สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ELECTRONIC LEARNING IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ประเสริฐ รวยชัยอุดมโชค

ปราโมทย์ ตรีนักสิทธิ์

อนุรักษ์ วงษ์บุญรอด

ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

ELECTRONIC LEARNING IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

PRASERT RUAYCHAIUDOMCHOK

PRAMOTE TRINAKSIT

ANURAK WONGBUNROD

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED INPARTIAL FULFILLMENT OF

THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2004

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ELECTRONIC LEARNING IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
ชื่อนักศึกษา	นายประเสริฐ รวยชัยอุดมโชค 44050025
	นายปราโมทย์ ตรีนักสิทธิ์ 44050026
	นายอนุรักษ์ วงษ์บุญรอด 44050060
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการสอบ			ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อ.จินดา	ไชยช่วย	
กรรมการ	อ.กัมปนาท	นามงาม	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี	โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ	รัตนธนาวันต์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี	ชิตสกุล	

(รองศาสตราจารย์.ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
ชื่อนักศึกษา	นายประเสริฐ รวยชัยอุดมโชค 44050025
	นายปราโมทย์ ตรีนักสิทธ์ 44050026
	นายอนุรักษ์ วงษ์บุญรอด 44050060
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2547
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงงานปัญหาพิเศษนี้คือ การสร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เริ่มต้นด้วยการจัดทำบทเรียน โดยแบ่งการทำงานออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนของเนื้อหา และแบบทดสอบ ขั้นตอนต่อไปคือ การพัฒนาโปรแกรมโดยใช้โปรแกรม Dreamweaver Mx 2004 และขั้นตอนสุดท้ายคือ การประเมินผล ทดสอบ และแก้ไขความผิดพลาดของโปรแกรม ซึ่งสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ สามารถเป็นแนวทางสำหรับผู้ที่กำลังศึกษาในหัวข้อนี้ และผู้ที่สนใจที่จะศึกษาและพัฒนาโปรแกรมต่อไป

Special Project Title ELECTRONIC LEARNING IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Students Mr.Prasert Roaychaiudomchok 44050025

Mr.Pramote Trinaksit 44050026

Mr.Anurak Wongbunrod 44050060

Degree Bachelor of Science

Department Mathematic and Computer Science , Faculty of Science

Program Applied Mathematics

Acadamic Year 2004

Special Project Advisor Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk

Assoc.Prof.Pongpan Rattanatanawan

Assoc.Prof.Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

The purpose of this special topic is to build Electronic Learning in Ordinary Differrential Equation. The courseware consists of two modules tutorial and practice It is implemented using Dreamweaver Mx 2004. Besides , this software is very useful to student and user who study in this topic and also for anybody who want to develop this software in the future

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข , รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมวิชาความรู้ทั้งด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

คณะผู้จัดทำ
กุมภาพันธ์ 2548

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเป็นสมการที่มีดิฟเฟอเรนเชียลหรืออนุพันธ์ของฟังก์ชันเดียวหรือหลายฟังก์ชัน ในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ เราจะจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็น 2 ประเภท

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations : ODE)
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations : PDE)

ทั้งนี้การจำแนกนั้นได้คำนึงถึงตัวแปรอิสระที่ปรากฏในสมการ ถ้ามีเพียงตัวเดียวจะเป็น ODE ถ้ามีมากกว่าหนึ่งตัวจะเป็น PDE

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เป็นวิชาที่มีการประยุกต์อย่างกว้างขวาง ในการศึกษาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ทุกสาขา นอกจากนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ในการศึกษา ทางเศรษฐศาสตร์ การแพทย์ หรือประชากรศาสตร์ จึงนับได้ว่าเป็นวิชาที่มีความสำคัญ และจำเป็นที่จะต้องศึกษาวิชาหนึ่ง โดยผู้ที่จะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ในเรื่องแคลคูลัสมาก่อนแล้ว

เพื่อเป็นการสะดวกกับผู้ที่สนใจศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านนี้ จึงได้จัดทำเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนผ่านทางสื่ออินเตอร์เน็ต ซึ่งเป็นสื่อที่จะเข้าถึงผู้ที่ต้องการศึกษาหรือค้นคว้าได้สะดวกและรวดเร็ว แทนการเข้าไปศึกษาในห้องเรียน และเป็นการช่วยเสริมเพิ่มเติมเพื่อให้สามารถเข้าใจเนื้อหายิ่งขึ้น โดยภายในโปรแกรมนั้นจะประกอบไปด้วย เนื้อหา นิยาม ทฤษฎีบท แบบฝึกหัด ตัวอย่างประกอบ การประยุกต์ของสมการอนุพันธ์สามัญกับปัญหาต่างๆ การอธิบายที่สามารถเข้าใจได้ง่าย และรูปภาพประกอบคำอธิบาย เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถเข้าใจมากยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการจัดทำ

1.2.1 เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแก่นักศึกษา และผู้ที่สนใจมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปในใช้ได้อย่างกว้างขวางบนสื่ออินเตอร์เน็ต

1.2.3 ผู้สนใจทั่วไปที่ต้องการหาความรู้ทางด้านนี้สามารถศึกษา ทำความเข้าใจได้ด้วยตนเอง

1.2.4 สามารถใช้งานได้ง่าย และสร้างความสนใจแก่ผู้ใช้งาน

1.2.5 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียน ซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของอนุพันธ์สามัญทั้งหมด

1.3.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.3.2 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.3.3 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.4.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.4.2 ทำการเรียบเรียงเนื้อหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.4.3 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียนโปรแกรมบนอินเตอร์เน็ต

1.4.4 สร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.4.5 ทดสอบ และแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นให้มีประสิทธิภาพ

1.4.6 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

1.4.7 จัดทำเอกสารประกอบการทำสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5.2 สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5.3 สามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญจากปัญหาต่างๆ เพื่อหาผลเฉลย

1.5.4 ตีความผลเฉลยเป็นคำตอบของปัญหาต่างๆตามความต้องการได้

1.5.5 ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5.6 โปรแกรมช่วยสอนสะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 คอมพิวเตอร์ PENTIUM 4 1.80 GHz

1.6.2 RAM 256 MB

1.6.3 ระบบปฏิบัติการ WINDOW XP

1.6.4 โปรแกรม Dreamweaver Mx 2004

1.6.5 โปรแกรม Adobe Photoshop 5.5

1.6.6 โปรแกรม MSWord 2003

1.6.7 โปรแกรม Internet Explorer 6.0s

บทที่2

ทฤษฎีและหลักการของสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

2.1 ความหมายของสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (Eletronic Learning) คือการส่งความรู้ไปสู่ผู้เรียนโดยใช้สื่ออิเล็กทรอนิกส์(Electronic Media) เช่น คอมพิวเตอร์ที่เชื่อมต่อเครือข่ายอินเตอร์เน็ต ในหลักการที่ว่าด้วย "การเรียนการสอนทางไกล" การเรียนการสอนแบบ e-learning นี้ สามารถเรียนได้จากเว็บ และผู้สอนกับผู้เรียนสามารถติดต่อสื่อสารกันได้ด้วยจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (e-mail) หรือเว็บบอร์ด สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ในปัจจุบัน จะพบว่ามีการนำสื่อประสม (สื่อประสม คือ การผสมผสานเนื้อหาหลายๆชนิด เช่น ข้อความ เสียง ภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว รวมเข้าด้วยกัน) หรือมัลติมีเดีย เข้ามาช่วยในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียน ซึ่งทำให้ผู้เรียนรู้สึกสนุกสนานกับการเรียนโดยไม่รู้สึกเบื่อหน่าย

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

การสร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์นั้น จะอาศัยหลักของแนวความคิดจากทฤษฎีการเชื่อมโยงกันระหว่างสิ่งที่กระตุ้นหรือสิ่งเร้ากับการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อทำการประเมินการตอบสนองของผู้เรียน เพื่อเป็นการสร้างเสริมแรงกระตุ้นในการเรียน

กระบวนการเรียนการสอน คือ การสื่อสารข้อมูลกันระหว่างอาจารย์ผู้สอนและผู้เรียน เมื่อผู้เรียนได้รับรู้ข้อมูลแล้วมีการประเมินผล ก็แสดงว่ามีการเรียนรู้เกิดขึ้น

2.2.1 การสื่อสารในกระบวนการเรียนการสอน

(1) การสื่อสารแบบทางเดียว หรือ ระบบวงจรเปิด (Open-Loop System) เป็นการสื่อสารข้อมูลโดยเน้นไปทางผู้เรียนเพียงทางเดียว ซึ่งผู้เรียนไม่สามารถสื่อสารข้อมูลไปยังอาจารย์ผู้สอนได้ เช่น การเรียนทางไกลจากตำราและเอกสาร หรือการเรียนโดยผ่านดาวเทียมสำหรับผู้เรียนที่อยู่ในชนบท

(2) การสื่อสารแบบสองทาง หรือ ระบบวงจรปิด (Close-Loop System) เป็นการสื่อสารข้อมูลที่ผู้เรียนและอาจารย์ผู้สอนสามารถตอบโต้แลกเปลี่ยนข้อมูลและความคิดเห็นกันได้ เช่น การเรียนการสอนในห้องเรียน ซึ่งเป็นการสื่อสารข้อมูลที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เพราะเมื่อผู้เรียนไมเข้าใจเนื้อหาในบทเรียนก็สามารถถามอาจารย์ผู้สอนได้ทันที

2.2.2 การจัดการศึกษาตามเอกัตภาพ

เนื่องจากผู้เรียนมีความแตกต่างกันทั้งในดานร่างกาย ความรู้ ความคิด ความสามารถ และระดับสมอง จึงได้มีการพัฒนาการเรียนการสอนให้เป็นเอกัตภาพตามระดับความสามารถของผู้เรียน ซึ่งเรียกว่า "การศึกษาตามเอกัตภาพ"

การศึกษาตามเอกัตภาพมี 3 ลักษณะ คือ

2.2.2.1 บทเรียนโปรแกรม (Programed Instruction)

การเรียนการสอนแบบนี้จะทำการจัดเป็นหน่วยๆ โดยมีทั้งกระบวนการเรียน กระบวนการวัดผลเรียบร้อย

2.2.2.2 บทเรียนโมดูล (Module Instruction)

บทเรียนโมดูลจะทำการจัดเป็นชุดๆ ประกอบด้วยบทเรียน อุปกรณ์ สื่อการเรียนสอน เพื่อการเรียนรู้แบบครบวงจร อยู่ในชุดการเรียนรู้ ซึ่งผู้เรียนสามารถทดสอบบทเรียนโดยหาประสบการณ์ด้วยตนเองได้

2.2.2.3 สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ (Electronic Learning)

สื่อการเรียนการสอนอิเล็คทรอนิกส์ เป็นการพัฒนามาจากบทเรียนโปรแกรม แต่ต่างกันตรงที่สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ จะใช้คอมพิวเตอร์ในการนำเสนอ ซึ่งเป็นการจัดการสอนที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

2.2.3 ลักษณะบทเรียนสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

ในการที่จะนำคอมพิวเตอร์มาช่วยเป็นสื่อในการสอนได้นั้น จะต้องประกอบด้วยอุปกรณ์และองค์ประกอบต่างๆดังต่อไปนี้

2.2.3.1 ฮาร์ดแวร์ (Hardware)

ฮาร์ดแวร์ คือ เครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นสื่อในการนำเสนอเนื้อหาของบทเรียนให้แก่ผู้เรียน โดยเครื่องคอมพิวเตอร์นี้จำเป็นที่จะต้องมีความสามารถเพียงพอที่จะรองรับ และสนับสนุนการทำงานของซอฟท์แวร์ ซึ่งจะนำมาสร้างเป็นสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

2.2.3.2 ซอฟท์แวร์ (Software)

ซอฟท์แวร์ คือ โปรแกรมปฏิบัติการ และโปรแกรมที่ใช้ในการสร้างบทเรียนสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

2.2.4 การจัดหาบทเรียนสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

การจัดหาบทเรียนสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์มาใช้ช่วยในการเรียนการสอนมีอยู่ 3 วิธีด้วยกัน ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อได้เปรียบเสียเปรียบแตกต่างกันออกไป ดังนี้

2.2.4.1 การใช้บทเรียนที่มีผู้อื่นได้สร้างไว้แล้ว ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ ประหยัดเวลาและนำมาใช้ได้ทันที แต่ข้อเสีย คือ อาจจะได้งานที่ไม่ตรงกับความต้องการ

2.2.4.2 การสร้างบทเรียนโดยใช้โปรแกรมช่วยสร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ เป็นโปรแกรมที่เรียนรู้ง่าย เนื่องจากการเขียนสคริปต์ต่างๆในโปรแกรมประเภทนี้จะใช้ภาษาระดับสูง ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ ได้ผลงานที่ออกมาดี และใช้งานได้ง่ายในเวลาไม่มากนัก แต่ข้อเสียคือ ไม่เหมาะกับงานที่มีความซับซ้อน เช่น บทเรียนที่ต้องการความสามารถทางคณิตศาสตร์

2.2.4.3 การสร้างบทเรียนสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ โดยการเขียนโปรแกรมขึ้นใช้เองโดยภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาซี ภาษาจาวา ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ สามารถสร้างบทเรียนที่มีความสลับซับซ้อน แต่ข้อเสียคือ ใช้เวลาในการทำนาน

เครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์ แบ่งออกเป็น 4 กลุ่มคือ

(1) ภาษาโปรแกรมระดับสูง (High-Level Languages) เช่น HTML , JAVA และ C

(2) ภาษานิพนธ์บทเรียน (Authoring Languages) เช่น Coursewriter , Pilot และ Tutor

(3) ระบบนิพนธ์บทเรียน (Authoring Utilities) เช่น Dreamweaver , Authorware

(4) เครื่องช่วยนิพนธ์บทเรียน (Authoring Uthlities) ซึ่งแบ่งได้หลายชนิด เช่น lesson shell (ตัวอย่างโปรแกรม : Apple Shell Game)

องค์ประกอบของ E-Learning

(1) เนื้อหาของบทเรียน เป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดสำหรับ e-learning คุณภาพของการเรียนการสอน และการที่ผู้เรียนจะบรรลุวัตถุประสงค์การเรียนในลักษณะนี้หรือไม่อย่างไร สิ่งสำคัญที่สุดก็คือ เนื้อหาการเรียน ซึ่งผู้สอนได้จัดหาให้แก่ผู้เรียน แล้วผู้เรียนมีหน้าที่ในการใช้เวลาส่วนใหญ่ศึกษาเนื้อหาด้วยตนเอง

(2) ระบบบริหารการเรียน หรือ LMS ซึ่งย่อมาจาก e-learning Management System ทำหน้าที่เป็นศูนย์กลางในการติดต่อสื่อสาร และการกำหนดลำดับของเนื้อหาในบทเรียน แล้วส่งผ่านเครือข่ายคอมพิวเตอร์ไปยังผู้เรียน ซึ่งจะต้องรวมไปถึงขั้นตอนการประเมินผลในแต่ละบทเรียน ควบคุม และสนับสนุน การให้บริการแก่ผู้เรียน

LMS จะทำหน้าที่ตั้งแต่เริ่มเข้าเรียน จัดหลักสูตรเมื่อผู้เรียนเริ่มต้นบทเรียน ระบบจะเริ่มทำงาน โดยส่งบทเรียนผ่านทางเครือข่ายคอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นไปได้ทั้งระบบเครือข่ายอินเตอร์เน็ต หรือระบบเครือข่ายอินทราเน็ตในองค์กร หรือเครือข่ายคอมพิวเตอร์อื่นๆ ไปแสดงที่ Web browser ของผู้เรียน จากนั้นผู้เรียนการจะเรียนรู้ด้วยตัวเอง ระบบก็จะติดตามและบันทึกความก้าวหน้า

(3) การติดต่อสื่อสาร ความโดดเด่นและความแตกต่างของ e-learning กับการเรียนทางไกลแบบทั่วๆไป ก็คือ การนำรูปแบบการติดต่อสื่อสารแบบ 2 ทาง (Two-way communication) มาใช้ประกอบการเรียนเพื่อสร้างความน่าสนใจ และความตื่นตัวของผู้เรียนให้มากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ ก็ยังใช้เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้ผู้เรียนได้ติดต่อสอบถาม ปรึกษาหารือ และแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างตัวผู้เรียนกับครู อาจารย์ผู้สอน แล้วระหว่างผู้เรียนกับเพื่อนร่วมชั้นเรียนคนอื่นๆ โดยเครื่องมือที่ใช้ในการติดต่อสื่อสารอาจแบ่งได้เป็น 2 ประเภทดังนี้

3.1 Synchronus ได้แก่ Chat, White board, Text silde, Real-time Annotations, Interactive poll, Conferencing และอื่นๆ

3.2 Asynchronus ได้แก่ News, eMail

(4) การสอบ/การวัดผลการเรียน เป็นส่วนประกอบสำคัญที่จะทำให้ การเรียนแบบ e-learning เป็นการเรียนที่สมบูรณ์ โดยทั่วไปแล้วการเรียนไม่ว่า จะเป็นการเรียนในระดับใด หรือเรียนวิธีใด ก็ย่อมต้องมีการสอบ/การวัดผลการเรียนเรียนอยู่เสมอ แต่รูปแบบอาจจะแตกต่างกันออกไป

เปรียบเทียบรูปแบบการเรียนการสอน

ชั้นเรียนปกติ	ชั้นเรียนออนไลน์
1. ผู้เรียนนั่งฟังบรรยายในชั้นเรียน	1.ใช้ระบบวิดีทัศน์ออนดีมานต์ผ่านทางเว็บเพจ ที่ผู้เรียนสามารถเรียกดูได้หรือสามารถเก็บไฟล์ ไว้ดูเอง
2. ผู้เรียนค้นคว้าจากห้องสมุด หรือค้นหา จากสิ่งตีพิมพ์ต่าง ๆ	2. ใช้การค้นหาผ่านทางเว็บ เช่น Seaech Engine ต่าง ๆ
3. ปฏิบัติในห้องทดลองหรือการปฏิบัติจริง ในสถานการณ์	3. ใช้การเรียนรู้แบบ โมดูล การใช้แบบจำลองออนไลน์ Online Simulation
4. เรียนรู้จากการ โต้ตอบหรือสนทนาใน ชั้นเรียน	4.ใช้ระบบกระดานถาม-ตอบอิเล็กทรอนิกส์ ช่วยให้ การสนทนาดีกว่าในแง่สิ่งแวดล้อมที่เป็น ชั้นเรียน ปกติเมื่อผู้เรียนมีจำนวนมาก

ข้อดีของสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์

ข้อดี

(1) ความสะดวกสบาย ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ทุกที่ทุกเวลา ผู้เรียนจะสามารถเข้าชั้นเรียนที่ไหนก็ได้ ขึ้นอยู่กับสถานที่นั้นว่ามีเครื่องคอมพิวเตอร์หรือ ไม่

(2) ความทันสมัยของเนื้อหา นี่คือจุดเด่นอีกประการหนึ่ง เพราะเราสามารถปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงเนื้อหาได้ตลอดเวลา

(3) ความเป็นเลิศของระบบ ระบบสามารถติดตามบันทึกข้อมูลของผู้เรียน ส่วนทางด้านผู้สอน ผู้สอนสามารถติดตามความเคลื่อนไหวของผู้เรียนได้อย่างละเอียดตามความต้องการ

(4) ประหยัดค่าใช้จ่าย เพราะว่าผู้เรียนสามารถเรียนที่ไหนก็ได้ จะช่วยประหยัดค่าเดินทางและค่าใช้จ่ายอื่นๆที่จะตามมา

ข้อเสีย

(1) ไม่สามารถรับรู้ความรู้สึก ปฏิกิริยาที่แท้จริงของผู้เรียนและผู้สอน

(2) ไม่สามารถสื่อความรู้สึก อารมณ์ในการเรียนรู้ได้อย่างแท้จริง

(3) ผู้เรียน และผู้สอน จะต้องมีความพร้อมในการใช้คอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต ทั้งด้านอุปกรณ์ และทักษะการใช้งาน

(4) ผู้เรียนบางคน ไม่สามารถศึกษาด้วยตนเองได้

บทที่ 3

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

3.1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

นิยามเบื้องต้นและความหมาย

จากความรู้ในวิชาแคลคูลัส เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$

แล้วอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ $\frac{dy}{dx}, y'(x), y', Dy$

อนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ $\frac{d^2y}{dx^2}, y''(x)\ , y'', D^2y$

อนุพันธ์อันดับที่ n คือ $\frac{d^ny}{dx^n}, y^{(n)}x, y^{(n)}, D^ny$

โดยเครื่องหมาย " ′ " อยู่หลังตัวอักษรใด และ " D " อยู่หน้าตัวอักษรใด แสดงว่าเป็นตัวแปรตาม (Dependent Variable)

เช่น $y'(x)$: y เป็นตัวแปรตาม

: x เป็นตัวแปรต้น (Independent Variable) หรือตัวแปรอิสระ

นิยามที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ (Derivative) หรือเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของตัวแปรตาม 1 ตัว หรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้น 1 ตัวหรือมากกว่า แบ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตาม 1 ตัว หรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้นเพียง 1 ตัว เช่น

$$y' - 5y = 1 \qquad (x+y)dx - 4ydy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ สมการที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยของตัวแปรตามหนึ่งตัว หรือมากกว่า เทียบกับตัวแปรต้นสองตัวหรือมากกว่า เช่น

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad , x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ อันดับของอนุพันธ์สูงสุดที่อยู่ในสมการนั้น

ดีกรี (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดในสมการนั้น

เช่น

$(y'')^3 + 4y' + 5yy' + 6y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 ดีกรี 3

$(y')^2 = \sin(xy+2)^3$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ดีกรี 2

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + xtu = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับ 3 ดีกรี 1

$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับ 4 ดีกรี 1

$(1-xy)y' + y^2 + 3xy^2 = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ดีกรี 1

ในการศึกษานี้จะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเท่านั้น

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้ $y'' + 4y' + 5y - 4x^2 = 0$
เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 1 ในรูปแบบฟังก์ชันของ x, y, y', y'' ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของสมการอันดับ 2 ดีกรี 1 คือ $F(x, y, y', y'') = 0$ โดย F เป็นฟังก์ชันของ x, y, y', y'' ซึ่ง y, y', y'' เป็นฟังก์ชันของ x เรียก F ว่าเป็น **ฟังก์ชันนอล** (Functional)

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n คือสมการ ในรูปแบบ

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

สมการเชิงเส้นและสมการไม่เชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญ** (Linear Differential Equation) อันดับ n ถ้าอยู่ในรูปแบบ

$$a_n(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

ซึ่งมีลักษณะสำคัญ 2 ประการ คือ

1. ตัวแปรตาม y และอนุพันธ์อันดับต่างๆมีดีกรีหนึ่ง หรืออนุพันธ์อันดับต่างๆของ y และ y' ต่างยกกำลังหนึ่ง
2. สัมประสิทธิของแต่ละพจน์ขึ้นกับตัวแปร x เท่านั้น หรือไม่มีการคูณกันระหว่าง y

และอนุพันธ์ของ y

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

$$xdy + ydy = 0$$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 3xy' + 5y = e^x$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น** (Nonlinear Differential Equation) เช่น

$yy'' - 2y' = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสอง เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ y'' ขึ้นกับตัวแปรตาม y

$\dfrac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ไม่เชิงเส้นอันดับสาม เนื่องจากเลขชี้กำลังของพจน์ y มีค่ามากกว่าหนึ่ง

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

นิยามที่ 2 ฟังก์ชันใด ๆ f ที่นิยามบนช่วง I (ซึ่ง I อาจแทน $(a,b), [a,b], (0,\infty), (-\infty,\infty)$ และอื่น ๆ) เมื่อนำ f แทนในสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถลดรูปสมการเป็นเอกลักษณ์ เรียก f ว่าผลเฉลย (Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญบนช่วง I

สามารถกล่าวได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ คือฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่ง $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$ สำหรับแต่ละ x ใน I

ตัวอย่าง 3.1 ฟังก์ชัน $y = \dfrac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น $y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$

เนื่องจาก $y = \dfrac{x^4}{16}$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = 4\dfrac{x^3}{16} = \dfrac{x^3}{4}$

พบว่า $y' - xy^{\frac{1}{2}} = \dfrac{x^3}{4} - x\left(\dfrac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^3}{4} = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง

ตัวอย่าง 3.2 ฟังก์ชัน $y = xe^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $y'' - 2y' + y = 0$ บน $(-\infty,\infty)$

จาก $y = xe^x$ โดยการหาอนุพันธ์อันดับ 1 และ อันดับ 2

$y' = xe^x + e^x$ และ $y'' = xe^x + e^x + e^x$

$$= xe^x + 2e^x$$

พบว่า $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x$

$$= xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x = 0$$

3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

กำหนดฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Function) $x^2 + y^2 = c$

โดยการหาอนุพันธ์อันดับ 1 เทียบกับ x ได้ว่า $2x + 2yy' = 0$

จัดสมการใหม่ได้ว่า $y' = -\frac{x}{y}$ หรือ $y' + \frac{x}{y} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 ดีกรี 1

จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y' + \frac{x}{y} = 0$ ต้องการหาผลเฉลยมีวิธีการดังนี้

1. จัดสมการใหม่โดยแยกอนุพันธ์ และฟังก์ชัน $y' = -\frac{x}{y}$
2. เขียนในรูปเชิงอนุพันธ์ โดยตัวแปรเดียวกันจัดไว้ข้างเดียวกัน $ydy = -xdx$
3. อินทิเกรตทั้ง 2 ข้าง $\frac{y^2}{2} + c_1 = -\frac{x^2}{2} + c_2$
4. จัดสมการใหม่โดย $c = 2(c_2 - c_1)$ ได้ $x^2 + y^2 = c$

   ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' + \frac{x}{y} = 0$ คือ $x^2 + y^2 = c$

   จากความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = c$ สามารถจัดเป็นสองฟังก์ชัน

   $y = \sqrt{c - x^2}$ และ $y = -\sqrt{c - x^2}$

   โดยการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $y = \sqrt{c - x^2}$ ได้ว่า

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(c - x^2)^{(-1/2)}\frac{d(c - x^2)}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{c - x^2}}$$

   หรือ $y' = -\frac{x}{y}$ หรือ $y' + \frac{x}{y} = 0$

ดังนั้น $y = \sqrt{c - x^2}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y' + \frac{x}{y} = 0$

ในทำนองเดียวกัน $y = -\sqrt{c - x^2}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y' + \frac{x}{y} = 0$

ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = c$ หรือ $x^2 + y^2 - c = 0$ **เป็นผลเฉลยโดยปริยาย** (Implicit Solution)

ในขณะที่ $y=\sqrt{c-x^2}$ และ $y=\sqrt{c-x^2}$ **เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้ง** (Explicit Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y' + \dfrac{x}{y}=0$ บนช่วง $-c<x<c$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถจัดเป็น **ผลเฉลยชัดแจ้ง และผลเฉลยโดยปริยาย** ได้ความสัมพันธ์ $G(x,y)=0$ ที่เป็นผลเฉลยโดยปริยายของ สมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง I สามารถจัดเป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งหนึ่งแบบ หรือมากกว่าบน I ได้

ความสัมพันธ์ $x^2+y^2-c=0$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' + \dfrac{x}{y}=0$ สำหรับค่าคงที่ c ใด ๆ โดย c ต้องมีค่าที่ทำให้ความสัมพันธ์มีค่าเป็นค่าจริงในระบบจำนวนจริง นั่นคือ $x^2+y^2+1=0$ ไม่ใช่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ เรียก c ว่าเป็น **parameter**

ตัวอย่าง 3.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{dy}{dx}+y=0$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=-y$$
$$\frac{dy}{y}=-dx$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$
$$\ln y=-x+c_1$$
$$y=e^{-x+c_1}$$
$$=e^{-x}.e^{c_1}$$
$$=ce^{-x};c=e^{c_1}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y'+y=0$ คือ $y=ce^{-x}$
เป็น one parameter family เมื่อ c เป็น parameter ที่เป็นค่าคงที่ใดๆ
ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ใดๆ มีผลเฉลยได้ไม่จำกัด

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1 $F(x,y,y')=0$ คือ family of curve หรือ ฟังก์ชัน
$G(x,y,c)=0$ ที่มี one arbitrary parameter C

แต่ละสมาชิกของ family of curve เป็น solution curve ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ เมื่อ $y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dx^n}$

คือ

n-parameter family of solution $G\left(x,y,c_1,c_2,...,c_n\right)=0$

ถ้าทุกๆผลเฉลยของ $F\left(x,y,y',...y^{(n)}\right)=0$ บนช่วง I หาได้จาก $G\left(x,y,c_1,c_2,...,c_n\right)=0$ โดย $c_i;i=1,2,...,n$ ที่เหมาะสมแล้ว เรียก n-parameter family นี้ว่า ผลเฉลยทั่วไป(General Solution) หรือผลเฉลยสมบูรณ์(Complete Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มี arbitrary parameter เรียกว่า ผลฉลยเฉพาะ(Particular Solution)

วิธีหนึ่งในการหา ผลเฉลยเฉพาะ คือ การเลือกแทนค่า parameter ใน family of solution เช่น $y=ce^{-x}$ เป็น one parameter family of solution ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง $y'+y=0$ สำหรับ $c=0,-2$ และ 5 ได้ ผลเฉลยเฉพาะ $y=0, y=-2e^{-x}$ และ $y=5e^{-x}$ ตามลำดับ

ในบางครั้งไม่สามารถแทนค่า parameter ใน family of solution เพื่อหา ผลเฉลยเฉพาะ ได้ ผลเฉลยเช่นนี้ เรียกว่า **ผลเฉลยเอกฐาน(Singular Solution)**

เช่น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $(y')^2-xy'+y=0$ คือ one parameter family of solution ของ $y=cx-c^2$ ผลเฉลยเฉพาะ คือ $y=\dfrac{x^2}{4}$ ไม่สามารถแทนค่า c ใน family of solution เพื่อให้ได้ ผลเฉลยเฉพาะ

ตัวอย่าง 3.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $(y')^2-xy'+y=0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ โดยแยกฟังก์ชัน และอนุพันธ์ $y=xy'-(y')^2 \Rightarrow$ ①

หาอนุพันธ์ของ ① ได้

$$y'=xy''+y'-2(y')(y'')$$
$$2y'y''-xy''=0$$
$$(2y'-x)y''=0$$
$$y''=0 \text{ หรือ } 2y'-x=0$$

จาก $y''=0$ ได้ $y'=c$ แทนใน ① แล้ว $y=cx-c^2$

จาก $2y'-x=0$ ได้ $y'=\dfrac{x}{2}$ แทนใน ① แล้ว $y=x\left(\dfrac{x}{2}\right)-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{x^2}{4}$

$y = cx - c^2$ เป็น ผลเฉลยทั่วไป และ $y = \dfrac{x^2}{4}$ เป็น singular solution

ความหมายในทางเรขาคณิตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและผลเฉลย

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $(x^2 - xy + y^2)y' + y^2 = 0$

$$e^{-x} + \sin y + (\cos y)y' = 0$$

สามารถจัดอยู่ในรูปแบบ $y' = f(x,y)$

ความหมายหนึ่งของอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 1 คือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ

ดังนั้นถ้าเขียนเส้นตรงเส้นสั้นๆ ที่มีความชัน m โดย $m = f(x,y)$ แล้วเรียกเส้นเหล่านี้ว่า slope field หรือ direction field ของสมการ $y' = f(x,y)$

จาก $f(x,y) = m$ เมื่อ m เป็นค่าคงที่ จะได้ family ของเส้นที่มีมุมเอียงเท่ากัน(isocline)

จาก $y' + y = 0$

นี่คือ $y' = f(x,y)$ โดย $y' = -y$

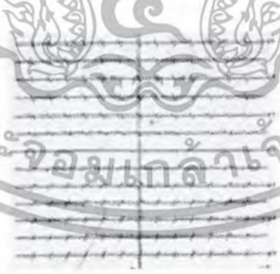
ได้ $f(x,y) = -y$

จาก $f(x,y) = m$

ได้ $y = -m$

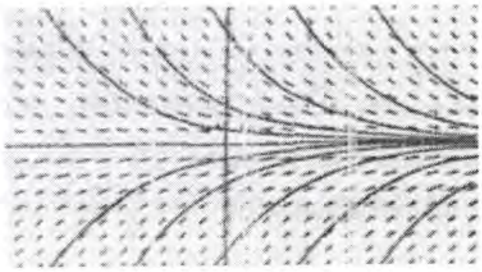
ดังนั้น isocline คือเส้นตรงในแนวราบ

isocline และ slope field ของ $y' = -y$ แสดงดังรูป



เส้นกราฟผลเฉลย คือ การพยายามเขียนกราฟโดยให้ slope field สัมผัสกับเส้นกราฟ

Slope field และ solution curve ของ $y' = -y$ แสดงดังรูป



Differential Equation of a family of curve

แต่ละฟังก์ชันใน one-parameter family เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

แต่ละฟังก์ชันใน two-parameter family เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

หรือกล่าวได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง มี parameter หนึ่งตัว

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง มี parameter สองตัว

ตัวอย่าง 3.5 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญของ two-parameter of family of straight lines $y = c_1x + c_2$

วิธีทำ จาก $y = c_1x + c_2$ โดยการหาอนุพันธ์

$y' = c_1$

$y'' = 0$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญของ family $y = cx^3$

วิธีทำ เนื่องจากมี parameter หนึ่งตัว จึงคาดว่าจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง โดย

$$y' = 3cx^2$$

แต่ $c = \dfrac{y}{x^3}$ ดังนั้น $y' = 3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2 \quad = 3\dfrac{y}{x}$

ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 $xy' - 3y = 0$

ตัวอย่าง 3.7 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ของ family $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

วิธีทำ โดยการหาอนุพันธ์สองครั้งได้ว่า

$$y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x}$$
$$= 4\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}\right)$$

เนื่องจาก $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

ดังนั้น $y'' = 4y$ หรือ $y'' - 4y = 0$

3.1.2 ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขต (Initial Value Problem and Boundary Value Problem)

พิจารณาโจทย์ข้อต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อธิบายวัตถุที่ตกอย่างอิสระภายใต้แรงดึงดูดของโลก เมื่อไม่คิดแรงต้านทานของอากาศ คือ $\frac{d^2u}{dt^2} = -g$

เมื่อ g คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกมีค่าคงที่

y เป็นตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

โดยการอินทิเกรตได้ $\frac{dy}{dt} = -gt + c_1$

โดยการอินทิเกรตซ้ำอีกได้ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$

ถ้ากำหนดเงื่อนไข $y(0) = y_0$ และ $y'(0) = v_0$

ได้ $y_0 = -\frac{1}{2}g(0)^2 + c_1(0) + c_2$ ดังนั้น $c_2 = y_0$

และ $v_0 = -g(0) + c_1$ ดังนั้น $c_1 = v_0$

นั่นคือ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$

ถ้ากำหนดเงื่อนไข $y(0) = y_0$ และ $y(4) = y_1$

ได้ $y_0 = -\frac{1}{2}g(0)^2 + c_1(0) + c_2$ ดังนั้น $c_2 = y_0$

และ $y_1 = -\frac{1}{2}g(4)^2 + c_1(4) + y_0$ ดังนั้น $c_1 = \frac{y_1 - y_0}{4} + 2g$

นั่นคือ $y = -\frac{1}{2}gt^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{4} + 2g\right)t + y_0$

การหาผลเฉลยของสมการสามัญอันดับหนึ่ง $y' = f(x,y)$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(x_0) = y_0$ หรือการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = g(x)$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_0'$ เรียกว่า **ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น**(Initial Value Problem)

Initial Value Problem สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n คือ ปัญหาการหาผลเฉลยของ
$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$
ที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 2 $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $y(a)=y_0, y(b)=y_1$ เรียกว่า **ปัญหาเงื่อนไขค่าขอบเขต** (Boundary Value Problem) และเงื่อนไขที่กำหนดค่าที่ตัวแปรต้นต่างกัน เรียกว่า **เงื่อนไขขอบเขต** (Boundary Condition) ปัญหาค่าขอบเขตนี้ เป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 หรือมากกว่า

เงื่อนไขขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ2 มีรูปแบบที่แตกต่างกันได้ดังนี้

$y(a)=y_0, y(b)=y_1$ $\qquad$ $y(a)=y_0, y'(b)=y_1'$

$y'(a)=y_0', y(b)=y_1$ $\qquad$ $y'(a)=y_0', y'(b)=y_1'$

เมื่อ y_0, y_0', y_1, y_1' แทนค่าคงที่ใดๆ

ตัวอย่าง 3.9 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y=2e^x+e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$y''-y=0\ ;\ y(0)=3, y'(0)=1$

วิธีทำ ผลเฉลยของสมการ $y''-y=0$ คือ $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

จากเงื่อนไข $y(0)=3$ ได้ $3=c_1+c_2$

อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ y คือ $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}$

จากเงื่อนไข $y'(0)=1$ ได้ $1=c_1-c_2$

ดังนั้น $c_1=2$ และ $c_2=1$

นั่นคือ $y=2e^x+e^{-x}$

ตัวอย่าง 3.10 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขต $y''+16y=0; y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

วิธีทำ ผลเฉลยของสมการ $y''+16y=0$ คือ $y=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$

จากเงื่อนไข $y(0)=0$ ได้ $0=c_1\cos 0+c_2\sin 0$ หรือ $c_1=0$

แล้ว $y = c_2 \sin 4x$

จากเงื่อนไข $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ได้ $0 = c_2 \sin 2\pi$

เนื่องจาก $\sin 2\pi = 0$ ดังนั้น เงื่อนไขหลังนี้เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าเลือก c_2 อย่างไร

ผลเฉลยของปัญหา $y'' + 16y = 0; y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

คือ one-perameter family $y = c_2 \sin 4x$

3.1.3 การมีผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียว ***(Existence and Uniqueness Solution)***

ปัญหาค่าเริ่มต้น $|y'| + |y| = 0$, $y(0) = 1$ ไม่มีผลเฉลย เพราะ $y = 0$ ซึ่งเป็นผลเฉลยเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = x$, $y(0) = 1$ มีผลเฉลยเดียว คือ $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = -y$, $y(0) = 1$ มีผลเฉลยเดียวคือ $y = e^{-x}$

ปัญหาค่าเริ่มต้น $xy' = y - 1$, $y(0) = 1$ มีผลเฉลยจำนวนไม่จำกัด $y = 1 + cx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

จากตัวอย่างข้างต้นนี้พบว่า ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ อาจไม่มีผลเฉลย, มีผลเฉลยเดียวหรือมีผลเฉลยไม่จำกัด

ตัวอย่าง 3.11 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $xy' = 2y$ ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = cx^2$

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 1$

ได้ $1 = c(-1)^2$ หรือ $c = 1$

แล้วผลเฉลยที่เป็นไปตามที่กำหนด คือ $y = x^2$

ดังนั้นปัญหาค่าเริ่มต้น $xy' = 2y$, $y(-1) = 1$ มีผลเฉลยคือ $y(x) = x^2$

จาก ผลเฉลยทั่วไป $y = cx^2$ ถ้ากำหนดเงื่อนไขขอบเขต $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$

จากเงื่อนไขแรก $y(-1) = 1$ แล้ว $1 = c(-1)^2$ หรือ $c = 1$ ได้ ผลเฉลยเฉพาะ $y = x^2$

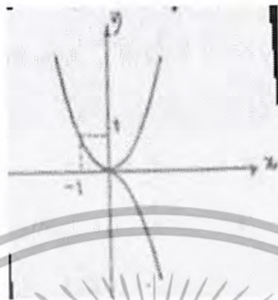
จากเงื่อนไขหลัง $y(1) = -1$ แล้ว $-1 = c(1)^2$ หรือ $c = 1$ ได้ ผลเฉลยเฉพาะ $y = -x^2$

ดังนั้นปัญหาค่าขอบเขต $xy' = 2y$; $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$

มีผลเฉลยคือ $$y(x) = \begin{cases} x^2; x \le 0 \\ -x^2; x > 0 \end{cases}$$

ถ้าพิจารณา เฉพาะปัญหาค่าเริ่มต้น $xy' = 2y, \quad y(-1) = 1$

แล้วกราฟของผลเฉลยแสดงได้ดังรูป



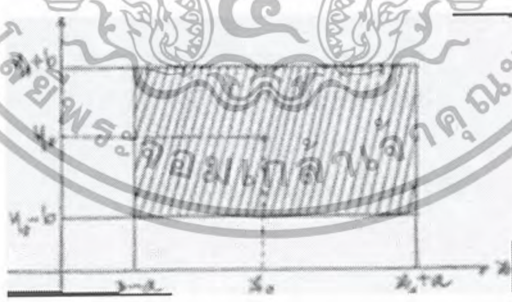
เส้นกราฟผลเฉลยในบริเวณที่อยู่ใกล้ๆ $x = -1$ นั้น มีผลเฉลยเดียวแน่ๆ แต่เส้นกราฟอาจมีการแยกส่วนในช่วงอื่นๆได้

ปัญหาค่าเริ่มต้นในรูปแบบ $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ มีวิธีพิจารณาการมีผลเฉลยและมีผลเฉลยเดียวดังนี้

Existtence Theorem

ถ้า $f(x, y)$ ต่อเนื่องที่ทุกจุด (x, y) ในบางบริเวณ R ซึ่ง

$R : |x - x_0| < a, \ |y - y_0| < b$ ดังรูป

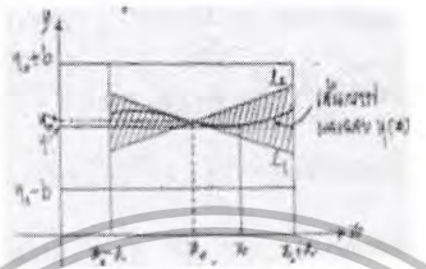


และ $f(x, y)$ มีขอบเขต(bounded) ใน R โดย $|f(x, y)| \le k$ สำหรับทุก (x, y) ใน R
แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ มีอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลย $y(x)$
จาก $y' = f(x, y)$ และ $|f(x, y)| \le k$ สำหรับทุก (x, y) ใน R แล้ว $|y'| \le k$
ดังนั้นความชันของเส้นกราฟของผลเฉลย $y(x)$ มีค่าอย่างน้อย $-k$ และอย่างมาก k

ให้ l_1 เป็นเส้นที่มีความชัน $-k$

ให้ l_2 เป็นเส้นที่มีความชัน k

แล้วเส้นกราฟผลเฉลยที่ผ่าน (x_0, y_0) ต้องอยู่ในบริเวณที่แรเงาดังรูป



จาก $|f(x,y)| \le k$ สำหรับทุก (x,y) ใน R

ให้ (x,y_1) และ (x,y_2) อยู่ใน R

แล้ว $|f(x,y_1)| \le k$ และ $|f(x,y_2)| \le k$

ได้ $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le k^*$

แล้ว $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le k|y_2 - y_1|$ เรียก เงื่อนไขของลิปชิตซ์(Lipschitz condition)

หรือ $\left|\dfrac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1}\right| \le k$

นั่นคือ $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le k$ เมื่อ $y_2 - y_1 \to 0$ หรือ $y_2 \approx y_1$

ดังนั้นมีกราฟ $y(x)$ เส้นเดียวเท่านั้น

Uniqueness Theorem

ถ้า $f(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องสำหรับทุก (x,y) ในบริเวณ R

และ $f(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ มีขอบเขตใน R โดย $|f| \le k$ และ $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le k$ สำหรับทุก (x,y) ใน R

แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$ มีผลเฉลยเดียวที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับทุก x ในช่วง $|x - x_0| < a$ เงื่อนไขตามทฤษฎีนี้เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ(sufficient) แต่ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็น(necessary)

เมื่อเงื่อนไข $f(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องใน R

แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x,y)\quad, y(x_0) = y_0$ มีผลเฉลยเดียวเมื่อ (x_0, y_0) อยู่ใน R

แต่ถ้าเงื่อนไขไม่เป็นจริงแล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นอาจไม่มีผลเฉลย มีผลเฉลยเดียว หรือมีผลเฉลยไม่จำกัด

ทฤษฎีนี้จะมีประโยชน์กับสมการที่ไม่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีธรรมดา เพราะจะใช้ทฤษฎีช่วยตอบคำถามว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นมีผลเฉลยหรือไม่ และถ้ามีผลเฉลยแล้ว มีผลเฉลยเดียวหรือไม่

ตัวอย่าง 3.12 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y' - xy^{1/2} = 0$

ได้ว่า $f(x,y) = xy^{1/2}$ แล้ว $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}xy^{-1/2} = \dfrac{x}{2y^{1/2}}$

f และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องเมื่อ $y > 0$ หรือครึ่งบนของระนาบ xy ไม่รวมแกน x

สามารถสรุปได้จากทฤษฎีว่า จุดใดๆ (x_0, y_0) ซึ่ง $y_0 > 0$

มีบางช่วงรอบ x_0 ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่กำหนดมีผลเฉลยเดียว

ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' - xy^{1/2} = 0 \ , y(0) = 1$

มีผลเฉลยเดียวคือ $y = \left(\dfrac{x^2}{4} + 1\right)^2$

ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' - xy^{1/2} = 0 \ , y(0) = 0$

มีสองผลเฉลย $y = 0$ และ $y = \dfrac{x^4}{16}$ ไม่เป็นไปตามทฤษฎี เพราะจากทฤษฎี $y > 0$ ไม่ใช่ $y = 0$

จากรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n

$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$

สามารถจัดให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูงสุดได้โดย $y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\right)$

ทฤษฎี ให้ $G\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\right)$ นิยาม และต่อเนื่องเมื่อ

$|x - x_0| < h, |y - y_0| < h, \ldots\ldots, \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| < h; h > 0$

และมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งต่อเนื่องเมื่อเทียบกับ $y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์ $y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}\right)$ มีผลเฉลยเดียวที่นิยามในบางช่วง $|x - x_0| < \delta; \delta > 0$ และเป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

จากทฤษฎีจุดที่อนุพันธ์ย่อยไม่ต่อเนื่องเรียกว่า จุดเอกฐาน(Singular Point)

ตัวอย่าง 3.13 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}\sin x$

เขียนในรูปอนุพันธ์อันดับสูงสุด $y'' = G(x, y, y') = 4e^{2x}\sin x + 4y' - 4y$

หาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งเทียบ y และ y'

