สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต

E-LEARNING DISCRETE MATHEMATCS

T0 58786

สุพรชัย เมธาวิรุฬห์
อภิพงษ์ คันธารัตนกุล
อัจฉราพร วัตรวิมล

ส.พ.
ส 827ส
2547
เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 58786
วัน,เดือน,ปี 10 ก.พ. 2549

ปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
b 114893240
i.....

E-LEARNING DISCRETE MATHEMATCS

SUPORNCHAI MEATHAWIROON

APIPONG KANTARATTANAKUL

UTCHARAPORN WATTARAWIMOL

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2004

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต	
	E-LEARNING DISCRETE MATHEMATCS	
ชื่อนักศึกษา	สุพรชัย เมธาวิรุฬห์	44050055
	อภิพงษ์ คันธารัตนกุล	44050062
	อัจฉราพร วัตรวิมล	44050063
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
	อ.วรรณพร สรรประเสริฐ	

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการ	อ.เดชา สมนะ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.วรรณพร สรรประเสริฐ	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต	
ชื่อนักศึกษา	สุพรชัย เมธาวิรุฬห์	44050055
	อภิพงษ์ คันธารัตนกุล	44050062
	อัจฉราพร วัตรวิมล	44050063
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2547	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
	อ.วรรณพร สรรประเสริฐ	

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงงานปัญหาพิเศษนี้คือ กรสร้างเว็บไซต์สื่อการเรียนการสอนเพื่อช่วยในการศึกษาเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตให้กับผู้เรียน โครงสร้างของบทเรียนจะแบ่งออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนเนื้อหา, ส่วนแบบฝึกหัด และส่วนแบบทดสอบประจำเทอม ขั้นตอนการทำงานคือการพัฒนาหน้าจอการเรียนโดยใช้ Macromedia Flash MX 2004 เข้ามาเป็นสื่อการสอน ซึ่งโปรแกรม Macromedia Flash MX 2004 นี้สามารถช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้ดียิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	E-LEARNING DISCRETE MATHEMATICS	
Students	Mr.Supornchai Meathawiroon	44050055
	Mr.Apipong Kantarattanakul	44050062
	Miss Utcharaporn Wattarawimol	44050063
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	2004	
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Pakkine Chitsakul	
	Wanaporn Sanprasert	

ABSTRACT

The purpose of special project is to create e-learning for assisting students in discrete mathematics subject, Lesson structure is categorized into 3 parts : chapter lesson, exercises and test. This e-learning is developed by Macromedia Flash MX 2004, Which gives better understanding for students.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องคณิตศาสตร์สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล และอาจารย์วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้

นอกจากนี้ คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

กุมภาพันธ์ 48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... **I**

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... **II**

กิตติกรรมประกาศ ..... **III**

สารบัญ ..... **IV**

สารบัญรูป ..... **VIII**

บทที่ 1 บทนำ **1**

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ 1

1.3 ขอบเขตของการศึกษา 1

1.4 ขั้นตอนการศึกษา 2

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2

บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง **3**

2.1 สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอน 3

2.1.1 สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอน (E-Learning) คืออะไร 3

2.1.2 องค์ประกอบของ E-learning 6

2.1.2.1 เนื้อหา (content) 6

2.1.2.1.1 โฮมเพจ หรอเว็บเพจแรกของเว็บไซต์ 7

2.1.2.1.2 หน้าแสดงรายชื่อรายวิชา 7

2.1.2.1.3 เว็บเพจแรกของรายวิชา 8

2.1.2.1.4 เฮช ที เอ็ม แอล(HTML) 9

2.1.2.1.5 ดอทเน็ต (.NET) 9

2.1.2.1.6 ดอทเน็ตเฟรม (.NET Framework) 10

2.1.2.1.7 เวอร์ชัว แมชชีน (Virtual Machine) 10

2.1.2.1.8 แอ็คทีฟเซอร์เวอร์เพจดอทเน็ต (Active Server Page.NET:ASPNET) 10

2.1.2.1.9 ไมโครมิเดียแฟลช (Macromedia Flash) 10

2.1.3 ข้อได้เปรียบเสียเปรียบของ E-Leraning 11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้า

2.2 โครงสร้างไม่ต่อเนื่อง (Discrete Structure) 12
2.2.1 ความสัมพันธ์ (Relations).....13
2.2.1.1 คู่อันดับ (ordered pair).....13
2.2.1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียส (Cartasean product).....13
2.2.1.3 ความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relations).....14
2.2.2 Graphical Representation of Relations.....14
2.2.3 Properties of Relations.....19
2.2.4 Equivalence relations and Partitions.....22
2.2.5 Graptic Representive of order relations.....23
2.2.6 Closure opertions.....27
2.2.7 Composition.....28
2.2.8 Path in Relations and diagraph.....29
2.3 กราฟ (Graph) 32
2.3.1 Function.....39
2.3.2 Isomorphism of Graphs.....42
2.3.3 Bipartite graphs.....48
2.3.4 Walks และ Paths.....53
2.3.5 Planarity.....70
2.3.6 Hamiltonian circuit.....83
2.4 สีของกราฟ (Graph Coloring).....89
2.4.1 Chromatic Polynomail.....93
2.4.2 Edge-Colouring.....97
2.5 ต้นไม้ (Trees).....108
2.5.1 Spanning tree.....119
2.5.2 การสร้าง spanning tree.....121
2.5.3 (Minimal Spanning Tree) มินิมอล สแปนนิ่ง ทรี.....128
2.6 การท่องเที่ยวไปในต้นไม้(Traversal algorithm)แทรฟเวิลเซล อัลกอริทึม.....132
2.6.1 Application of Writing Arithmetic Expressions.....137
2.7 ปัญหาการหาวิธีหาวิถีสั้นสุด(Shortest Path Problems).....146
2.7.1 Dijkstar's algorithm.....147
2.8 การไหลในข่ายงาน (Network Flows).....157

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้า

2.8.1 Maximal flow and minimal cuts.....162
2.8.2 The max flow-min cut theorem.....168
2.9 เชิงวิธีจัดหมู่ (Combinative circle).....189
2.9.1 Boolean function.....190
2.9.2 Duality.....193
2.9.3 Representing Boolean Functions.....194
2.9.4 Form of Boolean function.....195
2.9.5 Logic Gate.....196
2.9.6 Combination of gate.....197
2.9.7 แผนที่คาร์นอฟ (Karnaugh map).....202
2.9.8 The Quine – McClusky method.....210
2.10 สถานะจำกัดของเครื่องจักร (Finite state machine : FSM).....218
2.10.1 การบวกเลขฐานสองของเครื่องจักร (Binary adder machine).....225
2.10.2 ชนิดของสถานะจำกัดของเครื่องจักร (Types of Finite stat machine).....238
2.10.3 Equivalent machine.....245
2.10.4 Turing machine.....261
2.11 ระบบเชิงพีชคณิต(Algebraic systems).....267
2.11.1Coding Theory.....274
2.11.2 Error – Detecting Codes.....274
2.11.3 Error – Correcting Codes.....275
2.11.4 Parity Check Code.....276
2.11.5 Group Codes.....277
2.11.6 Decoding.....280
2.11.7 Crypotology.....282

บทที่ 3 การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง.....289
3.1 การออกแบบระบบ.....289
3.1.1 ออกแบบระบบเป็น 6 ส่วนประกอบด้วย.....289
3.1.2 ศึกษาความรู้เกี่ยวกับโปรแกรม Macromedia Flash MX 2004 และการเขียน Home page ด้วยภาษา HTML.....289
3.2 ระบบงาน.....289

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้า

3.2.1 Home page หน้า Home page ประกอบด้วย.....289
3.2.2 Test page.....290
3.2.3 Webboard page.....291
3.2.4 Guest book page.....291
3.2.5 Download page.....291
3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ.....291

บทที่ 4 ผลการทดลอง.....292
4.1 หน้า Home page.....292
4.2 หน้า Learning page.....297
4.3 หน้า Test page.....322
4.4 หน้า Download page.....357

บทที่ 5 สรุปการจัดทำปัญหาพิเศษ.....367
5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ.....367
5.2 สรุปผล.....367
5.3 ข้อจำกัดของเว็บไซต์.....367

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

2.1....14
2.2....15
2.3....15
2.4....16
2.5....16
2.6....17
2.7....18
2.8....19
2.9....21
2.10....23
2.11....24
2.12....24
2.13....25
2.14....25
2.15....26
2.16....27
2.17....27
2.18....27
2.19....28
2.20....29
2.21....30
2.22....31
2.23....31
2.24....32
2.25....32
2.26....33
2.27....34
2.28....35
2.29....36

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.30....36
2.31....37
2.32....38
2.33....38
2.34....39
2.35....39
2.36....40
2.37....40
2.38....41
2.39....41
2.40....42
2.41....43
2.42....43
2.43....45
2.44....45
2.45....46
2.46....47
2.47....47
2.48....48
2.49....49
2.50....49
2.51....50
2.52....50
2.53....50
2.54....51
2.55....51
2.56....52
2.57....52
2.58....53
2.59....54
2.60....54

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.61....55
2.62....55
2.63....56
2.64....56
2.65....56
2.66....57
2.67....57
2.68....57
2.69....58
2.70....58
2.71....59
2.72....60
2.73....60
2.74....60
2.75....61
2.76....61
2.77....62
2.78....62
2.79....62
2.80....63
2.81....63
2.82....63
2.83....64
2.84....64
2.85....64
2.86....65
2.87....65
2.88....65
2.89....66
2.90....66
2.91....67

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.92.....67
2.93.....68
2.94.....68
2.95.....69
2.96.....69
2.97.....70
2.98.....70
2.99.....71
2.100.....71
2.101.....72
2.102.....72
2.103.....72
2.104.....72
2.105.....73
2.106.....73
2.107.....74
2.108.....74
2.109.....76
2.110.....77
2.111.....77
2.112.....78
2.113.....81
2.114.....81
2.115.....81
2.116.....82
2.117.....82
2.118.....83
2.119.....83
2.120.....84
2.121.....84
2.122.....85

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.123.....85
2.124.....86
2.125.....86
2.126.....86
2.127.....87
2.128.....87
2.129.....88
2.130.....88
2.131.....89
2.132.....90
2.133.....90
2.134.....90
2.135.....91
2.136.....91
2.137.....91
2.138.....93
2.139.....93
2.140.....94
2.141.....94
2.142.....96
2.143.....96
2.144.....97
2.145.....97
2.146.....98
2.147.....98
2.148.....108
2.149.....109
2.150.....109
2.151.....110
2.152.....110
2.153.....111

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.154.....112
2.155.....113
2.156.....113
2.157.....116
2.158.....117
2.159.....118
2.160.....118
2.161.....118
2.162.....119
2.163.....120
2.164.....120
2.165.....120
2.166.....121
2.167.....121
2.168.....121
2.169.....122
2.170.....122
2.171.....123
2.172.....123
2.173.....123
2.174.....124
2.175.....124
2.176.....125
2.177.....125
2.178.....126
2.179.....126
2.180.....126
2.181.....127
2.182.....127
2.183.....128
2.184.....128

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.185.....128
2.186.....129
2.187.....129
2.188.....129
2.189.....131
2.190.....132
2.191.....133
2.192.....134
2.193.....135
2.194.....136
2.195.....136
2.196.....138
2.197.....139
2.198.....140
2.199.....140
2.200.....140
2.201.....146
2.202.....146
2.203.....147
2.204.....147
2.205.....148
2.206.....148
2.207.....149
2.208.....149
2.209.....150
2.210.....152
2.211.....153
2.212.....155
2.213.....158
2.214.....158
2.215.....159

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.216....160
2.217....161
2.218....162
2.219....163
2.220....163
2.221....164
2.222....164
2.223....165
2.224....167
2.225....167
2.226....168
2.227....168
2.228....169
2.229....169
2.230....170
2.231....171
2.232....171
2.233....172
2.234....172
2.235....173
2.236....174
2.237....175
2.238....175
2.239....176
2.240....176
2.241....177
2.242....177
2.243....177
2.244....178
2.245....178
2.246....179

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.247.....179
2.248.....180
2.249.....180
2.250.....181
2.251.....181
2.252.....182
2.253.....182
2.254.....183
2.255.....183
2.256.....185
2.257.....185
2.258.....185
2.259.....186
2.260.....186
2.261.....187
2.262.....187
2.263.....187
2.264.....188
2.265.....188
2.266.....218
2.267.....219
2.268.....220
2.269.....221
2.270.....221
2.271.....222
2.272.....222
2.273.....223
2.274.....223
2.275.....224
2.276.....224
2.277.....224

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.278.....225
2.279.....226
2.280.....226
2.281.....227
2.282.....227
2.283.....228
2.284.....228
2.285.....229
2.286.....229
2.287.....230
2.288.....230
2.289.....231
2.290.....231
2.291.....232
2.292.....232
2.293.....232
2.294.....233
2.295.....233
2.296.....234
2.297.....234
2.298.....235
2.299.....235
2.300.....236
2.301.....236
2.302.....237
2.303.....238
2.304.....239
2.305.....239
2.306.....239
2.307.....239
2.308.....240

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.309.....240
2.310.....241
2.311.....241
2.312.....242
2.313.....242
2.314.....243
2.315.....243
2.316.....244
2.317.....244
2.318.....245
2.319.....245
2.320.....246
2.321.....246
2.322.....246
2.323.....247
2.324.....247
2.325.....248
2.326.....249
2.327.....250
2.328.....251
2.329.....251
2.330.....252
2.331.....252
2.332.....252
2.333.....253
2.334.....253
2.335.....253
2.336.....254
2.337.....254
2.338.....255
2.339.....255

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

2.340……258
2.341……258
2.342……259
2.343……260
2.344……261
2.345……261
2.346……262
2.347……262
2.348……264
2.349……275
4.1 แสดงหน้าจอแรกของหน้า web……292
4.2 แสดงหน้าจอรูป Learning……292
4.3 แสดงหน้าจอรูป Download……293
4.4 แสดงหน้าจอรูป Webboard……293
4.5 แสดงหน้าจอรูปGuest book……294
4.6 แสดงหน้าจอรูป About……294
4.7 แสดงหน้าจอ www.kmitl……295
4.8 แสดงหน้าจอ www.hotmail.com……295
4.9 แสดงหน้าจอ www.google.co.th……296
4.10 หน้าจอแสดง www.sanook.com……296
4.11 แสดงหน้าจอ www.pramool.com……297
4.12 แสดงหน้าจอ Learning page……297
4.13 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 1……298
4.14 แสดงหน้าจอ popup บทที่1 Relations……298
4.15 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่1……299
4.16 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)……299
4.17 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 2……300
4.18 แสดงหน้าจอ popup บทที่2 Graph……300
4.19 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่2……301
4.20 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)……301
4.21 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม play……302

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

4.22 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม play……..……..... .....……302
4.23 แสดงหน้าจอรูปที่เกิดจากการคลิกปุ่ม play……..... .....……..……303
4.24 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 3……304
4.25 แสดงหน้าจอ popup บทที่3 Graph coloring……..... .....……..……304
4.26แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่3……..... .... ……..…….. 305
4.27 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)…… ....……305
4.28 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 4..... 306
4.29 แสดงหน้าจอ popup บทที่4 Trees……..... .... ……306
4.30 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่4..... 307
4.31 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 307
4.32 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 5..... 308
4.33 แสดงหน้าจอ popup บทที่5 tree traversal..... 308
4.34 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่5..... 309
4.35 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 309
4.36 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป..... 310
4.37 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป..... 310
4.38 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป..... 311
4.39 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป..... ... .311
4.40 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 6..... 312
4.41 แสดงหน้าจอ popup บทที่6 tree traversal..... 312
4.42 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่6..... 313
4.43 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 313
4.44 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 7..... 314
4.45 แสดงหน้าจอ popup บทที่7 Network flows..... ... .314
4.46 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่7..... 315
4.47 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 315
4.48 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 8.... 316
4.49 แสดงหน้าจอ popup บทที่8 Combinative circle..... 316
4.50 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่8..... 317
4.51 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 317
4.52 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 9..... 318

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้า รูปที่

4.53 แสดงหน้าจอ popup บทที่9 Finite state machine..... 319
4.54 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่9..... 319
4.55 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 320
4.56 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 10..... 320
4.57 แสดงหน้าจอ popup บทที่10 Algebraic system..... 321
4.58 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่10..... 321
4.59 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back) 322
4.60 แสดงหน้าจอ Test page..... 322
4.61 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่1..... 323
4.62 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่1 Relations..... 323
4.63 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่1..... 324
4.64 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 324
4.65 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่1 เมื่อคลิกปุ่ม Answers... 325
4.66 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises.... 325
4.67 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่2..... 326
4.68 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่2 Graph..... 326
4.69 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่2... 327
4.70 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK. 327
4.71 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่2 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 328
4.72 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 328
4.73 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่3..... 339
4.74 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่3 Graph coloring... 339
4.75 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่3..... 330
4.76 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 330
4.77 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่3 เมื่อคลิกปุ่ม Answers. 331
4.78 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... ... .331
4.79 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่4..... 332
4.80 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่4 Tree..... 332
4.81 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่4..... 333
4.82 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 333
4.83 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่4 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 334

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

4.84 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises.... 334
4.85 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่5..... 335
4.86 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่5 Tree traversal..... 335
4.87 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่5... 336
4.88 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK.. 336
4.89 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่5 เมื่อคลิกปุ่ม Answers.. 337
4.90 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 337
4.91 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่6..... 338
4.92 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่6 Shortest path problems..... 338
4.93 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่6..... 339
4.94 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 339
4.95 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่6 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 340
4.96 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 340
4.97 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่7..... 341
4.98 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่7 Network flows..... 341
4.99 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่7..... 342
4.100 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 342
4.101 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่7 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 343
4.102 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 343
4.103 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่8..... 344
4.104 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่8 Combinative circle..... 344
4.105 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่8..... 345
4.106 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 345
4.107 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่8 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 346
4.108 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 346
4.109แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่9..... 347
4.110 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่9 Finite state machine.. 347
4.111 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่9..... 348
4.112 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 348
4.113 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่9 เมื่อคลิกปุ่ม Answers... 349
4.114 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 349

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ **หน้า**

4.115 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่10..... 350
4.116 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่10 Algebraic system..... 350
4.117 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่10..... 351
4.118 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 351
4.119 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่10 เมื่อคลิกปุ่ม Answers..... 352
4.120 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises..... 352
4.121 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าข้อสอบ Midterm..... 353
4.122 แสดงหน้าจอ popup ข้อสอบ Midterm..... 353
4.123 แสดงหน้าจอของข้อสอบ Midterm..... 354
4.124 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 354
4.125 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าข้อสอบ Final.. 355
4.126 แสดงหน้าจอ popup ข้อสอบ Final..... 355
4.127 แสดงหน้าจอของข้อสอบ Final..... 356
4.128 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK..... 357
4.129 แสดงหน้าจอ Download page..... 358
4.130 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่1..... 359
4.131 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่2..... 360
4.132 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่3..... 359
4.133 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่4..... 360
4.138 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่5..... 361
4.139 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่6. 362
4.140 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่7..... 363
4.138 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่8..... 364
4.139 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่9. 365
4.140 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่10..... 366

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์ดิสครีต เป็นเรื่องหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์สาขาหนึ่ง ซึ่งมุ่งศึกษาสิ่งที่เป็นหน่วยเต็ม คือ มีลักษณะทางกายภาพเป็นชิ้น ในทางวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณิตศาสตร์ดิสครีต เป็นรากฐานทางการศึกษาโครงสร้างข้อมูลและอัลกอริทึม การศึกษาจะเสริมสร้างความสามารถทาง การคิด ความเข้าใจ และยังสามารถนำความสามารถเหล่านี้ ไปใช้เป็นรากฐานของคณิตศาสตร์ชั้นสูงได้อีกด้วย เนื่องจากเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดิสครีต เป็นเรื่องที่แพร่หลายมานานแล้ว แต่ทำความเข้าใจได้ยาก และเนื้อหาส่วนใหญ่ต้องใช้ รูปภาพและภาพเคลื่อนไหว ในการอธิบาย เพื่อที่จะสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น ดังนั้นจึงนำคอมพิวเตอร์มาช่วยสร้างโปรแกรมช่วยสอนและ เพื่อเป็นการสะดวกกับผู้ที่สนใจศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านนี้ จึงได้นำเสนอโปรแกรมช่วยสอนนี้ผ่านทางสื่ออินเทอร์เน็ต แทนการเข้าไปศึกษาในห้องเรียน และเสริมเพิ่มเติมให้เข้าใจในบทเรียนดียิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับดิสครีตแก่นักศึกษา และผู้ที่สนใจมากยิ่งขึ้น

1.2.2 สามารถนำสื่อการสอนนี้ไปในใช้ได้อย่างกว้างขวางบนสื่ออินเตอร์เน็ต

1.2.3 สามารถใช้งานได้ง่าย และสร้างความสนใจแก่ผู้ใช้งาน

1.2.4 เพื่อศึกษาเครื่องมือที่ใช้ในการพัฒนาบทเรียน ซึ่งสามารถใช้ในการสร้างและพัฒนาบทเรียนเรื่องอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นโปรแกรมช่วยสอนคณิตศาสตร์ดิสครีต โดยจะครอบคลุมเนื้อหาในส่วนของคณิตศาสตร์ดิสครีตทั้งหมด

1.3.1 จัดทำสื่อการเรียนการสอนเรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.3.2 ศึกษาเนื้อหาและรายละเอียดของคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.3.3 จัดทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดิสครีต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ขั้นตอนการศึกษา

1.4.1 ค้นคว้า รวบรวมและศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.4.2 ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการเขียนโปรแกรม

1.4.3 ศึกษาภาษาที่นำไปเขียนบนอินเตอร์เน็ต

1.4.4 สร้างโปรแกรมช่วยสอนเรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.4.5 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

1.4.6 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

1.4.7 จัดทำเอกสารประกอบการทำโปรแกรมช่วยสอนเรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเนื้อหาเรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.5.2 ช่วยฝึกฝนความชำนาญในการแก้ปัญหาเรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต

1.5.3 โปรแกรมช่วยสอนสะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอน

2.1.1 สื่ออิเล็กทรอนิกส์เพื่อการเรียนการสอน (E-Learning) คืออะไร

ได้รวบรวมความหมายของ E-Learning ที่มีผู้ให้คำนิยามไว้อย่างหลากหลายดังต่อไปนี้

โครงการการเรียนรู้แบบออนไลน์แห่ง สวทช. ได้ให้คำนิยามไว้ว่า E-Learning หมายถึงการศึกษาเรียนรู้ผ่านเครือข่ายคอมพิวเตอร์อินเทอร์เน็ต หรืออินทราเน็ต เป็นการเรียนรู้ด้วยตัวเอง ผู้เรียนจะได้เรียนตามความสามารถและความสนใจของตน โดยเนื้อหาของบทเรียนซึ่งประกอบด้วย ข้อความ รูปภาพ เสียง วิดีโอและมัลติมีเดียอื่นๆ จะถูกส่งไปยังผู้เรียนผ่าน Web Browser โดยผู้เรียน ผู้สอน และเพื่อนร่วมชั้นเรียนทุกคน สามารถติดต่อ ปรึกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันได้เช่นเดียวกับการเรียนในชั้นเรียนปกติ โดยอาศัยเครื่องมือการติดต่อสื่อสารที่ทันสมัย (e-mail, web-board, chat) จึงเป็นการเรียนสำหรับทุกคน เรียนได้ทุกเวลา และทุกสถานที่ (Learning for all : anyone, anywhere and anytime)

ผศ. ดร. ถนอมพร เลาหจรัสแสง กล่าวถึงความหมายของ E-Learning ไว้ในหนังสือ Designing E-leaning คือหลักการออกแบบและการสร้างเว็บเพื่อการเรียนการสอน ว่าความหมายของ E-Learning สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะด้วยกัน ได้แก่ ความหมายโดยทั่วไปและความหมายเฉพาะเจาะจง

ความหมายโดยทั่วไปจะครอบคลุมความหมายที่กว้าง กล่าวคือ จะหมายถึง การเรียนในลักษณะใดก็ได้ ซึ่งใช้การถ่ายทอดเนื้อหาผ่านทางอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ไม่ว่าจะเป็นคอมพิวเตอร์ เครือข่ายอินเทอร์เน็ต อินทราเน็ต เอ็กซ์ทราเน็ต หรือทางสัญญาณโทรทัศน์ หรือสัญญาณดาวเทียม (satellite) ก็ได้ ซึ่งเนื้อหาสารสนเทศอาจอยู่ในรูปแบบการเรียนที่เราคุ้นเคยกันมาพอสมควร เช่น คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (Computer-Assisted Instruction) การสอนบนเว็บ (Web-Based Instruction) การเรียนออนไลน์ (On-line Learning) การเรียนทางไกลผ่านดาวเทียม หรืออาจอยู่ในลักษณะที่ยังไม่ค่อยเป็นที่แพร่หลายนัก เช่น การเรียนจากวีดิทัศน์ตามอัธยาศัย (Video On Demand) เป็นต้น

ในความหมายเฉพาะเจาะจงนั้น E-Learning หมายถึง การเรียนเนื้อหาหรือสารสนเทศสำหรับการสอนหรือการอบรม ซึ่งใช้การนำเสนอด้วยตัวอักษรภาพนิ่ง ผสมผสานกับการใช้ภาพเคลื่อนไหว วิดีทัศน์และเสียงโดยอาศัยเทคโนโลยีของเว็บ (web technology) ในการถ่ายทอดเนื้อหา รวมทั้งการใช้เทคโนโลยีระบบการจัดการคอร์ส (Course Management System) ในการบริหารจัดการงานสอนด้านต่าง ๆ เช่น การจัดให้มีเครื่องมือการสื่อสารต่าง ๆ เช่น E-mail, web board สำหรับตั้งคำถาม หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างผู้เรียนด้วยกัน หรือวิทยากร การจัดให้มีแบบทดสอบหลังจากเรียนจบเพื่อวัดผลการเรียน รวมทั้งการจัดให้มีระบบบันทึกติดตาม ตรวจสอบ และประเมินผลการเรียน โดยผู้เรียนที่เรียนจาก E-Learning นี้ ส่วนใหญ่แล้วจะศึกษาเนื้อหาในลักษณะออนไลน์ ซึ่งหมายถึงจากเครื่องมือที่มีการเชื่อมต่อกับระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์

ศ. ดร. เกรียงศักดิ์ เจริญวงศักดิ์ ได้ให้ความหมายว่า E-Learning หมายถึงการเรียนรู้บนฐานเทคโนโลยี ซึ่งครอบคลุมวิธีการเรียนรู้จากหลายรูปแบบ อาทิ การเรียนรู้บนคอมพิวเตอร์ (Computer-Based Learning) การเรียนรู้บนเว็บ (Web-Based Learning) ห้องเรียนเสมือนจริง (Virtual Classrooms) และความร่วมมือกันผ่านระบบดิจิตัล (Digital Collaboration) เป็นต้น ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ผ่านสื่ออิเล็กทรอนิกส์ทุกประเภท อาทิ อินเทอร์เน็ต (Internet) อินทราเน็ต (Intranet) เอ็กซ์ทราเน็ต (Extranet) การถ่ายทอดผ่านดาวเทียม (satellite boardcast) ผ่านแถบบันทึกเสียงและวิดีทัศน์ (audio / video tape) โทรทัศน์ที่สามารถโต้ตอบกันได้ (Interactive TV) และซีดีรอม (CD-ROM)

สยาม ลิขิตเลิศ ได้ให้ความหมายของการเรียนรูปแบบออนไลน์ หรือ E-Learning ว่าเป็นการศึกษาและเรียนรู้ผ่านระบบเครื่องมือที่เป็นสื่ออิเล็กทรอนิกส์ ไม่ว่าจะเป็นซีดีรอ เว็บ ระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ อินเทอร์เน็ต หรือ อินทราเน็ต เป็นการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตัวเอง ผู้เรียนจะได้เรียนตามความสามารถและความสนใจของตน โดยเนื้อหาบทเรียนซึ่งประกอบด้วยข้อความ รูปภาพ เสียง วีดิทัศน์และมัลติมีเดียอื่น ๆ จะถูกส่งไปยังผู้เรียนผ่านระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์ โดยที่ผู้เรียน ผู้สอน และเพื่อนร่วมชั้นเรียนทุกคนสามารถติดต่อ ปรึกษา แลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันได้เช่นเดียวกับการเรียนในชั้นเรียนปกติ โดยอาศัยเครื่องมือการติดต่อสื่อสารที่ทันสมัย เช่น (chat, e-mail, web board) จึงเป็นการเรียนสำหรับทุกคนเรียนได้ทุกเวลา และทุกสถานที่

รศ. ยืน ภูวรวรรณ ได้ให้คำนิยามสั้น ๆ ว่า E-Learning คือการเรียนผ่านเทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์ที่ให้ต้นทุนถูก เรียนรู้ได้เร็วได้มาก สามารถกระจายได้อย่างทั่วถึง และที่สำคัญคือ ทำให้มีการพัฒนารูปแบบของการศึกษา การเรียนการสอนในรูปแบบใหม่ ๆ ออกมามากมาย

รศ. ดร. สฤษดิ์พงษ์ ลิมปิษเฐียร ได้ให้ความหมายของคำว่า E-Learning ว่า E ย่อมาจาก electronic ส่วน L ย่อมาจาก learning ก็คือการเรียนรู้ ดังนั้น E-Learning จึงเป็นระบบการเรียนรู้หรือระบบการเรียนการสอนที่อาศัยสื่อ electronic เข้ามาช่วยเพื่อที่จะให้เกิดการเรียนรู้ ปัจจุบันเราต้องการที่จะให้มีการเรียนรู้เกิดขึ้นกว้างขวาง รวดเร็ว ประหยัด ซึ่งตรงนี้สื่อ electronic หรือปัจจุบันเรียกว่า ICT (Information and Communication Technology) จะสามารถให้การจัดการเรียนการสอนมีต้นทุนต่ำลง ทำได้กว้างขวางขึ้น ICT เป็นเทคโนโลยีที่สามารถที่จะบูรณาการสื่ออิเล็กทรอนิกส์อื่น ๆ ที่เราเคยใช้เข้ามาสู่ระบบเพียงระบบเดียว ด้วยความสามารถของ ICT รวมทุกสิ่งทุกอย่างมาไว้ในคอมพิวเตอร์เครื่อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เดียว โดยอาศัยสื่ออินเทอร์เน็ต ดังนั้น จึงต้องการเน้นไปที่การบูรณาการมากกว่าคือ ระบบการเรียนการสอนที่อาศัยสื่ออิเล็กทรอนิกส์เข้ามาช่วยเข้าสู่ระบบเพียงระบบเดียว

ผศ. ดร. ปัทมาพร เย็นบำรุง ให้ความหมายของ E-Learning ว่าหมายถึง ระบบการเรียนการสอนแบบใหม่ ที่เราได้ใช้เทคโนโลยีสารสนเทศและระบบโทรคมนาคม คือ ICT มาช่วยในการบูรณาการเนื้อหาความรู้ซึ่งอยู่ในสื่ออื่น ๆ ที่เป็น electronic หรือในรูปของหนังสือ ทั้งหมดนี้นำมาอยู่ในรูปเดียวกัน ให้สอนผ่านคอมพิวเตอร์ โดยที่ให้การเรียนรู้นี้ใช้ต้นทุนที่ต่ำ ไปได้อย่างรวดเร็วทั่วถึงให้ได้ผลดีมีประสิทธิภาพ

มนต์ชัย สันติเวส ได้ให้ความหมายของ E-Learning ว่าเป็นการเรียนการสอนคล้ายรูปแบบเดิม ๆ เพียงแต่นำคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้ระบบเครือข่ายทั้งหลาย รวมไปถึงอุปกรณ์เทคโนโลยีทั้งหลายมาช่วยเพิ่มความสะดวกสบายในการเรียน การวัดผล และการจัดการกับการศึกษาทั้งหมดที่ไม่ใช้วิธีแบบเดิมอีกต่อไป คำว่า E-Learning ย่อมาจากคำว่า electronics(s) learning คือ การเรียนรู้ทางอิเล็กทรอนิกส์ หรือหมายถึง computer learning คือ การเรียนรู้ทางคอมพิวเตอร์หรือจะเรียกว่าเป็นการเรียนรู้แบบใหม่โดยใช้คอมพิวเตอร์ก็ว่าได้ ลักษณะของ E-Learning เป็นการเรียนบนระบบออนไลน์ คือ ข้อมูลทางคอมพิวเตอร์หรือข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ต้องอยู่ในสภาพที่พร้อมที่จะใช้งานอยู่ตลอดเวลา ทำให้การเรียนการสอนแบบ E-Learning เป็นการเรียนที่สามารถโต้ตอบกันได้เหมือนการเรียนแบบเดิม ๆ แต่ยังสามารถใช้เทคโนโลยีที่เป็นลักษณะมัลติมีเดียซึ่งได้แก่ รูปภาพ เสียง ภาพเคลื่อนไหวมาใช้นำเสนอทำให้การเรียนการสอนมีความน่าสนใจกว่าตัวหนังสือล้วน ๆ บนกระดาษ คุณสมบัติอีกอย่างหนึ่งของการเรียนแบบ E-Learning คือ ผู้เรียนและผู้สอนไม่ต้องมาพบกัน และไม่ต้องเดินทางให้เสียเวลา เพียงแต่ครูและนักเรียนมีเครื่องคอมพิวเตอร์ก็สามารถเชื่อมต่อเข้าไปในโลกของอินเทอร์เน็ตและทำการเรียนการสอนกันได้ ดังนั้น การเรียนแบบ E-Learning ก็จะเป็นการศึกษาแบบไร้ขอบเขตสามารถที่จะทำกิจกรรมบนห้องเรียนแบบออนไลน์ได้ และจะเป็นที่นิยมเพราะว่าไม่มีข้อจำกัดเรื่องเวลา ระยะทาง สถานที่ นอกจากนั้นยังสามารถตอบสนองต่อศักยภาพและความสามารถของผู้เรียนได้ดีอีกด้วย

ดร. ชุณหพงศ์ ไทยอุปถัมภ์ ได้ให้ความหมายของคำว่า E-Learning หรือ Electronic Learning ในปัจจุบันค่อนข้างแตกต่างกันออกไปตามแหล่งที่มาและการนำไปใช้ แต่กล่าวโดยทั่วๆไปแล้ว E-Learning หมายถึง รูปแบบการเรียนการสอนรูปแบบใหม่ ที่มีการประยุกต์ใช้เทคโนโลยีสื่ออิเล็กทรอนิกส์สมัยใหม่ มีวัตถุประสงค์ที่เอื้ออำนวยให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้องค์ความรู้ (Knowledge) ได้โดยไม่จำกัดเวลาและสถานที่ (Anywhere – Anytime Learning) เพื่อให้ระบบการเรียนการสอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น และเพื่อให้ผู้เรียนสามารถบรรลุวัตถุประสงค์ของกระบวนวิชาที่เรียนนั้น ๆ

การนำระบบ E-Learning มาใช้ให้เกิดประสิทธิภาพในกระบวนการสอนสูงสุดนั้น ผู้สอนจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องเข้าใจว่า รูปแบบการเรียนการสอน E-Learning นี้แตกต่างจากระบบการเรียนการสอนในรูปแบบปกติที่เรียกกันว่า face-to-face หรือ traditional classroom learning อย่างไร และจำเป็นที่ต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ไม่ว่าจะเป็นด้านการปรับปรุงเรื่องเนื้อหา เทคโนโลยี เทคนิคการนำเสนอและการวิจัยเพื่อพัฒนาคุณภาพ การนำระบบ E-Learning เข้ามาใช้ และต้องระลึกไว้อยู่เสมอว่า คุณภาพการเรียนรู้ของระบบ E-Learning ต้องไม่ด้อยไปกว่าคุณภาพการเรียนรู้ในรูปแบบปกติ

ศักดา ไชยกิจภิญโญ ได้ให้ความหมายของ E-Learning ว่า เป็นการเรียนรู้แบบใหม่ที่ใช้อินเทอร์เน็ตเป็นสื่อระหว่างผู้เรียนและผู้สอน ซึ่งสื่อการเรียนการสอนรูปแบบต่าง ๆ ที่ใช้ใน E-Learning ประกอบด้วย E-Book, Virtual Lab, Virtual Classroom โดยใช้กระดานข่าว (web board) กระดานคุย (chat) หรือจดหมายอิเล็กทรอนิกส์ (E-mail) เพื่อติดต่อสื่อสารผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ใช้ Web Based Instruction และ E-library เป็นต้น

สรุปได้ว่า ความหมายของ E-Learning นั้น ถูกตีความไปอย่างกว้างขวาง โดยไม่ได้จำกัดถึงการเรียนผ่านดาวเทียมหรืออินเทอร์เน็ตเพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่หมายถึงการเรียนการสอนที่ใช้สื่ออิเล็กทรอนิกส์ ไม่ว่าจะเป็นซีดีรอม ฮาร์ดดิสก์ ฟลอปปี้ดิสก์ เน็ตเวิร์ก อินทราเน็ต อินเทอร์เน็ตหรือแม้แต่วิทยุโทรทัศน์ตามบ้านก็ตาม Technology Summary ฉบับนี้ ขอสรุปความหมายของ -E-Learning จากผลการวิจัยเรื่อง “พัฒนาการและทิศทางของ E-Learning ในประเทศไทย” ว่า

E-Learning คือกระบวนการเรียนการสอนผ่านเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร (ICT) และสื่ออิเล็กทรอนิกส์อื่นๆ ซึ่งมีวัตถุประสงค์ในการลดข้อจำกัดด้านเวลาและสถานที่ระหว่างผู้เรียนและผู้สอน ช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนได้ตามความต้องการและความจำเป็นของตนได้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต

2.1.2 องค์ประกอบของ E-Learning

องค์ประกอบของ E-Learning ในการออกแบบพัฒนา E-Learning ประกอบไปด้วย 4 องค์ประกอบหลัก ได้แก่

2.1.2.1 เนื้อหา (Content)

เนื้อหาเป็นองค์ประกอบสำคัญที่สุดสำหรับ E-Learning คุณภาพของการเรียนการสอนของ E-Learning แล ะการที่ผู้เรียนจะบรรลุวัตถุประสงค์การเรียนในลักษณะนี้หรือไม่อย่างไร สิ่งสำคัญที่สุดก็คือ เนื้อหาการเรียนซึ่งผู้สอนได้จัดหาให้แก่ผู้เรียนซึ่งผู้เรียนมีหน้าที่ในการใช้เวลาส่วนใหญ่ศึกษา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื้อหาด้วยตนเอง เพื่อทำการปรับเปลี่ยน (Convert) เนื้อหาสารสนเทศที่ผู้สอนเตรียมไว้ให้เกิดเป็นความรู้ โดยผ่านการคิดค้นวิเคราะห์อย่างมีหลักการและเหตุผลด้วยตัวของผู้เรียนเอง ซึ่งองค์ประกอบของเนื้อหาที่สำคัญ ได้แก่

2.1.2.1.1 โฮมเพจ หรือเว็บเพจแรกของเว็บไซต์

องค์ประกอบแรกของเนื้อหา ซึ่งการออกแบบโฮมเพจให้สวยงามและตามหลักการการออกแบบเว็บเพจเพราะการออกแบบเว็บเพจที่ดีเป็นปัจจัยหนึ่งที่จะส่งผลให้ผู้เรียนมีความสนใจที่จะกลับมาเรียนมากขึ้น นอกจากความสวยงามแล้ว ในโฮมเพจยังคงต้องประกอบไปด้วยองค์ประกอบที่จำเป็นดังนี้

คำประกาศ/คำแนะนำการเรียนทางอ E-Learning โดยรวม ในที่นี้ อาจยังไม่ใช่คำประกาศหรือคำแนะนำการเรียนที่เฉพาะเจาะจง สำหรับวิชาใด ๆ เพราะผู้สอนจะสามารถไปกำหนดประกาศหรือคำแนะนำที่สำคัญต่าง ๆ ด้วยตนเองไว้ในส่วนของรายวิชาที่ตนรับผิดชอบ ซึ่งผู้เรียนจะได้อ่านข้อความหลังจากที่ผู้เรียนเข้าใช้ระบบและเลือกที่จะไปยังรายวิชานั้น ๆ แล้ว นอกจากนี้ในส่วนนี้ยังอาจเพิ่มข้อความทักทายต้อนรับผู้เรียนเข้าสู่การเรียนทาง E-Learning ได้

ระบบสำหรับใส่ชื่อผู้เรียนและรหัสลับสำหรับเข้าใช้ระบบ (Login) กล่องสำหรับการใส่ชื่อผู้เรียนและรหัสลับนี้ควรวางไว้ในส่วนบนของหน้าที่เห็นได้ชัดเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใช้ระบบของผู้เรียน

รายละเอียดเกี่ยวกับโปรแกรมที่จำเป็นสำหรับการเรียกดูเนื้อหาอย่างสมบูรณ์ ซึ่งควรแจ้งให้ผู้เรียนทราบล่วงหน้าเกี่ยวกับโปรแกรมต่าง ๆ พร้อมทั้งสิ่งจำเป็นอื่น ๆ เช่น การปรับคุณสมบัติหน้าจอ เป็นต้นที่ผู้ใช้ต้องทำในการเรียกดูเนื้อหาต่าง ๆ ได้

ชื่อหน่วยงาน และวิธีการติดต่อกับหน่วยงานที่รับผิดชอบ ควรมีการแสดงชื่อผู้รับผิดชอบ รวมทั้งวิธีการในการติดต่อกลับมายังผู้รับผิดชอบ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เข้ามาเรียนหรือเยี่ยมชมสามารถที่จะส่งข้อความ คำติชม รวมทั้งป้อนกลับต่าง ๆ ที่อาจมีส่งมายังหน่วยงานที่รับผิดชอบได้

ควรมีการแสดงวันที่และเวลาที่ทำการปรับปรุงแก้ไขเว็บไซต์ครั้งล่าสุด เพื่อประโยชน์สำหรับผู้เรียนในการอ้างอิง

เคาน์เตอร์เพื่อนับจำนวนผู้เรียนที่เข้ามาเรียน ส่วนนี้ผู้สร้างสามารถที่จะเลือกใส่ไว้หรือไม่ก็ได้ แต่ข้อดีของการมีเคาน์เตอร์นอกจากจะช่วยผู้ออกแบบในการนับจำนวนผู้เข้ามาในเว็บไซต์แล้ว ยังอาจช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนรู้สึกอยากที่จะกลับเข้ามาเรียนอีกหากมีผู้เรียนเข้ามาร่วมเรียนการมาก ๆ

2.1.2.1.2 หน้าแสดงรายชื่อรายวิชา

หลังจากที่ผู้เรียนได้มีการเข้าสู่ระบบแล้ว ระบบจะแสดงชื่อรายวิชาทั้งหมดที่ผู้เรียนมีสิทธิ์เข้าเรียนในลักษณะ E-Learning

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2.1.3 เว็บเพจแรกของรายวิชา ซึ่งมีส่วนประกอบสำคัญดังนี้

คำประกาศ / คำแนะนำการเรียนทาง E-Learning เฉพาะรายวิชา หมายถึง คำประกาศหรือคำแนะนำการเรียนที่เฉพาะเจาะจงสำหรับวิชาใดวิชาหนึ่ง นอกจากนี้ยังควรใส่ข้อความทักทายต้อนรับผู้เรียนเข้าสู่การเรียนในรายวิชาด้วย

รายชื่อผู้สอน ควรมีรายชื่อผู้สอนและรายละเอียดรวมทั้งวิธีการติดต่อผู้สอน เช่น E-mail address ของผู้สอนโฮมเพจส่วนตัวของผู้เรียน

ประมวลรายวิชา (Syllabus) หมายถึงส่วนที่แสดงภาพรวมของคอร์ส แสดงสังเขปรายวิชามีคำอธิบายสั้น ๆ เกี่ยวกับหน่วยการเรียน วิธีการเรียน วัตถุประสงค์ และเป้าหมายของวิชา สิ่งที่คาดหวังจากผู้เรียนในการเรียนกำหนดการส่งงานที่ได้รับมอบหมาย วิธีหรือเกณฑ์การประเมิน การกำหนดกิจกรรมหรืองานให้ผู้เรียนทำไม่ว่าจะเป็นในลักษณะรายบุคคลหรือกลุ่มย่อย รวมทั้งการกำหนดวันและเวลาการส่งงาน

ห้องเรียน (Class) ได้แก่ บทเรียนหรือ คอร์สแวร์ ซึ่งผู้สอนได้จัดหาไว้สำหรับผู้เรียนนั่นเอง สามารถแบ่งออกได้ตามลักษณะของสื่อที่ใช้นำเสนอเนื้อหา ได้แก่ เนื้อหาในลักษณะตัวอักษร (Text-based) เนื้อหาในลักษณะตัวอักษรภาพ วีดิทัศน์ หรือสื่อประสมอื่น ๆ ที่ผลิตขึ้นมาอย่างง่าย ๆ (Low cost Interactive) และในลักษณะคุณภาพสูง (High quality) ซึ่งเนื้อหาจะมีลักษณะเป็นมัลติมีเดียที่ได้รับการออกแบบและผลิตอย่างมีระบบ

เว็บเพจสนับสนุนการเรียน (Resources) การจัดเตรียมแหล่งความรู้อื่น ๆ บนเว็บที่เหมาะสมในแต่ละหัวข้อสำหรับผู้เรียนในการเข้าไปศึกษา รวมทั้งข้อมูลทางวิชาการอื่น ๆ ที่เหมาะสม เช่น วารสารวิชาการ หนังสือพิมพ์ รายการวิทยุ โทรทัศน์ เป็นต้น นอกจากนี้ยังอาจมีการเชื่อมโยงไปยังห้องสมุด หรือ ฐานข้อมูลงานวิจัยต่าง ๆ

ความช่วยเหลือ (Help) การเตรียมการเพื่อสนับสนุน ส่งเสริมและให้ความช่วยเหลือทางด้านเทคนิคแก่ผู้เรียน เช่น การจัดหาเครื่องมือสืบค้น (Search) เพื่อการค้นหาข้อมูลที่ต้องการ หรือจัดกาแผนที่ไซต์ (Site map)แก่ผู้เรียนเพื่อการเข้าถึงข้อมูลโดยสะดวก

รายวิชาอื่น ๆ (Other Course) ในกรณีที่ผู้เรียนมีการลงทะเบียนเรียนในวิชาที่ผู้สอนจัดเตรียมเนื้อหาในลักษณะ E-Learning ไว้มากกว่า 1 รายวิชา ควรจัดหาลิงค์เพื่อกลับไปยังเมนูที่ผู้ใช้สามารถเลือกไปเรียนยังห้องเรียนอื่น ๆ ได้ทันทีโดยไม่จำเป็นต้องออกจากระบบ (Logout) ก่อน

เว็บเพจคำถามคำตอบที่พบบ่อย (FAQs) หลังจากที่มีการใช้งานจริงได้สักระยะหนึ่งแล้ว ควรที่จะเก็บรวบรวมคำถามหรือปัญหาที่ผู้ใช้ระบบ ไม่ว่าจะเป็นผู้เรียน ผู้สอน ผู้ช่วยสอนก็ตามพบในขณะที่เรียน (คำถามเกี่ยวกับเนื้อหาการเรียน) หรือในขณะที่ใช้งาน (คำถามเกี่ยวกับเทคนิค) และนำมารวบรวม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อนำเสนอในลักษณะของ FAQs ทั้งนี้เพื่อประหยัดเวลาในการตอบคำถามซ้ำ ๆ รวมทั้งสนับสนุนให้ผู้ใช้สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

ลิงค์ไปยังส่วนของการจัดการการสอนด้านอื่น ๆ (Management) ในส่วนนี้ยังควรมีการเชื่อมโยงไปยังหน้าของแบบทดสอบ แบบสอบถาม ผลการทดสอบรวมทั้งสถิติต่าง ๆ ที่อนุญาตให้ผู้ใช้เข้าดูได้ ซึ่งในส่วนของการสอบถาม การประเมินผลและการคำนวณสถิติต่าง ๆ เป็นส่วนหนึ่งของระบบบริหารจัดการรายวิชา (CMS)

การออกจากระบบ (Logout) ควรจะจัดหาปุ่มสำหรับผู้เรียนในการเลือกเพื่อออกจากระบบ ทั้งนี้เพื่อความปลอดภัย (Security) ของผู้เรียน และป้องกันผู้ที่ไม่มีสิทธิเข้าใช้แอบเข้ามาใช้ระบบด้วย

2.1.2.1.4 เฮช ที เอ็ม แอล (HTML)

