำให้ $a_n \le b_n$ สำหรับ $n > N$ แล้ว

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกด้วย

<u>พิสูจน์</u> 1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ B เราย่อมได้ว่า สำหรับทุกค่า n

$$b_1 + b_2 + ... + b_k < \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

ดังนั้น

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \le b_1 + b_2 + ... + b_k <= B \qquad , n = 1,2,...$$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีผลบวกย่อย $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ซึ่งมีค่าขอบเขตบน สำหรับทุก ๆ ค่า n ดังนั้นอนุกรมจึงลู่ออกตามทฤษฎีบทที่ 4

2. ในกรณีที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก ถ้าสมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าย่อมได้

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \le b_1 + b_2 + ... + b_k < \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

เช่นเดียวกับในข้อ 1. ซึ่งย่อมจะได้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าดังที่เราสรุปได้ในข้อ 1.

อันจะค้านกับสิ่งที่เรารู้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ จึงลู่เข้าไม่ได้ ย่อมเป็นอนุกรมลู่ออกเช่นเดียวกันกับ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซ.ต.พ.

มีหลักการในการใช้การทดสอบวิธีเปรียบเทียบโดยคร่าว ๆ ดังนี้

1. เราสามารถตัดจำนวนที่เป็นค่าคงที่ในตัวส่วนของ a_n ได้ โดยทั่วไปจะไม่มีผลกระทบกับลักษณะการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

2. ถ้ามีพหุนามใน n เป็นตัวประกอบหนึ่งของเศษ หรือตัวส่วนของ a_n ก็ตาม เราสามารถตัดเทอมที่มีกำลังต่ำออกหมด เหลือเพียงเทอมที่มีกำลังสูงที่สุดในพหุนามนั้นได้ โดยทั่วไปจะไม่มีผลกระทบต่อลักษณะการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 12 จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-k)}}$, k เป็นค่าคงที่

วิธีทำ $\frac{1}{n(n-k)} > \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$ ดังนั้น $\frac{1}{n(n-k)} > \frac{1}{n}$ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-k)}}$ ลู่ออกด้วย ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 4 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)

อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + \ldots \quad ; a \neq 0$ ลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ และลู่ออกถ้า $|r| \geq 1$ ถ้าอนุกรมลู่เข้าแล้วผลบวกของอนุกรมคือ $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

พิสูจน์ ในกรณีที่ $|r| = 1$ พิจารณากรณีที่ $r = 1$ ก่อน จะได้อนุกรมดังนี้

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

ซึ่งย่อมได้ผลบวกย่อยที่ n เป็น $s_n = na$ ดังนั้น

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} na$$

ซึ่งหาค่าลิมิตไม่ได้ อนุกรมจึงลู่ออก

ส่วนในกรณีที่ $r = -1$ จะได้อนุกรมดังนี้

$$a - a + a - a + \ldots$$

ซึ่งได้ลำดับของผลบวกย่อย ดังนี้

$$a, 0, a, 0, \ldots$$

ซึ่งลู่ออก อนุกรมจึงลู่ออกเช่นเดียวกัน

ในกรณีที่ $|r| \neq 1$ ผลบวกย่อยที่ n คือ

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \qquad \ldots(1)$$

เมื่อคูณตลอดด้วย r จะได้

$$rs_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^n \qquad \ldots(2)$$

ลบ (2.) จาก (1.) จะได้

$$(1-r)s_n = a - ar^n \qquad \ldots(3)$$

เนื่องจาก $r \neq 1$ จะได้ $1-r \neq 0$ จึงหาร (3.) โดยตลอดได้ด้วย $1-r$ ดังนี้

$$s_n = a\left(\frac{1+r^n}{1-r}\right)$$

ในกรณีที่ $|r| < 1$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ อนุกรมจึงลู่เข้า และ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

แต่ถ้า $|r| > 1$ และ $r > 1$ จะได้ $r^n \to \infty$ เมื่อ $n \to \infty$ เราจึงหาค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty} s_n$ ไม่ได้ หรือถ้า $|r| > 1$ และ $r < -1$ จะได้ r^n มีเครื่องหมายสลับไปมาระหว่างบวกและลบแต่มีขนาดใหญ่ขึ้น เรื่อย ๆ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $\{s_n\}$ จะลู่ออกในกรณีที่ $|r| > 1$ ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> อนุกรม $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \ldots + \frac{5}{4^k} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $a = 5, r = 1/4$ $\because |r| = 1/4 < 1$ ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าและผลบวกคือ

$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-1/4} = \frac{20}{3}$ ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 5 อนุกรมฮาร์มอนิค (Harmonic Series)

อนุกรมฮาร์มอนิค คือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

<u>พิสูจน์</u> อนุกรมฮาร์มอนิค มีผลบวกย่อยดังนี้

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2}, s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, ...$$

ซึ่งก่อให้เกิดเป็นลำดับเพิ่มดังนี้

$$s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n < ...$$

นอกจากนั้นเราพบว่า

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = s_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$s_{16} = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > s_8 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = s_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

$$\therefore s_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

ดังนั้นไม่ว่า M จะเป็นค่าคงที่ใด เราย่อมหาจำนวนเต็มบวก n ได้ซึ่งทำให้ $\frac{n+1}{2} > M$ ดังนั้น

$$s_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$

สำหรับค่า n ค่านั้น

ลำดับ $\{s_n\}$ จึงไม่มีค่าขอบเขตบน และลู่ออก ซ.ต.พ.

ทฤษฎีบทที่ 6 อนุกรม-พี (P-Series)

อนุกรม-พีหรืออนุกรมไฮเปอร์ฮาร์มอนิค (Hyperharmonic Series) คือ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$ โดยที่ $p>0$ จะลู่เข้าถ้า $p>1$ และลู่ออกถ้า $0<p\le 1$

<u>พิสูจน์</u> กรณีที่ 1 ถ้า $p=1$ อนุกรมนั้นคืออนุกรมฮาร์มอนิคซึ่งได้แสดงแล้วว่าเป็นอนุกรมลู่ออก

กรณีที่ 2 ถ้า $p\neq 1$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{l\to\infty}\int_1^{l}\frac{1}{x^p}dx$$

$$=\lim_{l\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^l$$

$$=\lim_{l\to\infty}\left(\frac{l^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)$$

ซึ่งจะลู่เข้าถ้า $p>1$ และลู่ออกถ้า $0<p\le 1$ ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพีซึ่งมีค่า $p=\frac{1}{2}<1$ ดังนั้นจึงเป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบทที่ 7 (Ratio Test)

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ โดย $a_n\neq 0$ มี $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ แล้วเราจะได้ว่า

1. ถ้า $L<1$ อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L>1$ อนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L=1$ ทดสอบไม่ได้

<u>พิสูจน์</u> 1. สมมติว่า $L<1$ กำหนดให้ $r=\frac{1}{2}(1+L)$

ฉะนั้น $L<r<1$ เนื่องจาก r เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง 1 และ L

ดังนั้นจำนวน $\varepsilon=r-L$ เป็นจำนวนบวก

เนื่องจาก

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

เราย่อมได้ว่า จะมีค่า $N > 0$ ซึ่งสำหรับค่า n ที่ทำให้ $n \geq N$ อัตราส่วน $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ จะอยู่ภายในระยะ ε จาก L ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq N$$

นั่นคือ $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq N$$

$$|a_{n+1}| < r|a_n| \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq N$$

ซึ่งให้อสมการต่อไปนี้

$$|a_{N+1}| < r|a_N|$$

$$|a_{N+2}| < r|a_{N+1}| < r^2|a_N|$$

$$|a_{N+3}| < r|a_{N+2}| < r^3|a_N|$$

แต่ $|r| < 1$ ดังนั้น

$$r|a_N| < r^2|a_N| < r^3|a_N|\ldots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า ดังนั้น จากอสมการข้างต้น อนุกรม

$$|a_N| < |a_{N+1}| < |a_{N+2}|\ldots$$

ย่อมลู่เข้าด้วย ตามทฤษฎีบทที่ 4 (Comparison Test)

2. สมมติว่า $L > 1$ จะได้ $\varepsilon = L - 1$ เป็นจำนวนบวก

เนื่องจาก $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

เราย่อมได้ว่า มีค่า $N > 0$ ซึ่งเมื่อใดที่ $n \ge N$ อัตราส่วน $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ จะอยู่ภายในระยะ ε จาก L

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > L - \varepsilon \qquad \text{เมื่อ} \quad n \ge N$$

หรือ $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad n \ge N$$

นั่นคือ $$|a_{n+1}| > |a_n| \qquad \text{เมื่อ} \quad n \ge N$$

ซึ่งให้อสมการต่อไปนี้

$$|a_{N+1}| > |a_N|$$

$$|a_{N+2}| > |a_{N+1}| > |a_N|$$

$$|a_{N+3}| > |a_{N+2}| > |a_N|$$

เนื่องจาก $|a_N| > 0$ อสมการข้างต้นนี้หมายความว่า $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$

ดังนั้นอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ จึงลู่ออก

3. จะเห็นว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ต่างก็มีค่า $L = 1$ แต่อนุกรมแรกลู่ออกในขณะที่อนุกรมหลังลู่เข้า ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> จงทดสอบอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

<u>วิธีทำ</u> $$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

ดังนั้น อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 8 (Root Test)

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ โดย $a_n \neq 0$ มี $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ แล้วเราจะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ อนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ ทดสอบไม่ได้

<u>พิสูจน์</u> 1. $L < 1$ ดังนั้นจะมี r ที่ $L < r < 1$ และจะมี N ที่ทำให้ $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ เมื่อ $n > N$

ดังนั้น $|a_n| < r$ เมื่อ $n > N$ แต่ $r < 1$ ดังนั้น $\sum r^n$ ลู่เข้า

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแท้จริง

2. $L > 1$ จะมี r ที่ทำให้ $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ เมื่อ $n > N$ ดังนั้น $|a_n| > 1$ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. $L = 1$ ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{n}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ และ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

เมื่อ $L = 1$ ทดสอบไม่ได้ ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-4}{2n+5}\right)^n$

<u>วิธีทำ</u> $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$

ดังนั้น อนุกรมลู่ออก ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 9 (The Integral Test)

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมในอนุกรมเป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing sequence) และฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing function) ในช่วง $[1,\infty)$ โดย $f(n) = a_n$ เมื่อ $n \geq N$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า หรือลู่ออกด้วยกันทั้งคู่

<u>พิสูจน์</u> สำหรับ $k \ge N$, ในช่วง $k \le x \le k+1$

$$a_k = f(k) \ge f(x) \ge f(k+1=)a_{k+1}$$

อินทิเกรท จาก k ถึง $k+1$

$$a_k \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge a_{k+1}$$

ดังนั้นเราจะได้ $\sum_N^{n-1} a_k \ge \int_N^n f(x)dx$ ...(1) และ $\int_N^n f(x)dx \ge \sum_N^{n-1} a_{k+1} = \sum_{N+1}^n a_k$

...(2)

ในเทอมของผลบวกย่อย จาก (1) จะได้ $s_{n-1} - s_{N-1} \ge \int_N^n f(x)dx$

แต่ถ้าอนุกรมลู่เข้าหาผลบวก s แล้ว $s \ge s_{n-1}$ ดังนั้น $s \ge s_{N-1} \ge \int_N^n f(x)dx$

จะเห็นว่า $\int_N^\infty f(x)dx$ ถูก bound ด้วย $s \ge s_{N-1}$

และเพราะ $\int_N^\infty f(x)dx$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น

ดังนั้น $\int_N^\infty f(x)dx$ มีลิมิตและลู่เข้า

และจาก (2) ถ้า $\int_N^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_N^\infty f(x)dx$ หาค่าได้

เพราะ $\int_N^\infty f(x)dx \ge \int_N^n f(x)dx \ge \sum_{N+1}^n a_k = s_n - s_N$

$\sum_{N+1}^n a_k$ ถูก bound ด้วย $\int_N^\infty f(x)dx$ และ $\sum_{N+1}^n a_k$ เป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น

ดังนั้น ในเทอมของผลบวกย่อยจะมีลิมิต และ $\sum_{N+1}^n a_k$ ลู่เข้า

การพิสูจน์เกี่ยวกับลู่ออกเป็นไปในทำนองเดียวกัน ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

<u>วิธีทำ</u> $a_n = \frac{1}{n^2}$

กำหนดให้ $f(n) = a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x^2}$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{l\to\infty}\int_1^l \frac{1}{x^2}dx = \lim_{l\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^l = \lim_{l\to\infty}(1-\frac{1}{l}) = 1 < \infty$

$\int_1^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้าเช่นกัน ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 10 (The Limit Form of Comparison Test)

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^\infty a_n$ และ $\sum_{n=1}^\infty b_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนบวก และ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \rho$ เมื่อ ρ มีค่าจำกัด และ $\rho > 0$ เราจะได้อนุกรมทั้งสองลู่เข้าหรือลู่ออกด้วยกันทั้งคู่

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$

จะได้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\rho > 0$ และจาก

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

ทำให้มีจำนวน $N > 0$ ทำให้

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \rho + \varepsilon \qquad \text{เมื่อใดที่ } n \geq N$$

หรือได้ $\frac{1}{2}\rho < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\rho \qquad , n \geq N$

หรือ $\frac{1}{2}\rho b_n < a_n < \frac{3}{2}\rho b_n \qquad , n \geq N \qquad \text{....(1)}$

ทั้งนี้ ถ้า $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ลู่เข้า $\sum_{n=N}^\infty a_n$ จะลู่เข้าเช่นกัน ดังนั้นอสมการทางซ้ายใน (1) $\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2}\rho b_n$ ลู่เข้าเช่นกัน ซึ่งทำให้ได้ $\sum_{n=1}^\infty b_n$ ลู่เข้า

ในทางกลับกัน ถ้า $\sum_{n=1}^\infty b_n$ ลู่เข้า $\sum_{n=N}^\infty \frac{3}{2}\rho b_n$ ก็จะลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=N}^\infty a_n$ จึงลู่เข้าด้วย โดยอสมการทางขวาใน (1) ซึ่งทำให้ได้ $\sum_{n=N}^\infty a_n$ ลู่เข้าเช่นกัน ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

<u>วิธีทำ</u> $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}, b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_b} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-1/\sqrt{n}}$, ρ เป็นค่าจำกัดและ เป็นค่าบวก

เพราะว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพีซึ่งมีค่า $p = \dfrac{1}{2} < 1$ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$ จึงลู่ออกเช่นกัน ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 11 (Alternating Series Test)

อนุกรมซึ่งมีพจน์ที่มีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบสลับกันไป หรืออนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ หรือ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ เรียกว่า อนุกรมสลับ (alternating series) จะลู่เข้า ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงทั้งสองประการ คือ

1. $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>พิสูจน์</u> เราจะพิจารณาเฉพาะอนุกรม

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

โดยการพิสูจน์สำหรับอีกกรณีหนึ่งนั้นจะคล้ายคลึงกัน

ผลบวกย่อยของอนุกรมข้างต้นคือ

$$s_2 = a_1 - a_2$$
$$s_2 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$
$$s_2 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$
$$\vdots$$

จะได้

$$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \ldots$$

ทั้งนี้เพราะผลต่างในทุกวงเล็บไม่เป็นจำนวนลบเนื่องจากเงื่อนไขข้อที่ 1. นอกจากนั้นทุก ๆ พจน์ในลำดับของผลบวกย่อย $s_2, s_4, s_6, \ldots$ ต่างมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a_1 เนื่องจาก

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_2 = a_1 - (a_2 - a_3) - a_4$$
$$s_2 = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - a_6$$

.