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -4 \text{ และ } \frac{\partial G}{\partial y'} = 4$$

ซึ่งต่อเนื่องทั้งคู่ สำหรับทุกค่าของ x, y, y'

ดังนั้นจากทฤษฎี มีผลเฉลยเดียวที่เป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น สำหรับทุกค่าของ x

ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้ คือ $y = (c_1 + c_2x - 4\sin x)e^{2x}$

เทคนิคและวิธีในการหาผลเฉลย จะได้ศึกษาในบทต่อๆ ไป

3.1.4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่ง (*First-Order Differential Equation*)

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n คือ สมการในรูปแบบ

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง คือสมการในรูปแบบ

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

หรือ $F(x, y, y') = 0$ เช่น $2xyy' - y^2 - x^2 = 0$

สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ $y' = f(x, y)$ ดังนี้ $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$

สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ดังนี้ $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

ในบทนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

$$F(x, y, y') = 0$$
$$y' = f(x, y)$$
$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0$$
$$N(x, y)dy + M(x, y)dx = 0$$

โดยวิธีการต่าง ๆ ดังนี้

1. สมการแบบแยกตัวแปรได้
2. สมการแบบเอกพันธ์
3. สมการแบบแม่นตรง
4. ตัวประกอบการอินทิเกรต

5. สมการเชิงเส้น
6. สมการแบร์นูลลี่ สมการริกคาตี สมการแกลโรต์
7. การแทนที่

3.1.4.1 สมการแบบแยกตัวแปรได้ *(Separable Variable)*

$$y' = f(x,y)$$

ถ้า $f(x,y) = g(x)$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$

สามารถหาผลเฉลยได้โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

ผลเฉลยคือ $y = \int g(x)dx + c$

ตัวอย่าง 3.14 จงหาผลเฉลยของ (a) $y' = 1 + e^{2x}$ (b) $y' = \sin x$

วิธีทำ (a) $y = \int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

(b) $y = \int \sin x dx = -\cos x + c$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง $N(x,y)y' + M(x,y) = 0$ เป็นสมการแบบแยกตัวแปร ถ้า $N(x,y)$ และ $M(x,y)$ สามารถแยกเป็นผลคูณของฟังก์ชันที่มีเฉพาะ x และฟังก์ชันที่มีเฉพาะ y

โดย $N(x,y) = p_1(x)p_2(y)$

และ $M(x,y) = q_1(x)q_2(y)$

แล้ว $p_1(x)p_2(y)\ y' + q_1(x)q_2(y) = 0$ หารตลอดด้วย $p_1(x)q_2(y)$

ได้ $\dfrac{p_2(y)}{q_2(y)}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{q_1(x)}{p_1(x)} = 0$

ให้ $\dfrac{p_2(y)}{q_2(y)} = h(y)$

และ $\dfrac{q_1(x)}{p_1(x)} = -g(x)$

แล้ว $h(y)y' - g(x) = 0$ หรือ $h(y)y' = g(x)$

ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นผลเฉลย แล้ว $y' = f'(x)$ หรือ $dy = f'(x)dx$

ได้ $h(f(x))f'(x) = g(x)$

โดยการอินทิเกรตเทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx$$
$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

ตัวอย่าง 3.15 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = xy$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $\dfrac{1}{y}dy = xdx$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง $\int \dfrac{1}{y}dy = \int xdx$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c_1$$
$$y = e^{(\frac{x^2}{2}+c_1)}$$
$$= e^{\frac{x^2}{2}}e^{c_1}$$
$$= ce^{\frac{x^2}{2}} \quad ; e^{c_1} = c$$

ตัวอย่าง 3.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(xy^2 + x)dx + (x^2y + 2y)dy = 0$

วิธีทำ จัดพจน์ต่างๆ ในสมการที่กำหนดให้ และเขียนใหม่ได้เป็น

$$x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0$$
$$\frac{x}{x^2 + 2}dx + \frac{y}{y^2 + 1}dy = 0$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 2}dx + \int \frac{y}{y^2 + 1}dy = c_1$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2| + \frac{1}{2}\ln|y^2 + 1| = c_2$$

$\therefore (x^2 + 2)(y^2 + 1) = c$ คือผลเฉลยทั่วไปของสมการ

ตัวอย่าง 3.17 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xydx + x^2dy = 0; \quad ; y(1) = 4$

วิธีทำ $xydx + x^2dy = 0$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

ดังนั้น $\ln|x| + \ln|y| = \ln c$

$$xy = c$$

เมื่อ $x = 1, y = 4$ จะได้ $c = 4$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $xy = 4$

3.1.4.2 สมการเอกพันธ์ *(Homogeneous Equation)*

นิยาม ฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogenous Function) ถ้า $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ สำหรับจำนวนจริง n บางตัวแล้วกล่าวได้ว่า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n

ตัวอย่าง 3.18 a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x - 3\sqrt{xy} + 5y \\ f(tx,ty) &= tx - 3\sqrt{(tx)(ty)} + 5(ty) \\ &= tx - 3\sqrt{t^2 xy} + 5ty \\ &= t(x - 3\sqrt{xy} + 5y) \\ &= tf(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 1

b)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{x^3 + y^3} \\ f(tx,ty) &= \sqrt{(tx)^3 + (ty)^3} \\ &= t^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^3 + y^3} \\ &= t^{\frac{3}{2}} f(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x,y)$เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี $\frac{3}{2}$

c)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 1 \\ f(tx,ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 + 1 \neq t^2 f(x,y) \end{aligned}$$

เพราะ $t^2 f(x,y) = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2$

ดังนั้น $f(x,y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{2y} + 4$

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{2ty} + 4$$

$$= \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x,y)$$

ดังนั้น $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0

จากตัวอย่าง c) และ d) ค่าคงที่ที่บวกเข้าไปในฟังก์ชัน อาจทำให้ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ นอกเสียจากว่าฟังก์ชันนั้นจะเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 0 สามารถพิจารณา ฟังก์ชันเอกพันธ์จากดีกรีรวมของแต่ละพจน์ดังนี้

ตัวอย่าง 3.19 a) $f(x,y) = 6xy^3 - x^2y^2 \Rightarrow xy^3$ ดีกรีเท่ากับ $1+3=4$

$\Rightarrow x^2y^2$ ดีกรีเท่ากับ $2+2=4$

เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 4

b) $f(x,y) = x^2 - y$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ เพราะดีกรีแต่ละพจน์ไม่เท่ากัน

ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n แล้วสามารถจัดเป็นอีกรูปแบบได้ ดังนี้

$$f(x,y) = x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right) \text{ และ } f(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

โดย $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$ และ $f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$ มีดีกรี 0

สมการเอกพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
ถ้า $xM(\ ,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากกว่า $N(x,y)$ ให้แทนด้วย $y = vx$
ถ้า $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากกว่า $M(x,y)$ ให้แทนด้วย $x = uy$

ตัวอย่าง 3.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x-2y)dx+2xdy=0$

วิธีทำ $M(x,y)=x-2y; N(x,y)=2x$

ดังนั้น $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 1 เท่ากัน

ให้ $y=vx$

$$\therefore dy=vdx+xdv$$

นำไปแทนในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$(x-2vx)dx+2x(vdx+xdv)=0$$

$$xdx+2x^2dv=0$$

$$\frac{1}{x}dx+2dv=0$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$\ln|x|+2v=c$$

$$\ln|x|+2(\frac{y}{x})=c$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y=\dfrac{x(c-\ln|x|)}{2}$

ตัวอย่าง 3.21 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y(3x+2y)dx-x^2dy=0$ เมื่อ $y(1)=2$

วิธีทำ $M(x,y)=y(3x+2y)=3xy+2y^2$

$N(x,y)=-x^2$

ดังนั้น $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี 2 เท่ากัน

สมมติให้ $y=vx$

$$dy=vdx+xdv$$

นำไปแทนในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$vx(3x+2vx)dx-x^2(vdx+xdv)=0$$

$$2vx^2(1+v)dx-x^3dv=0$$

$$\frac{2}{x}dx-\frac{1}{v(1+v)}dv=0$$

$$\frac{2}{x}dx-[\frac{1}{v}-\frac{1}{1+v}]dv=0$$

$$2\ln|x|-\ln|v|+\ln|1+v|=\ln c$$

$$x^2(1+v) = cv$$

$$x^2(x+y) = cy$$

เมื่อ $x = 1, y = 2$ จะได้ $c = \frac{3}{2}$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการคือ $x^2(x+y) = \frac{3}{2}y$

หรือ $2x^3 + 2x^2y - 3y = 0$

3.1.4.3 สมการแม่นตรง *(Exact Equations)*

$u(x,y) = c$ ฟังก์ชันหลายตัวแปร

$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ Total Differential

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

มี $u(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยถ้า $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ และ $N = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

นั่นคือสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง ที่มี $u(x,y) = c$ เป็นผลเฉลย ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ตัวอย่าง 3.22 สมการ 1. $ydx + xdy = 0$

2. $\sin ydx + x\cos ydy = 0$

เป็นสมการแม่นตรง สามารถจัดรูปได้เป็น

1. $d(xy) = 0$

   $xy = c$

2. $d(x\sin y) = 0$

   $x\sin y = c$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.23 $2xydx + (1+x^2)dy = 0$

วิธีทำ $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \ ; \ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(1+x^2)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2xydx + dy + x^2dy = 0$$

$$ydx^2 + x^2dy + dy = 0$$

$$d(yx^2) + dy = 0$$

$$x^2y + y = c$$

$$y = \frac{c}{x^2+1}$$

ตัวอย่าง 3.24 $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$

วิธีทำ $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)}{\partial y} = -2xy - 2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-x^2y - 2x)}{\partial x} = -2xy - 2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$2x^3dx - xy^2dx - 2ydx + 3dx - x^2ydy - 2xdy = 0$$

$$(2x^3 + 3)dx - \frac{1}{2}y^2dx^2 - \frac{1}{2}x^2dy^2 - 2ydx - 2xdy = 0$$

$$\frac{2x^4}{4} + 3x - \frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy = c$$

$$x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c$$

3.1.4.4 ตัวประกอบการอินทิเกรต *(Integrating Factor)*

ตัวอย่าง 3.25 $xdy - ydx = 0$

$$\because d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

นำ $\frac{1}{x^2}$ คูณ $xdy - ydx = 0$ ได้ $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\frac{y}{x}=c$$

$$y=cx$$

$\frac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบการอินทิเกรต

ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่ได้เป็นแบบแม่นตรง จะพยายามทำให้เป็นแบบแม่นตรง โดยการหาฟังก์ชันที่เหมาะสมมาคูณ ฟังก์ชันที่นำมาคูณนี้ต้องไม่เท่ากับศูนย์ และเรียกฟังก์ชันนี้ว่าตัวประกอบการอินทิเกรต

$$xdy-ydx=0$$

$$\therefore d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]=\frac{1}{(\frac{y}{x})}d(\frac{y}{x})=\frac{xdy-ydx}{x^2(\frac{y}{x})}=\frac{xdy-ydx}{xy}$$

นำ $\frac{1}{xy}$ คูณ $xdy-ydx=0$ ได้ $\frac{xdy-ydx}{xy}=0$

$$d\left[\ln\frac{y}{x}\right]=0$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)=\ln c$$

$$\frac{y}{x}=c$$

$$\therefore y=cx$$

$\therefore \frac{1}{xy}$ เป็นตัวประกอบการอินทิเกรต

จาก $ydx-xdy=0$

นำ $\frac{1}{y^2}$ มาคูณได้ $\frac{ydx-xdv}{y^2}=0$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

$$\frac{x}{y}=c$$

$$x=cy \qquad \Rightarrow y=c\ x$$

$\frac{1}{y^2}$ เป็นตัวประกอบการอินทิเกรต

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 1 สมการมีตัวประกอบการอินทิเกรตได้หลายแบบ

ให้ $\rho(x,y)=\rho(x)$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ตัวประกอบการอินทิเกรต คือ $\rho(x)$

$\rho(x)M(x,y)dx+\rho(x)N(x,y)dy=0$ เป็นสมการแบบเม่นตรงเมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho(x)M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\rho(x)N(x,y)$$

$$\rho(x)\frac{\partial M}{\partial y} \quad = \rho'(x)N(x,y)+\rho(x)\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\rho'(x)N(x,y) \quad = \rho(x)\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \quad = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right]$$

แต่ถ้า $\rho(x,y)=\rho(y)$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ตัวประกอบการอินทิเกรต คือ $\rho(y)$

$\rho(y)M(x,y)dx+\rho(y)N(x,y)dy=0$ เป็นสมการแบบเม่นตรงเมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho(y)M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\rho(y)N(x,y)$$

$$\rho(y)\frac{\partial N}{\partial x} \quad = \rho'(y)M(x,y)+\rho(y)\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\rho'(y)M(x,y) \quad = \rho(y)\left[\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right]$$

$$\frac{\rho'(y)}{\rho(y)} \quad = \frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right]$$

ตัวอย่าง 3.26 จงแก้สมการต่อไปนี้ (ใช้ตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรตเมื่อจำเป็น)

1. $xdy+ydx=3x^2dx$

วิธีทำ จัดรูปได้เป็น $d(xy)=3x^2dx$ ได้คำตอบ $xy=x^3+c$

2. $xdy-ydx=xy^3dx$

วิธีทำ จัดรูปได้เป็น $\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=\dfrac{y^3}{x}dx$

$$d(\frac{y}{x})=\frac{y^3}{x}dx$$

$$(\frac{y}{x})^{3} d(\frac{y}{x}) = x^2 dx$$

คำตอบคือ $$\frac{1x^2}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + c$$

ตัวอย่าง 3.27 จงแก้สมการ $y(x+y)dx + (x+2y-1)dy = 0 \Rightarrow \quad (a)$

วิธีทำ $$\frac{\partial M}{\partial y} = x+2y, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

ดังนั้น $$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{x+2y-1}{x+2y-1} = 1$$

ตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรทของสมการ (a) คือ $e^{\int dx} = e^x$

จาก (a) คูณด้วย e^x ตลอดได้ $(xye^x + y^2e^x)dx + (xe^x + 2ye^x - e^x)dy = 0$

หรือ $[xye^x dx + (xe^x - e^x)dy] + (y^2e^x dx + 2ye^x dy) = 0$

$$d[(xe^x - e^x)y] + d(y^2e^x) = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างได้ $e^x(x-1)y + y^2e^x = c$

$$y(x+y-1) = ce^{-x}$$

3.1.4.5 สมการเชิงเส้น *(Linear Equation)*

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับที่ n คือ

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

สัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น y และอนุพันธ์อันดับต่างๆของ y ต้องมีดีกรี 1 เมื่อ n เท่ากับ 1 ได้สมการเชิงเส้นอันดับ 1

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad ; a_1(x) \neq 0$$

นำ $a_1(x)$ หารตลอดได้

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\mathrm{y} = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

หรือ $y' + p(x)y = f(x) \quad \Rightarrow \quad ①$

สามารถหาผลเฉลยของ ① บนช่วง I ได้ เมื่อ $p(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง กำหนดว่า ① มีผลเฉลย จัด ① ให้อยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ได้

$$dy + [p(x)y - f(x)]dx = 0 \quad \Rightarrow \quad ②$$

นำ μ(x) คูณตลอดได้ $\mu(x)dy + \mu(x)[\rho(x)y - f(x)]dx = 0 \quad \Rightarrow \quad ③$

③ เป็นสมการแม่นตรงถ้า

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[\rho(x)y - f(x)] \qquad \Rightarrow \qquad ④$$

หรือ $\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\rho(x)$ ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \rho(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int \rho(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad ⑤$$

$$\mu(x) = e^{\int \rho(x)dx} \qquad \Rightarrow \qquad ⑥$$

แทน ⑥ ใน ③ และจัดสมการใหม่ได้

$$e^{\int \rho(x)dx}dy + e^{\int \rho(x)dx}\rho(x)ydx = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx$$

จาก ⑥

$$d\left(e^{\int \rho(x)dx}\right) = e^{\int \rho(x)dx}\left[d\left(\int \rho(x)dx\right)\right]$$

$$= \rho(x)e^{\int \rho(x)dx}dx$$

$$e^{\int \rho(x)dx}dy + yd\left(e^{\int \rho(x)dx}\right) = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx$$

$$d\left[e^{\int \rho(x)dx}y\right] = e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx$$

อินทิเกรตทั้ง 2 ข้างได้

$$e^{\int \rho(x)dx}y = \int e^{\int \rho(x)dx}f(x)dx + c$$

หรือ $y = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + c\, e^{-\int p(x)dx} \qquad \Rightarrow \qquad ⑦$

เรียก $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ ว่าตัวประกอบการอินทิเกรต (Integreting Factor) และเรียก ⑦ ว่าผลเฉลยทั่วไป(general solution)

ขั้นตอนในการหาผลเฉลย

1. จัดรูปแบบให้สัมประสิทธิ์ของ y' เป็น 1
2. หาตัวประกอบการอินทิเกรต $\mu(x) = e^{\int \rho(x)dx}$
3. นำตัวประกอบการอินทิเกรต คูณสมการที่ได้จาก 1

   $$e^{\int \rho(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int \rho(x)dx}y = e^{\int \rho(x)dx}f(x)$$

4. จัดสมการจาก 3 ใหม่ ทางซ้าย

   $$\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}\mathrm{y}] = e^{\int p(x)dx}\mathrm{f(x)}$$

5. อินทิเกรททั้ง 2 ข้างของสมการจาก 4

ตัวอย่าง 3.28 จงหาผลเฉลย $xy' - 4y = x^6 e^x$

วิธีทำ 1. จัดสมการใหม่ให้สัมประสิทธิ์ y' เป็น 1

หารตลอดด้วย x ได้ $y' - 4\dfrac{y}{x} = x^5 e^x$

2. หาตัวประกอบการอินทิเกรท $e^{\int p(x)dx}$

$$e^{-4\int \frac{dx}{x}} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

3. นำตัวประกอบการอินทิเกรตคูณตลอด

นำ x^{-4} คูณ 1 ตลอดได้ $x^{-4}y' - 4x^{-5}y = xe^x$

4. จัดสมการใหม่

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^x$$

5. อินทิเกรตทั้ง 2 ข้าง (by path)

$x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ หรือ $y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$

$$y' + \rho(x)y = f(x)$$

$$dy + \rho(x)ydx = f(x)dx$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = e^{-\int \rho(x)dx}\int e^{\int \rho(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int \rho(x)dx}$

อยู่ในรูปแบบ $y = y_c + y_p$

เมื่อ $y_c = ce^{-\int \rho(x)dx}$

$$y_p = e^{-\int \rho(x)dx}\int e^{\int \rho(x)dx} f(x)dx$$

y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ กรณี $f(x) = 0$

y_p เป็นผลเฉลยเมื่อ $f(x) \neq 0$

สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + \rho(x)ydx = f(x)$$

$$dy + \rho(x)ydx = f(x)dx$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = e^{-\int \rho(x)dx} \int e^{\int \rho(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int \rho(x)dx}$

อยู่ในรูปแบบ $y = y_c + y_p$

เมื่อ $y_c = ce^{-\int \rho(x)dx}$

$$y_p = e^{-\int \rho(x)dx} \int e^{\int \rho(x)dx} f(x)dx$$

y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ กรณี $f(x) = 0$

y_p เป็นผลเฉลยเมื่อ $f(x) \neq 0$

ตัวอย่าง 3.29 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $p = 1, q = e^x$

$$p = e^{\int dx} = e^x$$

$$e^x y = \int e^{2x} dx + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + ce^{-x}$$

ตัวอย่าง 3.30 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = x^4$

วิธีทำ เทียบกับสมการมาตรฐาน

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$$

จะเห็นว่า $f(x) = \dfrac{-3}{x}, r(x) = x^4$

ดังนั้น $\mu(x,y) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int (\frac{-3}{x})dx}$

$$= e^{-3\ln|x|} = x^{-3}$$

คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย x^{-3} จะได้

$$x^{-3}dy - 3x^{-4}ydx = xdx$$

$$d(x^{-3}y) = xdx$$

$$x^{-3}y=\frac{x^2}{2}+c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $2y=x^5+2cx^3$

ตัวอย่าง 3.31 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2e^x;y(1)=0$

วิธีทำ $\mu(x,y)=e^{\int(\frac{-2}{x})dx}=e^{-2\ln|x|}=x^{-2}$

คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย x^{-2} จะได้

$$x^{-2}dy-2x^{-3}ydx=e^xdx$$

$$d(x^{-2}y)=e^xdx$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $x^{-2}y=e^x+c$

หรือ $y=x^2e^x+cx^2$

แทนค่า $x=1,y=0$ จะได้

$$e+c=0$$

$$c=-e$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $y=x^2(e^x-e)$

3.1.4.6 สมการแบร์นูลี่ สมการริกคาตี สมการแกลโรต์

สมการแบร์นูลลี *(Bernoulli's Equation)*

$y'+p(x)y=q(x)y^n$; n เป็นจำนวนจริง

$n=0\Rightarrow$ $y'+p(x)y=q(x)$ สมการเชิงเส้น

$n=1\Rightarrow$ $y'+p(x)y=q(x)y$

$y'+[p(x)-q(x)]y=0$ สมการแบบแยกตัวแปรได้

$n\neq 0,n\neq 1$ คือสมการแบร์นูลลี

คูณด้วย y^{-n} $\Rightarrow$ $y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $v=y^{1-n}$ $\Rightarrow$ $v'=(1-n)y^{-n}y'$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{1-n}v'+p(x)v=q(x)$

$$v'+(1-n)p(x)v=q(x)(1-n)$$

สมการแบร์นูลลี

ตัวอย่าง 3.32 จงแก้สมการ $y(x\tan x+\ln y)dx+\tan x dy=0 \Rightarrow$ (a)

วิธีทำ จาก (a) $x\tan x dx+\ln y dx+\tan x\dfrac{dy}{y}=0 \Rightarrow$ (b)

จาก (b) ให้ $u=\ln y, du=\dfrac{dy}{y}$

$$x\tan x dx+u dx+\tan x du=0$$

หรือ $du+(\cot x)u dx=-x dx \quad ; p(x)=\cot x, q(x)=-x$

$$ue^{\int\cot x dx}=\int(-x)e^{\int\cot x dx}dx+c$$

$$u\sin x=\int(-x)\sin x dx+c$$

$$u\sin x=-(-x\cos x+\sin x)+c$$

$$u\sin x=x\cos x-\sin x+c$$

แทนค่า $u=\ln x$

$$\sin x\ln y=x\cos x-\sin x+c$$

ตัวอย่าง 3.33 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=2y^2$

วิธีทำ $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y^{-1}=2$

ให้ $z=y^{-1}, dz=-y^{-2}dy$

ดังนั้น $\dfrac{-dz}{dx}+\dfrac{2}{x}z=2$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-2$$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu=e^{\int(\frac{-2}{x})dx}=x^{-2}$

$$x^{-2}\frac{dz}{dx}-2x^{-3}z=-2x^{-2}$$

$$x^{-2}dz-2x^{-3}zdx=-2x^{-2}dx$$

$$d(x^{-2}z)=-2x^{-2}dx$$

$$x^{-2}z=2x^{-1}+c$$

$$x^{-2}y^{-1} = 2x^{-1} + c$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $cx^2y + 2xy = 1$

สมการริกคาตี *(Ricati's Equation)*

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

$A(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - B(x)y = C(x)$ สมการเชิงเส้น

$C(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - B(x)y = A(x)y^2$ สมการแบร์นูลลี

$A(x) \neq 0$, $C(x) \neq 0$ คือ สมการของริกคาตี ซึ่งไม่ใช่สมการเชิงเส้น

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x)$ ไม่มี y^2 มีเฉพาะ y

ในการหาผลเฉลย จะต้องทราบเสียก่อนว่า $f(x)$ เป็นผลเฉลยหนึ่ง แล้วจึงหาผลเฉลยทั่วไป โดยการแปลง $y = f(x) + \frac{1}{v(x)}$

ตัวอย่าง 3.34 จงหาผลเฉลย $y' = 2 - 2xy + y^2$

วิธีทำ ผลเฉลยเฉพาะคือ $f(x) = 2x$

เนื่องจาก $y' = 2$ และ $2 - 2x(2x) + (2x)^2 = 2$

ดังนั้น $y = 2x + \frac{1}{v}$ และ $\frac{dy}{dx} = 2 - v^{-2}\frac{dv}{dx}$

$$2 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = 2 - 2x\left(2x + \frac{1}{v}\right) + \left(2x + \frac{1}{v}\right)^2$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -4x^2 - 2\frac{x}{v} + 4x^2 + 4\frac{x}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$= 2\frac{x}{v} + \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -(2xv + 1)$$

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = -1$$

ตัวประกอบการอินทิเกรตคือ $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$$e^{x^2}v + 2xe^{x^2}v = -e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(ve^{x^2}) = -e^{x^2}$$

ตัวอย่าง 3.35 $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x \qquad ; y = 1$

วิธีทำ $\because y = 1 \Rightarrow \qquad y = 1 + \frac{1}{v}$ และ $y' = -1v^2 v'$

$$-\frac{1}{v}v' = (1-x)\left(1+\frac{1}{v}\right)^2 + (2x-1)\left(1+\frac{1}{v}\right) - x$$

$$= (1-x)\left(1+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^2}\right) + (2x-1)\left(1+\frac{1}{v}\right) - x$$

$$= 1 + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^2} - x - \frac{2x}{v} - \frac{x}{v^2} + 2x + \frac{2x}{v} - 1 - \frac{1}{v} - x$$

$$= \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{x}{v^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -v - 1 + x \quad \text{หรือ} \quad \frac{dv}{dx} + v = x - 1$$

$$\rho(x) = e^{\int dx} = e^x$$

$$\Rightarrow e^x \frac{dv}{dx} + ve^x = e^x(x-1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(ve^x\right) = e^x(x-1)$$

$$ve^x = xe^x - e^x - e^x + c$$

$$v = x - 2 + ce^{-x}$$

$$\frac{1}{y-1} = x - 2 + ce^{-x}$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบแกลโรต์ *(Clairant's Equation)*

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ $y = xy' + f(y')$ เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบแกลโรต์ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เมื่อหาผลเฉลย ได้ผลเฉลยทั่วไป และผลเฉลยเฉพาะ

วิธีการในการหาผลเฉลยมีขั้นตอนดังนี้

1. จาก $y = xy' + f(y')$ ให้ $y' = p$ แล้ว $y = xp + f(p)$
2. หาอนุพันธ์ $y' = xp' + p + f'(p)p'$
3. จาก $p = y'$ แล้ว $p' = y''$
   ได้ $y' = xy'' + y' + f'(y')y''$ หรือ $[x + f'(y')]y'' = 0$
4. นั่นคือ $y'' = 0$ หรือ $x + f'(y') = 0$
5. จาก $y'' = 0$ ได้ ผลเฉลยทั่วไป

6. จาก $x + f'(y') = 0$ ได้ ผลเฉลยเอกฐาน

ตัวอย่าง 3.36 จงหาค่า $y = xy' - e^{y'}$ $\Rightarrow$ ①

วิธีทำ

1. ให้ $y' = p$

$y = xp - e^{p}$

2. หาอนุพันธ์ $y' = xp' + p - e^{p}p'$
3. จาก $p = y'$ แล้ว $p' = y''$

$y' = x y'' + y' - y'' e^{y'}$

$y''(x - e^{y'}) = 0$

4. $y'' = 0$ หรือ $x - e^{y'} = 0$
5. $y'' = 0 \Rightarrow y' = c$ แทนใน ①

$y = cx - e^{c}$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

6. $x - e^{y'} = 0$

$y' = \ln x$ แทนใน ①

$y = x\ln x - e^{\ln x} = x(\ln x - 1)$ เป็นผลเฉลยเอกฐาน

ผลเฉลยของสมการ $y = xy' - e^{y'}$ คือ $y = cx - e^{c}$ และ $y = x(\ln x - 1)$

ตัวอย่าง 3.37 $(xy' - y)^2 - (y')^2 - 1 = 0$ $\Rightarrow A$

วิธีทำ 1 ให้ $y' = p$ แล้ว

2 หาอนุพันธ์

$2(xp - y)[(xp' + p) - y'] - 2pp' = 0$

$(xp - y)(xp' + p - p) - pp' = 0$

$x^2pp' - xyp' - pp' = 0$

$(x^2p - xy - p)p' = 0$

3 จาก $p = y'$ แล้ว $p' = y''$

$(x^2y' - xy - y')y'' = 0$

4 $y'' = 0$ หรือ $x^2y' - xy - y' = 0$

5 $y'' = 0 \Rightarrow y' = c$ แทนใน A

$$(cx-y)^2 - c^2 - 1 = 0$$
$$(cx-y)^2 = c^2 + 1$$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

6 $$x^2y' - xy - y' = 0$$
$$y'(x^2-1) = xy$$
$$y' = \frac{xy}{x^2-1}$$

แทน y' ใน A

$$\left(x\frac{xy}{x^2-1} - y\right)^2 - \left(\frac{xy}{x^2-1}\right)^2 - 1 = 0$$
$$\left(\frac{x^2y}{x^2-1} - y\right)^2 - \frac{x^2y^2}{(x^2-1)^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{(x^2-1)^2} - \frac{x^2y^2}{(x^2-1)^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{(x^2-1)^2}(1-x^2) = 1$$
$$\frac{-y^2}{x^2-1} = 1$$
$$-y^2 = x^2 - 1$$
$$x^2 + y^2 = 1$$ เป็นผลเฉลยเอกฐาน

ผลเฉลยของสมการ $(xy'-y)^2 - (y')^2 - 1 = 0$ คือ

$(cy-y)^2 = c^2+1$ และ $x^2+y^2 = 1$

3.1.4.7 การแทนที่ *(Substitution)*

ตัวอย่าง 3.38 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$

ไม่เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

ไม่เป็นสมการเอกพันธ์เพราะ $y(1+2xy)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ เนื่องจาก ดีกรีแต่ละพจน์ไม่เท่ากัน

ไม่เป็นสมการแม่นตรงเพราะ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} y(1+2xy) = 1+4xy$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x(1-2xy) = 1-4xy \neq \frac{\partial M}{\partial y}$$

ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเพราะ มีพจน์ y^2

ไม่เป็นสมการแบร์นูลลีเพราะ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y(1+2xy)}{x(1-2xy)}$

ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ $y' + p(x)y = f(x)y^n$ ได้

แต่สมการนี้ มีพจน์ $2xy$ ซ้ำ

ให้ $u = 2xy$ แล้ว $du = 2xdy + 2ydx$

จากโจทย์ $y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$

ได้ $\dfrac{u}{2x}(1+u)dx + (1-u)\left(\dfrac{1}{2}du - \dfrac{u}{2x}dx\right) = 0$

$$\frac{u}{2x}dx + \frac{u^2}{2x}dx + \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}udu - \frac{u}{2x}dx + \frac{u^2}{2x}dx = 0$$

คูณตลอดด้วย 2x ได้

$$udx + u^2dx + xdu - uxdu - udx + u^2dx = 0$$
$$2u^2dx + (1-u)xdu = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

$$2\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u^2}du = 0$$
$$2\frac{dx}{x} + u^{-2}du - \frac{du}{u} = 0$$
$$2\ln|x| - u^{-1} - \ln|u| = c'$$
$$2\ln|x| - \frac{1}{2xy} - \ln|2xy| = c'$$
$$\ln\left|\frac{x^2}{2xy}\right| = c' + \frac{1}{2xy}$$
$$\frac{x}{2y} = ce^{\frac{1}{2xy}} \quad ; c = e^{c'}$$
$$x = 2cye^{\frac{1}{2xy}}$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงขึ้น สามารถหาผลเฉลยได้โดย การลดรูปให้อยู่ในรูปสมการอันดับหนึ่ง

ตัวอย่าง 3.39 $y'' = 2x(y')^2$

วิธีทำ ให้ $u = y'$ แล้ว $\dfrac{du}{dx} = y''$

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2$$

$$\frac{du}{u^2} = 2xdx$$

$$\int u^{-2}du = \int 2xdx$$

$$-u^{-1} = x^2 + {c_1}^2$$

จาก $u^{-1} = \frac{1}{y'}$ ได้ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2}$

หรือ $$dy = -\frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$\int dy = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$y + c_2 = -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c^1}$$

ตัวอย่าง 3.40 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y + 3}{x - y + 1}$

วีธีทำ $z = x - y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{2z + 3}{z + 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{2z + 3}{z + 1}$$

$$= \frac{-z - 2}{z + 1}$$

$$\frac{z + 1}{z + 2}dz + dx = 0$$

$$dz - \frac{1}{z + 2}dz + dx = 0$$

$$z - \ln|z + 2| + x = c$$

$$\Rightarrow x - y - \ln|x - y + 2| + x = c$$

$$2x - y - \ln(x - y + 2) = c$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงขึ้น สามารถหาผลเฉลยได้ โดยการลดรูปให้อยู่ในรูปสมการอันดับหนึ่ง

การลดรูปสมการ

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 2 คือ $F(x, y, y', y'') = 0$

1.ไม่มีตัวแปรตาม y

$$F(x, y', y'') = 0$$

ตัวอย่าง 3.41 หาค่า $xy'' + 2y' = 6x$

วิธีทำ ให้ $p = y'$ และ $p' = y''$

$xp' + 2p = 6x$ หรือ $p' + \frac{2}{x} p = 6$

$$p = \exp\left[\int \frac{2}{x} dx = x^2 \right]$$

$$x^2 p' + 2xp = 6x^2$$

$$(x^2 p)' = 6x^2$$

$$x^2 p = 2x^3 + c_1$$

$$y' = 2x + \frac{c_1}{x^2}$$

$$y = x^2 - \frac{c_1}{x} + c_2$$

2.ไม่มีตัวแปรต้น y

$$F(y, y', y'') = 0$$

ตัวอย่าง 3.42 จงหาค่า $yy' = (y')^2 \quad ; y, y' > 0$

วิธีทำ $p = y', y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln p = \ln y + \ln c_1$$

$$p = c_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y$$

$$\frac{dy}{y} = c_1 dx$$

$$\ln y = c_1 x + c_2$$

$$y = \exp(c_1 x + c_2)$$

$$= Ae^{Bx}$$

3.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสูง

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n คือสมการในรูป

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=Q(x)$$

เมื่อ $a_i(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ถ้า $Q(x)=0$ เรียกว่าสมการเอกพันธ์ (homogeneous)กรณีอื่นๆเรียกว่าสมการไม่เอกพันธ์(nonhomogeneous)

ตัวอย่าง 3.43 สมการ $2y''+3y'-5y=0$ เป็นสมการเอกพันธ์

สมการ $x^3y'''-2xy''+5y'+6y=e^x$ เป็นสมการไม่เอกพันธ์

ในบทนี้จะกล่าวถึงเทคนิคในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ซึ่งจะต้องมีการพิจารณาลักษณะของฟังก์ชันว่าเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ ดังนั้นเราจะเริ่มด้วยนิยาม และตัวอย่างของกลุ่มของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นเสียก่อน แล้วจึงจะกล่าวถึงการหาผลเฉลย

กำหนดเซตของฟังก์ชัน $f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)$ ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเหล่านี้คือ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x)=0$ ถ้า $c_1,c_2,...,c_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทุกตัว(มีบาง c_i ที่ไม่เป็นศูนย์) แล้วเรียกเซตของ $f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)$ ว่าไม่อิสระเชิงเส้น(linearly dependent) บนช่วง I

ถ้า $c_1=c_2=...=c_n=0$ แล้วเรียกเซตของ $f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)$ ว่าอิสระเชิงเส้น (linearly independent) บนช่วง I

ตัวอย่าง 3.44 $f_1(x)=x, f_2(x)=4x; x\in(-\infty,\infty)$

ผลรวมเชิงเส้นคือ $c_1x+c_24x=0$ หรือ $c_1x+4c_2x=0$

แทน $c_1=0$ และ $c_2=0$ แล้วสมการเป็นจริง

แทน $c_1=-4$ และ $c_2=1$ แล้วสมการเป็นจริง

นั่นคือมี c_1 และ c_2 ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้น $f_1(x)=x$ และ $f_2(x)=4x$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้นt

ตัวอย่าง 3.45 $f_1(x)=\dfrac{x}{3}, f_2(x)=\dfrac{6}{x}, x>0$

ผลรวมเชิงเส้นคือ $c_1\dfrac{x}{3}+c_2\dfrac{6}{x}=0$

แทน $x=3$ ในสมการได้ $c_1+2c_2=0$

แทน $x=6$ ในสมการได้ $2c_1+c_2=0$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

ไม่สามารถหา c_1 และ c_2 ที่ทำให้สมการเป็นจริงได้ยกเว้นเมื่อ $c_1 = 0$ และ $c_2 = 0$

ดังนั้น $f_1(x) = \dfrac{x}{3}$ และ $f_2(x) = \dfrac{6}{x}$ เป็น อิสระเชิงเส้น

$f_1(x) = x$ และ $f_2(x) = 4x$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น

$f_1(x) = \dfrac{1}{4} f_2(x)$ หรือ $f_2(x) = 4 f_1(x)$

ถ้าฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันเป็นไม่อิสระเชิงเส้น แล้วฟังก์ชันหนึ่งจะเป็นผลคูณของค่าคงที่กับอีกฟังก์ชันหนึ่งเสมอ ถ้าฟังก์ชัน2ฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้น แล้วฟังก์ชันหนึ่งไม่เป็นผลคูณของค่าคงที่กับอีกฟังก์ชันหนึ่ง

ตัวอย่าง 3.46 $f_1(x) = \sin 2x$ และ $f_2(x) = \sin x \cos x$

เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น บนช่วง $(-\infty, \infty)$

เมื่อ $c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = 0$

สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้าเลือก $c_1 = \dfrac{1}{2}$ และ $c_2 = -1$

$\because \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

ตัวอย่าง 3.47 $f_1(x) = \cos^2 x, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \sec^2 x, f_4(x) = \tan^2 x$

เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น บน$\left(\dfrac{-\pi}{\pi}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ เพราะ

$c_1 \cos^2 x + c_2 \sin^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$

เมื่อ $c_1 = c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ และ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

เซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ เป็น ไม่อิสระเชิงเส้น บนช่วงถ้ามีอย่างน้อยหนึ่งฟังชันก์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือในเซตนั้น

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n = 0$$

$f_i, i = 1, ..., n$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n-1$

$$\begin{aligned}
c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n &= 0 \\
c_1 f_1' + c_2 f_2' + ... + c_n f_n' &= 0 \\
c_1 f_1'' + c_2 f_2'' + ... + c_n f_n'' &= 0 \\
... \qquad \qquad ... & \\
c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + ... + c_n f_n^{(n-1)} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n] = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$W[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ คือตัวกำหนดแบบวรอนสกี(Wrouskian)

ทฤษฎีบท ถ้า $W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \neq 0$ แล้ว ($c_i = 0$ จึงจะทำให้ระบบสมการเป็นจริง) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ linearly independent (อิสระเชิงเส้น)

บทแทรก ถ้า $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ มีอนุพันธ์ถึงอันดับ $n-1$ และเป็น linearly dependent(ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น)บนช่วง I แล้ว

$W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วงดังกล่าว

วรอนสกี $W \neq 0$ $\rightarrow$ อิสระเชิงเส้น

แต่ถ้า $W = 0$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 3.48 $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0$$

ดังนั้น $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{-x}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 3.49 $f_1(x) = x^3, f_2(x) = |x|^3; x \in (-2,2)$

$0 \le x < 2 \quad ; \quad W = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^5 - 3x^5 = 0$

$-2 < x \le 0 \quad ; \quad W = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = -3x^5 + 3x^5 = 0$

$c_1x^3 + c_2|x|^3 = 0 \quad ; \quad x = a$ จะได้ $a^3c_1 + a^3c_2 = 0$

$x = -a$ จะได้ $-a^3c_1 + a^3c_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} a^3 & a^3 \\ -a^3 & a^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ เป็นจริงเมื่อ $c_1 = 0$ และ $c_2 = 0$ เท่านั้น

$\therefore f_1$ และ f_2 อิสระเชิงเส้น

3.2.1 สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients)

สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_x y^{(x)}(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + ... + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

ถ้า n=1 ได้ $a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$ หรือ $(a_1 D + a_0)y = 0$ ...1

$a_1 y'(x) = -a_0 y(x)$ แล้ว $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = \dfrac{-a_0}{a_1} = r$ ...2

$$\ln y = rx + \ln c$$

$$y = ce^{rx}$$

จาก 2 จะได้ $a_1 r + a_0 = 0$ ...3

เปรียบเทียบกับ 1 และ 3

สมการเชิงอนุพันธ์ $(a_1 D + a_0)y = 0$

มีสมการช่วยคือ $a_1 r + a_0 = 0$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ $y = ce^{rx}$

ตัวอย่าง 3.50 $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

วิธีทำ 1 $(D-3)y = 0$ แล้วสมการช่วยคือ $r - 3 = 0$ $r = 3$ ผลเฉลยคือ $y = ce^{3x}$

2

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$\frac{dy}{y} = 3x$$

$$\ln y = 3x + c'$$

$$y = e^{c'+3x} = e^{c'} e^{3x} = ce^{3x}$$

3 $$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

I.F. $\exp\left(\int -3dx\right) = e^{-3x}$

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 0$$
$$e^{-3x}y = c$$
$$y = ce^{3x}$$

สมการช่วยมีรากที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน

ตัวอย่าง 3.51 $(D^2 - D - 2)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $r^2 - r - 2 = 0$

$$(r-2)(r+1) = 0$$
$$r = 2,-1$$

e^{2x} และ e^{-x} ต่างเป็นผลเฉลยของ $(D^2 - D - 2)y = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{x} - 2e^{x} = -3e^{x} \neq 0$$

e^{2x} และ e^{-x} เป็นอิสระเชิงเส้น

$\therefore y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของ $(D^2 - D - 2)y = 0$ เมื่อ c_1, c_2 คงที่

ตัวอย่าง 3.52 $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$

วิธีทำ $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

$$r^3 - 2r^2 - 4r^2 + 8r + 3r - 6 = 0$$
$$r^2(r-2) - 4r(r-2) + 3(r-2) = 0$$
$$(r-2)(r^2 - 4r + 3) = 0$$
$$(r-2)(r-3)(r-1) = 0$$
$$r = 2,3,1$$
$$e^{2x}, e^{3x}, e^{x}$$
$$\therefore y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{x}$$

สมการช่วยมีรากที่เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน

พิจารณาสมการ $(D^2 - 10D + 25)y = 0$

สมการช่วยคือ $r^2 - 10r + 25 = 0$

$$(r-5)(r-5) = 0$$
$$r = 5,5$$

ถ้า $y_1 = e^{5x}$ และ $y_2 = e^{5x}$ เป็นผลเฉลยของ $(D^2 - 10D + 25)y = 0$ แล้ว

$y = c_1e^{5x} + c_2e^{5x} \cdot (c_1 + c_2)e^{5x} = ce^{5x}$ ไม่เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $(D^2 - 10D + 25)y = 0$ เพราะมีค่าคงที่เพียงตัวเดียว ในขณะที่ $(D^2 - 10D + 25)y = 0$ มีอันดับสอง ซึ่งเมื่อพิจารณา วรอนสกี ได้ว่า

$$\begin{vmatrix} e^{5x} & e^{5x} \\ 5e^{5x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = 5e^{10x} - 5e^{10x} = 0$$

และ $(-1)e^{5x} + (1)e^{5x} = 0$

$c_1 = -1$ และ $c_2 = 1$ ทำให้ $c_1e^{5x} + c_2e^{5x} = 0$

ดังนั้น e^{5x} และ e^{5x} ไม่อิสระเชิงเส้น

นั่นคือ ต้องหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่แตกต่างจาก e^{5x} โดยการสมมติว่าอีกคำตอบคือ

$y = v(x)e^{5x}$ หรือ $y = ve^{5x}$

$y = ve^{5x}$

$Dy = D(ve^{5x}) = vDe^{5x} + e^{5x}Dv = 5ve^{5x} + e^{5x}v' = e^{5x}(5v - v')$

$D^2y = D(e^{5x}(5v + v')) = e^{5x}D(5v + v') + (5v + v')De^{5x}$

$= e^{5x}(5v' + v'') + (5v + v')5e^{5x} = e^{5x}(v'' + 10v' + 25v)$

แทน y, Dy, D^2y ใน $(D^2 - 10D + 25)y = 0$

$e^{5x}(v'' + 10v' + 250 - 50v - 10v' + 25v) = 0$

$e^{5x}v'' = 0$

$e^{5x} \neq 0, v'' = 0, v' = A, V = Ax + B$

เลือก A=1 และ B=0 , $v = x$

$\therefore y = xe^{5x}$ เป็นอีกผลเฉลยหนึ่ง

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} = (c_1 + c_2x)e^{5x}$

พิจารณา วรอนสกี

$$\begin{vmatrix} e^{5x} & xe^{5x} \\ 5e^{5x} & e^{5x} + 5xe^{5x} \end{vmatrix} = e^{10x} + 5xe^{10x} - 5xe^{10x} = e^{10x} \neq 0$$

ดังนั้น e^{5x} และ xe^{5x} เป็นอิสระเชิงเส้น

ถ้า $r = 5,5$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{5x}$$

ถ้า $r = 5,5,5$

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{5x}$$

โดยทั่วไปถ้ามีราก $r = m$ ซ้ำกัน n ครั้ง

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + ... + c_nx^{n-1})e^{mx}$$

ตัวอย่าง 3.53 $(D^3-6D^2+12D-8)y=0$

วิธีทำ

$$r^3+6r^2+12r-8=0$$
$$r^3-2r^2-4r^2+8r+4r-8=0$$
$$r^2(r-2)-4r(r-2)+4(r-2)=0$$
$$(r-2)(r-2)(r-2)=0$$
$$r=2,2,2$$
$$\therefore y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$$

สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค

$$r^2-4r+13=0$$
$$r=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(13)}}{2(1)}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$$
$$=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$$

สมการกำลังสองถ้ามีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมีเป็นคู่สังยุคคือ $a+ib$ เป็นรากและ $a-ib$ เป็นรากด้วย หรือกลับกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=Ae^{(a+ib)x}+Be^{(a-ib)x}$$