HTML ย่อมาจาก Hyper Text Markup Language เป็นภาษามาตรฐานสำหรับติดต่อกันบนอินเทอร์เน็ต โดยใช้โพรโตคอล HTTP ภาษา HTML นั้นเป็นส่วนที่ตัดมาจากภาษา GHTML ซึ่ง GHTML นั้นจะมีโค้ดและวิธีเขียนซับซ้อนมากกว่า แต่ก็ยังมีเป้าหมายเดิมคือให้เครื่องที่ใช้โปรแกรมระบบทุกตัวสามารถใช้งาน ดู ศึกษา ร่วมกันใช้ ข้อมูล ต่างๆ ได้ อย่างไม่มีปัญหา และเพื่อให้เข้าสู่ยุคโลกไร้พรมแดนโค้ด HTML เป็นโค้ดที่ไม่ต้องผ่านการคอมไพล์ให้เป็นไฟล์ประเภท Binary (ไฟล์ที่เครื่องสามารถแปลความ ได้ทันที) โค้ดจึงอยู่ในรูปแบบของText file หรือบางครั้งเรียกว่า ASCII file หรือ ไฟล์ข้อความธรรมดานั้นเอง ซึ่งสามารถเขียนหรือแก้ไข ด้วยโปรแกรม Text Editor เช่น ๆ โปรแกรม Edit บนดอส โปรแกรม Notepad บนวินโดว์ ห รืออื่นๆที่สามารถสร้าง Text file ได้ ในปัจจุบันมีโปรแกรมเฉพาะสำหรับช่วยในการเขียนไฟล์ HTML มากมาย ทั้งที่แบบใส่ผลที่ต้องการนำเสนอ แล้วโปรแกรมจะช่วยเขียนเป็นไฟล์ HTML ให้เองโดยที่ผู้เขียนไม่จำเป็นต้องรู้โค้ด HTML มากนัก เช่น Netscape Composer หรือแบบText editor มักมี tag สำเร็จรูปไว้พร้อมเช่น Coffee Cup HTML Editor หรือแบบที่มีทั้งสองอย่าง ที่กล่าวมาเช่น FrontPage , Homesite , Dreamweaver

สำหรับการแสดงผลนั้น ต้องใช้โปรแกรมที่สามารถนำโค้ดที่เราเขียนไปแปลงเป็นรูปแบบ ที่ต้องการนำเสนอต่อไป เรียกโปรแกรมพวกนี้ว่า บราวเซอร์ (Browser) และเมื่อใช้แสดงผลไฟล์ HTML บนเว็บไซต์จึงเรียกว่า เว็บบราวเซอร์ (Web Browser)

ส่วนการนำเสนอผ่านอินเทอร์เน็ตนั้นต้องนำไฟล์โค้ดเหล่านี้ไปฝากไว้กับเว็บไซต์ (web site)ที่ให้บริการซึ่งมีทั้งฟรีและจ่ายเงินเฉพาะหน้าแรกเรียกว่า โฮมเพจ(HomePage) หน้าอื่นๆเรียกว่า เว็บเพจ (web Page) แต่ที่นำมาเรียกกันจริงๆคือ HomePage หมายถึง หน้าแรกรวมถึงหน้าอื่นๆเช่นกัน

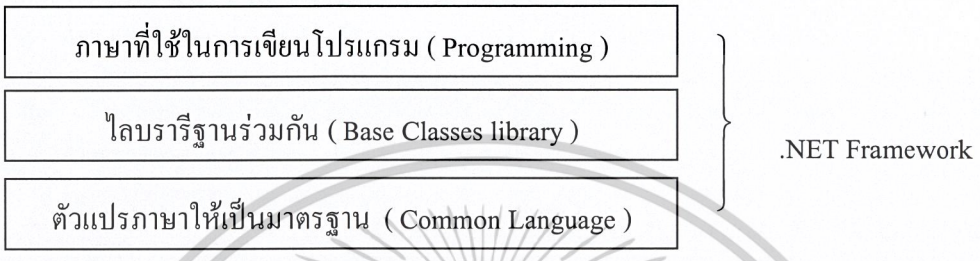
2.1.2.1.5 ดอทเน็ต (.NET)

เป็นแนวคิดของการนำเอาอุปกรณ์ทุกอย่างบนโลกมาเชื่อมโยงติดต่อกันเหมือนตาข่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2.1.6 ดอทเน็ตเฟรม (.NET Framework)

โปรแกรมที่เข้ามาสร้างสภาวะแวดล้อมหนึ่งในการทำงานในระบบ ดอทเน็ต (.NET) นี้ได้ ซึ่งก็ถือได้ว่าเป็นเวอร์ชัวล์ แมชชีน (Virtual Machine) ตัวหนึ่ง ดอทเน็ต เฟรม (.NET Framework) มีส่วนประกอบภายในอยู่ 3 ชั้นใหญ่ๆคือ



2.1.2.1.7 เวอร์ชัว แมชชีน (Virtual Machine)

หลักการที่จะทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องมีสภาวะหนึ่งๆ ที่เป็นมาตรฐาน เนื่องจากเครื่องคอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องไม่ได้ลงระบบปฏิบัติการเหมือนกันไว้ เวอร์ชัวล์ แมชชีน (Virtual Machine) จะทำให้โปรแกรมที่เราเขียนขึ้นสามารถนำไปใช้กับคอมพิวเตอร์ทุกเครื่องได้

2.1.2.1.8 แอ็คทีฟเซอร์เวอร์เพจดอทเน็ต (Active Server Page .NET : ASP.NET)

ASP (Active WebServer Page) เป็นสคริปต์ที่ทำงานอยู่บนเว็บเซิร์ฟเวอร์มีส่วนขยายเป็น .asp ปกติมักจะนำมาใช้กับเว็บ เซิร์ฟเวอร์ที่มีระบบปฏิบัติการ WindowsNT โดยอาศัยการควบคุมด้วยโปรแกรมอินเทอร์เน็ต Information เว็บเซิร์ฟเวอร์ (IIS) ของไมโครงซอฟท์ ลักษณะของไฟล์ *.asp จะประกอบด้วยโค้ดที่แทรกไว้ระหว่างโค้ดภาษา HTML การทำงาน ASP นั้นจะใช้การ เรียกใช้จากฝั่งผู้ใช้งานเว็บไซต์ด้วยบราวเซอร์โดยจะมีการประมวลผลที่เว็บเซิร์ฟเวอร์ก่อนที่จะแสดงผลที่บราวเซอร์ช่วยลด ความอืดอาดในการใช้งานอินเทอร์เน็ตลงได้มาก

2.1.2.1.9 ไมโครมิเดีย แฟลช (Macromedia Flash)

Flash เป็นโปรแกรมที่เน้นการสร้างภาพเคลื่อนไหว (Animation) และสามารถโต้ตอบกับผู้ใช้เพื่อใช้บนเว็บไซต์ เพราะ Flash เป็นเทคโนโลยีที่ถูกออกแบบ เพื่อใช้งานบน internet ซึ่งมีการจำกัดการรับส่งข้อมูล ถ้าข้อมูลมีขนานเล็กจะทำให้การส่งถ่ายข้อมูลรวดเร็วไปด้วย เนื่องจากภาพที่สร้างจาก Flash เป็น Vector Graphic ทำให้ภาพมีขนาดเล็กเพราะ Vector Graphic เป็นภาพที่สร้างจากการคำนวณภาพแบบนี้จึงเก็บเฉพาะคำสั่งในการสร้างภาพ และเพราะ Vector Graphic เก็บเฉพาะคำสั่งจึงทำให้เวลาแสดงผลจะต้องอาศัย CPU ในการคำนวณภาพเคลื่อนไหวทุก Frame ดังนั้น Flash Movies ยิ่งซับซ้อนมากก็ยิ่งใช้พลัง CPU มากตามไปด้วย คนส่วนใหญ่จะนำ Flash ได้ไม่เต็มที่ตัว Flash เองมสามารถเขียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Script ควบคุมภาพและเสียง ติดต่อกับ text ไฟล์ต่างได้ เพื่อรับส่งข้อมูลตัวอักษร ติดต่อกับไฟล์ภาพและเสียงต่างๆ โดยผ่าน Generator ซึ่งเราสามารถสร้างเว็บไซต์ Multimedia ครบวงจรด้วย Flash ได้

2.1.3 ข้อได้เปรียบของ E-Learning

2.1.3.1 E-Learning ช่วยให้การจัดการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น เพราะการถ่ายทอดเนื้อหาผ่านทางมัลติมีเดียสามารถทำให้ผู้เรียนเกิดการ เรียนรู้ได้ดีกว่าการเรียนจากสื่อข้อความเพียงอย่างเดียว หรือจากการสอน ภายในห้องเรียนของผู้สอนซึ่งเน้นการบรรยายในลักษณะ Chalk and Talk โดยเมื่อเปรียบเทียมกับ E-Learning ที่ได้รับการออกแบบและผลิตมาอย่างมีระบบจะช่วยทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าในเวลาที่เร็วกว่า

2.1.3.2 E-Learning ช่วยทำให้ผู้สอนสามารถตรวจสอบความก้าวหน้าพฤติกรรมการเรียนของผู้เรียนได้อย่างละเอียดและตลอดเวลา เนื่องจาก E-Learning มีการจัดหาเครื่องมือ (Course Management Tool) ที่สามารถทำให้ ผู้สอนติดตาม การเรียนของผู้เรียนได้

2.1.3.3 E-Learning ช่วยทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนเรียนของตนเองได้ เนื่องจากการนำเอาเทคโนโลยี Hypermedia มาประยุกต์ใช้ ซึ่งมีลักษณะการเชื่อมโยงข้อมูลไม่ว่าจะเป็นในรูปของข้อความ ภาพนิ่ง เสียง กราฟิก วีดิทัศน์ ภาพเคลื่อนไหวที่เกี่ยวเนื่องกันเข้าไว้ด้วยกันในลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Non-Linear) ทำให้ Hypermedia สามารถนำเสนอเนื้อหาในรูปแบบใยแมงมุมได้ ดังนั้นผู้เรียนจึงสามารถเข้าถึงข้อมูลใดก่อนหรือหลังก็ได้ โดยไม่ต้องเรียงลำดับและเกิดความสะดวกในการเข้าถึงของผู้เรียนอีกด้วย

2.1.3.4 E-Learning ช่วยทำให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ตามจังหวะของตน (Self-paced Learning) เนื่องจากการนำเสนอเนื้อหาในรูปแบบ Hypermedia เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสามารถควบคุมการเรียนรู้ของตนในด้านของลำดับการเรียนได้ (Sequence) ตามพื้นฐานความรู้ ความถนัด และความสนใจของตน นอกจากนี้ผู้เรียนยังสามารถเลือกเรียนเนื้อหา เฉพาะบางส่วนที่ต้องการทบทวนได้ โดยไม่ต้องเรียนในส่วนที่เข้าใจแล้ว ซึ่งถือว่าผู้เรียนได้รับอิสระในการควบคุมการเรียนของตนเอง จึงทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตามจังหวะของตนเอง

2.1.3.5 E-Learning ช่วยทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับครูผู้สอน และกับเพื่อน ๆ ได้ เนื่องจาก E-Learning มีเครื่องมือต่าง ๆ มากมาย เช่น Chat Room , Web Board , E-mail เป็นต้น ที่เอื้อต่อการโต้ตอบ (Interaction) ที่หลากหลาย นอกจากนั้น E-Learning ที่ออกแบบมาเป็นอย่างดีจะเอื้อให้เกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับเนื้อหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น การออกแบบเนื้อหาในลักษณะเกม หรือการจำลอง เป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.3.6 E-Learning ช่วยส่งเสริมให้เกิดการเรียนรู้ทักษะใหม่ ๆ รวมทั้งเนื้อหาที่มีความทันสมัย และตอบสนองต่อเรื่องราวต่าง ๆ ในปัจจุบันได้อย่างทันที เพราะการที่เนื้อหาการเรียนอยู่ในรูปของข้อความอิเล็กทรอนิกส์ (E-Text) ซึ่งได้แก่ข้อความ ซึ่งได้รับการจัดเก็บ ประมวลผล นำเสนอ และเผยแพร่ทางคอมพิวเตอร์ ทำให้มีข้อได้เปรียบสื่ออื่น ๆ หลายประการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านของความสามารถในการปรับปรุงเนื้อหาสารสนเทศให้ทันสมัยได้ตลอดเวลา การเข้าถึงข้อมูล ที่ต้องการด้วยความสะดวกรวดเร็ว และความคงทนของข้อมูล

2.1.3.7 E-Learning ทำให้เกิดรูปแบบการเรียนที่สามารถจัดการเรียนการสอนให้แก่ ผู้เรียนในวงกว้างมากขึ้น เพราะผู้เรียนใช้การเรียนลักษณะ E-Learning จะไม่มีข้อจำกัดในด้านการเดินทางมาศึกษาในเวลาใดเวลาหนึ่ง และสถานที่ใดสถานที่หนึ่ง ดังนั้น E-Learning จึงสามารถนำไปใช้เพื่อสนับสนุนการเรียนรู้ตลอดชีวิต (Life Long Learning) ได้ และยิ่งไปกว่านั้นยังสามารถนำ E-Learning ไปใช้เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่ขาดโอกาสทางการศึกษา ในระดับอุดมศึกษาได้เป็นอย่างดี

2.1.3.8 E-Learning ทำให้สามารถลดต้นทุนในการจัดการศึกษานั้น ๆ ได้ ในกรณีที่มีการจัดการเรียนการสอนสำหรับผู้เรียนที่มีจำนวนมาก และเปิดกว้างให้สถาบันอื่น ๆ หรือบุคคลทั่วไปเข้ามาใช้ E-Learning ได้ ซึ่งจะพบว่าเมื่อต้นทุนการผลิต E-Learning เท่าเดิม แต่ปริมาณผู้เรียนมีปริมาณเพิ่มมากขึ้น หรือขยายวงกว้างการใช้ออกไป ก็เท่ากับเป็นการลดต้นทุนทางการศึกษานั่นเอง

2.1.4 ข้อเสียเปรียบของ E-Learning

2.1.4.1 ไม่สามารถรับรู้ความรู้สึก ปฏิกิริยาที่แท้จริงของผู้เรียนและผู้สอน

2.1.4.2 ไม่สามารถสื่อความรู้สึก อารมย์ในการเรียนรู้ได้อย่างแท้จริง

2.1.4.3 ผู้เรียน และผู้สอน จะต้องมีความพร้อมในการใช้คอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต ทั้งด้านอุปกรณ์ ทักษะการใช้งาน

2.1.4.4 ผู้เรียนบางคน ไม่สามารถศึกษาด้วยตนเองได้

2.2 โครงสร้างไม่ต่อเนื่อง (Discrete Structure)

คณิตศาสตร์ดีสครีต เป็นคณิตศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับสิ่งที่เป็นหน่วยเต็ม หรือมีลักษณะทางกายภาพเป็นชิ้น โดยศึกษา finite set , relation และ function ซึ่งจะเป็นส่วนเสริมสร้างความสามารถในการคิดความเข้าใจการสร้าง algorithm ต่าง ๆ มีหัวข้อสำคัญดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. Combinatorial
2. Graph theory
3. Coding theory
4. Theory of Computation

เซตว่าง (empty set) คือ เซตซึ่งไม่มีสมาชิกแทนด้วย ϕ หรือ {}

Z แทนเซตของ integers

R แทนเซตของ real numbers

Q แทนเซตของ rational numbers

N แทนเซตของ natural numbers โดย $N = \{1,2,3,\ldots\}$

สำหรับแต่ละ $n \in N$, $S_n = \{1,\ldots,n\}$

2.2.1 ความสัมพันธ์ (Relations)

2.2.1.1 คู่อันดับ (ordered pair)

พิจารณาประโยค " ปลากินมด " และ " มดกินปลา " ทั้งสองประโยคนี้จะได้มโนภาพสองอย่างที่ไม่เหมือนกัน การที่จะบอกว่าอะไรกินอะไรนั้นต้องบ่ง " อะไร " ให้ชัดเจนถูกต้องตามลำดับก่อนหลังเสียก่อน จึงจะได้ภาพที่ต้องการ

จะเห็นว่าอันดับที่เหตุการณ์สองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นนั้นมีความสำคัญที่จะให้มโนภาพที่ถูกต้อง ในทางคณิตศาสตร์จะให้สัญลักษณ์ (a,b) แทนคู่อันดับ เพื่อบอกว่า ตัวหน้า คือ a และ ตัวหลังคือ b

คู่อันดับ (a,b) และ (c,d) เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d และ (a,b) = (b,a) ก็ต่อเมื่อ a = b

2.2.1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียส (Cartasean product)

ผลคูณคาร์ทีเซียส ของ A และ B แทนด้วย AxB คือเซตของคู่อันดับ (a,b) ซึ่ง $a \in A$ และ $b \in B$ ดังนั้น $AxB = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$ สิ่งที่ตามมาคือ ถ้าทั้ง A และ B เป็นเซตว่าง (empty set) แล้ว AxB เป็นเซตว่างด้วย

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b\}$ แล้ว

$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

ทฤษฎี ให้ A และ B เป็นเซต ถ้า $|A| = n$ และ $|B| = m$ แล้ว $|AxB| = nm$ โดย $|A|$ แทนจำนวนสมาชิกในเซต Aจาก ตัวอย่าง $|A| = 3$ และ $|B| = 2$ ดังนั้น $|AxB| = 3x2 = 6$

ให้ S เป็นเซต เซตกำลัง (Power set) ของ S P(S) คือ เซตของเซตย่อย (subsets) ทุกเซตของ S

ตัวอย่าง $S = \{a,b,c\}$ แล้ว

$P(S) = \{\phi, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

ทฤษฎี ให้ S เป็นเซตเซตหนึ่ง ซึ่ง $|S| = n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจำกัดแล้ว $P(S) = 2^n$

จาก ตัวอย่าง $|S| = 3$ แล้ว $|P(S)| = 2^3 = 8$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.1.3 ความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relations)

ให้ A และ B เป็นเซต ความสัมพันธ์ทวิภาคจาก A ไป B คือ เซตย่อยของ AxB

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A = { 1,2,3 } และ B = { a,b } แล้ว บางความสัมพันธ์ระหว่าง A และ B คือ

R_1 = {(1,a),(2,b),(3,a),(1,b)}

R_2 = {(3,b)}

R_3 = AxB

R_4 = ϕ

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A = { 1,2,3 } ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A ที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (a,b) ซึ่ง $a \geq b$ แล้ว R คือ R = {(3,3),(3,2),(3,1),(2,2) (2,1),(1,1)}

2.2.2 Graphical Representation of Relations

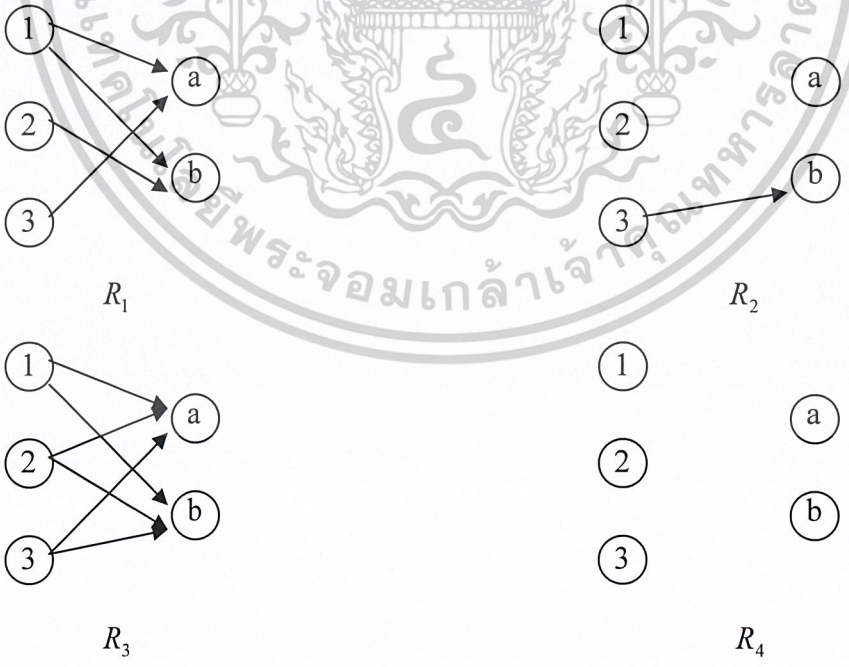
<u>ตัวอย่าง</u> R_1 = {(1,a),(2,b),(3,a),(1,b)}

R_2 = {(3,b)}

R_3 = AxB

R_4 = ϕ

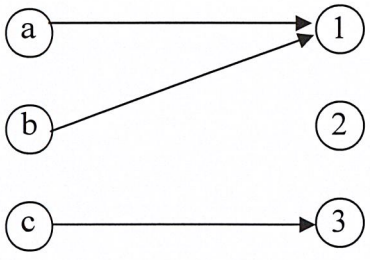
เมื่อ A = {1,2,3} และ B = {a,b}



รูปที่ 2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

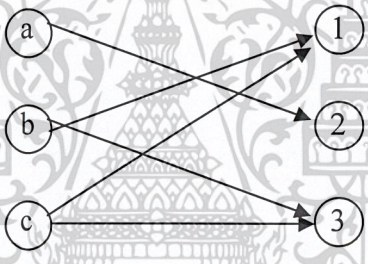
ตัวอย่าง กำหนด



รูปที่ 2.2

ความสัมพันธ์ R จากรูปคือ R = {(a,1),(b,1),(c,3)}

ตัวอย่าง กำหนด



รูปที่ 2.3

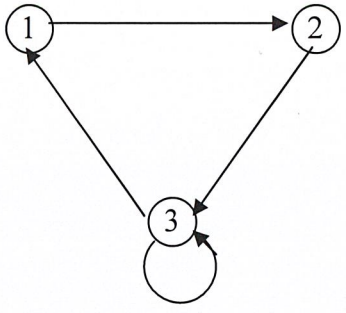
ความสัมพันธ์จากรูป คือ R = {(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)} ถ้าให้

A = {1,2,3} แล้วความสัมพันธ์ในตัวอย่างนี้คือความสัมพันธ์บน A { จาก A ไป A }

ให้ A = {1,2,3} และ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A (ใช้สมาชิกใน A ซ้ำ) โดย

R = {(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)} แล้ว สามารถแทนด้วยกราฟที่แตกต่างไปจากที่กล่าวมาแล้ว เรียกว่า direxted graph ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



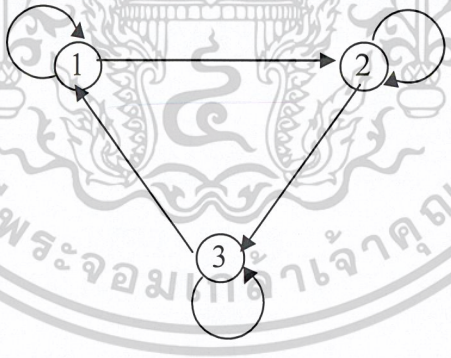
รูปที่ 2.4

คำว่า <u>กราฟ (graph)</u> ในการศึกษาวิชานี้ หมายถึง เซตของจุดซึ่ง เรียกว่า vertices หรือ nodes ซึ่งถูกเชื่อมด้วยเส้นที่เรียกว่า edges , vertices จะสมนัยกับสมาชิกในเซต A , edges จะสมนัยกับคู่อันดับใน R

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน directed graph ของความสัมพันธ์ " น้อยกว่าหรือเท่ากับ" บนเซต S_3

$S_3 = \{1,2,3\}$ เนื่องจาก $1 \leq 1$ ดังนั้น ต้องมีหัวลูกศรออกจาก 1 และจบที่ 1 เรียก self-loop หรือ loop

$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(1,1),(2,2),(3,3)\}$



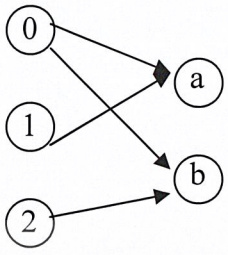
รูปที่ 2.5

สำหรับ $(x,y) \in R$ จะแทนด้วย xRy อ่านว่า {x is R related to y}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A = {0,1,2} และ B = {a,b} แล้ว {(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)} = R
เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว 0Ra แต่ 1 $\not R$ b



รูปที่ 2.6

เป็นกราฟของความสัมพันธ์ อาจ แทนความสัมพันธ์ด้วยตารางดังนี้

R	a	b
0	X	X
1	X	
2		X

ให้ M เป็นเมทริกซ์ขนาด nxm ซึ่ง

$$M(i,j) = \begin{cases} \text{F ถ้า } (a_i, b_j) \notin R \\ \text{T ถ้า } (a_i, b_j) \in R \end{cases} \quad \text{สำหรับ } i = 1,\ldots,n \text{ และ } j = 1,\ldots,m$$

ให้ M ว่า Logical matrix ของ R ดังนั้น Matrix Representation of Relations คือ $\begin{pmatrix} T & T \\ T & F \\ F & T \end{pmatrix}$

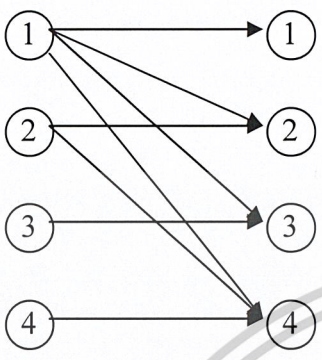
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

58786

ตัวอย่าง ให้ A เป็นเซต {1,2,3,4} ซึ่งคู่อันดับคือความสัมพันธ์ R = {(a,b) | a หาร b ลงตัว}

วิธีทำ (a,b) อยู่ใน R ก็ต่อเมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกไม่เกิน 4 และ a หาร b ลงตัว

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)}



R	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2	X		X	
3	X			
4				X

$$\begin{pmatrix} T & T & T & T \\ F & T & F & T \\ F & F & T & F \\ F & F & F & T \end{pmatrix}$$

รูปที่ 2.7

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนเต็ม

R_1 = $\{(a,b) \mid a \leq b\}$

R_2 = $\{(a,b) \mid a > b\}$

R_3 = $\{(a,b) \mid a = b$ หรือ $a = -b\}$

R_4 = $\{(a,b) \mid a = b\}$

R_5 = $\{(a,b) \mid a = b + 1\}$

R_6 = $\{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

(1,1),(1,2),(2,1),(1,-1) และ (2,2) มีความสัมพันธ์แบบใด

ตอบ (1,1) อยู่ใน R_1,R_3,R_4,R_6

(1,2) อยู่ใน R_1,R_6

(2,1) อยู่ใน R_2,R_5,R_6

(1,-1) อยู่ใน R_2,R_3,R_6

(2,2) อยู่ใน R_1,R_3,R_4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง มีความสัมพันธ์มากเท่าใดบนเซตซึ่งมีสมาชิกจำนวน n

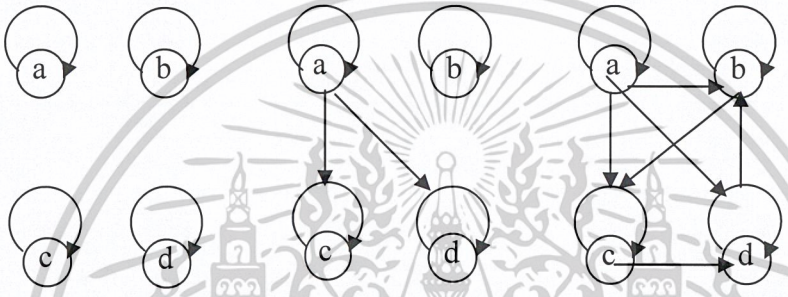
วิธีทำ ความสัมพันธ์บนเซต A เป็นเซตย่อยของ AxA เนื่องจาก AxA มีสมาชิก n^2 เมื่อ A มีสมาชิก n เซต ใดๆ ที่มีสมาชิก m จะมีเซตย่อย 2^m ดังนั้น AxA มีเซตย่อย 2^{n^2} นั่นคือ มีความสัมพันธ์ 2^{n^2} บนเซตซึ่งมีสมาชิกจำนวน n

2.2.3 Properties of Relations

นิยาม ความสัมพันธ์ R บนเซต A เรียกว่า reflexive ถ้า (a,a) $\in$ R สำหรับทุกๆสมาชิก

a $\in$ A

Directed graph ของทุกๆ reflexive จะต้องมีหัวลูกศรออกจากทุกๆจุดและกลับสู่ตัวมันเอง ดังรูป



รูปที่ 2.8

ถ้า A = {a,b,c,d} แล้วความสัมพันธ์ R จะเป็น reflexive ถ้า (a,a),(b,b),(c,c),(d,d) อยู่ใน R ทุกตัว และจะมีสมาชิกอื่นๆอีกหรือไม่มีก็ได้

ตัวอย่าง พิจารณาความสัมพันธ์บน {1,2,3,4}

R_1= {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}

R_2= {(1,1),(1,2),(2,1)}

R_3= {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}

R_4= {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}

R_5={(1,1),(1,2),(1,3),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}

R_6={(3,4)}

ความสัมพันธ์ใดเป็น reflexive

วิธีทำ ความสัมพันธ์ที่เป็น reflexive จะต้องมี (1,1),(2,2),(3,3) และ (4,4) ดังนั้น R_3 และ R_5 เป็น reflexive

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนเต็ม

R_1 = $\{(a,b) \mid a \leq b\}$

R_2 = $\{(a,b) \mid a > b\}$

R_3 = $\{(a,b) \mid a = b$ หรือ $a = -b\}$

R_4 = $\{(a,b) \mid a = b\}$

R_5 = $\{(a,b) \mid a = b + 1\}$

R_6 = $\{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

ความสัมพันธ์ใดเป็น reflexive

วิธีทำ จะเป็น reflexive ต้องมี (a,a) ดังนั้น R_1, R_3 และ R_4 เป็น reflexive

นิยาม 1. ความสัมพันธ์ R บนเซต A เรียกว่า symmetric ถ้า $(b,a) \in R$ แล้ว $(a,b) \in R$ สำหรับ $a,b \in R$

2. ความสัมพันธ์ R บนเซต A ซึ่ง $(a,b) \in R$ และ $(b,a) \in R$ ถ้า $a = b$ เมื่อ $a,b \in A$ เรียกว่า antisymmetric

symmetric และ antisymmetric ไม่ใช่พจน์ที่ตรงข้ามกัน

symmetric ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} F & F & F & F \\ F & F & T & F \\ F & T & F & F \\ F & F & F & F \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} F & T & F & T \\ T & F & T & F \\ F & T & F & F \\ T & F & F & F \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} F & F & F & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \\ F & F & F & F \end{pmatrix} \end{array}$$

สมมาตรเมื่อเทียบกับ main diaganal

Directed graph ที่แทน symmetric นั้นเมื่อ มีหัวลูกศรจาก a ไป b จะต้องมีหัวลูกศรจาก b ไป a เสมอ

ถ้า $A = (a,b)$ แล้ว $R_1 = \{(a,b),(b,a)\}$

$R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$

และ $R_3 = \{(a,a),(b,b),(b,a)\}$ เป็น antisymmetric

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง พิจารณาความสัมพันธ์บน {1,2,3,4}

R_1= {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}

R_2= {(1,1),(1,2),(2,1)}

R_3= {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}

R_4= {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}

R_5={(1,1),(1,2),(1,3),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}

R_6={(3,4)}

ความสัมพันธ์ใดเป็น symmetric และเป็น antisymmetric

วิธีทำ R_2,R_3 เป็น symmetric

R_1,R_3,R_3 เป็น antisymmetric

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนเต็ม

R_1 = {(a,b) | a $\leq$ b}

R_2 = {(a,b) | a $>$ b}

R_3 = {(a,b) | a = b หรือ a = -b}

R_4 = {(a,b) | a = b}

R_5 = {(a,b) | a = b + 1}

R_6 = {(a,b) | a + b $\leq$ 3}

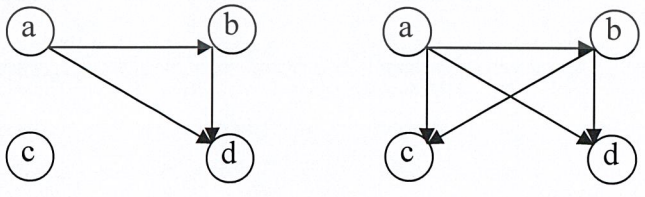
ความสัมพันธ์ใดเป็น symmetric และเป็น antisymmetric

วิธีทำ R_3,R_4,R_6 เป็น symmetric

R_1,R_2,R_4,R_5 เป็น antisymmetric

นิยาม ความสัมพันธ์ R บนเซต A เรียกว่า transitive ถ้า (a,b) $\in$ R และ (b,c)$\in$ R แล้ว (a,c)$\in$ R เมื่อ a,b,c $\in$ A

Graph representation ของ transitive relation แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง พิจารณาความสัมพันธ์บน {1,2,3,4}

R_1= {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}

R_2= {(1,1),(1,2),(2,1)}

R_3= {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}

R_4= {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}

R_5={(1,1),(1,2),(1,3),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}

R_6={(3,4)}

ความสัมพันธ์ใดเป็น transitive

วิธีทำ R_1,R_2,R_3,R_4 เป็น transitive

2.2.4 Equivalence relations and Partitions

Relation ที่มี คุณสมบัติ reflexive , symmetric and transitive เรียกว่า equivalence relations ให้ S เป็น nonempty set

R เป็น equivalence relations บน S สำหรับแต่ละ $x \in S$ แล้ว equivalence class ของ x ซึ่ง relation to R แทนด้วย [x] นิยามโดย $[x] = \{ y \in S \mid xRy \}$

ตัวอย่าง ให้ $S=S_5$ สำหรับ $x,y \in S$ ให้ xRy คือ x-y หารด้วย 2 ลงตัว จงแสดงว่า R เป็น equivalence relation และ จงหา equivalence classes ที่ relative to R

วิธีทำ ให้ $S=S_6=\{1,2,3,4,5,6\}$ xRy คือ x y หารด้วย 2 ลงตัว

1. R เป็น reflexive เนื่องจาก x-x หารด้วย 2 ลงตัว
2. ถ้า xRy แล้ว x-y หารด้วย 2 ลงตัว ดังนั้น y-x หารด้วย 2 ลงตัวด้วย นั่นคือ R เป็น symmetric
3. สำหรับ transitive สมมติ xRy และ yRz แล้วมี จำนวนเต็ม k และ m ซึ่ง x-y=2k และ y-z =2m แล้ว x-y=(x-y)+(y-z) = 2k+2m =2(k+m) ดังนั้น R เป็น transitive

R เป็น equivalence ralation บน S

ต่อไปจะหา equivalence classes ที่ relative to R โดย

[1] = {$y \in S_6$| 1-y หารด้วย 2 ลงตัว) = (1,3,5)

[2] = {$y \in S_6$| 2-y หารด้วย 2 ลงตัว) = (2,4,6)

จะพบว่า [1] = [3] = [6] ดังนั้นมี 2 equivalence classes เซต [1] และ [2] เป็น nonempty และ disjoint และ $[1] \cup [2] = S_6$ แล้ว {[1],[2]} เป็น Partition ของ S

นิยาม ให้ A เป็น nonempty set แล้ว partition ของ A คือเซตของ subset $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ของ A ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. A_i เป็น nonempty set
2. intersection ของสองเซต A_i ใดๆที่แตกต่างกัน เป็น empty set

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$

ตัวอย่าง ให้ A = {1,2,3,4,5,6,7} แล้ว {{1,3,4,5},{2},{6,7}} เป็น partition ของ A

ตัวอย่าง ให้ S = {a,b,c,d,e,f} ให้ π เป็น partition ของ S โดย π = {{a,b},{c,e,f},{d}} จงหา equivalence relation R_π

วิธีทำ ถ้า x,y $\in$ S แล้ว x R_π y ก็ต่อเมื่อ x และ y อยู่ใน block เดียวกัน

พิจารณา block {a,b} มี 4 relationships a R_π b,a R_π a,b R_π b,b R_π a ดังนั้น คู่อันดับทั้งหมดใน R_π คือ {(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,e),(c,f),(e,c),(e,e),(e,f) ,(f,c),(f,e),(f,f),(d,d)}

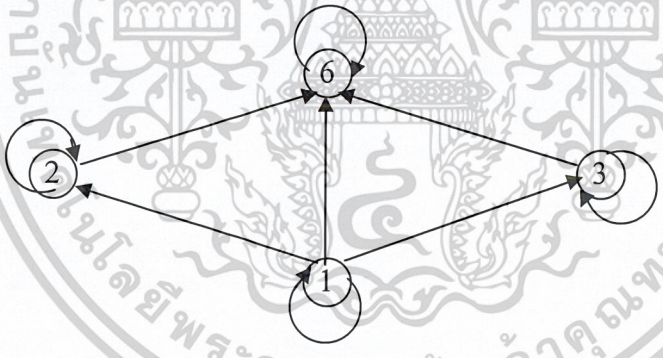
นิยาม partial order relation บนเซต A คือ ความสัมพันธ์บน A ที่มีคุณสมบัติ reflecive , antisymmetric และ transitive ถ้า partial order relation

นิยามบน A แล้ว A จะเรียกว่า partially ordered set หรือ poset

นิยาม partial order relation ที่มีคุณสมบัติ ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ A แล้ว aRb หรือ bRa เรียกว่า linear order relation หรือ total ordering

2.2.5 Graptic Representative of order relations

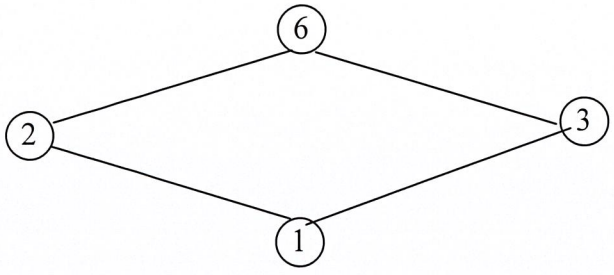
ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่หาร 6 ลงตัว นั่นคือ A = {1,2,3,6} directed graph ที่แทนความสัมพันธ์หารลงตัวบน A คือ



รูปที่ 2.10

ทั้งหมดมี 9 หัวลูกศร ซึ่ง 5 หัวลูกศรนี้ไม่จำเป็น : loop แสดง reflexive และ หัวลูกศรจาก 1-6 แสดง transitive ความสัมพันธ์หาร 6 ลงตัว เป็น partial order relation และจะได้ Hasse diagram ดังนี้

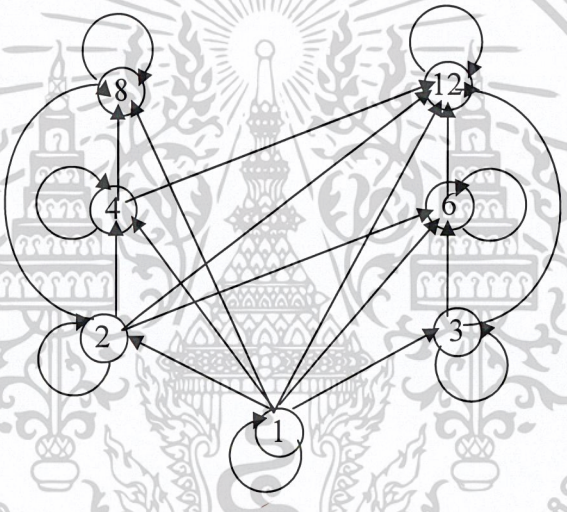
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.11

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน Hasse diagram แทน partial ordering {(a,b) | a หาร b ลงตัว} บน {1,2,3,4,6,8,12}

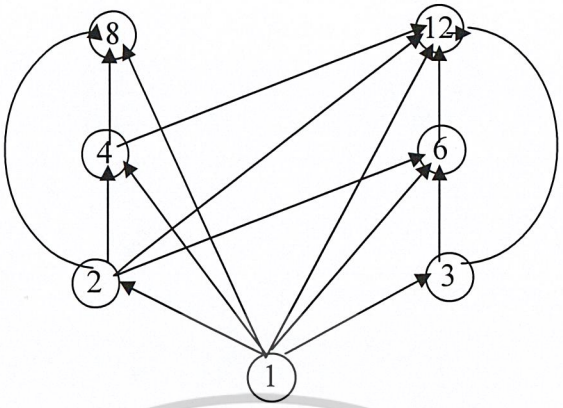
<u>วิธีทำ</u> เริ่มด้วย digrapg ของ parital order



รูปที่ 2.12

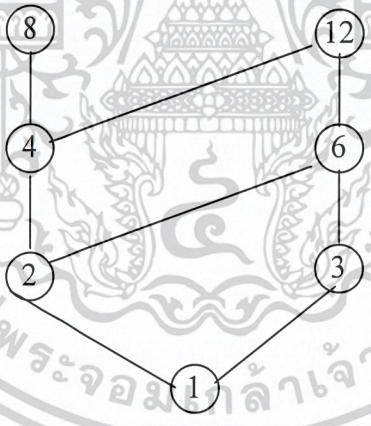
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัด loop ทั้งหมดออก



รูปที่ 2.13

ตัดด้านที่แทน transitive ซึ่งได้แก่ (1,4),(1,6),(1,8),(1,12),(2,8),(2,12),(3,12) จัดด้านทั้งหมดให้หัวลูกศรชี้ขึ้นข้างบน ตัดหัวลูกศรทั้งหมดจะได้ hasse digraph ดังรูป

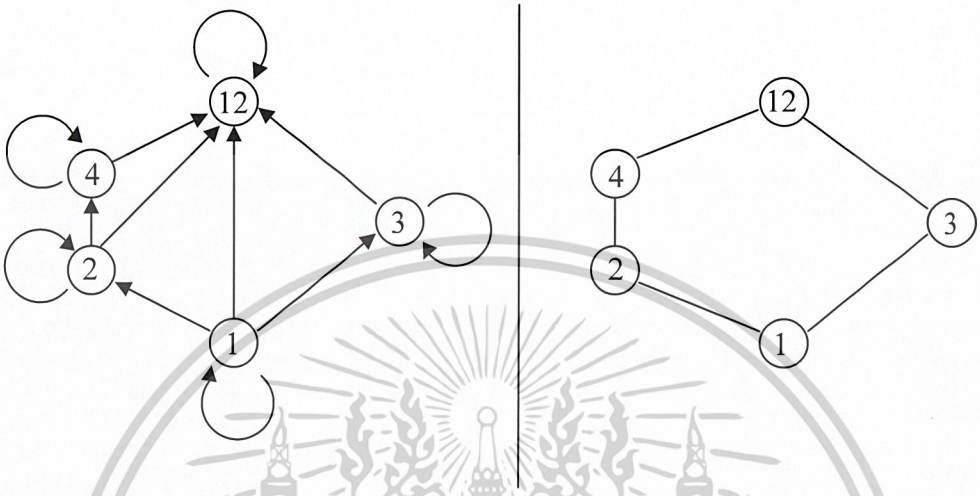


รูปที่ 2.14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A = {1,2,3,4,12} พิจารณา patial order of divisibility บน A คือ ถ้า a และ b ε A , a $\leq$ b if and only if a|b จงเขียน Hass diagram poset (A, $\leq$)

<u>วิธีทำ</u>



(ก) (ข)

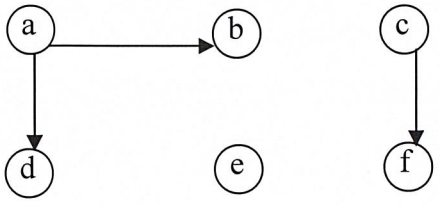
รูปที่ 2.15

เมื่อตัด self loop , ตัด transitive ในรูปที่ 2.15 (ก) จะได้ ดังรูปที่ 2.15 (ข)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

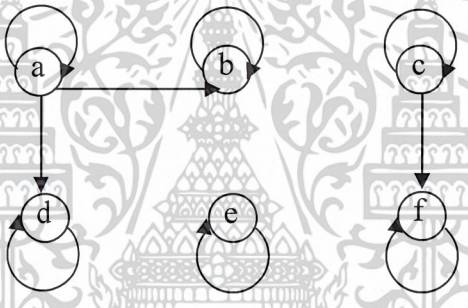
2.2.6 Closure opertions

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X = {a,b,c,d,e,f} และ R เป็น relation ที่นิยามโดย derected graph ดังนี้



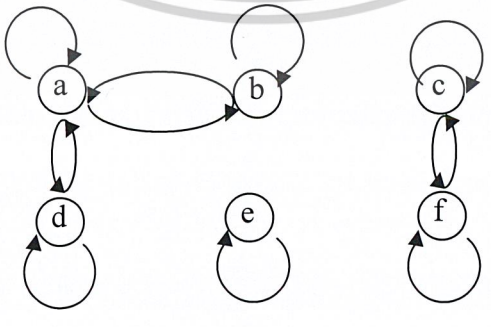
รูปที่ 2.16

ทำให้เป็น reflexive relation ได้โดยเพิ่มหัวลูกศรออกจากแต่ละสมาชิกแล้วเข้าสู่สมาชิกนั้น ๆ



รูปที่ 2.17

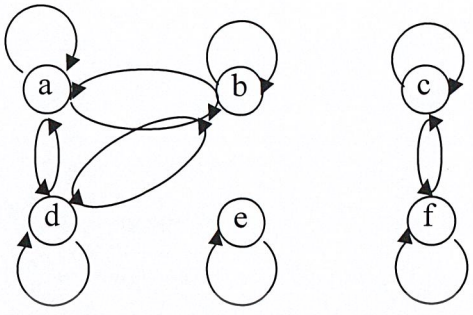
ทำเป็น symmetric relation โดยเพิ่มหัวลูกศรสำหรับแต่ละหัวลูกศร



รูปที่ 2.18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำให้เป็น transitive relation โดยเพิ่มหัวลูกศรระหว่าง b และ d



รูปที่ 2.19

การดำเนินการเหล่านี้เพื่อให้เป็น equivalence relation เรียกรวมกันว่า closuer และในแต่ละการดำเนินการเรียก reflexive closure , symmetric closure และ transitive closure

Closure เติมเฉพาะคู่อันดับที่จำเป็น และไม่ตัดคู่อันดับเดิมใน R ทิ้ง

2.2.7 Composition

นิยาม ให้ R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B และ S เป็นความสัมพันธ์จากเซต B ไปเซต C แล้ว composition ของ R และ S คือความสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (a,c) เมื่อ $a \in A$ และ $c \in C$ และมี $b \in B$ ซึ่ง $(a,b) \in R$ และ $(b,c) \in S$ แทน composition ของ R และ S ด้วย SoR

ตัวอย่าง A = {1,2,3,4} , R = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)} ,

S = {(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)}

เนื่องจาก $(1,2) \in R$ และ $(2,3) \in S$ ดังนั้น $(1,3) \in SoR$

$(1,1) \in R$ และ $(1,4) \in S$ ดังนั้น $(1,4) \in SoR$

SoR = {(1,4),(1,3),(1,1),(2,1),(3,3)}

RoS = {(1,2),(2,2),(3,2),(3,1),(3,3),(4,2),(4,1),(4,3)}

นิยาม ให้ R เป็น relation บน set A power : R^n : n = 1,2,3,… นิยามโดย

$R^1 = R$ และ $R^{n+1} = R^n oR$

ดังนั้น $R^2 = RoR$

$R^3 = R^2 oR = (RoR)oR$ และต่อๆไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง R = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,3)} จงหา R^n : n = 2,3,4,…

วิธีทำ $R^2 = RoR = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

$R^3 = R^2oR = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

$R^4 = R^3oR = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

ดังนั้น $R^n = R^3$

ตัวอย่าง R = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,3)}

transtive closure ของ R คือ

$R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,3),(3,1),(4,2),(4,1)\}$

หรือ $R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,3)\}$

$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

$R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} = R^n$

$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3),(3,1),(4,2),(4,1)\}$

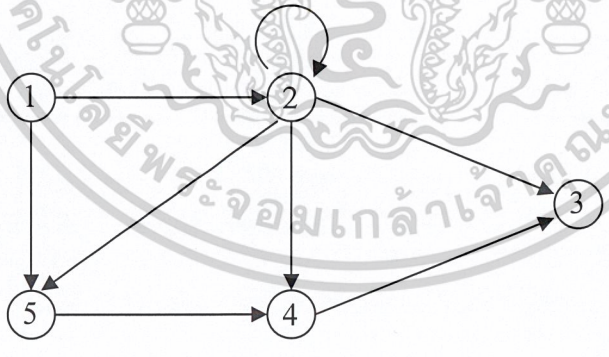
transtive closure $R = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n = R^{\infty}$

2.2.8 Path in Relations and diagraph

Path ซึ่งมี length k ในกราฟคือ sequence ของ vertices $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k$

$i = 1,2,\ldots,k$, $\{v_{i-1},v_i\} \in E$

ตัวอย่าง พิจารณา diagraph ดังรูป



รูปที่ 2.20

π_1 = 1,2,5,4,3 เป็น path ที่มี length 4 จาก vertex 1 ถึง vertex 3

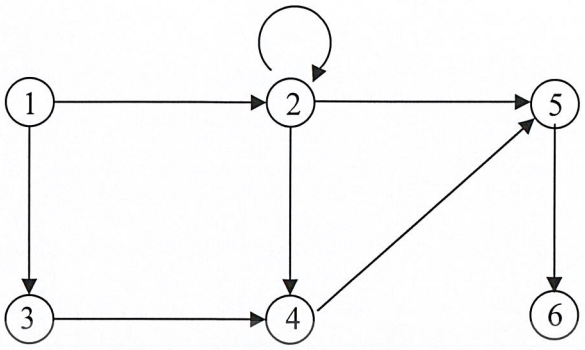
π_2 = 1,2,5,1 เป็น path ที่มี length 3 จาก vertex 1 กลับไปยังตัวเอง