.

.

ดังนั้นลำดับ $s_2, s_4, s_6, s_8, \ldots, s_{2n}, \ldots$ ลู่เข้าหาค่าลิมิต s

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = S \qquad \ldots(1)$$

จากการสังเกตลำดับของผลบวกย่อย จะพบว่า

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$$

หรือ

$$s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$
$$= S + 0 = S \qquad \ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) ย่อมได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ลู่เข้าหาค่า S นั่นเอง

ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> อนุกรม $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ มีชื่อว่า อนุกรมฮาร์มอนิคสลับ

เนื่องจาก $a_n = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ดังนั้นอนุกรมฮาร์มอนิคสลับนี้จึงลู่เข้า ตอบ

นิยามที่ 12 เรากล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ถ้าอนุกรมของค่าสัมบูรณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots$ ลู่เข้า

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก แล้วเราจะกล่าวว่า **อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditionally convergent)

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> อนุกรม $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$ ลู่เข้า แต่ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขอย่างเดียว เพราะอนุกรมของค่าสัมบูรณ์ลู่ออก

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{4}{3}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ ซึ่งเป็นอนุกรม-พี มี $p = \frac{4}{3} > 1$ ดังนั้นจึงลู่เข้า ซึ่งหมายความว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{4}{3}}}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จึงลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขด้วย

บทแทรกที่ 1 ถ้าอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แล้วอนุกรมนั้นจะลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 12 วิธีของคุมเมอร์ (Kummer Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมบวก

1. ถ้ามีลำดับ $\{b_n\}$ ซึ่งทุกๆ เทอมของ b_n จะเป็นบวกและมีค่าคงที่ α และ N ที่ทำให้ $C_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \geq \alpha$ เมื่อ $n > N$ แล้ว $\sum a_n$ จะลู่เข้า
2. ถ้า $C_n \leq 0$ เมื่อ $n > N$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่ออกเมื่อ $\sum \frac{1}{b_n}$ ลู่ออก

<u>พิสูจน์</u>

1. $a_{n+1} > 0$ ดังนั้น $b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha a_{n+1}$ เมื่อ $n > N$

$$\therefore b_N a_N - b_{N+1} a_{N+1} \geq \alpha a_{N+1} \quad \text{....(1)}$$

$$b_{N+1} a_{N+1} - b_{N+2} a_{N+2} \geq \alpha a_{N+2} \quad \text{....(2)}$$

$$\vdots$$

บวก $(1)+(2)+\ldots+(p)$ จะได้

$$b_N a_N - b_{N+p} a_{N+p} \geq \alpha(a_{N+1} + .. + a_{N+p})$$

และ $$a_{N+1} + \ldots + a_{N+p} \leq \frac{b_N a_N - b_{N+p} a_{N+p}}{\alpha} \leq \frac{b_N a_N}{\alpha}$$

$\therefore$ $S_{N+p} - S_N \leq \frac{b_N a_N}{\alpha}$ จะได้ $S_{N+p} \leq S_N + \frac{b_N a_N}{\alpha}$

$\therefore$ $\{S_m\}$ เป็นลำดับจำกัด นั่นคือ $\sum a_n$ ลู่เข้า

2. $b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1} \le 0$ เมื่อ $n > N$ ดังนั้น $\{a_n b_n\}$ เป็นอันดับไม่ลดลง

$\therefore b_n a_n \ge b_{n-1}a_{n-1} \ge \ldots \ge b_N a_N = M$ เมื่อ M เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $a_n \ge \dfrac{M}{b}$

$\therefore \sum a_n$ ลู่ออกเพราะ $\sum \dfrac{1}{b_n}$ ลู่ออก ซ.ต.พ

ตัวอย่างที่ 22 จงทดสอบอนุกรม $\sum \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$ ด้วยวิธีคุมเมอร์

วิธีทำ ให้ $b_n = n$ จะได้ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}.b_n - b_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+1}.n - n - 1 = -\dfrac{n+1}{2n+1}$

ดังนั้น c_n เป็นลบทุก ๆ n

และ $\sum \dfrac{1}{b_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ ลู่ออก จากวิธีของคุมเมอร์จะได้ว่าอนุกรมที่ให้มาลู่ออก

ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 13 วิธีแรบบี้ (Raabe's Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมบวกและ $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$ เมื่อ $-\infty < r < \infty$ ดังนั้น

1. $\sum a_n$ ลู่เข้า เมื่อ $r > 1$
2. $\sum a_n$ ลู่ออก เมื่อ $r < 1$
3. ทดสอบไม่ได้ เมื่อ $r = 1$

ตัวอย่างที่ 23 จงทดสอบอนุกรม $\sum \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$ ด้วยวิธีแรบบี้

วิธีทำ $n\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = n\left(\dfrac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \dfrac{n}{2n+1}$

ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

แต่ $\dfrac{1}{2} < 1$ จากวิธีของแรบบี้จะได้ว่าอนุกรมที่ให้มาลู่ออก ตอบ

3.4 อนุกรมกำลัง (Power Series)

นิยามที่ 13 ให้ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots,$ เป็นค่าคงที่ และ x เป็นตัวแปร เราเรียกอนุกรมที่เขียนในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{หรือ} \quad a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots$$

ว่า **อนุกรมกำลังในกำลังของ** $x-c$ เรียก a_n เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง** และเรียก c ว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง**

ถ้า $c = 0$ จะได้อนุกรมกำลังในกำลังของ x เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

เนื่องจากค่าของแต่ละพจน์ในอนุกรมขึ้นอยู่กับค่าของ x ลักษณะการลู่เข้าของอนุกรมกำลังจึงขึ้นอยู่กับค่าของ x

ตัวอย่างของอนุกรมกำลัง

เช่น $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

จากทฤษฎีบทที่ 7 เราจะได้ว่า การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ เป็นไปได้ 3 กรณี ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 14 สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ หนึ่งในเงื่อนไขต่อไปนี้เท่านั้นที่จะเป็นจริง

(1) อนุกรมจะลู่เข้า สำหรับค่า $x = c$ ค่าเดียวเท่านั้น

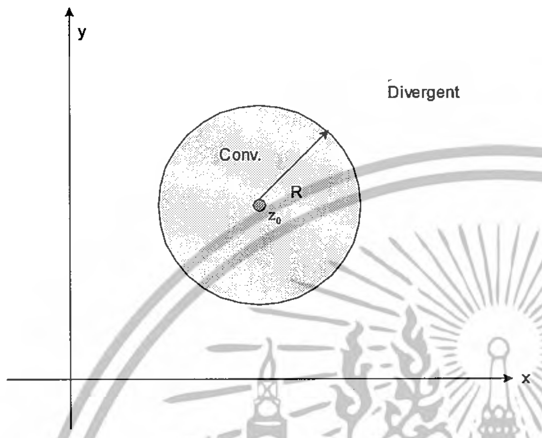
(2) อนุกรมจะลู่เข้า สำหรับทุกค่าของ x

(3) มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า ทุกค่า x เมื่อ $|x-c| < R$ และลู่ออกทุกค่า x เมื่อ $|x-c| > R$

หมายเหตุ ในกรณีที่ (3) ของทฤษฎีบทที่14 อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกที่ x เมื่อ $|x-c| = R$ ก็ได้

3.4.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

นิยามที่ 14 เราจะเรียกค่า R ในทฤษฎีบทที่14 ว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) และเรียกเซตของค่าของ x ทั้งหมดที่ได้ในอนุกรมลู่เข้าว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergence)



รูปที่ 3.1 Radius of convergence

นิยามที่ 15

(1) ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x=c$ เท่านั้น แล้วอนุกรมจะมีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น 0 $(R=0)$

(2) ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าทุกค่า x แล้วอนุกรมจะมี รัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น $+\infty$ $(R=\infty)$

ตัวอย่างที่ 24 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$

วิธีทำ ให้

$$a_n(x) = \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$$

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{|x-2|^2}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^2}{9}$$

$$= \frac{|x-2|^2}{9}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 7 จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n} \text{ ลู่เข้าเมื่อ } \frac{|x-2|^2}{9}<1 \text{ หรือ } |x-2|<3 \text{ หรือ } -1 < x < 5$$

...(1)

และ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่ออกเมื่อ $\frac{|x-2|^2}{9}>1$ หรือ $|x-2|>3$

...(2)

พิจารณาเมื่อ $|x-2|=3$ หรือ x = -1 , 5

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ คือ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}1$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก $(\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0)$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ x = -1 , 5 ... (3)

จาก (1) , (2) และ (3) สรุปได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ (-1 , 5) ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 15 (Radius of Convergence R)

ให้ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q$ แล้ว

ถ้า $q=0$ แล้ว $R=\infty$ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าทุกค่าของ x

ถ้า $q\neq 0$,$(0<q<\infty)$ แล้ว $R=\frac{1}{q}$

ถ้า $q=\infty$ แล้ว $R=0$ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x=c$ เท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X_n=a_n(x-c)^n$

จาก ทฤษฎีบทที่ 8 (Ratio Test) จะได้

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_{n+1}}{X_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-c|=q|x-c|$$

ถ้า $q=0$ แล้ว $L=0$ ทุกค่าของ x และ โดย Ratio Test จะได้ว่าอนุกรมลู่เข้าทุกค่าของ x

ถ้า $q>0$ แล้ว โดย Ratio Test อนุกรมจะลู่เข้า เมื่อ $L=q|x-c|<1$ หรือ $|x-c|<\dfrac{1}{q}$ และอนุกรมจะลู่ออกถ้า $L=q|x-c|>1$ หรือ $|x-c|>\dfrac{1}{q}$

และถ้า $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\infty$ แล้วโดย Ratio Test จะได้ว่า $\left|\dfrac{X_{n+1}}{X_n}\right|\geq 1$ สำหรับทุก $x\neq c$ และทุก n ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ ดังนั้น อนุกรมลู่ออกสำหรับทุก $x\neq c$ แสดงว่าเมื่อ $q=\infty$ อนุกรมจะลู่เข้าที่ $x=c$ เท่านั้น ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 25</u> จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n x^n}{n}$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{n}\dfrac{n+1}{10^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10n}=\dfrac{1}{10}$

ดังนั้น $R=\dfrac{1}{10}$ นั่นคืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{10}$

ที่ $x=\dfrac{1}{10}$ อนุกรมเป็น $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ลู่ออก

ที่ $x=-\dfrac{1}{10}$ อนุกรมเป็น $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้า

ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าได้แก่ $[-\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10})$ ตอบ

3.5 อนุกรมเทเลอร์และอนุกรมแมคคลอริน

นิยามที่ 16 ถ้า f มีค่าอนุพันธ์ทุกอันดับที่ a เรานิยาม **อนุกรมเทเลอร์ของ f รอบ** $x=a$ (Taylor series for f about $x=a$) ให้เป็นอนุกรมต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

และถ้า $a=0$ เราจะเรียกอนุกรมข้างต้นว่า **อนุกรมแมคคลอรินของ f** (Maclaurin series) นั่นก็คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

<u>ตัวอย่างที่ 26</u> จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ e^x

<u>วิธีทำ</u> $f(x)=e^x, f(0)=1$

$f'(x)=e^x, f'(0)=1$

$f''(x)=e^x, f''(0)=1$

.

.

.

$f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1$

ดังนั้น $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ตอบ

<u>ตัวอย่างที่ 27</u> จงหาอนุกรมเทเลอร์ รอบจุด $x=\frac{\pi}{2}$ ของ $\cos x$

<u>วิธีทำ</u> $f(x)=\cos x, f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$f'(x)=-\sin x, f'(\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$f''(x)=-\cos x, f''(\frac{\pi}{2})=-\cos\frac{\pi}{2}=0$

$f'''(x)=\sin x, f'''(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$

.

.

.