Euler's Formula

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$Ae^{(a+ib)x}+Be^{(a-ib)x}=Ae^{ax}e^{ibx}+Be^{ax}e^{-ibx}$$
$$=e^{ax}(Ae^{ibx}+Be^{-ibx})$$
$$=e^{ax}\left[A(\cos bx+i\sin bx)+B(\cos(-bx)+i\sin(-bx))\right]$$
$$=e^{ax}\left[A\cos bx+iA\sin bx+B\cos bx-iB\sin bx\right]$$
$$=e^{ax}\left[(A+B)\cos bx+i(A-B)\sin bx\right]$$
$$=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$
$$r=a\pm ib$$
$$y=Ae^{(a+ib)x}+Be^{(a-ib)x}$$

หรือ $y=e^{6x}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$

ถ้ามีรากเชิงซ้อนซ้ำกัน n ครั้งแล้ว

$$y=e^{ax}\left[(c_1+c_2x+c_3x^2+\dots+c_nx^{n-1})\cos bx+(d_1+d_2x+d_3x^2+\dots+d_nx^{n-1})\sin bx\right]$$

ตัวอย่าง 3.54 $(D^2+2D+5)y=0$

วิธีทำ $r^2+2r+5=0$

$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

$$\therefore y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

ตัวอย่าง 3.55 $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+12\frac{dy}{dx}-8y=0$

วิธีทำ $r^3+6r^2+12r-8=r^3-2r^2-4r^2+8r+4r-8$

$$=r^2(r-2)-4r(r-2)+4(r-2)$$

$$=(r-2)(r^2-4r+r)=(r-2)(r-2)(r-2)$$

$$r=2,2,2$$

$$y_1=e^{2x},y_2=xe^{2x},y_3=x^2e^{2x}$$

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$$

ผลเฉลยทั่วไปของ homogeneous second order linear equation ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

auxiliary equation $a_2r^2+a_1r+a_0=0$ รากของสมการคือ r_1 และ r_2

1 ถ้า r_1 และ r_2 เป็นค่าจริงต่างกัน

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2r^{r_2x}$$

2 ถ้า r_1 และ r_2 เป็น complex conjugate

$$r_1=\alpha+i\beta,r_2=\alpha-i\beta$$

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

3 ถ้า $r_1=r_2=m$

$$y=(c_1+c_2x)e^{mx}$$

3.2.2 การแก้สมการอันดับ n ของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Solution for the n-order Linear Homogeneous Equation with Constant Coefficiens)

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

1 ค่าจริงต่างกัน

$r = r_1, r_2, r_3, ..., r_n$

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x}$

2 ต่างกัน เป็นคู่เชิงซ้อนที่มีเฉพาะจินตภาพ

$r = \pm\beta_1 i, \pm\beta_2 i, ..., \pm\beta_k i$ เมื่อ $n = 2k$

$y = c_1 \cos\beta_1 x + c_2 \sin\beta_1 x + c_3 \cos\beta_2 x + c_4 \sin\beta_2 x + ... + c_{n-1} \cos\beta_k x + c_n \sin\beta_k x$

3 ต่างกัน เป็นคู่เชิงซ้อน

$r = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \alpha_2 \pm \beta_2 i, ..., \alpha_k \pm \beta_k i$ เมื่อ $n = 2k$

$y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos\beta_1 x + c_2 \sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(c_3 \cos\beta_2 x + c_4 \sin\beta_2 x) + ... + e^{\alpha_k x}(c_{n-1} \cos\beta_k x + c_n \sin\beta_k x)$

4 จำนวนจริงซ้ำกัน

$r = m, m, ..., m$ (n ครั้ง)

$y = (c_1 + c_2 x + ... + c_{n-1} x^{n-2} + c_n x^{n-1}) e^{mx}$

5 เป็นศูนย์ซ้ำกัน

$r = 0, 0, ..., 0$ (n ครั้ง)

$y = c_1 + c_2 x + ... + c_{n-1} x^{n-2} + c_n x^{n-1}$

6 คู่เชิงซ้อนซ้ำกัน

$r = \alpha \pm \beta_i$ (k ครั้ง) เมื่อ $n = 2k$

$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) + x e^{\alpha x}(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x) + ... + x^{k-1} e^{2x}(c_{n-1} \cos\beta x + c_n \sin\beta x)$

การหาผลเฉลยที่สองจากผลเฉลยที่ทราบ

ตัวอย่าง 3.56 $y_1 = e^x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $y'' - y = 0$ จงหาผลเฉลยทั่วไป

วิธีทำ สมมติผลเฉลยที่สองคือ $y = u(x)e^x$

$$y' = ue^x + u'e^x$$

$$y'' = ue^x + u'e^x + u'e^x + u''e^x$$

$$= ue^x + 2u'e^x + u''e^x$$

ดังนั้น $y'' - y' = 2u'e^x + u''e^x = e^x(u'' - 2u') = 0$

$e^x \neq 0$ ดังนั้น $u'' - 2u' = 0$

ให้ $w = u', w' = u''$ ได้ $w' + 2w = 0$

สมการช่วยคือ $r + 2 = 0$

$$r = -2$$

$$w = c_1 e^{-2x} = u'$$

$$u = \frac{-c_1}{2} e^{-2x} + c_2$$

เลือก $c_2 = 0$ และ $c_1 = -2$ แล้ว $u = e^{-2x}$

ผลเฉลยที่สอง y_2 คือ $y_2 = (e^{-2x})(e^x) = e^{-x}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

ตัวอย่าง 3.57 ให้ $y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ บน $(0, \pi)$

วิธีทำ $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx$$

จัดสมการใหม่ $y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{1}{4x^2}) y = 0$

$$p(x) = \frac{1}{x} \; ; \; \exp(-\int \frac{1}{x} dx) = \exp(\ln x^{-1}) = \frac{1}{x}$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{1/x}{((\sin x)/\sqrt{x})^2} dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (-\cot x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$y = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

3.2.3 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(Nonhomogeneous Linear Equations with Constant Coefficients)

สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(x)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)$$

สมการเอกพันธ์ที่สมนัยกับสมการไม่เอกพันธ์คือ

$$a_n y^{(x)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์ต้องหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ก่อน ให้เป็น y_c : complemeutary solution แล้วจึงหาผลเฉลยเฉพาะรายของสมการไม่เอกพันธ์ ให้เป็น y_p : particular solution ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์คือ $y = y_c + y_p$

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, ..., D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n$$

$$A = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$A_y = a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + ... + a_{n-1} Dy + a_n y$$

A และ B เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$A = B \quad \text{ถ้า} \quad Ay = By$$

$$ABy = A(By) \text{ และ } BAy = B(Ay)$$

ตัวอย่างที่ 3.58 $A = D + 2, B = 3D - 1$

วิธีทำ

$$By = (3D-1)y = 3\frac{dy}{dx} - y$$

$$A(By) = (D+2)(3\frac{dy}{dx} - y)$$

$$= D(\frac{3dy}{dx} - y) + 2(\frac{3dy}{dx} - y)$$

$$= \frac{3dy^2}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \frac{6dy}{dx} - 2y$$

$$= (3D^2 + 5D - 2)y$$

$$A_y = (D+2)y = \frac{dy}{dx} + 2y$$

$$B(Ay) = (3D-1)(\frac{dy}{dx} + 2y)$$

$$= 3D(\frac{dy}{dx} + 2y) - (\frac{dy}{dx} + 2y)$$

$$= \frac{3d^2y}{dx^2} + \frac{6dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2y$$

$$= (3D^2 + 5D - 2)y$$

นั่นคือ $BA = 3D^2 + 5D - 2 = AB$

ตัวอย่างที่ 3.59 $G = xD + 2, H = D - 1$

วิธีทำ $$G(Hy) = (xD+2)(\frac{dy}{dx} - y)$$

$$= xD(\frac{dy}{dx} - y) + 2(\frac{dy}{dx} - y)$$

$$= x\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$GH = xD^2 + (2-x)D - 2$$

$$H(G-y) = (D-1)(x\frac{dy}{dx} + 2y)$$

$$= D(x\frac{dy}{dx} + 2y) - (x\frac{dy}{dx} + 2y)$$

$$= x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$HG = xD^2 + (3-x)D - 2$$

นั่นคือ $GH \neq HG$

จาก **ตัวอย่าง 3.60** สัมประสิทธิ์ของตัวดำเนินการเป็นค่าคงที่ทุกตัว

$$AB = BA$$

จาก **ตัวอย่าง 3.61** สัมประสิทธิ์ของตัวดำเนินการเป็นตัวแปรบางตัว

$$GH \neq HG$$

ตัวอย่าง 3.62

$$A = 3D^2 - D + x - 2$$
$$B = x^2D^2 + 4D + 7$$
$$A + B = (x^2+3)D^2 + 3D + (x+5)$$

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นถ้า

$$A(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1Af_1 + c_2Af_2$$

The Fundamental Laws of Operations

1. A+B = B+A
2. (A+B)+C = A+(B+C)
3. (AB)C = A(BC)

4. A(B+C) = AB+AC
5. AB = BA ถ้าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$D^m D^n = D^{m+n}$$
$$De^{mx} = me^{mx}$$
$$D^2 e^{mx} = D(me^{mx}) = mDe^{mx}$$
$$= m^2 e^{mx}$$
$$D^3 e^{mx} = D(m^2 e^{mx}) = m^2 De^{mx}$$
$$= m^3 e^{mx}$$
$$\cdots$$
$$D^k e^{mx} = m^k e^{mx}$$

กำหนดพหุพจน์ $p(x) = 8x^3 - 5x^2 + 1$
โดยการหาอนุพันธ์ $Dp(x) = 24x^2 - 10x$

$$D^2 p(x) = 48x - 10$$
$$D^3 p(x) = 48$$
$$D^4 p(x) = 0$$

$\therefore$ differential operator D^n จะลบล้าง แต่ละฟังก์ชัน $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$

กำหนด ฟังก์ชันเอกโพเนียนเชียล $y(x) = e^{\alpha x}$ เมื่อ α คงที่
โดยการหาอนุพันธ์ $Dy(x) = \alpha e^{\alpha x}$
พบว่า $Dy(x) - \alpha y(x) = \alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0$

$$(D - \alpha)y(x) = 0$$

กำหนดฟังก์ชัน $y(x) = xe^{\alpha x}; \alpha$ คงที่
โดยการหาอนุพันธ์ $Dy(x) = xDe^{\alpha x} + e^{\alpha x}Dx$

$$= \alpha xe^{\alpha x} + e^{\alpha x}$$
$$D^2 y(x) = \alpha D(xe^{\alpha x}) + De^{\alpha x}$$
$$= \alpha(\alpha xe^{\alpha x} + e^{\alpha x}) + \alpha e^{\alpha x}$$
$$= \alpha^2 xe^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x}$$

พบว่า $D^2 y(x) - 2xDy(x) + \alpha^2 y(x)$

$$= \alpha^2 xe^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x} - 2\alpha^2 xe^{\alpha x} - 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 xe^{\alpha x}$$
$$= 0$$

หรือ $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2)y = (D - \alpha)^2 y = 0$

$\therefore$ differential operator $(D-\alpha)^n$ จะลบล้างแต่ละฟังก์ชัน $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}$

สมการ ODE $D^2y - 2\alpha Dy + (\alpha^2+\beta^2)y = 0$

สมการช่วยคือ $r^2 - 2\alpha r + (\alpha^2+\beta^2) = 0$

$$r = \frac{-(-2\alpha) \pm \sqrt{(-2\alpha)^2 - 4(1)(\alpha^2+\beta^2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2\alpha \pm 2\beta i}{2} = \alpha \pm \beta i$$

$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin \beta x$

$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2)]e^{\alpha x}\cos \beta x = 0$

$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2)]e^{\alpha x}\sin \beta x = 0$

$\therefore$ differential operator $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2)]^n$ จะลบล้างแต่ละฟังก์ชัน

$$e^{\alpha x}\cos \beta x, xe^{\alpha x}\cos \beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin \beta x, xe^{\alpha x}\sin \beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}\sin \beta x$$

กรณีเฉพาะ $(D^2+\beta^2)\cos \beta x = 0$ และ $(D^2+\beta^2)\sin \beta x = 0$ หรือ $(D^2+\beta^2)^n$ จะลบล้างแต่ละฟังก์ชัน $\cos \beta x, x\cos \beta x, ..., x^{n-1}\cos \beta x$, $\sin \beta x, x\sin \beta x, ..., x^{n-1}\sin \beta x$

ตัวอย่าง 3.63 $(D^2+1)y = e^{2x}$

วิธีทำ $r^2+1=0; r=\pm i$

$y_c = c_1\cos x + c_2 \sin x$

จากโจทย์ พิจารณา $Q(x) = e^{2x}$ พบว่าจะหมดไปถ้าดำเนินการ ด้วย $(D-2)$ หรือ

$(D-2)e^{2x} = 0$

นำ $(D-2)$ ดำเนินการ บน $(D^2+1)y = e^{2x}$

$(D-2)(D^2+1)y = (D-2)e^{2x} = 0$

$(r-2)(r^2+1) = 0; r = 2, \pm i$

$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^{2x}$

ดังนั้น $y_p = c_3e^{2x}$

$y_p' = 2c_3e^{2x}, y_p'' = 4c_3e^{2x}$

$(D^2+1)y_p = 4c_3e^{2x} + c_3e^{2x} = 5c_3e^{2x} = e^{2x}$

$c_3 = \frac{1}{5}$

นั่นคือ $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{5}e^{2x}$

3.2.4 การเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined Coefficients)

การเทียบสัมประสิทธิ์

ข้อจำกัด

- สมการต้องมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
- $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ , ฟังก์ชันพหุนาม , ฟังก์ชันเอกโพเนียนเชีย , sine , cosine หรือ ผลบวก และผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้ใช้ไม่ได้เมื่อ $Q(x)$ เป็น

  $\ln x$, $\tan x$, $\sin^{-1} x$, $\sec x$

สมมุติ y_p โดยพิจารณาจาก $Q(x)$ ดังนี้

$Q(x)$	แบบของ y_p
1. 1 ค่าคงที่ใดๆ	A
2. $5x+7$	$Ax+B$
3. $3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4. x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+D
5. $\sin 4x$	$A\sin 4x+B\cos 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x+B\sin 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10. $e^{5x}\sin 4x$	$Ae^{5x}\sin 4x+Be^{5x}\cos 4x$
11. $5x^2\sin 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\sin 4x+(Dx^2+Ex+F)\cos 4x$
12. $xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+D)e^{3x}\sin 4x$
13. $6xe^{2x}$	$(Cx+D)e^{2x}$

ในการสมมติ y_p นั้น ต้องสมมติทุกพจน์ใน $Q(x)$ รวมกับอนุพันธ์ทุกอันดับของแต่ละพจน์ที่สิ้นสุด

$$Axe^{2x} \quad : \quad Ae^{2x}+2Axe^{2x}$$

$$: \quad (Cx+D)e^{2x}$$

14. x^2e^{5x} $\qquad (Ax^2+Bx+C)e^{5x}$

$$Ax^2e^{5x} \quad : \quad 2Axe^{5x}+5Ax^2e^{5x}$$

$: \quad 2Ae^{5x} + 10Axe^{5x} + 10Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}$

$: \quad 2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}$

$: \quad (Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$

15. $16x^5$ $\quad Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$

ตัวอย่าง 3.64 $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

วิธีทำ หา y_c จาก $y'' + 4y' - 2y = 0$

สมการช่วยคือ $\quad m^2 + 4m - 2 = 0$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

ได้ $y_c = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x}$

หา y_p โดยพิจารณา $g(x) = 2x^3 - 3x + 6$

สมมติ $\quad y_p = Ax^2 + Bx + C$

หา $\quad y'_p = 2Ax + B$

และ $\quad y''_p = 2A$

แทน y_p, y'_p, y''_p ทางซ้ายของโจทย์

$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + c) = 2x^2 - 3x + 6$

$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$

$-2A = 2 \quad ; \quad 8A - 2B = -3 \quad ; \quad 2A + 4B - 2C = 6$

$A = -1 \qquad B = -\frac{5}{2} \qquad C = -9$

ดังนั้น $\quad y_p = x^2 - \frac{5}{2}x - 9$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $\quad y = y_c + y_p$

นั่นคือ $\quad y = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{-(2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$

ตัวอย่าง 3.65 $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$

วิธีทำ สมการช่วย $\quad m^2 - 5m + 4 = (m-4)(m-1) = 0$

$y_c = c_1e^{4x} + c_2e^x$

จาก $g(x) = 8e^x$ สมมติ $y_p = Ae^x$

$y'_p = Ae^x, y''_p = Ae^x$

แทนทางซ้ายของโจทย์ $Ae^x - 5Ae^x + 4Ae^x = 8e^x = 0$

ซึ่งไม่ถูกต้อง ดังนั้นที่สมมติ $y_p = Ae^x$ ผิด

เพราะ e^x ใน $g(x)$ ซ้ำกับใน y_c

ในการสมมติ y_p จาก $g(x)$ นั้น ถ้ามีพจน์ที่ซ้ำกับ y_c ต้องคูณพจน์ที่ซ้ำด้วย x^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่จะกำจัดภาวะการณ์ซ้ำนั้นได้

สมมติ $y_p = Axe^x, y_p' = Ae^x + Axe^x$

$$y_p'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x$$

ได้ $2Ae^x + Axe^x - 5Ae^x - 5Axe^x + 4Axe^x = 8e^x$

$-3Ae^x = 8e^x; A = \dfrac{-8}{3}$ และ $y_p = \dfrac{-8}{3}xe^x$

$y = c_1e^{4x} + c_2e^x - \dfrac{8}{3}xe^x$

ตัวอย่าง 3.66 $y'' - 2y' + y = e^x$

วิธีทำ $m^2 - 2m + 1 = (m-1)(m-1) = 0; m = 1, -1$

$y_c = (c_1 + c_2x)e^x$

จาก $g(x) = e^x$

สมมติ $y_p = Ax^2e^x$

ตัวอย่าง 3.67 $y'' + y = 4x + 10\sin x$

วิธีทำ $m^2 + 1 = 0$; $m = \pm i$

$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$

$y_p = Ax + B + Cx\sin x + Dx\cos x$

ตัวอย่าง 3.68 $y''' + y'' = e^x\cos x$

วิธีทำ $m^3 + m^2 = m^2(m+1) = 0; m = 0, 0, -1$

$y_c = (c_1 + c_2x) + c_3e^{-x}$

จาก $g(x) = e^x\cos x$

สมมติ $y_p = Ae^x\cos x + Be^x\sin x$

ตัวอย่าง 3.69 $y^{(iv)} + y''' = 1 - e^{-x}$

วิธีทำ $m^4 + m^3 = m^3(m+1) = 0; m = 0, 0, 0, -1$

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$$

จาก $g(x) = 1 - e^{-x}$

สมมติ $y_p = Ax^3 + Bxe^{-x}$

ตัวอย่าง 3.70 $(D^2 - 3D - 4)y = x - 6x^2e^x$

วิธีทำ $r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$

$r = 4,-1; y_c = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$

ให้ $y_p = (Ax + B) + (Cx^2 + Dx + E)e^x$

$$Dy_p = (A) + (2Cx + D)e^x + (Cx^2 + Dx + E)e^x$$

$$= A + [Cx^2 + (2C + D)x + (E + D)]e^x$$

$$D^2y_p = (2Cx + 2C + D)e^x + [Cx^2 + (2C + D)x + E + D]e^x$$

$$= [Cx^2 + (4C + D)x + (2C + 2D + E)]e^x$$

$$(D^2 - 3D - 4)y_p = [Cx^2 + (4C + D)x + (2C + 2D + E)]e^x$$

$$-3A - 3[Cx^2 + (2C + D)x + (E + D)]e^x - 4(Ax + B)$$

$$-4(Cx^2 + Dx + E)e^x$$

$$= -4Ax - 3A - 4B + [(C - 3C - 4C)x^2$$

$$+ (4C + D - 6C - 3D - 4D)x$$

$$+ (2C + 2D + E - 3E - 3D - 4E)]e^x$$

$$= -4Ax - 3A - 4B + [-6Cx^2 + (-2C - 6D)x + (2C - D - 6E)]e^x$$

$$= x - 6x^2e^x$$

$-4A = 1 \quad : \quad A = \dfrac{-1}{4}$

$-3A - 4B = 0 \quad : \quad B = \dfrac{3}{16}$

$-6C = -6 \quad : \quad C = 1$

$-2C - 6D = 0 \quad : \quad D = \dfrac{2}{-6} = \dfrac{-1}{3}$

$2C - D - 6E = 0 \quad : \quad E = \dfrac{7}{18}$

$$y_p = (\frac{-1}{4}x + \frac{3}{16}) + (x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{7}{18})e^x$$

จาก $y = y_c + y_p$ จะได้ $y = C_1e^{4x} + c_2e^{-x} - (\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}) + (x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{7}{18})e^x$

3.2.5 การหาผลเฉลยเฉพาะรายโดยวิธีแปรผันด้วยพารามิเตอร์

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$y = ce^{-\int p(x)dx}$$

เลือก $c = 1$

$$y_1 = e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c]$$

$$= y_1[\int \frac{q(x)}{y_1} dx + c]$$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์นั้น $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ จะหาผลเฉลยของเอกพันธ์สมทบกับ $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ ก่อน ให้เป็น y_1 แล้วจึงหาผลเฉลยเฉพาะรายของ $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ โดยการสมมติ

$$y_p = v(x)y_1(x)$$

$$y = cy_1 + y_1\int \frac{q(x)}{y_1} dx$$

$$= y_c + y_p$$

$$[a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)]y = Q(x)$$

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

$$Dy_p = v_1y_1' + v_1'y_1 + v_2y_2' + v_2'y_2$$

$$= v_1y_1' + v_2y_2' + v_1'y_1 + v_2'y_2$$

$$D^2y_p = D(v_1'y_1 + v_2'y_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2''$$

แทน y_p, Dy_p, D^2y_p ใน $[a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)]y = Q(x)$

$$a_2D(v_1'y_1 + v_2'y_2) + a_2(v_1'y_1' + v_2'y_2') + a_2v_1y_1'' + a_2v_2y_2'' + a_1v_1y_1'$$
$$+ a_1v_2y_2' + a_1(v_1'y_1 + v_2'y_2) + a_0v_1y_1 + a_0v_2y_2 = Q(x)$$

$$(a_2D + a_1)(v_1'y_1 + v_2'y_2) + a_2(v_1'y_1' + v_2'y_2')$$
$$+ v_1(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + v_2(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) = Q(x)$$

เลือก $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$

จะเหลือ $v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{Q(x)}{a_2}$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x)/a_2 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1 & Q(x)/a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-Q(x)y_2}{a_2W[y_1,y_2]} \qquad = \frac{Q(x)y_1}{a_2W[y_1,y_2]}$$

$$v_1(x) = \int \frac{-Q(x)y_2(x)}{a_2(x)W[y_1(x),y_2(x)]}dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{Q(x)y_1(x)}{a_2(x)W[y_1(x),y_2(x)]}dx$$

$$y_p = -y_1(x)\int \frac{Q(x)y_2(x)}{a_2(x)W[y_1(x),y_2(x)]}dx + y_2(x)\int \frac{Q(x)y_1(x)}{a_2(x)W[y_1(x),y_2(x)]}dx$$

การหาผลเฉลยโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์นั้นใช้ได้ในกรณี $Q(x)$ เป็น พหุนาม, เอกโพเนียนเชียล , some trigonometric หรือ ผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้

แต่ถ้า $Q(x)$ เป็น ln x , sec x , tan x ยุ่งยากมากหรือหาไม่ได้เลย ลากราจน์ จึงคิดวิธีแปรผันตัวพารามิเตอร์ ซึ่งไม่มีข้อจำกัด ใช้ได้กับทุกรูปแบบของฟังก์ชัน

3.2.6 วิธีแก้สมการโดยการเปลี่ยนพารามิเตอร์

(Method of Variation Parameters for Solving)

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

1. หา associated homogeneous equation

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

แล้วหา ผลเฉลยเฉพาะราย

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

2. แทนค่าคงที่ c_1 และ c_2 ด้วย $v_1(x)$ และ $v_2(x)$ แล้วผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

3. เขียนเงื่อนไข

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$$

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = \frac{g}{a_2}$$

4. หา v_1' และ v_2'

5. หา $v_1(x)$ และ $v_2(x)$ โดย

$$v_1(x) = \int v_1'(x)dx$$

$$v_2(x) = \int v_2'(x)dx$$

6. เขียน y_p

7. $y = y_c + y_p$

ตัวอย่าง 3.71 $(D^2+1)y = \sec x \tan x$

วิธีทำ $r^2 + 1 = 0; r = \pm i$

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ให้ $y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$

โดย $v_1'(x)(\cos x) + v_2'(x)(\sin x) = 0$

$$v_1'(x)(-\sin x) + v_2'(x)(\cos x) = \sec x \tan x$$

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x \sec x \tan x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\tan^2 x$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x \sec x \tan x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \tan x$$

$$v_1(x) = -\int \tan^2 x dx = -\int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int dx - \int \sec^2 x dx = x - \tan x$$

$$v_2(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln(\cos x)$$

$$y_p = (x - \tan x)\cos x - \sin x \ln(\cos x)$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x(x - \tan x) - \sin x \ln(\cos x)$$

ตัวอย่าง 3.72 $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

วิธีทำ $y = x^m, y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2 m(m-1)x^{m-2} - 3xmx^{m-1} + 3x^m$$

$$= x^m(m(m-1) - 3m + 3)$$

auxiliary equation คือ $m^2 - 4m + 3 = 0$ หรือ $(m-3)(m-1) = 0$

ดังนั้น $y_c = c_1 x + c_2 x^3$

$$y_p = u_1(x)x + u_2(x)x^3$$
$$u_1'(x) + u_2'(x^3) = 0$$
$$u_1'(1) + u_2'(3x^2) = 2x^2e^x$$
$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-2x^5e^x}{3x^3 - x^3} = -x^2e^x$$
$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x$$
$$u_1(x) = -\int x^2e^x\,dx = -(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x)$$
$$u_2(x) = \int e^x\,dx = e^x$$
$$y_p = u_1x + u_2x^3 = -x^3e^x + 2x^2e^x - 2xe^x + x^3e^x$$

3.2.7 การแก้สมการโดยวิธีอื่นๆ(Alternative Method of Solution)

สมการโคชี-ออยเลอร์ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงที่ สามารถลดรูปให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยการแทน $x = e^t$ และหาอนุพันธ์โดยการใช้กฎลูกโซ่ ดังนี้

$x = e^t$ หรือ $t = \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

และ $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$= \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$
$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$

ตัวอย่าง 3.73 $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x$

วิธีทำ จาก $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ และ $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$

ได้
$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = \ln(e^t)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t$$

เป็นสมการซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

awxiliary equation คือ $m^2 - 2m + 1 = 0$ หรือ $(m-1)^2 = 0$

ดังนั้น $y_e = c_1e^t + c_2te^t$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficient)

สมมติผลเฉลยเฉพาะ $y_p = A + Bt$

$y_p' = B$, $y_p'' = 0$

ได้ $-2B + A + Bt = t$ ดังนั้น $B = 1$, $A - 2B = 0$ หรือ $A = 2$

$$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2te^t + 2 + t$$

แล้วผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เมื่อแรกเริ่มบน $(0, \infty)$

คือ $y = c_1x + c_2x\ln x + 2 + \ln x$

ตัวอย่าง 3.74 $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x$

วิธีทำ
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$
$$y = x^2, y' = rx^{r-1}, y'' = r(r-1)x^{r-2}$$
$$x^2r(r-1)x^{r-2} - 3xrx^{r-1} + 4x^2 = 0$$
$$(r^2 - 4r + 4)x^r = 0$$
$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)(r-2) = 0$$
$$r = 2,2$$
$$y_c = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$$
$$y_p = v_1(x)x^2 + v_2(x)x^2\ln x$$
$$x^2v_1'(x) + x^2\ln x v_2'(x) = 0$$
$$2xv_1'(x) + (2x\ln x + x)v_2'(x) = x^2\ln x / x^2 = \ln x$$
$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2\ln x \\ \ln x & 2x\ln x + x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix}} = \frac{-x^2(\ln x)^2}{2x^3\ln x + x^3 - 2x^3\ln x} = -\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

$$v_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & \ln x\end{vmatrix}}{x^3}=\frac{x^2\ln x}{x^3}=\frac{1}{x}\ln x$$

$$v_1(x)=-\int\frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx=-\int(\ln x)^2 d(\ln x)=-\frac{1}{3}(\ln x)^3$$

$$v_2(x)=\int\frac{1}{x}\ln x dx=\int\ln x d(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$y_p=-\frac{1}{3}x^2(\ln x)^3+\frac{1}{2}x^2(\ln x)^3=\frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$$

$$y=c_1x^2+c_2x^2\ln x+\frac{1}{6}x^2(\ln x)^3=x^2\left[c_1+c_2\ln x+\frac{1}{6}(\ln x)^3\right]$$

3.2.8 สมการโคชี-ออยเลอร์ (Cauchy-Euler Equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบ

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ เป็นค่าคงที่ เรียกว่า สมการ โคชี-ออยเลอร์ (cauchy-eular equation) หรือ (equidiminsional equation) พจน์ที่เป็นสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์อันดับที่ k $\frac{d^ky}{dx^k}$ คือ โพลีโนเมียล x^k เมื่อ $k=1,2,\ldots,n$

การหาผลเฉลยของสมการ โคชี-ออยเลอร์อันดับสอง

ทำได้โดยการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์(pomogeneous equation)อันดับสอง

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

แล้วจึงหาผลเฉลยของสมการ ไม่เอกพันธ์(nonhomogeneous equation)

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=g(x)$$

โดยวิธีแปรผันตัวพารามิเตอร์(variation of parameter) วิธีการหาผลเฉลยนั้น เริ่มด้วยการให้ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $y=x^m$ เมื่อ m เป็นค่าต้องการหาค่า

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1} \quad \text{และ} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$$

สมการเชิงอนุพันธ์จะเปลี่ยนเป็น

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=ax^2m(m-1)x^{m-2}+bxmx^{m-1}+cx^m$$

$$=am(m-1)x^m+bmx^m+cx^m$$

$$= x^m \left(am(m-1) + bmJ + c\right)$$

แล้ว $y = x^m$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อ m เป็นผลเฉลยของ auxiliary equation

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{หรือ} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0$$

มี 3 กรณีที่จะพิจารณา ขึ้นกับรากของสมการกำลังสองว่าจริงต่างกัน,ค่าจริงเท่ากัน หรือ เป็นสังยุคซ้อน(complex conjugetes)

กรณีที่1 ให้ m_1 และ m_2 เป็นรากจริง auxicially-equation ซึ่ง $m_1 \neq m_2$ แล้ว

$$y_1 = x^{m_1} \text{ และ } y_2 = x^{m_2}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป(general solution) คือ

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

ตัวอย่าง 3.75 $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

วิธีทำ ให้ $y = x^m$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$

แทนกลับไปในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} - 4x^m$$

$$= x^m\left(m(m-1) - 2m - 4\right)$$

$$= x^m\left(m^2 - 3m - 4\right) = 0$$

ถ้า $\left(m^2 - 3m - 4\right) = 0$ แล้ว $(m-4)(m+1) = 0$ หรือ $m_1 = -1, m_2 = 4$ ดังนั้น

$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$

กรณีที่2 ถ้า $m_1 = m_2$ แล้วได้ผลเฉลยเดียว คือ $y = x^{m_1}$ จากสมการกำลังสอง

$am^2 + (b-a)m + c = 0$

รากของสมการนี้ คือ $m = \dfrac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$

เนื่องจากรากเท่ากัน แสดงว่า disoiminant เป็นศูนย์ $\left(\sqrt{(b-a)^2 - 4ac} = 0\right)$ รากของสมการ คือ $m_1 = \dfrac{-(b-a)}{2a}$

การหาผลเฉลย y_2 ทำได้โดย จัดสมการ โคชี-ออยเลอร์ให้อยู่ในรูปแบบ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในรูปแบบ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ ต่อเนื่องบนบางช่วง I

ให้ $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยบน I และ $y_1(x) \neq 0$ สำหรับทุก x บน I แล้ว ผลเฉลยที่สอง $y_2(x)$ หาได้จากสูตร

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

$$P(x) = \frac{b}{ax} \text{ และ } 2m_1 = -\frac{(b-a)}{a}$$

$$y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-\int\left(\frac{b}{ax}\right)dx}}{\left(x^{m_1}\right)^2}dx$$

$$= x^{m_1}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}\ln x}}{x^{2m_1}}dx$$

$$e^{-\frac{b}{a}\ln x} = e^{\ln x^{-b/a}} = x^{-b/a}$$

$$y_2 = x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{-2m_1}dx$$

$$= x^{m_1}\int x^{-b/a}\cdot x^{(b-a)/a}dx$$

$$= x^{m_1}\int \frac{dx}{x} = x^{m_1}\ln x$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x$$

ตัวอย่าง 3.76 $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

วิธีทำ $y = x^m$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 4x^2m(m-1)x^{m-2} + 8xmx^{m-1} + x^m$$

$$= x^m\left(4m(m-1) + 8m + 1\right)$$

$$= x^m\left(4m^2 + 4m + 1\right) = 0$$

เมื่อ $4m^2 + 4m + 1 = 0$ หรือ $(2m+1)^2 = 0$ ได้ $m_1 = -1/2$

แล้วผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2}\ln x$

สำหรับสมการอันดับสูงขึ้น ถ้า m_1 เป็นรากซ้ำ k ครั้ง

$x^{m_1}, x^{m_1}\ln x, x^{m_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$ เป็น k ผลเฉลยอิสระเชิงเส้น (k linearly independet solution)

กรณีที่3 ถ้า m_1 และ m_2 เป็น complex conjugete

$m_1 = \alpha + i\beta \qquad m_2 = \alpha - i\beta$

เมื่อ $\alpha > 0$ และ $\beta > 0$ เป็นจำนวนจริงทั้งคู่ แล้วผลเฉลย คือ

$$y = c_1' x^{\alpha+i\beta} + c_2' x^{\alpha-i\beta}$$

จากเอกลักษณ์ $x^{i\beta} = e^{\ln x^{i\beta}} = e^{i\beta \ln x}$

จากรูปแบบของออยเลอร์ $\quad e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$

แล้ว $\quad x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} y &= c_1' x^{\alpha+i\beta} + c_2' x^{\alpha-i\beta} \\ &= x^{\alpha}\left[c_1' x^{i\beta} + c_2' x^{-i\beta}\right] \\ &= x^{\alpha}\left[c_1'\{\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x)\} + c_2'\{\cos(\beta\ln x) - i\sin(\beta\ln x)\}\right] \\ &= x^{\alpha}\left[(c_1' + c_2')\cos(\beta\ln x) + i(c_1' - c_2')\sin(\beta\ln x)\right]. \\ &= x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)\right] \end{aligned}$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)\right]$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

ซึ่งไม่ใช่สมการโคชี-ออยเลอร์ ถ้าผลเฉลยหนึ่งคือ $y_1(x)$ แล้วหาอีกผลเฉลยได้โดย

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

ตัวอย่าง 3.77 $x^3y'' + xy' - y = e^{\frac{1}{x}}; x > 0$ และ $y = x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเอกพันธ์สมทบ

วิธีทำ สมการเอกพันธ์สมทบ คือ $x^3y'' + xy' - y = 0$

ผลเฉลยหนึ่งคือ $y(x) = x$

แล้ว $y(x) = xu(x)$

$y' = xu' + u, y'' = xu'' + 2u'$

$x^3(xu'' + 2u') + x(xu' + u) - xu = 0$

$x^4u'' + (2x^3 + x^2)u' = 0$

$w = u'$ แล้ว $w' = u''; x^4 w' + (2x^3 + x^2)w = 0$

$\frac{w'}{w} + \frac{2x^3 + x^2}{x^4} = 0 \quad ; \qquad \frac{w'}{w} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\ln|w| + 2\ln|x| - \frac{1}{x} = \ln|c_1|$

$\ln\frac{wx^2}{c_1} = \frac{1}{x}$

$w = c_1 x^{-2} e^{\frac{1}{x}}$

$w = u' \quad ; \quad u = \int c_1 x^{-2} e^{\frac{1}{x}} dx$

$= -c_1 \int e^{\frac{1}{x}} d(\frac{1}{x}) = -c_1 e^{\frac{1}{x}} + c_2$

$y = ux = -c_1 x e^{\frac{1}{x}} + c_2 x$

$y_1 = x, y_2 = xe^{\frac{1}{x}}$

$\begin{vmatrix} x & xe^{\frac{1}{x}} \\ 1 & e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \end{vmatrix} = xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} \neq 0$; x และ $xe^{\frac{1}{x}}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

$y_p = xv_1(x) + xe^{\frac{1}{x}} v_2(x)$

$(x)v_1'(x) + (xe^{\frac{1}{x}})v_2'(x) = 0$

$(1)v_1'(x) + (e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x})v_2'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$

$v_1'(x) = x^{-2} e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad v_1(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

$v_2'(x) = -x^{-2} \quad ; \quad v_2(x) = x^{-1}$

$y_p = -xe^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}}(-x^{-1}) = (1 - x)e^{\frac{1}{x}}$

$y = c_3 x + c_4 x e^{\frac{1}{x}} + (1 - x)e^{\frac{1}{x}}$

3.3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ประกอบด้วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันอิสระตัวแปรเดียวที่ไม่ทราบค่า ตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไป

ถ้า x, y และ z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t แล้ว

$$\frac{4d^2x}{dt^2} = -5x + y$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = 3x - y$$

และ

$$x' - 3x + y' + z' = 5$$

$$x' - y' + 2z' = t^2$$

$$x + y' - 6z' = t - 1$$

ทั้งสองตัวอย่างข้างบนเป็นตัวอย่างของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ผลเฉลยของระบบสมการ *(solution of a system)*

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ คือ เซตของฟังก์ชัน $x = f(t)$, $y = g(t)$ และ $z = h(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และสอดคล้องกับแต่ละสมการของระบบสมการสำหรับบางค่า t บนช่วง I

3.3.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

(system of linear first – order equations)

3.3.1.1 ระบบสมการรูปแบบปกติ *(Linear Normal Form)*

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นจะเรียกว่า **ระบบสมการรูปแบบปกติ** *(normal form* **หรือ** *canomical form)* ถ้าจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_1 + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_2 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_3 + a_{n2}(t)x_n + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

ถ้า $f_i(t)=0$ เมื่อ $i=0,1,2,\cdots,n$ จะเรียกระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นว่า **ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญแบบเอกพันธ์***(homogeneous linear system)*
แต่ถ้า $f_i(t)\neq 0$ แล้วเรียกระบบสมการว่า **ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญแบบไม่เอกพันธ์** *(nonhomogeneous linear system)* ตัวอย่างเช่น

$$\frac{dx_1}{dt}=3x_1+x_2-4x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2-x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt}=2x_1+x_2-3x_3$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ของระบบสมการรูปแบบปกติ

$$\frac{dx_1}{dt}=-4x_1-6x_2+6e^{2t}$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_1+x_2+3e^{2t}$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ของระบบสมการรูปแบบปกติ

พิจารณาระบบสมการ ต่อไปนี้

$$(D-3)x_1+Dx_2=-4e^{2t}$$
$$D\ x_1+D^2x_2=10e^{-t}$$

เมื่อ $D\equiv\frac{d}{dt}$ เรียก D ว่า ***ตัวสัญญาการเชิงอนุพันธ์*** *(differential operator)* ดังนั้นจากตัวอย่างเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ คือ

$$p_{11}(D)x_1+P_{12}(D)x_2+\ldots+P_{1n}(D)x_n=b_1(t)$$
$$p_{21}(D)x_1+P_{22}(D)x_2+\ldots+P_{2n}(D)x_n=b_2(t)$$
$$\vdots$$
$$p_{n1}(D)x_1+P_{n2}(D)x_2+\ldots+P_{nn}(D)x_n=b_n(t)$$

จากระบบสมการข้างต้นจะเห็นว่าไม่เป็นระบบสมการในรูปแบบปกติ แต่ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในรูปแบบปกติเท่านั้น ดังนั้นสำหรับสมการที่ไม่อยู่ในรูปแบบปกติเราสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปกติ ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n คือสมการอยู่ในรูป

$$\frac{d^n y_n}{dt^n} = -\frac{a_0 y}{a_n} - \frac{a_1 y'}{a_n} - \cdots - \frac{a_{n-1} y^{(n-1)}}{a_n} + f(t)$$

สมมติตัวแปร	โดยการหาอนุพันธ์ได้
$y = x_1$	$y' = x_1' = x_2$
$y' = x_2$	$y'' = x_2' = x_3$
$y'' = x_3$	$y''' = x_3' = x_4$
$\vdots$	$\vdots$
$y^{(n-2)} = x_{n-1}$	$y^{(n-1)} = x_{n-1}' = x_n$
$y^{(n-1)} = x_n$	$y^{(n)} = x_n'$

ดังนั้นเราจะได้ระบบสมการรูปแบบปกติ คือ

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = x_4$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}' = x_n$$

$$x_n' = \frac{-a_0 x_1}{a_n} - \frac{a_1 x_2}{a_n} - \ldots - \frac{a_{n-1} x_n}{a_n} + f(t)$$

ตัวอย่าง 3.78 จงลดรูป $2y''' - 6y'' + 4y' + y = \sin t$ เป็นระบบสมการรูปแบบปกติ

วิธีทำ จัดสมการใหม่โดยให้อนุพันธ์อันดับสูงสุดอยู่ทางซ้ายมือเพียงพจน์เดียว

$$y''' - \frac{1}{2}y - 2y' + 3y'' + \frac{1}{2}\sin t$$

ให้ $y = x_1$ โดยการหาอนุพันธ์ $y' = x_1' = x_2$

$y' = x_2$ $\quad\quad y'' = x_2' = x_3$

$y'' = x_3$ $\quad\quad y''' = x_3'$

ดังนั้น ระบบสมการรูปแบบปกติ คือ

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$x_3' = -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}\sin t$$

ตัวอย่าง 3.79 จงลดรูป $(D^2 - D + 5)x + 2D^2 y = e^t$

$$-2x + (D^2 + 2)y = 3t^2$$

ให้เป็นระบบสมการรูปแบบปกติ

วิธีทำ $D^2 x + 2D^2 y = e^t - 5x + Dx \qquad R_1^1$

$$D^2 y = 3t^2 + 2x - 2y \qquad R_2^1$$

ต้องการให้อนุพันธ์อันดับสูงสุดอยู่ทางซ้ายมือเพียงพจน์เดียวโดยการกำจัด $D^2 y$ จาก R_1^1 โดย $R_1^2 \leftarrow R_1^1 - 2R_2^1$

$$D^2 x = e^t - 6t^2 - 9x + 4y + Dx \qquad R_1^2$$

$$D^2 y = 3t^2 + 2x - 2y \qquad R_2^2$$

ให้ $\quad Dx = u$ และ $Dy = v$

แล้ว $\quad D^2 x = Du$ และ $D^2 y = v$

ดังนั้น $\quad Dx = u$

$$Dy = v$$

$$Du = -9x + 4y + u + e^t - 6t^2$$

$$Dv = 2x - 2y + 3t^2$$

3.3.1.2 ระบบสมการในรูปแบบของเมทริกซ์ *(matrix form of a system)*

ถ้า $X, A(t), F(t)$ แทน ฟังก์ชันของเมทริกซ์ ที่กำหนดโดย

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & & a_{2n}(t) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

แล้วระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง คือ

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_1 + f_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_2 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_3 + a_{n2}(t)x_n + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & & a_{2n}(t) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

หรือ $$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$$

หรือ $$X' = AX + F$$

ถ้าเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธ์จะเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad \text{หรือ} \quad X' = AX$$

ตัวอย่าง 3.80 จงเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เอกพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันของเมทริกซ์

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 5y + e^t - 2t$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 3y \quad + 10t$$

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของเมทริกซ์ ดังนี้

ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^t - 2t \\ 10t \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 3.81 จงเขียน ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเอกพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันของเมทริกซ์

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 6x + 5y$$

วิธีทำ ให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} X$

กำหนด $A(t) = [a_{ij}(t)]_{m\times n}$

เป็นฟังก์ชันของเมทริกซ์ หรือ matrix value function

ถ้า $A(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I แล้ว

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}\right]_{m\times n}$$

ถ้า $A(t)$ เป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I แล้ว

$$\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \left[\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)ds\right]_{m\times n}$$

ตัวอย่าง 3.82 $A(t)=\begin{bmatrix}\sin 2t\\ e^{3t}\\ 8t-1\end{bmatrix}$ จงหา $A'(t)$ และ $\int_0^t A(s)ds$

วิธีทำ $$A'(t)=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}\sin 2t\\ \frac{d}{dt}e^{3t}\\ \frac{d}{dt}(8t-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos 2t\\ 3e^{3t}\\ 8\end{bmatrix}$$

และ

$$\int_0^t A(s)ds=\begin{bmatrix}\int_0^t \sin 2s ds\\ \int_0^t e^{3s}ds\\ \int_0^t (8s-1)ds\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}\\ 4t^2-t\end{bmatrix}$$

กฎการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตฟังก์ชันของเมทริกซ์ เป็นไปในทำนองเดียวกับ ordinary function

$$\frac{d}{dt}CA=C\frac{dA}{dt}$$ เมื่อ C เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่

$$\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{dA}{dt}+\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(AB)=A\frac{dB}{dt}+\frac{dA}{dt}B$$

$$\int_a^b (A(t)+B(t)dt=\int_a^b A(t)dt+\int_a^b B(t)dt$$

เวกเตอร์ผลเฉลย *(solution vector)*

คือ เมทริกซ์หลัก $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ บนช่วง I ใดๆ

ซึ่งแต่ละสมาชิกในเมทริกซ์หลักสามารถหาอนุพันธ์ได้ และสอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น $X' = AX + F(t)$ บนช่วง I แล้วจะเรียกเมทริกซ์หลักดังกล่าวว่า **เวกเตอร์ผลเฉลย ของ** ระบบสมการ

ตัวอย่าง 3.83

$$Dx_1 = 3x_1 + x_2 - 4x_3$$
$$Dx_2 = x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$Dx_3 = 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

จากโจทย์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$X' = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = AX$$

ผลเฉลยคือ

$$X_1 = -\frac{3}{2}c_1e^t + \frac{1}{3}c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$$
$$X_2 = c_1e^t + c_2e^{2t}$$
$$X_3 = -\frac{1}{2}c_1e^t + \frac{1}{3}c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$$