π_3 = 2,2 เป็น path ที่มี length 1 จาก vertex 2 กลับไปยังตัวเอง

path ที่เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดยอดเดียวกัน เรียกว่า cycle จากตัวอย่าง π_2 และ π_3 เป็น cycle

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> A = {1,2,3,4,5,6} และ R เป็นความสัมพันธ์ ดังรูป



รูปที่ 2.21

R = {(1,2),(1,3),(2,2),(2,4),(2,5),(3,4),(4,5),(5,6)}

R = RoR = {(1,2),(1,4),(1,5),(2,2),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(4,6)}

1R2 และ 2R2 แล้ว 1R2

1R2 และ 2R4 แล้ว 1R4 หรือ 1R3 และ 3R4 แล้ว 1R4

1R2 และ 2R5 แล้ว 1R5

2R2 และ 2R2 แล้ว 2R2

2R2 และ 2R4 แล้ว 2R4

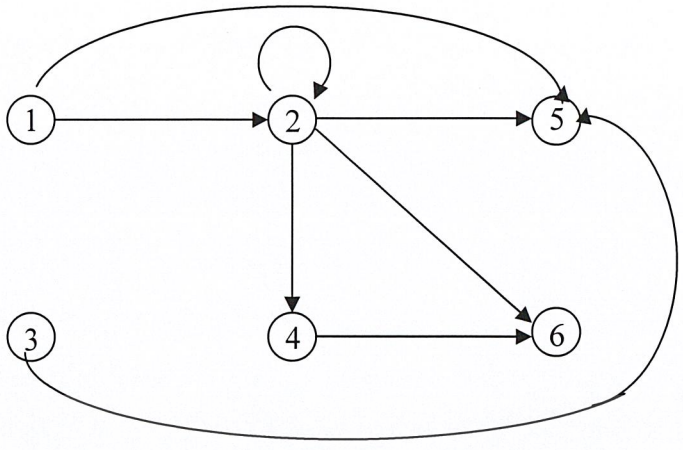
2R2 และ 2R5 แล้ว 2R5 หรือ 2R4 และ 4R5 แล้ว 2R5

2R5 และ 5R6 แล้ว 2R6

3R4 และ 4R5 แล้ว 3R5

4R5 และ 5R6 แล้ว 4R5

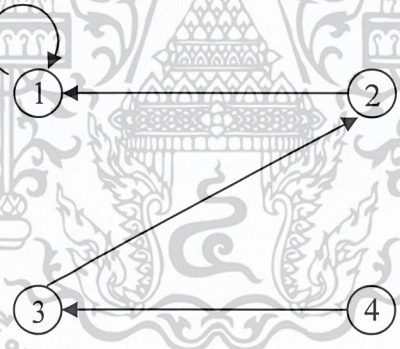
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.22

<u>ทฤษฎี</u> ให้ R เป็น relation บนเซต A มี path ที่มี length n from a to b ก็ต่อเมื่อ $(a,b) \in R^n$

<u>ตัวอย่าง</u> R = {(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)}



รูปที่ 2.23

R^2 = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)}

มี path ที่มี length 2 จาก 3 ไป 1

มี path ที่มี length 2 จาก 4 ไป 2

R^3 = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)}

มี path ที่มี length 3 จาก 4 ไป 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 กราฟ(Graph)

นิยาม (simple graph) หรือ(undirected graph) คือคู่อันดับ G=(V,E) โดย

1. V เป็น finite set ซึ่งสมาชิกคือ verties
2. E เป็น irreflexive , symmetric relation บน V

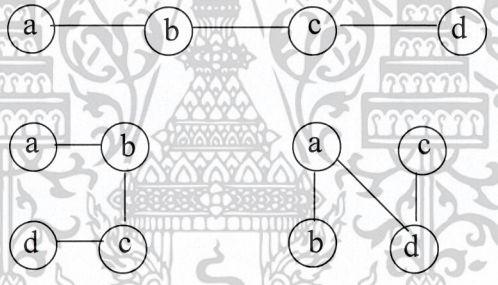
เรียก G= (V,E) ว่า กราฟคู่อันดับใน E เรียกว่า edges ของกราฟ การที่ E เป็น irreflexive หมายความว่า ไม่มี loop ไม่มีหัวลูกศรออกแล้วเข้าในตัวเอง

การที่ E เป็น symmetrie หมายความว่า (u,v) ∈ E ก็ต่อเมื่อ (u,v) ∈

ถ้า l=(u,v) E จะกล่าวว่า e เป็น edge ระหว่าง u และ v (หรือ จะกล่าวว่า e เป็น edge ระหว่าง v และ u) และจะกล่าวว่า u is adjacent to v และ e is incident to u หรือ e is incident to v เนื่องจาก E เป็น symmetric ดังนั้น e เป็น unordered pair

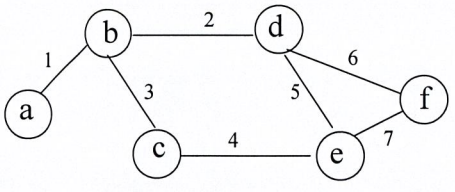
{ u,v } : (u,v) หรือ (v,u)

ตัวอย่าง พิจารณา กราฟ G=(v,u) เมื่อ v = {a,b,c,d} และ E = {{a,b},{b,c},{c,d}}



รูปที่ 2.24

ตัวอย่าง กำหนด กราฟ G



รูปที่ 2.25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

V = {a,b,c,d,e,f}

E= {1,2,3,4,5,6,7} = {{{a,b},{b,d},{b,c},{c,e},{d,e},{d,f},{e,f}}

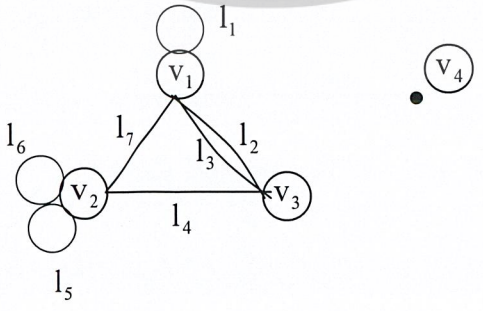
เมทริกซ์ ซึ่ง แถวเป็นเซตของ vertex และหลักเป็น เซตของ edges เรียก incidence metrix

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	1	0	0	0
d	0	1	0	0	1	1	0
e	0	0	0	1	1	0	1
f	0	0	0	0	0	1	1

เมทริกซ์ ซึ่งแถวและหลักเป็นเซตของ vertex เรียก adjacency matrix

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	0	0
b	1	0	1	1	0	0
c	0	1	0	0	1	0
d	0	1	0	0	1	1
e	0	0	1	1	0	1
f	0	0	0	1	1	0

Multigraph ประกอบด้วย vertices และ edges โดยมี multiple edges และ loop

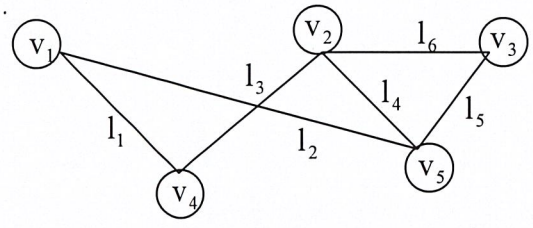


รูปที่ 2.26

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Vertex ที่ไม่มี edges incident to เรียกว่า islated vertex คือ ในรูป

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดกราฟ



รูปที่ 2.27

Incidence matrix

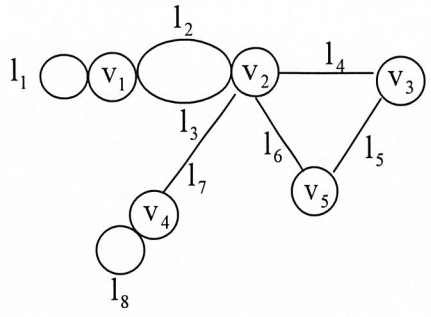
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Adjacent matrix

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดกราฟ



รูปที่ 2.28

Incidence matrix

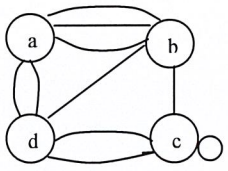
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1	1	1	0	0	0	0	0
v_2	0	1	1	1	0	1	1	0
v_3	0	0	0	1	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	0	0	1	1	0	0

Adjacent matrix

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1	2	0	0	0
v_2	2	0	1	1	1
v_3	0	1	0	0	1
v_4	0	1	0	1	0
v_5	0	1	1	0	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดกราฟ



รูปที่ 2.29

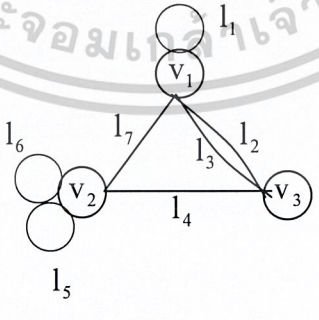
Adjacent matrix

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

นิยาม degree ของ vertex ในกราฟ คือจำนวนของ edges ที่ incident กับ vertex , กรณีมี loop ที่ vertex นั้น จะนับเป็น 2 เท่าของจำนวน loop

Degree ของ vertex คือจำนวนของทิศทางที่แตกต่างกันที่สามารถออกจาก vertex ไปใน edges หนึ่งๆ

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.30

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Vertex v_1 มี degree 5

v_2 6

v_3 3

v_4 0 (isolated vertex)

14 มี 7 ด้าน

<u>ทฤษฎี</u> ในกราฟใดๆ ผลรวมของ degree ของ vertices จะเป็น 2 เท่าของจำนวนของ edges

<u>ทฤษฎี</u> ในกราฟใดๆ จำนวน degree ของ odd vertices จะมีเป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ให้ x เป็นผลรวมของdegree ของ even vertices

Y เป็นผลรวมของ degree ของ odd vertices

ถ้า E เป็นจำนวนของ edges แล้ว

X+Y = 2E

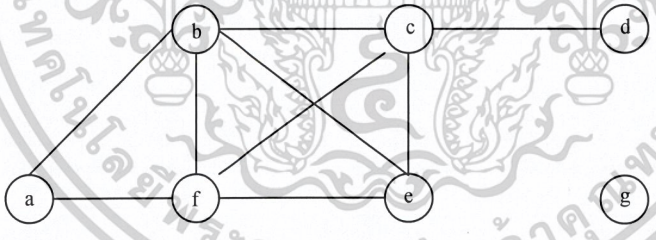
X เป็น even , 2E เป็น even ดังนั้น y เป็น even ด้วย

จากตัวอย่าง มี 2 vertices ที่เป็น odd degree คือ v_1 และ v_3

Vertex ที่มี degree 0 เรียกว่า isolated

Vertex ที่มี degree 1 เรียกว่า pendent

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากราฟ



รูปที่ 2.31

deg(a) = 2

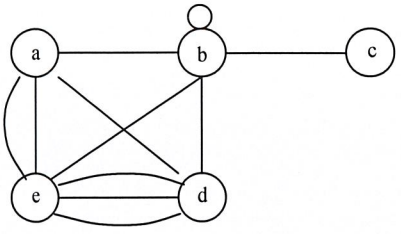
deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4

deg(d) = 1 = pendent

deg(e) = 3

deg(g) = 0 = isolated

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.32

deg(a) = 4

deg(b) = deg(e) = 6

deg(c) = 1 = pendent

deg(d) = 5

ตัวอย่าง มีกี่ด้านในกราฟที่มี 10vertices และ ณ แต่ละ vertex มี degree 6

วิธีทำ ผลรวมของดีกรีของ vertices คือ 6x10 = 60 ผลรวมของ degree ของ vertices เป็น 2 เท่า ของจำนวน edges

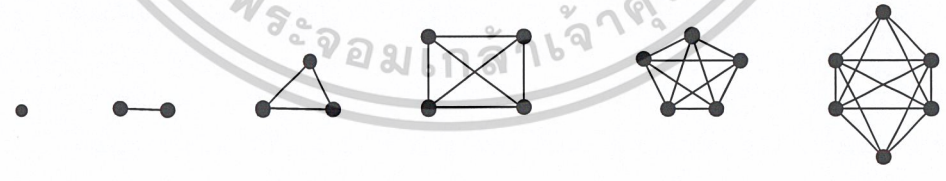
ดังนั้น 2e = 60

e =30

นั่นคือ มี 30 ด้าน

Some Special Graphs

นิยาม กราฟจะเรียกว่า complete graph ถ้าเป็น simple graph (ไม่มี loop) ที่มีหนึ่งด้านที่เชื่อมคู่ vertices ที่แตกต่างกัน และจะแทนด้วย k_n เมื่อ n=1,2,3,4,5,6 แสดงดังรูป



k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6

รูปที่ 2.33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม กราฟจะเรียกว่า cycle สำหรับ $n \geq 3$ ถ้าสำหรับ n vertices $v_1, v_2, \ldots v_n$ แล้วด้านคือ $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ และจะแทนด้วย c_n เมื่อ n = 3,4,5,6 แสดงดังรูป

c_3 c_4 c_5 c_6

รูปที่ 2.34

นิยาม กราฟจะเรียกว่า wheel เมื่อเติม vertex ไปที่ cycle c_n เมื่อ $n \geq 3$ แล้วเชื่อม vertex ที่เติมไปใหม่นี้ กับ n vertex ใน c_n และจะแทนด้วย w_n เมื่อ n =3,4,5,6 แสดงดังรูป

w_3 w_4 w_5 w_6

รูปที่ 2.35

2.3.1 Function

ฟังก์ชัน จากเซต A ไป B ซึ่ง A และ B ไม่ใช่เซตว่าง คือความสัมพันธ์ F ระหว่าง A และ B ที่เป็นไปตามสองเงื่อนไข

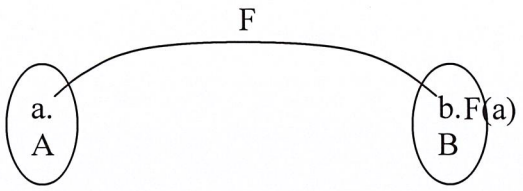
- สำหรับทุกค่าของ $x \in A$ มีค่า $y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in F$
- สำหรับทุกค่าของ $x \in A$ และ $y, \xi \in B$

  ถ้า $(x,y) \in F$ และ $(x,z) \in F$ แล้ว $y=z$

เรียกเซต A ว่า โดเมนของฟังก์ชัน

และเรียก เซต B ว่า range ของฟังก์ชัน ซึ่งบางที่ เรียกว่า codemain

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.36

A ภายใต้ mapping หรือ transformation F ได้ b

B เป็น image ภายใช้ F ของ a เรียก a ว่า argument ของ Funtion F และ เรียก F(a) ว่าค่าของฟังก์ชัน

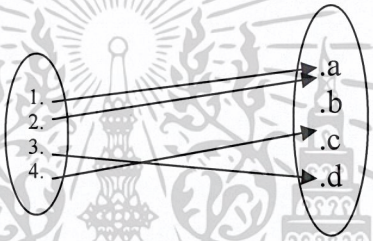
ตัวอย่าง ให้ A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d} และ F={(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)}

แล้ว F(1)=a

F(2)=a

F(3)=d

F(4)=c



รูปที่ 2.37

ทุกค่าของ $x \in A$ มีค่า $v \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in F$ ไม่มีค่า x 1 ค่า ที่ให้ค่า v มากกว่า 1 ค่า ดังนั้น F เป็น Function จาก A ไป B

ตัวอย่าง ให้ A={1,2,3} , B={x,y,z } พิจารณาความสัมพันธ์ R={(1,x),(2,x)} และ S={(1,x),(1,y),(2,z),(3,y)}

R ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ โดเมนของ R คือ {1,2} ไม่ใช่ A

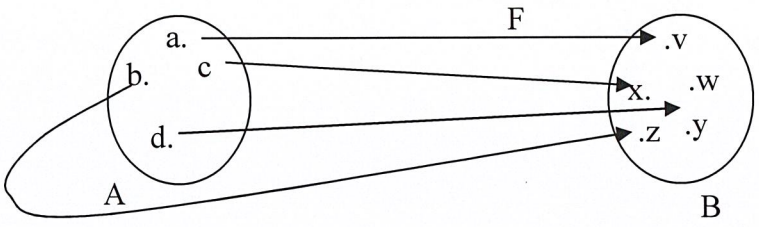
ต้องใช้สมาชิกใน A ทุกตัว ส่วนสมาชิกใน B อาจใช้ไม่หมดได้

S ไม่เป็น ฟังก์ชันเพราะ S(1)=x และ S(1)=y จะเห็นว่า สำหรับค่า 1 เดียวกัน ให้ค่าสองค่าคือ x และ y กรณีที่เรียก B ว่า codemain จะเรียก $\beta \subseteq$ B ซึ่งเป็น image ของฟังก์ชันว่า range

ให้ F เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะแทนด้วย $F : A \rightarrow B$ ฟังก์ชัน F เรียกว่า one to one (1-1) ถ้า $F(x) \neq F(y)$ เมื่อ x และ y เป็นสมาชิกทที่แตกต่างกันของ A

ฟังก์ชัน F จะเรียกว่า onto ถ้า image ของ F เท่ากับ range ของ F (เซต B)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.38

สมาชิกใน A 1 ค่า ให้ค่าใน B 1ค่า ซึ่งค่าใน B ไม่มีซ้ำกัน เป็น 1-1

Range ของ F คือ B=(v,w,x,y,z)

Range ของ F คือ B=(v,x,y,z)

ดังนั้น F เป็น 1-1 แต่ไม่ onto

รูปที่ 2.39

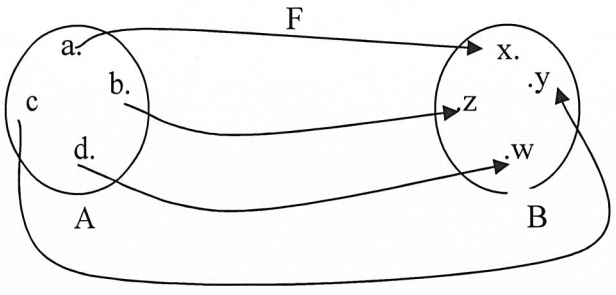
มี (w,c) และ (x,c) ดังนั้น F ไม่ 1-1

Range ของ F B: (a,b,c,d)

Range ของ F (a,b,c,d)

ดังนั้น F เป็น onto

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.40

ไม่มีค่า B ที่ถูกใช้ซ้ำ เป็น 1-1

Range ของ F B: (w,x,y,z)

Range ของ F (w,x,y,z)

ดังนั้น F เป็น 1-1 และ onto

Fountion เรียกว่า one to one correspondence ถ้าเป็น fountion 1-1 และ onto

ฟังก์ชัน 1-1 เรียกว่า injective

ฟังก์ชัน onto เรียกว่า surjective

ฟังก์ชัน 1-1 และ onto เรียกว่า bijective

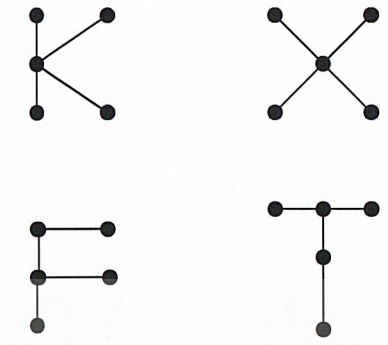
<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา $F:N \rightarrow N$ โดย $F(x)=2X$ เนื่องจากถ้า $2x= 2y$ แล้ว $x=y$ ดังนั้น F เป็น 1-1 image ของ F คือจำนวนเต็มคู่ ในขณะที่ range ของ F คือ natural munber ดังนั้น F ไม่ onto เรียก F ว่า injective function

2.3.2 Isomorphism of Graphs

<u>นิยาม</u> simple graph $G_1 = (V_1,E_1)$ และ $G_2 = (V_2,E_2)$ เป็น isomorphic ถ้า Function f from V_1 to V_2 มีคุณสมบัติ 1-1 และ onto (นั่นคือ a และ b adjacent ใน G_1 ก็ต่อเมื่อ f(a) และ f(b) adjacent G_2 สำหรับทุกค่าของ a และ b ใน V_1) เรียกฟังก์ชัน f ว่า isomorphism

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กราฟที่ isomorphic



รูปที่ 2.41

ตัวอย่าง จงแสดงว่ากราฟทั้งสอง isomorphic

$V_1=\{a,b,c,d,e\}$ $V_2=\{A,B,C,D,E\}$

รูปที่ 2.42

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต้องการ หา f: $V_1 \longrightarrow V_2$

V_1	a	b	c	d	e
$V_2=f(V_1)$					

เลือก a และ A โดย A = f(a)

V_1	a	b	c	d	e
$V_2=f(V_1)$	A				

จากจุด a มีด้านไปยังจุด d และจุด e

จากจุด A มีด้านไปยังจุด B และจุด C

เลือก B = f(d) และ C = f(e)

V_1	a	b	c	d	e
$V_2=f(V_1)$	A			B	C

จากจุด e มีด้านไปยังจุด b

จากจุด C มีด้านไปยังจุด E

เลือก E = f(b)

จากจุด d มีด้านไปยังจุด C

จากจุด B มีด้านไปยังจุด D

เลือก D = f(c)

V_1	a	b	c	d	e
$V_2=f(V_1)$	A	E	D	B	C

ด้านที่สมนัยกัน คือ

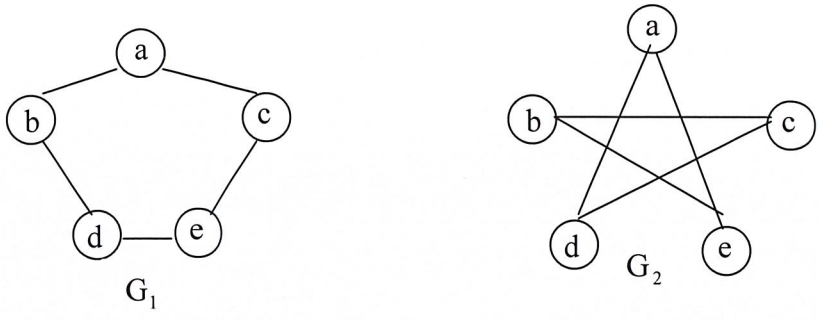
{a,d} {A,B} {a,e} {A,C} {b,c} {E,D}

{b,e} {E,C} {c,d} {D,B}

Simple graph สองกราฟเป็น isomorphic ก็ต่อเมื่อ adjacent matrix ของกราฟหนึ่งเหมือนกับ adjacent matrix ของกราฟอีกกราฟหนึ่ง สำหรับบ้าง ordering ของ vertiese และ edges

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.43

For G_1

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	1	0	0	1	0

For G_2

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	1	0

=> G_1และ G_2 isomorphic

Simple graph สองกราฟ เป็น isomorphic ก็ต่อเมื่อ incident matrix ของกราฟหนึ่ง เหมือนกับ incident matrix ของกราฟอีกกราฟหนึ่ง สำหรับบาง ordering ของ vertices และ edges

ตัวอย่าง

รูปที่ 2.44

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

For G_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	1	0	0	0
b	0	1	1	0	0
c	0	0	1	1	0
d	0	0	0	1	1
e	1	0	0	0	1

For G_2

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
A	1	1	0	0	0
B	0	1	1	0	0
C	0	0	1	1	0
D	0	0	0	1	1
E	1	0	0	0	1

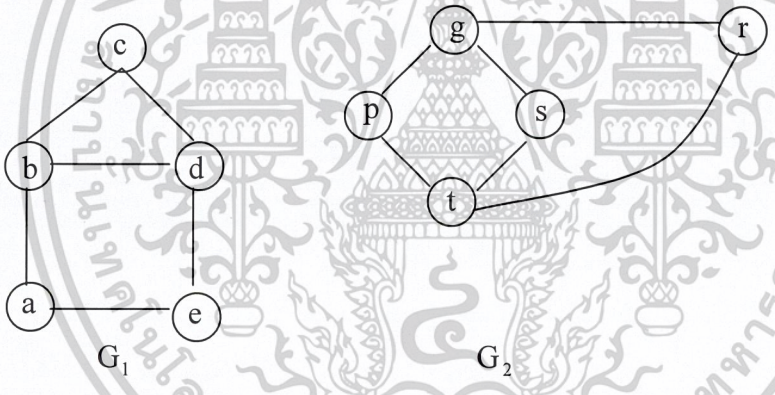
=>G_1และ G_2 isomorphic

ถ้า G_1 และ G_2 เป็น isomorphic แล้ว G_1 และ G_2 มีจำนวนของด้านเท่ากันและมีจำนวนของจุดยอดเท่ากัน

ในการแสดงว่ากราฟสองกราฟ G_1 และ G_2 not isomorphic จะต้องหาคุณสมบัติของ G_1 ที่ G_2 ไม่มีซึ่งถ้า G_2 มีแล้ว จะทำให้ G_1 และ G_2 เป็น isomorphic ซึ่งเรียกคุณสมบัตินี้ว่า invariant

ถ้า $G_1 = (V_1,E_1)$ และ $G1 = (V_2,E_2)$ ถ้า $|V_1| = |V_2| = x$ แล้วมี n! ของ bijection ที่เป็นไปได้ระหว่าง V_1 และ V_2 ดังนั้นในการแสดงว่า G_1 และ G_2 not isomorphic ต้องแสดงว่า ทุก n! bijection ไม่เป็นจริงที่จะ map edges ของ G_1 onto edge ของ G_2

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.45

จะพบว่า G_1 และ G_2 มี 5 vertices และ 6 edges เท่ากัน

5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120

มี 120 bijection จาก {a,b,c,d,e} onto {p,qp,r,s,t} ซึ่งยุ่งยากมากในการพิจารณา

พิจารณา G_1 มี cycle b,c,d,b ซึ่งมีด้าน 3 ด้าน แต่ใน G_2 ไม่มี cycle ที่มีด้าน 3 ด้าน ดังนั้น G_1 และ G_2 not isomorphic

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ตัวอย่างของ isomorphic invariant เมื่อ m,n,k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบฯ

1. การมีจุดยอด n จุด
2. การมีด้าน m ด้าน
3. การมีจุดยอดจุดหนึ่งที่มีดีกรี n
4. การมีจุดยอด m จุดที่มีดีกรี n
5. การมี cycle 1 ชุดที่ยาว k
6. การมี cycle m ชุด ที่ยาว k
7. การเป็นกราฟเชื่อมโยงได้ (connected)
8. การมี Euler circuit
9. การมี Hamilton cycle
10. การเป็น Tree

ตัวอย่าง

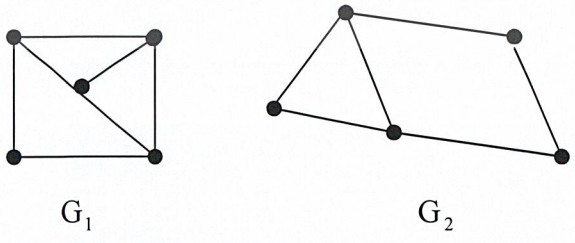
รูปที่ 2.46

กราฟ G_1 มี 4 vertices กราฟ G_2 มี 3 vertices

"มี 4 vertices" เป็น invariant

=> G_1 และ G_2 not isomorphic

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.47

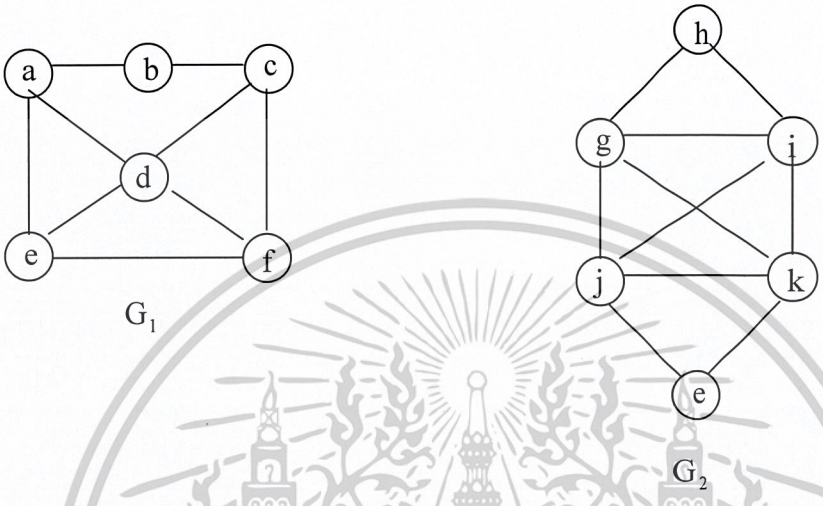
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฯ G_1 มี 7ด้าน กราฟ G_2 มี 6 ด้าน

“มี 7 ด้าน” เป็น invariant

=> G_1 และ G_2 not isomorphic

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.48

กราฟ G_1 มีvertex ที่มี ดีกรี 3 (a และ f)

กราฟ G_2 ไม่มี vertex ที่มีดีกรี 3

“มี vertex ที่มีดีกรี 3” เป็น invariant

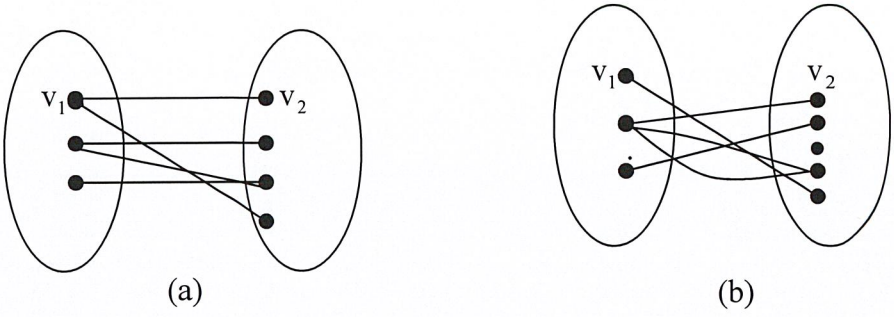
=> G_1 และ G_2 not isomorphic

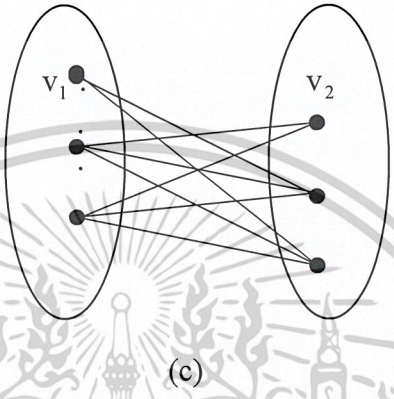
2.3.3 Bipartite graphs

นิยาม กราฟ G ของ เซตของ vertex V ที่เรียกว่า bipartite ถ้าสามารถที่จะจัด V ให้อยู่ในรูป union ของ สอง nonempty disjoint subsets V_1 และ V_2 ซึ่งแต่ละด้านของ G เชื่อมระหว่างแต่ละ vertex ใน V_1 กับแต่ละ vertex ใน V_2

Bipartite graphs ต้องไม่มี loop เพราะจุดปลาย ทั้งสองข้างของทุกๆด้าน ต้องอยู่ในเซตของ vertices ที่แตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

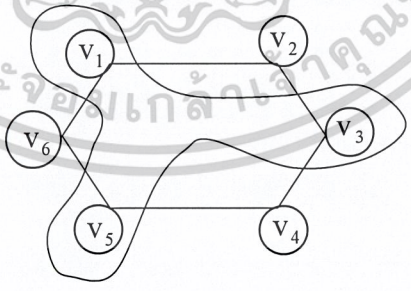




รูปที่ 2.49

Isolated vertices อาจอยู่ใน V_1 หรือ V_2 ก็ได้

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา C_6



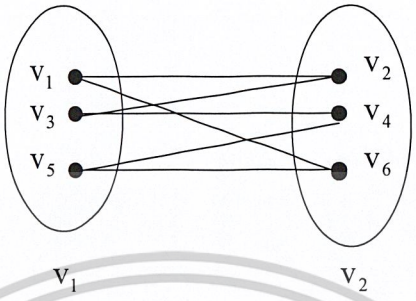
รูปที่ 2.50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เซตของ vertices คือ $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ สามารถแบ่งเป็นสองเซตคือ V_1 และ V_2 โดย

$V_1 = \{v_1,v_3,v_5\}$

$V_2 = \{v_2,v_4,v_6\}$



รูปที่ 2.51

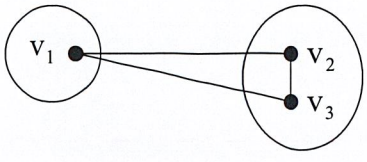
ทุกๆด้านของ C_6 เชื่อมกับ vertex ใน V_1 และ vertex ใน V_2 ดังนั้น C_6 เป็น bipartite

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา K_3

รูปที่ 2.52

เซตของ vertices คือ $\{v_1, v_2, v_3\}$

สามารถแบ่งเป็นสองเซตคือ v_1 และ v_2 โดย $v_1 = \{v_1\}$, $v_2 = \{v_2, v_3\}$

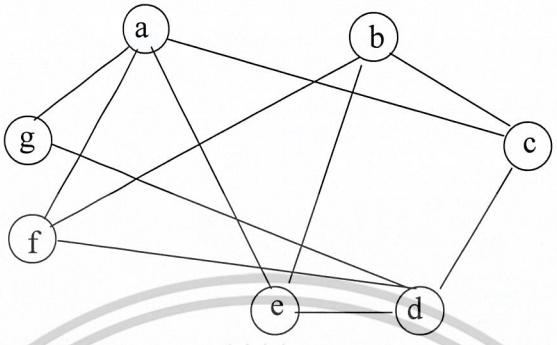


รูปที่ 2.53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

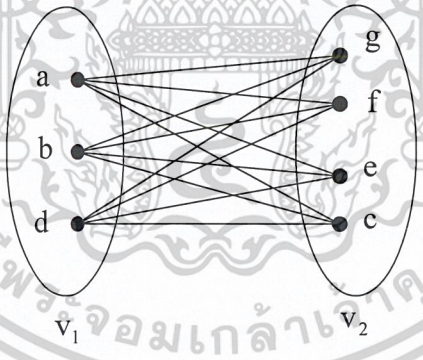
v_2 และ v_3 เป็นสมาชิกใน v_2 และมีด้านจาก v_2 ไป v_3 ดังนั้น K_3 ไม่เป็น bipartite ด้านต้องเชื่อม vertex ที่อยู่ต่างเซตกัน

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากราฟ G



รูปที่ 2.54

v = {a,b,c,d,e,f,g}



รูปที่ 2.55

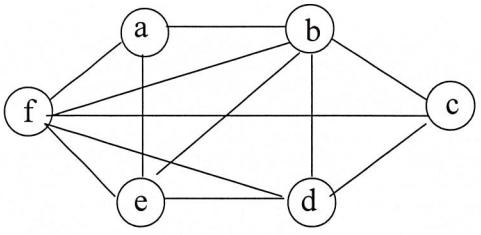
$v_1 = \{a, b, d\}$

$v_2 = \{g, f, e, c\}$

กราฟ G เป็น bipartite

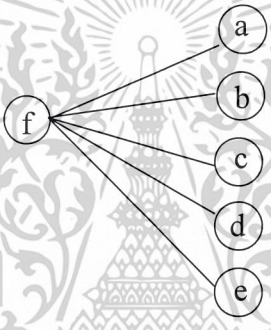
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากราฟ H



รูปที่ 2.56

V={a,b,c,d,e,f}

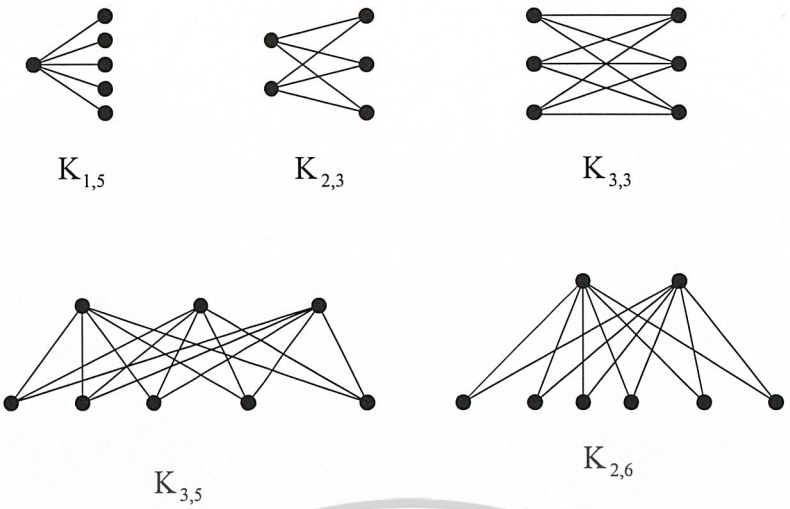


รูปที่ 2.57

กราฟ H ไม่เป็น bipartite

<u>นิยาม</u>Complete bipartite graph $K_{m,n}$ คือ กราฟซึ่ง vertices $V = V_1 \cup V_2$ เมื่อ V_1 มีสมาชิก m ตัว, V_2 มีสมาชิก n ตัว, $V_1 \cap V_2 = \phi$ และ แต่ละ vertex ใน V_1 เชื่อมแต่ละ vertex ใน V_2 เพียงด้านเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.58

(m,n) เรียกว่าอันดับของ complete bipartite graph

สอง Complete bipartite graphs ที่มี order (m,n) เดียวกัน จะเป็น isomorphic นั้นคือ

$K_{m,n}$ isomorphic กับ $K_{n,m}$ complete และ complete bipartite มีแนวคิดที่แตกต่างกัน

Complete ไม่มี loop 1 ด้านเชื่อมคู่ vertices ที่ แตกต่างกัน แยก V_1 , V_2 ไม่ได้

Complete bipartite ไม่มี loop $V = V_1 \cup V_2$ และ $V_1 \cap V_2 = \phi$ 1 ด้านเชื่อมคู่ vertices ระหว่าง V_1 และ V_2

Complete bipartite ไม่ใช่ bipartite กราฟที่เป็น complete graph ด้วย

2.3.4 Walks และ Paths

<u>นิยาม</u> ให้ G เป็นกราฟ walk จาก vertex u ไป vertex v ของ G คือ ลำดับใดๆของ vertices และ edges

$$v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,e_3,v_3,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$$

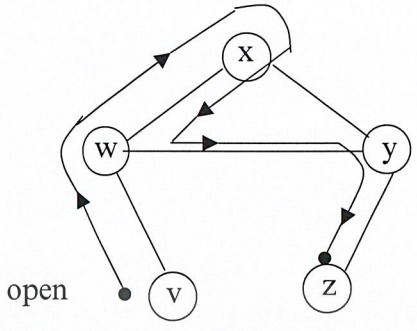
ซึ่ง $v_0 = u$, $v_n = v$ และแต่ละด้าน e_i incedent กับ vertices v_{i-1} และ v_i

ถ้า u= v แล้ว Walk จะเรียกว่า closed กรณีอื่นๆ เรียกว่า close กรณีอื่นๆ เรียกว่า Open

Length ของ walk คือจำนวนของด้าน n มี walk ของ single vertex v แต่เป็น tririal walk จาก v ไป v ซึ่ง length เป็น ศูนย์

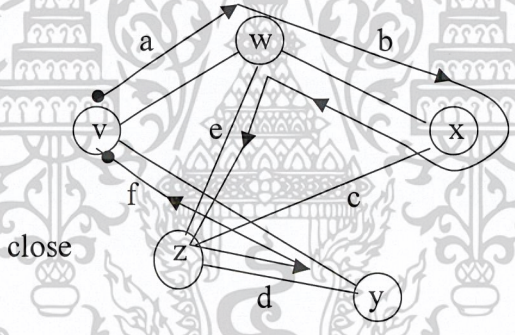
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> sequence v,a,w,b,x,b,w,e,y,d,z เป็น walk จาก v ไป z



รูปที่ 2.59

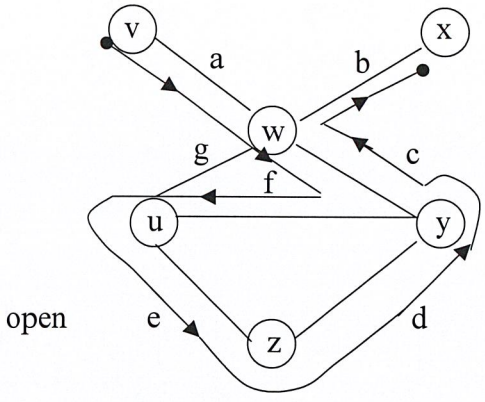
Sequence v,a,w,b,x,b,w,e,z,d,y,f,v เป็น walk จาก v ไป v



รูปที่ 2.60

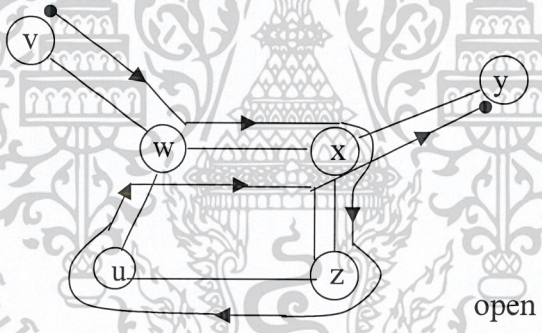
Sequence v,a,w,c,y,f,u,e,z,d,y,c,w,b,x เป็น walk จาก v ไป x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.61

Sequence v,a,w,b,x,d,z,e,u,f,w,b,x,c,y เป็น walk จาก v ไป y



รูปที่ 2.62

Walk จาก u ไป v คือ a way of traveling จาก u ไป v ตามด้านของกราฯ แต่ walk ไม่ตำเป็นจะต้องไปเป็นทางเดินที่มีประสิทธิภาพที่จะไป

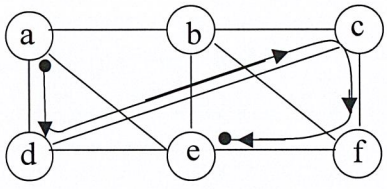
<u>นิยาม</u> path ในกราฟ G คือ walk โดยการตัด vertices และ edges ที่ซ้ำออก

ทุกๆ open walk จาก u to v ใน graph G contain path จาก u to v

ในหนังสือบางเล่มใช้ path แทน walk และใช้ simple path แทน path

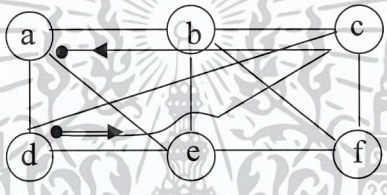
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด simple graph



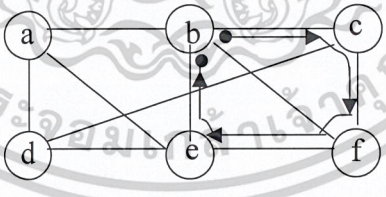
รูปที่ 2.63

a,d,c,f,e เป็น path ที่มี length 4 เนื่องจาก มี {a,d},{d,c},{c,f},{f,e} เป็นด้ายของ graph



รูปที่ 2.64

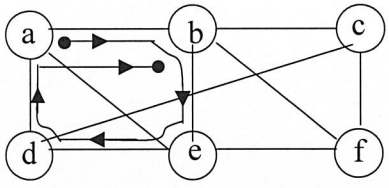
d,e,c,a ไม่เป็น path เนื่องจาก {e,c} ไม่เป็นด้านของกราฟ



รูปที่ 2.65

b,c,f,e,b เป็น circuit ที่มี length 4 เนื่องจาก {b,c},{c,f},{f,e},{e,b} เป็นด้านของ graph และ เริ่มต้นและสิ้นสุดที่ จุดเดียวกัน b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.66

a,b,e,d,a,b มี length 5 ไม่เป็น path เพราะ มีด้าน {a,b} ซ้ำสองหน

นิยาม กราฟ G จะเรียกว่า connected ถ้าทุกๆคู่อันดับของ vertices u,v ใน G มี path จาก u ไป v ใน G

กราฟจะกล่าวว่า connected ถ้ามี path ระหว่างทุกคู่ของ vertices ในกราฟ

ตัวอย่าง กราฟต่อไปนี้ Connected

รูปที่ 2.67 แสดง Connected Graphs

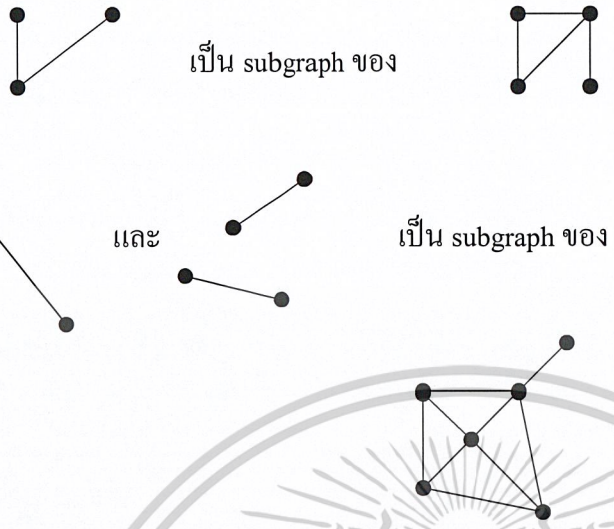
กราฟต่อไปนี้ ไม่ Connected

รูปที่ 2.68 แสดง ไม่ Connected Graphs

นิยาม ให้ G เป็นกราฟของเซตของ Vertices V และเซตของ edes E = G = (V,E) และให้ H เป็นกราฟของเซตของ vertices W และเซตของ edges F = H = (W,F) แล้ว H เป็น subgraph ของ Gถ้า $W \subseteq V$, $F \subseteq E$ ล้าน $e \in F$ incedent กับ vertex $v \in w$ ในกราฟ H ก็ต่อเมื่อ $e \in E$ incedent กับ $v \in G$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

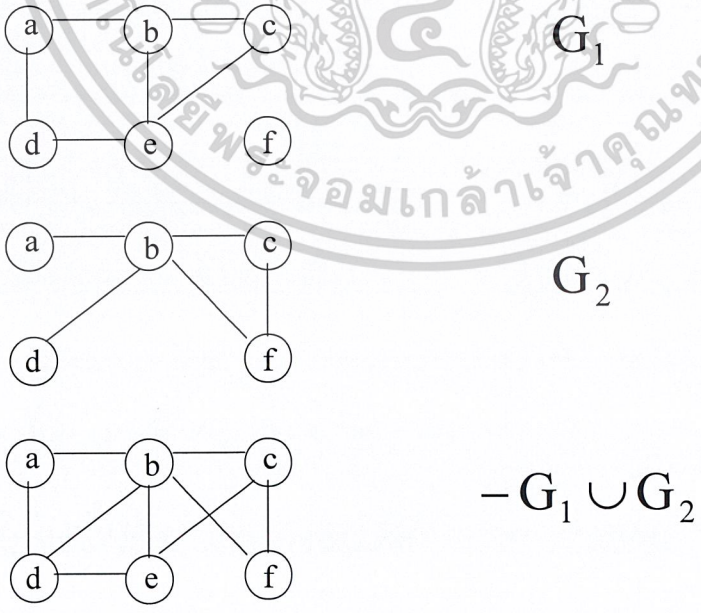
Subgraph H เป็น spanning subgraph ถ้า H = G



รูปที่ 2.69

<u>นิยาม</u> union ของสอง simple graphs $G_1 = (V_1,E_1)$ และ $G_2 = (C_2,E_2)$ เป็น simple graph ซึ่ง vertex คือเซตของ $V_1 \cup V_2$ และ edge คือเซต $E_1 \cup E_2$ union ของ G_1 และ G_2 แทนด้วย $G_1 \cup G_2$

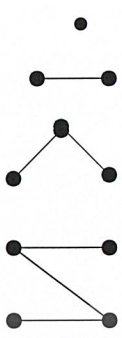
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด G_1 และ G_2



รูปที่ 2.70

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Connected graph ใดๆที่มี n vertices จะมีอย่างน้อย n-1 ด้าน



1 vertices 0 edges

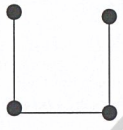
2 vertices 1 edges

3 vertices 2 edges

มี 3 ด้านได้ไหม

ได้แต่ < 2 connected

4 vertices 3 edges



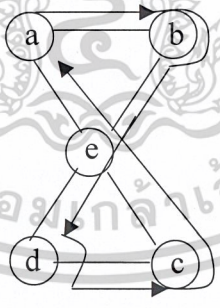
น้อยกว่านี้ไม่ได้

n vertices n-1 edges

นิยาม Euler circuit ในกราฟ G คือ closed walk ใน G ซึ่งแต่ด้านของ G ปรากอยู่เพียงครั้งเดียวเท่านั้น

นิยาม Euler path ใน G คือ path ที่ประกอบด้วย ทุกๆด้านของ G ที่ไม่มีการใช้ด้านใดซ้ำ

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.71

a,b,e,d,c,e,a

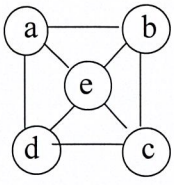
ไม่มีด้านซ้ำ มีจุดยอดซ้ำได้

ไม่มีด้านเหลือ ผ่านทุกด้านของกราฟ

เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟรูปนี้เป็น Euler circuit หรือจะเป็น a,e,c,d,e,b