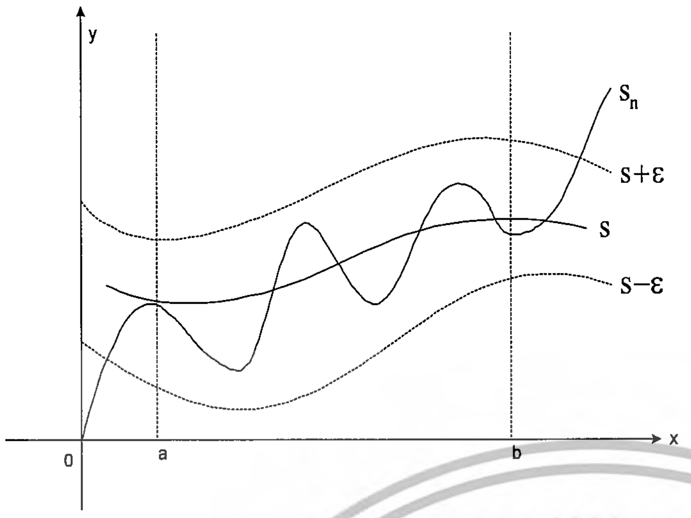
ดังนั้น $\cos x \approx -(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3-\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{2})^5+\ldots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}$$ ตอบ

3.6 การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ (Uniform Convergence)

นิยาม 17 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบนช่วง I เรากล่าวว่า $\{s_n\}$ **ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ** (uniformly convergent) สู่ s ใน I ถ้าทุกๆ $\varepsilon>0$ มีจำนวน $N=N(\varepsilon)$ ที่ไม่ขึ้นกับ x ที่ทำให้

$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$ สำหรับทุก $n>N$ และทุก x ใน I



<u>รูปที่ 3.2</u> Uniform convergence

ความหมายในเชิงเรขาคณิตสามารถวาดภาพได้ดังรูป สำหรับค่า n ที่ใหญ่พอ คือ $n > N$ กราฟของ $s_n(x)$ จะต้องอยู่ภายในแถบที่หนา 2ε รอบ ๆ กราฟของ s(x)

ทฤษฎีบทที่ 16 เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงที่ $\{s_n\}$ จะลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ s ใน I คือ ลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ศูนย์ ถ้าเรานิยามให้ $M_n = \sup_I |s_n(x) - s(x)|$

<u>พิสูจน์</u> <u>เงื่อนไขที่พอเพียง</u> สมมติว่า จะได้ว่า $M_n \to 0$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N(\varepsilon)$ ที่ทำให้ $0 \le M_n < \varepsilon$ เมื่อใดที่ $n > N$ แต่

$$|s_n(x) - s(x)| \le M_n$$

สำหรับทุก x ใน I เราย่อมได้

$$0 \le |s_n(x) - s(x)| \le M_n < \varepsilon \quad \text{เมื่อใดที่ } n > N$$

นั่นคือ $\{s_n\}$ ลู่เข้าสู่ s

<u>เงื่อนไขที่จำเป็น</u> สมมติว่า $\{s_n\} \to s$ อย่างสม่ำเสมอ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ มีจำนวน $N(\varepsilon)$ ที่ไม่ขึ้นกับ x ที่ทำให้

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon \qquad \text{เมื่อ } n > N$$

ค่า ε นี้เป็นขอบเขตบนค่าหนึ่งของจำนวน $|s_n(x)-s(x)|$ ต่าง ๆ ดังนั้นขอบเขตบนค่าน้อยสุด $M_n \le \varepsilon$ นั่นคือ

$$0 \le M_n < \varepsilon \qquad \text{เมื่อ } n > N$$

ดังนั้น $M_n \to 0$ ตามต้องการ ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่าง 28</u> จงแสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$ โดยที่

$$s_n = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad , I = [0, \pi]$$

ลู่เข้าสู่ 0 อย่างสม่ำเสมอใน I

<u>วิธีทำ</u> $$|s_n(x) - 0| \le M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ดังนั้น $M_n \to 0$ จึงได้ $s_n(x) \to 0$ อย่างสม่ำเสมอ ตอบ

ทฤษฎีบทที่ 17 (Weierstrass M-test for Uniform Convergence)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันนิยามบนช่วง I และมีลำดับของจำนวนคงที่ $M_n > 0$ ที่ทำให้ $|a_n(x)| \le M_n$ สำหรับทุก x ใน I และทุก n ถ้าอนุกรม $\sum M_n$ ลู่เข้า จะได้อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ (uniform convergence) ใน I

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $\sum M_n$ ลู่เข้า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N(\varepsilon)$ ที่ทำให้ $\sum_{k=n}^{m} M_n < \varepsilon$ เมื่อใดที่ $n > N$

ถ้า $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_n(x)$ เราจะได้ว่า สำหรับทุก x ใน I

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{k=b}^{m} a_n(x)\right| \\ &\le \sum_{k=n}^{m} |a_n(x)| \\ &\le \sum_{k=n}^{m} M_n < \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้นอนุกรมจึงลู่เข้าสม่ำเสมอใน I โดย Cauchy's Convergence for Sequence ซ.ต.พ.

<u>ตัวอย่างที่ 29</u> จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ ในช่วง $I = (-\infty, \infty)$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นได้ว่า $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ ทุก ๆ ค่าของ n

ให้ $M_n = \dfrac{1}{n^2}$ ดังนั้น $\sum M_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ ตอบ

บทที่ 4
การดำเนินงานพัฒนาโปรแกรม

4.1 ขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม

4.1.1 ศึกษาการเขียนเว็บเพจด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Macromedia Dreamweaver MX และการเขียนภาษา HTML

4.1.2 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่อง อนุกรมอนันต์

4.1.3 ทดสอบการใช้งานและแก้ไขข้อบกพร่อง

4.1.4 จัดทำคู่มือและการใช้โปรแกรม

4.2 ภาษา HTML

HTML (Hyper Text Markup language) เป็นรูปแบบหนึ่ง ของภาษา SGML (Standard Generalized Markup Langrage) นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเตอร์เน็ต เหมือนเราใช้โปรแกรมระบบปฏิบัติการ DOS ซึ่งถูกตัดแยกออกมาจากโปรแกรมระบบปฏิบัติการ UNIX เช่นเดียวกับ HTML ซึ่งเป็นภาษาหลักสำหรับการสร้างเว็บเพจ แฟ้มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นจะนำไปแสดงได้ด้วยโปรแกรม Web browser เช่น โปรแกรม Internet Explorer และ Netscape Navigator

HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้และการเขียน ซึ่งจัดว่าง่ายกว่าภาษาคอมพิวเตอร์ที่เคยมีมา แต่ก่อให้เกิดคุณประโยชน์ขึ้นมากมายจนทำให้เราลืมไปว่านี่เป็นเพียงส่วนหนึ่งของภาษาใหญ่ที่มีขีดความสามารถสูงกว่า

ปัจจุบันภาษา HTML ได้ถูกกำหนดมาตรฐานให้สูงขึ้น มีขีดความสามารถสูงขึ้น และมีองค์ประกอบในการสร้างฐานข้อมูลที่ดีขึ้น

4.3 HTML ทำงานอย่างไร

การใช้บริการอินเตอร์เน็ตไม่ว่าจะเป็น E-mail, FTP, Gopher, Telnet หรือบริการอื่น ๆ ที่ต้องเชื่อมต่ออุปกรณ์ภายในซับซ้อนของ Hardware ที่สามารถทำงานได้ด้วยโปรแกรมเฉพาะที่ทำงานบนอินเตอร์เน็ตเท่านั้น

WWW แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็น Server เหมือนกับในระบบเครือข่ายทั่วไป ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่อมโยงถึงกันผ่านทางอินเตอร์เน็ตโดยมี HTML เป็นฐานข้อมูลที่สำคัญ เมื่อWeb browser ส่งข้อความร้องของข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์ HTML จากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่าน Modem หรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่นไปยังศูนย์บริการอินเตอร์เน็ต (ISP) ตาม protocol ที่กำหนดไว้ผ่านทาง URLs (Uniform Resource Locators) และเมื่อข้อมูลเดินทางมาถึง Web Server ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้เครื่อง Web Server

ของศูนย์จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมาและจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด โดยอาจมีการเชื่อมโยงไปยัง Web Server อื่นอีก หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้วจะทำการรับส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับมายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งาน โปรแกรม Web Server ที่เครื่องคอมพิวเตอร์ของเราก็จะแปลงสัญญาณคำสั่งและแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราใช้งานต่อไป

ปัจจุบัน Web Server ที่ให้บริการกันอยู่ทั่วทุกมุมโลกนั้น ข้อมูลที่บริการส่วนใหญ่ไม่เสียค่าบริการใด ๆ เราเสียเพียงค่าโทรศัพท์เท่านั้น แต่ได้ประโยชน์จากมันมากมาย ด้วยความสามารถอันยอดเยี่ยมของ HTML ข้อมูลจากแหล่งต่าง ๆ จะถูกนำมาแสดงตรงหน้าผู้ใช้ โดยเครื่องคอมพิวเตอร์ทำหน้าที่ประมวลผลข้อมูลผ่าน protocol HTML เป็น protocol

4.4 การสร้างเว็บเพจด้วย Macromedia Dreamwever MX

ในการสร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์นี้จะนำโปรแกรม Macromedia Dreamweaver MX มาช่วยในการสร้าง ซึ่งโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ภาษา HTML โดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมเอง เนื่องจากตัวโปรแกรมมี Tool ต่าง ๆให้เลือกใช้เพื่อช่วยในการออกแบบเว็บเพจ

มากมาย โดยโปรแกรมจะแปลงให้เป็นภาษา HTML ใน Source Code ให้เองโดยอัตโนมัติ แต่ผู้สร้างเว็บเพจควรมีความรู้เกี่ยวกับภาษา HTML เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการสร้างเว็บเพจให้ดียิ่งขึ้น นอกจากจะนำโปรแกรม Macromedia Dreamweaver MX มาใช้แล้ว เรายังใช้โปรแกรม Photoshop 7.0 มาช่วยในการตกแต่งรูปภาพที่นำมาใช้ในการตกแต่งหน้าเวบเพจ และใช้สร้างลูกเล่นบนหน้าเวบเพจด้วย และที่ถือว่าเป็นส่วนสำคัญของโปรแกรมช่วยสอนนี้คือโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ได้มีผู้สร้างไว้แล้ว เราเพียงนำโปรแกรมตัวนี้มาใช้เพื่อเสริมการทำงานของโปรแกรมช่วยสอนนี้ให้มีความน่าสนใจมากยิ่งขึ้น

ข้อจำกัดของโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ที่ควรทราบมีดังนี้

1. โปรแกรมจะทำงานได้ถูกต้องก็ต่อเมื่อผู้ใช้คีย์ฟังก์ชันของอนุกรมอนันต์เข้าไปในตัวโปรแกรมได้ถูกต้องตามรูปแบบของการคีย์ใน Software Mathematica

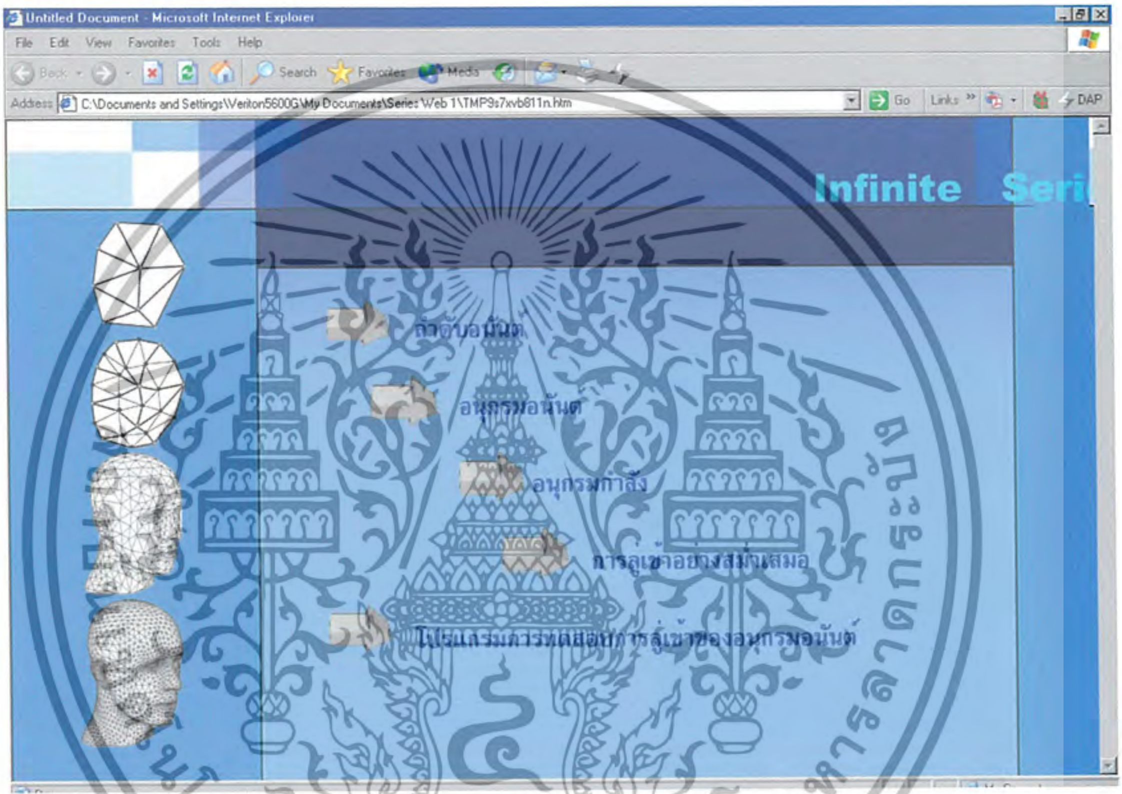
2. โปรแกรมการทดสอบในกรณีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมกำลังที่มีรูปแบบฟังก์ชันอนุกรมสลับที่มี แฟคทอเรียลรวมอยู่ด้วย โปรแกรมจะไม่สามารถห่คำตอบที่ถูกต้องได้

3. โปรแกรมการทดสอบในกรณีการทดสอบอนุกรมสลับ การคีย์ฟังก์ชันจะต้องคีย์ส่วนที่แสดงว่าเป็นอนุกรใสลับก่อน ยกตัวอย่างเช่นถ้าต้องการทดสอบการลู่เข้าของ $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^x x+3}{x(x+1)}$ ก็

ต้องคีย์ (-1)^x ก่อน แล้วจึงคีย์ (x+3)/(x(x+1)) เป็นต้น โปรแกรมจะไม่สามารถทราบได้ว่าเป็นอนุกรมสลับถ้าคีย์ (x+3)/(x(x+1)) ก่อนที่จะคีย์ (-1)^x

4.5 คู่มือการใช้งาน

หน้าจอในการทำงานของโปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์หน้าจอแรกซึ่งเป็นหน้าจอต้อนรับ จะปรากฏดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 หน้าจอต้อนรับ

ในหน้าจอต้อนรับนี้ จะมีหัวข้อเรื่องเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์ให้ศึกษาดังต่อไปนี้

1. ลำดับอนันต์ จะกล่าวถึงเนื้อหาเกี่ยวกับนิยามของลำดับ จะกล่าวถึงลิมิตของลำดับ ลำดับลู่เข้า ลำดับลู่ออกลำดับทางเดียว ประกอบด้วย ลำดับเพิ่ม ลำดับไม่ลด ลำดับลด ลำดับไม่เพิ่ม และวิธีการตรวจสอบลำดับทางเดียว

2. อนุกรมอนันต์ จะกล่าวถึงนิยามและผลบวกย่อยของอนุกรม อนุกรมลู่เข้าอนุกรมลู่ออกและการทดสอบการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรม ประกอบด้วยวิธีการทดสอบทั้งหมด 13 วิธี