หรือ $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^t \\ e^t \\ -\frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^t \\ e^t \\ -\frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} \quad ,X_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^t \\ e^t \\ \frac{1}{3}e^t \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

เป็นเวกเตอร์ผลเฉลยของระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$ เพราะว่า

$$W(X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2}e^t & \frac{1}{3}e^{2t} & e^{-t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & \frac{1}{3}e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{2}e^t \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ \frac{1}{3}e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} - \frac{1}{3}e^{2t} \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & e^{-t} \end{vmatrix} + e^t \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^t & \frac{1}{3}e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{2}e^t(e^t) - \frac{1}{3}e^{2t}(1) + e^{-t}\left(\frac{1}{3}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{4t}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{6}e^{2t} = e^{2t} \neq 0$$

ดังนั้น X_1, X_2, X_3 เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

เมทริกซ์มูลฐาน *(Fundamental Matrix)*

เซต $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ใดๆของ n เวกเตอร์ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น*(linearly idependent solution vector)* ของระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$ บนช่วง I เรียกว่า **เซตผลเฉลยมูลฐาน** *(fundamental set of solution)*

ถ้า

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n1} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

เป็นเซตผลเฉลยมูลฐาน n เวกเตอร์ผลเฉลยของระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$ บนช่วง I แล้ว

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x_{1n} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน *(Fundamental Matrix)*

ตัวอย่าง 3.84 ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$ และ $X_2 = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X \quad \text{บนช่วง} \quad (-\infty, \infty)$$

ดังนั้นเมทริกซ์มูลฐานของระบบสมการนี้คือ

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$X = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท ให้ $\phi(t)$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานของระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$ บนช่วง I แล้วจะมี $\phi^{-1}(t)$ สำหรับทุกค่า t ในช่วง I

ตัวอย่าง 3.85 กำหนดให้ $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน ของระบบสมการ

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} X$$

แล้ว
$$\phi^{-1}(t) = \frac{1}{5e^{4t} + 3e^{4t}} \begin{bmatrix} 5e^{6t} & -3e^{6t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{8}e^{2t} & \frac{-3}{8}e^{2t} \\ \frac{1}{8}e^{-6t} & \frac{1}{8}e^{-6t} \end{bmatrix}$$

3.3.1.3 ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ *(Homogeneous Linear Systems)*

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ ต่อไปนี้

$$Dx_1 = 3x_1 + x_2 - 4x_3$$
$$Dx_2 = x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$Dx_3 = 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

และผลเฉลยของระบบสมการ คือ $X = c_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$

จากผลเฉลยของระบบสมการข้างต้นจะเห็นว่ารูปทั่วไปของเวกตอร์ผลเฉลย คือ

$$X_i = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} \qquad \text{เมื่อ } i = 1,2,3 \text{ และ } k_1, k_2 \text{ และ } k_3$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง $X' = AX$ (1)

คือ
$$X = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t} \qquad (2)$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ $n \times n$

ค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง*(Eigenvalues and Eigenvectors)*

ถ้าสมการที่ (2) เป็นผลเฉลยของสมการที่(1) แล้วโดยการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (2) จะได้

$$X' = K\lambda e^{\lambda t} \qquad (3)$$

เมื่อเราแทนสมการที่ (3) ลงสมการที่ (1) จะได้

$$K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t} \qquad (4)$$

ดังนั้นหารตลอดสมการที่ (4) ด้วย $e^{\lambda t} \neq 0$ จะได้

$$K\lambda = AK$$

หรือ $AK - \lambda K = 0$ แต่เนื่องจาก $K = IK$

ดังนั้น $(A - \lambda I)K = 0$ (5)

ถ้า K เป็นเวกเตอร์ศูนย์ *(zero vector)* แทนในสมการที่(2) จะได้ว่า $X = 0$ ซึ่งเป็น**ผลเฉลยที่ไม่มีคุณค่า** *(trivial solution)* ดังนั้น

$$K \neq 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \qquad (6)$$

และ λ ที่สอดคล้องกับสมการที่ (4) เรียกว่า **ค่าเจาะจง** *(eigenvalues)* ของเมทริกซ์ A และเวกเตอร์ K ที่สมนัยกับแต่ละค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A เรียกว่า **เวกเตอร์เจาะจง** *(eigen vector)* และเรียกสมการที่ (4) ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ**ของเมทริกซ์ A *(characteristic equation of the matrix A)*

ค่าไอเกนที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากัน*(Distinct Real Eigenvalues)*

ทฤษฎีบท ถ้า $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ เป็นค่าเจาะจงค่าจริงที่แตกต่างกัน n ค่าของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ในระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$ และ $K_1, K_2, ..., K_n$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงแต่ละค่า แล้วผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ $X' = AX$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$ คือ

$$X = c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_2 t} + ... + c_nK_ne^{\lambda_n t} \tag{7}$$

ตัวอย่าง 3.86 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการแบบเอกพันธ์ $X' = AX$

เมื่อ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ขั้นแรกเราจะต้องหาค่าเจาะจง จากสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

เราจะเห็นว่าค่าเจาะจงที่ได้มี 2 ค่าคือ $\lambda_1 = 4$ และ $\lambda_2 = -1$
ขั้นต่อไปจะหาเวกเตอร์เจาะจงโดยการแทนแต่ละค่าเจาะจงลงในสมการ $(A - \lambda I)K = 0$ จะได้

สำหรับ $\lambda_1 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-4 & 3 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{aligned} -3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 2k_2 &= 0 \end{aligned}$

ดังนั้น $k_1 = k_2$ เลือก $k_2 = 1$ จะได้ $k_1 = 1$

เพราะฉะนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1 = 4$ จะได้เวกเตอร์เจาะจงคือ $K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

สำหรับ $\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 3 \\ 2 & 2-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 3k_2 &= 0 \end{aligned}$

ดังนั้น $k_1 = -\frac{3}{2}k_2$ เลือก $k_2 = 2$ จะได้ $k_1 = -3$

เพราะฉะนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_2 = -1$ จะได้เวกเตอร์เจาะจงคือ $K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการที่โจทย์กำหนด คือ

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

หรือ $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} & -3e^{-t} \\ e^{4t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ

โดยที่ $\begin{bmatrix} e^{4t} & -3e^{-t} \\ e^{4t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

เราจะเห็นว่าผลเฉลยทั้งสองชุดเป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} e^{4t} & -3e^{-t} \\ e^{4t} & 2e^{-t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} + 3e^{3t} = 5e^{3t} \neq 0$$

จาก $X' = AX$ โดย $X = Ke^{\lambda t}$ แล้ว $X' = K\lambda e^{\lambda t}$

จะได้ว่า $K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$ และจากหารตลอดสมการด้วย $e^{\lambda t} \neq 0$ แล้วจะได้

$$AK = \lambda K \tag{1}$$

เรียก λ ว่าค่าเจาะจง เรียก K ว่าเวกเตอร์เจาะจง คู่อันดับ (λ, K) เรียกว่าคู่อันดับเจาะจง ถ้า K เป็นเวกเตอร์เจาะจงหนึ่งของ A แล้ว ค่าคงที่ใดๆที่คูณกับ K จะเป็นเวกเตอร์เจาะจงของค่าเจาะจง λ ด้วย เช่น คูณสมการที่ (1) ด้วยค่าคงที่ c ใดๆจะได้ว่า

$$cAK = c\lambda K \quad \text{หรือ} \quad A(cK) = \lambda(cK)$$

ดังนั้น (λ, cK) เป็นคู่อันดับเจาะจงถ้า (λ, K) เป็นคู่อันดับเจาะจง

ตัวอย่าง 3.87 กำหนดเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ ค่าเจาะจงค่าหนึ่ง คือ $\lambda=-1$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\begin{bmatrix}1-(-1) & 3\\ 2 & 2-(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

หรือ $2k_1+3k_2=0 \;\rightarrow\; k_1=-\dfrac{3}{2}k_2$

เลือก $k_2=2\rightarrow k_1=-3$ ได้ $K_1=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$

$k_2=1\Rightarrow k_1=-\dfrac{3}{2}$ ด้ $K_2=\begin{bmatrix}-3/2\\ 1\end{bmatrix}$

$k_1=1\Rightarrow k_2=\dfrac{-2}{3}$ ด้ $K_3=\begin{bmatrix}1\\ -2/3\end{bmatrix}$

K_1,K_2 และ K_3 เป็นค่าเวกเตอร์เจาะจงของค่าเจาะจง $\lambda=-1$

เมื่อพิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย *(Unit Vector)*

$$\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}=\sqrt{13}\begin{bmatrix}-3/\sqrt{13}\\ 2/\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3/2\\ 1\end{bmatrix} \qquad \frac{2}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-3/2\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3/2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{13}}{2}\begin{bmatrix}-3/\sqrt{13}\\ 2/\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\ -2/3\end{bmatrix} \qquad \frac{3}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}1\\ -2/3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1\\ -2/3\end{bmatrix}=\frac{-\sqrt{13}}{3}\begin{bmatrix}-3/\sqrt{13}\\ 2/\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

ถ้าจำกัดตัวที่นำมาคูณกับเวกเตอร์เจาะจงออกไปพบว่าทุกเวกเตอร์มีขนาด 1 หน่วย เรียกการดำเนินการนี้ว่า **นอร์มอลไลซ์** *(Normalized)*

จาก $\det(A-\lambda I)=0$ ถ้า $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ แล้ว

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}&=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc\\ &=ad-\lambda d-a\lambda+\lambda^2-bc\\ &=\lambda^2+(a+d)\lambda+(ad-bc)\end{aligned}$$

ในรูปทั่วไปของสมการลักษณะเฉพาะจะเป็นพหุนามที่อยู่ในรูปแบบ

$$p(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\ldots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

โดย $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ที่เป็นรากของสมการ $p(\lambda) = 0$ ซึ่งก็คือค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A และค่าเจาะจงนี้อาจเป็นค่าจริงต่างกันค่าจริงซ้ำกัน หรือ ค่าเชิงซ้อน

ค่าไอแกนเชิงซ้อน*(complex eigenvalue)*

ตัวอย่าง 3.88 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $DX = AX$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 24 - 4\lambda + 6\lambda + \lambda^2 + 5$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(29)}}{2} = 5 \pm 2i$$

สำหรับ $\lambda_1 = 5 + 2i$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 6-(5+2i) & -1 \\ 5 & 4-(5-2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$(1-2i)k_1 - k_2 = 0 \quad \text{เลือก} \quad k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = 1-2i$$

$$5k_1 - (1+2i)k_2 = 0$$

ดังนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1 = 5 + 2i$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง คือ

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t}$$

สำหรับ $\lambda_1 = 5 - 2i$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 6-(5-2i) & -1 \\ 5 & 4-(5-2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$(1+2i)k_1 - k_2 = 0 \quad \text{เลือก} \quad k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = 1+2i$$

$$5k_1 - (1-2i)k_2 = 0$$

ดังนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1 = 5 - 2i$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}$$

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}$$

จากตัวอย่างพบว่า

$$\lambda_1 = 5+2i \Rightarrow \ K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} i$$

$$\lambda_2 = 5-2i \Rightarrow \ K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} i$$

นั้นคือ $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ และ $K_2 = \overline{K_1}$ สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงของระบบสมการเอกพันธ์ $X' = AX$ ให้ K_1 เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงเชิงซ้อน $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ เมื่อ α และ β เป็นค่าจริงแล้ว

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{และ} \quad X_2 = \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$$

เป็นผลเฉลยของระบบสมการผลเฉลยทั่วไปคือ

$$X = c_1X_1 + c_2X_2$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่

จาก $X = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

จากสูตรของออยเลอร์

$e^{(\alpha \pm \beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$ สามารถจัดรูปแบบของ X ใหม่ดังนี้

$$X_1 = c_1e^{(5+2i)t} + c_2e^{(5-2i)t}$$
$$= e^{5t}(c_1\cos 2t + ic_1\sin 2t) + e^{5t}(c_2\cos 2t - ic_2\sin 2t)$$
$$= e^{5t}[(c_1+c_2)\cos 2t + (ic_1 - ic_2)\ \sin 2t)]$$
$$= e^{5t}(A\cos 2t + \ B\sin 2t)$$

$$X_2 = c_1(1-2i)e^{(5+2i)t} + c_2(1+2i)e^{(5-2i)t}$$
$$= e^{5t}[(c_1(1-2i) + c_2(1+2i))\cos 2t + (ic_1(1-2i) - ic_2(1+2i))\sin 2t]$$
$$= e^{5t}[((c_1+c_2) - 2(ic_1 - ic_2))\cos 2t + (2(c_1+c_2) + (ic_1 - ic_2))\sin 2t]$$
$$= e^{5t}[(A-2B)\cos 2t + \ (2A+B)\sin 2t)$$

ดังนั้น $$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix}e^{5t} + B\begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix}e^{5t}$$

$$= A\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cos 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\sin 2t\right]e^{5t} + B\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\sin 2t\right]e^{5t}$$

$$= A(\mathrm{Re}(k_1)\cos 2t - \mathrm{Im}(k_1)\sin 2t)e^{5t} + B(\mathrm{Im}(k_1)\cos 2t + \mathrm{Re}(k_1)\sin 2t)e^{5t}$$

ทฤษฎีบท ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงของระบบสมการเอกพันธ์ $X' = AX$ ให้ K_1 เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจงเชิงซ้อน $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ เมื่อ α และ β เป็นค่าจริงแล้ว แล้วผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการคือ

$$X(t) = c_1(\mathrm{Re}(K_1)\cos\beta t - \mathrm{Im}(K_1)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$
$$+ c_2(\mathrm{Im}(K_1)\cos\beta t + \mathrm{Re}(K_1)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

ตัวอย่าง 3.89 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ $X' = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}X$

วิธีทำ ก่อนอื่นเราต้องหาค่าเจาะจงจากสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A จะ ได้

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) + 8 = -4 + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 + 4 = 0$$

ดังนั้น ค่าเจาะจงที่ได้ คือ $\lambda = \pm 2i$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 2i$

$$\begin{bmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$(2-2i)k_1 + 8k_2 = 0$$

$$-k_1 + (-2-2i)k_2 = 0 \quad \text{เลือก} \quad k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = 2+2i$$

ดังนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1 = 2i$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง คือ

$$K = \begin{bmatrix} 2+2i \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ คือ

$$X = c_1\left[\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\cos 2t - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\sin 2t\right] + c_2\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\cos 2t + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\sin 2t\right]$$

$$= c_1\begin{bmatrix} 2\cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2\cos 2t + 2\sin 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.90 จงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการ

$$X' = AX \ , \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ หาค่าเจาะจงจากสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์สัมประสิทธ์ A คือ

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

ดังนั้นค่าเจาะจง คือ $\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda = 2i$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2-2-i & 1 \\ -1 & 2-2-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ}$$

$$-ik_1 + k_2 = 0$$

$$-k_1 - ik_2 = 0 \quad \text{เลือก} \quad k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = i$$

ดังนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1 = 5-2i$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง คือ

$$K = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i$$

ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ คือ

$$X = c_1\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\sin t\right]e^{2t} + c_2\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin t\right]e^{2t}$$

$$= c_1\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}e^{2t} + c_2\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}e^{2t} = \begin{bmatrix} c_1e^{2t}\cos t + c_2e^{2t}\sin t \\ -c_1e^{2t}\sin t + c_2e^{2t}\cos t \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยทั้งสองชุดเป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน เพราะว่า

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi(t)| = e^{4t} \Rightarrow |\phi(0)| \neq 0$$

และ $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ได้ $c_1 = 2, c_2 = 3$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการ คือ

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos t + 3e^{2t}\sin t \\ -2e^{2t}\sin t + 3e^{2t}\cos t \end{bmatrix}$$

ค่าไอเกนซ้ำ*(repeated eigenvalues)*

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ $X' = AX$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ หรือ

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y \qquad R_1$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y \qquad R_2$$

จาก R_2 โดยการอินทิเกรตจะได้ $y(t) = c_2 e^{-2t}$ นำ $y(t)$ แทนใน R_1 ได้

$$\frac{dx}{dt} = -2x + c_2 e^{-2t}$$

เราจะเห็นว่าผลที่ได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง ที่ผลเฉลยคือ

$$X(t) = c_2 t e^{-2t} + c_1 e^{-2t}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \\ c_2 e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \end{bmatrix} t e^{-2t} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \end{bmatrix} t e^{-2t} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^{-2t} \end{aligned}$$

โดย $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$ หรือเขียนอยู่ในรูปทั่วไป คือ $X_1(t) = K_1 e^{-2t}$

และ $X_2(t) = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] e^{-2t}$ หรือเขียนอยู่ในรูปทั่วไป คือ $X_2(t) = (tK_1 + K_2) e^{-2t}$

ผลเฉลยทั้งสองชุดของ $X_2(t)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน เพราะว่า

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi(t)| = e^{-4t} \Rightarrow |\phi(0)| \neq 0$$

เมื่อพิจารณาค่าเจาะจงได้ว่า

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)^2=0\Rightarrow \lambda=-2,-2$$

นั่นคือค่าเจาะจงมีค่าซ้ำกัน

ถ้าค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A มีค่าซ้ำกันโดยค่าเจาะจงคือ $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ได้

$$X_1(t)=K_1e^{\lambda t}$$

แล้วสามารถหา $X_2(t)$ โดยการสมมุติ

$$X_2(t)=(tK_1+K_2)e^{\lambda t}$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.91 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ $X'=AX,\quad A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

วิธีทำ ค่าเจาะจงของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A คือ

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)^2=0\Rightarrow \lambda=-2,-2$$

$\lambda=-2\Rightarrow\begin{bmatrix}-2+2 & 1\\ 0 & -2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ หรือ

$0k_1+k_2=0\Rightarrow k_2=0$

$0k_1+0k_2=0\ \Rightarrow k_1$ มีค่าใดๆ เลือก $k_1=1$

ค่าเจาะจง $\lambda = -2$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง $K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$

จะหา $X_2(t)$ โดยการสมมุติ $X_2(t) = (tK_1 + K_2)e^{-2t}$ หรือ

$$X_2(t) = \left\{ t\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right\} e^{-2t}$$

จาก $X' = AX$

$$D[(tK_1 + K_2)e^{-2t}] = A[(tK_1 + K_2)e^{-2t}]$$

$$K_1 e^{-2t} + (tK_1 + K_2)(-2e^{-2t}) = AtK_1 e^{-2t} + AK_2 e^{-2t}$$

$$(K_1 - 2K_2)e^{-2t} - 2tK_1 e^{-2t} = AK_2 e^{-2t} + AtK_1 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow K_1 - 2K_2 = AK_2$$
$$-2K_1 = AK_1$$

$$K_1 - 2K_2 = AK_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

หรือ $\alpha_1 - 2\alpha_2 = -2\alpha_2 + \beta_2$

$$\beta_1 - 2\beta_2 = -2\beta_2$$

ได้ $\alpha_1 = \beta_2$ เลือก $\alpha_1 = 1 \Rightarrow \beta_2 = 1$ และ $\alpha_2 = 0, \beta_1 = 0$

$$-2K_1 = AK_1 \Rightarrow -2\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

หรือ $-2\alpha_1 = -2\alpha_1 + \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = 0$

$$-2\beta_1 = -2\beta_1$$

ได้ $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $$X_2(t)=\left\{t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}e^{-2t}$$

ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ คือ $$X=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\left\{t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}e^{-2t}$$

จากการหา $X_2(t)$ โดยการสมมติ $X_2(t)=(tK_1+K_2)e^{-2t}$ หรือ

$$X_2(t)=\left\{t\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{bmatrix}\right\}e^{-2t}=\begin{bmatrix}t\alpha_1+\alpha_2\\t\beta_1+\beta_2\end{bmatrix}e^{-2t}$$

ซึ่งเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ คือ $X_2(t)=\begin{bmatrix}r_1(t)\\r_2(t)\end{bmatrix}e^{-2t}$ แล้วสามารถหาผลเฉลยโดยวิธีแปรผันของพารามิเตอร์ ดังนี้

ตัวอย่าง 3.92 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $X'=AX$, $A=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}$

วิธีทำ ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A คือ

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda=-2,-2$$

สำหรับ $\lambda=\lambda_1=-2$ จะได้

$$\begin{bmatrix}-2+2&1\\0&-2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$ หรือ

$0k_1+k_2=0\Rightarrow k_2=0$

$0k_1+0k_2=0\ \Rightarrow k_1$ มีค่าใดๆ เลือก $k_1=1$

ดังนั้นสำหรับค่าเจาะจง $\lambda_1=-2$ จะได้ เวกเตอร์เจาะจง

$$K_1=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1(t)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{-2t}$$

จะหา $X_2(t)$ โดยการสมมุติ $X_2(t)=\begin{bmatrix}r_1(t)\\r_2(t)\end{bmatrix}e^{-2t}$

$$X_2'(t) = \begin{bmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} (-2e^{-2t})$$

แทน X_2, X_2' ใน $X' = AX$

$$\begin{bmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{bmatrix} e^{-2t} - \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} 2e^{-2t} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} -2r_1(t) + r_2(t) \\ -2r_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_1(t) \\ 2r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1(t) = r_2(t) \qquad R_1$$

$$r_2'(t) = 0 \qquad R_2$$

จาก R_2 โดยการอินทิเกรตได้ $r_2(t) = a_1$

แทน r_2 ใน R_1 แล้วอินทิเกรตได้ $r_1(t) = a_1(t) + a_2$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} a_1 t + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$ ถ้าเลือก $a_1 = 1, a_2 = 0$ ได้

ดังนั้น $$X_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} e^{-2t}$$

ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ คือ

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} e^{-2t}$$

ตัวอย่าง 3.93 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $X' = AX$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ หาค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A จาก $|A - \lambda I| = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, -2$$

พิจารณาเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda = \lambda_1 = -2$

$$\begin{bmatrix} -2+2 & 1 \\ 0 & -2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ หรือ

$$0k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

ดังนั้นเลือก k_1, k_2 เป็นค่าใดๆก็ได้เพื่อให้เวกเตอร์ K_1, K_2 เป็นอิสระเชิงเส้น ต่อกัน

สมมติ $K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

จากผลเฉลยข้างต้นจะพบว่าเป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เพราะว่า

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi(t)| = e^{-4t} \Rightarrow |\phi(0)| \neq 0$$

ในกรณีทั่วไป ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวก และ $(a-\lambda_1)^m$ เป็นแฟกเตอร์ร่วมของสมการลักษณะเฉพาะ ในขณะที่ $(a-\lambda_1)^{m+1}$ ไม่ใช่แฟกเตอร์ร่วม แล้ว λ_1 เป็นค่าเจาะจงที่ซ้ำ m ครั้งเราจะเรียกว่า "eigenvalue of multiplicity m" สามารถพิจารณาเป็น 2 กรณีได้ดังต่อไปนี้

1. สำหรับเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ถ้าสามารถหาเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นอิสระต่อกันได้ m เวกเตอร์ นั่นคือเวกเตอร์เจาะจง $K_1, K_2, \ldots, K_m$ ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_1 ซึ่งมีจำนวนซ้ำ m ครั้งโดย $m \leq n$ แล้วในกรณีนี้มีผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ $X' = AX$ คือ ผลรวมเชิงเส้นของ

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_m K_m e^{\lambda_1 t}$$

2. ถ้ามีเพียงเวกเตอร์เจาะจงเดียวที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_1 ซึ่งมีจำนวนซ้ำ m ครั้ง แล้วผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน m ผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบ

$$X_1 = K_{11} e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2 = K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t}$$

$$X_3 = K_{31}\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + K_{32}te^{\lambda_1 t} + K_{33}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vdots$$

$$X_m = K_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + K_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + K_{mm}e^{\lambda_1 t}$$

ในกรณีที่ λ_1 เป็นค่าเจาะจงที่ซ้ำ 2 ครั้ง และมีเพียงเวกเตอร์เจาะจงเดียวที่สมนัยกับค่าเจาะจงนี้ โดย $X_1(t) = Ke^{\lambda_1 t}$ และ $X_2(t)$ จะอยู่ในรูปแบบ $X_2(t) = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$ เมื่อ

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

โดยการหาอนุพันธ์ของ X_1' และ X_2' ในระบบสมการ $X' = AX$ ได้

$$(K + P\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + (K\lambda_1)te^{\lambda_1 t} = A(Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t})$$

$$(AP - \lambda_1 P - K)e^{\lambda_1 t} + (AK - \lambda_1 K)te^{\lambda_1 t} = 0$$

$$[(A - \lambda_1 I)P - K]e^{\lambda_1 t} + [(A - \lambda_1 I)K]te^{\lambda_1 t} = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda_1 I)K = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

กรณีที่ค่าเจาะจงซ้ำกัน 3 ครั้งแล้ว $X_3(t)$ อยู่ในรูปแบบ

$$X_3(t) = K\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}$$

โดยที่เวกเตอร์ K, P และ Q หาได้จากสมการ 3 สมการตามลำดับต่อไปนี้

$$(A - \lambda_1 I)K = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K$$

$$(A - \lambda_1 I)Q = P$$

เมื่อ $K=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{bmatrix}$ และ $Q=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 3.94 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ $X'=\begin{bmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{bmatrix}X$

วิธีทำ หาค่าเจาะจงของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ ได้

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&6\\0&2-\lambda&5\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3=0$$

ดังนั้นค่าเจาะจง คือ $\lambda=2,2,2$ หรือ eigenvalue of multiplicity $m=3$

สำหรับค่าเจาะจง $\lambda=2$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง $K=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$ ซึ่งหาได้จาก สมการ

$(A-\lambda I)K=\underline{0}$

$$\begin{bmatrix}2-2&1&6\\0&2-2&5\\0&0&2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $k_2+6k_3=0$

$5k_3=0\Rightarrow k_3=0$ และ $k_2=0$

และจาก $0k_1+k_2+6k_3=0\Rightarrow k_1$ เป็นค่าใดๆ ในที่นี้เลือก $k_1=1$

ดังนั้นค่าเจาะจง $\lambda=2$ จะได้เวกเตอร์เจาะจง $K=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{2t}$

ผลเฉลยที่ 2 ที่สมนัยกับ $\lambda=2$ จะอยู่ในรูป $X_2(t)=tKe^{\lambda t}+Pe^{\lambda t}$ โดยที่ P หาได้จาก $(A-\lambda I)P=K$ ซึ่งจะได้

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 6 \\ 0 & 2-2 & 5 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $p_2 + 6p_3 = 1$

$5p_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0$ และ $p_2 = 1$

จาก $0p_1 + p_2 + 6p_3 = 1$ และ $p_2 = 1, p_3 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$

ดังนั้น $$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

และผลเฉลยที่ 3 ที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ จะอยู่ในรูป

$$X_3(t) = K\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}$$

โดยที่ Q หาได้จาก $(A - \lambda I)Q = P$ ซึ่งจะได้

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 6 \\ 0 & 2-2 & 5 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $q_2 + 6q_3 = 0$

$5q_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_3 = 1/5$ และ $q_2 = 1$

จาก $0q_1 + 1q_2 + 6q_3 = 0 \cdot q_1 - \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow X_3(t) = \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} e^{2t}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ คือ $X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t)$

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} e^{2t} + c_3 \left\{ \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \right\} e^{2t}$$

3.3.1.4 ระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$X' = AX + B$$

ขั้นแรกจะต้องหาผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ $X' = AX$ ก่อนแล้วจึงหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการโดย วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ และ วิธีแปรผันของพารามิเตอร์

วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ทฤษฎีบท ถ้า $B = Ve^{\omega t}$ เมื่อเป็นเวกเตอร์หลักที่สมาชิกเป็นค่าคงที่ และ ω ไม่ใช่ค่าเจาะจงของระบบสมการแล้วสมมติ

$$X_p = Ke^{\omega t}$$

ตัวอย่าง 3.95 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$X' = AX + B \quad \text{เมื่อ} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ขั้นแรกจะต้องการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $X' = AX$ ก่อนดังนี้

หาค่าเจาะจงของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A จาก $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

ดังนั้นจะได้ค่าเจาะจง คือ $\lambda = -3, \quad 2$

หาเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 4 \\ 1 & 1+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k_1 + 4k_2 = 0$ เลือก $k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = -4$

ดังนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_1 = -3$ คือ

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_1(t) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

หาเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -2-2 & 4 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-4k_1 + 4k_2 = 0$ เลือก $k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = 1$

ดังนั้นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_2 = 2$ คือ

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

ดังนั้น $$X_c(t) = \begin{bmatrix} -4e^{-3t} & e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

สมมุติ $X_p = Ke^{-2t} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{-2t}$ เพราะว่าค่า $\omega = -2$ ไม่ซ้ำกับค่าเจาะจง λ ของ

เมทริกซ์ A และ $X'_p = \begin{bmatrix} -2k_1 \\ -2k_2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

แทน X'_p และ X_p ใน $X' = AX + B$ ได้

$$\begin{bmatrix} -2k_1 \\ -2k_2 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

หรือ
$$\begin{aligned} -2k_1 &= -2k_1 + 4k_2 + 8 & \quad 4k_2 &= -8 & \quad &\Rightarrow k_2 = -2 \\ -2k_1 &= k_1 + k_2 + 3 & \quad k_1 &= -3 - 3k_2 & \quad &\Rightarrow k_1 = 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\quad X_p = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

ผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการไม่เอกพันธ์ คือ $\quad X(t) = X_c(t) + X_p(t)$

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

ในกรณีสมมติ X_p สำหรับ B ซึ่งมีพจน์ $\cos\omega t$ หรือ $\sin\omega t$ นิยมที่จะสมมติเป็นฟังก์ชันชี้กำลัง $X_p = Ke^{i\omega t}$

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t} = i\omega(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$= -\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.96 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$X' = AX + B \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากตัวอย่างก่อนหน้านี้

$$X_c(t) = \begin{bmatrix} -4e^{-3t} & e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

จากโจทย์ $\quad B = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 0 \end{bmatrix}$ และจาก $e^{it} = \cos t + i\sin t$ ดังนั้น $\omega = 1$ ไม่ซ้ำค่าเจาะจง คือ $\lambda = -3,\ 2$ เพราะฉะนั้น

สมมุติ $X_p(t) = Ke^{it} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{it}$

$$X_p'(t) = \begin{bmatrix} ik_1 \\ ik_2 \end{bmatrix} e^{it}$$

แทน X_p' และ X_p ใน $X' = AX + B$ ได้

$$\begin{bmatrix} ik_1 \\ ik_2 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{it} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{it}$$

$$\begin{aligned} ik_1 &= -2k_1 + 4k_2 + 2 \Rightarrow (-2-i)k_1 + 4k_2 = -2 \\ ik_2 &= k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 + (1-i)k_2 = 0 \end{aligned}$$

โดย $$k_1 = -(1-i)k_2 \quad \Rightarrow \quad [(-2-i)(-(1-i)) + 4]k_2 = -2$$

$$k_2 = \frac{-2}{7-i} = \frac{-2}{7-i} * \frac{7+i}{7+i} = \frac{-2(7+i)}{50} = \frac{-7}{25} - \frac{1}{25}i$$

$$k_1 = -(1-i)\left(\frac{-7}{25} - \frac{1}{25}i\right) = \frac{-6i}{25} + \frac{8}{25}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} (8-6i)/25 \\ (-7-1i)/25 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} (8-6i)/25 \\ (-7-1i)/25 \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{25}\cos t + i\frac{8}{25}\sin t - \frac{6}{25}i\cos t + \frac{6}{25}\cos t \\ \frac{-7}{25}\cos t - i\frac{7}{25}\sin t - \frac{1}{25}i\cos t + \frac{1}{25}\sin t \end{bmatrix}$$

แต่เนื่องจาก $\begin{bmatrix} 2\cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{it} \right\}$ ดังนั้น $X_p = \begin{bmatrix} \frac{8}{25}\cos t + \frac{6}{25}\sin t \\ \frac{-7}{25}\cos t + \frac{1}{25}\sin t \end{bmatrix}$

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} \frac{8}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{-7}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

กรณีที่ ω เป็นค่าซ้ำกับค่าเจาะจง λ แล้ววิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้น จะศึกษาถึงวิธีแปรผันพารามิเตอร์

3.3.1.5 วิธีแปรผันของพารามิเตอร์

ผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ $X' = AX$ คือ

$$X(t) = \phi(t)C$$

เมื่อ $\phi(t)$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

C เป็นเวกเตอร์หลักของค่าคงที่ *(Column Vector of Constant)*

แล้ววิธีแปรผันของตัวพารามิเตอร์ จะแทนเวกเตอร์หลัก C ด้วยเวกเตอร์หลักของฟังก์ชันใหม่ $U(t)$ โดยที่

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

แล้ว $$X_p = \phi(t)U(t) \qquad (1)$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของระบบสมการไม่เอกพันธ์

$$X' = AX + B(t) \qquad (2)$$

โดยการหาอนุพันธ์ของ (1) จะได้

$$X'_p = \phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) \qquad (3)$$

แทน (1) และ (3) ใน (2) ได้

$$\phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + B(t) \qquad (4)$$

เนื่องจาก $\phi(t)$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน ดังนั้น

$$\phi'(t) = A\phi(t) \tag{5}$$

แทน (5) ใน (4) ได้

$$\phi(t)U'(t) = B(t) \tag{6}$$

คูณทั้งสองข้างของ (6) ด้วย $\phi^{-1}(t)$ ได้

$$U'(t) = \phi^{-1}(t)B(t)$$

โดยการอินทิเกรตได้

$$U(t) = \int \phi^{-1}(t)B(t)dt$$

$$X_p = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)B(t)dt$$

ดังนั้น

$$X(t) = \phi(t)c + \phi(t)\int \phi^{-1}(t)B(t)dt$$

หรือ

$$X(t) = \phi(t)c + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)ds \tag{7}$$

ตัวอย่าง 3.97 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$X' = AX + B \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}e^t$$

วิธีทำ หาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $X' = AX$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

ดังนั้น ค่าเจาะจง คือ $\lambda = -1,\ 1$

หาเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ -3 & -2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k_1 + k_2 = 0$ เลือก $k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = -1$

เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_1 = 1$ คือ $K_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$

หาเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2+1 & 1 \\ -3 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3k_1 + k_2 = 0 \text{ เลือก } k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = -3$$

เวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_2 = -1$ คือ $K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^t$

จากผลเฉลยเวกเตอร์ของระบบสมการไม่เอกพันธ์เราจะได้ $\phi(t)$ และ $\phi^{-1}(t)$ ดังนี้

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & -3e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow X_c(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & -3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$|\phi(t)| = -3+1 = -2 \Rightarrow \phi^{-1}(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$U'(t) = \phi^{-1}(t)B(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6-4 \\ 2e^{2t} + 4e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \int_0^t \phi^{-1}(t)B(t)dt = \int_0^t \begin{bmatrix} 5 \\ -3e^{2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 5t \\ -3/2(e^{2t}-1) \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & -3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5t \\ -3/2(e^{2t}-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5te^{t} - 3/2(e^{2t}-1)e^{-t} \\ -5te^{t} + 9/2(e^{2t}-1)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 5te^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{3}{2}(e^{t} - e^{-t})$$

$$X(t) = X_c(t) + X_p(\mathrm{t})$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-t} + 5t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} - \frac{3}{2} e \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} (e^{t} - e^{-t})$$

$$= (c_1 e^{t} + 5te^{t}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + [c_2 e^{-t} - \frac{3}{2}(e^{t} - e^{-t})] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.3.2 ระบบสมการไม่เชิงเส้นและระบบสองมิติอย่างง่าย

(Nonlinear Systems and Phenomena Simple Two-Dimensional Systems)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับอันดับสอง

$$x'' + px' + qx = 0 \qquad \text{---1}$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และไม่ขึ้นกับตัวแปรต้น t โดยการแทน

$$x' = y \quad \text{และ} \quad x'' = y'$$

จะได้ระบบสมการเชิงเส้นสองมิติ

$$x' = y \qquad \text{---2}$$

$$y' = -qx - py \qquad \text{---2}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการที่ 2 สามารถทำได้โดยการหาผลเฉลยของสมการที่ 1

ตัวอย่าง 3.98 $x' = -2y$ -----1

$y' = \frac{1}{2}x$ -----2

วิธีทำ หาอนุพันธ์ สมการ 1 ได้ $x'' = -2y'$ ---3

แทน y' จากสมการ 2 ใน สมการ 3 ได้

$$x'' = -2\left(\frac{1}{2}x\right) = -x \quad \text{หรือ} \quad x'' + x = o$$

สมการช่วยคือ $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$

ให้ $A = C\cos\alpha$ และ $B = C\sin\alpha$ ได้

$$x(t) = C\cos\alpha\cos t + B\sin\alpha\sin t$$

$$= C\cos(t-\alpha)$$

$$x'(t) = -C\sin(t-\alpha)$$ แทนในสมการที่ 1 ได้

$$y(t) = -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1}{2}(-c\sin(t-\alpha))$$

$$= \frac{1}{2}c\sin(t-\alpha))$$

$$\cos(t-\alpha) = \frac{x(t)}{c} \quad ,\sin(t-\alpha) = \frac{y(t)}{c/2}$$

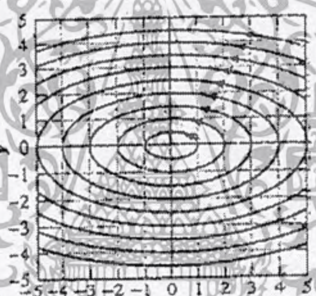
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(c/2)^2} = 1$$

ระบบสมการ $\quad x' = -2y$ และ $y' = \frac{1}{2}x$

ผลเฉลยคือ $\quad x(t) = C\cos(t-\alpha)$

$$y(t) = \frac{1}{2}C\sin(t-\alpha)$$

สำหรับแต่ละค่าของ t $(x(t), y(t))$ อยู่บนวงรี $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(c/2)^2} = 1$ บนระนาบ xy ดังรูป



กราฟดังรูปคือ solution curve หรือ trajectory ของระนาบ

$$x' = -2y,\ y' = \frac{1}{2}x \quad \text{บนระนาบ } xy$$

ถ้ามีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $(x(0), y(0))$ จะเป็นการชี้เฉพาะลงไปว่าเป็นเส้นในเพียงเส้นเดียวใน trajectory

trajectories ของระบบบนระนาบ xy เรียกว่า phase plane portrait ปัญหาในขณะนี้ คือ จุด $(x(t), y(t))$ เคลื่อนที่ไปตาม trajectories อย่างไร

ตัวอย่าง 3.99 $x' = -2y$, $y' = \frac{1}{2}x$ เมื่อ $x(0) = 2, y(0) = 0$

วิธีทำ ผลเฉลยของระบบสมการ $x' = -2y, \quad y' = \frac{1}{2}x$

คือ $x(t) = A\cos t + B\sin t$ และ $y(t) = -\frac{1}{2}(-A\sin t + B\cos t)$

จากเงื่อนไข เมื่อ $x(0) = 2, y(0) = 0$

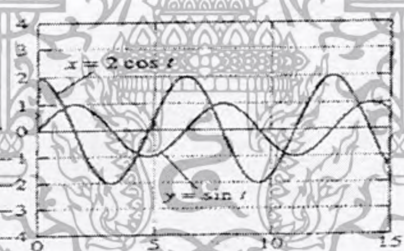
ได้ว่า

$$2 = A\cos(0) + B\sin(0) \quad \rightarrow \quad A=2$$

$$0 = -\frac{1}{2}(-A\sin(0) + B\cos(0)) \quad \rightarrow \quad B=0$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \sin t$

solution curves สำหรับ x และ y ของระบบสมการ $x' = -2y$, $y' = \frac{1}{2}x$, แสดงดังรูป $x(0) = 2, y(0) = 0$



พบว่าเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น $x(t)$ มีค่าลดลงในขณะที่ $y(t)$ มีค่าเพิ่มขึ้น

t	x =2cos t	y =sin t
0	2	0
$\pi/2$	0	1

ดังนั้น solution point $(x(t), y(t))$ บน trajectory $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ มีทิศทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 3.100 หาผลเฉลยทั่วไปของระบบ $\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ สมการที่ 1 $x'' = y'$ แทนสมการ 1 และ 2 ในสมการใหม่ที่ได้

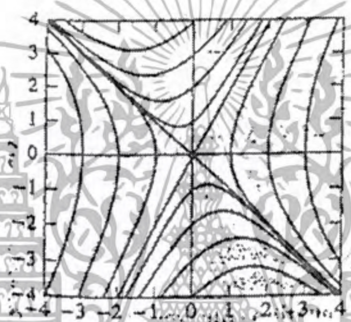
$$x'' = 2x + x' \quad \text{ได้} \quad x'' - x' - 2x = 0$$

สมการช่วยคือ $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}$

แล้ว $y(t) = x'(t) = -Ae^{-t} + 2Be^{2t}$

phase trajectories ของระบบแสดงดังรูป



ตัวอย่าง 3.101 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x' = -y \qquad ----1$$

$$y' = (1.01)x - (0.2)y \qquad ----2$$

$$x(0) = 0, y(0) = -1$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์สมการ 1 ได้ $x'' = -y''$ ----3

แทน y' จากสมการที่ 2 ลงใน 3 ได้ $x'' = (-1.01)x + (0.2)y$ ----4

แทน y จากสมการที่ 1 ลงใน 4 ได้ $x'' = (-1.01)x - (0.2)x'$

$$x'' + 0.2x' + 1.01x = 0$$

สมการช่วย $r^2 + 0.2r + 1.01 = 0$

$$r^2 + 0.2r + 0.01 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 0.2r + (0.1)^2 + 1 = (r + 0.1)^2 + 1$$

$$r = -0.1 \pm i$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $x(t) = e^{-t/10}(A\cos t + B\sin t)$ จากเงื่อนไข $x(0) = 0$

ได้ $0 = A\cos(0)$ ➔ A= 0

ดังนั้น $x(t) = Be^{-t/10}\sin t$

$$y(t) = -x'(t) \quad = -B(-\frac{1}{10}e^{-t/10}\sin t + e^{-t/10}\cos t)$$

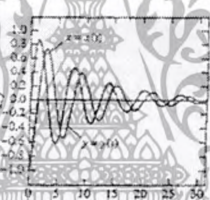
$$= \frac{1}{10}Be^{-t/10}\sin t - Be^{-t/10}\cos t$$

จากเงื่อนไข y(0) = -1 ได้

-1 = - Bcos(0) ➔ B

ดังนั้น $y(t) = \frac{1}{10}e^{-t/10}(\sin t - 10\cos t)$ และ $x(t) = e^{-t/10}\sin t$

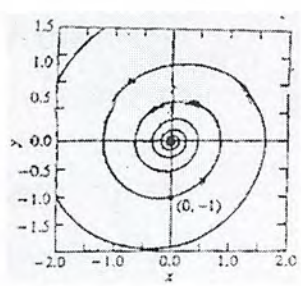
กราฟของ x(t) และ y(t) ที่เป็นผลเฉลยของระบบสมการแสดงดังรูป



เมื่อ $t \to \infty \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t/10}\sin t$ ➔ 0

$y(t) = \frac{1}{10}e^{-t/10}(\sin t - 10\cos t)$ ➔ 0

trajectory ของระบบสมการแสดงดังรูป



รูปแบบทั่วไปของ two-dimensional first –order system จะอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

ในกรณีทั่วไประบบสมการไม่จำเป็นต้องเป็นระบบเชิงเส้นอาจเป็น nonlinear system ได้เช่น

$$x' = 60x - 3x^2 - 4xy$$
$$y' = 42y - 3y^2 - 2xy$$

Stability and The Phase Plane

two –dimensional first-order system ในรูปแบบ

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

ซึ่งไม่มีตัวแปรอิสระ t ปรากฏอย่างชัดเจนเรียกว่า autonomous system

ฟังก์ชัน F และ G หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง บนบางบริเวณ R บนระนาบ XY ซึ่งเรียกบริเวณบนระนาบนี้ว่า phase plane for the system จาก existence และ uniqueness theorems กำหนด t_0 และจุดใดๆ (x_0, y_0) แล้วมีผลเฉลยเดียวของระบบสมการ $x = x(t), y = y(t)$ ที่นิยามบนบางช่วงเปิด (a,b) รอบจุด t_0 และเป็นไปตามเงื่อนไขเริ่มต้น

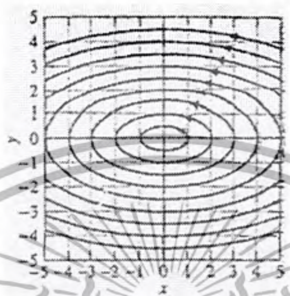
$$x(t_0) = x_0 \ , \quad y(t_0) = y_0$$

สมการ $x = x(t), y = y(t)$ เป็น parameterized solution Curve ของ phase plane
solution curve บน phase plane เรียกว่า trajectory ของระบบสมการ

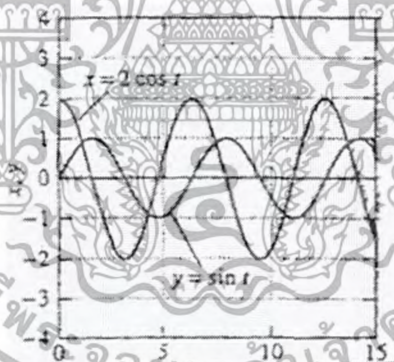
autonomou system

$$x' = -2y$$
$$y' = \frac{1}{2}x$$

solution curve หรือ trajectory ของระบบบน phase plane แสดงดังรูป



parameterized solution curve ของ phase plane แสดงดังรูป



critical point of the system คือ จุด (x_*, y_*) ซึ่ง $F(x_*, y_*) = 0 = G(x_*, y_*)$

ถ้า (x_*, y_*) เป็น จุดวิกฤต ของระบบแล้ว constant –valued functions

$$x(t) = x_* \quad , \quad y(t) = y_*$$

เป็นไปตามระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

เรียก constant-valued solution นี้ว่า equilibrium solution of the system

trajectory ของ equilibrium solution ผ่าน จุดวิกฤต (x_*, y_*)

จุดวิกฤต นี้บางครั้งเรียกว่า equilibrium point หรือ fixed point

ตัวอย่าง 3.102 จงหาจุดวิกฤตของระบบ

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 3x^2 - 4xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 3y^2 - 2xy$$