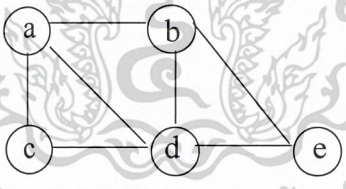
รูปที่ 2.72

a,d,e,b,a,e,c,d เหลือ b,c a,b,e,a,d,e,c,b เหลือ d,c

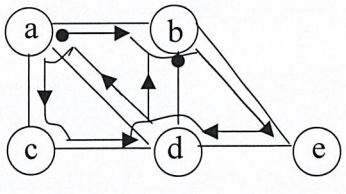
มีด้านกราฟเหลือ

จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกัน กราฟรูปนี้ไม่เป็น Euler circuit

H3 มี Euler path



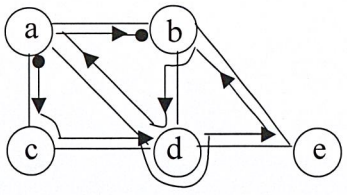
รูปที่ 2.73



a,b,e,d,a,c,d,b

รูปที่ 2.74

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



a,b,e,d,a,c,d,b

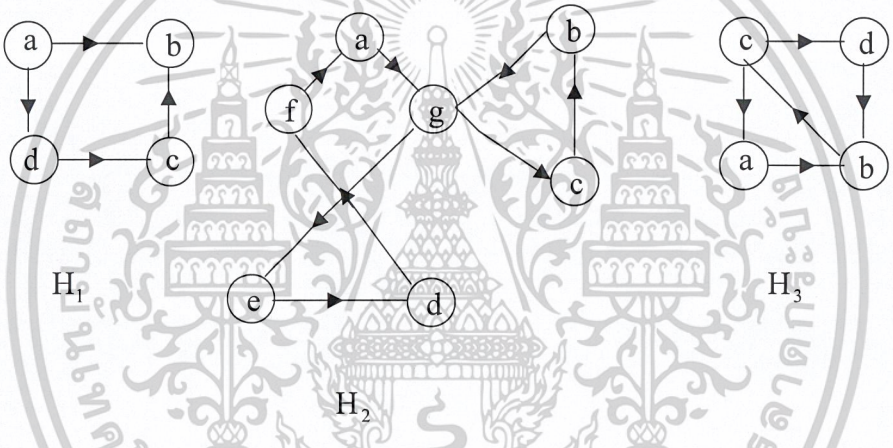
รูปที่ 2.75

จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดไม่ใช่จุดเดียวกัน

ไม่มีด้านซ้ำไม่มีด้านเหลือ กราฟรูปนี้ไม่เป็น Euler circuit

แต่มี Euler path

<u>ตัวอย่าง</u> กราฟใดต่อไปนี้ เป็น Euler circuit กราฟใดไม่เป็น และกราฟที่ไม่เป็นมี Euler path หรือไม่



รูปที่ 2.76

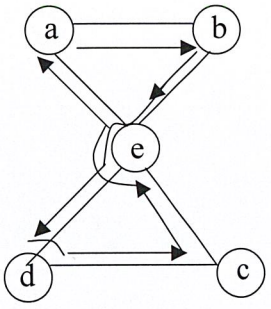
H_1 : a, d, c, b
H_3 : c, a, b, c, d, b

} เริ่มต้นและสิ้นสุดต่างกัน
ไม่ใช่ Euler circle

H_2 : a, g, c, b, g, e, d, f, a
เริ่มต้น+สิ้นสุด จุดเดียวกัน ไม่มีด้านซ้ำ ไม่มีด้านเหลือ = H_2 เป็น Euler circuit

H_3 มี Euler path : c,a,b,c,d,b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

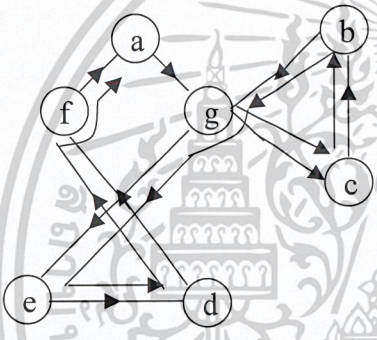


Euler circuit
a,b,e,d,c,e,a

รูปที่ 2.77

deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = 2

deg(e) = 4



Euler circuit

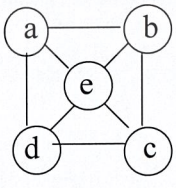
A,g,c,b,g,e,d,f,a

รูปที่ 2.78

deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = 2

deg(g)= 4

ทุก vertex มี degree เป็นจำนวนคู่

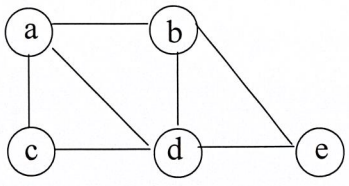


deg(a) = deg(b) = deg(c) = deg(d) =3

deg(e)=4

รูปที่ 2.79

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



deg(a) = deg(c) =2

deg(b) = deg(d)

deg(e)=3

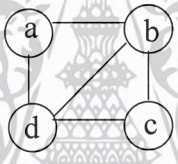
รูปที่ 2.80

บาง vertex มี degree เป็นจำนวนคู่ บาง vertex มี degree เป็นจำนวนคี่ ไม่เป็น Euler circuit

<u>ทฤษฎี</u> ให้G เป็น connected Graph แล้ว G เป็น Euler circuit ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ vertex มีดีกรีเป็นจำนวนคู่

<u>ทฤษฎี</u> connected graph ที่มี vertex อย่างน้อยที่สุด 2 vertex มี Eulerian path ก็ต่อเมื่อ มี0หรือ 2 vertices เท่านั้น ที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ และ path จะมี vertices ที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่เป็นจุดปลาย

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.81

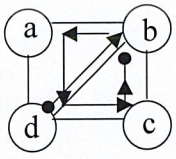
deg(a) = deg(c) =2

deg(b) = deg(d)=3

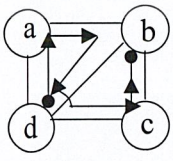
มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่ อยู่ 2 vertices

ดังนั้นมี Euterian path

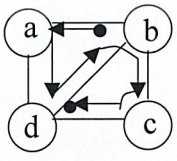
โดย vertices ที่มี degree คี่เป็น endpoint



d,b,a,d,c,b



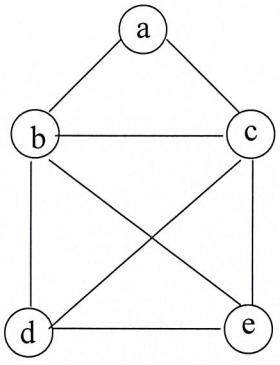
d,a,b,d,c,b



b,a,d,b,c,d

รูปที่ 2.82

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



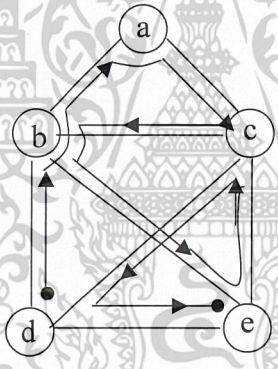
รูปที่ 2.83

deg(a) =2

deg(b) = deg(c)=4

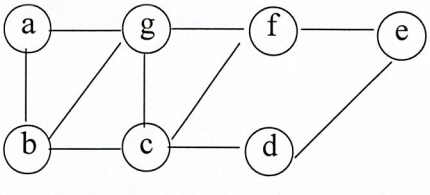
deg(d) = deg(e)=3

มี degree ที่มีคี่อยู่ 2 vertices มี Eulerian path



รูปที่ 2.84

หรือ d,e,c,a,b,c,d,b,



รูปที่ 2.85

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

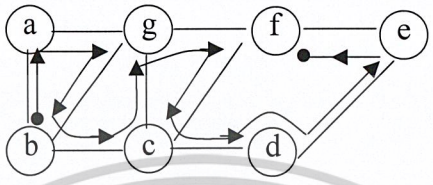
deg(a)=deg(e)=deg(d)=2

deg(b)=deg(f)=3

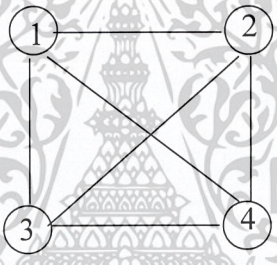
deg(c)=deg(g)=4

มี degree ที่มีจำนวนคี่ 2 vertices มี Euler path

b,a,g,b,c,g,f,c,d,e,f



รูปที่ 2.86

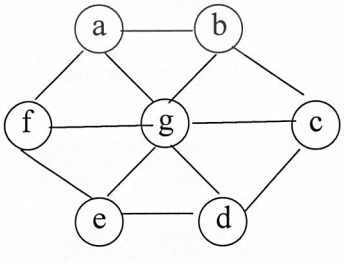


รูปที่ 2.87

deg(1)=deg(2)=deg(3)= deg(4)=3

มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่เกิน 2 vertices

ไม่มี Eulerian path



รูปที่ 2.88

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

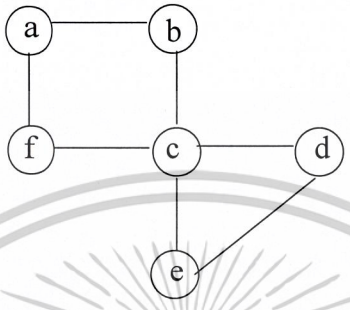
deg(a)=deg(b)= deg(c)=deg(d)= deg(e)= deg(f)=3

deg(g)=6

มีดีกรีที่เป็นจำนวนคี่เกิน 2 ไม่มี Eulerian path

ในการหา Euler circuit มีวิธีการดังนี้

พิจารณากราฟ G ดังรูป



รูปที่ 2.89

แต่ละ vertices มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ทั้งหมดมี Euler circuit

ในการหา Euler circuit

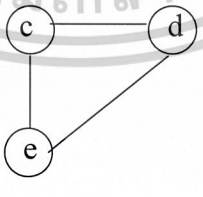
กำหนด simple circuit ซึ่งเริ่มต้น ณ vertex ใดๆ ของ G เลือก vertex a

หา path ในรูปแบบ เริ่มต้นที่ a จบที่ a {a,x},…,{y,a}

ให้เป็น circuit ที่ยาวที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

จาก a เลือก {a,f},{f,c},{c,b} และ {b,a}

จะได้ circuit a,f,c,b,a แล้ว ลบ circuit a,f,c,b,a ออกจากกราฟ จะได้ subgraph ดังนี้

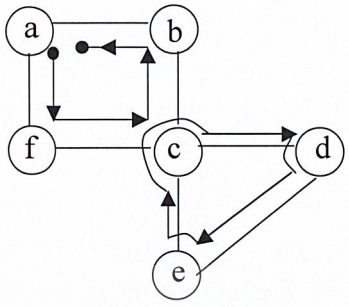


รูปที่ 2.90

ซึ่งทุก vertex มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ทั้งหมดทำซ้ำ เลือก vertex หา path ในรูปแบบ เริ่มต้นและจบที่ vertex ที่เลือก ให้เป็น circuit ที่ยาวที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เลือก c จาก c เลือก {c,d},{d,e},{e,c}

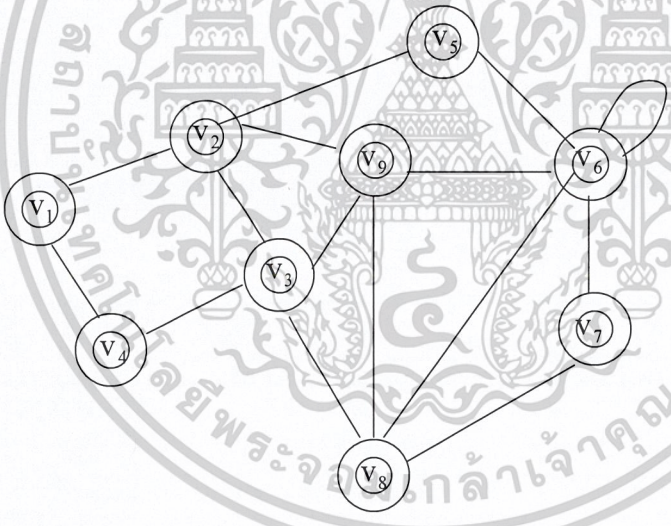
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ circuit c,d,e,c เพิ่ม circuit ของ subgraph เข้าไปใน circuit แรกจาก a,f,c,b,a และ c,d,e,c จะได้ a,f,c,d,e,c,b,a เป็น Euler circuit



รูปที่ 2.91

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา Euler circuit ของกราฟดังรูป



รูปที่ 2.92

$\deg(v_1) = 2$ $\deg(v_4) = 2$ $\deg(v_7) = 2$

$\deg(v_2) = 4$ $\deg(v_5) = 2$ $\deg(v_8) = 4$

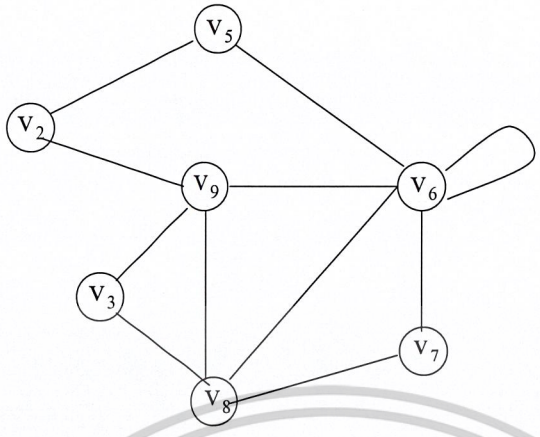
$\deg(v_3) = 4$ $\deg(v_6) = 6$ $\deg(v_9) = 4$

ทุก vertex มี degree เป็นจำนวนคู่ มี Euler circuit

เลือก v_1 จาก v_1 เลือก path $\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_1\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเลือก v_1,v_2,v_3,v_4,v_1 ตัด circuit นี้ ออกจากกราฟ



รูปที่ 2.93

เลือก v_2 จาก v_2 เลือก path

$\{v_2,v_3\},\{v_5,v_6\},\{v_6,v_7\},\{v_7,v_8\},\{v_8,v_3\},\{v_3,v_9\},\{v_9,v_2\}$

จะได้ circuit $v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_3,v_9,v_2$ แล้วตัด circuit นี้ออกจากกราฟ

รูปที่ 2.94

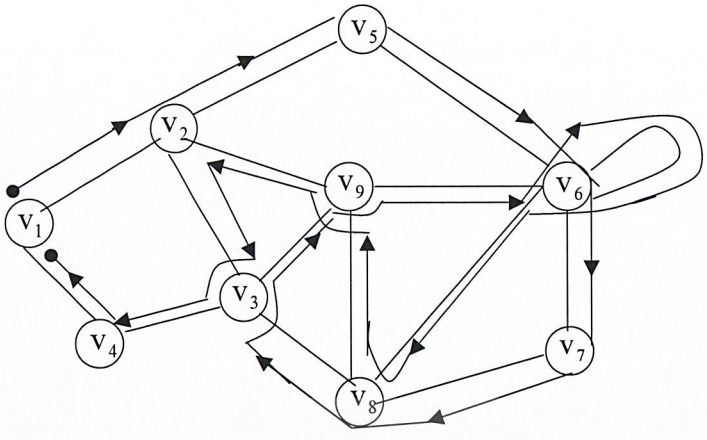
เลือก v_9 จาก v_9 เลือก path $\{v_9,v_6\},\{v_6,v_6\},\{v_6,v_8\},\{v_8,v_9\}$ ได้ circuit

v_9,v_6,v_6,v_8,v_9 จะได้ $v_1,v_2,v_3,v_4,v_1,v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_3,v_9,v_2$

และ v_9,v_6,v_6,v_8,v_9 ดังนั้น Euler circuit

$v_1,v_2,v_5,v_6,v_7,v_8,v_3,v_9,v_6,v_6,v_8,v_9,v_2,v_3,v_4,v_1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

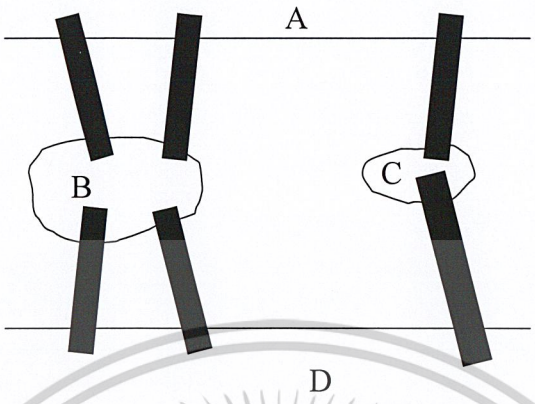


รูปที่ 2.95

รูปที่ 2.96

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

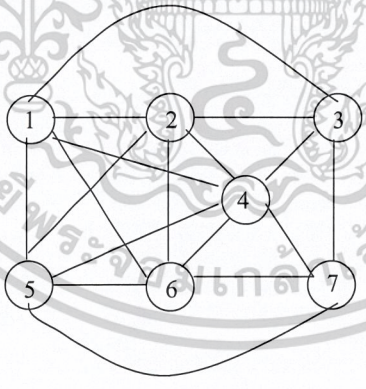
<u>ตัวอย่าง</u> ปัญหาสะพานโคนิกสเบอร์ก เกาะสองเกาะอยู่กลางแม่น้ำพรีเกลในเมืองโคนิกสเบอริก เชื่อมด้วยสะพานติดต่อถึงกัน และเชื่อมกับฝั่งแม่น้ำ ดังรูป



รูปที่ 2.97

ปัญหาคือ เริ่มที่จุดใดๆ A,B,C หรือ D เดินข้ามสะพานทุกสะพาน และแต่ละสะพานเดินผ่านได้ครั้งเดียว แล้วให้กลับมาที่เดิม ทางเดินในปัญหานี้คือ Euler circuit นั่นเอง

จากรูป เขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 2.98

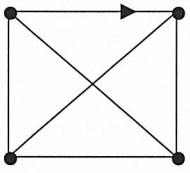
2.3.5Planarity

<u>นิยาม</u> กราฟ G เรียกว่าอยู่บนระนาบเดียวกันได้ (planar) ถ้าสามารถเขียนกราฟบนระนาบได้โดยไม่มีด้านใดตัดกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเขียนกราฟบนระนาบไม่ให้มีด้านตัดกัน กราฟจะแบ่งระนาบออกเป็นบริเวณที่มีขอบเขตเป็นด้านของกราฟเรียกบริเวณนี้ว่า หน้า (faces)

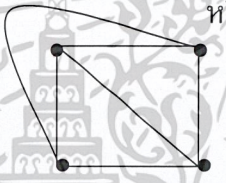
การเขียนกราฟบนระนาบที่มีด้านตัดกัน ไม่ได้หมายความว่ากราฟนั้นไม่อยู่บนระนาบเดียวกันได้ เช่น



รูปที่ 2.99

กราฟ k_4 สามารถเขียนได้ จะพบว่ามีด้านตัดกัน

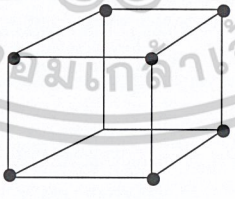
ถ้าเขียนใหม่เป็น หรือ



จะพบว่าไม่มีด้านตัดกัน

กราฟ k_4 สามารถเขียนในรูปที่มีด้านตัดกัน หรือด้านไม่ตัดกัน เนื่องกันกราฟ k_4 สามารถเขียนในรูปแบบด้านไม่ตัดกันได้ ดังนั้น k_4 อยู่บนระนาบเดียวกันได้

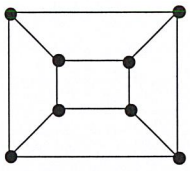
<u>ตัวอย่าง</u> กราฟ ดังรูป



รูปที่ 2.100

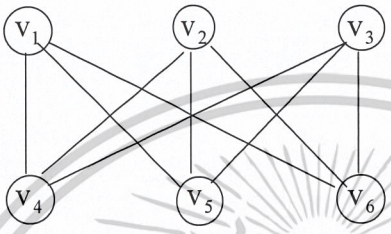
เป็น planar เพราะสามารถเขียนในรูปที่ด้านไม่ตัดกันได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



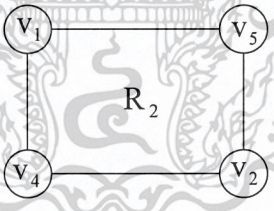
รูปที่ 2.101

<u>ตัวอย่าง</u> $k_{3,3}$ ดังรูปเป็น planar หรือไม่



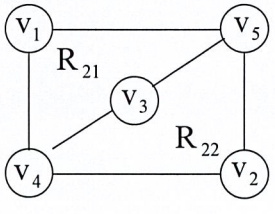
รูปที่ 2.102

จะพบว่า v_1 และ v_2 เชื่อมกับ v_4 และ v_5 ทั้งคู่ ซึ่ง 4 ด้านนี้จะเป็น closed curve ซึ่งแบ่งระนาบเป็นสองบริเวณ R_1 และ R_2



รูปที่ 2.103

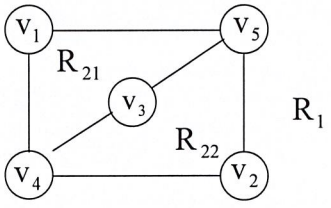
v_3 เชื่อมกับ v_4 และ v_5 ดังนั้น v_3 อยู่ใน R_1 หรือ R_2 ก็ได้
ถ้า v_3 อยู่ใน R_2 จะได้



รูปที่ 2.104

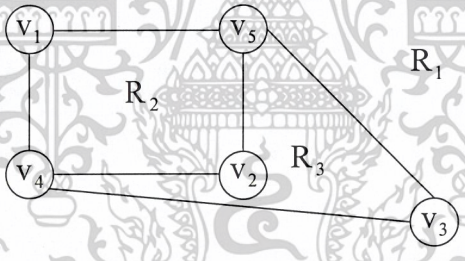
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้าน v_3 และ v_4 กับ v_3 และ v_5 แบ่ง R_2 เป็นสองส่วน R_{21},R_{22}
v_6 เชื่อมกับ v_1และ v_2



รูปที่ 2.105

ถ้าไม่ v_6 ใน R_{21} เมื่อเขียนด้าน v_2 และ v_6 จะตัดกับด้านอื่น
ถ้าใส่ v_6 ใน R_{22} เมื่อเขียนด้าน v_1 และ v_6 จะตัดกับด้านอื่น
ดังนั้น $k_{3,3}$ ไม่เป็น planar graph
ถ้า v_3 อยู่ใน R_1 จะมี R_3 เกิดขึ้นเมื่อลาก $\{v_3,v_5\}$ และ $\{v_3,v_4\}$

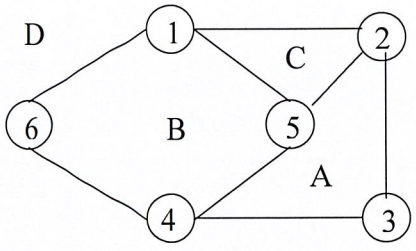


รูปที่ 2.106

v_6 มีด้านไป v_1,v_2,v_3
ถ้า v_3 อยู่ใน R_2 แล้ว $\{v_3,v_6\}$ ตัดด้านอื่น
ถ้า v_6 อยู่ใน R_2 แล้ว $\{v_1,v_6\}$ ตัดด้านอื่น
ถ้า v_6 อยู่ใน R_2 แล้ว $\{v_2,v_6\}$ ตัดด้านอื่น
ดังนั้น $k_{3,3}$ ไม่เป็น planar graph

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากราฟ



รูปที่ 2.107

ไม่มีด้านใดตัดกันเลย มี 6 vertices และ 8 edges

หน้า A ถูกล้อมรอบด้วย circuit 5,2,3,4,5

หน้า B ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1,5,4,6,1

หน้า C ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1,2,5,1

หน้า D ถูกล้อมรอบด้วย circuit 1,2,3,4,6,1

มีหน้าภายใน 3 หน้า มีหน้าภายนอก 1 หน้า รวม 4

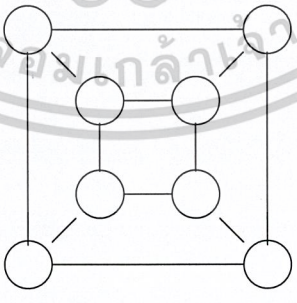
ให้ P = 6 vertices

Q = 8 edges

R = faces $\Longrightarrow$ 6-8+4 = 2

P-Q-R = 2

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.108

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มี P = 8 vertices

Q = 12 edges

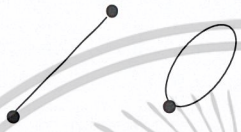
R = 6 faces

p-Q-R = 8-12+6 = 6

Euler's Theorem ให้ G เป็น connected planar graph ซึ่งมี p vertices และ q edges ที่อยู่บนระนาบในรูปแบบที่มี r faces แล้ว

$$p-q+r = 2$$

<u>พิสูจน์</u>



กราฟซึ่งมี 1 ด้าน อาจมี 2 vertices หรือ 1 vertex

ถ้า 2 จุด 1 ด้านไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วน ดังนั้นมี 1

R_2 ถ้า 1 จุด 1 ด้าน มี loop มีการแบ่งระนาบเป็น2 ส่วน ดังนั้นมี 2

P = 2 vertices ,q = 1 edgs, r = 1 face

p-q+r = 2-1+1 = 2

P = 1 vertices ,q = 1 edgs, r = 2 face

p-q+r = 1-1+2 = 2

กราฟซึ่งมีด้าน 2 ด้าน อาจมี 3 vertices หรือ 2 vertices

ถ้า 3 จุด 2 ด้าน ต่อกันไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วนมี 1 หน้า

ถ้า 2 จุด 2 ด้าน มี circuit มีการแบ่งระนาบเป็นสองส่วนมี 2 หน้า

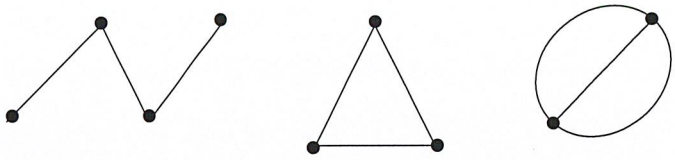
P = 3 vertices ,q = 2 edgs, r = 1 face

p-q+r = 3-2+1 = 2

P = 2 vertices ,q = 2 edgs, r = 2 face

p-q+r = 2-2+2 = 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.109

กราฟซึ่งมี 3 ด้าน อาจมี vertices 4,3 หรือ 2

ถ้า 4 จุด 3 ด้าน ไม่มีการแบ่งระนาบเป็นส่วนมี 1 หน้า

P = 4 vertices ,q = 3 edgs, r = 1 face

p-q+r = 4-3+1 = 2

กราฟซึ่งมี 3 ด้าน 3 จุด แบ่งระนาบเป็น2 ส่วน มี 2 หน้า

P = 3 vertices ,q = 3 edges, r = 2 face

p-q+r = 3-3+2 = 2

กราฟซึ่งมี3 ด้าน 2 จุด แบ่งระนาบเป็น 3 ส่วน มี 3 หน้า

P = 2 vertices ,q = 3 edgs, r = 3 face

p-q+r = 2-3+3 = 2

จะพิจารณา กรณีมี circuit และไม่มี circuit

กรณีไม่มี circuit

กราฟจะมีหน้าเดียว : r = 1

จำนวน vertices ทั้งหมด p' : $p=p'$

จำนวน edges ต้องน้อยกว่าจุดยอดอยู่ 1 : $p'-1$

$Q=p'-1$

แล้ว $p-q+r = p'-(p'-1)+1 = 2$

กรณีมี circuit

กราฟจะมีจำนวนหน้า $r \geq 2$

ให้ e เป็นด้านของกราฟบน circuit ด้าน e ต้องอยู่บนขอบของสองหน้าของกราฟ

ถ้านำ e ออกจากกราฟสองหน้าของกราฟจะรวมเป็นหน้าเดียว จะได้กราฟซึ่ง

จำนวน vertices คือ $p' = p$

จำนวน edges คือ $q' = q-1$

จำนวน faces คือ $r' = r-1$

จาก inductive hypothesio

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$p'-q'+r' = 2$$

ดังนั้น $p-q+r = p'-(q'+1)+(r'+1)$

$= p'-q'+r'$

$= 2$

3 ด้าน 1 หน้า

Simple

Q=3,r=1

3r=3,2q=6

3r<2q

3ด้าน 1 หน้า

simple

q=3,r=2

3r=6,2q=6

3r=2q

3ด้าน 1 หน้า

ไม่ใช่ simple

q=3,r=3

3r=9,2q=6

3r>2q

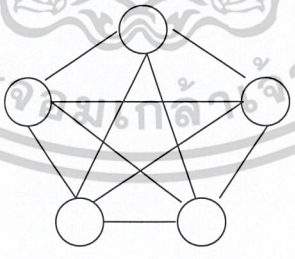
รูปที่ 2.110

<u>ทฤษฎี</u> ให้ G เป็น planar simple graph ซึ่งมี p vertices และ q edges อยู่บนระนาบซึ่งมี r faces

สมมติ q>1 แล้ว $3r \leq 2q$

สมมติ q>1 แล้ว $3r \leq 2q$

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.111

มี 5 vertices 10 edges

จาก Euler's theorem p-q+r = 2

5-10+r = 2 แล้ว r =7

ถ้าเป็น planar simple graph : $3r \leq 2q$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$3x7 \leq 2x10$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น กราฟไม่อยู่บนระนาบเดียวกันได้

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติ มี connected planar simple graph ที่มี 20 vertices แต่ละ vertices มี degree 3 กราฟนี้จะมีทั้งหมดกี่หน้า

<u>วิธีทำ</u> กราฟมี 20 vertices : v = 20

แต่ละ vertices มี degree 3

Sum of degree of vertices = 3x20 = 60

ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอดเป็น 2 เท่าของจำนวนด้าน

$2L = 60 \implies L = 30$

จาก Euler's formular : p-q+r = 2

20-30+r = 2

R = 2+30-20 = 12

ดังนั้นกราฟนี้มีทั้งหมด 12 หน้า

connected planar simple graph จะแบ่งระนาบออกเป็นบริเวณต่างๆเรียกว่า หน้า จะมีหน้าเกิดขึ้นได้ต้องมีอย่างน้อย 3 ด้าน (เป็น simple graph ไม่มี multiple edges และไม่มี loop)

4จุดยอด	4จุดยอด	4จุดยอด
6ด้าน 4 หน้า	6ด้าน 4 หน้า	4ด้าน 2 หน้า

รูปที่ 2.112

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้าน	หน้า	2xด้าน	3xหน้า	
3	2	6	6	
6	4	12	12	
4	2	8	6	$\Rightarrow$ 2xด้าน $\geq$ 3xหน้า

<u>ทฤษฎี</u> ให้G เป็น planar simple graph ที่มี p vertices และ q edges อยู่บนระนาบที่มี r faces เมื่อ q>1 แล้ว $2q \geq 3r$

บทแทรก ถ้า G เป็น connected planar simple graph ที่มี q ด้านและ p จุดยอด เมื่อ $p \geq 3$ แล้ว $q \leq 3p-6$

<u>พิสูจน์</u> จาก $2q \geq 3r$

จะได้ $(2/3)q \geq 2$

จาก $p-q+r = 2$: Euler theorem

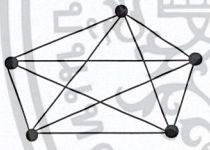
หรือ $r = q-p+2$

จะได้ $q-p+2 \leq (2/3)q$

$q/3 \leq p-2$

หรือ $q \leq 3p-6$

<u>ตัวอย่าง</u>



พิจารณา กราฟ k_5 มี 5 จุดยอด-10ด้าน q = 10,p =5

3p-6 = 3x5-6 = 9 แล้ว $q \leq 3p-6$ ไม่เป็นจริง

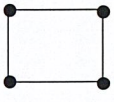
ดังนั้น k_5 ไม่เป็น planar graph

บทแทรก connected planar simple graph ที่มี q ด้าน และ p จุดยอด ซึ่ง $p \geq 3$ และไม่มี circuit ที่มี length 3 แล้ว $q \leq 2p-4$

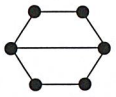
<u>พิสูจน์</u> ไม่มี loop ไม่มี multi edges และไม่มี simple circuit ที่มี length 3 ดังนั้น circuit จะมีอย่างน้อย 4 ด้าน นั่นคือ

$2q \geq 4r$

ไม่มี simple circuit ที่มี length 3

	จุดยอด	ด้าน	หน้า	2xด้าน	4xหน้า
	4	4	2	8	8
	5	5	2	10	8
	6	6	2	12	8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



6	7	3	14	12

7	7	2	14	8

	2xด้าน	$\geq$	4xหน้า
	2q	$\geq$	4r
จาก	2q	$\geq$	4r
จะได้	r	$\leq$	q/2
จาก	r	=	q-p+2 : Euler theorem
จะได้	q-p+2	$\leq$	q/2
	q/2	$\leq$	p-2
หรือ	q	$\leq$	2p-4

<u>ตัวอย่าง</u>

พิจารณากราฟ $k_{3,3}$

ไม่มี circuit ที่มี length 3 มี 6 vertices และ q edges

$q = 9, p = 6$

$2p-4 = 2x6-4 = 8$

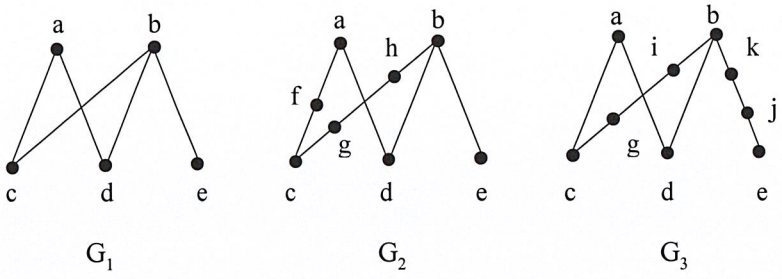
แล้ว $q \leq 2p-4$ ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $k_{3,3}$ เป็น nonplanar graph จะพบว่า $k_{3,3}$ และ k_5 ไม่เป็น planar

ดังนั้น กราฟ จะไม่เป็น planar ถ้ามี $k_{3,3}$ หรือ k_5 เป็น subgraph

ถ้ากราฟเป็น planar แล้ว โดยการตัดด้าน {u,v}ใดๆ ของกราฟออกหนึ่งด้าน แล้วเติมจุดยอดใหม่ w ลงไป แล้วจะมีด้าน {u,v} และ {w,v} เกิดขึ้นการกระทำนี้เรียกว่า elementary subdivision กราฟ $G_1 = (v_1, E_1)$ และ $G_2 = (v_2, E_2)$ เรียกว่า homomorphic ถ้าสามารถลดรูปไปสู่กราฟรูปเดียวกันโดยลำดับของ elementary subdivision

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

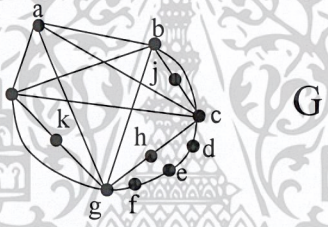


รูปที่ 2.113

G_2 และ G_3 homomorphic กัน จาก G_1

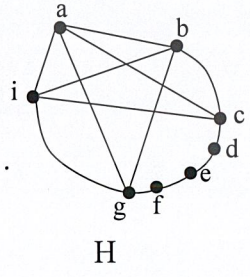
Kuratowski 's theorem : กราฟ G เป็นกราฟที่ทำให้อยู่บนระนาบเดียวกันได้ ก็ต่อเมื่อ G ไม่มี subgraph ที่คล้ายแบบ (homomorphic) กับ k_5 หรือ $k_{3,3}$

<u>ตัวอย่าง</u> กราฟดังรูปเป็น planar หรือไม่



รูปที่ 2.114

โดยการตัดด้านที่ incident กับ h,j,k จะได้ H

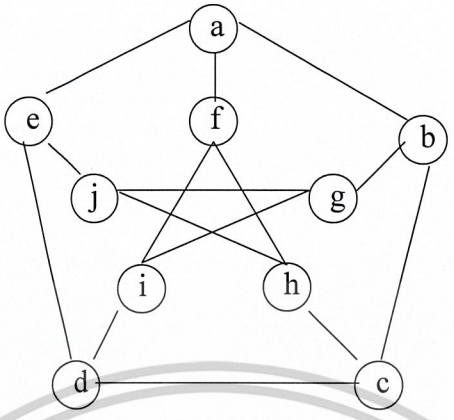


homomorphic กับ k_5 เนื่องจาก โดย sequence of elementary subdivision เติม d,e.f ที่ k_5 ได้ H ดังนั้น G เป็น nonplanar

รูปที่ 2.115

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

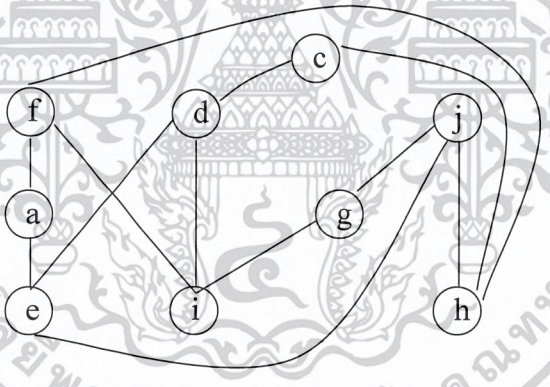
<u>ตัวอย่าง</u> กราฟดังรูปเป็น planar graph หรือไม่



G

รูปที่ 2.116

ตัด b และสามด้านที่มี b เป็นจุดปลาย



H

รูปที่ 2.117

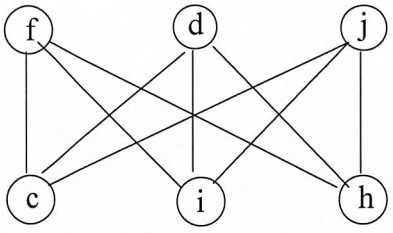
ลบ{d,h} เติม {d,c} และ {c,h}

ลบ{f,e} เติม {f,a} และ {a,c}

ลบ {I,j} เติม {I,g} และ {g,j}

ใน $k_{3,3}$ จะได้ H

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



$K_{3,3}$

รูปที่ 2.118

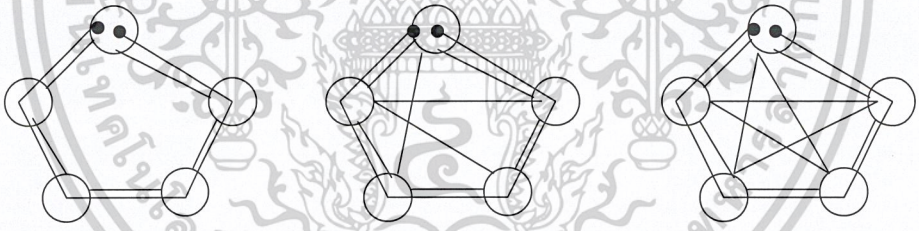
ดังนั้น G ไม่อยู่บนกราฟเดียวกันได้

2.3.6 Hamiltonian circuit

คือ cycle ในกราฟซึ่งผ่านทุก vertex เพียงครั้งเดียวเท่านั้น (ยกเว้นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุด อาจซ้ำกันได้) หรือ path $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n$ ในกราฟ G=(V,E) เรียกว่า Hamilton path ถ้า

$V= \{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ และ $x_i \neq x_j$ เมื่อ $0 \leq i<j \leq n$

Circuit $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_0$ เมื่อ n>1 ในกราฟ G=(V,E) เรียกว่า Hamilton circuit ในกราฟG=(V,E) เรียกว่า Hamilton circuit ถ้า $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n$ เป็น Hamilton path เช่น



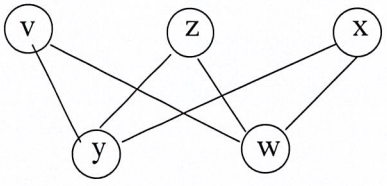
รูปที่ 2.119

วงจรออยเลอร์ จะผ่านด้านทุกด้าน โดยผ่านแต่ละด้านเพียงครั้งเดียว

วงจรฮามิลโทเนียน จะผ่านจุดยอดทุกจุด โดยผ่านแต่ละจุดเพียงครั้งเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> กราฟที่กำหนดมี Hamiltonian cycle หรือไม่



รูปที่ 2.120

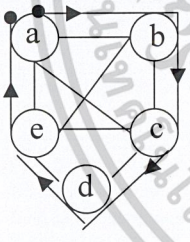
เริ่มจาก v มีสองทิศทางที่จะไปคือไป y หรือ w

ถ้าเลือก $v \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow w$ จาก w ถ้าเลือกไป v เป็น cycle แต่เหลือ x จาก w ถ้าเลือกไป x เลือกทิศทางกลับไปv โดยที่ไม่ใช่จุดยอดซ้ำ

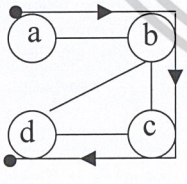
ดังนั้นกราฟที่กำหนดไม่เป็น Hamiltonian cycle แต่เหลือ x จาก w ถ้าเลือกไป x ไม่สามารถเลือกทิศทางกลับไป v โดยที่ไม่ใช้ จุดยอดซ้ำ

ดังนั้นกราฟที่กำหนดไม่เป็น Hamiltonian cycle แต่มี Hamilton path

V,y,z,w,x หรือ v,w,x,y,z



Hamiltonian cycle คือ a,b,c,d,e,a

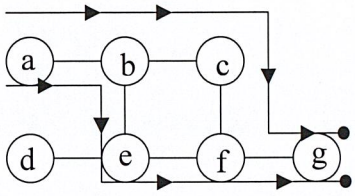


เลือก path a,b,c,d ไม่มีจุดยอดซ้ำใช้ทุกจุดยอด เป็น Hamilton path

รูปที่ 2.121

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

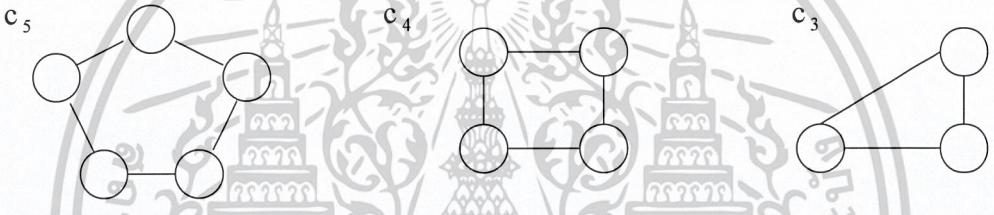
แต่ไม่สามารถกลับไป a โดยไม่ใช้{a,b} คือ b ซ้ำ ดังนั้นไม่เป็น Hamiltonian circuit



path a,b,c,f,g มี d และ d เหลือไม่มี Hamiltonian path และ Hamiltonian cycle

รูปที่ 2.122

จากตัวอย่าง กราฟที่มี vertex ที่มี degree 1 ไม่มี Hamilton circuit แต่อาจมี Hamilton path พิจารณา graph ต่อไปนี้



รูปที่ 2.123

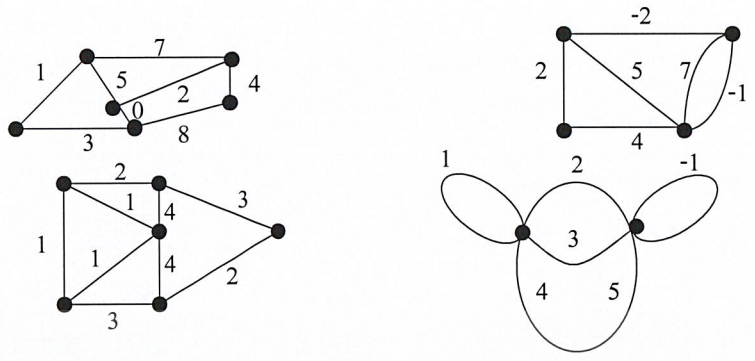
ทุกกราฟเป็น Hamiltonian circuit และแต่ละ vertex มี degree 2 ดังนั้น c_n เป็น Hamilton circuit เมื่อ $n \geq 3$

การพิจารณาว่ากราฟเป็นวงจรฮามิลโทเนียนหรือไม่นี้ค่อนข้างยาก การศึกษาเรื่องนี้มาจาก the traveling salesman problem คือการเดินทางไปทุกอำเภอในจังหวัด โดยเดินทางผ่านแต่ละอำเภอเพียงครั้งเดียวเท่านั้น ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ เนื่องจากแต่ละอำเภอเชื่อมด้วยถนนที่มีความยาวต่างๆกัน ปัญหานี้ก็คือการหาเส้นทางการเดินทางที่มีความยาวน้อยที่สุดเพื่อที่จะลดค่าใช้จ่ายในการเดินทางนั่นเอง

<u>นิยาม</u> weighted graph คือกราฟ G ซึ่งมี real-valued function W ที่เรียกว่า weighted function กำหนดบนเซตของด้าน

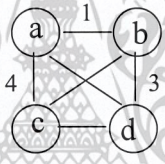
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> ต่อไปนี้คือตัวอย่าง weighted graph จำนวนบนแต่ละด้านคือ weighted function



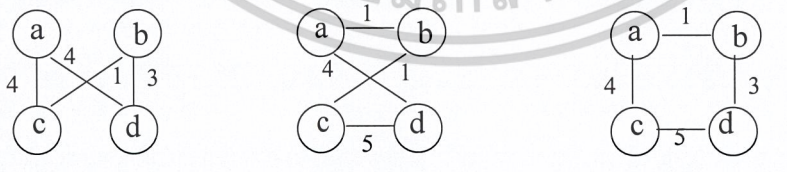
รูปที่ 2.124

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด weighted graph based on the complete graph K_4



รูปที่ 2.125

มี Hamilton cycle 3แบบ คือ



a,c,b,d,a
4+1+3+4=12
(a)

a,b,c,d,a
1+1+5+4=11
(b)

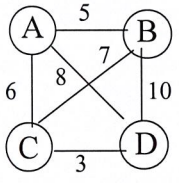
a,b,d,c,a
1+3+5+4=13
(c)

รูปที่ 2.126

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า a,b,c,d เป็นอำเภอและตัวเลขบนแต่ละด้านแทนระยะระหว่างแต่ละอำเภอแล้ว ควรจะเลือกเดินทางตาม Hamilton (b)

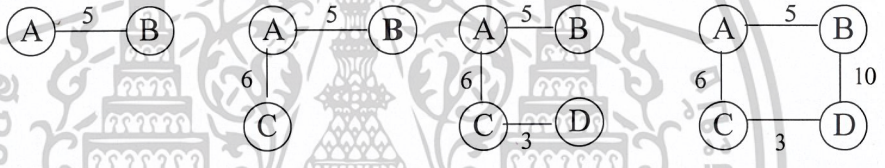
<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด



รูปที่ 2.127

จะเลือก Hamilton cycle อย่างไรจึงจะได้ผลรวมของ weighted function น้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 2.128

เลือก B เป็นจุดเริ่มต้น แล้วให้ B เป็น B' เพื่อแสดงว่าใช้ B ไปแล้ว ที่จุดเริ่มต้น ให้ w=0 จาก B มีด้าน 3 ด้าน เลือกด้านที่ weighted น้อยที่สุด คือ 5 ดังนั้นจาก B ต้องไป A

Path B,A

W=0+5=5

จากจุด A ให้ A เป็น A'

จาก A มี 3 ด้านเนื่องจากใช้ B ไปแล้ว จึงเหลือ 2 ด้าน เลือกด้านที่ weight น้อยที่สุด คือ 6 ดังนั้น จาก A ต้องไป C

Path B,A.C

W=5+6=11

จากจุด C ให้ C เป็น c'

จาก C มี3 ด้านแต่เนื่องจากใช้ A และ B ไปแล้วจึงเหลือทางเลือกเดียว คือจาก C ไป D weight คือ 3

Path B,A,C,D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

W = 11+3 = 14

จาก D มี 3 ด้าน แต่เนื่องจาก A,B,C ใช้ไปแล้ว ดูว่าตัวใดเป็นตัวเริ่มต้น เลือกตัวนั้น

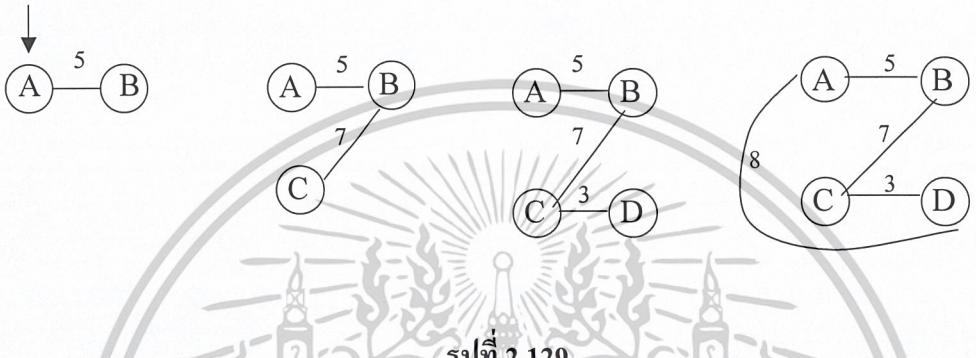
ดังนั้นจาก D ต้องไป B

Path B,A,C,D,B

W = 14+10 = 24

ได้ Hamilton cycle ได้ผลรวม weighted function แต่ไม่รู้ว่าน้อยที่สุดหรือไม่

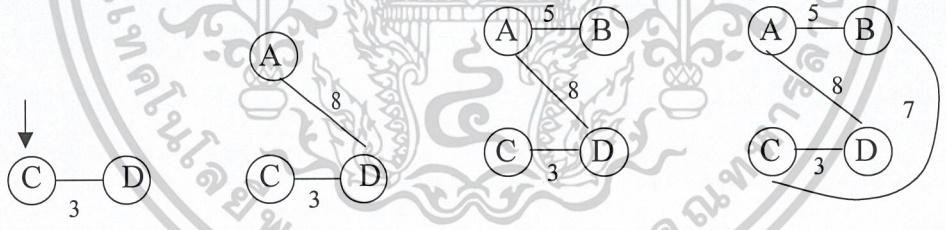
ต้องทำซ้ำในทำนองเดียวกัน โดยการเลือก A,C และ D เป็นจุดเริ่มต้น