3. อนุกรมกำลัง จะกล่าวถึงนิยามของอนุกรมกำลัง รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าอนุกรมเทเลอร์และ อนุกรมแมคคลอริน

4. การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ

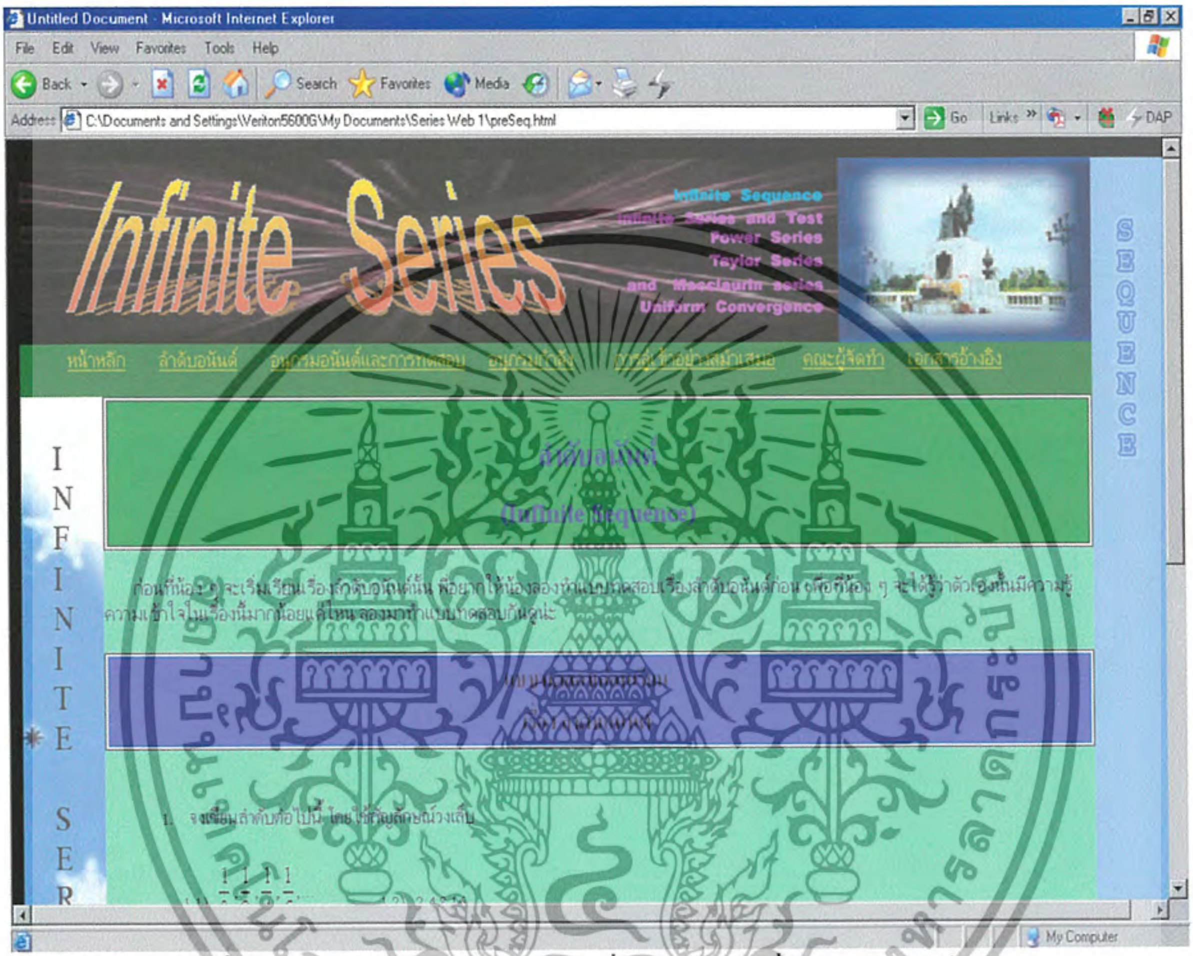
5. โปรแกรมทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์ จะเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของลำดับ อนุกรมอนันต์ อนุกรมกำลัง และอนุกรมเทเลอร์

4.6 ลักษณะการใช้งาน

เนื้อหาในการเรียนแบ่งออกเป็น 4 ส่วนดังแสดงในหน้าจอต้อนรับ โดยในการทำงานนั้น ผู้เรียนจะสามารถเข้าถึงบทเรียนได้โดยการเลือกหัวข้อที่ต้องการศึกษาในหน้าจอต้อนรับ เมื่อเลือกหัวข้อที่ต้องการจะศึกษาได้แล้วหน้าจอแรกที่ได้ในแต่ละหัวข้อจะเป็นหน้าจอแบบฝึกหัดก่อนเรียนในหัวข้อนั้น เพื่อเป็นการทดสอบความรู้ของผู้เรียนก่อนการเรียน หลังจากนั้นผู้เรียนสามารถดูเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนได้แล้วจึงจะเข้าสู่บทเรียน และเมื่อจบบทเรียนแล้วผู้เรียนก็ควรทำแบบทดสอบหลังเรียนด้วยเพื่อทดสอบความรู้ความเข้าใจหลังจากได้ศึกษาบทเรียนแล้ว ซึ่งมีเฉลยให้ดูเช่นกัน

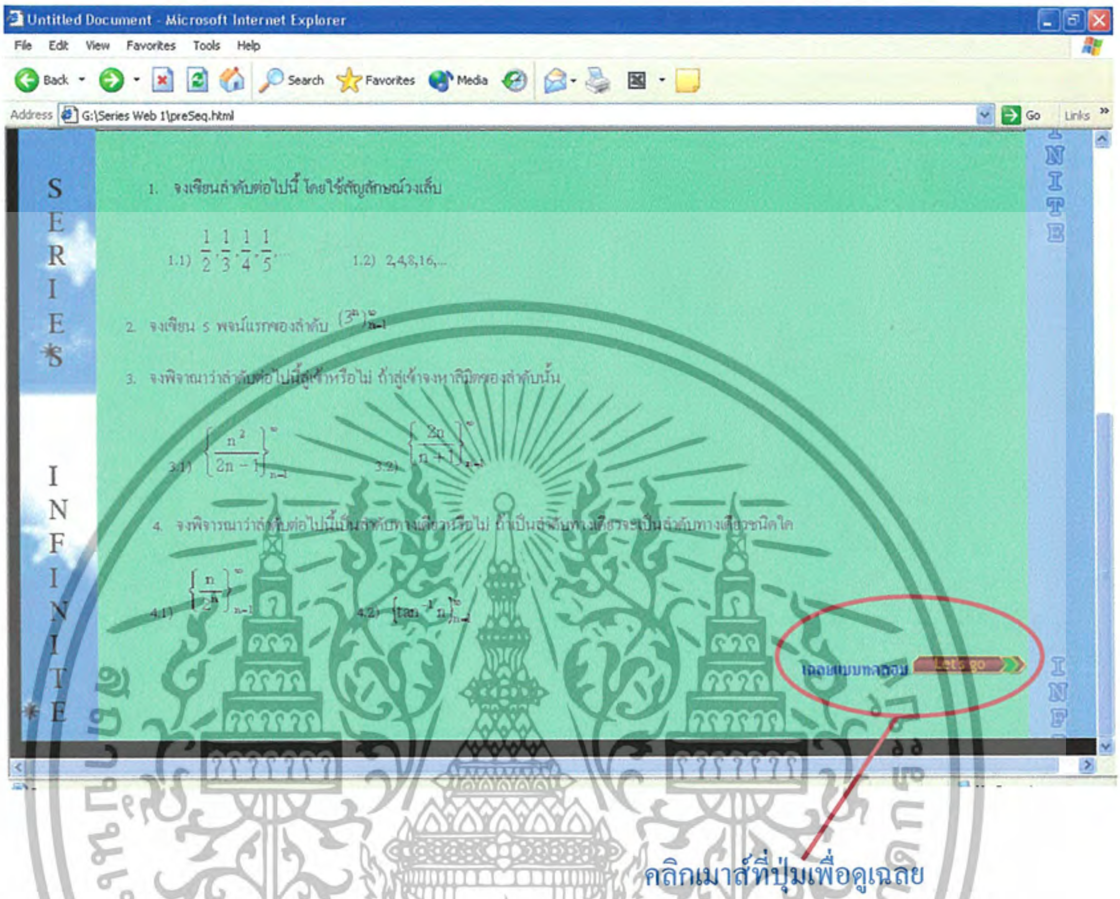
4.7 ลักษณะการทำงาน

เมื่อผู้เรียนเลือกที่จะศึกษาเรื่องลำดับอนันต์ ก็จะได้หน้าจอในการเรียนเป็นหน้าจอแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องลำดับอนันต์ดังรูปต่อไปนี้



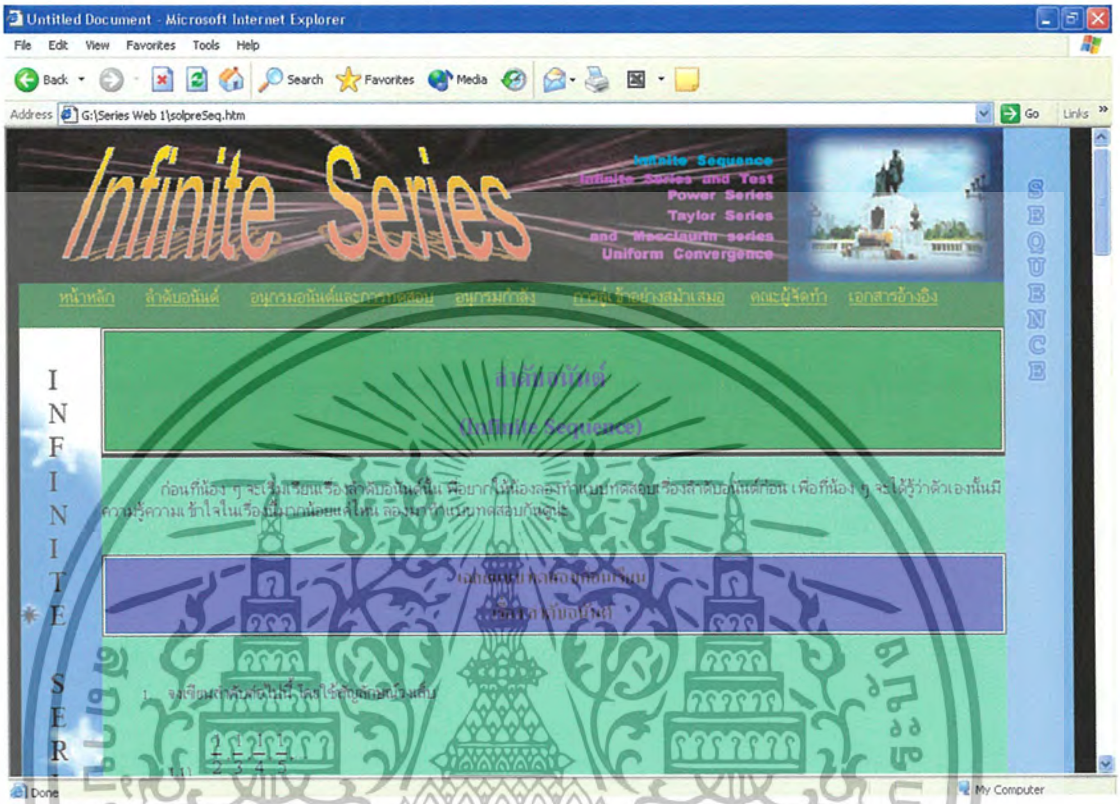
รูปที่ 4.2 หน้าจอแรกของการทำงานเมื่อเลือกหัวข้อเรื่องลำดับอนันต์

และเมื่อผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเสร็จเรียบร้อยแล้ว ก็คลิกเมาส์ที่ปุ่มด้านล่างของหน้าจอเพื่อตรวจคำตอบจากเฉลย ดังรูป



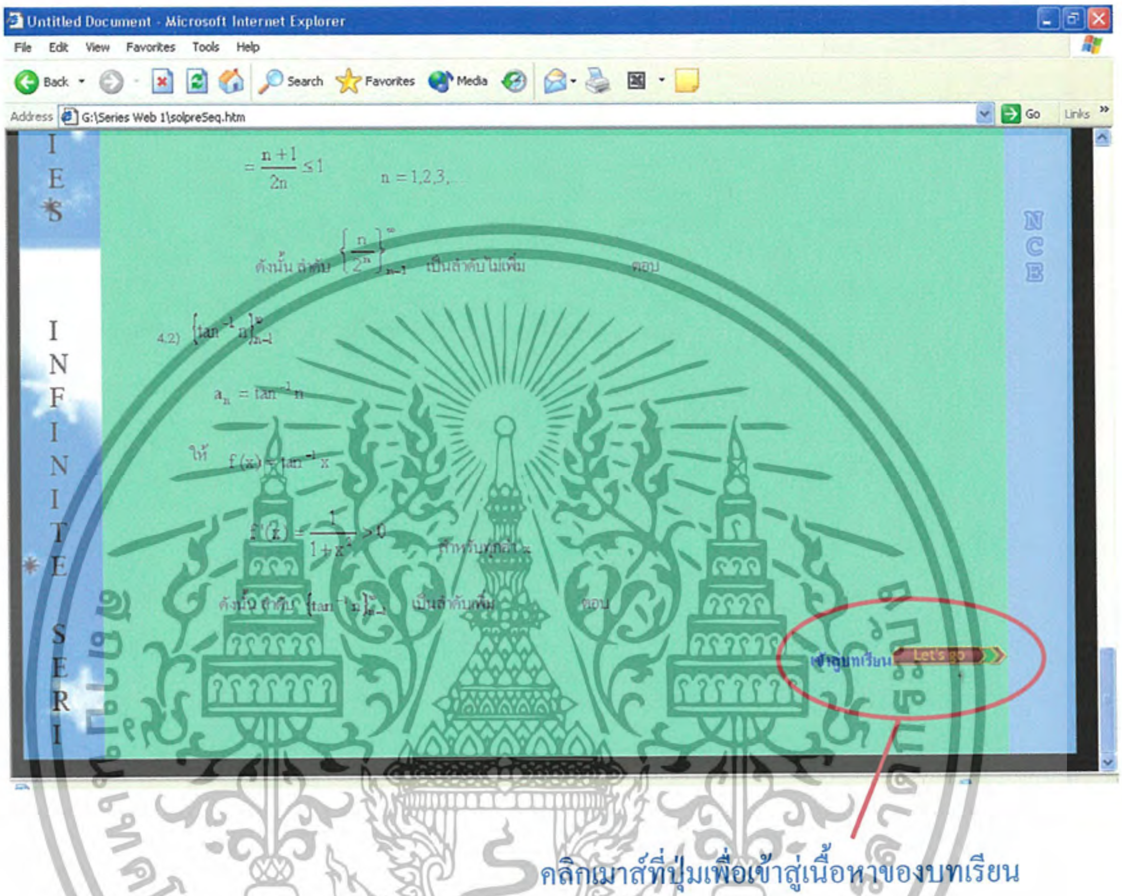
รูปที่ 4.3 แสดงปุ่มเพื่อคลิกเข้าสู่หน้าจอเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