วิธีทำ

$$60x - 3x^2 - 4xy = x(60 - 3x - 4y) = 0 \qquad \text{-----1}$$

$$42y - 3y^2 - 2xy = y(42 - 3y - 2x) = 0 \qquad \text{-----2}$$

จากสมการที่ 1

$$x = 0 \quad \cup \quad 60 - 3x - 4y = 0$$

จากสมการที่ 2

$$y = 0 \quad \cup \quad 42 - 3y - 2x = 0$$

มีกรณีที่เป็นไปได้ 4 กรณีคือ

$$x = 0 \quad \cap \quad y = 0 \qquad \text{----3}$$

$$x = 0 \quad \cap \quad 42 - 3y - 2x = 0 \qquad \text{----4}$$

$$60 - 3x - 4y = 0 \quad \cap \quad y = 0 \qquad \text{----5}$$

$$60 - 3x - 4y = 0 \quad \cap \quad 42 - 3y - 2x = 0 \qquad \text{----6}$$

จาก สมการ 3 จุดวิกฤต คือ (0,0)

จาก สมการ 4 (0,14)

จาก สมการ 5 (20,0)

จาก สมการ 6 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 42 \end{bmatrix}$ ได้ x=12 , y=6

จุดวิกฤต คือ (0,0), (0,14), (20,0), (12,6)

Phase Portraits

ถ้า initial point (x_0, y_0) ไม่เป็นจุดวิกฤตแล้ว trajectory ที่ผ่าน (x_0, y_0) เป็นเส้นโค้ง บนระนาบ xy ซึ่ง $(x(t), y(t))$ เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง เมื่อ t มีค่าเพิ่มมากขึ้น

trajectory ที่ผ่าน single point นี้เป็น nondegenerat Curve คือ ไม่มี self intersection

สามารถแสดงลักษณะของวิธีของระบบ $\dfrac{dx}{dt} = F(x,y)$, $\dfrac{dy}{dt} = G(x,y)$ ได้โดยการสร้าง phase portrait ซึ่งคือภาพของ phase plane ที่มีจุดวิกฤต และ typical nondegenerate trajectory อาจสร้าง slope field โดยการลากเส้นตรงสั้น,ที่มีความชัน

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

หรือสร้าง direction field โดยการเติมหัวลูกศรแสดงทิศทางลงไปบน slope field vector field ที่ได้นี้จะแสดงทิศทางของ trajectory ของระนาบ โดยมีทิศทางตามลูกศร

ตัวอย่าง 3.103 จงแสดง phase portrait ของระบบ

$$x' = x - y$$
$$y' = 1 - x^2$$

วิธีทำ หา จุดวิกฤต ของระบบก่อน โดย

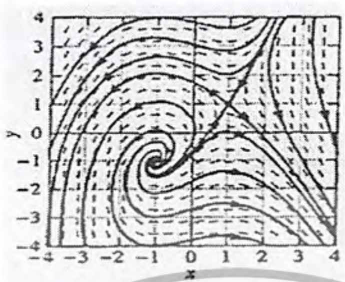
$x - y = 0 \Longrightarrow x = y$ และ $1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

ดังนั้นระบบมี จุดวิกฤต 2 จุดคือ

(1,1) และ (-1,-1)

หา slope field $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{1-x^2}{x-y}$ direction field และ จุดวิกฤต แสดงดังรูป

จาก direction field พบว่า trajectory มีการ circulate ในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ (-1,-1) ที่มีลักษณะไม่ผ่านหรือห่างออกไปจาก (1,1) phase portrait ของระบบแสดงดังรูป



3.3.2.1 คุณสมบัติของจุดวิกฤต(critical point behavior)

ตัวอย่าง พิจารณา autonomous linear system

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \qquad ; \text{k ค่าคงที่}$$

จุดกำเนิด (0,0) เป็นจุดวิกฤต เพียงจุดเดียว ผลเฉลยเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) คือ

$$x(t) = x_0 e^{-t} \quad , y(t) = y_0 e^{-kt}$$

ถ้า $x_0 \neq 0$ แล้ว

$$y = y_0 e^{-kt} \quad = \frac{y_0}{x_0^{\,k}} x_0^{\,k} e^{-kt} \quad = \frac{y_0}{x_0^{\,k}} (x_0^{\,k}\ e^{t})^{-k} \quad = bx^k$$

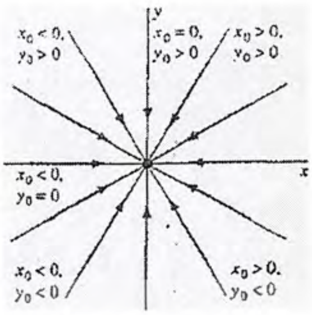
เมื่อ $b = y_0 / x_0^k$

ถ้า $k = 1$ แล้ว $y = bx$ เป็นระบบสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

แต่ละ trajectory เป็น open ray ซึ่งผ่านจุด

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$$

$t \to \infty \Rightarrow \ (x(t), y(t)) \to (0,0)$ ดังรูป



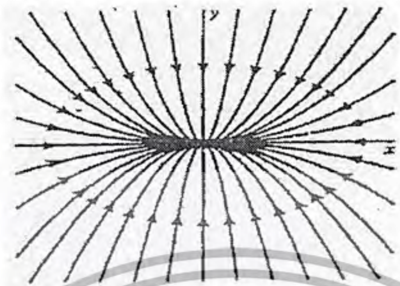
จุดวิกฤต แบบนี้เรียกว่า proper node เมื่อ t เพิ่มขึ้นทิศทางของแต่ละ trajectory ชี้ไปหาจุดกำเนิดซึ่งเป็นจุดวิกฤต

กรณีทั่วไป จุดวิกฤต (x, y_0) ของ autonomous system $\dfrac{dx}{dt} = F(x, y), \dfrac{dy}{dt} = G(x, y)$ เรียกว่า Node ถ้าทุก trajectory เข้าใกล้ (x_0, y_0) เมื่อ $t \to +\infty$ หรือ ออกจาก (x_0, y_0) เมื่อ $t \to +\infty$ หรือออกจาก (x_0, y_0) เมื่อ $t \to +\infty$ และทุกๆ trajectory สัมผัสที่ (x_0, y_0) กับบางเส้นตรงที่ผ่านจุดวิกฤต

จากรูปข้างบนนี้ จุดวิกฤต (0,0) ยังคงเป็นโนด ถึงแม้หัวลูกศรจะชี้ออกจาก จุดวิกฤต

โนดแบบที่กล่าวมาแล้วนี้เรียกว่า proper เพราะว่า ทุก trajectory สัมผัสกับจุดกำเนิด อาจเรียกโนดแบบนี้ว่า star

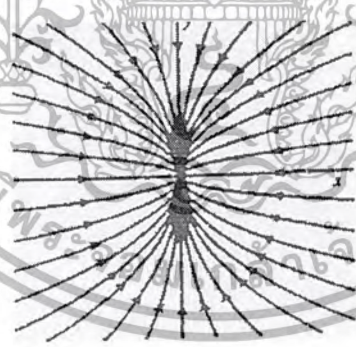
จาก $y = bx^k$ เมื่อ $b = \dfrac{y_0}{x_0^k}$ ถ้า k = 2 แล้วเป็นสมการพาราโบลาที่สัมผัสกับแกน x ที่จุดกำเนิด ดังรูป



จาก $x(t) = x_0 e^{-t}, y(t) = y_0 e^{-kt}$ ในแต่ละ trajectory จุด $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ เมื่อ $t \to +\infty$ มีคู่ของ trajectory ที่สัมผัสเส้นตรงเดียวกัน (แกน x) ที่จุดกำเนิด เรียก จุดวิกฤต แบบนี้ว่า improper node

ถ้า $k = \dfrac{1}{2}$ แล้ว $y = bx^k$ หรือ $x = cy^2$; $c = \dfrac{1}{b^2}$

เป็นสมการพาราโบลาที่สัมผัสกับแกน y ที่จุดกำเนิดดังรูป



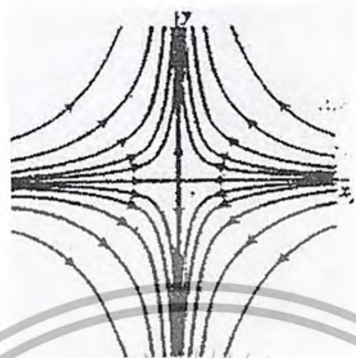
จุดวิกฤต แบบนี้เรียกว่า improper node

จาก $x(t) = x_0 e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{-kt}$

ถ้า k= -1 แล้ว $x(t) = x_0 e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{t}$

$$xy = (x_0 e^{-t})(y_0 e^{t}) = x_0 y_0 = b$$

ถ้าทั้ง ซึ่ง x_0 และ y_0 ไม่เป็น 0 ทั้งคู่แล้ว trajectory เป็น rectangular hyperbola $xy = b$ ซึ่ง $y \to \pm\infty$ เมื่อ $t \to +\infty$ ดังรูป



จุด $(x(t), y(t))$ ที่เข้าใกล้จุดกำเนิดตามแกน x ถูกผลักออกห่างจากแกน y เมื่อ $t \to +\infty$

trajectory ไม่มีขอบเขต (unbounde) เมื่อ $t \to +\infty$ เรียก จุดวิกฤต แบบนี้ว่า จุดอานม้า

Stability

จุดวิกฤต (x_*, y_*) ของ autonomous system

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

เรียกว่า Stable ถ้าจุดเริ่มต้น (x_0, y_0) เข้าใกล้ (x_*, y_*) เพียงพอ แล้ว $(x(t), y(t))$ ยังคงเข้าใกล้ (x_*, y_*) สำหรับทุก t>0

หรือ ถ้าให้ $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ แล้วระยะทางระหว่าง จุดเริ่มต้น $\overrightarrow{x_0}(t) = (x_0, y_0)$ และจุดวิกฤติ $\overrightarrow{x_*}(t) = (x_*, y_*)$ คือ

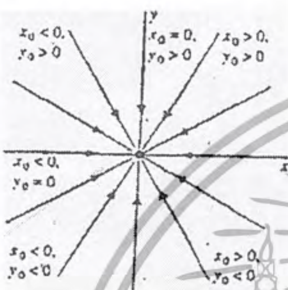
$$\left\|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_*}\right\| = \sqrt{(x_0 - x_*)^2 + (y_0 - y_*)^2}$$

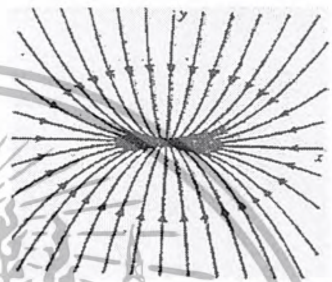
จุดวิกฤต $\overrightarrow{x_*}$ เรียกว่า stable ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $\left\|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_*}\right\| < \delta$ แล้ว $\left\|\overrightarrow{x(t)} - \overrightarrow{x_*}\right\| < \varepsilon$ สำหรับทุก t>0

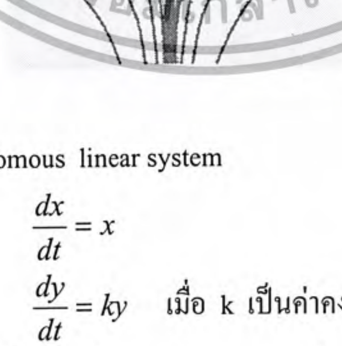
จุดวิกฤต (x_*, y_*) เรียกว่า unstable ถ้าไม่เป็น stable

รูปต่อไปนี้ จุดกำเนิด (0,0) เป็น stable critical point





รูปต่อไปนี้ จุดอานม้า ที่ (0,0) เป็น unstable critical point



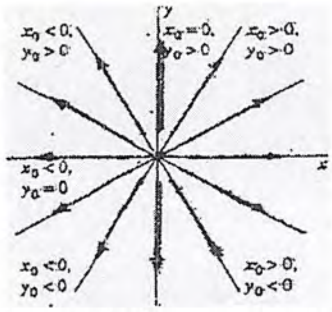
ตัวอย่าง 3.104 พิจารณา autonomous linear system

$$\frac{dx}{dt} = x$$

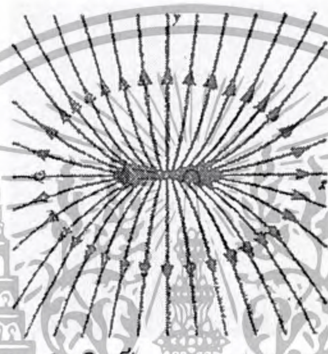
$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{เมื่อ k เป็นค่าคงที่}$$

ผลเฉลยเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (x_0, y_0) คือ

$$x(t) = x_0 e^t \,, \qquad y(t) = y_0 e^t$$



ถ้า k=1 แล้ว จุดกำเนิดเป็น unstable proper node



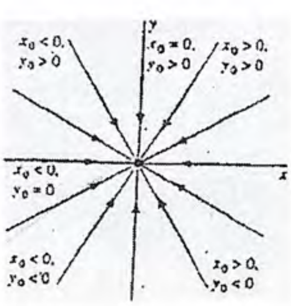
ถ้า k=2 แล้วจุดกำเนิดเป็น unstable improper node

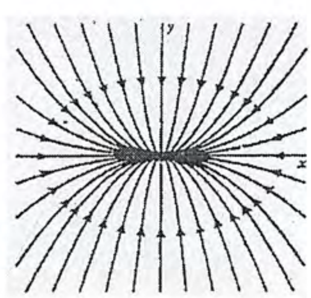
Asymptotic Stability

จุดวิกฤต (x_*, y_*) เรียกว่า asymptotic stable ถ้าเป็น stable และ ทุก trajectory ที่เริ่มที่จุดที่อยู่ใกล้ๆ (x_*, y_*) ยังคงเข้าใกล้ (x_*, y_*) เมื่อ $t \to +\infty$

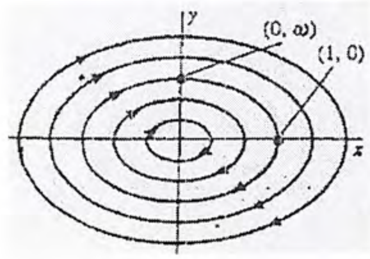
นั่นคือ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $\left\|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_*}\right\| < \delta$ แล้ว $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_*$

เมื่อ $\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{x_*}(t) = (x_*, y_*)$ และ $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ เป็นผลเฉลยหนึ่งที่มี $\overrightarrow{x(0)} = \overrightarrow{x_0}$ รูปต่อไปนี้ เป็น asymptotic stable เพราะ ทุกๆ trajectory เข้าใกล้จุดวิกฤต (0,0) เมื่อ $t \to +\infty$





จุดศูนย์กลาง (0,0) ในรูปต่อไปนี้ stable แต่ไม่ asymptotic stable



เนื่องจากว่า trajectory รูปวงรีที่พิจารณาจะเล็กเพียงใดจุดที่เคลื่อนที่รอบอยู่บนวงรีนี้ ไม่เข้าใกล้จุดกำเนิด ดังนั้น asymptotic stability เป็น stronger condition มากกว่าเสถียร

autonomous system

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = F(x, y)$$

จุดวิกฤต ของระบบมีลักษณะแตกต่างกันดังนี้

-node -proper

-improper

-saddle point

-center

-spiral point

Trajectory มีรูปแบบที่แตกต่างกันดังนี้

1. $(x(t), y(t))$ เข้าใกล้ critical point เมื่อ $t \to +\infty$

2 $(x(t), y(t))$ ไม่มีขอบเขตเมื่อ t เพิ่มขึ้น

3 $(x(t), y(t))$ เป็น periodic solution และเป็น closed trajectory

4 $(x(t), y(t))$ เป็น spiral ผ่าน closed trajectory เมื่อ $t \to +\infty$

3.3.2.2 เชิงเส้นและระบบที่คล้ายเชิงเส้น(linear and almost linear system)

autonomous system

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y) \qquad \text{----1}$$

มี (x_0, y_0) เป็น จุดวิกฤต ซึ่ง

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

จุดวิกฤต เรียกว่า isolated critical point ถ้าบาง neighborhood ของ (x_0, y_0) ไม่มี จุดวิกฤต อื่นๆ F และ G เป็น continuously differentiable ใน neighborhood ของ (x_0, y_0)
จากนิยาม autonomous system ในสมการที่ 1 ต้องไม่มีตัวแปรต้น t ปรากฏอยู่อย่างชัดเจน
ดังนั้น จุดวิกฤตหนึ่งของระบบคือ $x_0 = 0$ หรือ $y_0 = 0$ หรือ $(x_0, y_0) = (0,0)$

ตัวอย่าง 3.105 จุดวิกฤต

$x' = -2y$
$y' = \frac{1}{2}x$ (0,0)

$x' = y$
$y' = 2x + y$ (0,0)

$x' = -y$
$y' = (1.01)x - (0.2)y$ (0,0)

$x' = 60x - 3x^2 - 4xy$
$y' = 42y - 3y^2 - 2xy$ (0,0) ,(0,14) , (20,0) ,(12,6)

$x' = x - y$
$y' = 1 - x^2$ (1,1) ,(-1,1)

critical point

$x' = -ky + x(1 - x^2 - y^2)$ k ค่าคงที่

$y' = kx + y(1 - x^2 - y^2)$ (0,0)

แต่ถ้า (0,0) ไม่เป็น จุดวิกฤต จะใช้การแปลง

$$u = x - x_0 \qquad v = y - y_0$$

จากสมการที่ 1 $\frac{dx}{dt} = F(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = G(x,y)$ ---1

แล้วระบบสมการที่สมมูลกับสมการที่ 1 คือ

$$\frac{du}{dt} = F(u + x_0, v + y_0) = F_1(u,v)$$

$$\frac{dv}{dt} = G(u + x_0, v + y_0) = G_1(u,v)$$

ทำให้ได้ (0,0) เป็น isolated critical point ของระบบ

ตัวอย่าง 3.106 พิจารณา

$$\frac{dx}{dt} = 3x - x^2 - xy = x(3 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y - y^2 - 3xy = y(1 + y - 3x)$$

หาจุดวิกฤตของระบบได้ดังนี้

$x(3 - x - y) = 0$ ➔ $x = 0 \cup 3 - x - y = 0$

$y(1 + y - 3x) = 0$ ➔ $y = 0 \cup 1 + y - 3x = 0$

$x = 0 \cap y = 0$ ➔ (0,0)

$x = 0 \cap 1 + y - 3x = 0$ ➔ (0,-1)

$3 - x - y = 0 \cap y = 0$ ➔ (3,0)

$3 - x - y = 0 \cap 1 + y - 3x = 0$ ➔ (1,2)

จาก (1,2) ซึ่งเป็นจุดวิกฤตหนึ่งของระบบโดยการแทน

$$u = x - 1 \quad v = y - 2 \text{ หรือ } x = u + 1 \quad y = v + 2$$

ได้ $$3-x-y=3-(u+1)-(v+2)=-u-v$$
$$1+y-3x=1+(v+2)-3(u+1)=-3u+v$$

ได้ว่า

$$\frac{du}{dt}=(u+1)(-u-v)= -u-v-u^2-uv$$
$$\frac{dv}{dt}=(v+2)(-3u+v) = -6u+2v+v^2-3uv$$

พิจารณา จุดวิกฤต ของระบบใหม่

$(u+1)(-u-v)$ =0 ➔ u=-1 $\cup$ u= -v

$(v+2)(-3u+v)$=0 ➔ v= -2 $\cup$ $u=\frac{1}{3}v$

$u=-1\cap v=-2$ ➔ $(-1,-2)$ ≈ $(0,0)$

$u=-1\cap u=\frac{1}{3}v$ ➔ $(-1,-3)$ ≈ $(0,-1)$

$u=-v\cap v=-2$ ➔ $(2,-2)$ ≈ $(3,0)$

$u=-v\cap u=\frac{1}{3}v$ ➔ $(0,0)$ ≈ $(1,2)$

ลักษณะของ trajectory ของระบบใหม่ที่ $(0,0)$
เป็นลักษณะ trajectory ของระบบเดิมที่ $(1,2)$

รูปแบบทั่วไปของระบบที่มี $(0,0)$ เป็น จุดวิกฤต นั้น เป็นระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\frac{dx}{dt}=ax+by$$
$$\frac{dy}{dt}=cx+dy$$ ทั้งสองเป็นสมการที่ 1

เมทริกซ์ A คือ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ characteristic equation คือ

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda)-bc$$
$$=ad-\lambda d-a\lambda+\lambda^2-bc$$
$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

ได้ λ ค่า คือ λ_1 และ λ_2
แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการ 1 คือ

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 l_1 e^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 k_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 l_2 e^{\lambda_2 t}$$

จากการที่ (0,0) เป็น isolated critical point ของสมการที่ 1 แสดงว่า a,b,c,d ไม่เป็น 0 ทำให้ $ad - bc \neq 0$ ดังนั้น $\lambda \neq 0$

จาก characteristic equation

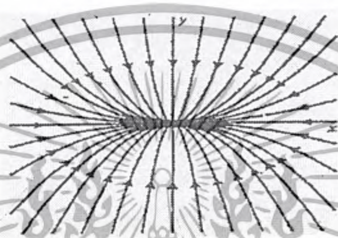
$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

จะได้ กรณีต่างๆ ของ λ_1 และ λ_2 3 กรณี คือ
1. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจริงสองค่า ต่างกัน
2. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจริงสองค่า เท่ากัน
3. λ_1 และ λ_2 เป็นคู่เชิงซ้อนสังยุค

ในกรณี ระบบสมการจะแยกพิจารณาเป็น 5 กรณีดังนี้
1. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจริงต่างกันเครื่องหมายเหมือนกัน
2. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจริงต่างกันเครื่องหมายต่างกัน
3. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจริงเท่ากัน
4. λ_1 และ λ_2 เป็นคู่เชิงซ้อนสังยุค
5. λ_1 และ λ_2 เป็นค่าจินตภาพ

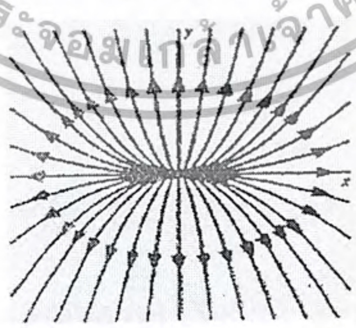
รากค่าจริงต่างกันเครื่องหมายเหมือนกัน

$$x' = -x$$
$$y' = -2y$$
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$
$$\lambda = -1,-2$$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ stable improper node

$$x' = -x$$
$$y' = 2y$$
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 1,2$$

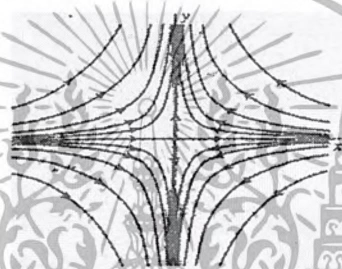


$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

unstable improper node

รากค่าจริงต่างกันเครื่องหมายต่างกัน

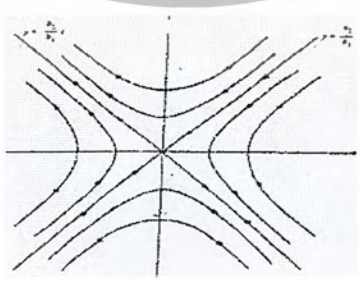
$$x' = -x$$
$$y' = y$$
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 1,-1$$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

unstable saddle point

$$x' = y$$
$$y' = x$$
$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda = 1,-1$$

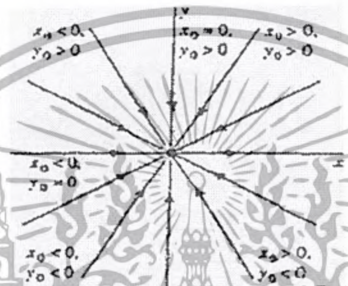


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

unstable saddle point

รากค่าจริงเท่ากัน

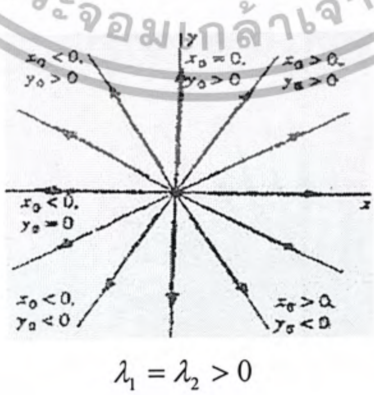
$$x' = -x$$
$$y' = -y$$
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = -1,-1$$



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

stable node

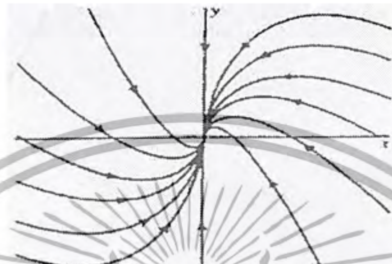
$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = 1,1$$



$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

unstable node

$$x' = -x$$
$$y' = x - y$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$
$$\lambda = -1,-1$$



ผลเฉลยทั่วไป คือ $x = Ae^{-t}$ -----1

$y = Be^{-t} + Ate^{-t}$ -----2

จากสมการ 1

$t = -\ln(x/a)$ แทน t ใน สมการ 2 ได้

$$y = Be^{-(-\ln(x/a))} + A(-\ln\frac{x}{A})e^{-(-(\ln(x/A)}$$
$$= \frac{B}{A}x - x\ln\frac{x}{A}$$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} - \ln\frac{x}{A} - x(\frac{1}{x/A})(\frac{1}{A}) = \frac{B}{A} + t - 1 = \frac{1}{A}(B - A - At)$$

$A \neq 0$ และ $\frac{dy}{dx} \to \infty$ เมื่อ $t \to \infty$

trajectory สัมผัสแกน y ที่ (0,0)

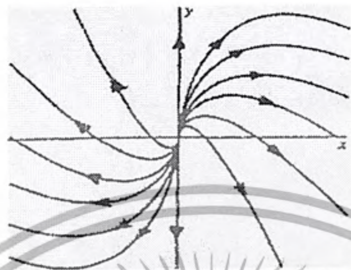
(0,0) เป็น improper node ดังรูป

$$x' = x$$
$$y' = -x + y$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1,1$$



$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Unstable Spiral Point

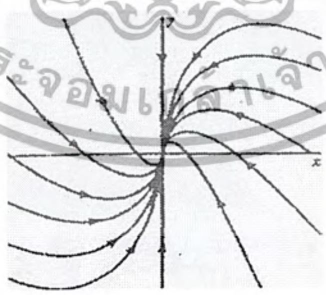
$$x' = -x$$

$$y' = x - y$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda = -1,-1$$



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Stable Spiral Point

รากเป็นเชิงซ้อนสังยุค

$$x' = y$$

$$y' = -2x - 2y$$

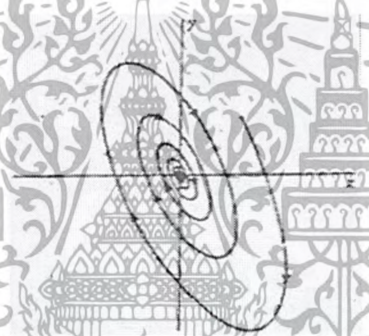
$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(-2-\lambda) + 2 = 0$$

$$2\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{(+2)^2 - 4*1*2}}{2*1}$$

$$= -2 \pm 2i$$



$\lambda = a \pm bi \quad a < 0$

stable spiral node

$$x' = 2x + y$$

$$y' = -4x - y$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0$$

$$-2 + \lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1*2}}{2*1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$\lambda = a \pm bi \; a > 0$

Unstable Spiral Node

รากเป็นค่าจินตภาพ

$$x' = y$$

$$y' = -\omega^2 x$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\omega^2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\omega i$$

Center

$$x' = y$$

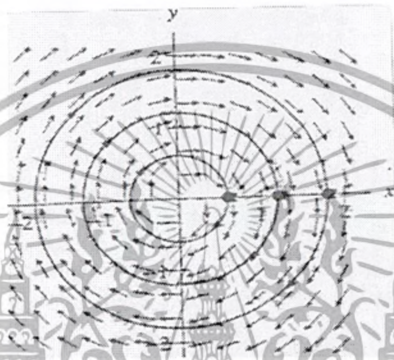
$$y' = -x$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$



Center

3.4 การแปลงลาปลาซ

(THE LAPLACE TRANSFORM)

ในบทนี้เราจะศึกษาการแปลงแบบลาปลาซ ซึ่งเป็นเทคนิคที่สำคัญในการแก้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาคำตอบของปัญหาเริ่มต้น เทคนิคนี้คือการแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ของตัวแปรจริงไปเป็นฟังก์ชั่น $F(s)$ ของตัวแปร s การใช้การแปลงแบบลาปลาซหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเป็นเทคนิคง่าย และจะให้คำตอบของปัญหาเริ่มต้นโดยตรง โดยไม่ต้องหาคำตอบทั่วไปก่อน

อิมพรอบเพออินทิกรัล (Improper Integrals)

แนวคิดของการแปลงลาปลาซอาศัยนิยามของอิมพรอบเพออินทิกรัลรูปต่อไปนี้

บทนิยาม : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,h]$ เมื่อ $h>0$ ถ้า $\lim\limits_{h\to\infty}\int_0^h f(x)dx$ หาค่าได้และเป็นค่าจำกัด จะกล่าวว่า อินพรอบเพออินทิกรัล $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า (converge) ไม่เช่นนั้นกล่าวว่า $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่ออก (diverge)

เมื่อ $\lim\limits_{h\to\infty}\int_0^h f(x)dx = L$ จะเขียน $\int_0^\infty f(x)dx$

ตัวอย่าง 3.107 จงพิจารณาว่าอิมพรอบเพออินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

(ก) $\int_0^\infty \frac{1}{x+2}dx$ (ข) $\int_0^\infty e^{-2x}dx$

วิธีทำ (ก) เนื่องจาก

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^h \frac{1}{x+2}dx = \lim_{h\to\infty}[\ln|x+2||_0^h] = \lim_{h\to\infty}[\ln|h+2|-\ln 2] = \infty$$

ดังนั้น $\int_0^\infty \frac{1}{x+2}dx$ ลู่ออก

(ข) แต่

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-2x}dx = \lim_{h\to\infty}[\ \frac{1}{2}e^{-2x}|_0^h] = \lim_{h\to\infty}[\ (e^{-2x}/2+(1/2)] = (1/2)$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty e^{-2x}dx$ ลู่เข้า

บทนิยาม : กล่าวว่า $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ (Converge Absolutely) ถ้า $\int_0^\infty |f(x)|\ dx$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นความจริงที่ได้ ซึ่งเกี่ยวข้องกับอิมพรอบเพออินทิกรัล และจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์

ทฤษฎีบท :

(ก) ถ้า $\int_0^\infty |f(x)|dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า

(ข) ถ้า $0 \le f(x) \le g(x)$ บนช่วง $[0,\infty)$ และถ้า $\int_0^\infty g(x)dx$ ลู่เข้าแล้ว $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า

(ค) ถ้า $0 \le f(x) \le g(x)$ บนช่วง $[0,\infty)$ และ $\int_0^\infty f(x)dx$ ลู่ออก แล้ว $\int_0^\infty g(x)dx$ ลู่ออก

(ง) ถ้า $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ ลู่เข้าสำหรับ $s = s_0$ แล้ว $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ ลู่เข้าสำหรับทุก $s > s_0$

3.4.1 บทนิยามและคุณสมบัติพื้นฐาน

บทนิยาม : *การแปลงแบบลาปลาซ* ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนช่วง $[0,\infty)$ คืออิมพรอบเพออินทิกรัล $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ และจะเขียนแทนโดย $L=[f(x)]$

ตัวอย่าง 3.108 $L[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} dx = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-(s-a)x} dx$

$$= \lim_{h\to\infty}[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)x} |_0^h]$$

$$= \lim_{h\to\infty}[-\frac{1}{s-a}(e^{-(s-a)h} + \frac{1}{s-a})] = \frac{1}{s-a} \quad \text{ถ้า } s > a$$

สำหรับกรณีเฉพาะเมื่อ $a = 0$ เราได้

$$L[1] = L[e^{0x}] = \frac{1}{s-0} = \frac{1}{s} \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ตัวอย่าง 3.109 $L[x] = \int_0^\infty e^{-sx}x \ dx = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-sx} dx$

ในที่นี้จะใช้วิธีการอินทิเกรตแบบแยกส่วนโดยให้

$u = x, dv = e^{-sx} dx$

ดังนั้น

$$du = dx, v = -\frac{e^{-sx}}{s}$$

และจะได้

$$\int_0^h e^{-sx} x dx \quad = \quad (xe^{-sx})/s\,|_0^h - \int_0^h \frac{e^{-sx}}{s} dx$$

$$= \quad (he^{-sh}/s) + \frac{1}{s}\int_0^h e^{-sx} dx$$

$$= \quad (he^{-sh}/s) + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s})\left[e^{-sx}\,|_0^h\right]$$

$$= \quad (he^{-sh}/s) - (e^{-sh}/s^2) + (1+s^2)$$

เพราะฉะนั้น

$L(x) = \lim_{h\to\infty}[-(he^{-sh}/s) - (e^{-sh}/s^2) + (1+s^2)] = 1/s^2$ ถ้า $s > 0$

เราจะเริ่มต้นคุณสมบัติที่สำคัญและเป็นประโยชน์ของการแปลงแบบลาปลาซ ซึ่งคือการมีคุณสมบัติเชิงเส้นดังจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท $L[af(x)+bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)]$ เมื่อ $L[f(x)]$ และ $L[g(x)]$ หาค่าได้

พิสูจน์ : จากกำหนดให้เราจะได้

(1) $L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$

(2) $L[g(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx$

ซึ่งอิมพรอบเพออินทิกรัลใน (1) ลู่เข้าเมื่อ $s > s_1$ และอิมพรอบเพออินทิกรัลใน (2) ลู่เข้าเมื่อ $s > s_2$

ให้ s' = ค่าสูงสุดใน $\{s_1, s_2\}$ พิจารณา

$$L[af(x)+bg(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}[af(x)+bg(x)]dx$$

$$= a\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx + b\int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx$$

$$= aL[f(x)] + bL[g(x)] \quad \text{เมื่อ} \quad s > s'$$

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง กล่าวคือ

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

เมื่อ u, v เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องของตัวแปรจริง แล้วเราจะได้ว่า

$$L[f(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)]$$

นั่นคือ

(3) L [ส่วนจริงของ $f(x)$] = ส่วนจริงของ $L[f(x)]$

(4) L [ส่วนจินตภาพของ $f(x)$] = ส่วนจินตภาพของ $L[f(x)]$

ตัวอย่าง 3.110 เราทราบว่า $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ ดังนั้น

$$L[e^{iax}] = \int_0^\infty e^{-sx}e^{iax}dx = \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx$$

$$= \lim_{h\to\infty}[\frac{e^{(s-ia)x}}{ia-s}\Big|_0^h] = \lim_{h\to\infty}\frac{e^{-sh}e^{iah}-1}{(s-ia)}]$$

$$= \frac{1}{(s-ia)} = \frac{1}{s-ia} \quad \text{ถ้า } s > 0$$

เมื่อใช้เอกลักษณ์ (3) และ (4) จะได้

$$L[\cos ax] = \text{ส่วนจริงของ } [\frac{1}{(s-ia)}]$$

$$L[\sin ax] = \text{ส่วนจินตภาพของ } [\frac{1}{(s-ia)}]$$

แต่

$$\frac{1}{(s-ia)} = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + \frac{ia}{s^2+a^2}$$

เพราะฉะนั้น

(5) $L[\cos ax] = \dfrac{s}{s^2+a^2}, s > 0$

(6) $L[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2+a^2}, s > 0$

ตัวอย่าง 3.111 ในการหาค่า $L[\sin^2 ax]$ จะอาศัยเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติและคุณสมบัติเชิงเส้นการแปลง

$$\begin{aligned} L[\sin^2 ax] &= L[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2ax] = L[\frac{1}{2}]-\frac{1}{2}L[\cos 2ax] \\ &= (\frac{1}{2}.\frac{1}{s})-\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+4a^2}) \quad \text{เมื่อ } s>0 \\ &= \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)} \qquad ;s>0 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท : ถ้า f,g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และ $L[f(x)]=L[g(x)]$ แล้ว $f(x)=g(x)$ ทุก x และกลับกัน ถ้า f,g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่ง $f(x)=g(x)$ แล้ว $L[f(x)]=L[g(x)]$

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่ง $L[f(x)]=F(s)$ เราจะเขียน $L^{-1}[F(s)]=f(x)$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น*การแปลงผกผันแบบลาปลาซ* (Inverse Laplace Transform) ของ $F(s)$ ดังนั้น

$$L^{-1}[\frac{1}{s-7}]=e^{7x} \quad , L^{-1}[\frac{1}{s}]=1 \quad , L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=x \quad , L^{-1}[\frac{3}{s^2+9}]=\sin 3x$$

เห็นได้โดยง่ายว่าการแปลงผกผันนี้ มีคุณสมบัติเชิงเส้นด้วย นั่นคือ ถ้า $F(s),G(s)$ เป็นการแปลงผกผันแบบลาปลาซของฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว

$$L^{-1}[aF(s)+bG(s)] = aL^{-1}[F(s)]+bL^{-1}[G(s)]$$

ตัวอย่าง 3.112 $L^{-1}[\frac{2}{s}+\frac{4}{s+7}] \; = \; 2L^{-1}[\frac{1}{s}]+4L^{-1}[\frac{1}{s+7}] \; = \; 2e^{0x}+4e^{-7x}$

$$= \; 2+4e^{-7x}$$

ตัวอย่าง 3.113 จงหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-4}$

วิธีทำ จะใช้คุณสมบัติเชิงเส้นหาการแปลงผกผันต่อไปนี้คือ

$$L^{-1}[F(s)] \; = \; L^{-1}[\frac{3s+7}{s^2-4}] \; = \; L^{-1}[\frac{3s+7}{(s-2)(s+2)}]$$

ในที่นี้จะแยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{3s+7}{(s-2)(s+2)}$ ก่อนได้ดังนี้

$$\frac{3s+7}{(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+2}=\frac{13/4}{s-2} \quad \frac{1/4}{s+2}$$

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[\frac{13/4}{s-2}]-L^{-1}[\frac{1/4}{s+2}]=\frac{13}{4}L^{-1}[\frac{1}{s-2}]-\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$
$$= \frac{13}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}$$

ตัวอย่าง 3.114 จงหา $L^{-1}[\frac{5}{3s^2+14}]$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{5}{3s^2+14} = \frac{5}{3(s^2+14/3)} = \frac{5}{3}(\frac{1}{s^2+14/3})$

$$= \frac{5}{3}(\frac{1}{s^2+(\sqrt{14/3})^2}) = \frac{5}{3}\sqrt{3/14}\frac{\sqrt{14/3}}{s^2+(\sqrt{14/3})^2}$$

ดังนั้น

$$L^{-1}[\frac{5}{3s^2+14}] = \frac{5}{\sqrt{42}}L^{-1}[\frac{\sqrt{14/3}}{s^2+(\sqrt{14/3})^2}] = \frac{5}{\sqrt{42}}\sin(\sqrt{14/3}x)$$

ตัวอย่าง 3.115 จงหา $L^{-1}[\frac{4-5s}{s^3-3s^2-10s}]$

วิธีทำ จากการแยกเศษส่วนย่อยต่อไปนี้คือ

$$\frac{4-5s}{s^3-3s^2-10s} = \frac{4-5s}{s(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-5}$$

จะเทียบสัมประสิทธิ์ได้ $A=-2/5, B=1, C=-3/5$ เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}\frac{4-5s}{s^3-3s^2-10s} = -\frac{2}{5}L^{-1}[\frac{1}{s}]+L^{-1}[\frac{1}{s+2}]-\frac{3}{5}L^{-1}[\frac{1}{s-5}]$$
$$= -\frac{2.1}{5}+e^{-2x}-\frac{3}{5}e^{5x}$$
$$= -\frac{2}{5}+e^{-2x}-\frac{3}{5}e^{5x}$$

ต่อไปนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีการแปลงแบบลาปลาซ เงื่อนไขนี้คือแนวคิดในนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กล่าวว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามบนช่วง $[0,\infty)$ มี*อันดับเอกซ์โพเนนท์* α (of exponential order α) เมื่อ $x \to \infty$ ถ้ามีค่าคงตัว $M > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)| \le Me^{\alpha x}$ เมื่อ $x > T$ สำหรับบางค่าของ T

ตัวอย่าง 3.116 (ก) ฟังก์ชันมีขอบเขตจะเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ 0 เนื่องจาก $|f(x)| \le M = Me^{0x}$

(ข) ฟังก์ชัน $e^{ax}\sin\beta x$ และ $e^{ax}\cos\beta x$ มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ a เนื่องจากทุก x จะได้ $|e^{ax}\sin\beta x| \le 1\cdot e^{ax}$, $|e^{ax}\cos\beta x| \le 1\cdot e^{ax}$

(ค) ฟังก์ชัน x^k มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α สำหรับทุกค่าบวก α เนื่องจาก

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} > \frac{\alpha^k x^k}{k!}$$

ดังนั้น $x^k < (k!/\alpha^k)e^{\alpha x}$

บทนิยาม กล่าวว่าฟังก์ชัน f *มีความต่อเนื่องเป็นช่วง* (Piecewise Continuous) บนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้าสามารถแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อย $[c,d]$ จำนวนนับถ้วน ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(ก) f มีความต่อเนื่องบน (c,d)

(ข) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ หาค่าได้ และ $\lim_{x\to d^-} f(x)$ หาค่าได้

ตัวอย่าง 3.117 ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -2, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 3 \\ 3, 3 \le x < 4 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง เพราะว่าสามารถแบ่งช่วง $[0,4]$ ออกเป็นช่วงย่อย $[0,1]$, $[1,3]$, $[3,4]$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องบน $(0,1), (1,3), (3,4)$ และ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$$

ทฤษฎีบท ถ้า f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,b]$ ทุก $b>0$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α แล้วการแปลงแบบลาปลาซของ f หาค่าได้และจะลู่เข้าทุก $s>\infty$

พิสูจน์ จากนิยามการแปลงแบบลาปลาซ เราได้

$$
\begin{aligned}
L[f(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \\
&= \int_0^T e^{-sx} f(x)dx + \int_T^\infty e^{-sx} f(x)dx \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

สังเกตว่า I_1 หาค่าได้เนื่องจาก $f(x)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,T]$ และเราจะแสดงว่า I_2 หาค่าได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le \int_T^\infty | e^{-sx} f(x) | dx \\
&\le M \int_T^\infty e^{-sx} e^{\alpha x} dx \quad = M \int_T^\infty e^{-(x-\alpha)x} dx
\end{aligned}
$$

เมื่อ $s > \alpha$ จะได้ $\int_T^\infty e^{-(x-\alpha)x}dx$ เป็นอิมพรอบเพออินทิกรัล ซึ่งลู่เข้า เพราะฉะนั้น I_2 หาค่าได้ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด

3.4.2 ทฤษฎีบทสำคัญของการแปลงแบบลาปลาซ (Important Theorems on Laplace Transforms)

ในหัวข้อนี้ จะศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญของการแปลงอบบลาปลาซ ซึ่งจะใช้ในการแก้หาคำตอบของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α และถ้า f' มีความต่อเนื่อง แล้ว $L[f'(x)]$ หาค่าได้ทุก $s > \alpha$ และ $L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$

พิสูจน์ จากนิยามเราทราบว่า

$$
L[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx \quad = \lim_{h\to\infty} \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx
$$

เมื่อใช้การอินทิเกรตแบบแยกส่วน โดยให้

$$
u = e^{-sx} \quad , \quad dv = f'(x)dx
$$

$$dv = -se^{-sx} \quad , \qquad v = f(x)dx$$

เราจะได้ $\int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx \quad = e^{-sx} f(x)|_0^h + s\int_0^h e^{-sx} f(x)dx$

ซึ่งทำให้

$$\lim_{h\to\infty} \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx \quad = \lim_{h\to\infty}[e^{-sx} f(h)] - f(0) + s\lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-sx} f(x)dx$$

$$= \lim_{h\to\infty}[e^{-sx} f(h)] - f(0) + sL[f(x)]$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทจะสิ้นสุดถ้าเราแสดงได้ว่า $\lim_{h\to\infty}[e^{-sx} f(h)] = 0$ เมื่อ $s > \infty$

เนื่องจาก $\left|f(h)\right| \le Me^{\alpha h}$ ดังนั้น

$$\left|e^{-sh} f(h)\right| \le Me^{-(s-\alpha)h}$$

และ

$$0 \le \left|e^{-sh} f(h)\right| \le Me^{-(s-\alpha)h}$$

เราทราบว่า $\lim_{h\to\infty} e^{-(s-\alpha)h} = 0$ เมื่อ $s > \infty$

$\lim_{h\to\infty}[e^{-sx} f(h)] = 0$ เมื่อ $s > \infty$

ตัวอย่าง 3.118 เราใช้ทฤษฎีบท หา $L[f'(x)]$ ได้ เมื่อทราบว่า

$L[f(x)] = \dfrac{1}{(s+a)^2}$, $s > a$ และ $f(0) = 0$

$$L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$$

$$= \frac{s}{(s+a)^2} \quad , s > a$$

ทฤษฎีบท ถ้า $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α แล้วทุก $s > \infty$ จะได้

$$L[f'(x)] = sL[f(x)] - f(0)$$

$$L[f''(x)] = s^2 L[f(x)] - sf(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(x)] = s^3 L[f(x)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

.

.