รูปที่ 2.129

Path A,B,C,D,A

W = 5+7+3+8 = 23

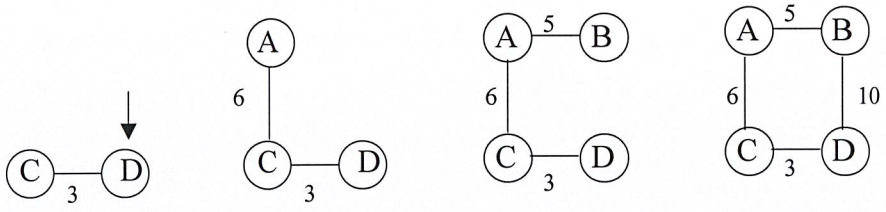


รูปที่ 2.130

ath C,D,A,B,D

W = 3+8+5+7 = 24

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.131

จะพบว่า path ที่เริ่มจาก A และ C คือ path เดียวกันและ w = 23 ในขณะที่ path ที่เริ่มจาก B และ D คือ path เดียวกัน และ w =24

ดังนั้น Hamiltonian circuit คือ

A,B,C,D,A หรือ C,D,A,B,C

และ weighted ที่น้อยที่สุด คือ 23

2.4 สีของกราฟ(Graph Coloring)

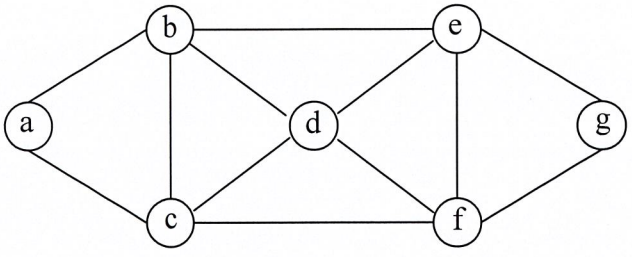
กำหนดกราฟ G ที่มี n จุด ต้องการระบายสีจุดของกราฟโดยให้จุดที่ประชิดกันมีสีต่างกัน จะเกิดปัญหาว่าจะใช้จำนวนสีน้อยที่สุดกี่สีจึงจะเพียงพอ จำนวนสีน้อยสุดนี้เรียกว่า chromatic number

นิยาม ให้ G เป็นกราฟที่ไม่มี loop จะกล่าวว่า G เป็น k-colourable ถ้าสามารถระบายสีแต่ละจุดของ G ด้วยสีใดสีหนึ่งในจำนวน k สีที่กำหนดให้ โดยมีเงื่อนไขว่าจุดสองจุดที่ประชิดกันต้องมีสีต่างกัน

นิยาม ถ้า G เป็น k-colourable แต่ไม่เป็น k-1 colourable แล้ว จะกล่าวว่า G เป็น k-chromatic และเรียก k ว่า chromatic number และจะใช้สัญลักษณ์ X(G) แทน chromatic number ของ G

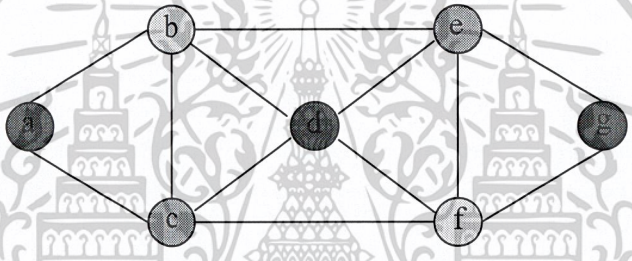
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่</u> จงหา chromatic number ของกราฟ ดังรูป



รูปที่ 2.132

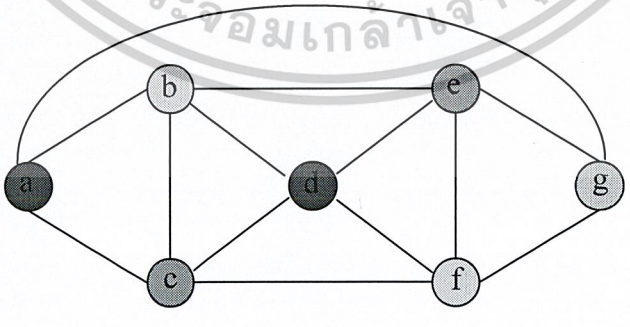
<u>วิธีทำ</u> X(G) = 3 และสามารถระบายสีได้ดังนี้



รูปที่ 2.133

<u>ตัวอย่างที่</u> จงหา chromatic number ของกราฟ ดังรูป เมื่อมีด้าน ag

<u>วิธีทำ</u> X(G) = 4 และสามารถระบายสีได้ดังนี้

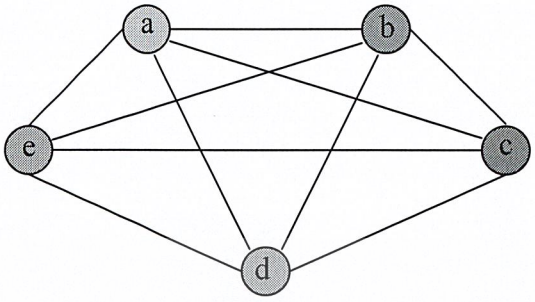


รูปที่ 2.134

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่างที่</u> จงหา chromatic number ของ K_5

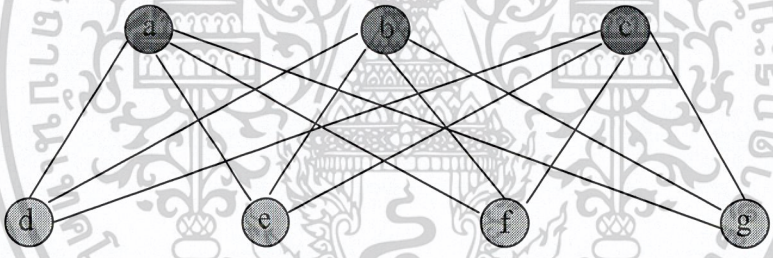
<u>วิธีทำ</u> $X(K_5) = 5$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้



รูปที่ 2.135

<u>ตัวอย่างที่</u> จงหา chromatic number ของ $K_{3,4}$

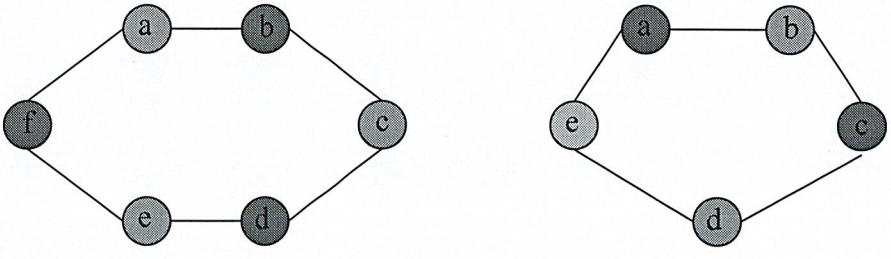
<u>วิธีทำ</u> $X(K_{3,4}) = 2$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้



รูปที่ 2.136

<u>ตัวอย่างที่</u> จงหา chromatic number ของ C_6 และ C_5

<u>วิธีทำ</u> $X(C_6) = 2$, $X(C_5) = 3$ และสามารถระบายสีได้ดังนี้



รูปที่ 2.137

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่าง	สูงสุด	Chromatic No	p+1
1	4	3	5
2	4	4	5
3	4	5	5
4	4	2	5
5	2	2	3
	2	3	3

Chromatic No $\leq$ p+1

Theorem ให้ G เป็นกราฟไม่มีลูป และดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G เท่ากับ p แล้ว G จะเป็น p+1-colourable

Theorem ถ้า G เป็นกราฟไม่มีลูป และดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G เท่ากับ p แล้ว chromatic no ของ G มี $X(G) \leq p+1$

Chromatic No. สำหรับ K_n

เนื่องจาก K_n คือ Simple graph ที่มีด้านหนึ่งด้านเชื่อมคู่จุดยอดที่แตกต่างกัน

ดังนั้นเมื่อกำหนดสีให้จุดยอดที่ 1 แล้วอีก n-1 จุดยอดที่เหลือ ต้องการสีที่แตกต่างกัน n-1 สีนั่นคือ chromatic No. สำหรับ K_n คือ

$$X(K_n) = N$$

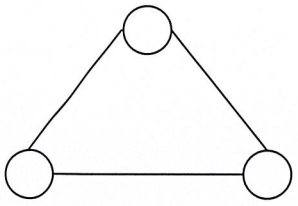
Chromatic No. สำหรับ $K_{m,n}$

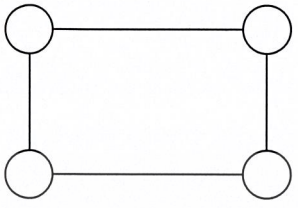
$K_{m,n}$ คือกราฟซึ่ง จุดยอด $V=V_1UV_2$ เมื่อ V_1 มีสมาชิก m ตัว , V_2 มีสมาชิก N ตัว และ V_1UV_2 = แต่ละจุดยอดใน V_1 เชื่อกับแต่ละจุดยอดใน V_2 เพียง 1 ด้านเท่านั้น ดังนั้นถ้ากำหนดสีที่ 1 ให้กับ ทุกจุดยอดใน V_1 ซึ่งมีจุด m จุด และกำหนดสีที่ 2 ให้กับทุกจุดยอดใน V_2 ซึ่งมี n จุด เมื่อลากด้าน จะพบว่าจุดปลายของแต่ละด้านมีสีต่างกันเสมอ

นั่นคือ Chromatic No. สำหรับ $K_{m,n}$ คือ $X(K_{m,n}) = 2$

Chromatic No. สำหรับ C_n

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าn=3  $X(C_n)=3$

ถ้า n=4  $X(C_n)=2$

รูปที่ 2.138

ในการกำหมดสีสำหรับ C_n นี้ ให้เลือกจุดยอด1 จุด กำหนดสีที่ 1 ลงไปที่จุดที่1นี้ แล้วเดินตามกราฟในทิศทวนเข็มนาฬิกาใส่สีที่ 2 ลงไปที่จุดที่2นี้ แล้วเดินต่อไปโดยใส่สีที่ 1 ลงไปจุดที่ 3 แล้วใส่สีที่ 2ลงไปที่จุดที่4 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

รูปที่ 2.139

ถ้า N เป็นจำนวนคู่ จะพบว่าใช้เพียง 2 สีก็พอแล้ว แต่ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะพบว่า จุดยอดที่ n จะมีสีเดียวกับจุดยอดที่1 ดังนั้นในกรณี n เป็นเลขคี่ จุดยอดที่ n ต้องใส่สีที่ 3 จึงต้องใช้สี 3 สี นั่นคือ Chromatic No. สำหรับ C_n คือ

$X(C_n)=2$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่

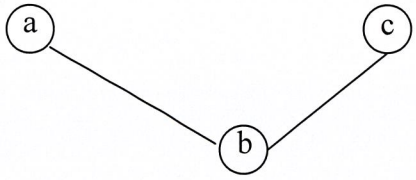
และ $X(C_n)=3$ ถ้า n เป็นจำนวนคี่

2.4.1 Chromatic Polynomial

<u>นิยาม</u> ให้ G เป็น Simple graph และให้ $P_G(K)$ และจำนวนวิธีของการระบายสีจุดของ G ด้วยสี k โดยที่จุดประชิดกันต้องมีสีที่ต่างกัน และจะเรียกว่า P_G ว่า Chromatic Polynomial ของ G

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง ให้ G เป็นกราฟดังรูป



รูปที่ 2.140

ถ้ามีสีทั้งหมด K สี

จุด b สามารถระบายสีได้ k สี

จุด a และจุ c สามารถระบายสีได้ k-1 สี

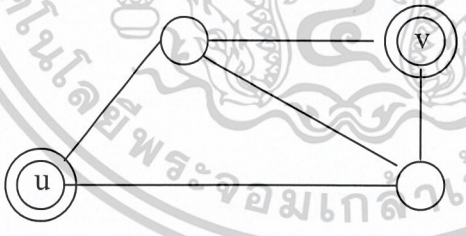
ดังนั้น P_g (k) = k(k-1)(k-1)

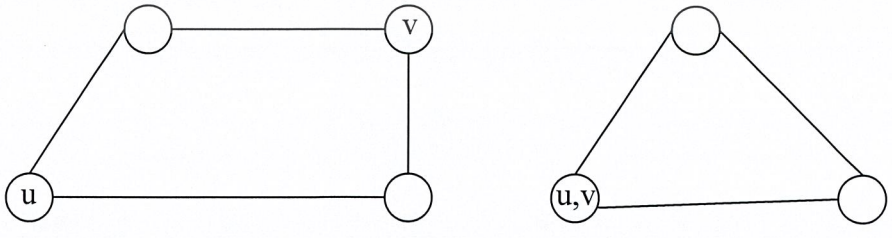
เป็นจำนวนวิธีของการระบายสีจุดยอดของ G ด้วยสี k สี

Theorem ให้ G เป็น Simple graph และให้ u และ v เป็น จุดยอดที่ไม่ประชิดกันใน G ให้ G_1เป็นกราฟที่ได้จาก G โดยการลากเส้นระหว่างจุด u และ v และให้ G_2 เป็น Simple graph ที่ได้จาก G โดยให้จุด uและvซ้อนกัน (ถ้ามี multiple edgeเกิดขึ้นให้รวมเป็นเส้นเดียว) แล้วจะได้ว่า

$P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k)$

ตัวอย่าง กำหนดกราฟ G ดังรูป จะได้ $P_g(k) = k\,(k-1)\,(k-2)^2$





G_1 G_2

รูปที่ 2.141

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$P_{G1}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$

$P_{Gz}(k) = k(k-1)(k-2)$

$P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3+1)$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก u และ v เป็นจุดที่ไม่ประชิดกัน จึงสามารถ ระบายสีจุด u และ v ด้วยสีต่างกันหรือสีเดียวกันได้ดังนั้นการพิสูจน์จะต้องพิจารณา 2 กรณีคือ

<u>กรณีที่1</u> ถ้า u และ v มีสีต่างกันเมื่อเพิ่มเส้นเชื่อม uและ v ในG แล้ว จำนวนวิธีระบายสีของจุดใน G ยังคงเดิมนั่นคือ จำนวนวิธี ของการระบายสีจุดยอดของ G จะเท่ากับ $P_{G1}(k)$

<u>กรณีที่2</u> ถ้า uและ v มีสีเหมือนกัน เมื่อให้ u และ v ซ้อนกันแล้ว จำนวนวิธีระบายสีของจุดใน G ยังคงเดิมนั่นคือ จำนวนวิธีของการระบายสีจุดยอดของ G จะเท่ากับ $P_{Gz}(k)$

โดยการรวมกรณีทั้งสอง จะได้ จำนวนวิธีของการระบายสี จุดยอดของ G คือ $P_G(k) = P_{G1}(k) + P_{G2}(k)$

สามารถนำความรู้เรื่อง Chromatic number และ Chromatic Polynomial มาใช้ในการจัดการตารางการทำงาน เช่น การจัดตารางสอน

ในการจัดเวลาให้กับวิชาต่างๆ จะพบว่ามีบางวิชาที่ไม่สามารถจัดเวลาเดียวกันได้ เพราะอาจจะมีนักศึกษาที่ต้องการเรียนทั้งสองวิชาหรือสองวิชานั้นมีผู้สอนคนเดียวกัน ปัญหาก็คือ จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดตารางสอนโดยมีเงื่อนไขดังกล่าว

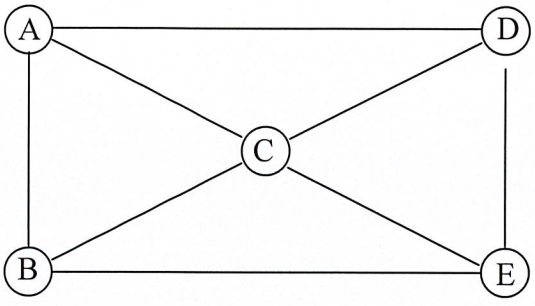
ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้ จะสร้างกราฟโดยใช้จุดแทนวิชาต่างๆ และลากเส้นเชื่อมระหว่างคู่ ของจุดที่แทนวิชาที่ม่สามารถจัดในเวลาเดียวกันได้เพื่อจะได้ระบาย สีที่จุดคู่นี้ด้วยสีที่ตจ่างกันซึ่งแสดงว่าต้องจัดวิชาทั้งสองในเวลาต่างกัน

แล้วปัญหาการจัดเวลาให้กับวิชาต่างๆ ตามเงื่อนไขข้างต้น จะเปลี่ยนเป็นปัญหาการระบายสีจุดของกราฟโดยให้จุดที่ประชิดกันมีสีต่างกัน

<u>ตัวอย่าง</u> มีคาบเวลา 4 คาบ ในวัน จันทร์-พุธ-ศุกร์ คาบที่ 1 เวลา 8.00-9.00, คาบที่ 2 เวลา 9.00-10.00, คาบที่3เวลา 10.00-11.00 คาบที่ 4 เวลา 11.00-12.00 ต้องการจัดเวลาให้กับวิชา a,b,c,d ,e กำหนดให้วิชา2วิชาที่ไม่สามารถจัดเวลาเดียวกันได้มีดังนี้aและb , aและc,aและd,bและe,bและc,cและd,cและe,dและe จงหาว่าจัดตารางสอนตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นได้หรือไม่และถ้าได้จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดตารางสอนนี้

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนปัญหาให้อยู่กับในรูปกราฟ โดยให้จุดยอดแทนวิชา ด้านแทนวิชา2วิชาที่จัดในเวลเดียวกันไม่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.142

C เป็นจุดยอดที่มีดีกรีสูงสุดคือ p=4 จะได้ p+1=5 ดังนั้น Chromatic No ≤ 5

กำหนดสีที่ 1 ให้ A จาก aมีด้าน3ด้านขึ้นไป b,c,d ดังนั้น กำหนดสีที่ 2 ให้ B จาก B มีด้าน 3 ด้านไป a,c,e Aกำหนดสีแล้ว จึงพิจารณาที่ C และE เนื่องจาก C มีด้านต่อกับ A ดังนั้น C ต้องมีสีต่างจาก Aกำหนดสีที่ 3 ให้C แต่จาก E ไม่มีด้านต่อกับA ดังนั้น E มีสีเดียวกับ A

ขณะนี้ใช้แล้ว 3สี สีที่ 1 ที่ Aและ E

สีที่ 2 ที่ B

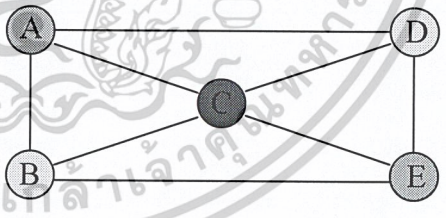
สีที่ 3 ที่ C

ขาดเพียงจุด D ที่ยังไม่กำหนดสี จาก D มีด้านไป A,C,E และD ไม่มีด้านไป B ดังนั้น สีที่ D มีสีเดียวกับสีที่ B ได้ ดังนั้นใช้เพียง 3 สี ในการระบายสีจุดยอดตามความสัมพันธ์ที่โจทย์กำหนดคือ

สีที่1 ที่ Aและ E

สีที่ 2 ที่ Bและ D

สีที่ 3 ที่ C



รูปที่ 2.143

ดังรูป Chromatic number คือ 3

ให้เวลาที่แตกต่างกัน จะแทนด้วยสีที่ต่างกัน จากโจทย์กำหนด 4 คาบเวลา ในขณะที่ X(G)=3จึงสามารถจัดตารางสอนได้ (ถ้าโจทย์กำหนดเวลาน้อยกว่า X(G) แล้วจะไม่สามรถจัดตางรางสอนได้) แบบหนึ่งของตารางสอนคือ

คาบ 1 วิชา Aและ E

คาบที่ 2 วิชา Bและ D

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คาบที่ 3 วิชา C

จำนวนวิธีของการจัดตารางสอนเท่ากับ $P_g(k)$ จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะได้ว่า

$P_g(k) = k\,(k-1)\,(k-2)\,(k^2-5k+7)$

ถ้า k = 3จะได้ว่า

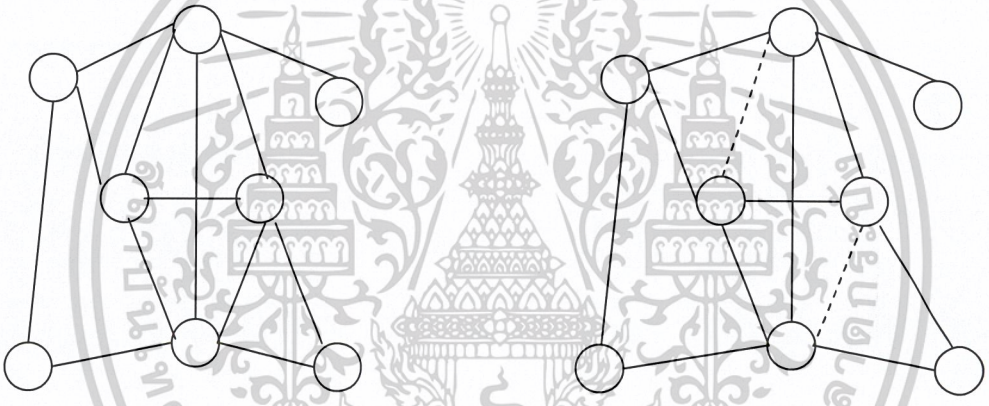
$P_g(k) = 3(2)(1)(9-15+7)=(6)(1)=6$

2.4.2 Edge- Colouring

นิยาม กราฟ G เป็น k-edge –colourale ถ้าสามารถระบายสีเส้นของ G ด้วยk สี โดยที่เส้นประชิดกันจะมีสีต่างกัน

นิยาม ถ้ากราฟ G เป็น k-edge –colourale แต่ไม่เป็น k-1 edge –colourale แล้วจะกล่าวได้ว่า Chromatic index ของ G มีค่าเท่ากับ k และเขียนแทนด้วย $X_e(G) = 5$

ตัวอย่าง กำหนดกราฟดังรูป เป็นกราฟที่ $X_e(G) = 5$



รูปที่ 2.144

ดีกรีของจุดยอดที่มีค่ามากที่สุดคือ 5

ตัวอย่าง กำหนดกราฟดังรูป $X_e(G) = 3$

รูปที่ 2.145

จุดยอดที่มีดีกรีมากที่สุด คือ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าดีกรีของจุดยอดที่มากที่สุดใน G คือ P แล้ว

$X_e(G) \geq p$

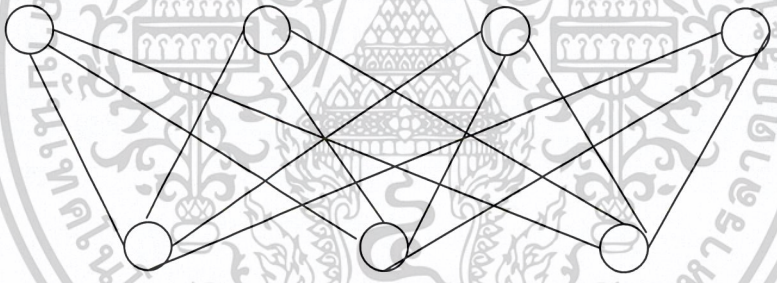
Viring Theorem ถ้า G เป็นกราฟที่ไม่มีลูบ และ ดีกรีของจุดที่มากที่สุดเท่ากับ P แล้ว

$p \leq X_e(G) \leq p+1$

Theorem ถ้า G เป็นกราฟที่ไม่มีลูบและดีกรีของจุดที่มากที่สุดเท่ากับ P แล้ว $X_e(G) = p$

รูปที่ 2.146

Theorem $X_e(K_{m,n}) = \text{Max}(M,N)$



รูปที่ 2.147

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> โรงเรียนแห่งหนึ่งมีครู 7 คน นักเรียน 10 ห้อง โรงเรียนแห่งนี้มีการเรียนการสอน 5 วัน ต่อสัปดาห์ กำหนดให้ครูแต่ละคน X_i ; $1 \le i \le 7$ สอนนักเรียนแต่ละห้อง Y_j ; $1 \le j \le 10$ เป็นเวลา P_{ij} คาบ ดังแสดงใน matrix P_0

$$P_0 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \text{รวมเวลาที่} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccccc} 19 & 19 & 19 & 18 & 17 & 18 & 18 & 18 & 17 & 17 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{รวมเวลาที่ครูแต่ละคนสอน} \\ \left[\begin{array}{c} 26 \\ 25 \\ 26 \\ 26 \\ 26 \\ 25 \\ 26 \end{array}\right] \\ \boxed{180} \end{array}$$

นักเรียนแต่ละคนต้องเรียน

ต้องการจัดตารางสอนตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

วิธีจัดตารางการเรียนการสอน

1. หาจำนวนคาบที่มากที่สุดในการสอนของครู จะได้ตอบ คือ 26 คาบ
   หาจำนวนคาบที่มากที่สุดในการเรียนของนักเรียน จะได้คำตอบคือ 19 คาบ
2. เพื่อให้การจัดตารางเวลาง่ายขึ้น จะแบ่งเวลา 26 คาบ ใน 5 วัน ออกเป็นจำนวนคาบเฉลี่ยใน 1วัน
   ดังนั้น ครูคนที่สอน26 คาบ จะสอนโดย เฉลี่ยวันละไม่เกิน 6 คาบ และนักเรียนที่เรียน 19 คาบ จะเรียนโดยเฉลี่ยวันละ ไม่เกิน 4 คาบ
   เวลารวมที่ครูแต่ละคนสอน ซึ่งเท่ากับ เวลารวมที่นักเรียน แต่ละห้องเรียน คือ 180 คาบ
   เวลารวมเฉลี่ยคือ 36 คาบ

กำหนดจำนวนคาบที่ครูแต่ละคนสอนและนักเรียนที่จะต้องเรียนโดยเฉลี่ยใน 1 วัน คือการกระจาย เมทริกซ์ p_0ออกเป็น 5เมทริกซ์ p_1, p_2, p_3, p_4และ p_3 โดย $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \bullet p_0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวมเวลาที่ครูแต่ละคนสอน
x_1	3	2	1	4	3	1	2	4	3	3	26
x_2	2	4	5	2	3	3	3	0	2	1	25
x_3	4	3	3	4	0	2	2	3	2	3	26
$P_0 = x_4$	0	2	3	2	4	3	2	4	2	4	26
x_5	6	1	0	3	3	4	3	1	3	2	26
x_6	3	4	3	1	2	0	3	2	3	4	25
x_7	1	3	4	2	2	5	3	4	2	0	26
รวมเวลาที่นักเรียนแต่ละคนต้องเรียน	19	19	19	18	17	18	18	18	17	17	180

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันจันทร์

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	5
x_2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5
x_3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	6
$P_1 = x_4$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	5
x_5	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	5
x_6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	5
x_7	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	5
รวม	4	4	4	3	3	4	3	4	3	4	36

วันอังคาร

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	5
x_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
$P_2 = x_4$	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	6
x_5	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	5
x_6	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5
x_7	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	5
รวม	4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	36

วันพุธ

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	5
x_2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	5
x_3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	5
$P_3 = x_4$	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	5
x_5	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	5
x_6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	5
x_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	6
รวม	4	4	3	3	4	3	4	4	4	3	36

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันพฤหัสบดี

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	6
x_2	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	5
x_3	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	5
$P_4 = x_4$	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	5
x_5	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
x_6	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	5
x_7	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	5
รวม	3	4	4	4	3	4	4	4	3	3	36

วันศุกร์

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
x_2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	5
x_3	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	5
$P_3 = x_4$	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	5
x_5	2	0	0	0	1	1	0	0	1	1	6
x_6	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	5
x_7	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	5
รวม	4	3	4	4	3	4	4	3	3	4	36

เมื่อพิจารณาจากเมทริกซ์ P_i จะพบว่า ในแต่ละเมทริกซ์จะมีครูสอนมากที่สุด 6 คาบใน 1 วัน และมีนักเรียน เรียนมากที่สุด 4 คาบใน 1 วัน

ถ้าเขียนกราฟโดยจุดยอดแทนครูแต่ละคน และจุดยอดแทนนักเรียนแต่ละห้อง จะได้ bipartite graph โดย $V = V_1 \cup V_2$ เมื่อ $V_1 = \{x_1,x_2,\ldots,x_7\}$ และ $V_2 = \{y_1,y_2,\ldots,y_{10}\}$ โดย $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ และด้านแทนการเข้าสอนแต่ละคาบของครูในแต่ละห้องเรียน

ครูสอนมากที่สุด 6 คาบ ดังนั้น ดีกรีสูงสุดของจุดยอดคือ 6 จะได้ว่า $X_e(G_i) = 6$

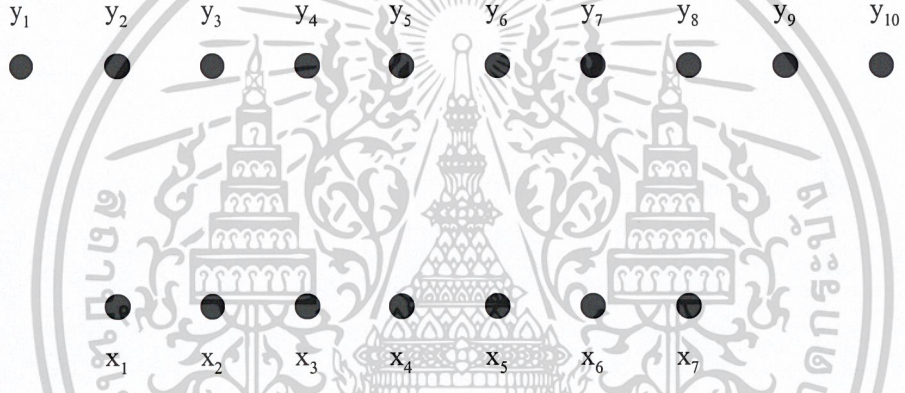
นั่นคือ ต้องใช้อย่างน้อย 6 สีที่แตกต่างกัน ระบายเส้นของ G_i โดยเส้นประชิดกันมีสีต่างกัน จะได้ แบบหนึ่งของตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันจันทร์

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	5
x_2	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5
x_3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	6
x_4	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	5
x_5	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	5
x_6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	5
x_7	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	5
รวม	4	4	4	3	3	4	3	4	3	4	36

$P_1 =$



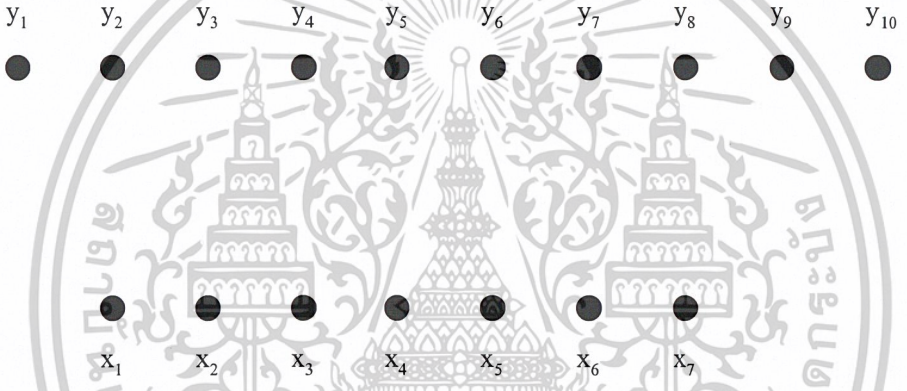
คาบ \ ครู	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	y_1	y_3	y_6	y_7	y_9	y_{10}	y_8
2	y_3	y_2	y_1	y_5	y_4	y_8	y_6
3	y_6	y_5	y_4	y_3	y_7	y_1	y_2
4	y_{10}	y_9	y_2	y_6	y_1	y_4	y_5
5	y_8	y_7	y_{10}	y_9	-	y_2	y_3
6	-	-	y_8	-	y_{10}	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันอังคาร

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	5
x_2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
x_3	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5
x_4	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	6
x_5	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	5
x_6	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5
x_7	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	5
รวม	4	4	4	4	4	3	3	3	4	3	36

$P_2 =$



คาบ \ ครู	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	y_4	y_1	y_8	y_2	y_6	y_5	y_9
2	y_2	y_3	y_4	y_7	y_5	y_{10}	y_1
3	y_5	y_2	y_3	y_4	y_7	y_9	y_6
4	y_7	y_6	y_9	y_5	y_1	y_2	y_4
5	y_9	y_{10}	y_1	y_8	-	-	y_3
6	-	-	-	y_{10}	y_8	y_3	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันพุธ

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	5
x_2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	5
x_3	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	5
x_4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	5
x_5	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	5
x_6	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	5
x_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	6
รวม	4	4	3	3	4	3	4	4	4	3	36

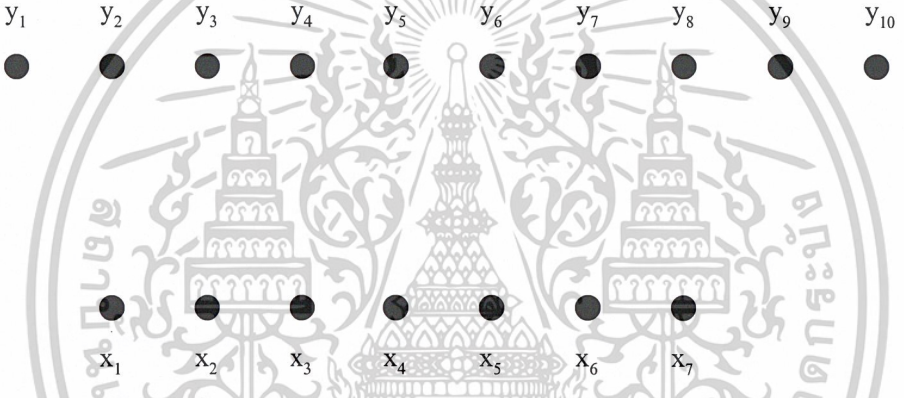
$P_3 =$

คาบ \ ครู	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	y_4	y_3	y_7	y_9	y_5	y_{10}	y_2
2	y_5	y_6	y_{10}	y_8	y_1	y_2	y_9
3	y_8	y_4	y_2	y_{10}	y_9	y_7	y_6
4	y_9	y_7	y_3	y_2	y_4	y_5	y_8
5	y_1	y_1	y_8	y_5	y_6	-	y_7
6	-	-	-	-	-	y_1	y_3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันพฤหัสบดี

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	6
x_2	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	5
x_3	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	5
$P_4 = x_4$	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	5
x_5	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	5
x_6	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	5
x_7	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	5
รวม	3	4	4	4	3	4	4	4	3	3	36



คาบ \ ครู	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	y_{10}	y_6	y_7	y_8	y_1	y_9	y_4
2	y_4	y_9	y_1	y_3	y_7	y_8	y_2
3	y_2	y_5	y_3	y_{10}	y_4	y_1	y_6
4	y_5	y_2	y_4	y_6	-	y_3	y_7
5	y_9	y_3	y_{10}	y_5	y_2	y_7	y_8
6	y_8	-	-	-	y_6	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วันศุกร์

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	รวม
x_1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	5
x_2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	5
x_3	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	5
$P_3 = x_4$	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	5
x_5	2	0	0	0	1	1	0	0	1	1	6
x_6	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	5
x_7	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	5
รวม	4	3	4	4	3	4	4	3	3	4	36

คาบ \ ครู	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	y_4	y_7	y_9	y_8	y_1	y_3	y_5
2	y_{10}	y_5	y_6	y_3	y_1	y_9	y_7
3	y_8	y_2	y_4	y_{10}	y_6	y_7	y_3
4	y_1	y_4	y_2	y_6	y_5	y_{10}	y_8
5	y_7	y_3	y_1	y_4	y_9	y_2	y_6
6	-	-	-	-	y_{10}	-	-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันที่ได้นี้ สามารถสลับวันกันได้ หรือจะสลับคาบเวลาในแต่ละวันก็ได้ นำตารางการเรียนการสอนในแต่ละวันมารวมกัน จะได้ตารางการเรียนการสอนที่เป็นตารางเวลาในแต่ละสัปดาห์ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

2.5 ต้นไม้(Trees)

นิยาม Trees คือ connected imdirected graph ที่ไม่มี simple circuit

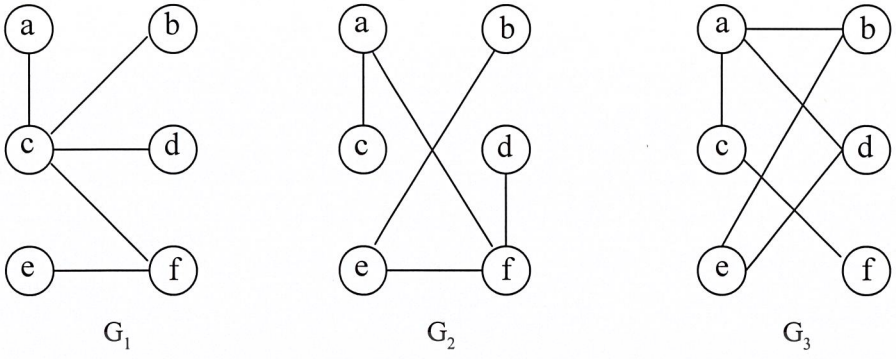
Trees ไม่มี simple circuit ดังนั้นไม่มี multiple edges หรือ loops ต้องเป็น simple graph

ตัวอย่าง กราฟต่อไปนี้เป็น tree

รูปที่ 2.148

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้เป็น tree หรือไม่



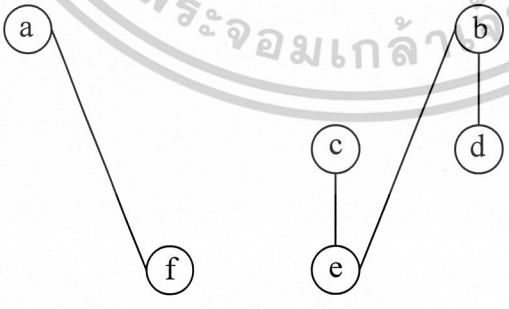
G_1 G_2 G_3

รูปที่ 2.149

G_1 และ G_2 เป็น trees เนื่องจากเป็น connected graph ไม่มี simple circuit

G_3 ไม่เป็น trees เพราะ e,b,a,d,e เป็น simple circuit ในกราฟ

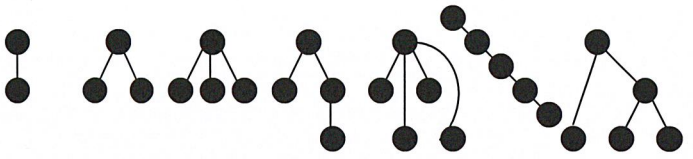
G_4 ไม่เป็น trees เพราะ กราฟไม่ connected



รูปที่ 2.150

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใน tree ที่มีจุดยอดมากกว่า 1 จุดต้องมีอย่างน้อย 2 จุดยอดที่มีดีกรี 1 (มีได้ มากกว่าหรือเท่ากับ 2)



จุด	2	3	4	4	5	5	5
ด้าน	1	2	3	3	4	4	4

รูปที่ 2.151

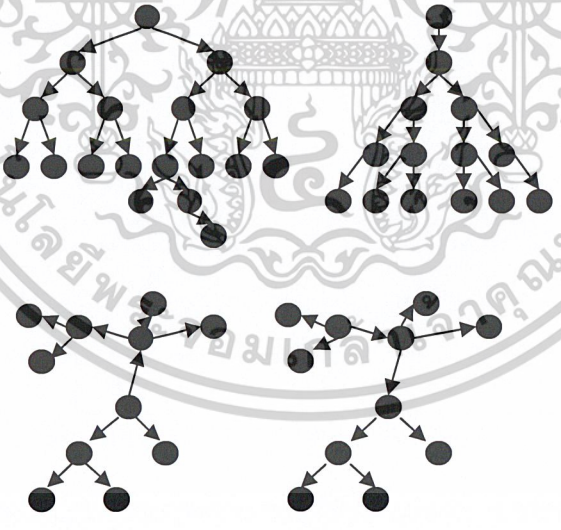
ใน connected graph ที่มี n จุดยอด จะเป็น tree ก็ต่อเมื่อมีด้าน n-1 ด้าน

Simple graph จะเป็น tree ก็ต่อเมื่อมีเพียง 1 path เชื่อมระหว่างคู่ของจุดยอด

จุดยอดหนึ่งของ tree จะเรียกว่า root เมื่อจาก root จะมีเพียง 1 path ไป ณ แต่ละจุด และจะกำหนดทิศทางออกจาก root

Tree และ root จะให้ directed graph เรียกว่า rooted tree

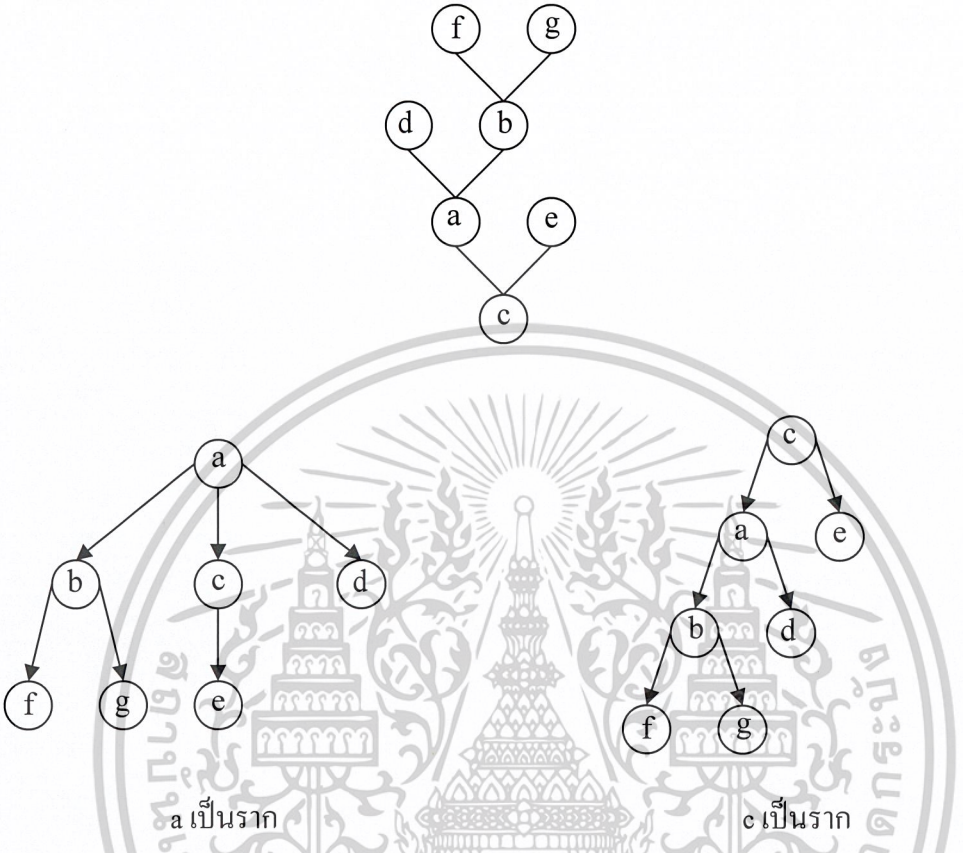
ตัวอย่าง ของ root tree



รูปที่ 2.152

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถเปลี่ยน tree ที่ไม่มี root เป็น tree ที่มี root ได้โดยการเลือกจุดยอดใดๆ เป็น root และ root ที่แตกต่างกันจะได้ rooted tree ที่แตกต่างกัน ดังตัวอย่าง



รูปที่ 2.153

Path ใน rooted tree มีทิศทางเดียวจากรากไปยังจุดใดๆหัวลูกศรจะใส่หรือไม่ใส่ก็ได้

ให้ T เป็น rooted tree

ถ้า v เป็นจุดยอดใน T ที่ไม่ใช่ root แล้ว parent ของ v คือ จุดยอด u ซึ่งมีด้านที่มีทิศจาก u ไป v เมื่อ u เป็น parent ของ v เรียก v ว่า sibling ancestors ของจุดยอด v ใดๆ ที่ไม่ใช่ราก คือจุดยอดที่อยู่ใน path จากรากมาถึงจุดยอด v นั้น โดยไม่รวมจุดยอด v นั้นๆ (นั่นคือ parent , parent ของ parent และต่อไปเรื่อยๆ จนถึงราก)

Descendants ของจุดยอด v คือ จุดยอดใดๆที่มี v เป็น ancestor

จุดยอดของ tree เรียกว่า leaf ถ้าไม่มี children

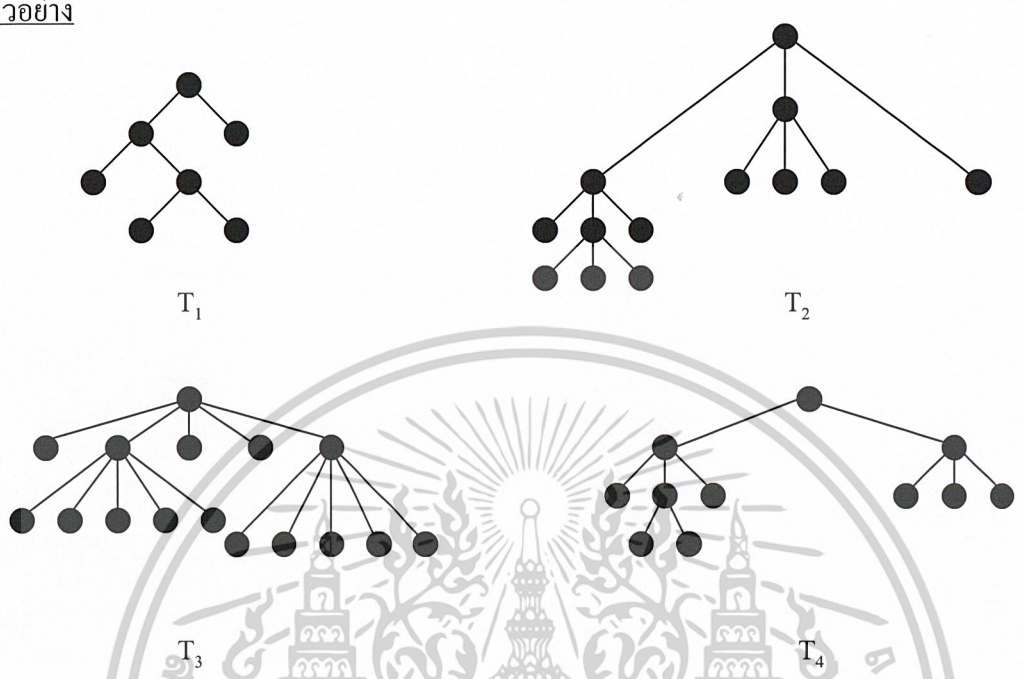
จุดยอดใดๆที่มี children เรียกว่า internal vertices

ถ้า a เป็น vertex ใน subtree ที่มี a เป็นราก คือ subgraph ของ tree ที่ประกอบด้วย a และ descendants ของ a และทุกด้านที่ incident กับทุกจุดยอดที่เป็น descendants

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม root tree จะเรียกว่า m-ary tree ถ้าทุกๆ internal vertex ไม่มี children มากกว่า m จะเรียกว่า full m-ary tree ถ้าทุกๆ internal vertex มี children m เท่านั้น m-ary tree ใดๆที่ m = 2 เรียก binary tree

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.154

T_1 เป็น full binary tree (ทุก internal vertex มี 2 children)

T_2 เป็น full 3-ary tree (ทุก internal vertex มี 3 children)

T_3 เป็น full 5-ary tree (ทุก internal vertex มี 5 children)

T_4 เป็น full m-ary tree (บาง internal vertex มี 2 children บาง internal vertex มี 3 children)

Order rooted tree คือ rooted tree ซึ่ง children ซึ่งแต่ละ internal vertex มีอันดับ(order) โดย children ของแต่ละ internal vertex มีดันดับจากซ้ายไปขวา