เมื่อทำการคลิกเมาส์ที่ปุ่มแล้ว ก็จะเข้าสู่หน้าจอเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ดังรูป



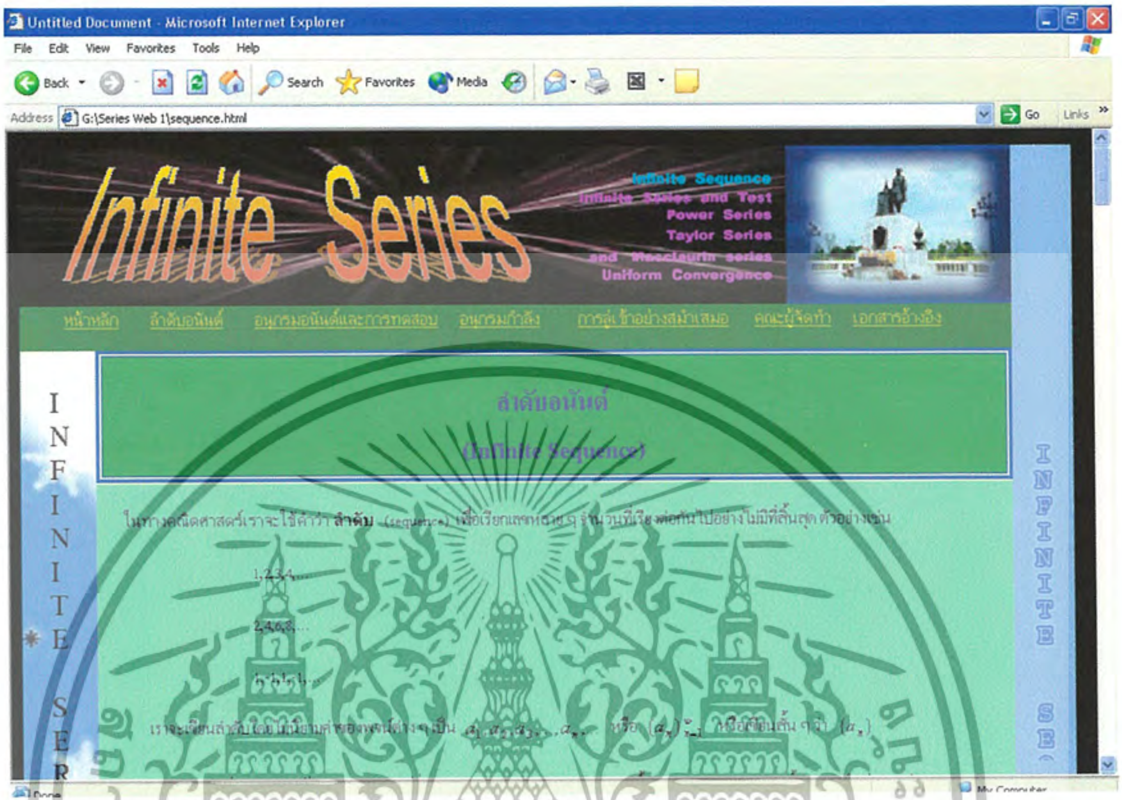
รูปที่ 4.4 หน้าจอแสดงเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

จากนั้นผู้เรียนก็จะสามารถเข้าสู่เนื้อหาของบทเรียน โดยคลิกเมาส์ที่ปุ่มด้านล่างของหน้าจอ ดังรูป



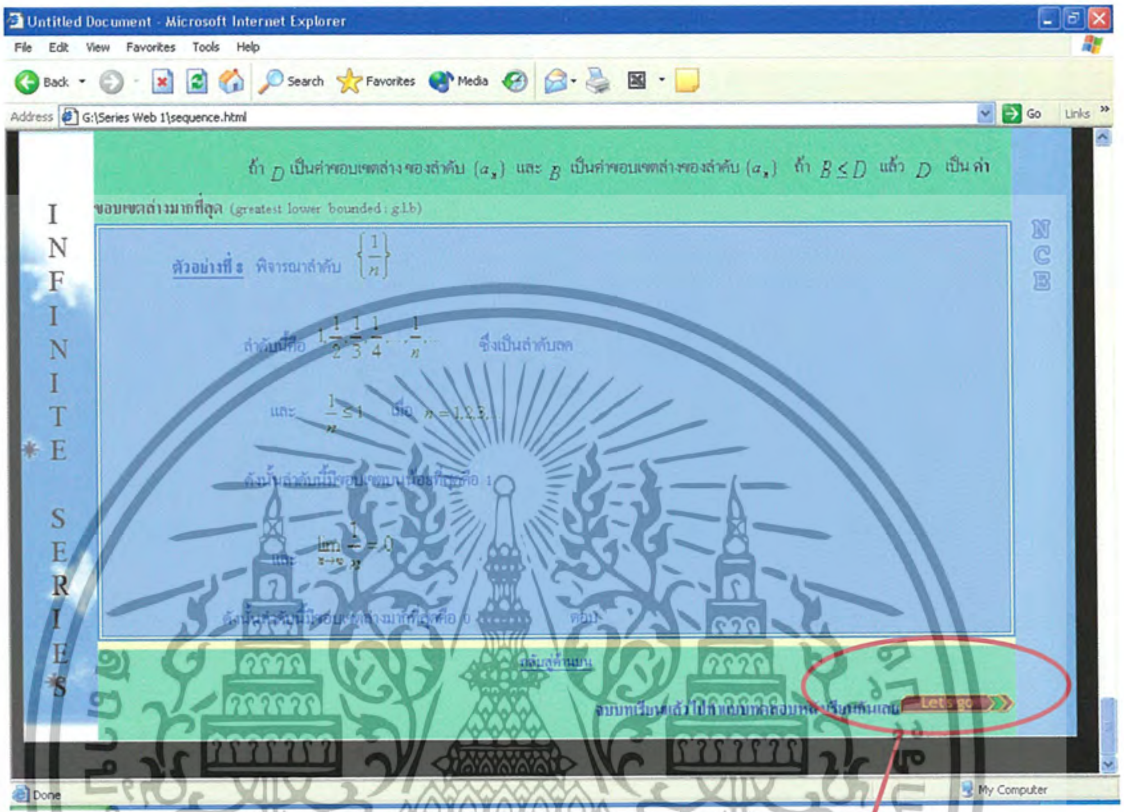
รูปที่ 4.5 แสดงปุ่มเพื่อคลิกเข้าสู่หน้าจอเนื้อหาของบทเรียน

เมื่อทำการคลิกเมาส์ที่ปุ่มแล้ว ก็จะเข้าสู่หน้าจอเนื้อหาของบทเรียน



รูปที่ 4.6 หน้าจอแสดงเนื้อหาของบทเรียนเรื่องลำดับอนันต์

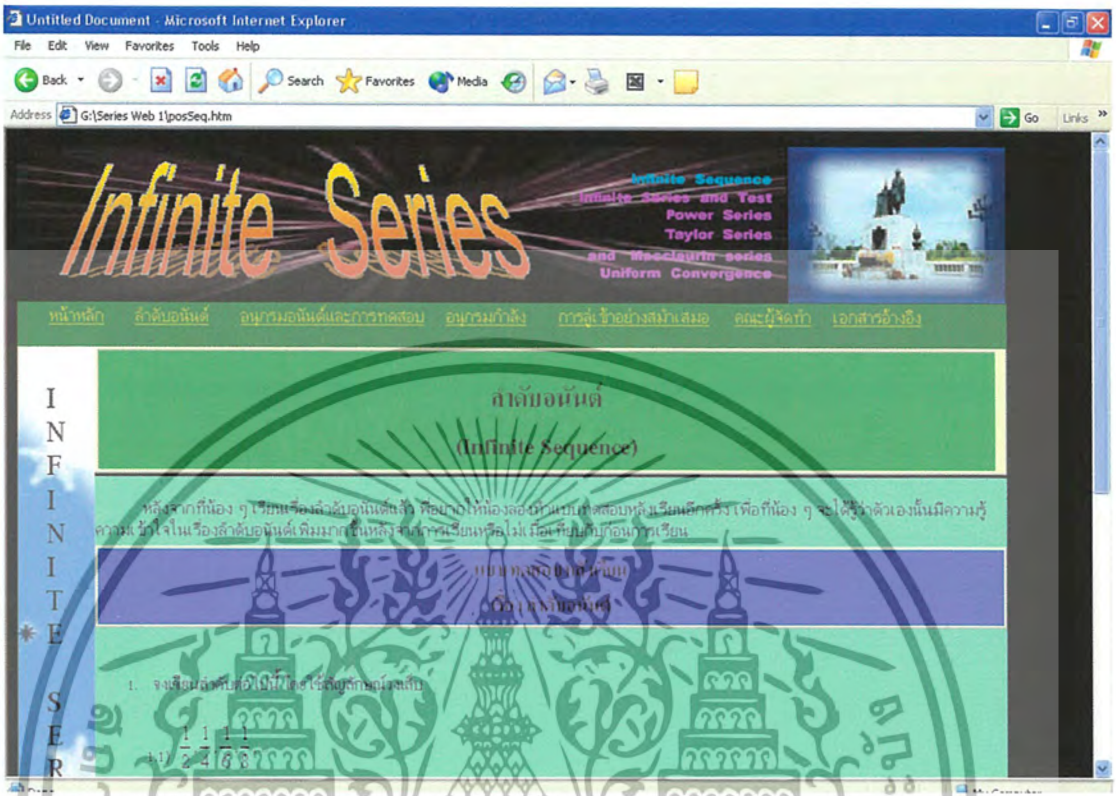
เมื่อผู้เรียนได้ทำการศึกษาเนื้อหาของบทเรียนเป็นที่เข้าใจแล้ว ก็สามารถทดสอบความรู้หลังการเรียนได้ โดยคลิกเมาส์ที่ปุ่มด้านล่างของหน้าจอ ดังรูป



คลิกเมาส์ที่ปุ่มเพื่อทำแบบทดสอบหลังเรียน

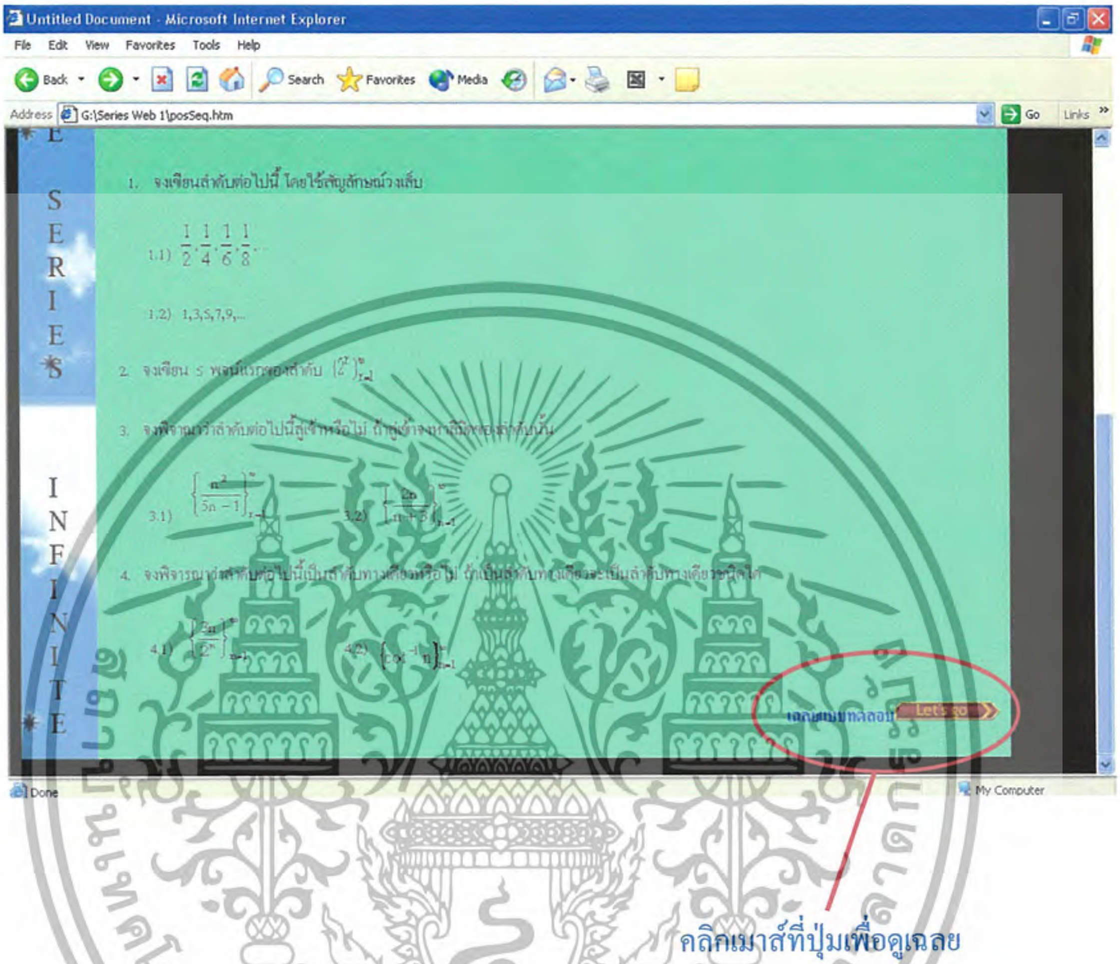
รูปที่ 4.7 แสดงปุ่มเพื่อคลิกเข้าสู่หน้าจอแบบทดสอบหลังเรียน