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n L[f(x)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

ทฤษฎีบท (Translation Property)

ถ้า $F(s)$ ซึ่งเป็นการแปลงแบบลาปลาซของ $f(x)$ หาค่าได้ทุก $s > \infty$ แล้วสำหรับทุกค่าคงตัว a จะได้ว่า

$$L[e^{-ax} f(x)] = F(s+a) \qquad \text{เมื่อ } s > \infty - a$$

พิสูจน์ จากนิยามของการแปลงแบบลาปลาซเราได้

(1) $\quad F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \qquad$ ทุก $s > \infty$

เมื่อแทน s ด้วย $s+a$ ในสมการ (1) จะได้

$$F(s+a) = \int_0^\infty e^{-(s+a)x} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} [e^{-ax} f(x)]dx$$

$$= L[e^{-ax} f(x)] \qquad \text{เมื่อ } s > \alpha - a$$

ตัวอย่าง 3.119 จงหาการแปลงแบบลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $e^{3x}\cos 2x$ $\qquad$ (ข) xe^{-x}

วิธีทำ

(ก) เมื่อใช้ทฤษฎีบทกับ $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4}, s>0$ และ $a=-3$ จะได้

$$L[e^{3x}\cos 2x] = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} \qquad \text{เมื่อ } s>3$$

(ข) ทำนองเดียวกันเมื่อใช้ทฤษฎีบทกับ $F(s) = \dfrac{1}{s^2}, s>0$ และ $a=-1$ จะได้

$$L[xe^{-x}] = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad \text{เมื่อ } s>-1$$

ทฤษฎีบท ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ แล้วสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้

$$L[x^{-n} f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

เมื่อ $\quad L[f(x)] = F(s)$

นั่นคือ การแปลงแบบลาปลาซของฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์จะมีอนุพันธ์ทุกอันดับ

พิสูจน์ ในที่นี้จะพิสูจน์ทฤษฎีเมื่อ $n=1$ จากนิยามการแปลงแบบลาปลาซ เราได้

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

เมื่อดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ เทียบกับ s จะได้

$$
\begin{aligned}
F'(s) &= \int_0^\infty (-xe^{-sx}) f(x)dx \\
&= -\int_0^\infty e^{-sx}[xf(x)]dx \\
&= -L[xf(x)] \quad \text{ตามต้องการ}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.120 เนื่องจาก $L[e^{ax}] = \dfrac{1}{s-a}$ เมื่อ $s > a$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท จะได้

$$L[xe^{ax}] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad , s > a$$

และโดยทฤษฎีบทเราได้

$$L[x^2 e^{ax}] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{2}{(s-a)^3} \quad , s > a$$

หรือโดยทั่วไป

(3) $$L[x^n e^{ax}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , s > a$$

กรณีเฉพาะของสูตร (3) เมื่อ a = 0 คือ

(4) $$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , s > a$$

สำหรับสูตร (4) เมื่อ n ไม่เป็นจำนวนเต็มเราได้สูตร

(5) $$L[x^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad , s > a$$

3.4.3 การแก้สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในหัวข้อนี้เราจะใช้การแปลงแบบลาปลาซในการแก้สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น เราจะเริ่มโดยการพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$ay'' + by' + cy = f(x)$

เมื่อ $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$

โดยการหาการแปลงแบบลาปลาซของสองฟังก์ชันซ้ายมือและขวามือในสมการ $ay'' + by' + cy = f(x)$ เราได้

$$L[ay'' + by' + cy] = L[f(x)]$$

เมื่อใช้คุณสมบัติเชิงเส้นของการแปลงแบบลาปลาซ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$aL[y''] + bL[y'] + cL[y] = L[f(x)]$

$a\{s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)\} + b\{sL[y] - y(0)\} + CL[y] = L[f(x)]$

ถ้า $L[f(x)]$ หาค่าได้ ให้ $L[f(x)] = F(s)$ แล้วเราเขียนสมการสุดท้ายนี้ได้ใหม่เป็น

$(as^2 + bs + c)L[y] - (as+b)y_0 - av_0 = F(s)$

หรือ

$$L[y] = \frac{F(s) + (as+b)y_0 + av_0}{as^2 + bs + c}$$

สมการ $L[y] = \dfrac{F(s) + (as+b)y_0 + av_0}{as^2 + bs + c}$ จะให้ค่าของ y เมื่อเราหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของปริมาณทางขวามือของสมการ $L[y] = \dfrac{F(s) + (as+b)y_0 + av_0}{as^2 + bs + c}$ ได้

ตัวอย่าง 3.121 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$y' - y = 1 - x; y(0) = 3$

วิธีทำ เมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซทั้ง 2 ข้างของสมการ $y' - y = 1 - x; y(0) = 3$ จะได้ผลลัพท์ดังนี้

$$L[y' - y] = L[1 - x]$$

$$L[y'] - L[y] = L[1] - L[x]$$

$$sL[y] - y(0) - L[y] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

$$(s-1)L[y] = \frac{s - 1 + 3s^2}{s^2}$$

$$L[y] = \frac{3s^2 + s - 1}{s^2(s-1)}$$

แยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันทางขวามือสมการสุดท้ายได้

$$\frac{3s^2 + s - 1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s-1}$$

ดังนั้น

$$y = L^{-1}[\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s-1}] = L^{-1}[\frac{1}{s^2}] + 3L^{-1}[\frac{3}{s-1}]$$

$$= x + 3e^x$$ เป็นคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้นที่กำหนดมา

ตัวอย่าง 3.122 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$y''+y=2e^x, y(0)=2, y'(0)=2$$

วิธีทำ จากสมการ $y''+y=2e^x, y(0)=2, y'(0)=2$ เมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซจะได้ผลลัพท์ดังนี้

$$L[y''+y] = L[2e^x]$$
$$L[y'']+L[y] = 2L[e^x]$$
$$s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+L[y] = \frac{2}{s-1}$$
$$s^2L[y]-2s-2+L[y] = \frac{2}{s-1}$$
$$L[y] = \frac{[2/(s-1)]+2s+2}{s^2+1}$$

เมื่อแยกเศษส่วนย่อยทางขวามือ จะได้

$$L[y] = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}$$

และทำให้

$$y = L^{-1}[\frac{1}{s-1}]+L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]+L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}]$$
$$= e^x+\sin x+\cos x$$ เป็นคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง 3.123 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$y'''+3y''-y'-3y=0, y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=-1$$

วิธีทำ เมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซของสมการจะได้ผลลัพท์ดังนี้

$$L[y''']+3L[y'']-L[y']-3L[y]=0$$
$$s^3L[y]-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)+3s^2L[y]-3sy(0)-3y'(0)-sL[y]+y(0)-3L[y]=0$$
$$(s^3+3s^2-s-3)L[y] = (s^2\cdot 1+s\cdot 1-1)+(3s\cdot 1+3\cdot 1)=1$$
$$L[y] = \frac{s^2+4s+1}{s^3+3s^2-s-3} = \frac{s^2+4s+1}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$
$$= \frac{3/4}{s-1}+\frac{1/2}{s+1}-\frac{1/4}{s+3}$$

ดังนั้น

$$y = \frac{3}{4}L^{-1}[\frac{1}{s-1}]+\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s+1}]-\frac{1}{4}L^{-1}[\frac{1}{s+3}]$$
$$= \frac{3}{4}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-3x}$$

3.4.4 คอนโวลูชั่น (Convolution)

เราทราบว่าการแปลงแบบลาปลาซและการแปลงผกผันแบบลาปลาซมีคุณสมบัติเชิงเส้น นั่นคือ

$$L^{-1}[aF(s)+bG(s)] \;=\; aL^{-1}[F(s)]+bL^{-1}[G(s)]$$

แต่สำหรับการแปลงแบบผกผันของลาปลาซของผลคูณ เรายังไม่ทราบสูตรที่ใช้ในการหา ถ้า $L[f(x)] = F(s)$, $L[g(x)] = G(s)$ แล้วเป็นจริงเสมอไม่หรือไม่ที่จะได้

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] \;=\; L^{-1}[F(s)]\cdot L^{-1}[G(s)] = f(x)\cdot g(x)$$

เราจะพิสูจน์ในหัวข้อนี้ว่า $L^{-1}[F(s)\cdot G(s)]$ ไม่ได้มีค่าเท่ากับ $f(x)\cdot g(x)$ แต่จะมีค่าเท่ากับ**คอนโวลูชัน**ของ $f(x)$ และ $g(x)$

บทนิยาม ให้ f,g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[0,\infty)$ *คอนโวลูชัน* ของ $f(x)$ และ $g(x)$ ซึ่งเขียนแทนโดย $f(x)*g(x)$ นิยามดังนี้

$$f(x)*g(x) \;=\; \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

ตัวอย่าง 3.124 จงหา $\cos x * \sin x$

วิธีทำ จากนิยามของคอนโวลูชันจะได้

$$\begin{aligned}
\cos x * \sin x &= \int_0^x \cos(x-t)\sin t\,dt \\
&= \int_0^x [\cos x\cos t + \sin x\sin t]\sin t\,dt \\
&= \int_0^x \cos x\cos t\sin t\,dt + \int_0^x \sin x\sin^2 t\,dt \\
&= \frac{\cos x}{4}\int_0^x \sin 2t\,d(2t) + \sin x\int_0^x \sin^2 t\,dt \\
&= \frac{\cos x}{4}\int_0^x \sin 2t\,d(2t) + \sin x\int_0^x \sin^2 t\,dt \\
&= \frac{\cos x}{4}(-\cos 2t\,|_0^x) + \sin x\int_0^x \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\cos x\cos 2x}{4}+\frac{\cos x}{4}+\frac{t}{2}\sin x\,|_0^x -\frac{1}{4}\sin x\sin 2t\,|_0^x$$
$$= -\frac{1}{4}\cos x(1-2\sin^2 x)+\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{4}\sin x\sin 2x$$
$$= \frac{1}{2}\cos x\sin^2 x+\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x\cos x$$
$$= \frac{1}{2}x\sin x$$

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์แล้วได้ $f(x)*g(x)$ หาค่าได้ นอกจากนี้เราแสดงได้ว่าคอนโวลูชันมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $f(x)*g(x) = g(x)*f(x)$

(2) $[f(x)*g(x)]*h(x) = f(x)*[g(x)*h(x)]$

(3) $f(x)*[g(x)+h(x)] = [f(x)*g(x)]+[f(x)*h(x)]$

(4) $[cf(x)]*g(x) = f(x)*c[g(x)] = c[f(x)*g(x)]$

ทฤษฎีบท (Convolution Theorem)

กำหนดให้ f,g เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α และต่างก็มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,a]$ สำหรับทุก $a>0$ ถ้า $L[f(s)]=F(s)$ และ $L[g(x)]=G(s)$ แล้ว

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = f(x)*g(x)$$

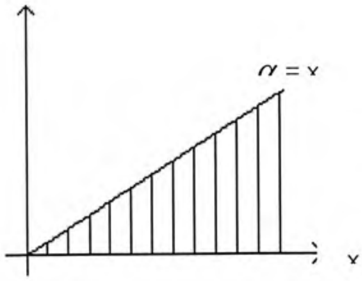
พิสูจน์ จากนิยามของการแปลงแบบลาปลาซ เราได้

$$F(s)\cdot G(s) = (\int_0^\infty e^{-s\alpha}f(\alpha)d\alpha)(\int_0^\infty e^{-s\lambda}g(\lambda)d\lambda)$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\alpha+\lambda)}f(\alpha)g(\lambda)d\alpha d\lambda$$
$$= \int_0^\infty f(\alpha)d\alpha\int_0^\infty e^{-s(\alpha+\lambda)}g(\lambda)d\lambda$$

เมื่อให้ α มีค่าคงที่ และเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสุดท้ายโดยให้ $x=\alpha+\lambda$ จะได้ $dx=d\lambda$ และ

$$F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty f(\alpha)d\alpha\int_\alpha^\infty e^{-sx}g(x-\alpha)dx$$

การอินทิเกรตบนระนาบ αx การทำเหนือบริเวณที่แรเงาในรูปข้างล่างนี้



ในที่นี้เราจะใช้ผลที่ว่าเนื่องจาก f, g มีความต่อเนื่องที่ทุก $x \geq 0$ และมีอันดับเอกซ์โพเนนท์ α ดังนั้นลำดับของการอินทิเกรตสลับกันได้ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(s)\cdot G(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}dx \int_\alpha^x f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}\{\int_\alpha^x f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha\}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}(f(x)*g(x))dx \\ &= L[f(x)*g(x)] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] = f(x)*g(x)$$

ตัวอย่าง 3.125 จงหา $L^{-1}[\frac{s}{(s^2-a^2)(s-b)}]$ เมื่อ $a \neq b$

วิธีทำ เราทราบว่า $L[e^{bx}] = \frac{1}{s-b}$ และสามารถตรวจสอบได้ว่า $L[\cosh ax] = \frac{s}{s^2-a^2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท เมื่อให้ $F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}$ และ $G(s) = \frac{1}{s-b}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)\cdot G(s)] &= \cosh ax * e^{bx} \\ &= \int_0^x e^{b(x-t)}\cosh at\,dt \\ &= e^{bx}\int_0^x [\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}]e^{-bt}dt \\ &= \frac{e^{bx}}{2}\int_0^x [e^{(a-b)t}+e^{-(a+b)t}]dt \\ &= \frac{e^{bx}}{2}[\frac{e^{(a-b)x}}{a-b} - \frac{e^{-(a+b)x}}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{e^{ax}}{a-b} - \frac{e^{-ax}}{a+b} - \frac{2be^{bx}}{a^2-b^2}]$$

ข้อสังเกต : เราอาจใช้ผลของทฤษฎีบท ในรูปต่อไปนี้คือ

$$L[\int_0^x f(x-t)g(t)dt] = L[f(x)] \cdot L[g(x)]$$

ซึ่งเราจะพบได้บ่อยในการหาคำตอบของสมการอินทิกรัล

ตัวอย่าง 3.126 จงหา $L[\int_0^x e^t \sin(x-t)dt]$

วิธีทำ เมื่อให้ $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = e^x$ และใช้ข้อสังเกต จะได้

$$L[\int_0^x e^t \sin(x-t)dt] = L[\sin x] \cdot L[e^x]$$

$$= \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

นอกจากนี้ผลของทฤษฎี ทำให้เราสามารถหาการแปลงแบบลาปลาซของอินทิกรัลของฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งทราบการเปลี่ยนแปลงแบบลาปลาซ ดังจะพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $L[f(x)] = F(s)$ และ $L[\int_0^x f(t)dt] = \frac{1}{s}F(s)$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = 1$ ดังนั้น $L[g(x)] = \frac{1}{s}$ เมื่อใช้ข้อสังเกต จะได้ว่า

$$L[\int_0^x f(x-t)g(t)dt] = F(s) \cdot \frac{1}{s}$$

แต่

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด

สูตร $L[\int_0^x f(t)dt] = \frac{1}{s}F(s)$ จะมีประโยชน์ในการแก้สมการที่มีชื่อว่าสมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียล ดังจะนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม *สมการอินทิกรัล*(Integal Equation) คือสมการที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่าและอินทิกรัลของฟังก์ชันนั้น

สมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียล (Integro-Differential Equation) คือสมการที่มีฟังก์ชันไม่ทราบค่า อนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชันนั้น

เราใช้การแปลงแบบลาปลาซในการแก้สมการอินทิกรัลหรือสมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งทำให้หาค่าคำตอบได้โดยง่าย

ตัวอย่าง 3.127 จงหาคำตอบของสมการอินทิกรัลต่อไปนี้

$$y(x) = \cos x + \int_0^x e^{-(x-t)} y(t)dt$$

วิธีทำ ในที่นี้ y(x) เป็นฟังก์ชันที่ต้องการค่า ดังนั้นเมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซของทั้ง 2 ข้างของสมการ $y(x) = \cos x + \int_0^x e^{-(x-t)} y(t)dt$ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= L[\cos x] + L[\int_0^x e^{-(x-t)} y(t)dt] \\ &= L[\cos x] + L[e^{-x}] \cdot L[y(x)] \\ &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} \cdot L[y(x)] \end{aligned}$$

หรือ

$$L[y(x)] = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} y(x) &= L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}] + L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] \\ &= \cos x + \sin x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.128 จงหาคำตอบของสมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้ซึ่งมีชื่อเรียกว่าสมการออสซิเลเตอร์

$$ldI + rI + \frac{1}{c}Q = f(t)$$

เมื่อ r = resistance, l = inductance, c = capacitance เป็นค่าคงตัว, I เป็นกระแสไฟฟ้า, Q เป็นประจุไฟฟ้า

วิธีทำ ในที่นี้ฟังก์ชันที่ต้องการหาคือกระแสไฟฟ้า I และเราทราบว่า

$$Q(t) - Q(0) = \int_0^t I(x)dx$$

ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ $ldI + rI + \frac{1}{c}Q = f(t)$ เราได้สมการอินทิโกร-ดิฟเฟอเรนเชียลคือ

$$lI' + rI + \frac{1}{c}[Q(0) + \int_0^t I(x)dx] = f(t)$$

เมื่อการหาการแปลงแบบลาปลาซของทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้ผลว่า $Q(0) = 0$ จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$L[lI'] + L[rI] + L[\frac{Q_0}{c}] + L[\frac{1}{c}\int_0^t I(x)dx] = L[f(t)]$$

$$l\{sL[I] - I(0)\} + rL[I] + 0 + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{s}L[I] = L[f(t)]$$

หรือ

$$L[I(t)] = \frac{1}{ls + r + 1/cs}\{L[f(t)] + lI(0)\}$$

ซึ่งทำให้

$$I(t) = L^{-1}[\frac{1}{ls + r + 1/cs}] * L^{-1}[L[f(t)] + lI(0)]$$

และจะหาค่าของฟังก์ชัน $I(t)$ ได้เมื่อกำหนดค่า $l, r, c, I(0)$ และฟังก์ชัน $f(t)$

จะพิจารณากรณีที่ให้ $r = 4$ โอห์ม, $c = \frac{1}{3}$ ฟารัด, $l = 1$ เฮนรี่ และ $f(t) = e^t$ เมื่อ $I(0) = 0$ เราได้

$$I(t) = L^{-1}[\frac{1}{ls + 4 + 3/s}] * L^{-1}[L[f(t)]]$$

$$= L^{-1}[\frac{s}{s^2 + 4s + 3}] * f(t)$$

$$= L^{-1}[\frac{s}{(s+3)(s+1)}] * e^t$$

$$= L^{-1}[\frac{1}{2}(\frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+1})] * e^t$$

$$= \frac{1}{2}(3e^{-3t} - e^{-t}) * e^{t}$$
$$= \frac{3}{2}e^{-3t} * e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} * e^{t}$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^t e^{-3(t-x)}e^{x}dx - \frac{1}{2}\int_o^t e^{-(t-x)}e^{x}dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^t e^{-3t}e^{4x}dx - \frac{1}{2}\int_o^t e^{-t}e^{2x}dx$$
$$= \frac{3}{8}e^{-3t}(e^{4t}-1) - \frac{1}{4}e^{-t}(e^{2t}-1)$$
$$= -\frac{3}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t}$$

3.4.5 ฟังก์ชันที่ไม่มีความต่อเนื่องและการแปลงแบบลาปลาซ (Discontinuous Function and the Laplace Transform)

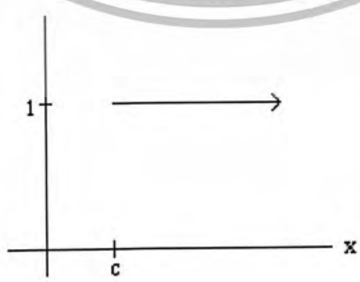
ในหัวข้อนี้จะศึกษาการหาการแปลงแบบลาปลาซของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะหาการแปลงแบบลาปลาซของชิฟฟังก์ชันสำหรับฟังก์ชันใด ๆ และเราได้ผลที่น่าสนใจว่าฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงจะเขียนได้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชัน

บทนิยาม *ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย* (Unitstep Function) คือฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าดังนี้

$$u_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < c \\ 1 & \text{ถ้า } x \geq c \end{cases}$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ

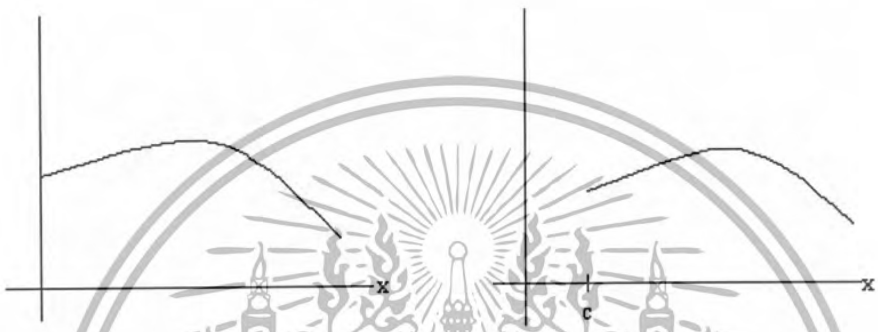
กราฟของ $u_c(x)$ เป็นดังรูป 7.6.1 เมื่อ $c > 0$



บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง $[0,\infty)$ และ $c > 0$ นิยาม*ชิฟฟังก์ชัน* (Shifted Function) สำหรับ f เขียนแทนโดย $u_c(x)f(x-c)$ ซึ่งกำหนดค่าดังนี้

$$u_c(x)f(x-c) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < c \\ 1 & \text{ถ้า } x \geq c \end{cases}$$

ความหมายของ $u_c(x)f(x-c)$ ในเชิงเรขาคณิตคือ กราฟของฟังก์ชัน f จะถูกเลื่อนตามแกน x ไป c หน่วย ดังแสดงด้วยรูป 7.6.2



(ก) (ข)

เราสามารถหาการแปลงแบบลาปลาซของฟังก์ชัน $u_c(x)f(x-c)$ ได้ในเทอมของ $L[f(x)]$ ดังจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $L[f(x)] = F(s)$ เมื่อ $s > \alpha$ แล้วสำหรับ $c \geq 0$ จะได้

$$L[u_c(x)f(x-c)] = e^{-cs}F(s) \quad \text{เมื่อ } s > \alpha$$

พิสูจน์ โดยนิยามเราหาการแปลงแบบลาปลาซของ $u_c(x)f(x-c)$ ได้ดังนี้

$$L[u_c(x)f(x-c)] = \int_0^\infty e^{-sx}u_c(x)f(x-c)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}f(x-c)dx$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้ r = x − c ในอินทิกรัลหลังจะได้ผลลัพธ์

$$L[u_c(x)f(x-c)] = \int_0^\infty e^{-s(r+c)}f(r)dr$$

$$= e^{-cs}\int_0^{\infty} e^{-sr} f(r)dr$$

$$= e^{-cs}F(s)$$

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด

บทแทรก : $L[u_c(x)] = \dfrac{e^{-cs}}{s}$ เมื่อ $s > 0$

ตัวอย่าง 3.122 จงเขียนฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงต่อไปนี้ให้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชัน

(ก) $f_1(x) = \begin{cases} 2, & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ถ้า } 1 \le x \end{cases}$

(ข) $f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } 0 \le x < \pi \\ \frac{1}{2}\sin 2x, & \text{ถ้า } \pi \le x \end{cases}$

(ค) $f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ถ้า } 1 \le x \end{cases}$

วิธีทำ (ก) บนช่วง $[0,1)$ เราได้ค่า $f_1(x) = 2u_0(x)$ แต่บนช่วง $[1,\infty)$ เราต้องลบด้วย $1u_1(x)$ เพื่อให้ได้ค่า 1 ดังนั้น

$$f_1(x) = 2u_0(x) - u_1(x)$$

(ข) ทำนองเดียวกันบนช่วง $[0,\pi)$ ได้ค่า $f_2(x) = 0$ แต่บนช่วง $[\pi,+\infty)$ ได้ค่า $f_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ดังนั้นต้องบวกด้วย $\frac{1}{2}\sin 2xu_\pi(x)$ เพราะฉะนั้น

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2xu_\pi(x)$$

(ค) ทำนองเดียวกันจะได้

$$f_3(x) = xu_0(x) + (1-x)u_1(x)$$

ตัวอย่าง 3.129 จงหา $L[f(x)]$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ดังต่อไปนี้

(ก) $f(x) = u_1(x)e^{-2(x-1)}$

(ข) $f(x) = u_3(x)f(x-3)$ เมื่อ $f(x) = \cos 2x + 3x^{3/2}$

วิธีทำ (ก) เนื่องจาก $L[e^{-2x}] = \dfrac{1}{s+2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท เมื่อให้

$$F(s) = \frac{1}{s+2} \text{ และ } c = 1 \text{ จะได้}$$

$$L[f(x)] \quad = \quad e^{-s}F(s) \quad = \quad e^{-s}(s+2)^{-1}$$

(ข) จาก $L[3x^{3/2}]=\dfrac{3\Gamma(5/2)}{s^{5/2}}$ ดังนั้น

$$L[\cos 2x+3x^{3/2}] \quad = \quad \frac{s}{s^2+4}+\frac{3\Gamma(5/2)}{s^{5/2}}$$

จะได้ $\quad L[f(x)] \quad = \quad L[u_3(x)f(x-3)] \quad = \quad \dfrac{e^{-3s}s}{s^2+4}+\dfrac{3e^{-3s}\Gamma(5/2)}{s^{5/2}}$

ตัวอย่าง 3.130 จงหา $L[f(x)]$ เมื่อ $f(x)$ กำหนดค่าดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ถ้า} \quad 0\le x<1 \\ 2, & \text{ถ้า} \quad 1\le x<\pi \\ -1, & \text{ถ้า} \quad \pi\le x<2\pi \\ x, & \text{ถ้า} \quad 2\pi\le x<\infty \end{cases}$$

วิธีทำ เราจะต้องเขียน $f(x)$ ให้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชัน ซึ่งขั้นแรกเราเขียน $f(x)$ ได้ใหม่ดังนี้

$$f(x)=2u_1(x)-3u_\pi(x)+(x+1)u_{2\pi}(x)$$

สำหรับเทอม $(x+1)u_{2\pi}(x)$ ซึ่งไม่เป็นชิฟฟังก์ชัน เราจะเขียนให้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชันได้เช่นกัน คือ

$$(x+1)u_{2\pi}(x) \quad = \quad (x-2\pi)u_{2\pi}(x)+(2\pi+1)u_{2\pi}(x)$$

เพราะฉะนั้นเขียน f(x) เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(x)=2u_1(x)-3u_\pi(x)+(x-2\pi)u_{2\pi}(x)+(2\pi+1)u_{2\pi}(x)$$

เนื่องจาก $L[x]=\dfrac{1}{s^2}$ ดังนั้น $L[(x-2\pi)u_{2\pi}(x)]=e^{-2\pi s}/s^2$ และ

$L[u_1(x)]=e^{-s}/s$, $L[u_\pi(x)]=e^{-\pi s}/s$, $L[u_{2\pi}(x)]=e^{-2\pi s}/s$

เพราะฉะนั้น

$$L[f(x)] \quad = \quad \frac{2e^{-s}}{s}-\frac{3e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2}+\frac{(2\pi+1)e^{-2\pi s}}{s}$$

ตัวอย่าง 3.131 จงหา $L[f(x)]$ เมื่อ $f(x)$ กำหนดค่าดังนี้

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{ถ้า} \quad 0\le x<2 \\ -3 & \text{ถ้า} \quad 2\le x<3 \\ x^2 & \text{ถ้า} \quad 3\le x<\infty \end{cases}$$

วิธีทำ ในการเขียน $f(x)$ เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชันเราจะเริ่มต้นเขียน $f(x)$ เป็นผลบวกของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(x) = 1 - 4u_2(x) + (3 + x^2)u_3(x)$$

เนื่องจาก $(3 + x^2)u_3(x)$ ไม่เป็นชิฟฟังก์ชัน ซึ่งเราจะนำมาเขียนให้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชันได้คือ

$$\begin{aligned}(3 + x^2)u_3(x) &= 3u_3(x) + x^2 u_3(x)\\ &= 3u_3(x) + (x-3)^2 u_3(x) + (6x-9)u_3(x)\\ &= 3u_3(x) + (x-3)^2 u_3(x) + 6(x-3)u_3(x) + 9u_3(x)\\ &= 12u_3(x) + (x-3)^2 u_3(x) + 6(x-3)u_3(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}L[(3 + x^2)u_3(x)] &= 12L[u_3(x)] + L[(x-3)^2 u_3(x)] + 6L[(x-3)u_3(x)]\\ &= \frac{12e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s^3} + \frac{6e^{-3s}}{s^2}\end{aligned}$$

ทำให้ได้

$$L[f(x)] = \frac{1}{s} - \frac{4e^{-2s}}{s} + e^{-3s}\left(\frac{12}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right)$$

จากสูตร $L[u_c(x)f(x-c)] = e^{-cs}F(s)$ เราอาจต้องการหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นเราจึงมีสูตรการหาการแปลงผกผันเพิ่มเติมต่อไปนี้

$$L^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u_c(x)f(x-c) \text{ เมื่อ } L[f(x)] = F(s)$$

ตัวอย่าง 3.132 จงหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ

$$G(s) = \frac{e^{-\pi s}(2s+3)}{s^2 + 6s + 15}$$

วิธีทำ จากสูตร $L^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u_c(x)f(x-c)$ เมื่อให้ $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+6s+15}$ และถ้าการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F(s)$ คือ $f(x)$ ก็จะได้ $L^{-1}[G(s)] = u_\pi(x)f(x-\pi)$

ในการหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F(s)$ เราจัดรูปของ $F(s)$ ใหม่ดังนี้

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+6s+15} = \frac{2s+3}{(s^2+6s+9)+6}$$

$$= \frac{2s+3}{(s+3)^2+6} - \frac{3}{(s+3)^2+6}$$

$$= 2\frac{s+3}{(s+3)^2+6} - \frac{3}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}}{(s+3)^2+6}$$

ในการหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $\frac{2s+3}{(s+3)^2+6}$ เราใช้ทฤษฎีบท

เพราะฉะนั้น

$$L^{-1}[F(s)] = 2e^{-3x}\cos\sqrt{6}x - (\frac{3}{\sqrt{6}})\sin\sqrt{6}x$$

ทำให้ได้

$$L^{-1}[G(s)] = [2e^{-3(x-\pi)}\cos\sqrt{6}(x-\pi) - (\frac{3}{\sqrt{6}})e^{-3(x-\pi)}\sin\sqrt{6}(x-\pi)]u_\pi(x)$$

ตัวอย่าง 3.133 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$y''+2y'+3y = f(x), y(0)=1, y'(0)=-3$ เมื่อกำหนด $f(x)$ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า} \quad 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{ถ้า} \quad 2 \le x < \infty \end{cases}$$

วิธีทำ สังเกตว่า $f(x) = 1 - u_2(x)$ ดังนั้นเมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซของสมการ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$L[y''] + L[2y'] + 3L[y] = L[f(x)]$$

$$s^2L[y] - sy(0) - y'(0) + 2sL[y] - 2y(0) + 3L[y] = L[1] - L[u_2(x)]$$

$$(s^2+2s+3)L[y] - s + 1 = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2+2s+3)L[y] = s - 1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

เพราะฉะนั้น

$$L[y] = \frac{s-1}{s^2+2s+3} + \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+2s+3)}$$

ถ้าให้

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+3} + \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+2s+3)}$$

เราสังเกตว่า $F(s)$ เขียนอยู่ในรูป $F_1(s)+(1-e^{-2s})F_2(s)$ เมื่อ

$$F_1(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+3} = \frac{s-1}{(s^2+2s+1)+2}$$

$$= \frac{s+1-2}{(s+1)^2+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2} - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}$$

และการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F_1(s)$ คือ

$$f_1(x) = e^{-x}\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

สำหรับการหาการแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F_2(s)$ ต้องใช้การแยกเศษส่วนย่อยดังนี้

$$F_2(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+3)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+2s+3}$$

และจะได้ $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$ ดังนั้น

$$F_2(s) = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3}\frac{s+2}{(s+1)^2+2} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3}\frac{s+2}{(s^2+2s+1)+2}$$

$$= \frac{1}{3s} - \frac{1}{3}\frac{s+1}{(s+1)^2+2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}$$

ซึ่งทำให้ได้การแปลงผกผันแบบลาปลาซของ $F_2(x)$ คือ

$$f_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-x}\cos\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

เพราะฉะนั้น

$$y = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[(1-e^{-2s})F_2(s)]$$

$$= f_1(x) + f_2(x) - u_2(x)f_2(x-2)$$

$$= e^{-x}[\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x] + \frac{1}{3} - e^{-x}[\frac{1}{3}\cos\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\sqrt{2}x]$$

$$-\{\frac{1}{3} - e^{-(x-2)}[\frac{1}{3}\cos\sqrt{2}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\sqrt{2}(x-2)]\}u_2(x)$$

ตัวอย่าง 3.134 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$y' + 2y = 2u_2(x) + xu_3(x), y(0) = 1$$

วิธีทำ ประการแรกจะต้องเขียนฟังก์ชันขวามือของสมการ ให้เป็นผลบวกของชิฟฟังก์ชัน ดังนี้

$$2u_2(x) + xu_3(x) \quad = \quad 2u_2(x) + (x-3)u_3(x) + 3u_3(x)$$

นำไปแทนค่าในสมการ (4) จะได้

$$y' + 2y \quad = \quad 2u_2(x) + (x-3)u_3(x) + 3u_3(x)$$

ซึ่งเมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$L[y'] + 2L[y] = 2L[u_2(x)] + L[(x-3)u_3(x)] + 3L[u_3(x)]$$

$$sL[y] - y(0) + 2L[y] = \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{3e^{-3s}}{s}$$

$$(s+2)L[y] = 1 + \frac{1}{s}[2e^{-2s} + 3e^{-3s}] + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

$$L[y] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s(s+2)}[2e^{-2s} + 3e^{-3s}] + \frac{e^{-3s}}{s^2(s+2)}$$

เมื่อใช้การแยกเศษส่วนย่อยต่อไปนี้คือ

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2}$$

จะหาค่าได้ $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$L^{-1}[\frac{1}{s(s+2)}] = L^{-1}[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$$

ทำนองเดียวกันได้

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+2)}] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ $L[y] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s(s+2)}[2e^{-2s} + 3e^{-3s}] + \frac{e^{-3s}}{s^2(s+2)}$ จะได้

$$y = e^{-2x} + 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(x-2)}]u_2(x) + 3[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(x-3)}]u_3(x)$$
$$+ [-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-3) + e^{-2(x-3)}]u_3(x)$$

3.4.6 สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร (equation with variable coefficients)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการใช้การแปลงแบบลาปลาซ หาคำตอบของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยเฉพาะอย่างยิ่งสัมประสิทธิ์ในรูป x^n โดยเราจะอาศัยผลจากทฤษฎีบท คือ

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad \text{เมื่อ} \qquad L[f(x)] = F(s)$$

ตัวอย่าง 3.135 จงใช้การแปลงแบบลาปลาซแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$y'' + xy' - 2y = 4, y(0) = y'(0) = 0$

วิธีทำ เมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซของสมการ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
L[y''] + L[xy'] - 2L[y] &= L[4] \\
s^2L[y] - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds}L[y'] - 2L[y] &= L[4] \\
s^2L[y] - \frac{d}{ds}(sL[y] - y(0)) - 2L[y] &= \frac{4}{s} \\
s^2L[y] - s\frac{d}{ds}L[y] - L[y] - 2L[y] &= \frac{4}{s} \\
\frac{d}{ds}L[y] + \frac{3-s^2}{s}L[y] &= -\frac{4}{s^2}
\end{aligned}$$

ถ้าให้ $L^{-1}[y] = \frac{d}{ds}L[y]$ แล้วสมการ $\frac{d}{ds}L[y] + \frac{3-s^2}{s}L[y] = -\frac{4}{s^2}$ เป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปร คือ $L[y]$ และหาค่า $L[y]$ ได้โดยคุณสมบัติ $\frac{d}{ds}L[y] + \frac{3-s^2}{s}L[y] = -\frac{4}{s^2}$ โดนตัวประกอบการอินทิเกรต ซึ่งคือ

$$\begin{aligned}
I(s) &= \exp\left(\int \frac{3-s^2}{s}ds\right) = \exp\left(3\ln|s| - \frac{s^2}{s}\right) \\
&= s^3 e^{-s^2/2}
\end{aligned}$$

แล้วได้สมการ $\frac{d}{ds}L[y] + \frac{3-s^2}{s}L[y] = -\frac{4}{s^2}$ เปลี่ยนเป็น

$$d(s^3e^{-s^2/2}L[y]) = -\frac{4}{s^2}s^3e^{-s^2/2}ds$$

เมื่ออินทิเกรตตลอดสมการนี้จะได้

$$s^3e^{-s^2/2}L[y] = 4e^{-s^2/2} + c$$

หรือ

$$L[y] = \frac{4}{s^3} + \frac{ce^{s^2/2}}{s^3}$$

แต่เนื่องจาก $\lim_{s\to\infty} \frac{ce^{s^2/2}}{s^3} = \infty$ และ $L[y]$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น $c = 0$ นั่นคือ

$$L[y] = \frac{4}{s^3}$$

ทำให้ได้

$$y = L^{-1}[\frac{4}{s^3}] = 2x^2$$

ตัวอย่าง 3.136 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้โดยใช้การแปลงแบบลาปลาซ

$xy'' - (2+x)y' + 3y = x - 1, y(0) = 0$

วิธีทำ เมื่อหาการแปลงแบบลาปลาซของสมการ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\{-s^2 L'[y] - 2sL[y]\} - 2sL[y] + \{sL'[y] + L[y] + 3L[y] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}$$

$$(-s^2 + s)L'[y] - (4s-4)L[y] = \frac{1-s}{s^2}$$

$$sL'[y] + 4L[y] = -\frac{1}{s^2}$$

$$L'[y] + \frac{4}{s}L[y] = \frac{1}{s^3}$$

ในการแก้สมการเชิงเส้น $L'[y] + \frac{4}{s}L[y] = \frac{1}{s^3}$ ซึ่งมี $L[y]$ เป็นตัวแปร จะมีตัวประกอบการอินทิเกรตคือ s^4 และได้

$$d(s^4 L[y]) = sds$$

ดังนั้น

$$L[y] = \frac{1}{2s^2} + \frac{c}{s^4}$$

ทำให้

$$y = \frac{1}{2}x + cx^3$$

ถ้ากำหนด $y'(0)$ มาให้เราจะหาค่า c ได้

บทที่ 4
การดำเนินการพัฒนาโปรแกรม

ขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม

1. ศึกษาภาษาที่ใช้ในการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ได้แก่ ASP
2. ศึกษาการเขียนเว็บเพจด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Macromedia Dreamweaver MX
3. สร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
4. ทดสอบการใช้งานและแก้ไขข้อบกพร่อง
5. จัดพิมพ์คู่มือและการใช้โปรแกรม

ภาษา HTML

HTML(Hyper Text Markup Language) เป็นรูปแบบหนึ่งของภาษา SGML(Standard Generalized Markup Language) นิยมใช้กันทั่วไปบนอินเตอร์เน็ต แฟ้มเอกสาร HTML ที่สร้างขึ้นจะนำไปแสดงได้โดยโปรแกรมเว็บบาร์วเซอร์ เช่น โปรแกรม Internet Explorer

HTML เป็นภาษาที่ง่ายต่อการเรียนรู้และการเขียน ซึ่งจัดว่าง่ายกว่าภาษาคอมพิวเตอร์ที่เคยมีมา แต่ก็ให้เกิดประโยชน์ขึ้นมากมาย

ปัจจุบันภาษา HTML ได้ถูกกำหนดมาตรฐานให้สูงขึ้น มีขีดความสามารถสูงขึ้น และมีองค์ประกอบในการสร้างฐานข้อมูลที่ดีขึ้น

HTML ทำงานอย่างไร

การใช้บริการอินเตอร์เน็ตไม่ว่าจะเป็น E-mail, FTP, Gopher, เทลเน็ต หรือบริการอื่นๆ ที่ต้องเชื่อมต่ออุปกรณ์ภายในอันซับซ้อนของฮาร์ดแวร์ ที่สามารถทำงานได้ด้วยโปรแกรมเฉพาะที่ทำงานบนอินเตอรเน็ตเท่านั้น

เวิลด์ไวด์เว็บ แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็น Client และส่วนที่เป็นเซิฟเวอร์ เหมือนกับในระบบเครือข่ายทั่วไป ทั้งสองส่วนจะถูกเชื่องโยงถึงกันผ่านทางอินเตอรเน็ตโดยมี HTML เป็นฐานข้อมูลที่สำคัญ เมื่อเว็บบาร์วเซอร์ส่งข้อความร้องขอข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์ HTML
จากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งานอยู่ผ่านโมเด็ม หรืออุปกรณ์สื่อสารข้อมูลอื่น ไปยังศูนย์บริการอินเตอร์เน็ต(ISP) ตามโปรโตคอลที่กำหนดไว้ ผ่านทาง URLs (Uniform Resource Locators) และเมื่อข้อมูลเดินทางมาถึงเว็บบาร์วเซอร์ ศูนย์บริการปลายทางที่ผู้ใช้ต้องการ ณ ที่นี้ เครื่องเว็บเซิฟเวอร์ของศูนย์ จะทำการอ่านข้อมูลที่ถูกส่งมา และจะทำงานตามคำสั่งที่กำหนด โดยอาจมีการเชื่องโยงไปยังเว็บเซิฟเวอร์อื่นอีก หลังจากจบสิ้นกระบวนการแล้ว จะทำการรับส่งข้อมูลคำตอบย้อนกลับมายังเครื่องคอมพิวเตอร์ที่เราใช้งาน โปรแกรมเว็บเซิฟเวอร์ที่เครื่อง

คอมพิวเตอร์ของเรา ก็จะแปลงสัญญาณคำสั่ง และแสดงผลเป็นข้อความ รูปภาพ เสียง ให้เราใช้งานต่อไป

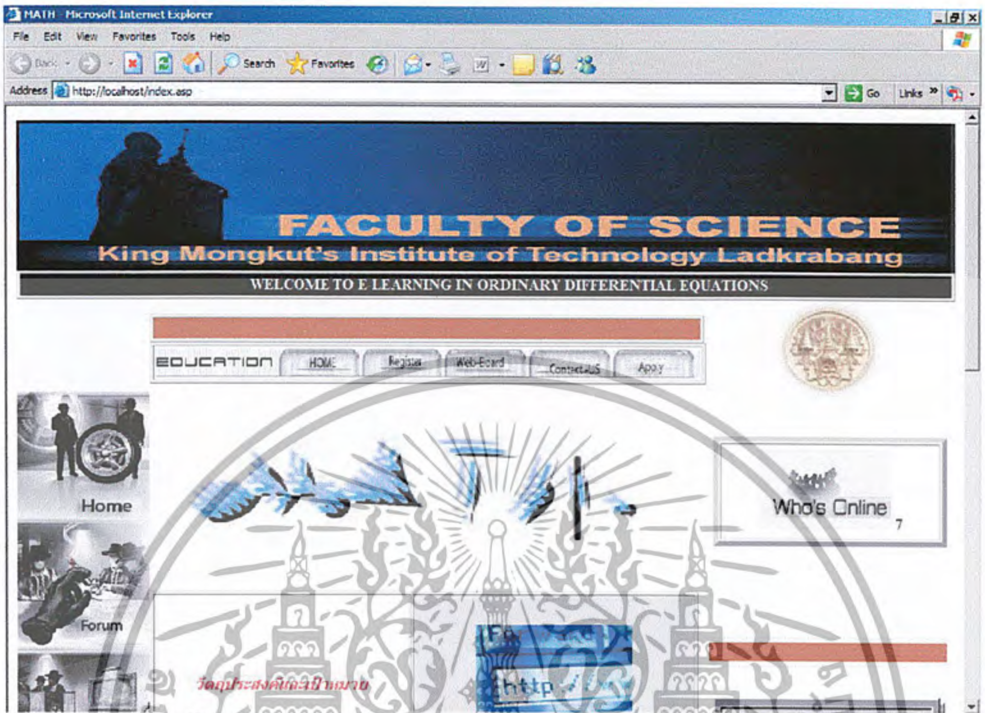
ปัจจุบันเว็บเซิฟเวอร์ที่ให้บริการกันอยู่ทั่วทุกมุมโลกนั้น ข้อมูลที่บริการส่วนใหญ่ไม่เสียค่าบริการใดๆ เราเสียเพียงค่าโทรศัพท์เท่านั้น แต่ได้ประโยชน์จากมันมากมาย ด้วยความสามารถอันยอดเยี่ยมของ HTML ข้อมูลจากแหล่งต่างๆ จะถูกนำมาแสดงต่อหน้าผู้ใช้ โดยเครื่องคอมพิวเตอร์จะทำหน้าที่ประมวลผลข้อมูลผ่านโปรโตคอล HTML เป็นโปรโตคอล

การสร้างเว็บเพจด้วย Macromedia Dreamweaver MX 2004

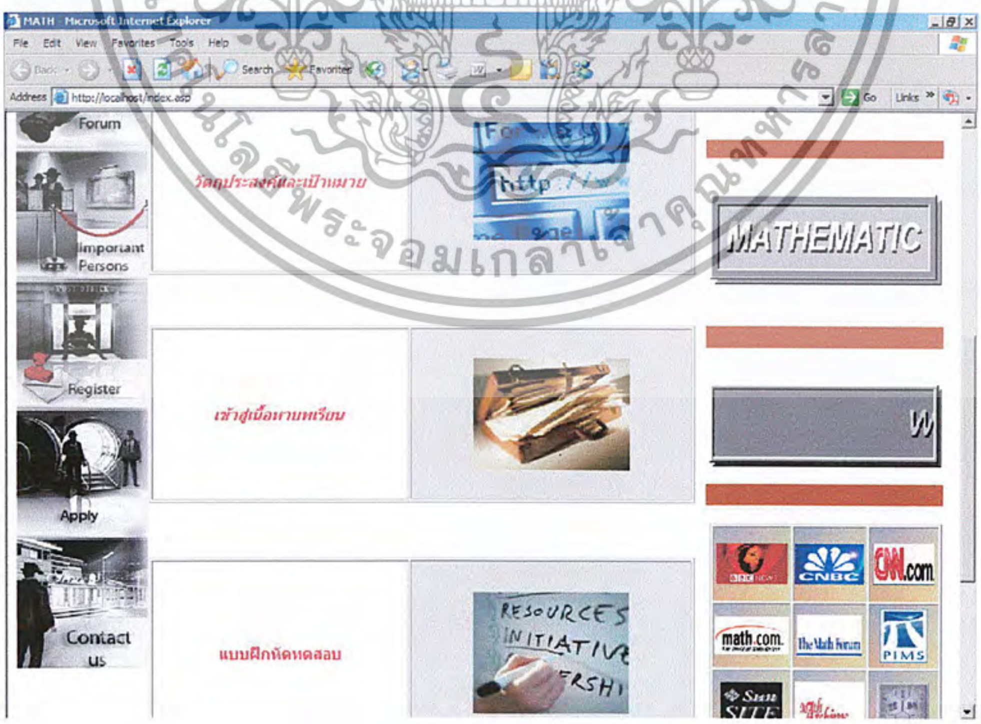
ในการสร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ จะนำโปรแกรม Macromedia Dreamweaver MX 2004 มาช่วยในการสร้าง ซึ่งโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ภาษา HTML โดยที่ผู้ใช้ไม่ต้องเขียนโปรแกรมเอง เนื่องจากตัวโปรแกรมมีทูลต่างๆให้เลือกใช้ เพื่อช่วยในการออกแบบเว็บเพจอยู่มากมาย โดยโปรแกรมจะแปลงให้เป็นภาษา HTML ในซอสโคดให้เองโดยอัตโนมัติ แต่ผู้สร้างเว็บเพจควรมีความรู้เกี่ยวกับภาษา HTML เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการสร้างเว็บเพจให้ดียิ่งขึ้น