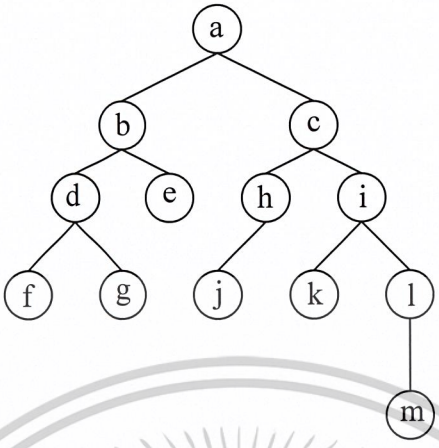
ใน order binary tree ถ้า internal vertex มีสอง children เรียก first children ว่า left child เรียก second child ว่า right child

rooted tree ที่ left child เรียกว่า left subtree

rooted tree ที่ right child เรียกว่า right subtree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงหา left และ right children ของ d ใน binary tree T ดังรูป และหา left และ right subtree ที่ c



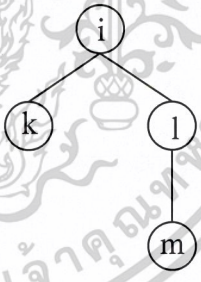
รูปที่ 2.155

วิธีทำ left children ของ d คือ f

right children ของ d คือ g

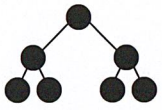
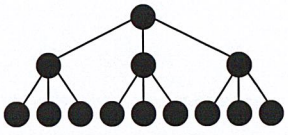
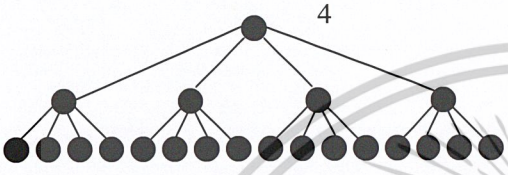
left children ที่ c

right children ที่ c



รูปที่ 2.156

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	m-ary	n(จุดยอด)	i(internal vertex)	mi+1
	2	7	3	2x3+1=7
	3	13	4	3x4+1=13
	4	21	5	4x5+1=21

Full m-ary tree ที่มี I internal vertices มีจำนวนจุดยอด n จะได้ว่า n = mi + 1

m-ary	n	i	leaves:l	[(m-1)n+1]/m
2	7	3	4	[(2-1)7+1] /2 = 4
3	13	4	9	[(3-1)13+1] /3 = 9
4	21	5	16	[(4-1)21+1]/4 = 16

n = l+i l = [(m-1)n+1]/m

Theorem full m-ary tree ซึ่ง

1) มี n จุดยอด จะมี internal vertex i = (n-1)/m และ leaves l = [(m-1)n+1]/m
2) มี i internal vertex จะมีจุดยอด n = mi +1 และ internal leaves i = (m-1)i+1
3) มี l leaves จะมีจุดยอด n = mi +1 และ internal leaves i = (l-1)/(m-1)

พิสูจน์ 1) จาก n = l+i => l = n-i

$\therefore l = n-(n-1)/m$

$= (mn-n-1)/m$

$= [(m-1)n-1]/m$

2) จาก n = l+i => l = n-i

จาก n = mi+1

$\therefore l = mi+1-i$

$= (m-1)i+1$

3) จาก n = l+i ----- x => l = n-i ----- 1

จาก n = mi+1 ----- 2 => i = (n-1)/m ----- 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\begin{aligned}
1+2 \quad i &= mi+1-l \\
(1-m)i &= (1-l) \\
\therefore\ i &= (1-l)/(1-m) = (l-1)/(m-1) \\
x+3 \quad n &= l+(n-1)/m \\
mn &= ml+n-1 \\
(m-1)n &= ml-1
\end{aligned}
$$

$\therefore\ n = (ml-1)/(m-1)$

ตัวอย่าง สมมติมีคนเริ่มจดหมายลูกโซ่ให้แต่ละคนที่ได้รับจดหมายส่งต่อไปยังคน 4 คน บางคนส่งจดหมายต่อ บางคนไม่ส่ง จะมีคนกี่คนได้รับจดหมายรวมทั้ง ก ที่เป็นคนเริ่มส่ง ถ้าไม่มีใครได้รับจดหมายมากกว่า 1 ฉบับ และถ้าจดหมายลูกโซ่นี้จบเมื่อ 100 คนอ่าน แต่ไม่ได้ส่ง

วิธีทำ จดหมายลูกโซ่นี้ 1 คนส่งต่อไป 4 คน ดังนั้นจะใช้ 4-ary tree แล้ว $m = 4$

i internal vertices คือคนที่ส่งจดหมายออกไป

l leaves คือ คนที่ได้รับจดหมายแต่ไม่ส่งต่อ

เนื่องจากคน 100 คนอ่านแต่ไม่ได้ส่งต่อ ดังนั้น $l = 100$ จากสูตร

$n = (ml-1)/(m-1) = (4x100-1)/(4-1) = 133$

จำนวนคนที่ได้รับจดหมายรวมคนส่ง คือ 133

คนที่ส่งจดหมายออกไปคือ 133-100 = 33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> ในการแข่งขันแบบกำจัดคู่ต่อสู้ทีละคน ถ้ามีผู้เข้าแข่งขัน 60 คน จะมีเกมที่ต้องเล่นทั้งหมดกี่เกม

<u>วิธีทำ</u> การแข่งขันแบบกำจัดคู่ต่อสู้ทีละคนนี้ สามารถเขียนเป็นต้นไม้ทวินามเต็มรูป

รูปที่ 2.157

รอบที่ 1 มีผู้เข้าแข่งขัน 60 คน ผู้ชนะจะผ่านเข้าไปเล่นรอบต่อๆไป ในที่สุดจะได้ผู้ชนะเลิศคนเดียวที่ราก ถ้าจำนวนผู้เข้าแข่งขันไม่เป็นเลขยกกำลังสอง ผู้เข้าแข่งขันบางคนจะได้รับการผ่านเข้าไปเล่นในรอบต่อไป

จากโจทย์เขียนเป็น binary ดังนั้น m = 2

เริ่มแข่ง มีคน 60 คน ดังนั้น l = 60

จำนวนเกมที่แข่ง คือ i internal vertex

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสูตร i = (l-1)/(m-1)

= (60-1)/(2-1) = 59

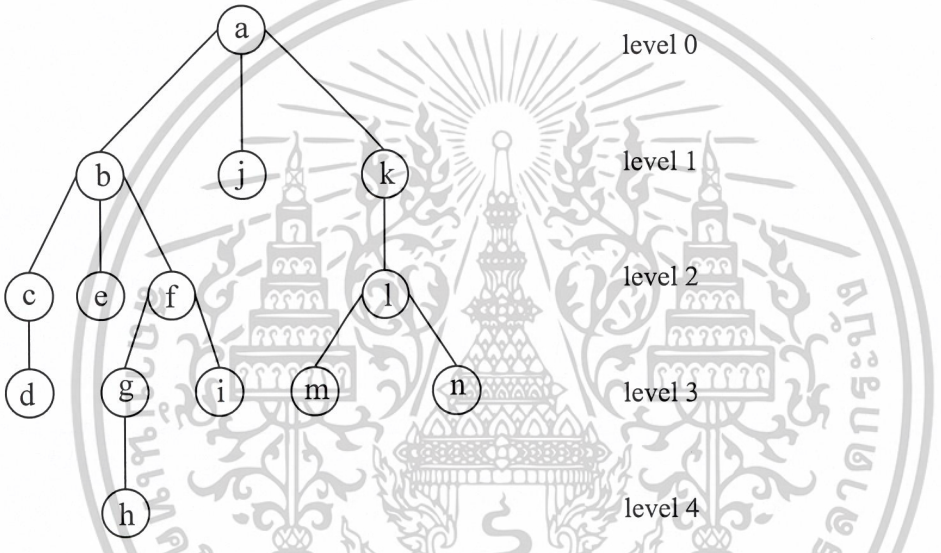
ดังนั้นมีเกมที่ต้องเล่นทั้งหมด 59 เกม

leave ของจุดยอด v ใน rooted tree คือ length ของ path หนึ่ง path จาก root ไปยังจุดยอด v นั้น

level ของ root กำหนดเป็น ศูนย์

height ของ rooted tree คือ ค่าสูงสุดของ level ของ จุดยอด หรือ hight ของ rooted tree คือ path ที่ยาวที่สุดจาก root ไปยังจุดยอดใดๆ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา level ของแต่ละจุดยอด และ height



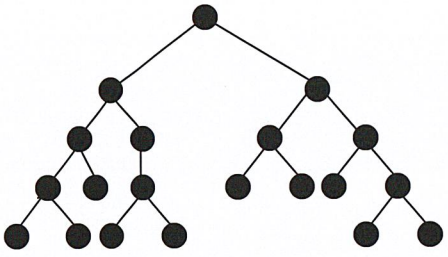
รูปที่ 2.158

largest level ของ vertex ใดๆ คือ 4 ดังนั้น tree มี height 4

rooted m-ary tree ที่มี height h เรียกว่า blanced ถ้า leaves ทั้งหมดอยู่ที่ level h หรือ h-1

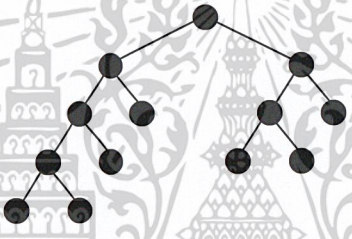
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณา rooted tree ต่อไปนี้ balanced หรือไม่



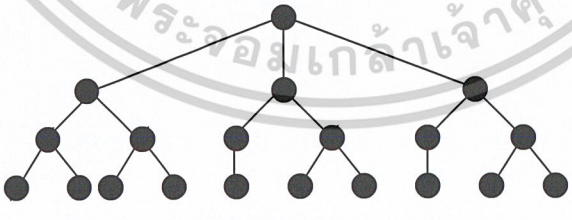
รูปที่ 2.159

เป็น balanced tree เพราะว่าทุก leaves อยู่ที่ level 3และ4



รูปที่ 2.160

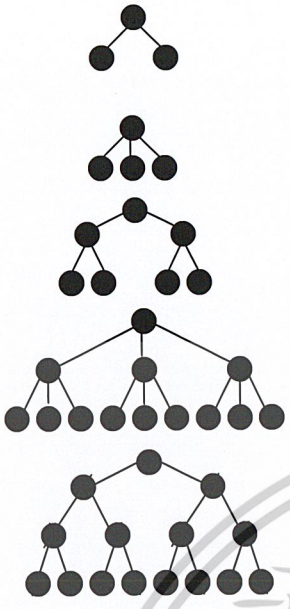
ไม่เป็น balanced tree เพราะว่าทุก leaves อยู่ที่ level 2,3และ4



รูปที่ 2.161

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็น balanced tree เพราะว่าทุก leaves อยู่ที่ level 3



m-ary	l	h	m^h
2	2	1	$2^1=2$
3	3	1	$3^1=3$
2	4	2	$2^2=4$
3	9	2	$3^2=9$
2	8	3	$2^3=8$

มีอย่างมาก m^h leaves ใน m-ary tree ใดๆที่มี height h $l \leq m^h$

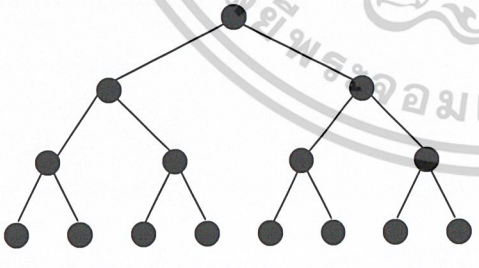
ถ้า m-ary tree ที่มี height h มี l leave แล้ว $h \geq [\log_m l]$

จาก $l \leq m^h$

โดยการใส่ logarithm ฐาน m จะได้

$\log_m l \leq h$

เมื่อ h เป็นจำนวนเต็มบวก



$l = 8, m = 2$

$\log_2 8 = 3 = h$

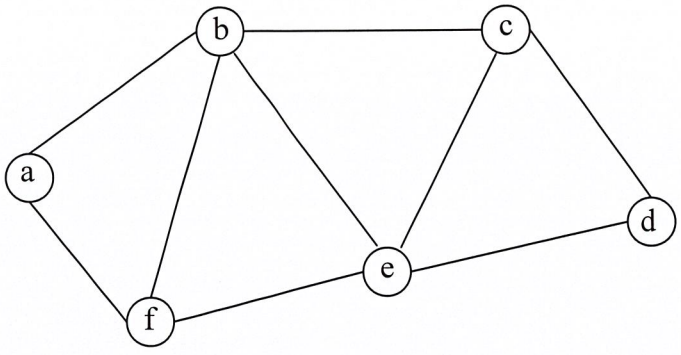
รูปที่ 2.162

2.5.1 Spanning tree

<u>นิยาม</u> ให้ G เป็น simple graph แล้ว spanning tree ของ G คือ subgraph ของ G ซึ่งทุกๆจุดยอดของ G เป็นจุดยอดของ T

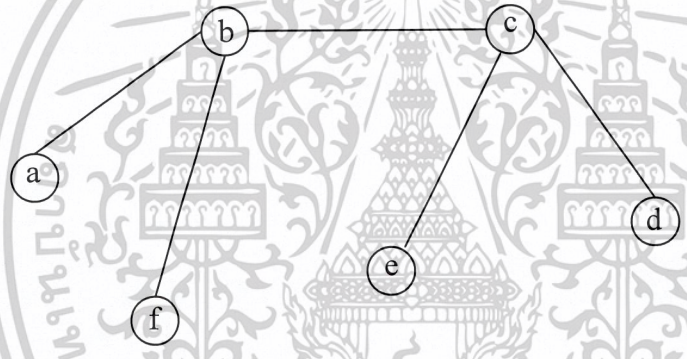
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น ถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆแสดงได้ด้วยกราฟ



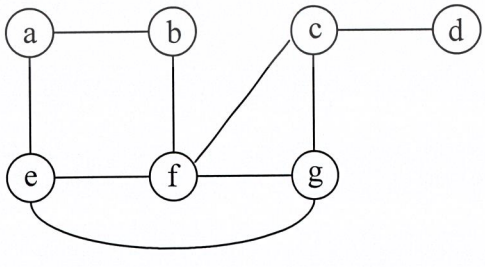
รูปที่ 2.163

จากกราฟสามารถหา subgraph ซึ่งเป็น tree T ซึ่งจุดยอดทุกจุดของ G เป็นจุดยอดทุกจุดของ T



รูปที่ 2.164

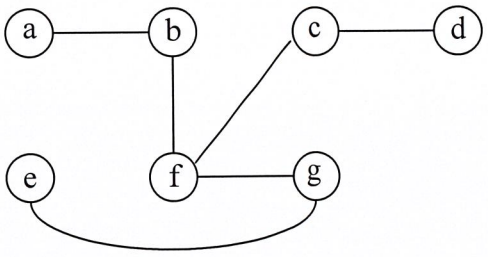
<u>ตัวอย่าง</u> จงหา spanning tree ของ simple graph ดังรูป



รูปที่ 2.165

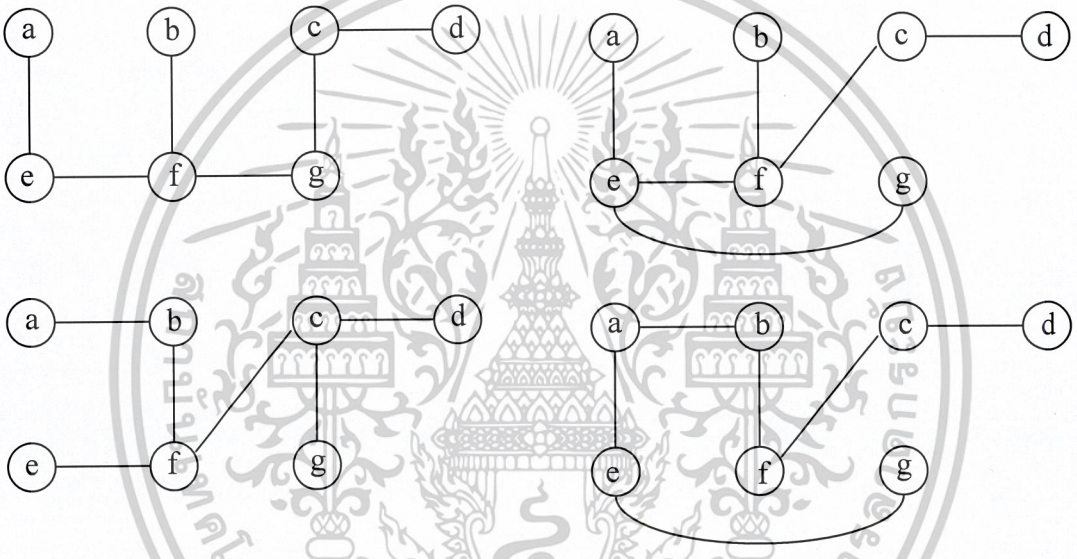
ตัดด้าน {a,e},{e,f} และ {e,g} จะได้ tree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.166

subgraph ของ G ที่เป็น tree ที่ได้นี้มิได้มีรูปแบบเดียว อาจมีรูปแบบอื่นๆได้อีก ดังนี้

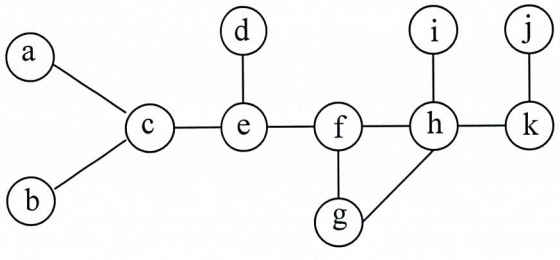


รูปที่ 2.167

2.5.2 การสร้าง spanning tree

depth first search : การค้นหาลงลึกก่อนพิจารณาจากตัวอย่างดังนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา spanning tree ของกราฟ G

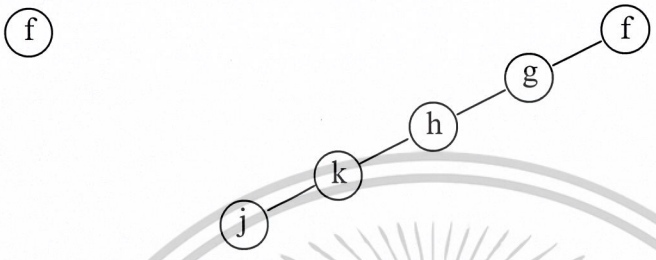


รูปที่ 2.168

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

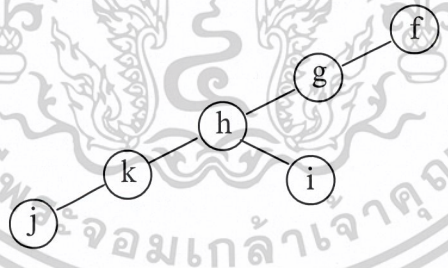
<u>วิธีทำ</u> เริ่มที่จุดยอดจุดใดๆก็ได้ในกราฟเลือกเป็น root ในตัวอย่างนี้เลือก g เป็น root แล้วจาก g ดูว่ามีด้านไปที่จุดยอดใดบ้างเลือกมา 1 จุด ให้ทำเช่นนี้โดยเติมจุดยอดเข้าไปใน path นั้นให้ยาวมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้โดยจุดยอดไม่ซ้ำกัน จะจบขั้นตอนนี้เมื่อไม่มีด้านจากจุดยอดสุดท้ายนั้นที่ไม่เกิด loop

เลือก path f,g,h,k,j



รูปที่ 2.169

ขั้นตอนต่อไปย้อนกลับไปที่ k ดูว่ามีด้าน ไปที่จุดยอดใดบ้างโดยที่จุดยอดนั้นยังไม่อยู่ใน path ถ้าไม่มีย้อนกลับไปที่ h พิจารณาเหมือนที่ k เนื่องจากที่ h มีด้านไป i ดังนั้นเติมด้าน {h,i} และจุดยอด i ใน path



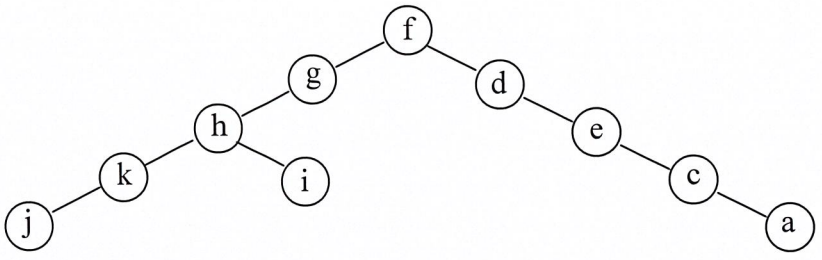
รูปที่ 2.170

แล้วย้อนกลับไปที่ g จาก g มีด้านไป f และ h ซึ่งทั้ง f และ h อยู่ใน path แล้ว ดังนั้นจะกลับไปที่ f

จาก f พิจารณาแบบขั้นตอนแรก คือ ดูว่าจาก f มีด้านไปจุดยอดใดบ้างที่ยังไม่อยู่ใน path เติมจุดยอดนั้นเข้าไปใน path ให้ยาวมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยจุดยอดไม่ซ้ำ และไม่เกิด loop

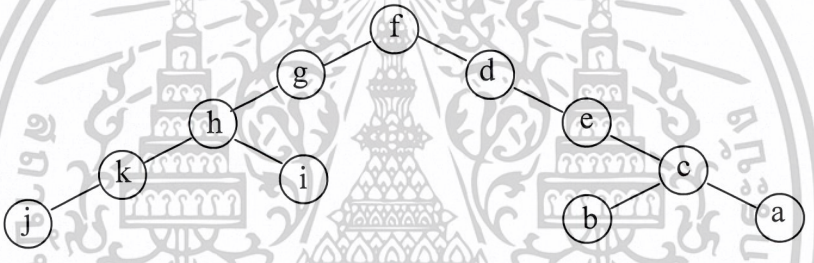
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก path f,d,e,c,a



รูปที่ 2.171

แล้วย้อนกลับไปที่ c ดูว่ามีด้านไปที่ด้านใดบ้าง ที่จุดยอดยังไม่อยู่ใน path จาก c มีด้านไป b ดังนั้น เติม {c,b} และจุดยอด b ใน path

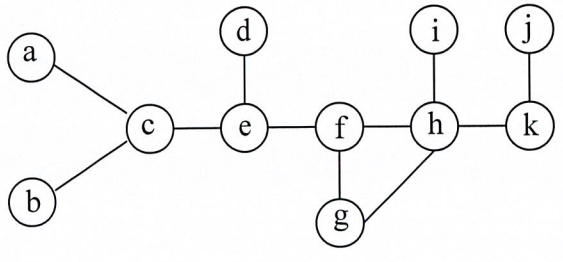


รูปที่ 2.172

แล้วย้อนกลับไปที่ c,e และ f พิจารณาแบบเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ปรากฏว่าไม่มี path ไปจุดยอดใดๆ โดยที่จุดนั้นยังไม่อยู่ใน path ก็จบ

นอกจากการค้นหาลงลึกก่อน แล้วยังมีวิธีการค้นหาไปทางกว้างก่อน (breadtly first second) พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

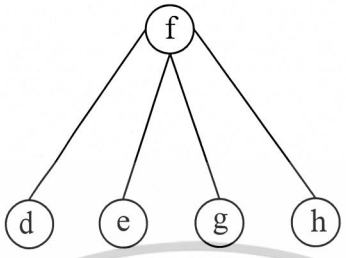
<u>ตัวอย่าง</u> จงหา spanning tree ของกราฟ G



รูปที่ 2.173

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u> เริ่มที่จุดยอดใดๆก็ได้ในกราฟเลือกเป็น root ในตัวอย่างนี้เลือก f เป็น root แล้วจาก f ดูว่ามีด้านไปที่จุดยอดใดบ้าง เติมทุกด้านและทุกจุดยอดต่อจาก f มีด้าน {f,d},{f,e},{f,g} และ {f,h} ทั้ง d,e,g และ h จะเป็น level 1 ของ tree



รูปที่ 2.174

ขั้นตอนต่อไปเติมด้านที่ adjacent กับจุดยอดใน level 1 ทั้งหมด โดยจุดยอดอีกจุดของด้านที่เติมต้องไม่อยู่ใน tree

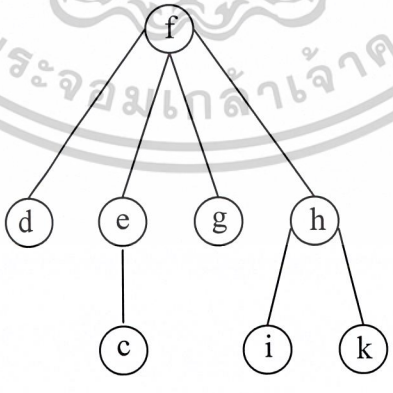
จาก d มีด้านไป e และ f แต่ทั้ง e และ f อยู่ใน tree แล้ว ที่จุด d นี้จบแล้ว

จาก e มีด้นไป c,d,f,g โดย d,f และ g อยู่ใน tree แล้วดังนั้นเติม {e,c} และจุดยอด c ใน tree

จาก g มีด้านไป f และ h แต่ทั้ง f และ h อยู่ใน tree แล้ว ที่จุด g นี้จบแล้ว

จาก h มีด้านไป i และ k โดยทั้ง i และ k ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {h,i} และจุดยอด i และเติม {h,k} และจุดยอด k ใน tree

แล้ว c,i,k เป็น level ที่ 2 ของ tree



รูปที่ 2.175

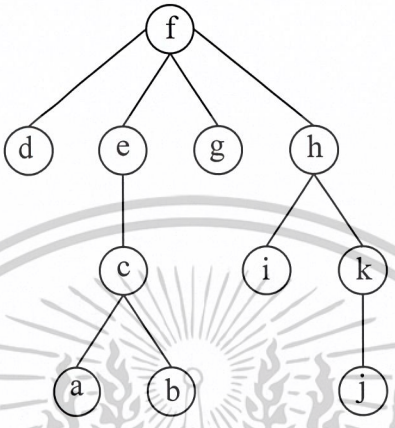
จากจุดยอดทั้งหมดใน level 2 พิจารณาเช่นเดียวกับจุดยอดทั้งหมดใน level 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก c มีด้านไป a และ b โดยทั้ง a และ b ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {c,a} และจุดยอด a และเติม {c,b} และจุดยอด b

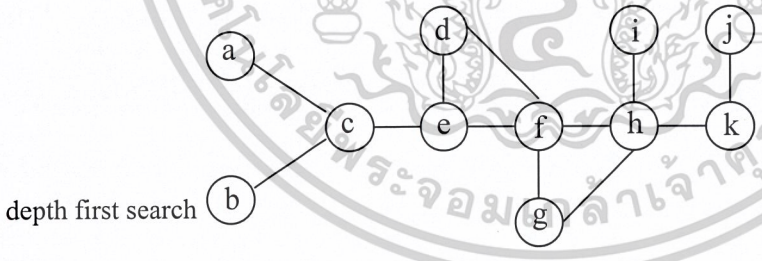
จาก i มีด้านไป h แต่ h อยู่ใน tree แล้วที่จุด i นี้จบแล้ว

จาก k มีด้านไป j โดยที่ j ยังไม่อยู่ใน tree จึงเติม {k.j} และจุดยอด j ใน tree แล้ว a,b,j เป็น level ที่ 3 ของ tree



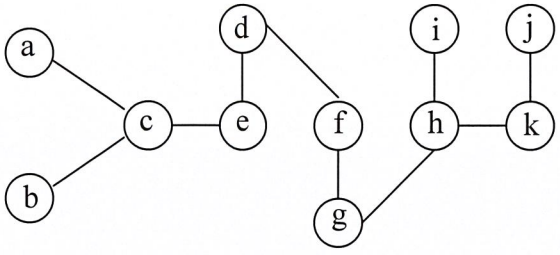
รูปที่ 2.176

จากจุดยอดทั้งหมดใน level ที่ 3 พิจารณาเช่นเดียวกับจุดยอดทั้งหมดใน level 2 และ 1 เนื่องจาก ทุกจุดยอดอยู่ใน tree แล้วก็จบ



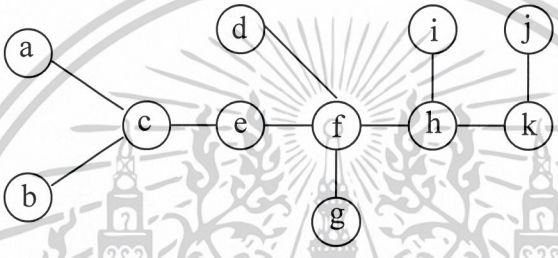
รูปที่ 2.177

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



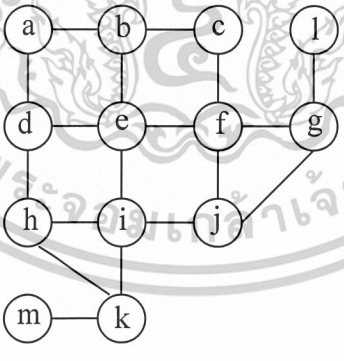
รูปที่ 2.178

breadth first search



รูปที่ 2.179

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา spanning tree ของ graph G

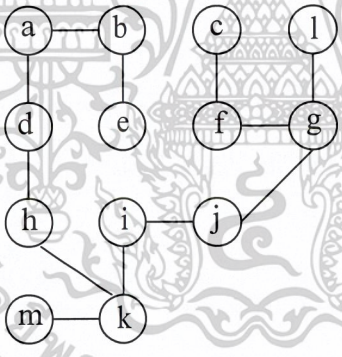


รูปที่ 2.180

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

depth first seach

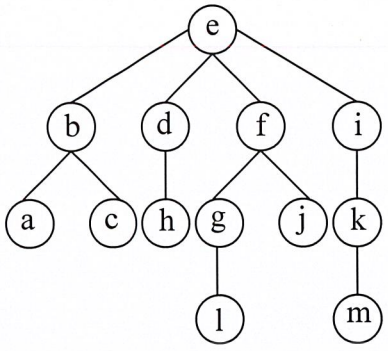
รูปที่ 2.181



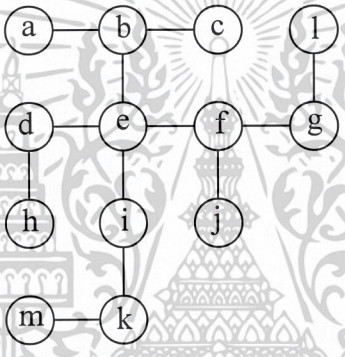
รูปที่ 2.182

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

breadth first search



รูปที่ 2.183

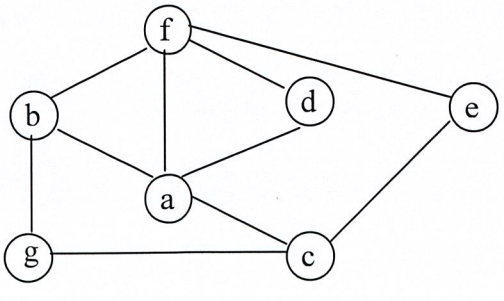


รูปที่ 2.184

2.5.3 (Minimal Spanning Tree)มินิมอล สแปนนิ่ง ทรี

นิยาม ให้ G เป็น connected weighted graph ซึ่งมี weight function w บนแต่ละด้านของ graph แล้ว minimal spanning tree ของ G คือ spanning tree T ของ G ซึ่งผลบวกของ weight function ของ T มีค่าต่ำสุด

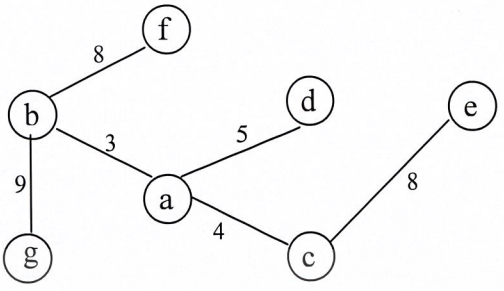
พิจารณากราฟ



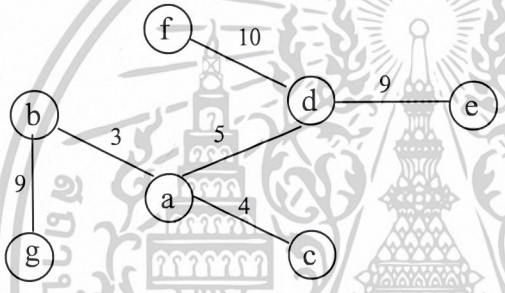
รูปที่ 2.185

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

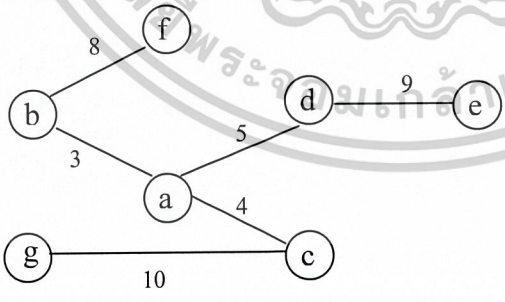
จะได้ spanning tree ดังนี้



รูปที่ 2.186



รูปที่ 2.187



รูปที่ 2.188

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีรูปแบบอื่นอีกหรือไม่ที่ให้ผลรวมของ weighted function น้อยกว่านี้

Prin's algorithm

จากกราฟได้ weighted function

{a,b} ≡ 3

{a,c} ≡ 4

{a,d} ≡ 5

{a,f} ≡ 7

{b,f} ≡ 8

{b,g} ≡ 9

{c,e} ≡ 8

{c,g} ≡ 10

{g,f} ≡ 10

{d,e} ≡ 9

{f,e} ≡ 11

1 เลือก initial edge เป็นด้านที่มี minimum weighted function

{a,b} ≡ 3

2 จากจุดยอด a และ b ดูว่ามีด้านใดบ้าง และ weighted function เท่าใด

{a,c} ≡ 4

{a,d} ≡ 5

{a,f} ≡ 7

{b,f} ≡ 8

{b,g} ≡ 9

เลือกดูว่าด้านใด w-function ต่ำสุด เลือกด้านนั้น

{a,c} ≡ 4

แล้วตัดด้านที่เลือกแล้วออกไปด้วย

3. จากจุดยอด a,bและ c ดูว่ามีด้านใดบ้าง และ w-function เท่าไร โดยที่จุดยอดอีกจุดของด้านต้องไม่ใช่ a, b, c

ถ้ามี 2 ด้านหรือมากกว่า $\{v_i, v_j\}$ ที่มี w-function ต่ำสุดเท่ากันเลือกด้านที่มี j ค่าต่ำสุด

{a,d} ≡ 5

{a,f} ≡ 7

{b,f} ≡ 8

{b,g} ≡ 9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

{c,e} ≡ 8

{c,g} ≡ 10

4. จากจุดยอด a,b,c,d จะได้

{a,f} ≡ 7

{b,f} ≡ 8

{b,g} ≡ 9

{c,e} ≡ 8

{c,g} ≡ 10

{d,f} ≡ 10

{d,e} ≡ 9

เลือก {a,f} ≡ 7 และตัดด้านนี้ออกไปพร้อม ตัดด้านอื่นๆที่จุดยอด คือ a หรือ b หรือ c หรือ d หรือ f (ตัดด้านที่จุดยอกทั้งสองข้างของด้านถูกเลือกไปแล้ว)

5. จากจุดยอด a,b,c,d,f จะได้

{b,g} ≡ 9

{c,e} ≡ 8

{c,g} ≡ 10

{d,e} ≡ 9

{f,e} ≡ 11

เลือก {c,e} ≡ 8 และตัดด้านนี้ออก

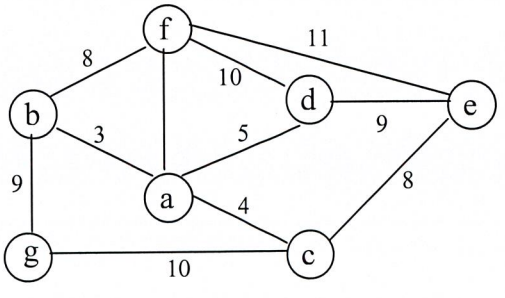
6. จากจุดยอด a,b,c,d,f,e จะได้

{b,g} ≡ 9

{c,g} ≡ 10

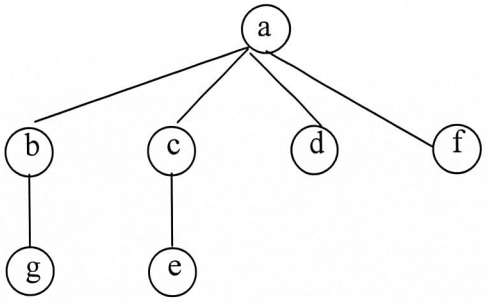
เลือก {b,g} ≡ 9

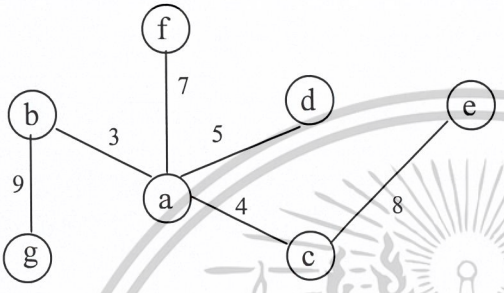
Minimal spanning คือ {a,b},{a,c},{a,d},{a,f},{c,e},{b,g} และผลรวมของ weighted fountion คือ 36



รูปที่ 2.189

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้





รูปที่ 2.190

2.6 การท่องไปในต้นไม้(Traversal algorithm)แทรฟเวิลแซล อัลกอริทึม

มีสามวิธีที่จะท่องไปใน order rooted tree คือ preorder , inorder และ postorder

การท่องไปใน tree แบบ preorder

1. เริ่มที่ root แล้ว
2. ท่องไปใน subtree ที่หนึ่งแบบ preorder แล้วไปที่ subtree ที่สองแบบ preorder และต่อ ๆ ไป

การท่องไปใน tree แบบ inorder

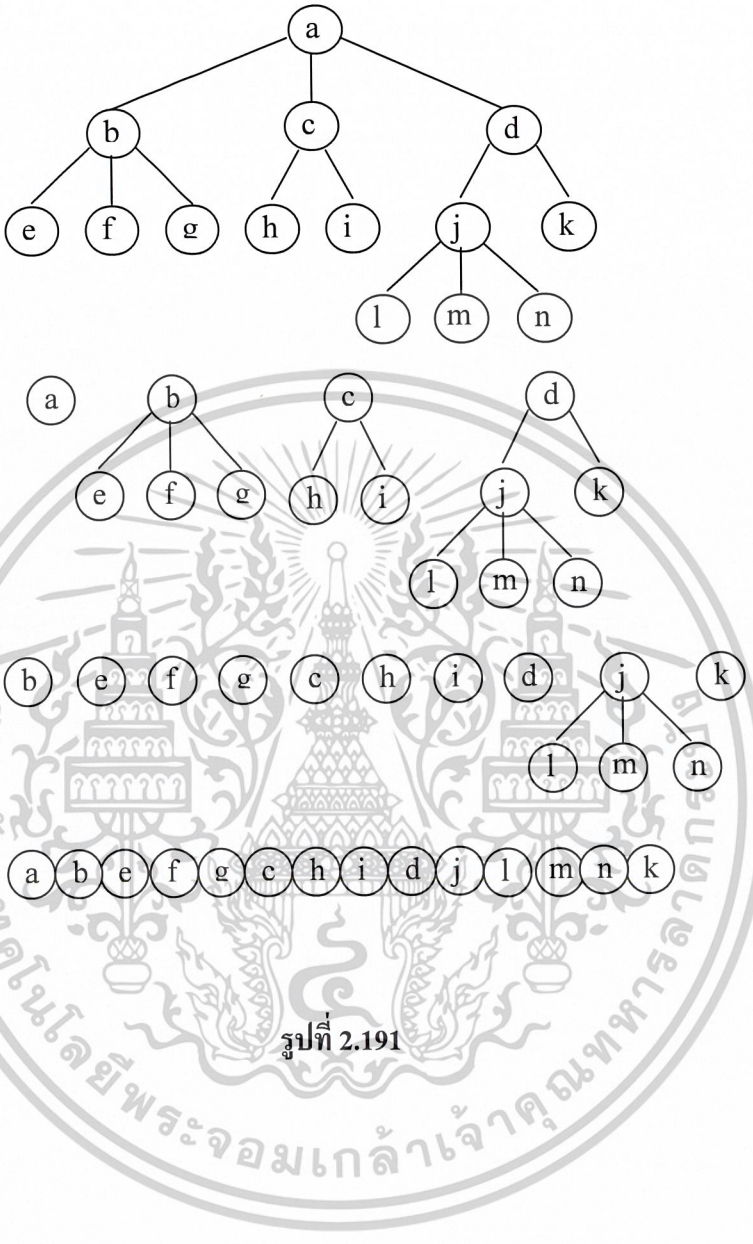
1. ท่องไปใน left subtree แบบ inorder แล้ว
2. ไปที่ root แล้ว
3. ท่องไปใน right subtree (และ subtree ใด ๆ ที่เหลือ) แบบ inorder

การท่องไปใน tree แบบ postorder

1. ท่องไปในอันดับของแต่ละ subtree แบบ postorder แล้ว
2. ไปที่ root

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

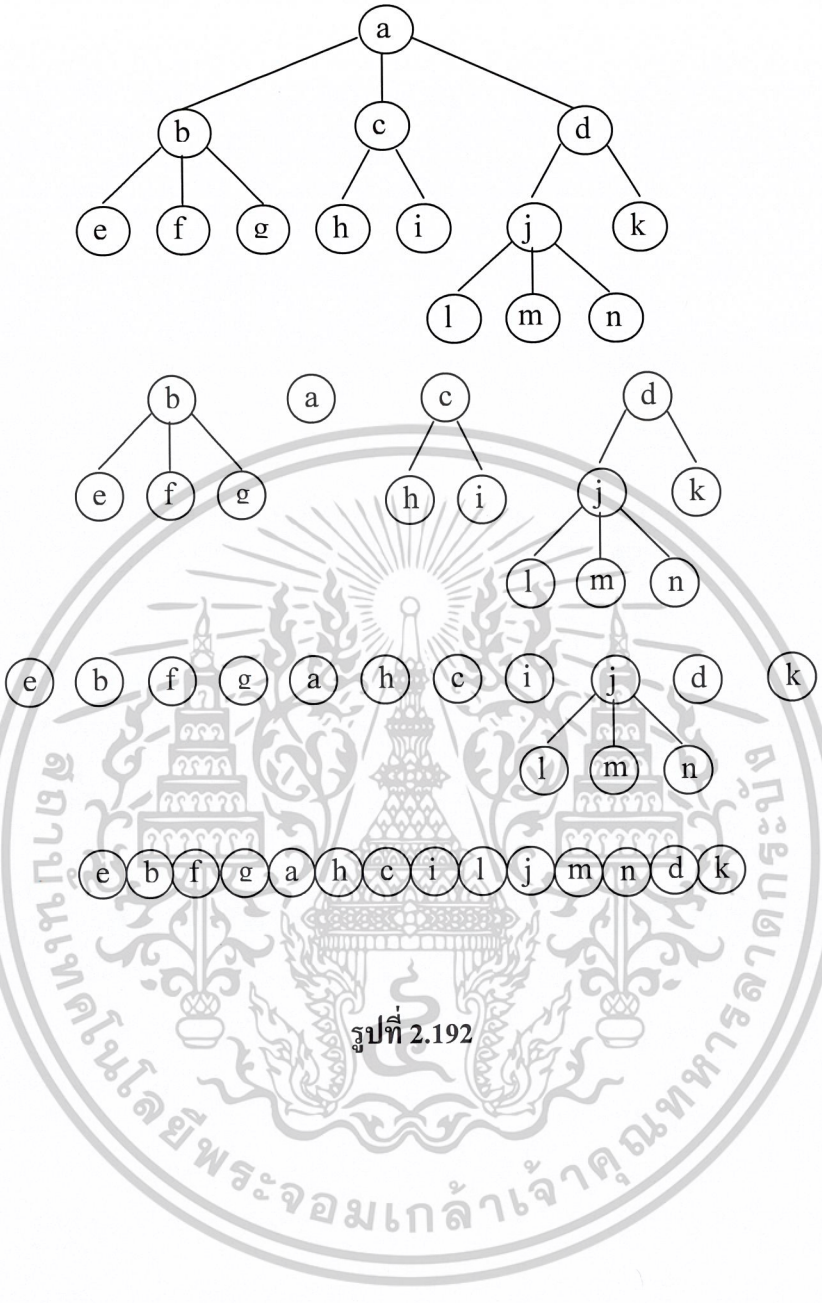
การท่องไปใน tree แบบ preorder



รูปที่ 2.191

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

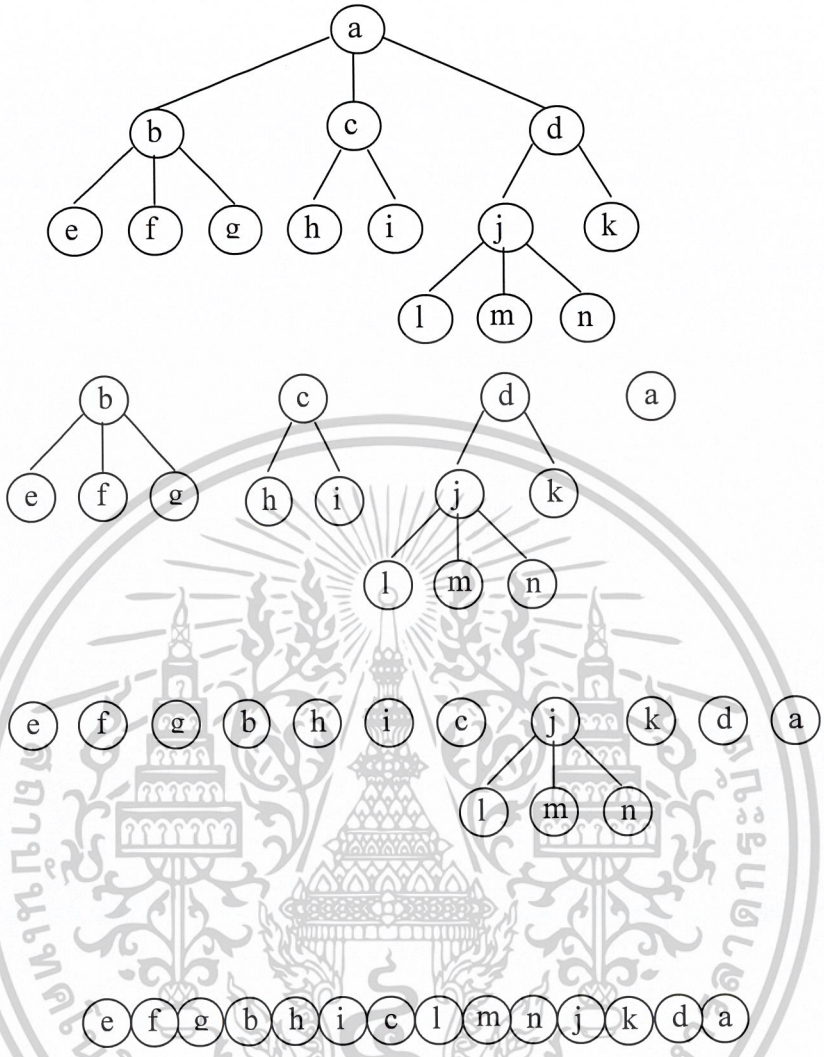
การท่องไปใน tree แบบ inorder



รูปที่ 2.192

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

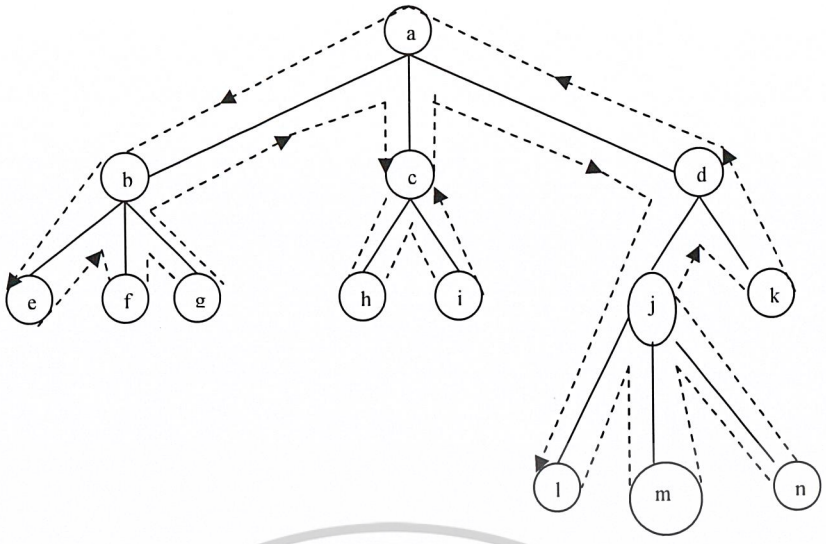
การท่องไปใน tree แบบ postorder



รูปที่ 2.193

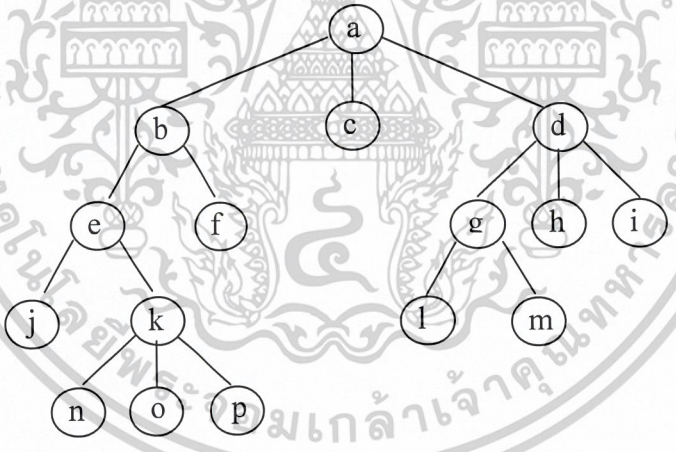
ในการอธิบายการท่องไปใน tree อย่างง่าย ๆ คือ เขียน path รอบ tree เริ่มที่ root และไปในทิศ counterclockwise โดยไปที่รอบ, แต่ละ left ครั้งหนึ่ง และผ่านแต่ละ internal vertex หนึ่งครั้งหรือมากกว่า สำหรับแต่ละวิธีที่ท่องไปใน tree การท่องไปใน tree แบบ preorder จะพบแต่ละ internal vertex เมื่อผ่านไปครั้งที่หนึ่ง การท่องไปใน tree แบบ inorder จะพบ internal vertex เมื่อผ่านไปครั้งที่สอง การท่องไปใน tree แบบ postorder จะพบแต่ละ internal vertex ครั้งสุดท้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.194

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาการท่องไปใน tree ที่กำหนดทั้งสามแบบ



รูปที่ 2.195

Preorder

a b e j k n o p f c d g l m h i

Inorder

j e n k o p b f a c l g m d h i

Postorder

j n o p k e f b c l m g h i d a

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.1 Application of Writing Arithmetic Expressions

สามารถใช้ ordered rooted tree แทนนิพจน์ทางคณิตศาสตร์โดย internal vertices แทน operation , leaves แทน variable หรือ member แต่ละ operation จะ operate จากซ้ายไปขวาใน subtree ในอันดับต่าง ๆ

นิพจน์ทางคณิตศาสตร์นี้จะเขียนอยู่ในรูปแบบ infix form คือ operator อยู่ระหว่าง operand เช่น A , B เป็น operand และ + เป็น operator แล้ว arithmetic expression A + B อยู่ในรูปแบบ infix form

กฎเกณฑ์เกี่ยวกับการคำนวณค่าของเครื่องคอมพิวเตอร์

1. ลำดับการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ เรียงตามลำดับก่อนหลัง ดังนี้

   ( ) วงเล็บเล็ก

   $\uparrow$ ยกกำลัง

   * , / คูณ , หาร

   + , - บวก , ลบ

2. ลำดับการทำงานที่เท่ากันจะทำการคำนวณจากซ้ายไปขวา

   $A + B - C = (A + B) - C$

   $A * B * C = (A * B) * C$

   $A * B / C = (A * B) / C$

   $A / B * C = (A / B) * C$

3. ในกรณีที่เครื่องหมายยกกำลังซ้อนจะคำนวณจากขวาไปซ้าย

   $A \uparrow B \uparrow C = A \uparrow (B \uparrow C) = A^{B^C}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน rooted tree แทนนิพจน์ต่อไปนี้

$$((x + y) \uparrow 2) + ((x - 4)/3)$$

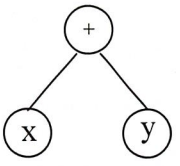
<u>วิธีทำ</u> ในการเขียน binary tree แทนนิพจน์จะเริ่มจากล่างขึ้นบน ขั้นที่ 1 สร้าง subtree ของ x + y ซึ่งเป็น subtree ใน subtree (x + y) $\uparrow$ 2

ต่อมาสร้าง subtree ของ x – 4 ซึ่งเป็น subtree ใน subtree (x – 4) / 3

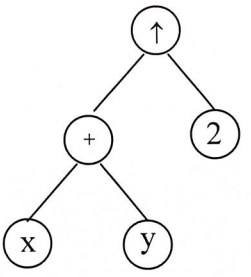
สุดท้าย รวม subtree (x + y) $\uparrow$ 2 และ (x – 4) / 3 ใน ordered rooted tree

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

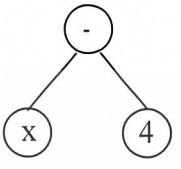
1.