เมื่อทำการคลิกเมาส์ที่ปุ่มแล้ว ก็จะเข้าสู่หน้าจอแบบทดสอบหลังเรียน ดังรูป



รูปที่ 4.8 แสดงหน้าจอแบบทดสอบหลังเรียน

และเมื่อทำแบบทดสอบหลังเรียนเสร็จเรียบร้อยแล้ว ก็สามารถตรวจคำตอบได้ โดยคลิกเมาส์ที่ปุ่มด้านล่างของหน้าจอเพื่อตรวจคำตอบจากเฉลย ดังรูป



รูปที่ 4.9 แสดงปุ่มเพื่อคลิกเข้าสู่หน้าจอเฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

สำหรับการเลือกในหัวข้ออื่นๆ ก็มีขั้นตอนวิธีการทำงานเช่นเดียวกันกับการเลือกในหัวข้อเรื่องลำดับอนันต์

นอกจากนั้นแล้วในแต่ละหน้าจอก็ยังมีเมนูเพื่อการใช้งานที่สะดวกเมื่อต้องการศึกษาในหัวข้ออื่น ๆ ของอนุกรมอนันต์ ดังนี้

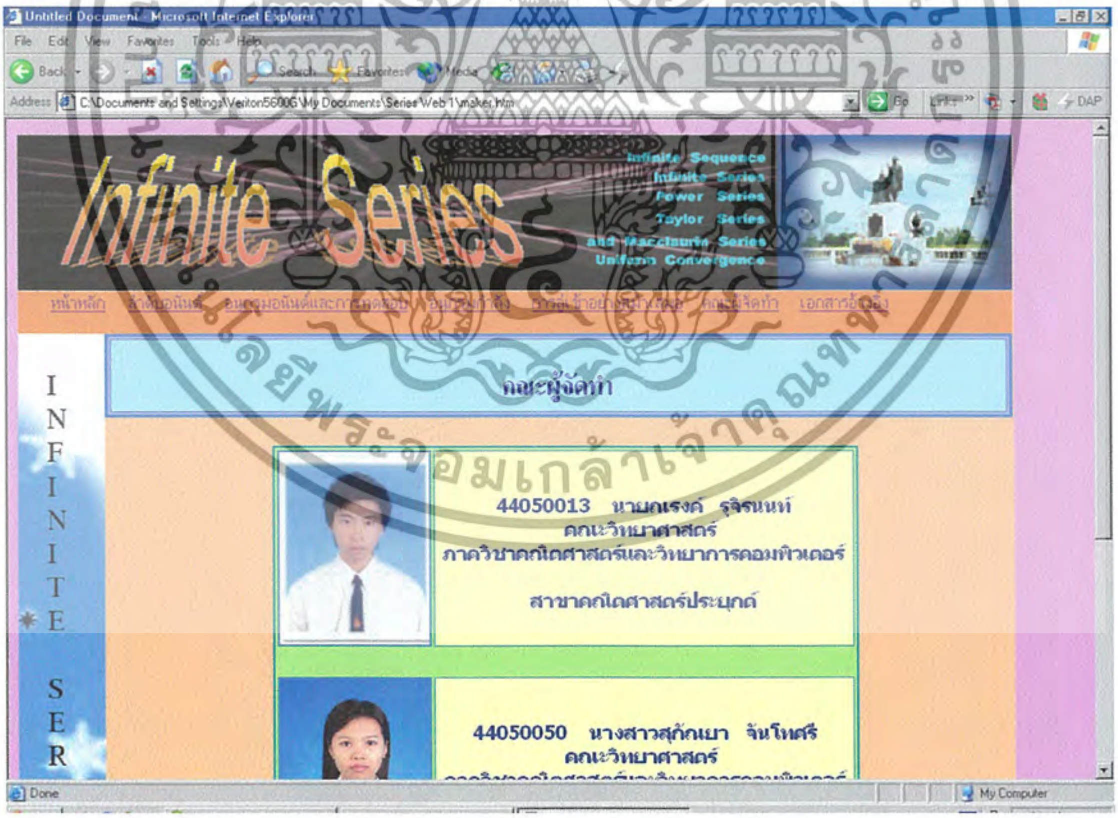
1. หน้าหลักจะเป็นการกลับสู่หน้าจอต้อนรับ
2. ลำดับอนันต์
3. อนุกรมอนันต์
4. อนุกรมกำลัง อนุกรมเทเลอร์ และอนุกรมแมคคลอริน
5. การลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ
6. คณะผู้จัดทำ

7. เอกสารอ้างอิง

ดังแสดงในรูป

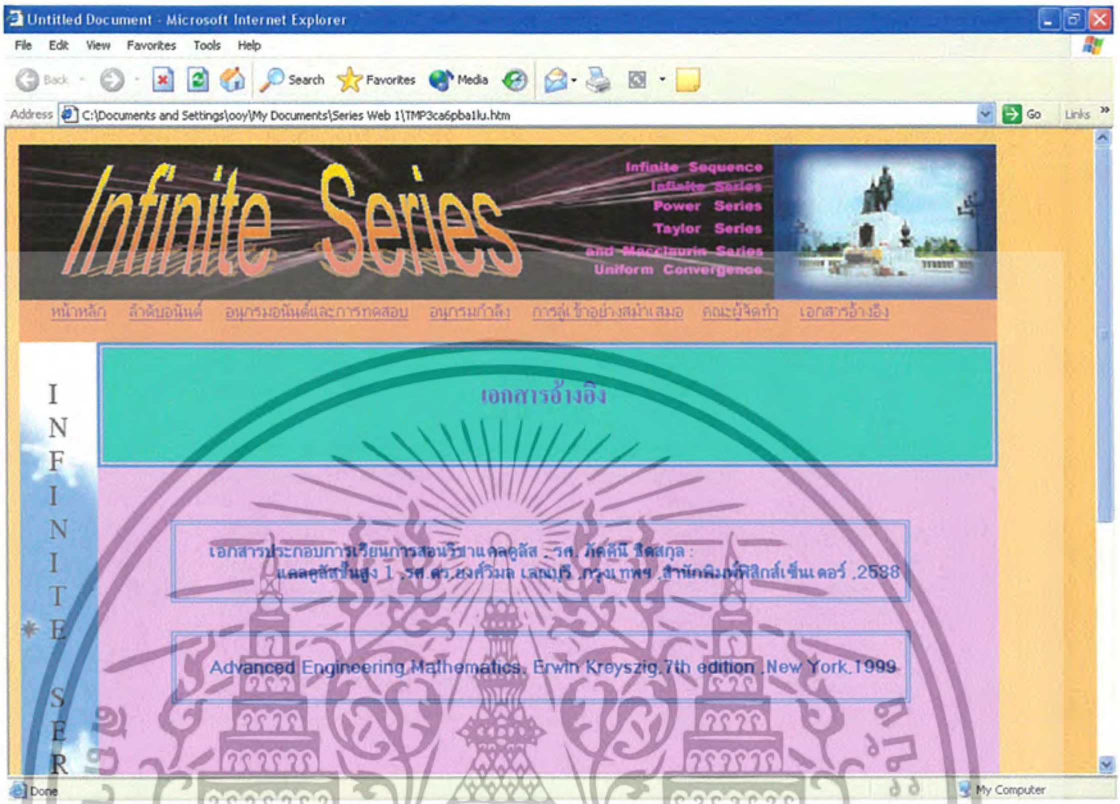
รูปที่ 4.10 แสดงเมนูในแต่ละหน้าจอ

เช่น ถ้าเลือกเมนูคณะผู้จัดทำ จะปรากฏหน้าจอดังต่อไปนี้



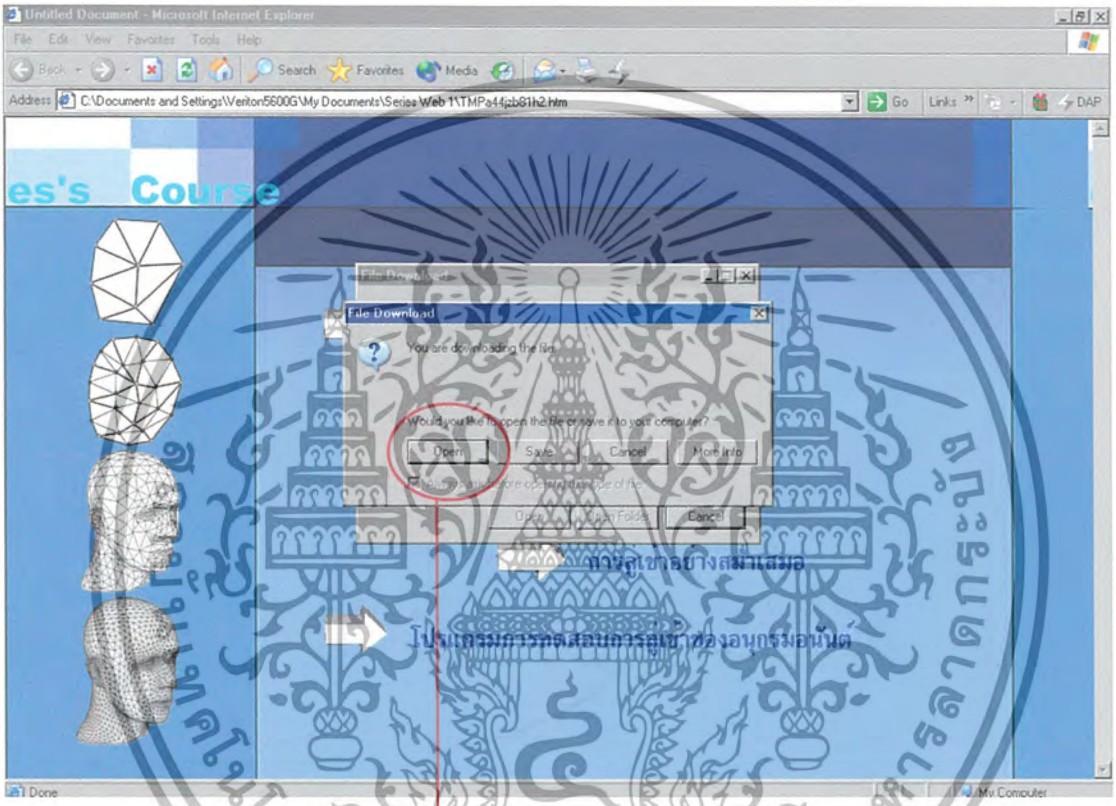
รูปที่ 4.11 หน้าจอคณะผู้จัดทำ

เมื่อเลือกเมนูเอกสารอ้างอิง จะปรากฏหน้าจอดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.12 หน้าจอเอกสารอ้างอิง

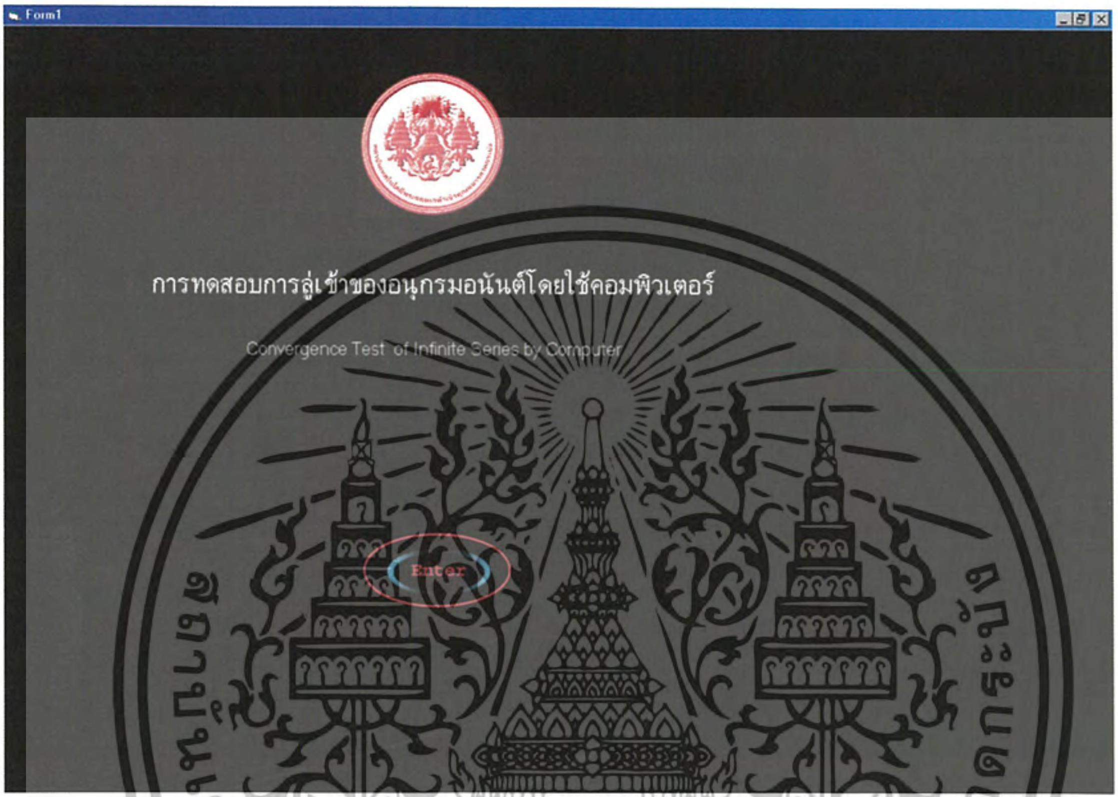
จากหน้าจอต้อนรับ สำหรับการเลือกในหัวข้อ โปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ เครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้ใช้จะต้องติดตั้งโปรแกรม mathematica 4.0 เสียก่อน ถึงจะใช้งานโปรแกรมการทดสอบได้ โดยขั้นตอนการทำงานเป็นดังนี้ เมื่อคลิ๊กเลือกโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์แล้วจะได้หน้าจอดังรูป จากนั้นให้ผู้ใช้ทำการคลิกเมาส์ที่ปุ่ม open ดังแสดงในรูป



คลิกเมาส์ที่ปุ่ม open เพื่อเข้าสู่โปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