บทที่ 5

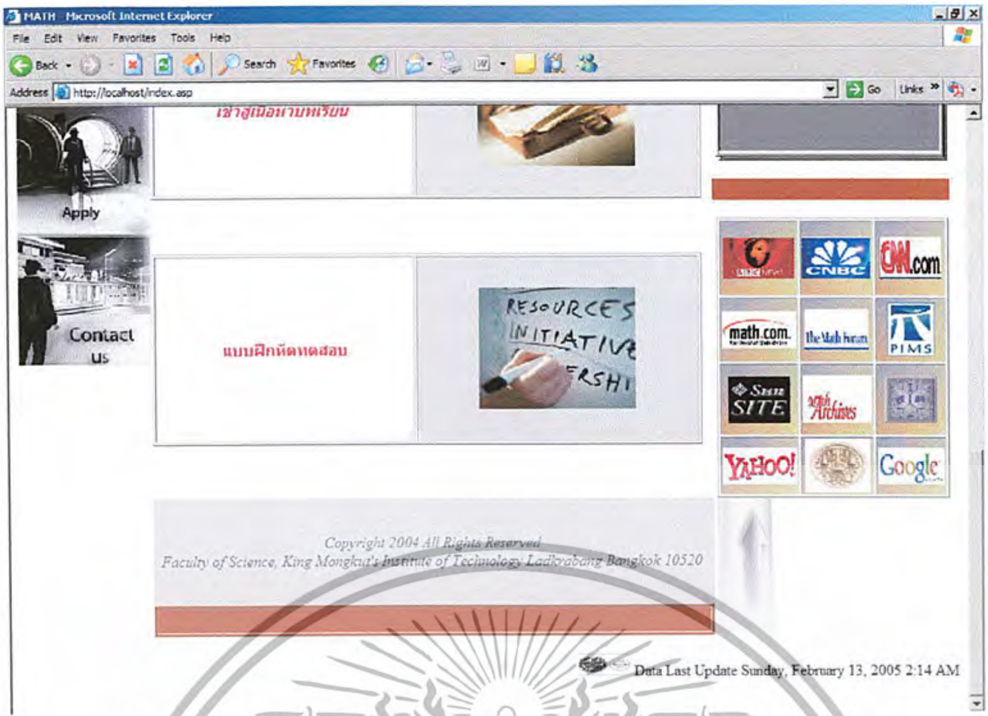
ผลการทดลอง



รูปที่ 5.1 แสดงหน้าจอหลักส่วนบน



รูปที่ 5.2 แสดงหน้าจอหลักส่วนกลาง



รูปที่ 5.3 แสดงหน้าจอหลักส่วนล่าง

จากรูปที่ 5.1 ถึง 5.3 แสดงลักษณะของหน้าจอหลัก ประกอบไปด้วย

1. เมนูบาร์ เมื่อเราต้องการไปยังหน้าต่างๆ ให้นำเมาส์ไปคลิกหน้าที่เราต้องการในเมนูบาร์ประกอบไปด้วย

   1.1 Home เมื่อต้องการกลับสู่หน้าหลัก

   1.2 Forum เมื่อต้องการเข้าสู่ระบบ webboard

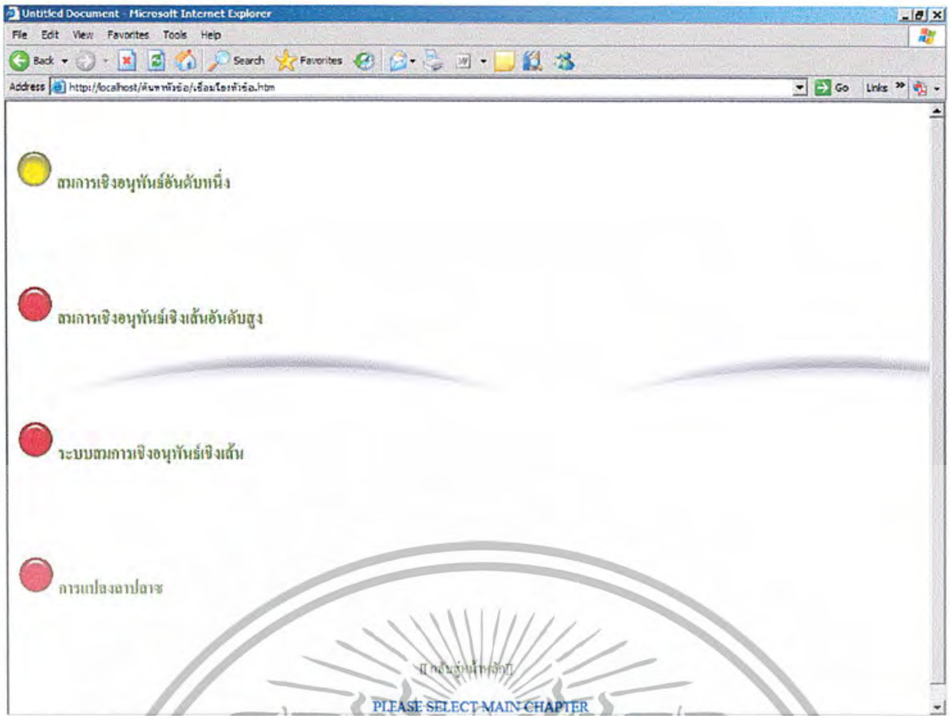
   1.3 Important Persons เมื่อต้องการเข้าสู่ประวัติของนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญ

   1.4 Register เมื่อต้องการเข้าสู่ระบบลงทะเบียน

   1.5 Apply เมื่อต้องการเข้าสู่การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

   1.6 Contact Us เมื่อต้องการติดต่อกับผู้ดูแลระบบ

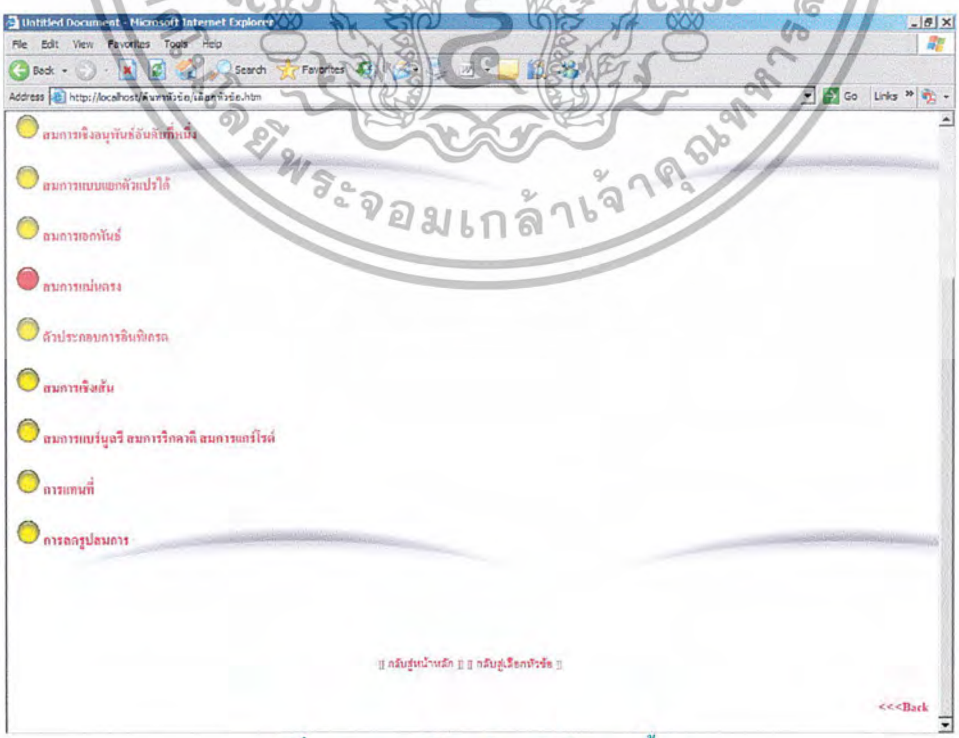
2. ปุ่มวัตถุประสงค์และเป้าหมาย เมื่อต้องการดูวัตถุประสงค์และเป้าหมายของการจัดทำ
3. ปุ่มเข้าสู่เนื้อหาบทเรียน เมื่อต้องการเข้าสู่เนื้อหาทั้งหมด
4. ปุ่มแบบฝึกหัดทดสอบ เมื่อต้องการเข้าสู่ระบบทดสอบความรู้ความเข้าใจ
5. Who Online แสดงว่าในขณะเวลานี้มีผู้ที่เข้าชมอยู่ทั้งหมดกี่คน
6. ปุ่มเชื่อมโยงเข้าสู่เว็บไซต์ต่างๆที่น่าสนใจ
7. Data Last Update แสดงการแก้ไขข้อมูลครั้งล่าสุด



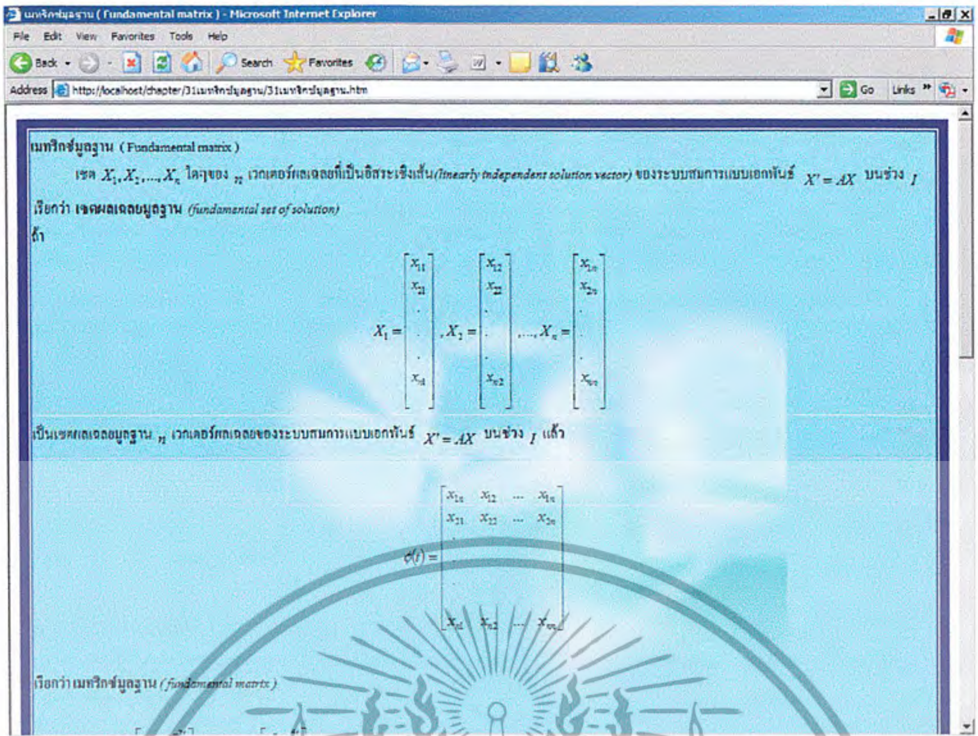
รูปที่ 5.4 แสดงหน้าจอเลือกบทของเนื้อหา

จากรูปที่ 5.4 เป็นหน้าจอเลือกบทของเนื้อหาที่ต้องการศึกษาประกอบไปด้วย

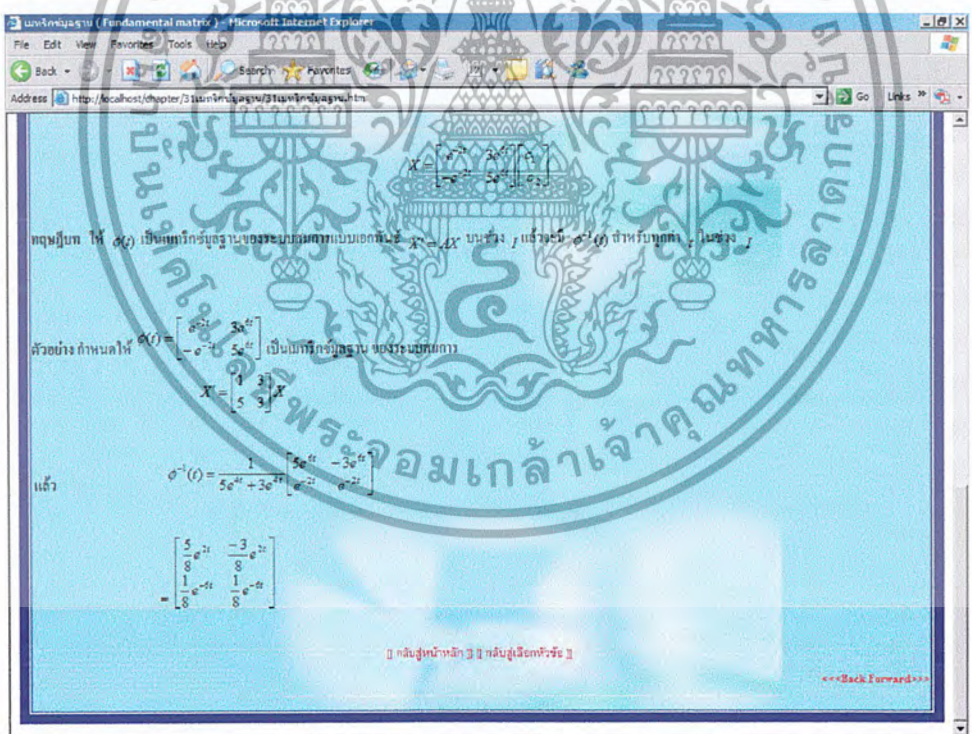
1. บทของเนื้อหา เมื่อต้องการที่จะศึกษาบทไหน ให้นำเมาส์ไปคลิกที่ชื่อบทนั้นหรือคลิกที่ปุ่มกระพริบ โดยเมื่อคลิกแล้วจะเข้าสู่หน้าจอของเลือกหัวข้อในแต่ละบท(ดังรูป)
2. ปุ่มกลับสู่หน้าหลัก เมื่อต้องการที่จะกลับไปหน้าหลักให้คลิกที่ปุ่มนี้



รูปที่ 5.5 แสดงหน้าจอเลือกหัวข้อของเนื้อหา



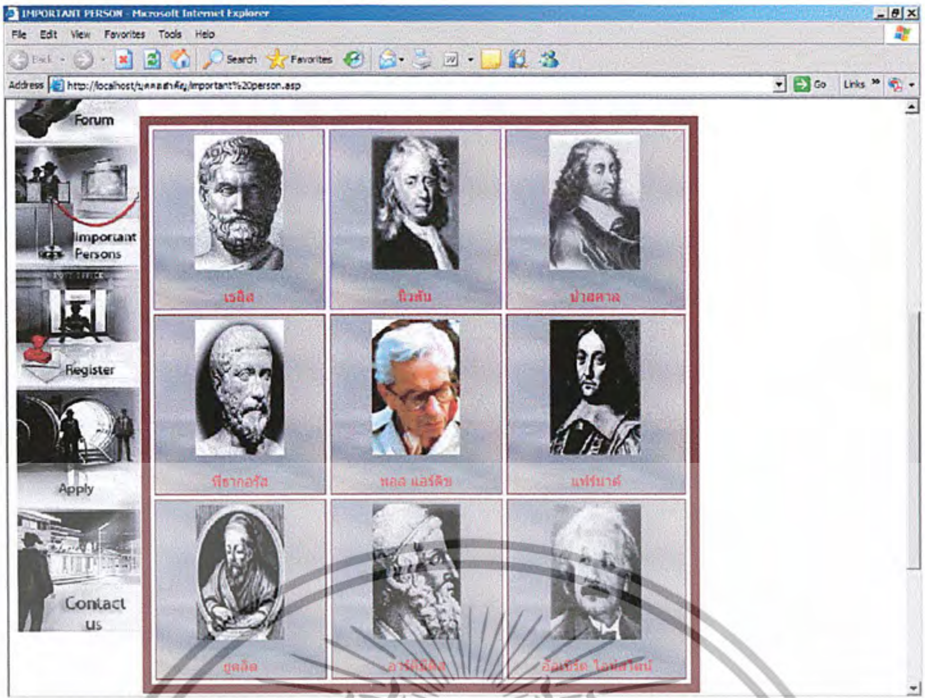
รูปที่ 5.6 แสดงหน้าจอเนื้อหา(ส่วนบน)



รูปที่ 5.7 แสดงหน้าจอเนื้อหา(ส่วนล่าง)

หน้าจอเนื้อหาประกอบไปด้วย

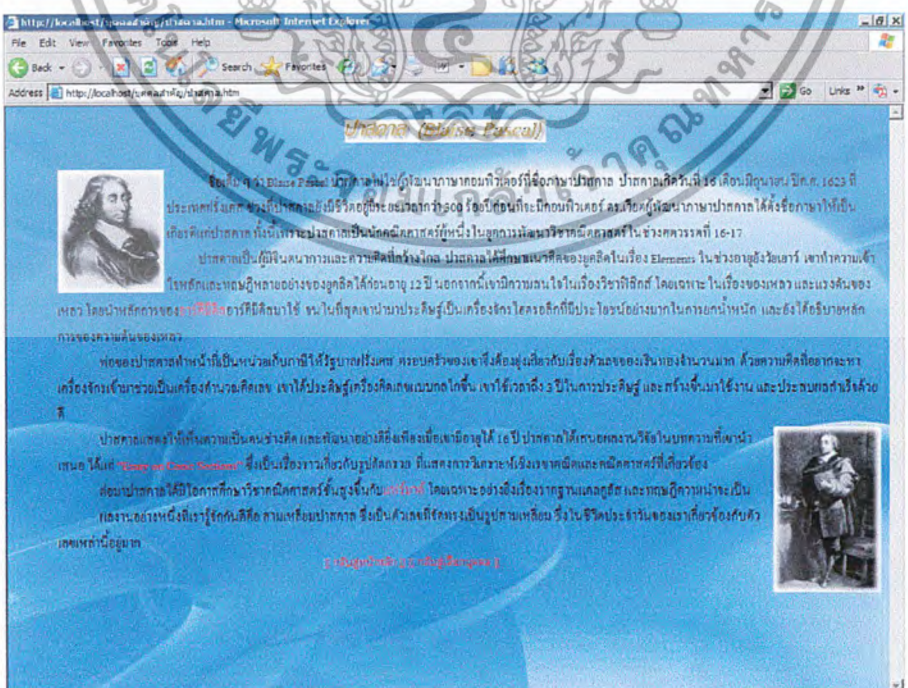
1. ปุ่มกลับสู่หน้าหลัก สำหรับกลับไปหน้าหลัก
2. ปุ่มกลับสู่เลือกหัวข้อ สำหรับกลับไปหน้าเลือกหัวข้อ
3. ปุ่ม <<<Back สำหรับไปหน้าเนื้อหาก่อนหน้าปัจจุบัน และปุ่ม Forward>>> สำหรับไปยังหน้าถัดไป



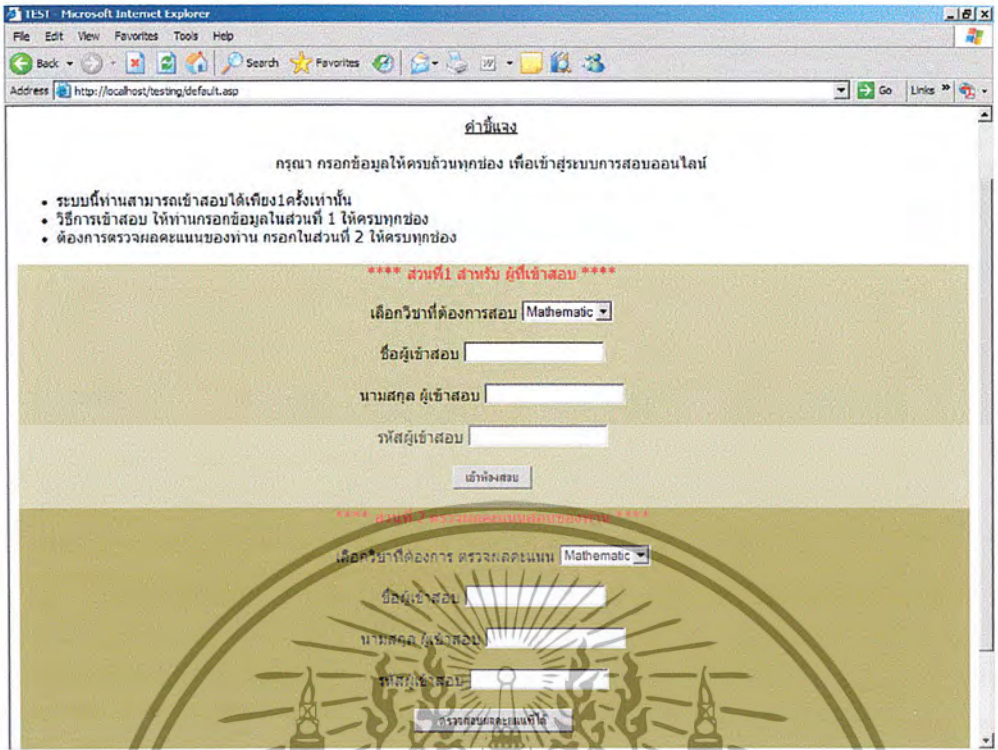
รูปที่ 5.8 แสดงหน้าจอบุคคลสำคัญ

จากรูป 5.8 เป็นหน้าของบุคคลสำคัญ ประกอบไปด้วย

1. รูปบุคคลสำคัญท่านต่างๆ เมื่อต้องการทราบเรื่องราวของบุคคลสำคัญท่านใด ให้นำเมาส์ไปคลิกที่รูปหรือที่ชื่อของบุคคลสำคัญท่านนั้น
2. ทางด้านซ้ายประกอบไปด้วยเมนูบาร์



รูปที่ 5.9 แสดงหน้าจอเนื้อหาบุคคลสำคัญ



รูปที่ 5.10 แสดงหน้าจอเข้าสู่ระบบทดสอบ

จากรูปที่ 5.10 แสดงหน้าจอเข้าสู่ระบบทดสอบ ประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลักๆ คือ

1. ส่วนที่หนึ่ง เมื่อผู้ใช้งานต้องการเข้าสู่ระบบทดสอบให้ทำดังนี้

1.1 เลือกวิชาที่ต้องการทดสอบ

1.2 ใส่ชื่อของผู้เข้าสอบ

1.3 ใส่นามสกุลของผู้เข้าสอบ

1.4 ใส่รหัสผ่านของผู้เข้าสอบ

1.5 กดปุ่มเข้าห้องสอบ

2. ส่วนที่สองเมื่อผู้ใช้งานต้องการตรวจสอบคะแนนให้ทำดังนี้

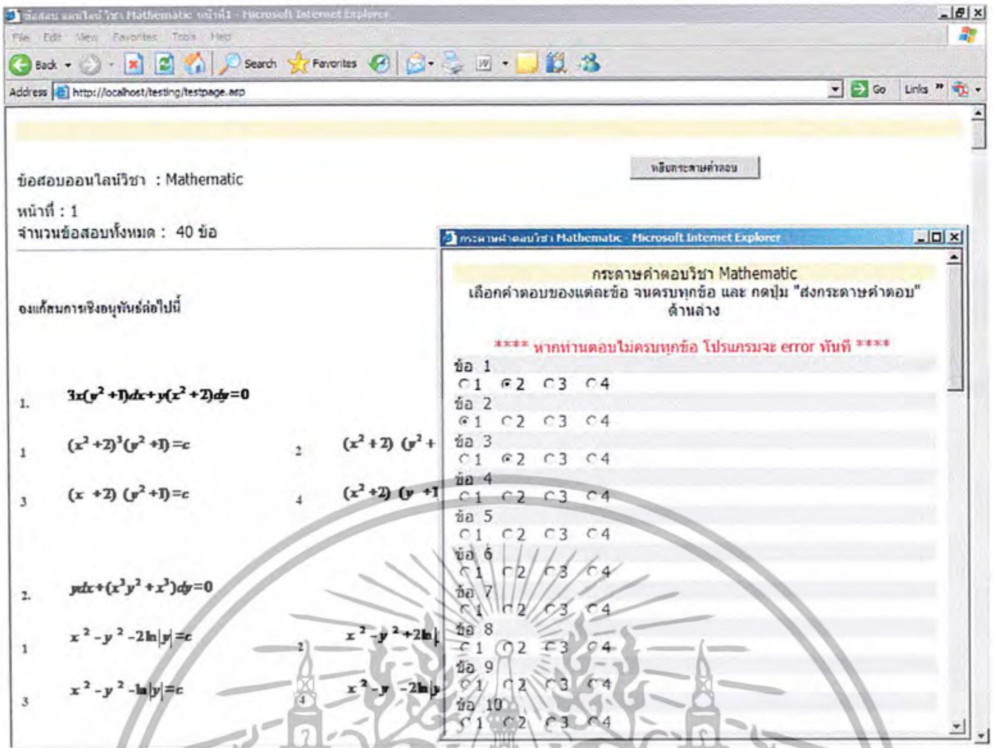
2.1 เลือกวิชาที่ต้องการตรวจสอบคะแนน

2.2 ใส่ชื่อของผู้เข้าสอบ

2.3 ใส่นามสกุลของผู้เข้าสอบ

2.4 ใส่รหัสผ่านของผู้เข้าสอบ

2.5 กดปุ่มตรวจสอบคะแนนที่ได้



รูปที่ 5.11 แสดงหน้าจอระบบทดสอบ

จากรูปที่ 5.11 แสดงหน้าจอของระบบทดสอบ ประกอบไปด้วย

1. ส่วนของข้อสอบ
2. ส่วนของกระดาษคำตอบ เมื่อผู้เข้าสอบต้องการตอบคำถามให้ทำดังนี้

   2.1 กดที่ปุ่มหยิบกระดาษคำตอบ จะมีกระดาษคำตอบเพิ่มขึ้นมาในหน้าจอ

   2.2 เลือกคำตอบที่ต้องการเลือก แล้วกดไปที่คำตอบนั้น

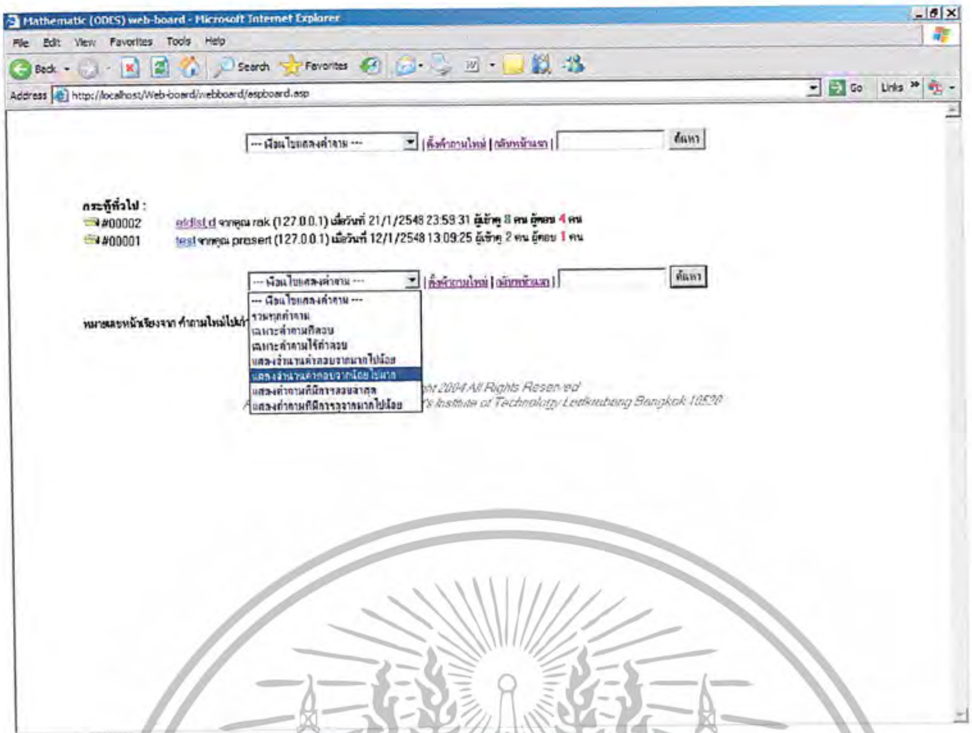
   2.3 เมื่อทำครบทุกข้อแล้วให้กดที่ปุ่มส่งกระดาษคำตอบ

รูปที่ 5.12 แสดงหน้าจอการประยุกต์

จากรูปที่ 5.12 แสดงลักษณะหน้าจอของการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งประกอบไปด้วย

1. รูปแบบของการประยุกต์แบบต่างๆ เมื่อเราต้องการที่จะเข้าไปดูในเรื่องใดให้นำเมาส์ไปคลิกที่รูปนั้นหรือที่ชื่อ หัวข้อ

2. เมนูบาร์ เมื่อเราต้องการไปยังหน้าอื่นๆ ให้นำเมาส์ไปคลิกในหน้าที่เราต้องการในเมนูบาร์



รูปที่ 5.13 แสดงหน้าจอหลักเว็บบอร์ด

จากรูปที่ 5.13 เป็นหน้าจอหลักของเว็บบอร์ด สำหรับให้ผู้ใช้งานสามารถติดต่อสอบถามหรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้ใช้งานอื่นๆได้ ประกอบไปด้วย

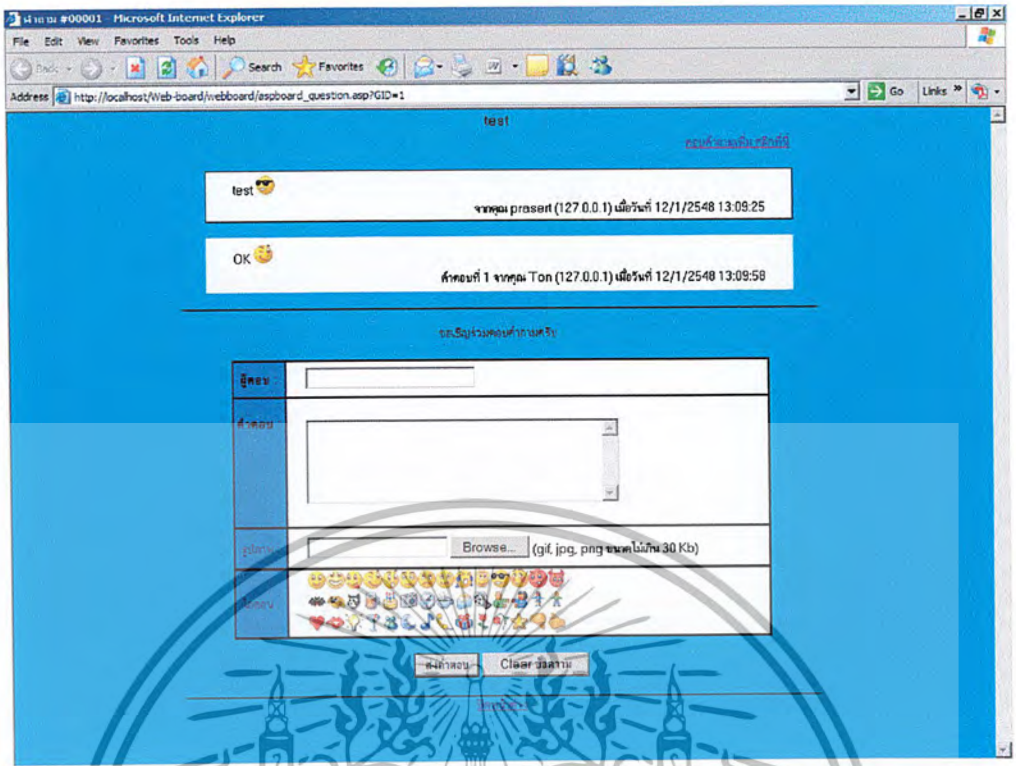
1. กระทู้ต่างๆ เมื่อต้องการเข้าไปดูที่กระทู้ไหน ให้นำเมาส์ไปคลิกที่ชื่อกระทู้นั้น โดยที่ในแต่ละกระทู้นั้น จะมีชื่อผู้ตั้งกระทู้ วันและเวลาที่ตั้งกระทู้ จำนวนผู้เข้าดูและผู้ตอบ

2. เงื่อนไขในการแสดงกระทู้ เมื่อต้องการให้กระทู้จัดเรียงเป็นแบบไหน ให้เลือกจากที่กำหนดให้

3. ช่องสำหรับค้นหากระทู้ เมื่อต้องการค้นหากระทู้ใด ให้พิมพ์ชื่อกระทู้นั้นแล้วคลิกที่ปุ่มค้นหา

4. ปุ่มสำหรับตั้งกระทู้ใหม่(ดังรูป) เมื่อต้องการตั้งกระทู้ใหม่ ให้นำเมาส์ไปคลิกที่ปุ่มตั้งคำถามใหม่

5. ปุ่มสำหรับกลับหน้าจอหลัก(Home) เมื่อต้องการกลับหน้าหลัก ให้นำเมาส์ไปคลิกที่ปุ่มกลับหน้าแรก



รูปที่ 5.14 แสดงหน้าจอของกระทู้

จากรูปที่ 5.14 แสดงหน้าจอของกระทู้ ประกอบไปด้วย

1. ข้อความที่มีผู้เข้ามาตอบ โดยที่ในแต่ละข้อความจะมีชื่อผู้ตอบ วันและเวลาที่ตอบ

2. ช่องสำหรับพิมพ์ข้อความเพื่อตอบกระทู้ โดยที่ภายในช่องจะประกอบไปด้วย

   2.1 ช่องผู้ตอบ สำหรับใส่ชื่อผู้ตอบ ไว้สำหรับใส่ชื่อของผู้ที่เข้ามาตอบกระทู้

   2.2 ช่องคำตอบ สำหรับให้พิมพ์ข้อความที่จะตอบกระทู้

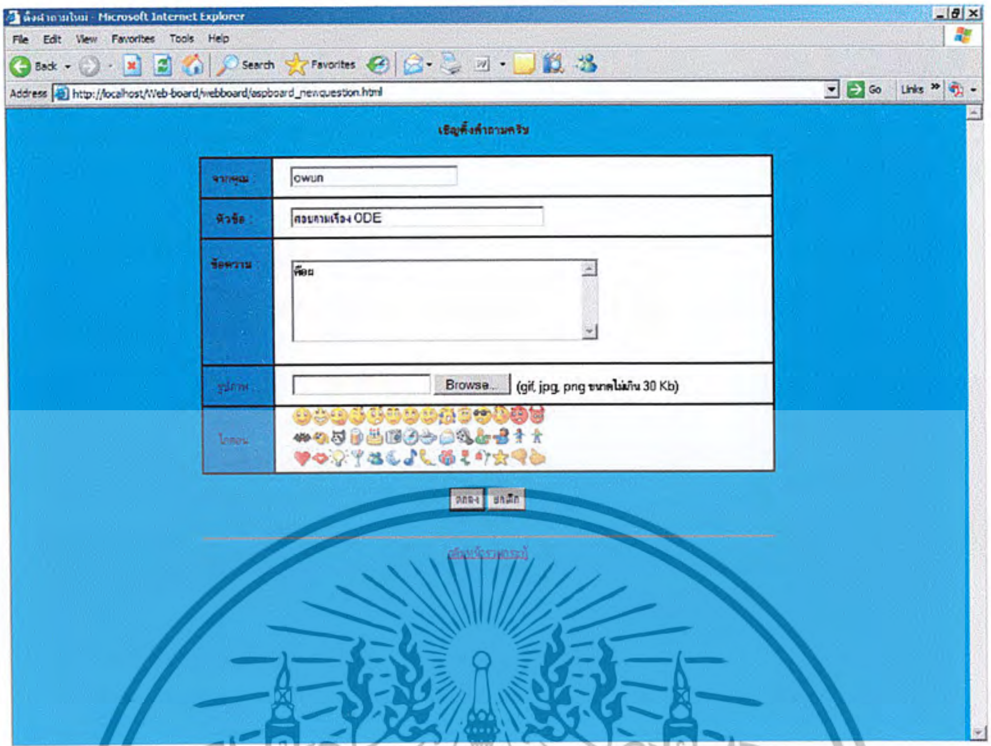
   2.3 ช่องรูปภาพ สำหรับใส่รูปภาพที่ต้องการในการตอบกระทู้ โดยให้นำเมาส์ไปคลิกที่ปุ่ม Browse แล้วก็เลือกไฟล์รูปภาพที่ต้องการ

   2.4 ช่องไอคอน สำหรับใส่ Emotion รูปแบบต่างๆในข้อความ

3. ปุ่มส่งคำตอบ สำหรับส่งข้อความที่ได้พิมพ์ไปให้ปรากฏอยู่บนหน้าจอของกระทู้

4. ปุ่ม Clear ข้อความ สำหรับเคลียร์ข้อความทั้งหมดที่ได้พิมพ์ไปแล้ว

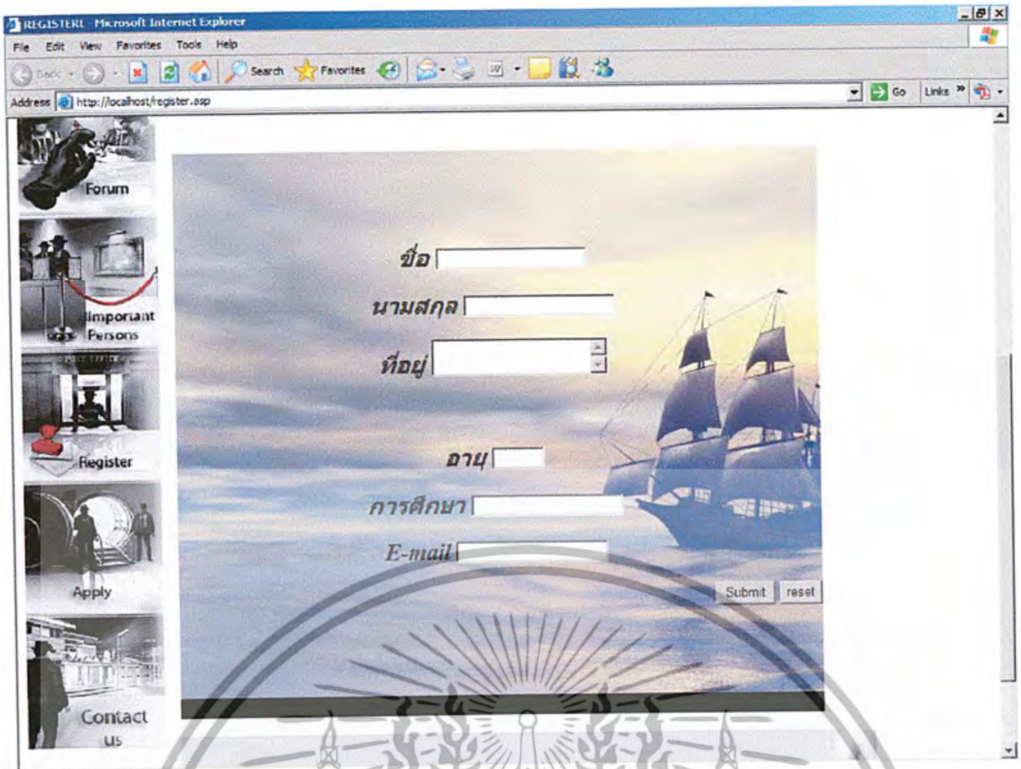
5. ปุ่มปิดหน้าต่าง สำหรับปิดหน้าต่างกลับสู่หน้าแรกของเว็บบอร์ด(หน้ารวมกระทู้)



รูปที่ 5.15 แสดงหน้าจอตั้งกระทู้

จากรูปที่5.15 แสดงหน้าจอสำหรับตั้งกระทู้ใหม่ สำหรับผู้ใช้งานที่ต้องการตั้งกระทู้ใหม่ ประกอบไปด้วย

1. ช่องสำหรับตั้งกระทู้ ภายในช่องประกอบไปด้วย
    1.1 ช่องจากคุณ สำหรับใส่ชื่อของผู้ตั้งกระทู้
    1.2 ช่องหัวข้อ สำหรับใส่ชื่อหัวข้อของกระทู้
    1.3 ช่องข้อความ สำหรับพิมพ์ข้อความที่ต้องการลงไป
    1.4 ช่องรูปภาพ สำหรับใส่รูปภาพที่ต้องการลงไปในข้อความ โดยนำเมาส์ไปคลิกที่ ปุ่ม Browse แล้วเลือกไฟล์รูปที่ต้องการ
    1.5 ช่องไอคอน สำหรับใส่ Emotions ที่ต้องการลงไปในข้อความ
2. ปุ่มตกลง เมื่อพิมพ์ข้อความต่างๆเรียบร้อยแล้วคลิกที่ปุ่มตกลง กระทู้จะถูกตั้งขึ้นเรียบร้อย
3. ปุ่มยกเลิก สำหรับยกเลิกกระทู้ที่กำลังตั้ง
4. ปุ่มกลับหน้ารวมกระทู้ สำหรับกลับไปหน้ารวมกระทู้



รูปที่ 5.16 แสดงหน้าจอลงทะเบียน

จากรูปที่ 5.16 แสดงหน้าจอลงทะเบียน สำหรับผู้ที่เข้ามาใช้งานแล้วต้องการลงทะเบียน ประกอบไปด้วย

1.ช่องสำหรับลงทะเบียน ซึ่งประกอบไปด้วย

1.1 ช่องชื่อ สำหรับกรอกชื่อของผู้ที่ลงทะเบียน

1.2 ช่องนามสกุล สำหรับกรอกนามสกุลของผู้ที่ลงทะเบียน

1.3 ช่องที่อยู่ สำหรับกรอกที่อยู่ของผู้ที่ลงทะเบียน

1.4 ช่องอายุ สำหรับกรอกอายุของผู้ลงทะเบียน

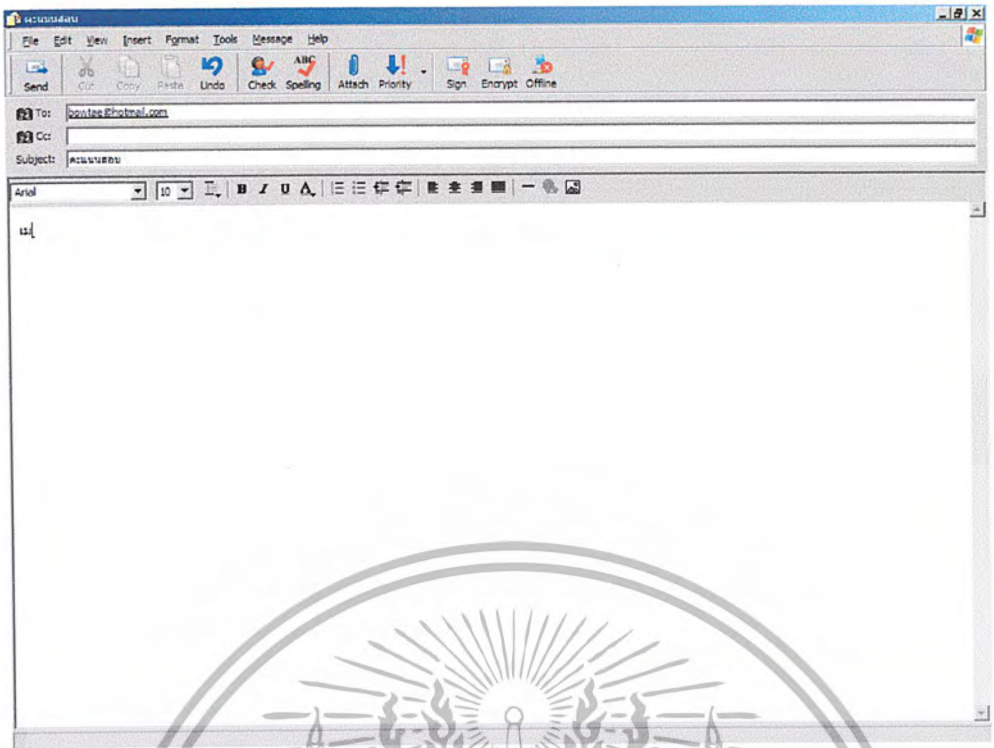
1.5 ช่องการศึกษา สำหรับกรอกระดับการศึกษาสูงสุดของผู้ลงทะเบียน

1.6 ช่อง E-mail สำหรับกรอก mail ของผู้ที่ลงทะเบียน

2. ปุ่ม Submit เมื่อกรอกข้อมูลเรียบร้อยทั้งหมดแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม Submit เพื่อที่จะลงทะเบียน

3. ปุ่ม reset เมื่อต้องการลบข้อมูลที่กรอกไปทั้งหมด

4. เมนูบาร์ เมื่อต้องการออกจากระบบลงทะเบียน หรือต้องการไปยังที่อื่นสามารถไปเลือกที่เมนูบาร์ได้



รูปที่ 5.17 แสดงหน้าจอติดต่อกับผู้ดูแลระบบ

รูปที่ 5.17 เป็นหน้าจอเมื่อผู้ใช้งานต้องการติดต่อกับผู้ดูแลระบบ โดยที่ใช้รูปแบบของโปรแกรม Outlook Express

บทที่ 6

การวิจารณ์หรืออภิปรายผล

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้ ทำให้ได้สื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสามารถใช้ได้ง่ายและไม่ซับซ้อน มีการใช้ข้อความที่เข้าใจง่าย แต่เนื่องจากเนื้อหาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญยังยากแก่การเข้าใจสำหรับผู้ที่ไม่มีความรู้พื้นฐาน โปรแกรมนี้มีการจัดลำดับเนื้อหาที่ผู้ใช้สามารถเลือกศึกษาตามความต้องการได้ แต่ขอแนะนำให้ศึกษาตามลำดับของเนื้อหาเพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น

โปรแกรมนี้ได้ตกแต่งให้มีสีสันเพื่อความน่าสนใจที่จะศึกษาเนื้อหา และยังมีแบบทดสอบเพื่อความเข้าใจของเนื้อหาในแต่ละบทอีกด้วย

บทที่ 7
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

บทสรุป

ปัญหาโครงงานพิเศษฉบับนี้ได้ทำการสร้างสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยมีการแบ่งการพัฒนาออกเป็น 3 ส่วน คือ

1. การจัดทำด้านเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบทดสอบการนำเสนอทางด้านเนื้อหาและแบบทดสอบ สามารถที่จะช่วยอธิบายให้เข้าใจในบทเรียนได้ และสามารถทำการศึกษาได้ด้วยตนเอง การทำแบบทดสอบท้ายบทจะช่วยประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไประยุกต์ใช้งานที่เกี่ยวข้องกับเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ไม่มากก็น้อย
2. การพัฒนาโปรแกรม ทำการพัฒนาโปรแกรมโดยใช้โปรแกรม Dreamweaver Mx 2004
3. การประเมินผล ทดสอบ และแก้ไข

จากการทดสอบการใช้โปรแกรมสื่อการเรียนการสอนอิเล็กทรอนิกส์เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และการประยุกต์ทางด้านเนื้อหา และศึกษาได้ด้วยตนเองพอสมควร

การทำแบบทดสอบท้ายบทสามารถประเมินผลความเข้าใจได้ในระดับหนึ่ง ซึ่งเพียงพอแก่การนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการประยุกต์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้

ข้อเสนอแนะ

สำหรับข้อเสนอแนะแนวทางการพัฒนาต่อไปนั้น ได้สรุปแนวทางให้โปรแกรมมีการเพิ่มเติมเนื้อหาส่วนต่างๆ เช่น เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบทดสอบ เพื่อทำการปรับปรุงให้มีความทันสมัย และความสะดวกในการใช้งาน

บรรณานุกรม

ภัททิรา เหลืองวิลาศ. **Dreamweaver Mx สร้างเว็บไซต์แบบมืออาชีพ.** กรุงเทพฯ: บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด(มหาชน)

ผศ.ดร.พรชัย สาตรวาหา. 2545. **สมการเชิงอนุพันธ์.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

ทวีชัย หงส์สุมาลย์ และสงวนชัย สุวรรณชีวะศิริ. **อินไซท์ ASP และ ASP.NET ฉบับสมบูรณ์.** พิมพ์ครั้งที่ 2 . กรุงเทพฯ: บริษัท โปรวิชัน จำกัด.