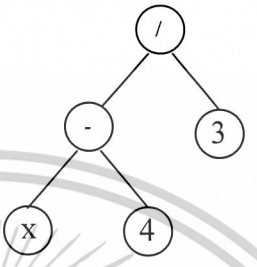
2



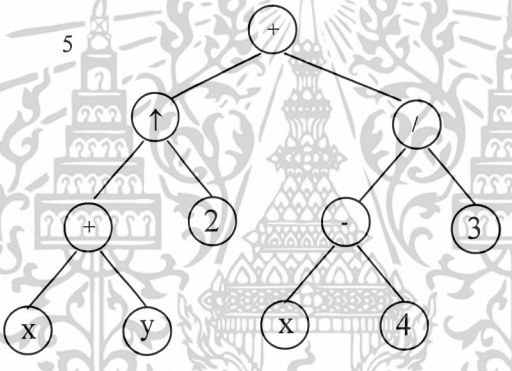
3



4



5



รูปที่ 2.196

Binary tree แทนนิพจน์ $((x+y)\uparrow 2)+((x-4)/3)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน rooted tree แทนนิพจน์

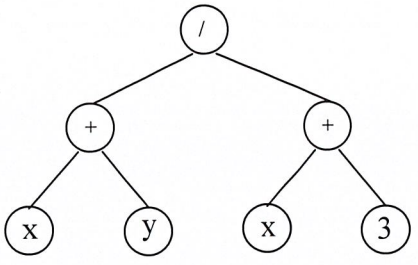
$$(A+B*C)+(D*E+F)$$

<u>วิธีทำ</u>

รูปที่ 2.197

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(x+y)/(x+3)



preorder : / + x y + x 3 ; prefix

inorder : x + y / x + 3

postorder: x y + x 3 + / ; postfix

รูปที่ 2.198

(x+(y/x))+3

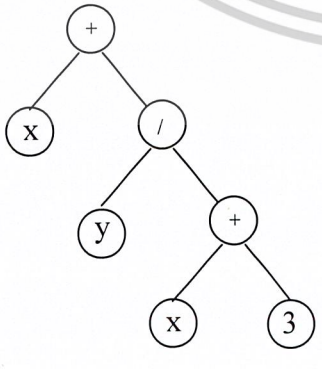
preorder : + + x / y x 3 ; prefix

inorder : x + y / x + 3

postorder: x y x / + 3 + ; postfix

รูปที่ 2.199

x+(y/(x+3))



preorder : + x / y + x 3 ; prefix

inorder : x + y / x + 3

postorder: x y x 3 + / + ; postfix

รูปที่ 2.200

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การท่องไปใน tree แบบ inorder นั้น เส้นทางที่เกิดขึ้นอาจซ้ำกันได้ ถึงแม้ tree จะมีรูปแบบต่างกัน prefix form ได้มาจากการเดินไปใน tree แบบ preorder นิพจน์ที่เขียนแบบ prefix form จะเรียกว่า polish notation

Postfix form จะหาได้โดยการเดินไปใน tree แบบ postorder นิพจน์ที่เขียนแบบ postfix form เรียกว่า reverse polish notation

จาก reverse polish notation นี้ เมื่อพิจารณาจากซ้ายไปขวาจะเป็นทิศในการหาค่าของนิพจน์ การคำนวณค่านี้จะใช้กลไกที่เรียกว่า stack เป็นตัวช่วย

โดยปกติ เมื่อป้อนนิพจน์ infix เข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ compiler จะไม่สามารถสร้างรหัสหรือชุดของคำสั่งจากนิพจน์ที่ป้อนเข้าไปนี้ได้ compiler จะต้องมีการแปลงนิพจน์จาก infix เป็น postfix ก่อน แล้วจึงแปลเป็นชุดคำสั่งภาษาเครื่องอีกต่อหนึ่ง เพื่อการคำนวณค่าต่อไป

แบบการคำนวณเพื่อแปลงนิพจน์ infix เป็น postfix

1. ถ้า input เป็นตัว operand ให้นำไปไว้ที่ output (postfix string)
2. ถ้า input เป็นตัว operator ให้

นำ operator เข้าสู่ operator stack (opstk) ถ้า stack ตัวนั้นว่างเปล่า

ถ้า operator stack ไม่ว่างเปล่า ซึ่งแสดงว่ามี operator อยู่ใน stack นั้น ให้เปรียบเทียบลำดับของ operator ที่เป็น input กับ operator ที่อยู่ใน stack ดังนี้

เครื่องหมาย	ลำดับเมื่ออยู่ที่ input	ลำดับเมื่ออยู่ที่ stack
↑	3	4
* , /	2	2
+ , -	1	1
(	4	0

ถ้าลำดับของ operator ที่เป็น input น้อยกว่าหรือเท่ากับลำดับของ operator ที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack ให้นำ operator ตัวที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack ไปไว้ที่ output จากนั้นก็เปรียบเทียบแบบเดิมอีกระหว่าง input ตัวนั้นกับ operator ที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack (ซึ่งเป็น operator ตัวใหม่) โดยใช้หลักการเดิมนี้ ทำเช่นนี้จนกระทั่ง

2.2.1 ลำดับของ operator ทีเป็น input มีค่ามากกว่าลำดับของ operator ที่อยู่บนสุดของ stack หรือ

2.2.2 ทำจนกระทั่ง stack ว่างเปล่า หรือ

2.2.3 ทำจนกว่าจะพบเครื่องหมายวงเล็บเปิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ถ้าลำดับของ operator ที่เป็น input มากกว่าลำดับของ operator ที่อยู่ส่วนบนสุดของ stack นำ operator ตัวนั้นใส่เข้าไปใน stack

3. ถ้า input เป็นเครื่องหมายวงเล็บเปิด "(" ให้ PUSH ")" ลงสู่ stack แต่ถ้า input เป็นเครื่องหมายวงเล็บปิด ")" ก็ให้ pop stack จนกว่าจะพบเครื่องหมายวงเล็บเปิดแล้วทิ้งเครื่องหมายวงเล็บเปิดและปิด ส่วน operator ที่ pop ออกมา ก็ให้ไปต่อไว้ที่ output ตามลำดับที่ออกมา
4. ถ้า input หมดแล้ว ให้ pop stack นำ operator ออกมาไว้ที่ output ทั้งหมด

ตัวอย่าง จงแปลง A+B เป็น postfix

วิธีทำ

input	postfix string	opslk
A	blank	blank
+	A	blank
B	A	+
	AB	+
	AB+	

Postfix คือ AB+

ตัวอย่าง จงแปลง A+B-C เป็น postfix

วิธีทำ

input	postfix string	opslk
A	blank	blank
+	A	blank
B	A	+
-	AB	+
C	AB+	-
	AB+C	-
	AB+C-	

Postfix AB+C-

ตัวอย่าง จงแปลง (A+B)*(C-D)

วิธีทำ

input	postfix string	opslk
C	blank	blank
A	blank	C
+	A	C
B	A	C+
)	AB	C+

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

*	AB+	blank
(	AB+	*
C	AB+	*C
-	AB+C	*C
D	AB+C	*C-
)	AB+CD*C-	
	AB+CD-	*

<u>ตัวอย่าง</u> จงแปลง A↑B*C-D+E/F/(G+H) เป็น postfix

<u>วิธีทำ</u>

input	postfix string	opslk
A	blank	blank
↑	A	blank
B	A	↑
*	AB	↑
C	AB↑	*
-	AB↑C	*
D	AB↑C*	-
+	AB↑C*D	-
E	AB↑C*D-	+
/	AB↑C*D-E	+
F	AB↑C*D-E	+/
/	AB↑C*D-EF	+/
(	AB↑C*D-EF/	+/
G	AB↑C*D-EF/	+/(
+	AB↑C*D-EF/G	+/(
H	AB↑C*D-EF/G	+/(+
)	AB↑C*D-EF/GH	+/(+
	AB↑C*D-EF/GH+	+/
	AB↑C*D-EF/GH+/	+
	AB↑C*D-EF/GH+/+	blank

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงแปลง ((A+B)*C-(D-E))↑(F+G) เป็น postfix

วิธีทำ input	postfix string	opslk
(	blank	blank
(	blank	(
A	blank	((
+	A	((
B	A	((+
)	AB	((+
*	AB+	(
C	AB+	(*
-	AB+C	(*
(	AB+C*	(-
D	AB+C*	(-(
-	AB+C*D	(-(
E	AB+C*D	(-(-
)	AB+C*DE	(-(-
)	AB+C*DE-	(-
↑	AB+C*DE--	blank
(	AB+C*DE--	↑
F	AB+C*DE--	↑(
+	AB+C*DE--F	↑(
G	AB+C*DE--F	↑(+
)	AB+C*DE--FG	↑(+
	AB+C*DE--FG+	↑
	AB+C*DE--FG+↑	

postfix คือ AB+C*DE--FG+↑

การหาผลลัพธ์จากนิพจน์ postfix

จากนิพจน์ infix เมื่อผ่าน comliler จะถูกเปลี่ยนเป็นนิพจน์ postfix และจากนิพจน์ postfix เมื่อต้องการหาค่าทางคณิตศาสตร์ มีวิธีการดังนี้

1. ถ้าเป็น operand ให้ push สู่ stack
2. ถ้าเป็น operand ให้ pop ค่า 2 ค่าจาก stack แล้วทำการคำนวณโดยใช้ operator ตัวนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีนี้ให้ใช้ค่าแรกที่ได้จาก stack เป็น operand ตัวที่ 2 จากนั้นเก็บผลลัพธ์ไว้ที่ stack

ตัวอย่าง จงหาค่าของ postfix expression

723*-4↑93/+

input	operand1	operand2	value	operand stack
7				7
2				7,2
3				7,2,3
*	2	3	6	7,6
-	7	6	1	1
4	7	6	1	1,4
↑	1	6	1	1
9	1	4	1	1,9
3	1	4	1	1,9,3
/	9	3	3	1,3
+	1	3	4	4

ตัวอย่าง กำหนดนิพจน์ infix

((6-(2+3))*(3+8/2))↑2+3

เมื่อเปลี่ยนเป็นนิพจน์ postfix จะได้

623+-382/+*2↑3+

จงคำนวณค่าของนิพจน์

ขั้นตอนการคำนวณค่า

input	operand1	operand2	value	operand stack
6				6
2				6,2
3				6,2,3
+	2	3	5	6,5
-	6	5	1	6,5
3	6	5	1	1,3
8	6	5	1	1,3,8
2	6	5	1	1,3,8,2
/	8	2	4	1,3,4
+	3	4	7	1,7

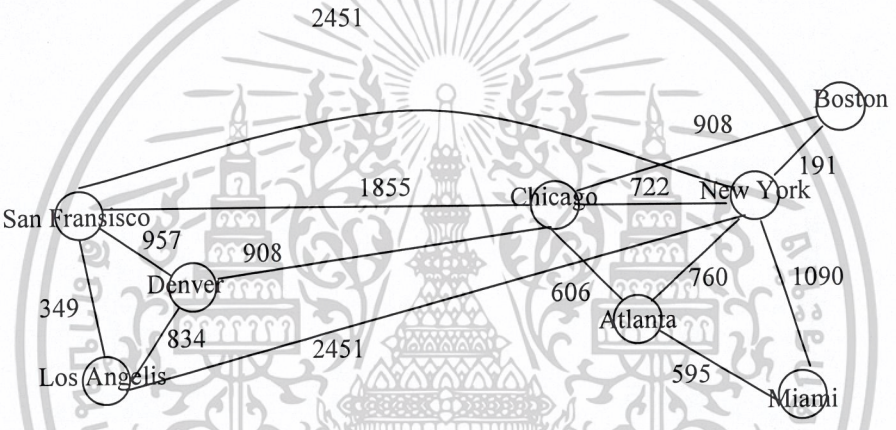
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

*	1	7	7	7
2	1	7	7	7,2
↑	7	2	49	49
3	7	2	49	49,3
+	49	3	52	52

2.7 ปัญหาการหาวิถีสั้นสุด(Shortest Path Problems)

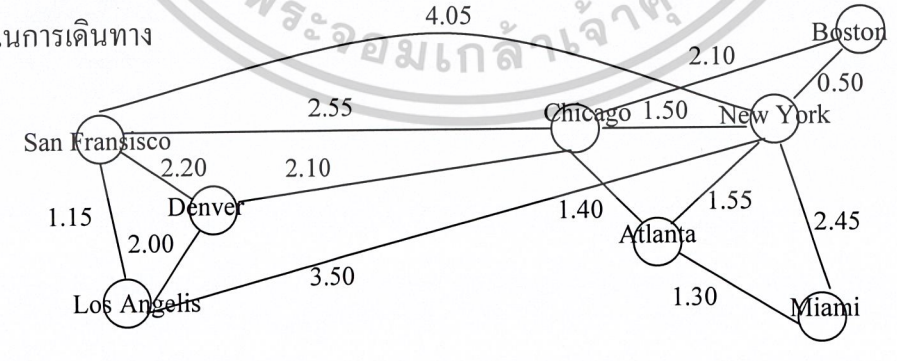
พิจารณากราฟโมเดลต่อไปนี้ เมื่อ vertices แทนเมืองและ edges แทนสายการบินที่บินระหว่างเมือง weighted no.ที่อยู่บนแต่ละด้านแทนระยะทาง,เวลาที่ใช้ในการเดินทาง, และค่าโดยสาร

ระยะทาง



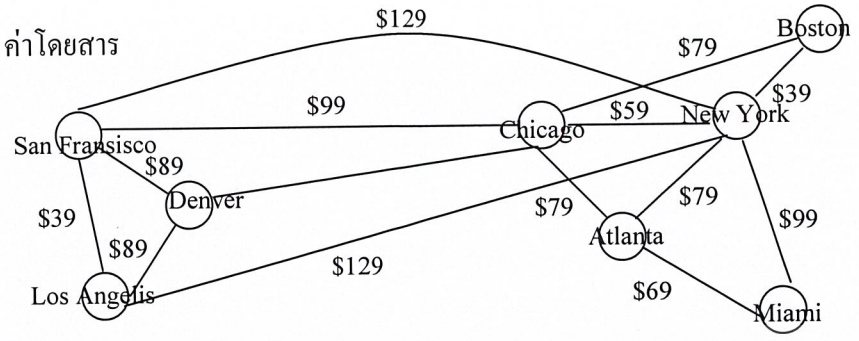
รูปที่ 2.201

เวลาที่ใช้ในการเดินทาง



รูปที่ 2.202

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



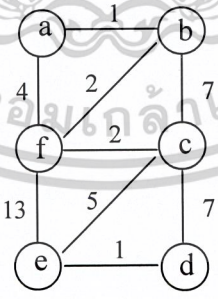
รูปที่ 2.203

ปัญหาในขณะนี้คือ อยู่ที่ Boston ต้องการจะเดินทางไป Los Angeles

1. ถ้าต้องการให้การเดินทางทางอากาศมีระยะทางสั้นที่สุดจะเลือกเส้นทางใด
2. ถ้าต้องการให้เวลาในการเดินทางทางอากาศน้อยที่สุดจะเลือกเส้นทางใด (ไม่นับเวลาในการเปลี่ยนเครื่อง)
3. เส้นทางใดเป็นเส้นทางที่เสียค่าโดยสารน้อยที่สุดปัญหาเหล่านี้คือ shorted Path Problems ซึ่งมีหลายวิธีการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างสองจุดยอนใน weighted graph ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีของ Dijlestar และ วิธีของ Hedetniemi

2.7.1 Dijkstar's algorithm

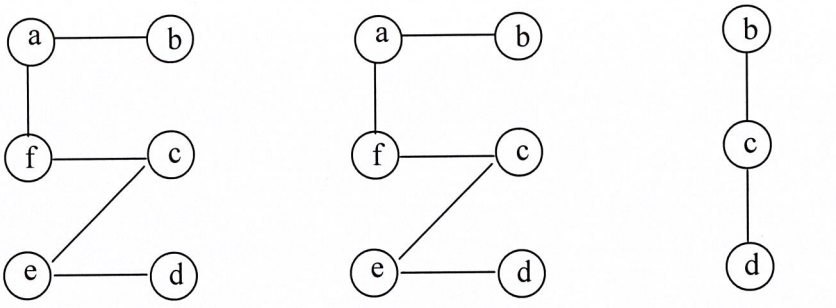
<u>ตัวอย่าง</u> ให้ G เป็นกราฟดังรูป



รูปที่ 2.204

ถ้ากำหนดจุดเริ่มต้น และ จุดสิ้นสุด เช่น เริ่มจาก b ไปจบที่ d shorted path จะเป็นอย่างไร บาง path จาก b ไป d และผลรวมของ weighted no.

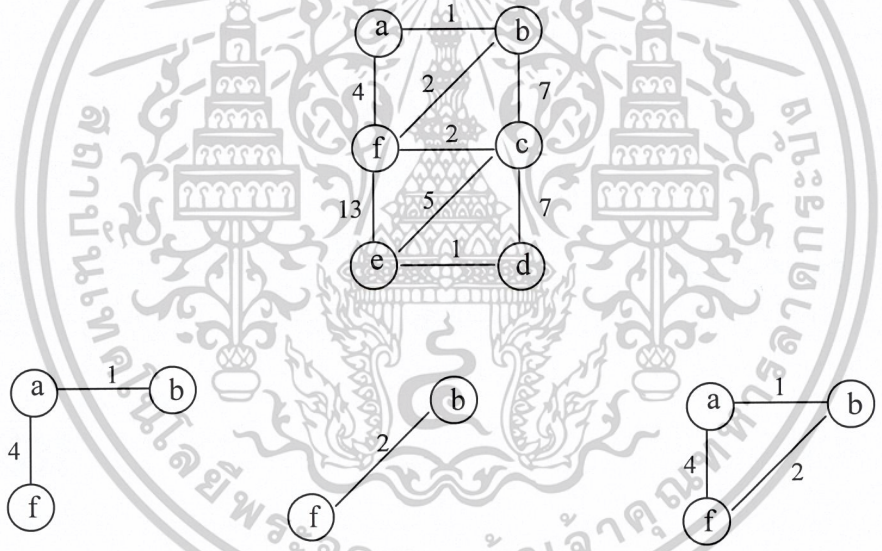
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



1+4+2+5+1=13 2+2+7=11 7+7=14

รูปที่ 2.205

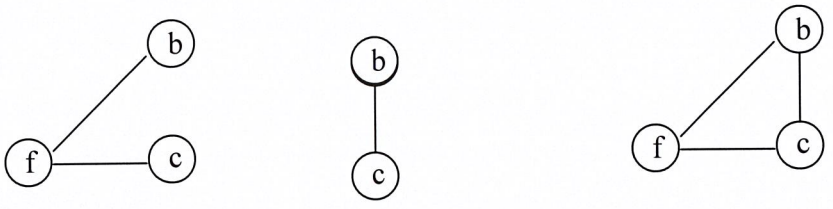
มี path อื่นที่ให้ผลรวมของ weighted no.น้อยกว่านี้ไหม วิธีการเป็นอย่างไร



รูปที่ 2.206

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

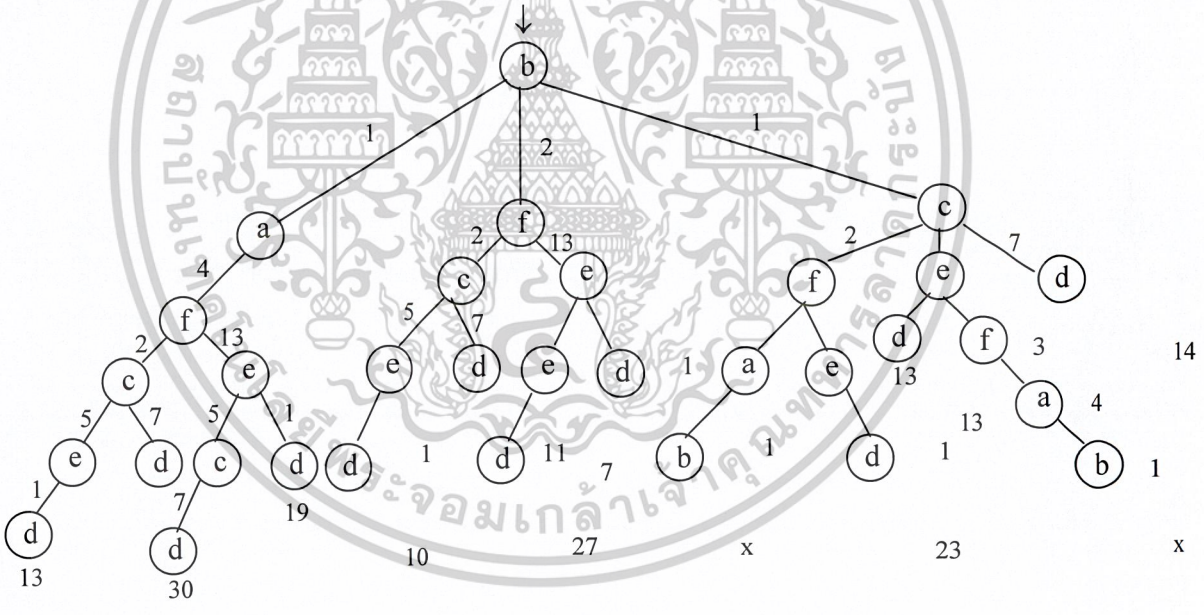
b → f=2 ค่าน้อยกว่า b → a → f=5



รูปที่ 2.207

b → f → c=4 ค่าน้อยกว่า b → c=7

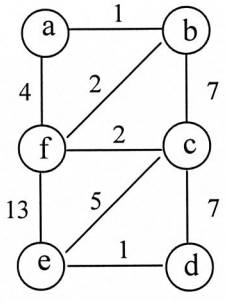
ต้องหาค่าผลรวมของ weighted no.แต่ละ path โดยดูทุก path ที่เป็นไปได้ แล้วนำมาเปรียบเทียบกัน path ได้มีค่าน้อยที่สุดเลือก path นั้น



รูปที่ 2.208

shortest path คือ b,f,c,e,d มีค่า 10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.209

จาก b มี path ba=1,bf=2,bc=7

จากa ไป f จะได้ baf$\Rightarrow$ 1+4=5

5>2 ดังนั้น ตัดเส้นทาง bc ทิ้ง

จาก c ไป e แล d จะได้ ce$\Rightarrow$5 ,cd$\Rightarrow$7

bfce = 4+5=9

จาก e มี path e =1 แล้ว bfced = 91=10

10<11 ตัด bfcd ทิ้ง

shorted path คือ bfed มีค่า 10

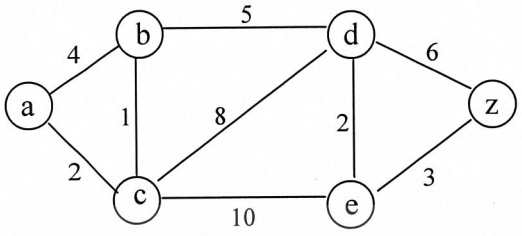
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		Label value						Notes
		a	b	c	d	e	f	
1	b	1	-	7	∞	∞	2	$L_1(a)=1$ b,a $L_1(f)=2$ b,f $L_1(c)=7$ b,c
2	a	-	-	∞	∞	∞	4	$L_2(f)=L_1(a)+w(a,f)=3$ $L_2(f)>L_1(f)$ ตัด b,a $\Rightarrow L_2(f)=2$ b,f $L_2(c)=7$ b,c
3	f	-	-	2	∞	13	-	$L_3(c)=L_2(f)+w(f,c)=4$ $L_3(e)=L_2(f)+w(f,e)=15$ $L_3(c)<L_2(e)$ ตัด b,c $\Rightarrow L_3(c)=4$ b,f,c $L_3(e)=15$ b,f,e
4	c	-	-	-	7	7	-	$L_4(d)=L_3(c)+w(c,d)=11$ $L_4(e)<L_3(c)+w(c,e)=9$ $L_4(e)<L_3(e)$ ตัด b,f,e $\Rightarrow L_4(e)=9$ b,f,c,e $L_4(d)=11$ b,f,c,d
5	e	-	-	-	1	-	-	$L_5(d)=L_4(e)+w(c,d)=10$ $L_5(d)<L_4(d)$ ตัด b,f,c,d $\Rightarrow L_5(d)=10$ b,f,c,e,d

ถึง d แล้ว แต่ที่จุดอื่นๆมีค่า L ที่น้อยกว่าที่ d จึงต้องพิจารณาต่อเฉพาะจุดยอดที่ L น้อยกว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา Shortest path จาก a ถึง z ในกราฟ



รูปที่ 2.210

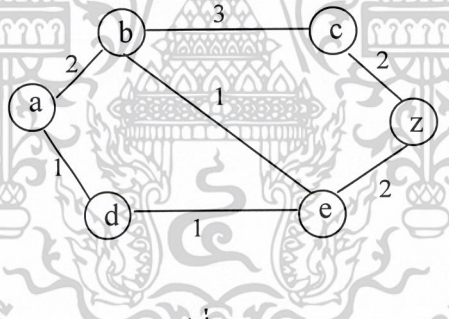
		Label value						Notes
		a	b	c	d	e	z	
1	a	-	4	2	∞	∞	∞	$L_1(c) = 2$ a,c $L_1(b) = 4$ a,b
2	c	-	1	-	8	10	∞	$L_2(b) = L_1(c) = w(c,b) = 3$ $L_2(d) = L_1(c) + w(c,d) = 10$ $L_2(e) = L_1(b) + w(c,e) = 12$ $L_2(b) < L_1(b)$ ตัด a,b $\Rightarrow L_2(b) = 3$ a,c,b $L_2(d) = 10$ a,c,d $L_2(e) = 12$ a,c,e
3	b	-	-	-	5	∞	∞	$L_3(d) = L_2(b) + w(b,d) = 8$ $L_3(d) < L_2(d)$ ตัด a,c,d $\Rightarrow L_4(d) = 8$ a,c,b,d $L_4(e) = 12$ a,c,e
4	d	-	-	-	-	2	6	$L_4(e) = L_3(d) + w(d,e) = 10$ $L_4(z) = L_3(d) + w(d,z) = 14$ $L_4(e) < L_3(e)$ ตัด a,c,e $\Rightarrow L_4(e) = 10$ a,c,b,d,e $L_4(z) = 14$ a,c,b,d,z

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

		ถึง z	แล้ว	แต่ที่จุดอื่นๆมีค่า L			ที่น้อยกว่าที่ z จึงต้องพิจารณาต่อเฉพาะจุดที่	
L	น้อยกว่า							
5	e	-	-	-	-	-	3	$L_3(z) = L_4(e) + w(e,z) = 13$ $L_5(z) < L_4(z)$ ตัด a,c,b,d,z $\Rightarrow L_5(z) = 13$ a,c,b,d,e,z

Shortest path จาก a ถึง z คือ a,c,b,d,e,z มีค่า 13

<u>ตัวอย่าง</u> จาก shortest path จาก a ไป z กราฟดังรูป



รูปที่ 2.211

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

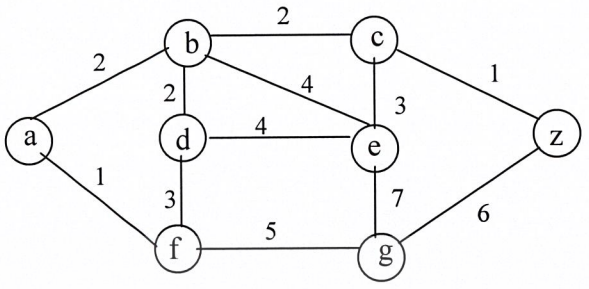
		Label value						Notes
		a	b	c	d	e	z	
1	a	-	2	∞	1	∞	∞	$L_1(b) = 2$ a,b $L_1(d) = 1$ a,d
2	d	-	∞	∞	-	1	∞	$L_2(e) = L_1(d) + w(d,e) = 2$ $\Rightarrow L_2(e) = L_2(b)w(b,c) = 3$ $L_2(e) = 2$ a,d,e
3	b	-	-	3	-	1	∞	$L_3(e) = L_2(b) + w(b,c) = 5$ $L_3(e) = L_2(b) + w(b,e) = 3$ $L_3(e) > L_2(e)$ ไม่เอา path นี้ $\Rightarrow L_3(e) = 2$ a,d,e $L_3(c) = 5$ a,b,c
4	e	-	-	∞	-	-	2	$L_4(z) = L_3(e) + w(e,z) = 4$ $\Rightarrow L_4(z) = 4$ a,d,e,z $L_4(c) = 5$ a,b,c
ได้ path a,d,e,z มีค่า 4 กลับไปที่ 2 เลือก $L_2(e)$								
3	e	-	1	∞	-	-	2	$L_3(b) = L_2(e) + w(e,b) = 3$ $L_3(z) = L_2(e) + w(e,z) = 4$ $L_3(b) > L_2(b)$ ไม่เอา path นี้ $\Rightarrow L_3(b) = 2$ a,b $L_3(z) = 4$ a,d,e,z
4	b	-	-	3	-	-	∞	$L_4(c) = L_3(b) + w(b,c) = 5$ $\Rightarrow L_4(z) = 4$ a,d,e,z $L_4(c) = 5$ a,b,c

ได้ path a,d,e,z มีค่า 4 ซึ่งเป็น path เดียวกับเมื่อพิจารณาจาก b ก่อน

ดังนั้น shortest path คือ a,d,e,z มีค่า 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา shortest path จาก a ถึง z จากกราฟดังรูป



รูปที่ 2.212

		Label value								Notes
		a	b	c	d	e	f	g	z	
1	a	-	2	∞	∞	∞	1	∞	∞	$L_1(f)=1$ a,f $L_1(b)=2$ a,b
2	f	-	∞	∞	3	∞	-	5	∞	$L_2(d)=L_1(f)+w(f,d)=4$ $L_2(g)=L_1(f)+w(f,g)=6$ $\Rightarrow L_2(b)=2$ a,b $L_2(d)=4$ a,f,d $L_4(g)=6$ a,f,g
3	b	-	-	2	2	4	-	∞	∞	$L_3(c)=L_2(b)+w(b,c)=4$ $L_3(d)=L_2(b)+w(b,d)=4$ $L_3(e)=L_2(b)+w(b,c)=6$ $\Rightarrow L_3(c)=4$ a,b,c $L_3(d)=4$ a,b,d;a,f,d $L_3(e)=6$ a,b,e $L_3(g)=6$ a,f,g

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	Label value									Notes
		a	b	c	d	e	f	g	z	
4	c	-	-	-	∞	3	-	∞	1	$L_4(e) = L_3(c) + w(c,e) = 7$ $L_4(z) = L_3(c) + w(c,z) = 5$ $L_4(e) > L_3(e)$ ไม่เอา path นี้ $\Rightarrow L_4(d) = 4$ a,b,d;a,f,d $L_4(e) = 6$ a,b,e $L_4(g) = 6$ a,f,g $L_4(z) = 5$ a,b,c,z
	ยึง z แล้ว แต่ที่จุดอื่นๆมีค่า L ที่น้อยกว่าที z จึงต้องพิจารณาต่อเฉพาะ									
	จุดที่ L น้อยกว่าคือ $L_4(d)$									
5	d	-	-	-	-	4	-	∞	∞	$L_5(e) = L_4(e) + w(d,e) = 8$ $L_5(e) > L_4(e)$ ไม่เอ Path นี้ $\Rightarrow L_5(z) = 5$ a,b,c,z $L_5(g) = 6$ a,f,g $L_5(e) = 6$ a,b,e
	จากพบว่า e และ g ยังไม่ถึง z แต่ค่า L มากกว่าที่ z ดังนั้นไม่ต้องพิจารณาต่อได้									
	Path คือ a,b,c,z มีค่า 5									
	กลับไปที่ 3 เนื่องจาก $L_3(c) = L_3(d) = 4$ ทำขั้นตอน 4 ใหม่									
4	d	-	-	∞	-	4	-	∞	∞	$L_4(e) = L_3(b) + w(b,c) = 4$ $L_4(e) = L_3(e)$ ไม่เอา path นี้ $\Rightarrow L_4(c) = 4$ a,b,c $L_4(e) = 6$ a,b,e $L_4(g) = 6$ a,f,g
5	c	-	-	-	-	3	-	∞	1	$L_5(e) = L_3(c) + w(e,c) = 7$ $L_5(z) = L_4(c) + w(c,z) = 5$ $L_5(e) > L_4(e)$ ไม่เอา path นี้ $\Rightarrow L_5(z) = 5$ a,b,c,z $L_5(e) = 6$ a,b,e $L_5(g) = 6$ a,f,g

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะพบว่า e และ g ยังไม่ถึง z แต่ค่า L มากกว่าที่ z ดังนั้นไม่ต้องพิจารณาต่อได้

Path คือ a,b,e,z มีค่า 5

ซึ่งเป็นค่าเดียวกับ เมื่อ พิจารณาจาก c ก่อน

ดังนั้น shortest path คือ a,b,c,z มีค่า 5

2.8 การไหลในข่ายงาน(Network Flows)

นิยาม directed graph G ซึ่งเป็น connected และ ไม่มี loop เรียกว่า network ก็ต่อเมื่อ

1. มี 2 จุดยอดที่แตกต่างกัน s และ T ของ G ที่เรียกว่า source และ sink ของ G ตามลำดับ และ
2. มี nonnegative real function k นิยามบนด้านบน G

ฟังก์ชัน k เรียกว่า capacity function ของ G

ถ้า e เป็นด้านใดๆ ของ G ค่า k(e) เรียกว่า capacity ของ e

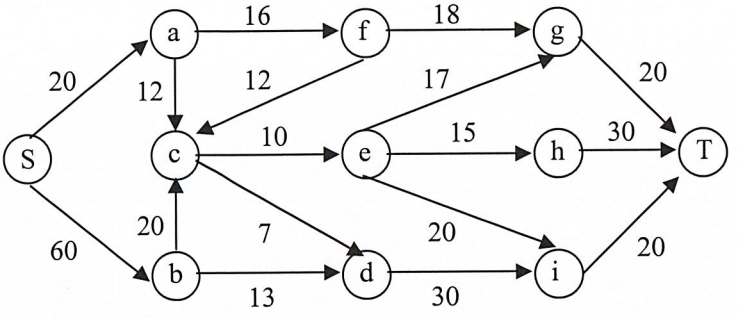
นิยาม ให้ G เป็นกราฟซึ่งมีจุดยอด 2 จุด ที่ไม่ใช่จุดเดียวกัน จุดยอดหนึ่งเรียกว่า source ของ flow และอีกจุดเรียกว่า sink ของ flow และที่ทุกๆจุดยอดอื่นนั้นจำนวน flow ที่เข้าสู่จุดยอดนั้น จะเท่ากับจำนวน flow ที่ออกจากจุดยอดนั้น flow จะถูกกำหนดด้วย weighted no. หรือ capacity บนด้าน

ในการเขียนกราฟ จะ label บนด้านด้วย 2 จำนวน โดยค่าแรกจะเป็น capacity ของ edge และค่าที่สองจะเป็นปริมาณของ flow ที่ผ่านด้านนั้นโดย

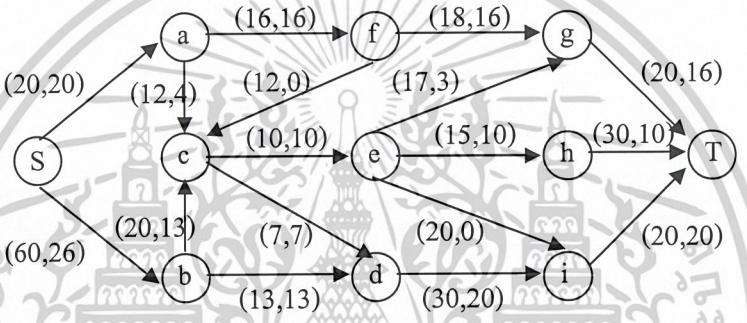
1. จำนวนของ flow ที่ผ่านไปตามด้านใดๆ ต้องไม่เกิน capacity ของด้านนั้น
2. ยกเว้นที่ source s และ sink T จำนวนของ flow ที่เข้าสู่จุดยอดใดๆ v ต้องเท่ากับจำนวน flow ที่ออกจากจุดยอดนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง



รูปที่ 2.213



รูปที่ 2.214

source คือ s , sink คือ T จุดยอดอื่นๆนอกจาก S และ T เรียกว่า intemediate vertices ให้ (G,K) เป็น transport network โดย G เป็น directed graph และ k เป็น capacity function ที่นิยามบนด้านของ G

ถ้า G= (v(G),E(G)) เป็น directed graph ซึ่งเซตของจุดยอดคือ v(G) และเซตของด้านคือ E(G) แล้วสำหรับ จุดยอดใดๆ v ซึ่ง $v \in v(G)$ แล้ว A(v) เรียกว่า after v คือ เซตของจุดยอดที่มีด้านจาก v ไปยังจุด y ใดๆ ใน v หรือ $A(v) = \{y \in v(G) \mid (v,y) \in E(G)\}$ และ B(v) เรียกว่า before v คือ เซตของจุดยอดที่มีด้านจากจุด y ใดเข้าไปยัง v หรือ $B(v) = \{y \in V(G) \mid (y,v) \in E(G)\}$

จาก ตัวอย่าง 1

A(o) = {e,d}

B(c) = {a,b,f}

A(e) = {g,h,i}

B(e) = {c}

B(s) = ϕ

A(T) = ϕ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาในแต่ละด้าน

-จะพบว่า flow น้อยกว่า หรือเท่ากับ capacity เสมอ

-ที่ c flow ที่เข้าสู่ c คือ 4,13,0

flow ที่ออกจาก c คือ 10,7

ผลรวม flow ที่เข้าสู่จุดยอดใดๆ เท่ากับผลรวม flow ที่ออกจากจุดยอดนั้นๆ

-ไม่มี flow เข้าสู่ source และไม่มี flow ออกจาก sink ผลรวมของ flow ที่ออกจาก source 20+26 = 46 เท่ากับผลรวมของ flow ที่เข้าสู่ sink 16+10+20 = 46

<u>นิยาม</u> ให้ (G,k) เป็น transport network ซึ่ง source คือ s และ sink คือ T สมมติมี capacity function k นิยามบนด้านของ G

flow ใน G คือ nonnegative real value function F ที่นิยามบนด้านของ G ซึ่ง

1 $0 \leq F(e) \leq k(e)$ สำหรับแต่ละด้าน $e \in E(G)$ หรือ ปริมาณของ flow ตามด้านแต่ละด้านจะต้องมีค่าไม่เกิน capacity ของแต่ละด้าน

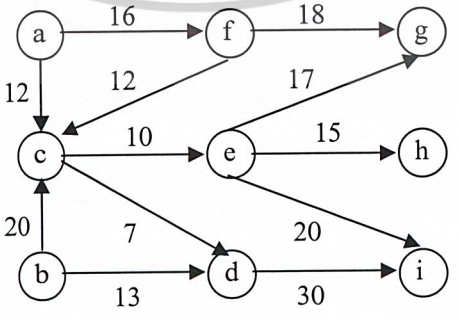
2 ถ้า x เป็นจุดยอดใดๆใน G ซึ่งไม่ใช่ source และ sink แล้ว ผลรวมของทุกค่า F(x,y) ซึ่ง $y \in A(x)$ ต้องเท่ากับผลรวมของทุกค่า F(z,x) ซึ่ง $z \in B(x)$ หรือ $\sum_{y \in A(x)} F(x,y) = \sum_{z \in B(x)} F(z,x)$ สำหรับทุกๆ $x \in v(G) - \{s,T\}$ และ

3 $F(e) = 0$ สำหรับด้าน e ใดๆที่เข้าสู่ source s หรือออกจาก sink T หรือ flow จะออกจาก source s ไปยัง sink T และไม่มี flow ในทิศย้อนกลับ

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการส่งน้ำมันจากโรงกลั่น a และ b ไปยังสถานีขายปลายทาง g,h,i ในระหว่างการขนส่ง จะผ่านสถานีขาย 4 แห่ง c,d,e,f

ในแต่ละสัปดาห์น้ำมัน 20000 และ60000 บาเรลจะถูกผลิตออกมาจากโรงกลั่น a และ b ในขณะที่สถานีขายน้ำมัน g,h,i ต้องการน้ำมัน 20000 ,30000 และ 20000 บาเรลตามลำดับ

เส้นทางและปริมาณการส่งน้ำมันจากโรงกลั่นไปยังสถานีขายในหน่วยพันบาเรลแสดงดังนี้

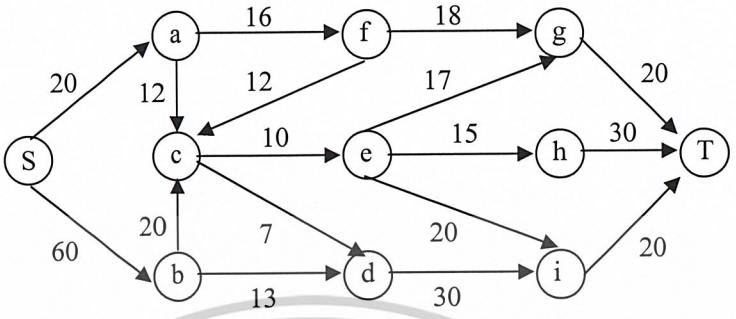


รูปที่ 2.215

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะพบว่ามี multiple source คือ a และ b และมี่ multiple sink คือ g,h,i

สามารถ จะสมมติเป็น single source และ single sink โดยการเติม 2 จุดยอดเข้าไป ให้เป็น s และ T ทาน table supply และ total demand



รูปที่ 2.216

โดยด้าน (s,x) แทนปริมาณน้ำมันที่ x สามารถ supply ได้ในแต่ละสัปดาห์ เช่น (s,a) label 20 เพราะโรงกลั่น a ผลิตน้ำมันได้ 20000 บาเรล/สัปดาห์ และด้าน (x,T) แทนปริมาณน้ำมันที่สถานีขาย x ต้องการในแต่ละสัปดาห์ เช่น (h,T) label 30 เนื่องจาก สถานีขาย h ต้องการน้ำมัน 30000 บาเรล/สัปดาห์

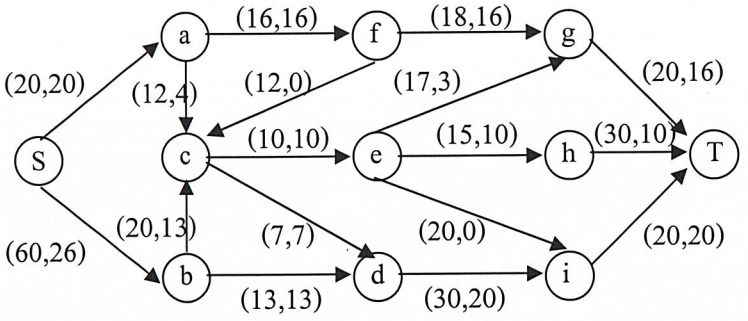
ปัญหาคือจะจัดส่งน้ำมันอย่างไร

วิธีหนึ่งในการจัดส่งน้ำมัน คือ

1. จาก a ส่ง 16000 บาเรลไปที่ f และ 4000 บาเรลไปที่ c
2. อาจส่ง 20000 บาเรลจาก b ไป c แต่เนื่องจาก A(c) = {d,e} และ capacity บนด้าน (c,e) คือ 10 , ด้าน (c,d) คือ 7 ดังนั้นจาก c จะส่งน้ำมันออกไปได้สูงสุด 17000 บาเรล เนื่องจากไม่มีคลังน้ำมันที่ c และ c สามารถรับน้ำมันได้สูงสุดได้เกิน 17000 บาเรล

   โดยที่ c ถูกเลือกให้รับน้ำมันมาแล้ว4000บาเรลจาก a ดังนั้น c จะรับน้ำมัน ได้อย่างมาก 13000 บาเรลจาก b นั่นคือ เลือกส่งน้ำมัน 13000 บาเรลจาก b ไป c
3. อาจจะเลือกส่ง 13000 บาเรลจาก b ไป d
4. ดังนั้นน้ำมันเพียง 13000+13000 = 26000 บาเรล ถูกส่งจาก s ไป b
5. จะเลือกในทำนองเดียวกันนี้ และจะได้ diagram ดังรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.217

จะพบว่าจากการเลือก flow ตามรูปนี้

สถานีขาย i จะได้รับน้ำมันตามต้องการ แต่ g และ h ได้น้อยกว่าตามต้องการ

a ส่ง	16000 ไป f		
	4000 ไป c	g ได้รับ	16000
b ส่ง	13000 ไป c	h ได้รับ	16000
	13000 ไป d	i ได้รับ	20000
รวม	46000	รวม	46000

ถึงแม้ a และ b ผลิตน้ำมันรวมกันได้ 80000บาเรล แต่ความต้องการรวมทั้งหมดคือ 70000 บาเรล

ตามรูปนี้บางสถานีขายได้รับน้ำมันไม่พอกับความต้องการ แสดงว่าวิธีนี้ ไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุดในการวางแผนการส่งน้ำมันเพียงแต่เป็นวิธีหนึ่งที่จะใช้นั้นการจัดส่งน้ำมัน

ปัญหาในขณะนี้คือ จะหาวิธีการจัดส่งที่ดีที่สุดได้อย่างไร

จาก network ที่ได้ จะพบว่าบางด้าน capacity = flow จะเรียกด้านที่มีลักษณะแบบนี้ว่า saturated กรณีอื่นๆ เรียก musaturated