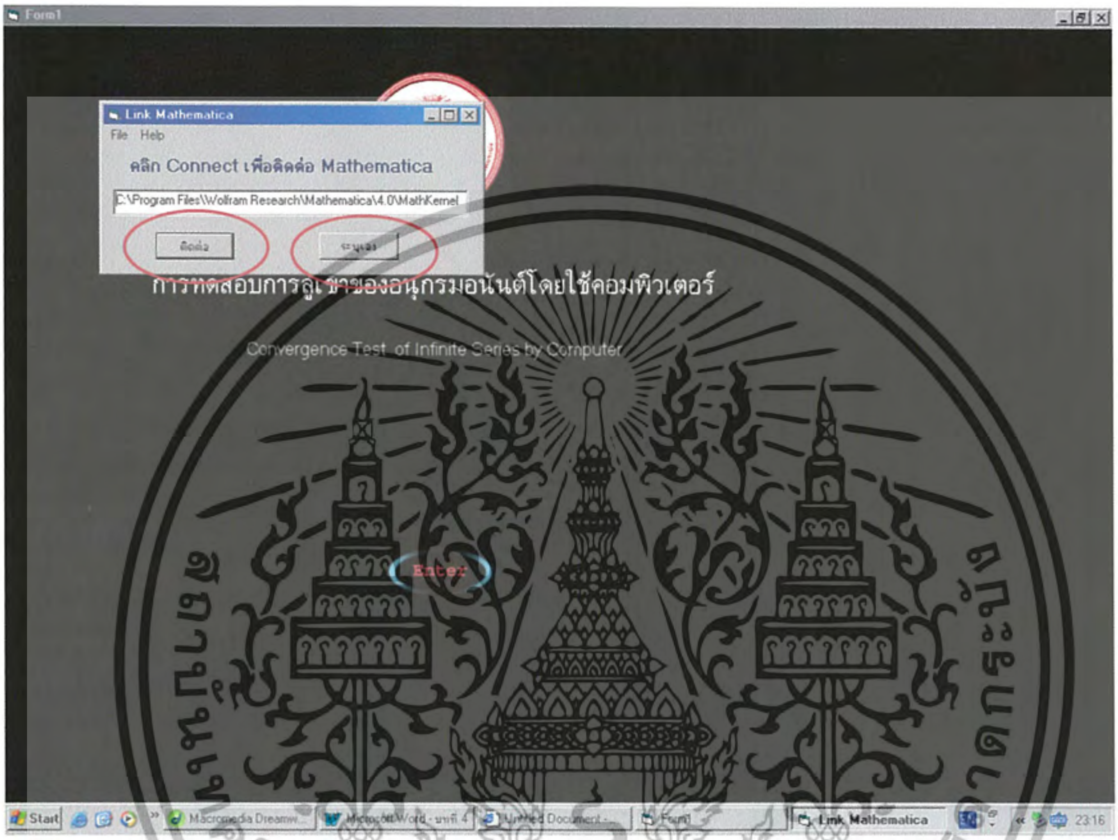
รูปที่ 4.13 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกหัวข้อโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

เมื่อทำการคลิกเมาส์ที่ปุ่ม open แล้วจะเข้าสู่หน้าจอโปรแกรมการทดสอบดังต่อไปนี้ ให้กดปุ่ม Enter เพื่อเข้าสู่ขั้นตอนต่อไป



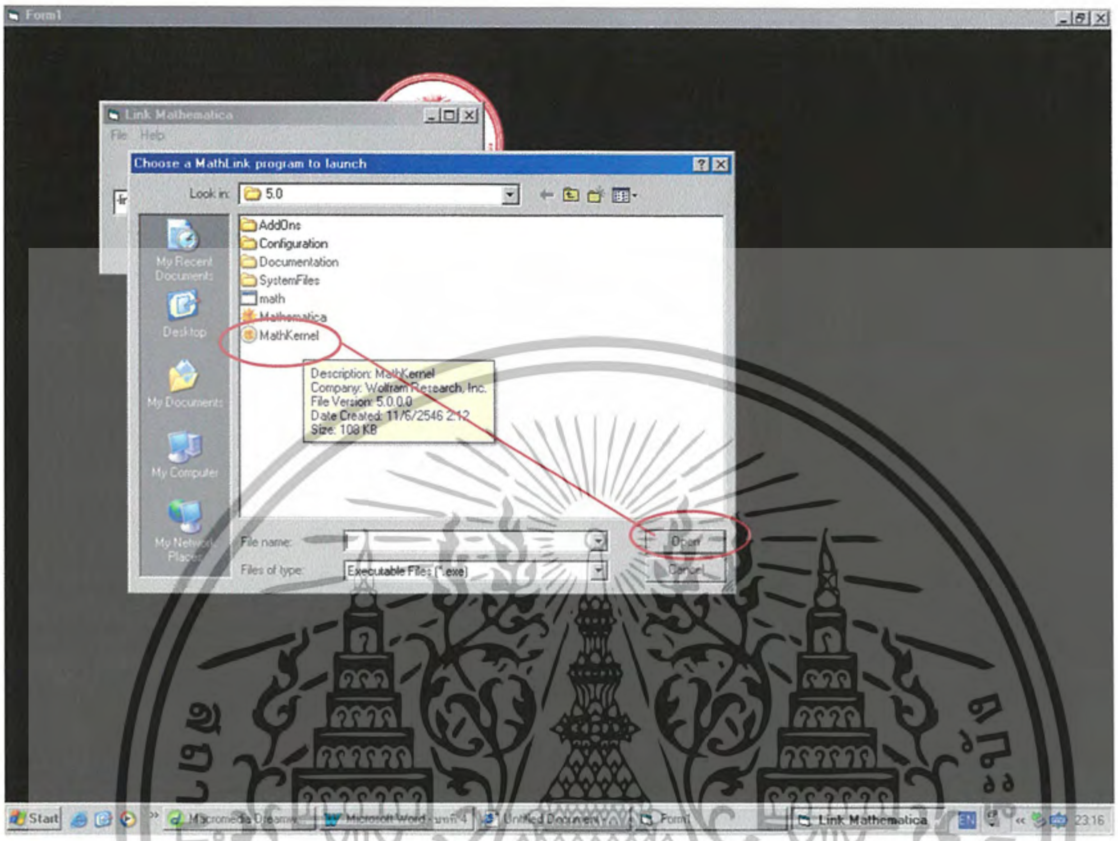
รูปที่ 4.14 แสดงหน้าจอเมื่อคลิกเมาส์ที่ปุ่ม open แล้ว

ซึ่งก่อนที่จะทำการทดสอบโปรแกรมได้ จะต้องทำการติดต่อโปรแกรม Mathematica 4.0 ก่อนดังรูป ให้กดปุ่ม ติดตั้ง หากได้ทำการติดโปรแกรมนี้ไว้แล้วตามที่อยู่ที่ระบุไว้ แต่หากติดตั้งโปรแกรมนี้ไว้ที่อื่นให้กดปุ่ม ระบุเอง เพื่อเลือกที่อยู่ของโปรแกรมตามต้องการ



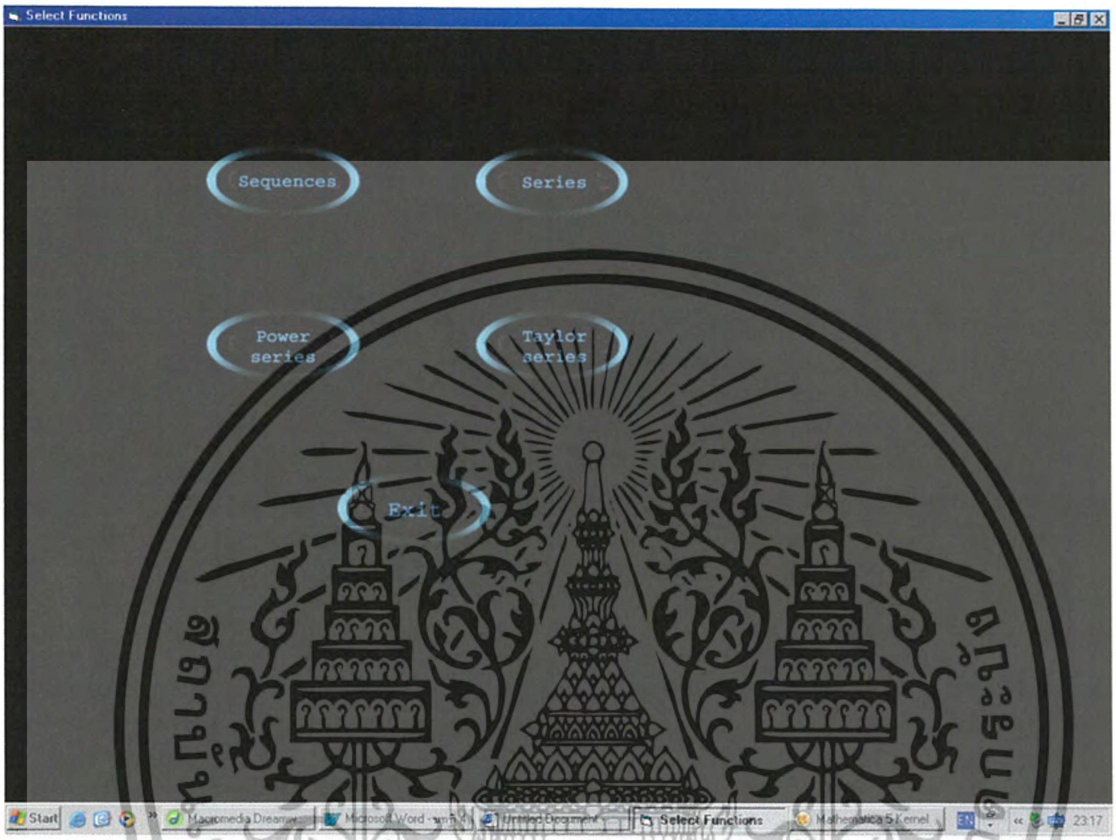
รูปที่ 4.15 แสดงหน้าจอเมื่อคลิกเมาส์ที่ปุ่ม Enter แล้ว

เมื่อเลือกการติดต่อได้แล้วจะได้หน้าจอดังต่อไปนี้ ซึ่งต้องเลือกโปรแกรม MathKernel ดังรูป



รูปที่ 4.16 แสดงหน้าจอเมื่อเลือกการติดต่อแล้ว

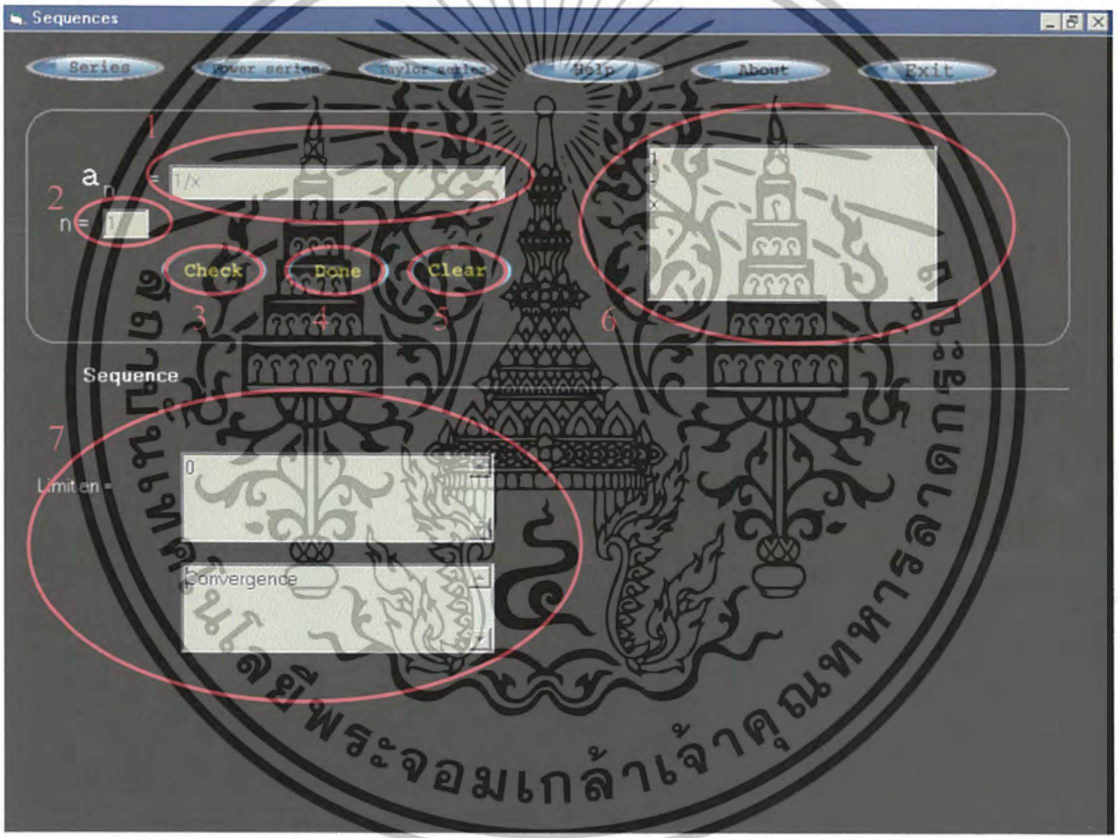
เมื่อทำการติดต่อโปรแกรม Mathematica เรียบร้อยแล้ว จะได้หน้าจอดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.17 แสดงหน้าจอเมื่อทำการติดต่อโปรแกรม Mathematica เรียบร้อยแล้ว