รศ.วารี เกรอต. **สมการเชิงอนุพันธ์ DIFFERENTIAL EQUATIONS.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

จินดา อาจริยะกุล. **Differential Equation**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

รศ.ดร.นิชากร แปลงประสพโชค. **สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ.** ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ผศ.ศรีบุตร แววเจริญ ผศ.ดร.ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. **สมการเชิงอนุพันธ์ 1 DIFFERENTIAL EQUATIONS 1 คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** บริษัท วงตะวัน จำกัด

ภาคผนวก

แบบฝึกหัด

1. แบบฝึกหัดเรื่องการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 1

1.1 แบบฝึกหัดเรื่องสมการแบบแยกตัวแปรได้

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้

1.1.1 $3x(y^2+1)dx + y(x^2+2)dy = 0$

a $(x^2+2)^3(y^2+1) = c$ b $(x^2+2)\ (y^2+1) = c$

c $(x\ +2)\ (y^2+1) = c$ d $(x^2+2)\ (y\ +1) = c$

1.1.2 $ydx + (x^3y^2 + x^3)dy = 0$

a $x^{\ 2} - y^{\ 2} - 2\ln|y| = c$ b $x^{\ 2} - y^{\ 2} + 2\ln|y| = c$

c $x^{\ 2} - y^{\ 2} - \ln|y| = c$ d $x^{\ 2} - y\ \ - 2\ln|y| = c$

1.1.3 $2y\cos x dx + 3\sin x dy = 0;\ y(\frac{\pi}{2}) = 2$

a $y^3\sin^2 x = 8$ b $y^3\sin\ \ x = 8$

c $y\ \ \sin^2 x = 8$ d $y^3\sin^2 x = 4$

1.1.4 $y' = xe^{y-x^2}$; เมื่อ x=0 , y=0

a $2e^{-y} = 1 + e^{-x^2}$ b $2e^{-y} = e^{-x^2}$

c $2e^{-y} = 1 + e$ d $e^{-y} = 1 + e^{-x^2}$

1.1.5 $y' = 8xy + 3y$

a $y = ce^{4x^2+3y}$ s b $y = e^{4x^2+3y}$ s

c $y = ce^{3y}$ s d $y = ce^{4x^2}$ s

1.2 แบบฝึกหัดเรื่องสมการเอกพันธ์สามัญ

จงทดสอบดูว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ในกรณีที่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ จงระบุดีกรีของฟังก์ชัน

1.2.1 $4x^2 - 3xy + y^2$

a เป็น ดีกรี 2 b เป็น ดีกรี 1

c ไม่เป็น d ไม่เป็น

1.2.2 $e^{x/y}$

a เป็น ดีกรี 0 b เป็น ดีกรี 1

c ไม่เป็น d ไม่เป็น

1.2.3 $\tan\frac{3y}{x}$

a เป็น ดีกรี 0 b เป็น ดีกรี 1

c ไม่เป็น d ไม่เป็น

1.2.4 $\tan x$

a เป็น ดีกรี 1 b เป็น ดีกรี 2

c เป็น ดีกรี 3 d ไม่เป็น

1.2.5 $x\ln x - x\ln y$

a เป็น ดีกรี 1 b เป็น ดีกรี 2

c ไม่เป็น d ไม่เป็น

1.3 จงทดสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์หรือไม่ และแสดงการแก้สมการดังกล่าว

1.3.1 $(x - y)dy = (y - x)dx$

a $x + y = c$ b $x + 2y = c$

c $2x + y = c$ d $x - y = c$

1.3.2 $(x^3 - y^3)dx + xy^2dy = 0$ เมื่อ $x = 1, y = 1$

a $y^3 = x^3 - x^3\ln x^3$ b $y^3 = x^3 - x^3\ln x$

c $y^3 = x^3 + x^3\ln x^3$ d $y^3 = x^3 - x\ln x^3$

1.3.3 $(2x - 3y)dx + (7y^2 + x^2)dy = 0$

a $2x + 3y = c$ b $3x + 2y = c$

c $x + 2y = c$ d ไม่ใช่สมการสัมประสิทธิเอกพันธ์

1.3.4 $(3x^2 + 2xy + 4y^2)dx + (20x^2 + 6xy + y^2)dy = 0$

a $y^2 + 7xy + x^2 = c(y + 3x)$ b $y^2 + 7xy + x^2 = c(y + x)$

c $y^2 + 7x + x^2 = c(y + 3x)$ d $y^2 + xy + x^2 = c(y + 3x)$

1.4 แบบฝึกหัดเรื่องสมการแม่นตรง

จงทดสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการแม่นตรงหรือไม่ แล้วจงหาคำตอบทั่วไป

1.4.1 $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$

a $x^2 - 2xy - y^2 = c$ b $x^2 - 2x - y^2 = c$

c $x^2 - 2y - y^2 = c$ d $x^2 - xy - y^2 = c$

1.4.2 $2xyy' = x^2 - y^2$

a $3xy^2 - x^3 = c$ b $3y^2 - x^3 = c$

c $xy^2 - x^3 = c$ d $3xy^2 + x^3 = c$

1.4.3 $y' = \dfrac{-y}{x - y}$

a $2xy - y^2 = c$ b $2x - y^2 = c$

c $2y - y^2 = c$ d $xy - y^2 = c$

1.4.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y\cos x}{\sin x + y}$

a $x^2 - y^2 - 2y\sin x = c$ b $x^2 - y^2 - 2y = c$

c $x^2 - y^2 - 2\sin x = c$ d $x^2 - y^2 - y\sin x = c$

1.4.5 $(x^2 + x)dy + (x^2 + 1 + 2\cos x)dx = 0$

a $x + y - 2 = c$ b $y - x + 3 = c$

c $2x + y - 2 = c$ d ไม่เป็นสมการแม่นตรง

1.4.6 $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$; $y(1) = -3$

a $x^2 + y + 6 = 0$ b $x^2y + y = 0$

c $x^2y + y + 6 = 0$ d $x^2y + 6 = 0$

1.5 แบบฝึกหัดเรื่องตัวประกอบการอินทิเกรต

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้

1.5.1 $(3x+2y^2)dx+2xydy=0$

a $x^3+y^2=c$ b $x^3+x^2y^2=c$

c $x^3+x^2=c$ d $x^2y^2=c$

1.5.2 $(2x^3-y)dx+xdy=0; y(1)=1$

a $y=2-x^3$ b $y=2x$

c $y=-x^3$ d $y=2x-x^3$

1.5.3 $(y^2\cos x-y)dx+(x+y^2)dy=0$

a $y^2-x=(c-\sin x)$ b $y^2-x=y(c-\sin x)$

c $y^2=y(c-\sin x)$ d $x=y(c-\sin x)$

1.5.4 $(x+x^3\sin 2y)dy-2ydx=0$

a $x^2(c+\cos 2y)=2y$ b $x^2(c+\cos 2y)=y$

c $x^2(c+\cos y)=2y$ d $x^2(\cos 2y)=2y$

1.5.5 $(2y\sin x-\cos^3 x)dx+\cos xdy=0$

a $y=(x+c)$ b $y=\cos^2 x$

c $y=(x+c)\cos x$ d $y=(x+c)\cos^2 x$

1.5.6 $(3x^2+y+3x^3y)dx+xdy=0$

a $e^{x^3}(1+x)=c$ b $e^{x^3}(1+xy)=c$

c $e^{x^3}(xy)=c$ d $e^{x^3}(1+y)=c$

1.6 แบบฝึกหัดเรื่องสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.6.1 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=1$

a $x^2-2x=c$ b $x^2-2y=c$

c $x^2-2xy=c$ d $x^2-xy=c$

1.6.2 $xy' + 3y = x^2$

a $x^5 - 5x^3 = c$

b $x^5 - x^3 y = c$

c $x^5 - 5xy = c$

d $x^5 - 5x^3 y = c$

1.6.3 $y^2 \dfrac{dx}{dy} + xy = 2y^2 + 1$

a $xy = y^2 + \ln|y| + c$

b $xy = y^2 + \ln|x| + c$

c $xy = y + \ln|y| + c$

d $x = y^2 + \ln|y| + c$

1.6.4 $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2 \sin 3x$

a $x^2 \cos 3x + 3 = cx^2$

b $x^2 \cos 3x + y = cx^2$

c $x^2 \cos 3x + 3y = cx^2$

d $x^2 \cos x + 3y = cx^2$

1.6.5 $y' + y \cot x = \cos x$

a $2y - \sin^2 x = c$

b $2\sin x - \sin^2 x = c$

c $2y \sin x - \sin^2 x = c$

d $y \sin x - \sin^2 x = c$

1.6.6 จงแก้สมการ $\cos y . \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} \sin y = 1$

a $x \sin y = \dfrac{1}{2} x^2 + c$

b $x \sin y = \dfrac{1}{2} x^2 + 2c$

c $x \sin y = \dfrac{1}{2} x^2 + 3 + c$

d $x \sin y = \dfrac{1}{2} x^2 - c$

1.6.7 จงแก้สมการ $y' + y = xy^3$

a $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}(2x+1) + +3ce^{2x}$

b $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}(2x+1) + ce^{2x}$

c $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}(2x+1) + 3 + ce^{2x}$

d $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}(2x-1) - ce^{2x}$

2. แบบฝึกหัดเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสูง

2.1 เรื่องความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

2.1.1 $x, 2x, x^2$ ขึ้นต่อกันเชิงเส้นแล้วจงหาค่า c_1, c_2, c_3

a $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 0$ b $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 1$

b $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 2$ d $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 3$

2.1.2 จงหา Solution ของ $y'' + y = 0$ เมื่อ c_1, c_2 เป็น Arbitrary Constant

a $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ b $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \tan z$

c $y = 2c_1 \cos x + 2c_2 \sin x$ d $y = -c_1 \cos x - c_2 \sin x$

2.1.3 จงหา Wronskian ของ $y_1 = e^{2x}$ และ $y_2 = e^{3x}$

a $W(e^{2x}, e^{3x}) = e^{5x} + 2x$ b $W(e^{2x}, e^{3x}) = 2e^{5x} + 3$

c $W(e^{2x}, e^{3x}) = -e^{5x}$ d $W(e^{2x}, e^{3x}) = e^{5x}$

2.1.4 จงหา Wronskian ของ ฟังก์ชัน $e^x \sin x, e^x \cos x$

a $-e^{2x} + 2$ b $-e^{2x}$

c $-2e^{2x}$ d $-2e^{2x} + 2$

2.1.5 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $W(x^2, 2x+1) \neq 0$

a $x \neq 2$ และ $x \neq -1$ b $x \neq 0$ และ $x \neq 2$

c $x \neq 0$ และ $x \neq -1$ d $x \neq 2$ และ $x \neq 2$

2.1.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$

a $y = c_1 x + c_2 x^4 + 3$ b $y = -c_1 x - c_2 x^4$

c $y = c_1 x + c_2 x^4$ d $y = c_1 x + 2c_2 x^4$

2.1.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' + y = 0$

a $y = 2c_1 e^{-x} + 2c_2 x e^{-x}$ b $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

c $y = -c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$ d $y = c_1 e + c_2 xe$

2.1.8 จงแก้สมการ Initial Value Problem

$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0 \quad ; y(1) = 2e, y'(1) = -3e$

a $y = 2e^x - 5e^x \ln x$ b $y = 2e^x - 5e^x \ln x + 2$

c $y = e^x - e^x \ln x$ d $y = 2e^x - 5e^x \ln x - 5$

2.2 แบบฝึกหัดเรื่องสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

2.2.1 จงแก้สมการ $y'' - y = 0$

a $y = c_1e^{-x} + c_2e^x$ b $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + e^x$

c $y = -c_1e^{-x} - c_2e^x$ d $y = c_1e \ - c_2e^x$

2.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไป $y'' + 5y' + 6y = 0$

a $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + 2e$ b $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

c $y = c_1e \ + c_2e$ d $y = -c_1e^{-2x} - c_2e^{-3x}$

2.2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไป $y'' + 4y' + 4y = 0$

a $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$ b $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + 2$

c $y = c_1e^{-2x} + c_2xe$ d $y = -c_1e^{-2x} - c_2xe^{-2x}$

2.2.4 จงแก้สมการ Initial Value Problem $y'' - 2y' + 10y = 0 \quad y(0) = 4, y'(0) = 1$

a $y = e^x(4\cos 3x - \sin 3x) + 2$ b $y = e^x(4\cos 3x + 2\sin 3x)$

c $y = e^x(4\cos 3x - \sin 3x)$ d $y = e^x(4\cos 3x - \sin 3x) - 3x$

2.2.5 จงแก้สมการต่อไปนี้ $y'' - 3y' + 2y = 0$

a $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x$ b $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x$

c $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - 2x$ d $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$

2.3 แบบฝึกหัดเรื่อง Nonhomogeneous Problems

2.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

a $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{x}{5} e^{-x}$

b $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + \frac{x}{5} e$

c $y = -c_1 e^{-x} - c_2 e^{4x} - \frac{x}{5} e^{-x}$

d $y = c_1 e + c_2 e - \frac{x}{5} e^{-x}$

2.3.2 จงแก้สมการ $y'' + y = 3\sin 2x + x\cos 2x$

a $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{3}\cos 2x + \sin 2x$

b $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{3}\cos 2x - \frac{5}{9}\sin 2x$

c $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos 2x - \frac{5}{9}\sin 2x$

d $y = c_1 \cos x + c_2 2\sin x + \frac{x}{3}\cos 2x - \frac{5}{9}\sin 2x$

2.3.3 จงแก้สมการ $y'' + y = 12\cos^2 x \quad ; y(0) = 0, y'(0) = 1$

a $y = +4\cos x + \sin x + 6 + 2\cos 2x$

b $y = -\cos x + \sin x + 6 - \cos 2x$

c $y = -4\cos x + \sin x + 6 - 2\cos 2x$

d $y = -4\cos x + \sin x + 6 - 2$

2.3.4 จงแก้สมการต่อไปนี้ $y'' - 2y' + y = e^x$

a $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2$

b $y = c_1 e^x + c_2 x e + x^2 e^x$

c $y = c_1 e^x + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

d $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$

2.3.5 จงแก้สมการต่อไปนี้ $y'' + 2y' + 5y = x^2 + 3$

a $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{x^2}{5} - \frac{4x}{25} + \frac{73}{125}$

b $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{x^2}{5} - \frac{4x}{25}$

c $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{x^2}{5} + \frac{73}{125}$

d $\quad y = e^{-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) - \frac{4x}{25} + \frac{73}{125}$

2.4 แบบฝึกหัดเรื่องตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

2.4.1 จงหาค่าของ $(D+2)D(x^3 - 3x)$

a $\quad 6x^2 + 6x + 6$ $\qquad$ b $\quad 6x^2 + 6x - 6$

c $\quad 6x^2 + 6x$ $\qquad$ d $\quad 6x^2 + x + 6$

2.4.2 จงหาค่าของ $(D^3 - 2D^2)\sin ax$

a $\quad -a^3 \cos ax + a^2 \sin ax$ $\qquad$ b $\quad -a^3 \cos ax + 2\sin ax$

c $\quad -a^3 \cos ax + 2a^2 \sin ax$ $\qquad$ d $\quad \cos ax + 2a^2 \sin ax$

2.4.3 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(4D+1)(D-2)$

a $\quad 4D^2 + 7D + 2$ $\qquad$ b $\quad 4D^2 + 7D$

c $\quad 4D^2 - 7D - 2$ $\qquad$ d $\quad 4D^2 + D + 2$

2.4.4 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(2D-3)(2D+3)$

a $\quad 4D^2 - 9$ $\qquad$ b $\quad 4D^2 + 9$

c $\quad 4D^2$ $\qquad$ d $\quad D^2 + 9$

2.4.5 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(D-2)(D+1)^2$

a $\quad D^3 + 3D + 2$ $\qquad$ b $\quad D^3 + 3D$

c $\quad D^3 - 3D - 2$ $\qquad$ d $\quad D^3 + D + 2$

2.4.6 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(D-x)(D+x)$

a $\quad D^2 + 1 + x^2$ $\qquad$ b $\quad D^2 + x^2$

d $\quad D^2 + 1$ $\qquad$ d $\quad D^2 + 1 - x^2$

2.4.7 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(D+x)(D-x)$

a $\quad D^2 + 1 + x^2$ $\qquad$ b $\quad D^2 - 1 - x^2$

c $\quad D^2 - 1$ $\qquad$ d $\quad D^2 + x^2$

2.4.8 จงหาผลคูณต่อไปนี้ $(xD - 1)D$

a $xD^2 - D$ b $xD^2 + D$

c $xD^2 + 2D$ d $xD^2 + 3D$

2.4.9 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้ ใช้คุณสมบัติ $(L_1L_2)y = L_1L_2y$

$(D - 2)(D + 2)y = 0$

a $y = c_1e^{2x} + e^{2x}$ b $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

c $y = c_1e + c_2e^{2x}$ d $y = c_1 + c_2e^{2x}$

2..4.10 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญต่อไปนี้ ใช้คุณสมบัติ $(L_1L_2)y = L_1L_2y$

$(D^2 - 9)y = 0$

a $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ b $y = c_1e^{3x} + e^{3x}$

c $y = c_1e + c_2e^{-3x}$ d $y = c_1 + c_2e^{-3x}$

2.5 คุณสมบัติบางประการของตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียล

2..5.1 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $(D + 3)^4 y = 0$

a $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{-3x}$ b $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)$

c $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 +)e^{3x}$ d $y = (c_1 + c_2x + c_3 + c_4x^3)e^{3x}$

2.5.2 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $(2D - 1)^2 y = 0$

a $y = (c_1 + c_2x)e$ b $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{1}{2}x}$

c $y = (c_1 + c_2x)$ d $y = (c_1 + c_2)e^{\frac{1}{2}x}$

2.5.3 จงแก้สมการ โดยใช้การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล $(D - 2)^3 y = 0$

a $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x}$ b $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e$

c $(c_1 + c_2x + c_3x^2)$ d $(c_1 + c_2x + c_3)e^{2x}$

2.5.4 จงแก้สมการ โดยใช้การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล $(2D + 1)^2 y = 0$

a $y = (c_1 + c_2x)e$ b $y = (c_1 + c_2x)$

c $y = (c_1 + c_2x)e^2$ d $y = (c_1 + c_2x)e^{-x/2}$

3.1 แบบฝึกหัดเรื่องระบบสมการ

3.1.1 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - 3x = t$$

$$2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 3x + 8y = 2$$

a $y = \frac{-1}{2}c_1e^t + \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t$

b $y = \frac{-1}{2}c_1e^t + \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{5}{12}$

c $y = \frac{-1}{2}c_1e^t + \frac{3}{2}c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}$

d $y = \frac{-1}{2}c_1e^t + c_2e^{-3t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}$

3.1.2 จงหาคำตอบของระบบเอกพันธ์

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 6y$$

a $x = c_1e^{5t} + c_2e^{3t}$, $y = -c_1e^{5t} - c_2e^{3t}$

b $x = c_1e^{5t} + c_2e^{3t}$, $y = -3c_1e^{5t}$

c $x = c_1e^{5t}$, $y = 3c_1e^{5t} - c_2e^{3t}$

d $x = c_1e^{5t} + c_2e^{3t}$, $y = -3c_1e^{5t} - c_2e^{3t}$

3.1.3 จงหาคำตอบของระบบแบบไม่เป็นเอกพันธ์

$$\frac{dx}{dt}=2x-y-5t$$

$$\frac{dy}{dt}=3x+6y-4$$

a $x=c_1e^{5t}+c_2e^{3t}+2t+1$, $y=-3c_1e^{5t}-c_2e^{3t}-t$

b $x=c_1e^{5t}+c_2e^{3t}+2t+1$, $y=-3c_1e^{5t}-c_2e^{3t}$

c $x=c_1e^{5t}+c_2e^{3t}+2t$, $y=-3c_1e^{5t}-c_2e^{3t}-t$

d $x=c_1e^{5t}+c_2e^{3t}+1$, $y=-3c_1e^{5t}-c_2e^{3t}-t$

3.1.4 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt}=6x-3y$$

$$\frac{dy}{dt}=2x+y$$

a $x=c_1e^{3t}+3c_2e^{4t}$, $y=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}$

b $x=c_1e^{3t}+3c_2e^{4t}$, $y=c_1e^{3t}+2c_2e^{4t}$

c $x=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}$, $y=c_1e^{3t}+2c_2e^{4t}$

d $x=c_1e^{3t}+3c_2e^{4t}$, $y=c_1e^{3t}+2c_2$

3.1.5 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt}=4x-y$$

$$\frac{dy}{dt}=x+2y$$

a $x=c_1e^{3t}+c_2(t+1)e^{3t}$, $y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$

b $x=c_1e^{3t}+c_2(t+1)e^{3t}$, $y=c_1e^{3t}+c_2t$

c $x=c_1e^{3t}+c_2(t+1)$, $y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$

d $x=c_1e^{3t}+(t+1)e^{3t}$, $y=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$

3.1.6 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -5x + y$$

a
$$x = 2e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(3\cos 3t)]$$

b
$$x = 2e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t) + c_2(3\cos 3t - \sin 3t)]$$

c
$$x = 2e^{2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(3\cos 3t - \sin 3t)]$$

d
$$x = (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$
$$y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(3\cos 3t - \sin 3t)]$$

3.1.7 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y + 1$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = y - 2z$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} = x - 1$$

a
$$x = 1 - e^{-t} + e^{-2t}$$
$$y = -1 + e^{-t}$$
$$z = -\frac{1}{2} + 2e^{-t}$$

b
$$x = 1 - e^{-t}$$
$$y = -1 + e^{-t}$$
$$z = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

c
$$x = 1 - e^{-t} + e^{-2t}$$
$$y = -e^{-t}$$
$$z = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

d
$$x = 1 - e^{-t} + e^{-2t}$$
$$y = -1 + e^{-t}$$
$$z = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

3.1.8 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3x + 2(y - x)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2(y - x)$$
เมื่อ $x(0) = \frac{1}{5}, y(0) = \frac{1}{2}, x'(0) = 0, y'(0) = 0$

a $x = \frac{6}{25}\cos t - \frac{1}{25}\cos\sqrt{6}t$, $y = \frac{12}{25}\cos t + \cos\sqrt{6}t$

b $x = \frac{6}{25}\cos t - \frac{1}{25}\cos\sqrt{6}t$, $y = \frac{12}{25}\cos t + \frac{1}{50}\cos\sqrt{6}t$

c $x = \frac{6}{25}\cos t - \cos\sqrt{6}t$, $y = \frac{12}{25}\cos t + \frac{1}{50}\cos\sqrt{6}t$

d $x = \frac{6}{25}\cos t - \frac{1}{25}\cos\sqrt{6}t$, $y = \cos t + \frac{1}{50}\cos\sqrt{6}t$

3.1.9 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = y + 2z$$
$$\frac{dz}{dx} = 2y + z$$
เมื่อ $y(0) = 2, z(0) = 0$

a $y = e^{3x} + e^{-x}$, $z = e^{3x} - e^{-x}$

b $y = e^{3x} + e^{-x} + 2$, $z = e^{3x} - e^{-x} + 2$

c $y = e^{3x} + e^{-x} + c$, $z = e^{3x} - e^{-x} - c$

d $y = e^{3x} + e^{-x} - 1$, $z = e^{3x} - e^{-x} - 3$

3.1.10 จงหาค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนของเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

a ไอเกน $\lambda=4$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$

ไอเกน $\lambda=-1$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

b ไอเกน $\lambda=4$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}-2\\ -3\end{bmatrix}$

ไอเกน $\lambda=-1$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

c ไอเกน $\lambda=4$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$

ไอเกน $\lambda=-1$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

d ไอเกน $\lambda=4$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$

ไอเกน $\lambda=-1$ เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

3.1.11 จงหาค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนของเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}7 & -1 & 6\\ -10 & 4 & -12\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

a ค่าไอเกน $\lambda=2$ ถ้าให้ $k=1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}7\\ -6\\ -1\end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda=3$ ถ้าให้ $k=1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda=5$ ถ้าให้ $k=1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix}3\\ -6\\ -2\end{bmatrix}$

b ค่าไอเกน $\lambda = 2$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 3$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 5$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$

c ค่าไอเกน $\lambda = 2$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 3$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 5$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$

d ค่าไอเกน $\lambda = 2$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 3$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ค่าไอเกน $\lambda = 5$ ถ้าให้ $k = 1$ จะได้เวกเตอร์ไอเกน $\begin{bmatrix} 32 \\ -6 \\ -25 \end{bmatrix}$

3.1.12 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt} = 6x_1 - 3x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2$$

a $x = c_1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3e^{4t+2} \\ 2e^{4t+2} \end{bmatrix}$ b $x = c_1\begin{bmatrix} e^{3t+2} \\ e^{3t+2} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$

c $x = c_1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$ d $x = c_1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2+3e^{4t} \\ 2+2e^{4t} \end{bmatrix}$

3.1.13 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบสมการ $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ เมื่อ

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $.x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

a $x = c_1\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}\sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin t + 2 \\ e^{2t}\cos t + 2 \end{bmatrix}$

b $x = c_1\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}\sin t \end{bmatrix} - 2c_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t \end{bmatrix}$

c $x = 2c_1\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}\sin t \end{bmatrix} + 2c_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t \end{bmatrix}$

d $x = c_1\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ -e^{2t}\sin t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t \end{bmatrix}$

3.1.14 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบ

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2$$

a $x = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t} + 2 \\ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + 2 \end{bmatrix}$ b $x = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t} \\ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \end{bmatrix}$

c $x=\begin{bmatrix} c_1e^{3t}-c_2(t+1)e^{3t} \\ c_1e^{3t}-c_2te^{3t} \end{bmatrix}$ d $x=\begin{bmatrix} c_1e^{3t}+c_2(t+1)e^{3t}-3 \\ c_1e^{3t}+c_2te^{3t} \end{bmatrix}$

3.1.15 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบสมการต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt}=7x_1-x_2+6x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt}=-10x_1+4x_2-12x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt}=-2x_1+x_2-x_3$$

a $x=c_1\begin{bmatrix}-e^{2t}\\-e^{2t}\\-e^{2t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2e^{3t}\\-2e^{3t}\\-2e^{3t}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3e^{5t}\\-6e^{5t}\\-2e^{5t}\end{bmatrix}$

b $x=c_1\begin{bmatrix}2e^{2t}\\-2e^{2t}\\-2e^{2t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}e^{3t}\\-2e^{3t}\\-e^{3t}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3e^{5t}\\-6e^{5t}\\-2e^{5t}\end{bmatrix}$

c $x=c_1\begin{bmatrix}e^{2t}\\-e^{2t}\\-e^{2t}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}e^{3t}\\-2e^{3t}\\-e^{3t}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3e^{5t}\\-6e^{5t}\\-2e^{5t}\end{bmatrix}$

d $x=c_1\begin{bmatrix}e^{2t}\\-e^{2t}\\-e^{2t}\end{bmatrix}-c_2\begin{bmatrix}e^{3t}\\-2e^{3t}\\-e^{3t}\end{bmatrix}-c_3\begin{bmatrix}3e^{5t}\\-6e^{5t}\\-2e^{5t}\end{bmatrix}$

3.1.16 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt}=3x_1+x_2-x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2-x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt}=3x_1+3x_2-x_3$$

a $x=c_1\begin{bmatrix}e^{2t}\\-e^{2t}\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}e^{t}\\e^{t}\\3e^{t}\end{bmatrix}$

b $$x=-c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}-c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}-c_3\begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix}$$

c $$x=c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} 2e^{t} \\ 2e^{t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix}$$

d $$x=c_1\begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ 3e^{t} \end{bmatrix}$$

3.1.17 จงหาคำตอบทั่วไปของระบบเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dx_1}{dt}=4x_1+3x_2+x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt}=-4x_1-4x_2-2x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt}=8x_1+12x_2+6x_3$$

a $$x=-c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}-c_2\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}-c_3\begin{bmatrix} te^{2t} \\ -2te^{2t} \\ (4t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$$

b $$x=c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} te^{2t} \\ -2te^{2t} \\ (4t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$$

c $$x=c_1\begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} te^{2t} \\ -2te^{2t} \\ (4t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$$

d $$x=c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix} 2te^{2t} \\ -2te^{2t} \\ 2(4t+1)e^{2t} \end{bmatrix}$$

3.1.18 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$(3D+1)x+2(D-1)y=e^t$$
$$(D-3)x+y=0$$

a
$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}-c_2e^{5t}-\frac{e^t}{4}$$
$$y=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}-\frac{e^t}{2}$$

b
$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}-2$$
$$y=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}-2$$

c
$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}$$
$$y=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}$$

d
$$x=c_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{5t}+\frac{e^t}{4}+2$$
$$y=\frac{5}{2}c_1e^{\frac{t}{2}}-2c_2e^{5t}+\frac{e^t}{2}+2$$

3.1.19 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$(D-1)x+(D+2)y=\sin t$$
$$(D+1)x+Dy=\cos t$$

ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น $x=0, y=\frac{-1}{2}$ เมื่อ $t=0$

a
$$x(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t)$$
$$y(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{5}(3\sin t-\cos t)$$

b
$$x(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t-t)$$
$$y(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{5}(3\sin t-\cos t-t)$$

c
$$x(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t+\sin t+2t)$$
$$y(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{5}(3\sin t-\cos t+2t)$$

d
$$x(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{10}(3\cos t)$$
$$y(t)=-\frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{5}(3\sin t)$$

3.1.20 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$Dx = 3y$

$Dy = 2x$

a
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2e^{-\sqrt{6}t} + \sqrt{6}t$$
$$y = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t} + \sqrt{6}t$$

b
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2e^{-\sqrt{6}t} - 6$$
$$y = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t} - 6$$

c
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2e^{-\sqrt{6}t} + t$$
$$y = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t} + t$$

d
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2e^{-\sqrt{6}t}$$
$$y = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}$$

3.1.21 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$Dx + (D+2)y = 0$

$(D-3)x - 2y = 0$

a
$$x = 2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t} - t$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} - t$$

b
$$x = 2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t} + t$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + t$$

c
$$x = 2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t}$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$$

d
$$x = 2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t} + e$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + e$$

3.1.22 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$Dx + D^2 y = e^{3t}$$
$$(D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t}$$

a
$$x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{17}{15}e^{3t} + t$$
$$y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}e^{3t} + t$$

b
$$x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{17}{15}e^{3t}$$
$$y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}e^{3t}$$

c
$$x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{17}{15}$$
$$y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{4}{15}$$

d
$$x = c_1 - c_2 \cos t + c_3 \sin t$$
$$y = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$$

3.1.23 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dt} = e^t$$
$$\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = 5e^t$$

a
$$x = c_1 e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$$
$$y = -\frac{3}{4}c_1 e^{4t} + c_2 + 5e^t$$

b
$$x = c_1 e^{4t} + \frac{4}{3}e^t$$
$$y = -\frac{3}{4}c_1 e^{4t} + c_2$$

c
$$x = c_1 e^{4t} + \frac{4}{3}e^t + e$$
$$y = -\frac{3}{4}c_1 e^{4t} + c_2 + 5e^t + 5$$

d
$$x = c_1 e^{4t} + \frac{4}{3}e^t - e$$
$$y = -\frac{3}{4}c_1 e^{4t} + c_2 + 5e^t - e$$

3.1.24 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$2Dx + (D-1)y = t$$
$$Dx + Dy = t^2$$

a
$$x = c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2$$
$$y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t$$

b
$$x = c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 + 5t$$
$$y = c_1 e^{-t} + 2t^2 + 5$$

c
$$x = c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t$$
$$y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5$$

d
$$x = c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5e$$
$$y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5e$$

3.1.25 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$x' - 2x + 2y' = 2 - 4e^{2t}$$
$$2x' - 3x + 3y' - y = 0$$

a
$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + 5e^{2t} + 5$$
$$y = -c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2 e^{t} - e^{2t}$$

b
$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + 5e^{2t}$$
$$y = -c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2 e^{t}$$

c
$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + 5e^{2t} + 2t$$
$$y = -c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2 e^{t} - e^{2t}$$

d
$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + 5e^{2t}$$
$$y = -c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2 e^{t} - e^{2t} + 3$$

3.1.26 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$\frac{dx}{dt} = -5x - y \qquad ; x(0) = 0, y(0) = 1$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - y$$

a $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3} + 3t$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3} + 3t$

b $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3} - 3t$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3} - 3t$

c $x = e^{-3t+3} - te$
$y = -e^{-3t+3} + 2te$

d $x = e^{-3t+3} - te^{-3t+3}$
$y = -e^{-3t+3} + 2te^{-3t+3}$

3.1.27 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$(D^2+1)x + 4(D-1)y = 4e^t \qquad ; x(0) = 5, x'(0) = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$
$$(D-1)x + (D+9)y = 0$$

a $x = 2e^t + 2e^{-t} + e^{-2t}$
$y = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t}\sin t$

b $x = 2e^t + 2e^{-t} + e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$
$y = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t}\sin t$

c $x = 2e^t + 2e^{-t} + e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + t$
$y = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t}\sin t + t$

d $x = 2e^t + 2e^{-t} + e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$
$y = \frac{1}{2}e^{-t}$

3.1.28 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} x'' - x + 5y' &= t \\ -2x' + y'' - 4y &= -2 \end{aligned} \qquad ; x(0)=0, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=0$$

a
$$x = -t + 5\sin t - 2\sin 2t + t$$
$$y = 1 - 2\cos t + \cos 2t + t$$

b
$$x = -t + 5\sin t - 2\sin 2t$$
$$y = 1 - 2\cos t$$

c
$$x = -t + 5\sin t - 2\sin 2t$$
$$y = 1 - 2\cos t + \cos 2t$$

d
$$x = -t + 5\sin t$$
$$y = 1 - 2\cos t + \cos 2t$$

3.1.29 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} (D^2+2)x - Dy &= 2t+5 \\ (D-1)x + (D+1)y &= -2t-1 \end{aligned} \qquad ; x(0)=3, x'(0)=0, y(0)=-3$$

a
$$x = t + 2 + e^{-2t} + \sin t$$
$$y = 1 - t - 3e^{-2t} - \cos t$$

b
$$x = t + 2 + e^{-2t} + \sin t + t$$
$$y = 1 - t - 3e^{-2t} - \cos t + t$$

c
$$x = t + 2 + e^{-2t}$$
$$y = 1 - t - 3e^{-2t}$$

d
$$x = t + 2 + e^{-2t} + \sin t + 2$$
$$y = 1 - t - 3e^{-2t} - \cos t + 2$$

3.1.30 จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

$$\begin{aligned}(D^2-1)x+5Dy&=t\\ -2Dx+(D^2-4)y&=-2\end{aligned}\qquad ;x(0)=9, x'(0)=2, y(0)=1, y'(1)=0$$

a
$$x=-t+15\cos t-5\sin t-6\cos 2t+4\sin 2t$$
$$y=1+\cos t+6\sin t-2\cos 2t-3\sin 2t$$

b
$$x=-t+15\cos t-5\sin t-6\cos 2t$$
$$y=1+\cos t+6\sin t-2\cos 2t$$

c
$$x=-t+15\cos t-5\sin t+4\sin 2t$$
$$y=1+\cos t+6\sin t-3\sin 2t$$

d
$$x=-t+15\cos t-6\cos 2t+4\sin 2t$$
$$y=1+\cos t-2\cos 2t-3\sin 2t$$

4.1 แบบฝึกหัดเรื่องการแปลงลาปลาซ

จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้การแปลงลาปลาซ

4.1.1 $y'-5y=0 \qquad ;y(0)=2$

a $y=2e^{5t}$ b $y=2e^{5t}+1$

c $y=2e^{5t}+2$ d $y=2e^{5t}+s$

4.1.2 $y'-5y=0 \qquad ;y(\pi)=2$

a $y=2e^{5(t-\pi)}+1$ b $y=2e^{5(t-\pi)}+s$

c $y=2e^{5(t-\pi)}$ d $y=2e^{5(t-\pi)}+2s$

4.1.3 $y'+2y=e^{-t} \qquad ;y(0)=0$

a $y=e^{-t}-e^{-2t}+e$ b $y=e^{-t}-e^{-2t}+2e$

c $y=e^{-t}-e^{-2t}$ d $y=e^{-t}-e^{-2t}+3e$

4.1.4 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=1 \qquad ;t\geq 0$

a $\frac{1}{s}+s;s>0$ b $\frac{1}{s}+2s;s>0$

c $\frac{1}{s}+3s;s>0$ d $\frac{1}{s};s>0$

4.1.5 จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)=e^{at} \quad ;t \ge 0$

a $\frac{1}{s-a}+s;s>a$ b $\frac{1}{s-a};s>a$

c $\frac{1}{s-a}+2s;s>a$ d $\frac{1}{s+a};s>a$

4.1.6 จงใช้การแปลงลาปลาซ แก้สมการ $y''+y=\sin 2t \quad ;y(0)=0, y'(0)=1$

a $y=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t$ b $y=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t+2t$

c $y=\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t+t$ d $y=\frac{5}{3}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t$

4.1.7 จงหา Inverse Transform ของ $G(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$

a $g(t)=e^{2t}\sin t+t$ b $g(t)=e^{2t}\sin t$

c $g(t)=e^{2t}\sin t+2t$ d $g(t)=e^{2t}\sin t+3t$

4.1.8 จงหา Inverse Transform ของ $H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$

a $h(t)=\frac{at-\sin at}{a^2}+at$ b $h(t)=\frac{at-\sin at}{a^2}+2at$

c $h(t)=\frac{at-\sin at}{a^2}$ d $h(t)=\frac{at-\sin at}{a^2}-at$

4.1.9 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

a $h(t)=1-\cos t+t$ b $h(t)=1-\cos t$

c $h(t)=1-\cos t+2t$ d $h(t)=1+\cos t$

4.1.10 $y'+y=\sin t \quad ;y(0)=1$

a $y=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{3}{2}e^{-t}+t$

b $y=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{3}{2}e^{-t}+2t$

c $y=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{3}{2}e^{-t}$

d $y=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{3}{2}e^{-t}$

4.1.11 $y'' + 2y' + y = t \qquad ; y(0) = -3, y(1) = -1$

a $\quad y = -2 + t - e^{-t} + e^{-t}t$ b $\quad y = -2 + t - e^{-t} + e^{-t}t + 2t$

c $\quad y = -2 + t - e^{-t} + e^{-t}t - 2t$ d $\quad y = +2 + t + e^{-t} + e^{-t}t$

4.1.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\sin ax$

a $\quad L[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2 + a^2} + 2 \qquad ; s > 0$

b $\quad L[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2 + a^2} \qquad ; s > 0$

c $\quad L[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2 + a^2} - s \qquad ; s > 0$

d $\quad L[\sin ax] = \dfrac{a}{s^2 - 2a^2} \qquad ; s > 0$

4.1.13 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $e^{3x} \cos 2x$

a $\quad \dfrac{s-3}{s^2 - 6s + 13} + 15$ b $\quad \dfrac{s+3}{s^2 + 6s + 13}$

c $\quad \dfrac{s-3}{s^2 - 6s + 13}$ d $\quad \dfrac{s-3}{s^2 - 6s - 13}$

4.1.14 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของ $\dfrac{6}{(s+2)^2 + 9}$

a $\quad 2e^{-2x} \sin 3x$ b $\quad 2e^{-2x} \sin 3x + 2x$

c $\quad 2e^{-2x} \sin 3x - 2x$ d $\quad e^{-2x} \sin 3x - 2$

4.1.15 จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของ $\dfrac{12}{(s+3)^4}$

a $\quad 2e^{-3x} x^3 + 2x$ b $\quad 2e^{-3x} - 2$

c $\quad -2x + 2e^{-3x} x^3$ d $\quad 2e^{-3x} x^3$

4.1.16 จงหา $L[y'']$

a $\quad s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + y$ b $\quad s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)$

c $s^2L[y]-sy(0)-y'(0)-y$ d $-s^2L[y]+sy(0)+y'(0)$

4.1.17 จงแก้สมการ $y''+4y=4x$ กำหนด $y(0)=1, y'(0)=5$

a $y=\cos 2x+2\sin 2x$ b $y=\cos 2x-2\sin 2x-x$

c $y=\cos 2x+2\sin 2x+x$ d $y=\cos x+\sin x+x$

4.1.18 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $x\sin ax$

a $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$ b $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}+2s$

c $\dfrac{s+2as}{(s^2-a^2)^2}$ d $\dfrac{2as}{(s^2+2a^2)^2}$

4.1.19 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $4\cos 5x$

a $\dfrac{4s}{s^2+25-20}$ b $\dfrac{4s}{s^2+25}+20$

c $\dfrac{4s}{s^2-2}$ d $\dfrac{4s}{s^2+25}$

4.1.20 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $e^{-x}(5\sin 2x+3\cos 2x)$

a $\dfrac{3s+13}{s^2-2s-5}$ b $\dfrac{3s+13}{s^2+2s+5}$

c $\dfrac{3s-13}{s^2+2s+2}$ d $\dfrac{3s+13}{s^2+2s+5}+20$

4.1.21 จงหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ $\dfrac{1}{s^2+2s+5}$

a $\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-2x$ b $\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+2x$

c $\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$ d $\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-e$

4.1.22 จงหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ $\dfrac{s}{s^2+2s+5}$

a $e^{-x}\left(\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$ b $e^{-x}\left(\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

c $e^{-x}(\cos 2x-\sin 2x)$ d $\left(\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

4.1.23 จงหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ $\dfrac{s}{s^2+8s+16}$

a $e^{-4x}(1-4x)$ b $e^{-4x}(1-4x)+2$

c $e^{-4x}(1-4x)-2$ d $e^{-4x}(1+x)$

4.1.24 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$y''-4y'+4y=0 \quad ; y(0)=y'(0)=1$

a $y=e^{2x}-xe^{2x}+2$ b $y=e^{2x}-xe^{2x}$-2x

c $y=e^{2x}-xe^{2x}$ d $y=e^{2x}-xe^{2x}+2x$

4.1.25 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$y''+3y'=0 \quad ; y(0)=-2, y'(0)=-3$

a $y=e^{-3x}+3$ b $y=e^{-3x}-3x$

c $y=-e^{-3x}-3$ d $y=e^{-3x}-3$

4.1.26 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$D^2y-Dy-2y=0 \quad ; y(0)=1, y'(0)=5$

a $y=2e^{-2x}+2e^{-x}$ b $y=2e^{-2x}-e^{-x}$

c $y=2e^{-2x}-e$ d $y=2e^{-2x}-e^{-x}+2x$

4.1.27 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$D^2y-4Dy+3y=6e^{4x} \quad y(0)=2, Dy(0)=6$

a $y(x)=e^{x}-e^{3x}+2e^{4x}$

b $y(x)=e^{x}-e^{3x}+2e^{4x}+2x$

c $y(x)=e^{x}+2e^{3x}+2e^{4x}$

d $y(x)=e^{x}-e^{3x}+2e^{4x}-2x$

4.1.28 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$D^2y-2Dy+y=6xe^{x} \quad ; y(0)=1, Dy(0)=0$

a $y(x)=e^{x}-xe^{x}-x^3e^{x}$

b $y(x)=e^{x}-xe^{x}+x^3e^{x}+x$

c $y(x) = e^x - xe^x + x^3e^x$

d $y(x) = e^x - xe^x + x^3e^x - 2x$

4.1.29 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$D^2y + 9y = 6\cos 3x \qquad ; y(0) = 0, Dy(0) = 3$

a $y = \sin 3x - x\sin 3x$

b $y = \sin 3x + x\sin 3x + x$

c $y = \sin 3x + \sin 3x$

d $y = \sin 3x + x\sin 3x$

4.1.30 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

$D^2y - 2Dy + 2y = 2e^x \sin x \qquad y(0) = y'(0) = 0$

a $y = e^x(\sin x - x\cos x)$

b $y = e^x(\sin x - x\cos x) + x$

c $y = e^x(\sin x + x\cos x)$

d $y = e^x(\sin x - x\cos x) - 2x$