หน้าจอการทำงานการทำงานลำดับอนันต์

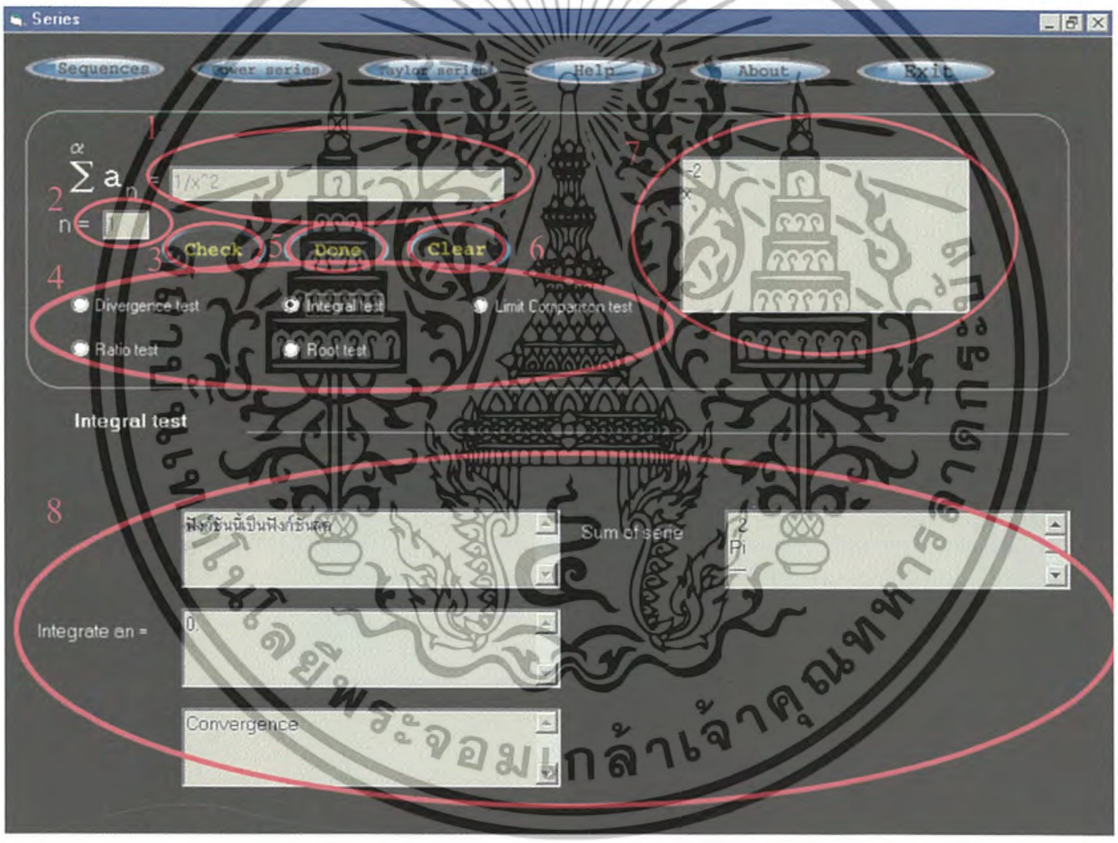
1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน
2. วงที่ 2 เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี
3. วงที่ 3 คลิ้กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่
4. วงที่ 4 คลิ้กเพื่อทำการทดสอบลำดับอนันต์
5. วงที่ 5 คลิ้กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่
6. วงที่ 6 แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป
7. วงที่ 7 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบลำดับอนันต์



รูป 4.18 หน้าจอผลการทดสอบลำดับอนันต์

หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมอนันต์

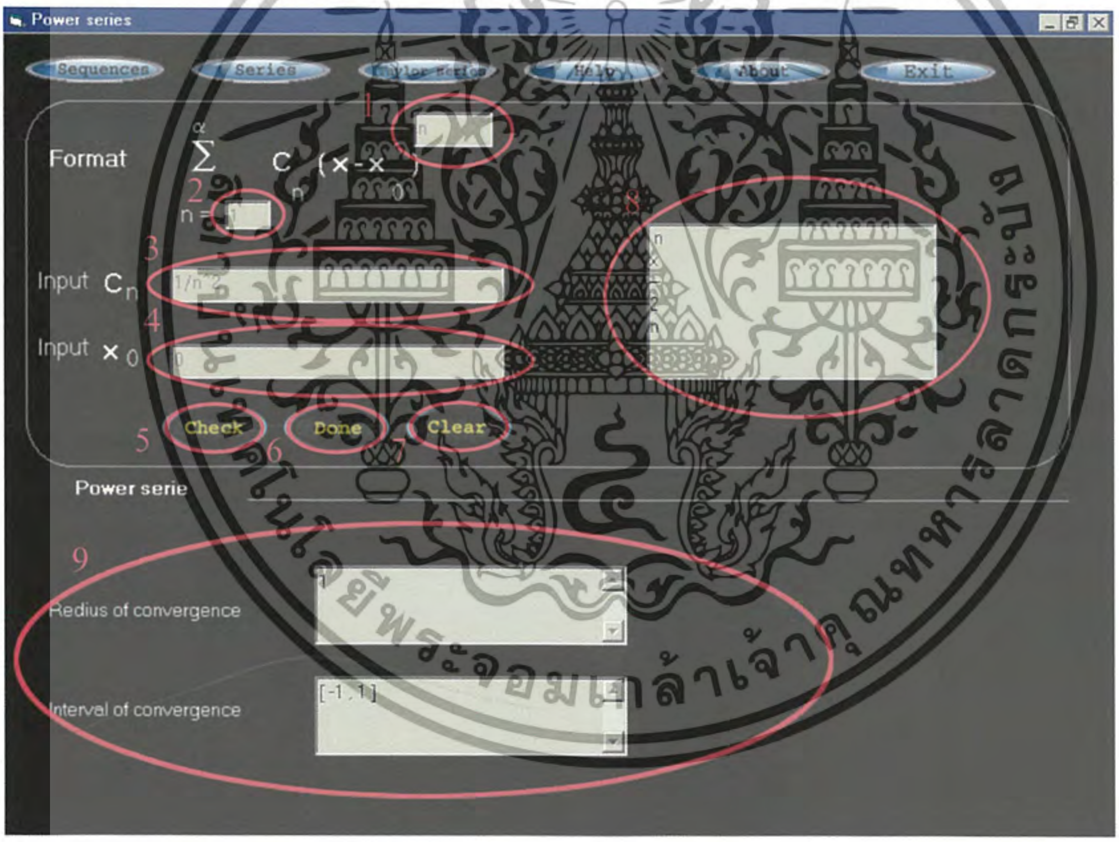
1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน
2. วงที่ 2 เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี
3. วงที่ 3 คลิ้กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่ หรือเป็นอนุกรมสลับ
4. วงที่ 4 คลิ้กเลือกวิธีที่ต้องการทดสอบอนุกรม
5. วงที่ 5 คลิ้กเพื่อทำการทดสอบลำดับอนันต์
6. วงที่ 6 คลิ้กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่
7. วงที่ 7 แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป
8. วงที่ 8 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมอนันต์



รูป 4.19 หน้าจอการทดสอบอนุกรมอนันต์

หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมกำลัง

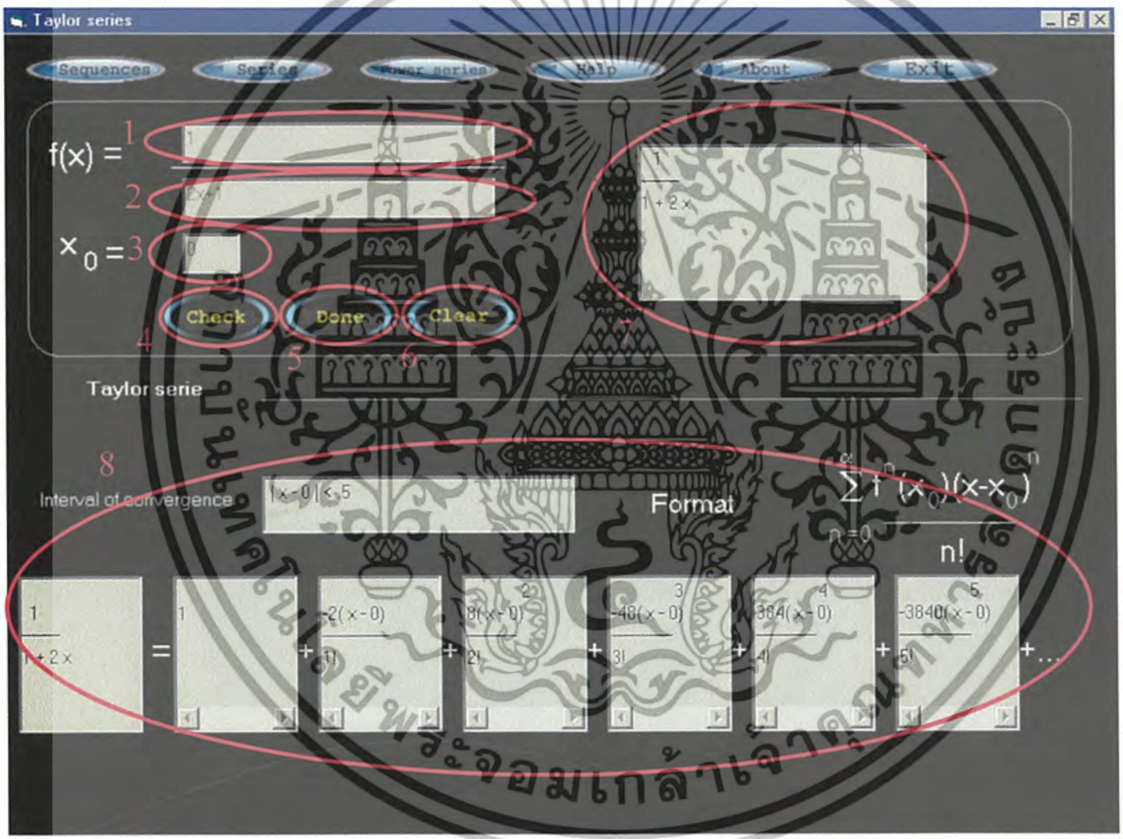
1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของตัวชี้กำลัง
2. วงที่ 2 เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี
3. วงที่ 3 เป็นส่วนที่ให้คีย์ฟังก์ชัน C_n
4. วงที่ 4 เป็นส่วนที่ให้คีย์ x_0
5. วงที่ 5 คลิ๊กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังชันว่าถูกต้องหรือไม่
6. วงที่ 6 คลิ๊กเพื่อทำการทดสอบอนุกรมกำลัง
7. วงที่ 7 คลิ๊กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่
8. วงที่ 8 แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป
9. วงที่ 9 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมกำลัง



รูป 4.20 หน้าจอการทดสอบอนุกรมกำลัง

หน้าจอการทำงานการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์

1. วงที่ 1 เป็นส่วนที่ให้คีย์ส่วนที่เป็นเศษของฟังก์ชัน
2. วงที่ 2 เป็นส่วนที่ให้คีย์ส่วนที่เป็นส่วนของฟังก์ชัน
3. วงที่ 3 เป็นส่วนที่ให้คีย์ค่าของดัชนี
4. วงที่ 4 คลิ้กเพื่อตรวจสอบการคีย์ฟังก์ชันว่าถูกต้องหรือไม่
5. วงที่ 5 คลิ้กเพื่อทำการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์
6. วงที่ 6 คลิ้กเพื่อทำการลบหน้าจอและทำเพื่อคีย์ฟังก์ชันใหม่
7. วงที่ 7 แสดงฟังก์ชันที่คีย์เข้าไป
8. วงที่ 8 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์



รูปที่ 4.21 หน้าจอแสดงการทดสอบอนุกรมเทย์เลอร์

บทที่ 5
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

การนำเนื้อหาการเรียนการสอนเรื่องอนุกรมอนันต์ มาประยุกต์ใช้ผ่านสื่ออิเลคทรอนิกส์ โดยใช้อินเตอร์เน็ตนั้น ทางคณะผู้จัดทำเรียกชื่อโปรแกรมนี้ว่า “โปรแกรมช่วยสอนเรื่องอนุกรมอนันต์”โดยแบ่งการทำงานออกเป็น 2 ส่วนคือ

5.1.1 ส่วนของเนื้อหา เป็นส่วนรายละเอียดของเนื้อหาและภาพประกอบ ซึ่งในส่วนนี้จะเป็น ส่วนที่อธิบายถึงนิยาม ทฤษฎีบทและวิธีการพิสูจน์ รวมทั้งมีตัวอย่างประกอบที่จะทำให้เข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น

5.1.2 ส่วนของแบบฝึกหัด เป็นส่วนที่เป็นโจทย์ปัญหาที่ต้องแสดงวิธีทำของคำตอบที่ได้ และมีเฉลยเมื่อต้องการทราบที่มาของคำตอบที่ถูกต้อง

จากการประเมินผลระบบโดยรวมพบว่าโปรแกรมสามารถแสดงเนื้อหาและประมวลผลเป็นไปได้ด้วยดี

5.2 ข้อจำกัด

5.2.1 แบบฝึกหัดอาจจะยังไม่สามารถใช้ทดสอบวัดความรู้ของผู้ที่เข้ามาศึกษาได้อย่างมีประสิทธิภาพมากนัก เพราะแบบฝึกหัดมีโจทย์ไม่หลากหลายพอ และการคิดคำนวณอาจไม่สะดวกสบายมากนัก

5.2.2 บางหน้าจอมีเนื้อหามากจึงทำให้การใช้งานยังเกิดความยุ่งยากอยู่บ้าง

5.2.3 โปรแกรมทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์เป็นโปรแกรมที่ได้มีผู้สร้าง คือ นายธนานิตย์ สันติวิริยนท์และคณะผู้จัดทำ ได้สร้างไว้แล้ว ซึ่งโปรแกรมนี้อาจมีข้อจำกัดในการใช้งานที่ผู้ใช้ต้องทราบก่อนการใช้งาน เพื่อให้สามารถใช้งานโปรแกรมได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด

5.3 ข้อเสนอแนะ

ผู้จัดทำเห็นว่า ผู้ที่สนใจ สามารถนำสื่อการเรียนการสอนนี้ไปพัฒนาปรับปรุง ในส่วนของรูปแบบการใช้งาน หรือในส่วนของโปรแกรมการทดสอบการลู่เข้าได้ ตามความรู้ความสามารถและความเหมาะสมของตนเอง

บรรณานุกรม

รศ. ภัคคินี ชิตสกุล . **เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส.**

รศ.ดร.ยงค์วิมล เลณบุรี . 2538 . **แคลคูลัสชั้นสูง 1** . กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ .

Erwin Kreyszig , 1999, **Advanced Engineering Mathematics.** , 7th edition . New York

ธนานิตย์ สันติวิริยนนท์ , พิชัย กนกวัฒนเลิศ และ เอกสิทธิ์ กิจขจรกุล. 2544. **ปัญหาพิเศษเรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยใช้คอมพิวเตอร์**

พันจันทร์ ธนวัฒนเสถียร , สิทธิพัฒน์ จำนงศิลป และ ยุทธพิชัย รุจิรวิมล. 2547. **macromedia DREAMWEAVER MX ฉบับเรียนลัด.** พิมพ์ ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ . บริษัท ซัคเซส มีเดีย จำกัด