สำหรับด้านที่เป็น musaturated จะนิยาม stack : s ของด้าน e ใดๆ โดย

$S(e) = k(e)-F(e)$

<u>ทฤษฎี</u> ให้ s และ T เป็น source และ sink ของ network (G,K) ให้ F เป็น flow ใน G แล้ว

flow ออกจาก $s = F(s,v(G))$

$= F(v(G),T)$ = flow เข้าสู่ T

<u>นิยาม</u> ให้ F เป็น flow นิยามบน transport network (G,k) ให้ $a_1, a_2, ..., a_m$ แทนจุดยอดทั้งหมดที่มีด้านเชื่อมมาจาก source s และ ให้ $b_1, b_2, ..., b_t$ แทนจุดยอดทั้งหมดที่มีด้านเชื่อมเข้าสู่ sink T ดังนั้น $A(s) = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ และ $B(T) = \{b_1, b_2, ..., b_t\}$ แล้ว ปริมาณ |F| ซึ่งนิยามโดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$|F| = F(s,a_1) + F(s,a_1) + \ldots + F(s,a_m)$$
$$= F(s,v(G))$$
$$= F(b_1,T) + F(b_2,T) + \ldots + F(b_f,T)$$
$$= F(v(G),T)$$

เรียกว่า value ของ flow F

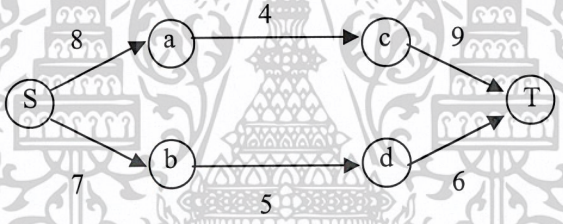
นิยาม flow F ใน Network (G,k) จะเรียกว่า maximal flow ถ้า $|F| \geq |F'|$ สำหรับทุกๆflow F' ใน (G,k)

นั่นคือ flow F เรียกว่า maximal ถ้า value ของ F มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้สำหรับ flow ใดๆ

โดยทั่วไปแล้ว เราไม่สามารถจะหา unique maximal flow ได้ถึงแม้ จะมี unique maximal value of a flow เนื่องจาก Network อาจมีหลาย flow ที่มีค่า maximal value เดียวกัน

2.8.1 Maximal flows and minimal cuts

ตัวอย่าง พิจารณา transport network ดังรูป



รูปที่ 2.218

ให้ T_1 เป็น total capacity ของด้านจาก source แล้ว $T_1 = k(s,a) + k(s,b)$
$= 8+7=15$

ให้ T_2 เป็น total capacity ของด้านเข้าสู่ sink แล้ว $T_2 = k(c,T) + k(d,T)$
$= 7+6=13$

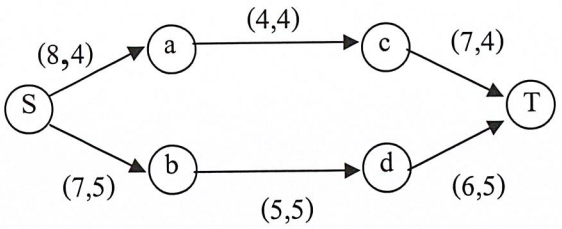
flow ใดๆใน network นี้จะต้องมีค่าไม่เกินค่าน้อยกว่าของสองค่านี้ นั่นคือ $|F| \leq 13$ สำหรับ flow ใดๆ F พิจารณาด้าน (a,c) และ (b,d) ถ้าตัดด้าน 2 ด้านนี้ออกจาก network แล้วไม่มี path ที่ flow ออกจาก source S จะไปถึง sink T ได้

ดังนั้น capacity ของด้านทั้งสองนี้จะเป็นตัวกำหนดค่าFlow

นั่นคือ $|F| \leq k(a,c) + k(b,d) = 4+5=9$

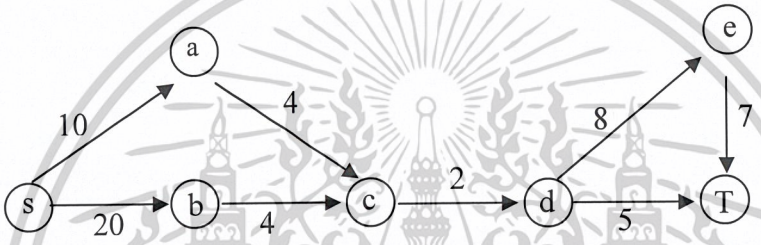
ถ้าหา flow ที่มี value 9 ได้ จะเป็น maximal flow จาก network ที่กำหนด จะหาmaximal flow ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.219

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด transport network ดังรูป



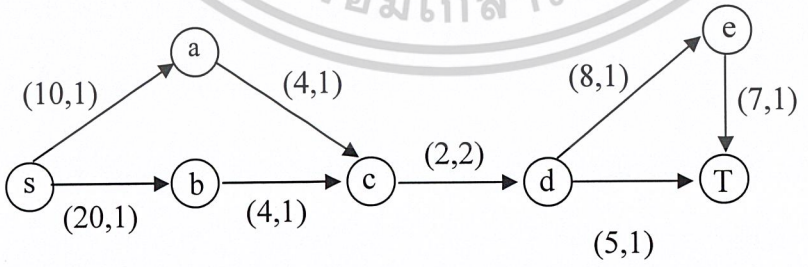
รูปที่ 2.220

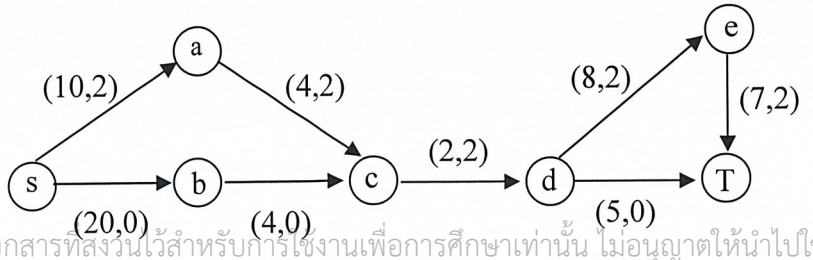
$T_1 = k(s,a) + k(s,b) = 10 + 20 = 30$

$T_2 = k(e,T) + (d,T) = 7 + 5 = 12$

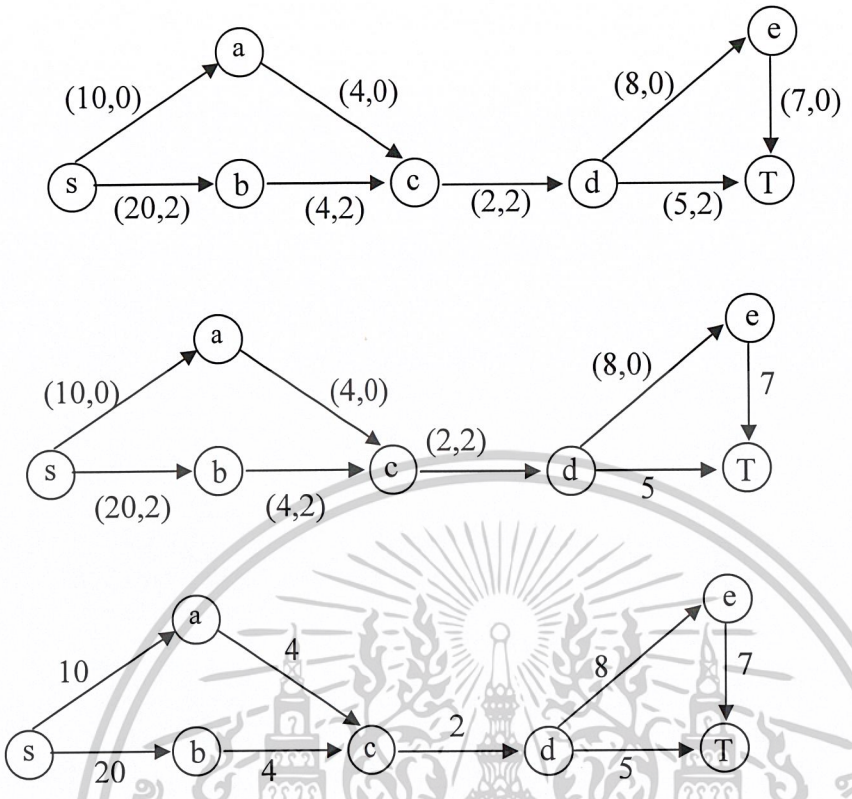
$\Rightarrow |F| \le 12$

พิจารณาด้าน (c,d) จะพบว่า k(c,d) = 2 และถ้าตัดด้านนี้แล้วไม่มี flow จาก source S ไป sink T จะได้ maximal flow ดังนี้



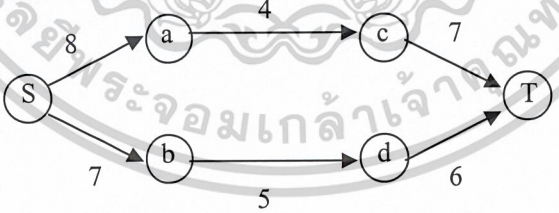


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.221

<u>นิยาม</u> สมมติ (G,k) เป็น transport network ซึ่งมี source S และ sink T สมมติ x เป็น set ของจุดยอด ซึ่ง $s \in x$ แต่ $T \notin x$ ให้ $\bar{x}$ แทน complement ของ x ใน v(G)แล้ว set $(x, \bar{x})$ ของทุกด้านจากจุดยอดใน x ไปยังจุดยอดใน $\bar{x}$ เรียกว่าs-T cut



รูปที่ 2.222

<u>ตัวอย่าง</u>

$x_1 = \{s\}$ $\quad \overline{x_1} = \{a, b, c, d, T\}$

$x_2 = \{s, a, b\}$ $\quad \overline{x_2} = \{c, d, T\}$

$x_3 = \{s, a, b, c, d\}$ $\quad \overline{x_3} = \{T\}$

หา S-T cut ได้โดย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$(x_1, \overline{x_1}) = \{(s,a),(s,b)\}$

$(x_2, \overline{x_2}) = \{(a,c),(b,d)\}$

$(x_3, \overline{x_3}) = \{(c,T),(d,T)\}$

<u>นิยาม</u> ถ้า c เป็นเซตใดๆของด้านใน transport network (G,k) แล้ว capacity ของ c คือ ผลรวมของ capacity ของด้านของ c ดังนั้น capacity k(c) นิยามโดย

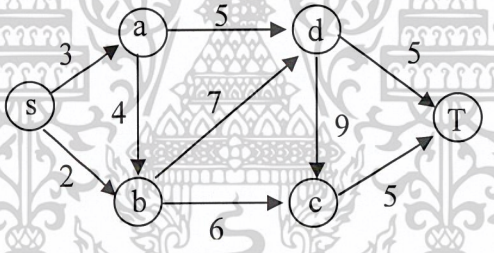
$$k(c) = \sum_{e \in C} k(c)$$

กรณีเฉพาะที่จะสนใจคือ capacity ของ S-T cut $(x,\overline{x})$ แทนด้วย $k(x,\overline{x})$ หมายถึง ผลรวมของ capacity ของด้านจาก x ไป $\overline{x}$

ข้อควรระวังคือ $(x,\overline{x})$ ต้องเป็นด้านจาก x ไปยัง $\overline{x}$ ถ้ามีด้านจาก $\overline{x}$ ไป x จะไม่นำไปคำนวณ $k(x,\overline{x})$

กรณีที่สำคัญคือ cut ซึ่งมี capacity ต่ำสุดเรียกว่า critical cut ดังนั้นจะเรียก S-T cut $(x,\overline{x})$ ว่า minimal cut ถ้าไม่มี S-T cut $(y,\overline{y})$ ซึ่ง $k(y,\overline{y}) < k(x,\overline{x})$

<u>ตัวอย่าง2</u> พิจารณา transport network ดังรูป



รูปที่ 2.223

S-T cut ที่เป็นไปได้มีดังนี้

x	$\overline{x}$	$(x,\overline{x})$
{s}	{a,b,c,d,T}	{(s,a),(s,b)}
{s,a}	{b,c,d,T}	{(s,b),(a,b),(a,d)}
{s,b}	{a,c,d,T}	{(s,a),(b,d)}
{s,c}	{a,b,d,T}	{(s,a),(s,b),(c,b),(c,T)}
{s,d}	{a,b,c,T}	{(s,a),(s,b),(d,c),(d,T)}
{s,a,b}	{c,d,T}	{(a,d),(b,d)}
{s,a,c}	{b,d,T}	{(s,b),(a,b),(a,d),(c,b),(c,T)}
{s,a,d}	{b,c,T}	{(s,b),(a,b),(d,c),(d,T)}
{s,b,c}	{a,d,T}	{(s,a),(b,d),(c,T)}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

{s,b,d}	{a,c,T}	{(s,a),(d,c),(d,T)}
{s,c,d}	{a,b,T}	{(s,a),(s,b),(c,b),(c,T),(d,T)}
{s,a,b,c}	{d,T}	{(a,d),(b,d),(c,T)}
{s,a,b,d}	{c,T}	{(d,c),(d,T)}
{s,a,c,d}	{b,T}	{(s,b),(a,b),(c,b),(c,T),(d,T)}
{s,b,c,d}	{a,T}	{(s,a),(c,T),(d,T)}
{s,a,b,c,d}	{T}	{(c,T),(d,T)}

ในแต่ละกรณี capacity ของ $(x,\bar{x})$ มีค่าดังนี้

1. 3+2=5
2. 2+4+5=11
3. 3+7=10
4. 3+2+6+5=16
5. 3+2+9+5=19
6. 5+7=12
7. 2+4+5+6+5=22
8. 2+4+9+5=20
9. 3+7+5=15
10. 3+9+5=17
11. 3+2+6+5+5=21
12. 5+7+5=17
13. 9+5=14
14. 2+4+5+6+5=22
15. 3+5+5=13
16. 5+5=10

จาก transport network นอกจาก source และ sink แล้ว มีจุดยอด ดังนั้นจะมี S-T cut 2^4 แบบที่ต่างกัน

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า F เป็น flow ใน transport network (G,k) และถ้า $(x,\bar{x})$ เป็น S-T cut ใดๆ แล้ว

1. $|F| = F(x,\bar{x}) - F(x,\bar{x})$

และสิ่งที่ตามก็คือ

2. $|F| \leq k(x,\bar{x})$

เรียก $F(x,\bar{x}) - F(\bar{x},x)$ ว่า net flow ที่ผ่าน cut $(x,\bar{x})$ value ของ flow สามารถคำนวณได้หลายวิธีที่แตกต่างกัน

1. $|F|$ = total flow ที่ออกจาก source S
2. $|F|$ = total flow ที่เข้าสู่ sink T
3. $|F|$ = net flow ที่ผ่าน cut S-T ใดๆ

<u>บทแทรก</u> ให้ F เป็น flow และ $(x,\bar{x})$ เป็น S-T cut ซึ่ง $|F| = k(x,\bar{x})$ แล้ว F เป็น maximal flow และ $(x,\bar{x})$ เป็น minimal cut

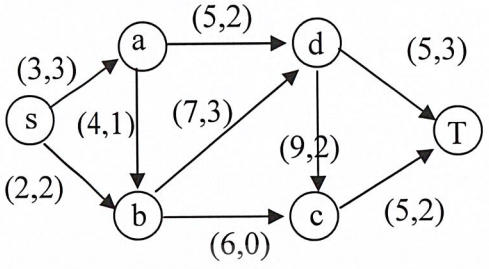
<u>บทแทรก</u> ให้ F เป็น flow เป็น network และ $(x,\bar{x})$ เป็ร S-T cut แล้ว value F จะเท่ากับ capacity ของ $(x,\bar{x})$ ก็ต่อเมื่อ

1. $F(e) = k(e)$ สำหรับแต่ละด้าน $e \in (x,\bar{x})$ นั้นคือ $F(x,\bar{x}) = k(x,\bar{x})$ และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

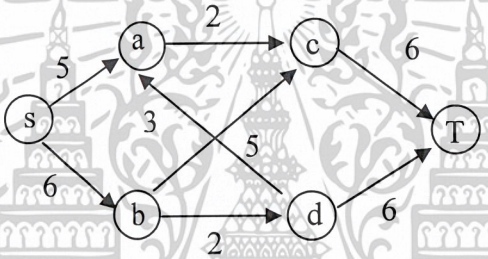
2. $F(e') = 0$ สำหรับแต่ละด้าน $e' \in (\bar{x}, x)$ หรือ $F(\bar{x}, x) = 0$

จาก ตัวอย่าง2 จาก S-T cut ที่ได้ จะพบว่า minimal cut คือ 5 ดังนั้น $|F| = 5$ จะได้แบบหนึ่งของ flow ดังนี้



รูปที่ 2.224

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา network ดังรูป



รูปที่ 2.225

$x = \{s, a, b\}$

$\bar{x} = \{c, d, T\}$

$(x, \bar{x}) = \{(a,c),(b,c),(b,d)\}$

capacity ของ $(x, \bar{x}) = 2+3+2 = 7$

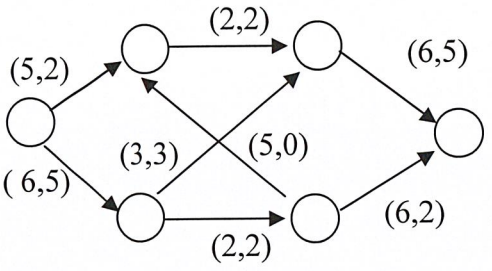
$T_1 = k(s,a)+k(s,b) = 5+6=11$

$T_2 = k(c,T)+k(d,T) = 12$

$7<11$

จะได้แบบหนึ่งของ flow ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.226

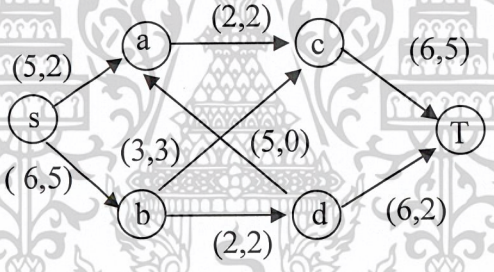
2.8.2 The max flow-min cut theorem

value ของ maximal flow คือ capacity ของ minimal cut

ถ้ามี flow F ซึ่ง value เท่ากับ capacity ของ บาง cut $(x, \bar{x})$ แล้ว F เป็น maximal flow และ $(x, \bar{x})$ เป็น minimal cut

ถ้า $|F| = k$ $(x, \bar{x})$ แล้วด้านใน $(x, \bar{x})$ ต้องเป็น saturated และด้านใน $(\bar{x}, x)$ ต้องมี zero flow

<u>ตัวอย่าง</u>



รูปที่ 2.227

$x=\{s,a,b\}$

$\bar{x} = \{c,d,T\}$

$(x, \bar{x}) = \{(a,c),(b,c),(b,d)\}$

ซึ่ง $|F| = k(x, \bar{x}) = 2+3+2=7$

$(\bar{x}, x) = \{(d,a)\}$ ซึ่ง flow = 0

ด้านใน $(\bar{x}, x)$ มี zero flow

<u>ทฤษฎีบท</u> The max flow -min cut theorem

ใน transport network ใดๆ ค่าของ maximal flow ใดๆ เท่ากับ capacity ของ minimal cut

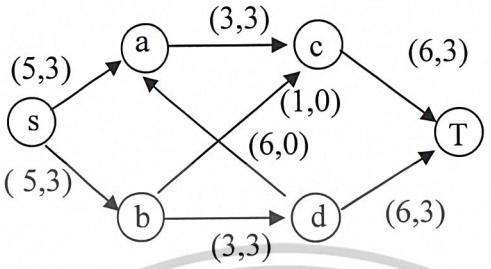
จากทฤษฎีนี้เป็นการยืนยันว่า

1. มี minimal cut $(x, \bar{x})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. มี maximal flow F
3. การเท่ากันของ |F| และ $k(x, \bar{x})$ สำหรับ maximal flow F ใดๆ และ minimal cut $(x, \bar{x})$ ใดๆ

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา network ซึ่งมี capacity และ flow ดังรูป



รูปที่ 2.228

|F| = 6

ต้องการเพิ่ม flow ตามด้าน (s,a) ,(a,d) และ (d,T) หรือ ต้องการเพิ่ม flow ใน path s-a-d-T ด้วยปริมาณที่แน่นอน t จะต้องพิจารณาว่า t จะมีค่ามากที่สุดได้เท่าไร เนื่องจาก flow มีค่าสูงสุดไม่เกิน capacity ดังนั้น flow ของ (s,a) จะเพิ่มขึ้นได้ไม่เกิน

$$k(s,a)-F(s,a) = 5-3=2$$

ในทำนองเดียวกัน flow จาก a ไป d และจาก d ไป T เพิ่มขึ้นได้ไม่เกิน

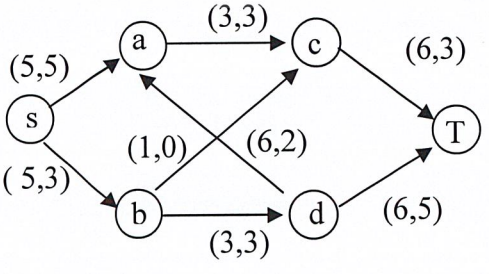
$$k(a,d)-F(a,d) = 6-0 = 6$$

$$k(d,T)-F(d,T)=6-3=3 \quad \text{ตามลำดับ}$$

เนื่องจาก ต้องการเพิ่ม flow บนด้านทั้ง 3 นี้ ด้วยปริมาณ t เดียวกัน ดังนั้นค่าที่มากที่สุดของ t จะต้องเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของทั้ง 3ค่านี้ ดังนั้น

$$t = \min \{2,6,3\} = 2$$

ดังนั้นจะเพิ่ม flow ในแต่ละด้านของ path s-a-d-T อีกด้านละ 2 จะได้ flow F_1 ดังรูป



รูปที่ 2.229

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$|F_1| = 8$

$|F| = 6$

ดังนั้น F ไม่ใช่ maximal flow

แล้ว F_1 ล่ะ เป็น maximal flow หรือไม่

จะตอบคำถามนี้ โดยการเพิ่ม flow ตาม unsaturated edges

พิจารณา path s-b-c-T แต่ละด้านตาม path นี้ unsaturated

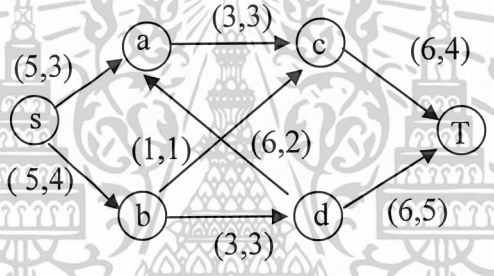
stack ของ (s,b),(b,c) และ (c,T) ตามลำดับ คือ

k(s,b)-F(s,b)=5-3=2

k(b,c)-F(b,c)=1-0=1

k(c,T)-F(c-T)=6-3=3

จะเพิ่ม flow ตาม path s-b-c-T ด้วยค่า min {2,1,3}=1 จะได้ flow F_2 ดังรูป



รูปที่ 2.230

$|F_2| = 9$

ไม่สามารถเพิ่ม flow ได้อีก ดังนั้น F_2 เป็น maximal flow

วิธีการตามตัวอย่างนี้คือ gredy method สำหรับการเพิ่ม value ของ flow F

1. เลือก simple directed path P ใดๆ โดย $p = \{e_1, e_2, .., e_k\}$ จาก source s ไปยัง sink T ซึ่งแต่ละด้าน e_i เป็น unsaturated

2.คำนวณ stack ของแต่ละด้าน e_i ใน P และให้ t เป็นค่าต่ำสุดของค่า stack เหล่านี้

3.เพิ่มค่าของ flow ในแต่ละด้าน e_i ใน path p ด้วยค่า t ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ สำหรับทุก unsaturated path

สุดท้ายจะได้ maximal flow เมื่อพิจารณาครบทุก unsaturated path หรือเมื่อทุก path เป็น saturated path แล้ว

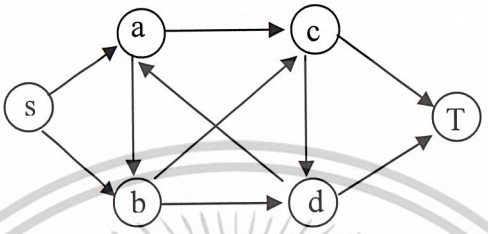
การวางทิศทางของ network

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ G เป็น network ชุดหนึ่ง มี source s,sink T และ capacity k พิจารณาทางเดินชุดหนึ่ง P จาก s ไป T โดย

$P = \{v_0, v_1, ...v_k\}$ เมื่อ v_0 = s และ v_n = T เนื่องจาก G เป็น directed graph ถ้ามีด้าน e ในทางเดิน p ซึ่งทิศจาก v_{i-1} ไป v_i จะเรียกด้าน e ว่า ได้วางทิศในทางที่ควรเป็น (เมื่อเทียบกับ p) ถ้าด้าน e ในทางเดิน p ออกจาก v_i ไป v_{i-1} เรียก e ว่าวางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น (เมื่อเทียบกับ p)

ตัวอย่าง



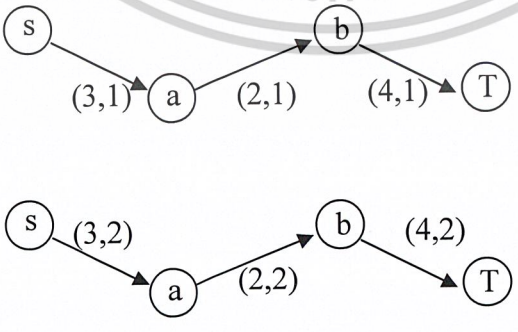
รูปที่ 2.231

p=(s,a,b,d,c,T)

(s,a),(a,b),(c,T) เป็นด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็น (d,b),(c,d)เป็นด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

ถ้าสามารถหาทางเดิน p ชุดหนึ่งจาก source s ไปยัง sink T ที่ทุกด้านในทางเดิน p ได้วางทิศในทางที่ควรเป็นแล้ว และ flow ในแต่ละด้านมีค่าน้อยกว่า capacity ของด้าน จึงเป็นไปได้ที่จะเพิ่มค่าของ flow

ตัวอย่าง

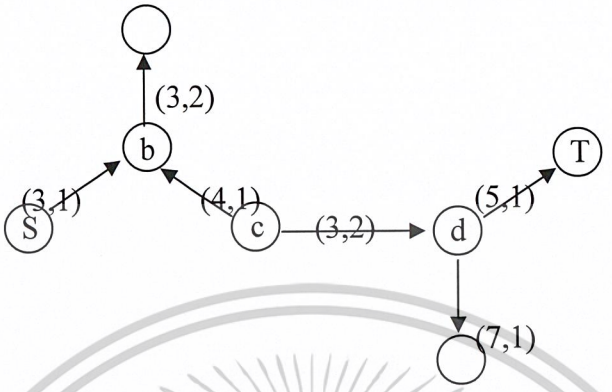


รูปที่ 2.232

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้านทุกด้านได้วางทิศในทางที่ควรเป็น ค่าของ flow ใน network นี้สามารถเพิ่มขึ้นได้อีก1 หน่วย

เป็นไปได้ที่จะเพิ่มค่าflow ในทางเดินชุดหนึ่งจาก source ไปยัง sink โดยมีด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็น และมีด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

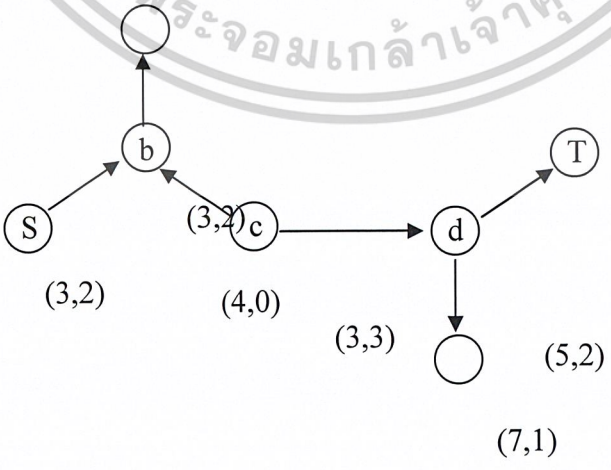


รูปที่ 2.233

p=(s,b,c,d,T)

(s,b),(c,d)และ (d,T) วางทิศในทางที่ควรเป็น (c,b) วางทิศในที่ไม่ควรเป็น

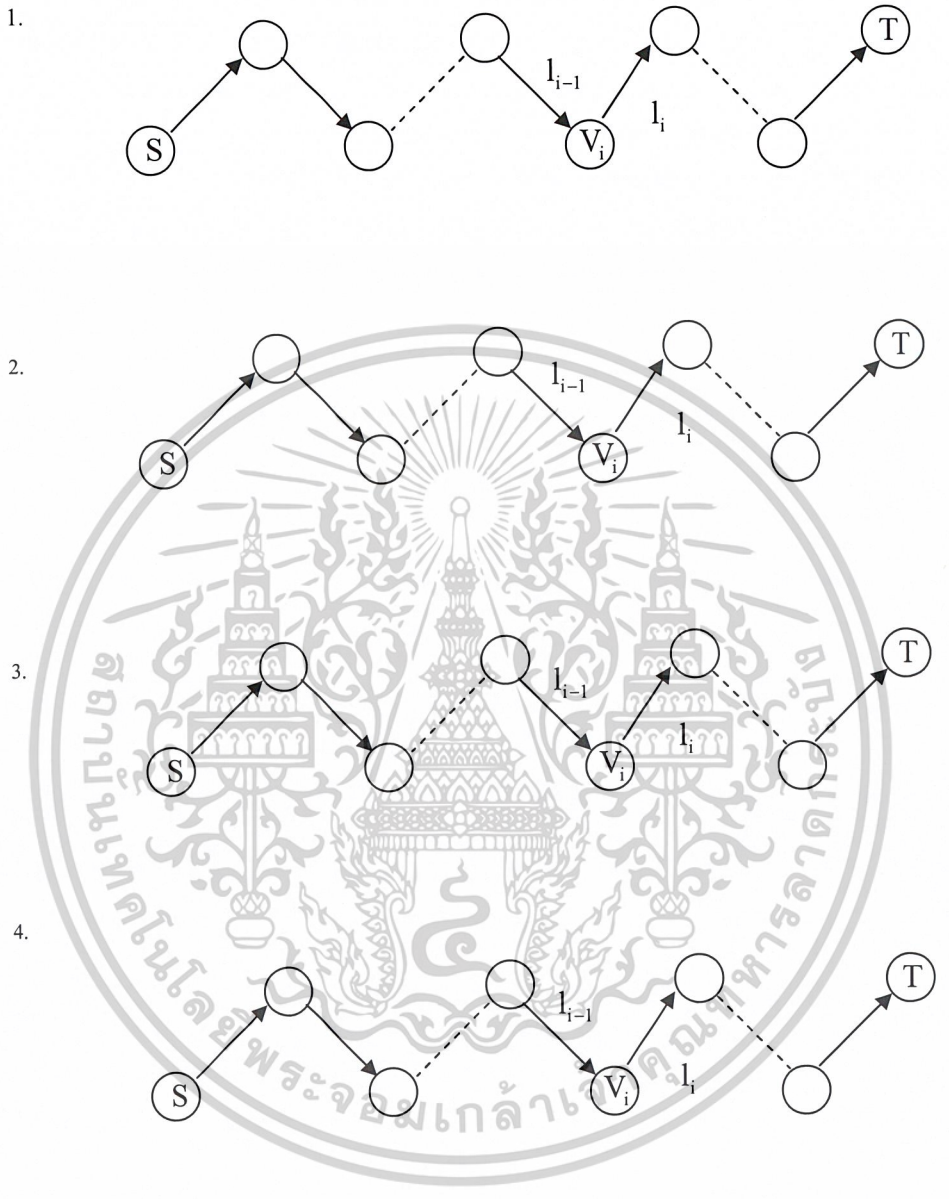
ถ้าลดอีก 1 หน่วย ในด้าน (s,b),(c,d)และ (d,T) จะทำให้ได้ค่า flow ที่มากกว่าเดิม 1 หน่วย จาก s ไป T โดยไม่กระทบ flow อื่น



รูปที่ 2.234

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ P เป็นทางเดินจาก source s ไป sink T และ v_i เป็นจุดยอดใดๆใน p ที่ไม่ใช่ s และ T แล้ว กรณีที่เป็นไปได้ สำหรับการวางทิศของด้าน e_{i-1} และ e_i ที่ตกกระทบจุดยอด v_i มี 4 แบบดังนี้



รูปที่ 2.235

แบบ1. ด้าน e_{i-1} และ e_i วางทิศในทางที่ควรเป็นแล้วสามารถเพิ่มค่า flow ในด้าน e_{i-1} อีก Δ flow เข้าไปยัง v_i แล้วยังคงมี flow ออกจาก v_i ผ่านด้าน e_i เพิ่มขึ้นอีก Δ

แบบ2. เมื่อเพิ่ม flow ในด้าน e_i อีก Δ ต้องลด flow ในด้าน e_{i-1} ลง Δ เพิ่มให้ flow เข้าไปยัง v_i เท่ากับ flow ออกจาก v_i

แบบ3. เมื่อเพิ่ม flow ในด้าน e_{i-1} อีก Δ ต้องลด flow ในด้าน e_i ลง Δ เมื่อให้ flow เข้าไปยัง v_i เท่ากับ flow ออกจาก v_i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบ4. ถ้าเพิ่ม flow ในด้านอื่นๆในทางเดินอีก Δ ต้องลดค่า flow ลง Δ ในด้าน e_{i-1} และ e_i ในทั้ง 4 แบบ เพิ่มค่า flow ในทางเดินจาก S ไป T ได้ ก็ต่อเมื่อค่า flow เดิมในด้านน้อยกว่าความจุของด้าน

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ p เป็นทางเดินจาก source s ไป sink T ใน network G และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

ก.สำหรับแต่ละด้าน (i,j) ที่วางทิศในทางที่ควรเป็นใน p $F_{ij} < k_{ij}$

ข.สำหรับแต่ละด้าน (i.j) ที่วางทิศในทางไม่ควรเป็น ใน p $F_{ij} > 0$

$$\text{ให้ } \Delta = \min \begin{cases} k_{ij} - F_{ij} & \text{สำหรับด้าน}(i,j)\text{ ที่วางทิศใน} \\ F_{ij} & \text{สำหรับด้าน}(i,j)\text{ที่วางทิศใน} \end{cases}$$

ให้ F^* เป็น flow ซึ่ง

$$F_{ij}^* = \begin{cases} F_{ij} & \text{สำหรับด้าน}(i,j)\text{ที่ไม่อยู่ใน}p \\ F_{ij} + \Delta & \text{ถ้าด้าน}(i,j)\text{วางทิศในทางที่ควรเป็นใน}p \\ F_{ij} - \Delta & \text{ถ้าด้าน}(i,j)\text{วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็นใน}p \end{cases}$$

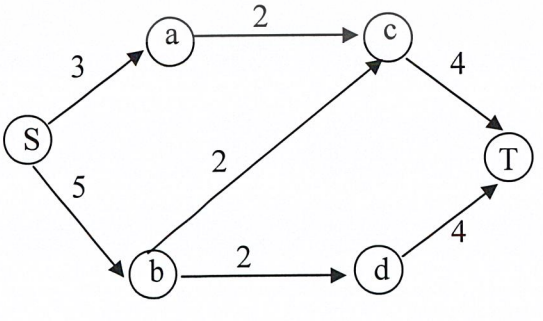
แล้ว F^* เป็น flow ที่มีค่ามากกว่าค่า flow F อยู่ Δ หน่วย

ถ้าไม่สามารถหาทางเดินที่มีคุณสมบัติดังกล่าวนี้ได้แสดงว่า flow ที่ได้มีค่าสูงสุดแล้ว เค้าโครงวิธีการหา flow มีดังนี้

1. เริ่มต้นด้วยการกำหนด flow ขึ้นชุดหนึ่ง เช่น flow ที่แต่ละด้านมีค่าเป็นศูนย์
2. หาทางเดินชุดหนึ่งที่เป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎี ถ้าหาทางเดินไม่ได้ จบ แสดงว่า flow นั้นมีค่าสูงสุดแล้ว ถ้าหาทางเดินทาง source ไป sink ได้ ไปทำขั้น3
3. เพิ่ม flow ในทางเดินอีก Δ หน่วย โดย Δ นิยามในทฤษฎีแล้ว แล้วกลับไปทำขั้น2

ในระหว่างการหาทางเดินนั้น ควรหาปริมาณ $k_{ij} - F_{ij}$ และ F_{ij} (สำหรับด้านที่วางทิศในทางที่ควรเป็น และ ด้านที่วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น) ไปพร้อมๆกัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา maximal flow ของ network ดังรูป



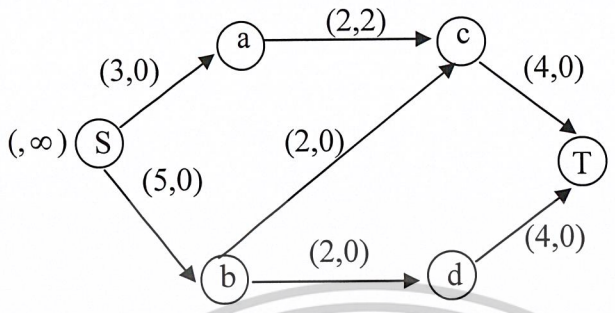
รูปที่ 2.236

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u> กำหนดอันดับของจุดยอดใน network เป็น s,a,c,b,d,T

กำหนด flow ในแต่ละด้านเป็น 0

และให้ label จุดยอด s ด้วย $(,\infty)$



รูปที่ 2.237

s เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุด และยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (s,a) และ (s,b)

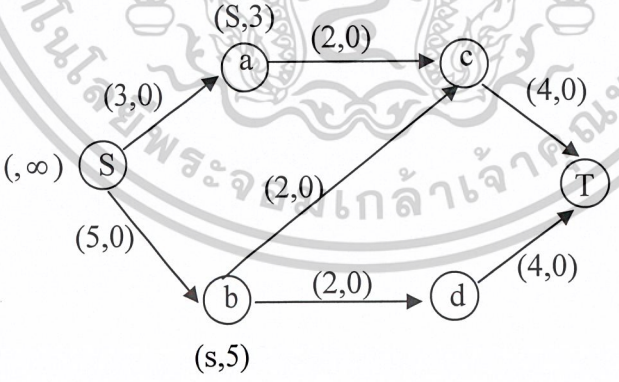
สำหรับด้าน (s,a)พบว่า $F_{sa}=0 < c_{ab}=3$

จึง label จุดยอด a ด้วย (s,b)

เนื่องจาก $3 = \min\{\infty,(3-0)\}$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ (s,b) label b ด้วย

(s,5) ให้ s เป็น s' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

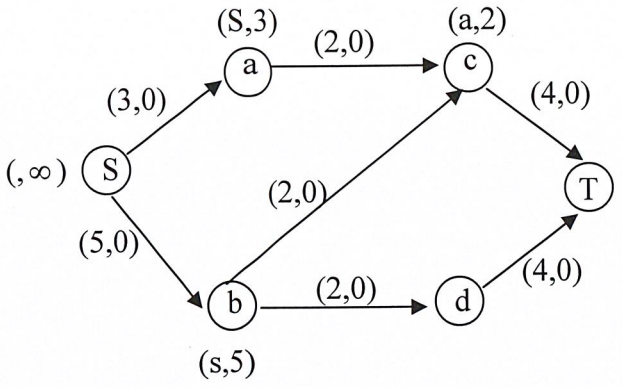


รูปที่ 2.238

จุดยอดT ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a ตรวจสอบด้าน (a,c) และให้ label จุด c ด้วย (a,2) ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

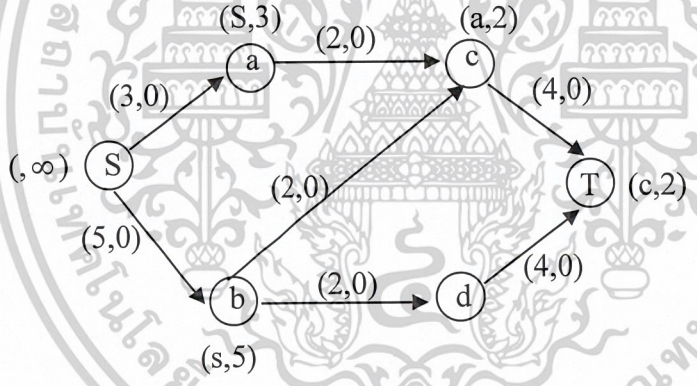
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.239

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : c ตรวจสอบด้าน (c,T) และให้ label จุด T ด้วย (c,2) ให้ c เป็น **c′** เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.240

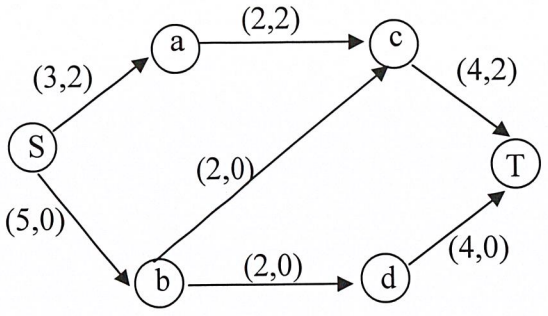
จุดยอด T ถูก label แล้ว ได้ ทางเดิน P:s,a,c,T

เนื่องจากทุกด้านใน p วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ p อีก Δ =2

โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T

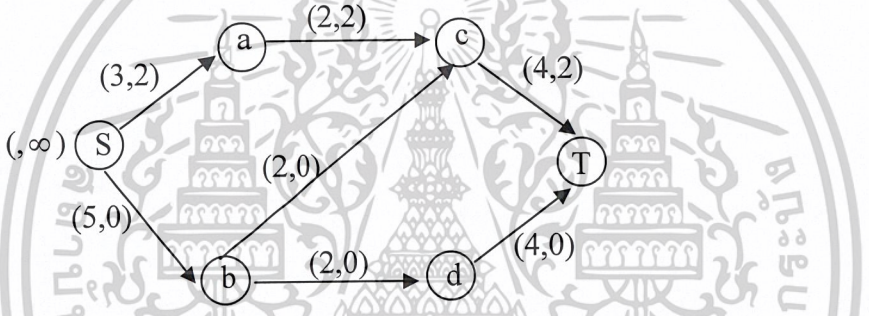
แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.241

กลับไปทำใหม่ ให้ label จุดยอด s ด้วย $(,\infty)$



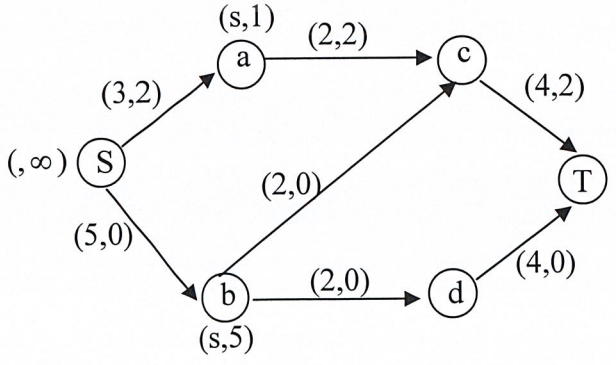
รูปที่ 2.242

s เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุด และยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (s,a) และ (s,b)

label a ด้วย min $\{(\infty, 3\text{-}2)\} \Rightarrow (s,1)$

label b ด้วย min $\{(\infty, 5\text{-}0)\} \Rightarrow (s,5)$

ให้ s เป็น s' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.243

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

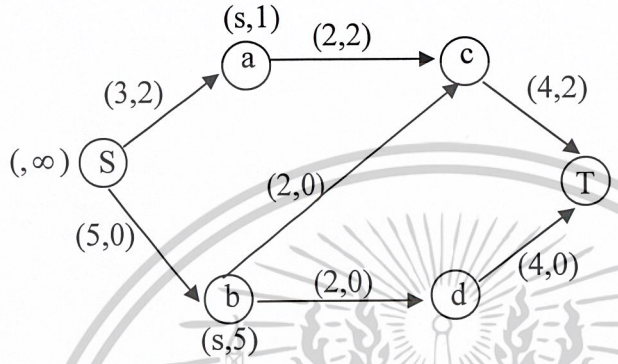
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ :a

ตรวจสอบด้าน (a,c)

จาก min {1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{ac} = c_{ac} = 2$

จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เมื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.244

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

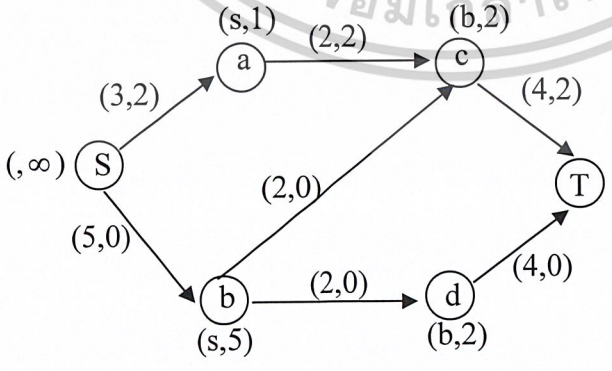
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ :b

ตรวจสอบ (b,c) และ (b,d)

label c ด้วย min {5,(2-0)} คือ (b,2)

label d ด้วย min{5,(2-0)} คือ (b,2)

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.245

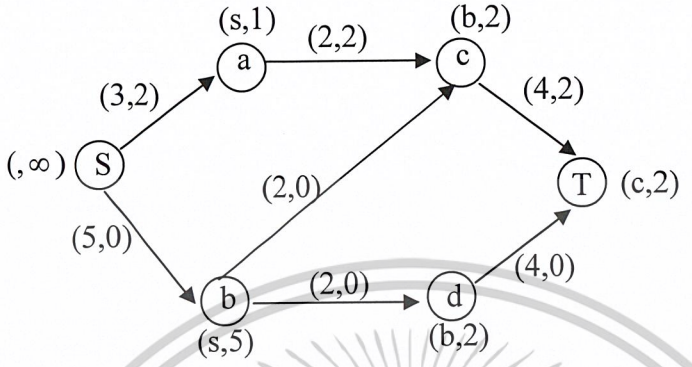
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุดที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ :c

ตรวจสอบด้าน (c,T) และ label จุด T ด้วย (c,2)

ให้ c เป็น c' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



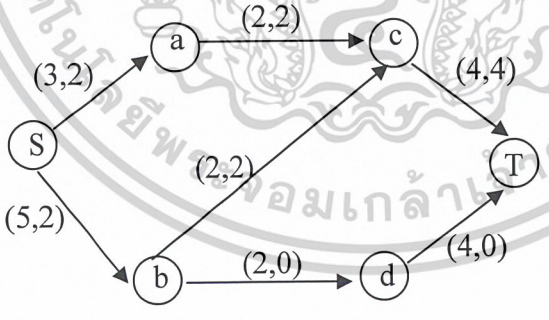
รูปที่ 2.246

จุดยอด T ถูก label แล้ว

ได้ทางเดิน p:s,b,c,T

เนื่องจากแต่ละด้านใน p วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ p อีก Δ = 2 โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T

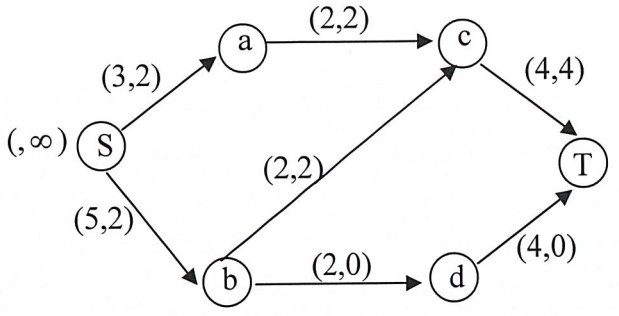
แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด



รูปที่ 2.247

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กลับไปทำใหม่ ให้ label จุดยอด s ด้วย $(,\infty)$



รูปที่ 2.248

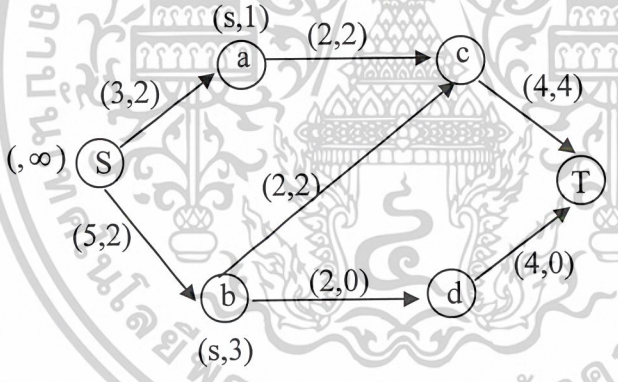
s เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุด และยังไม่ถูกตรวจสอบ

ตรวจสอบด้าน (s,a) และ (s,b)

label a ด้วย $\min\{\infty,(3-2)\} \Rightarrow (s,1)$

label b ด้วย $\min\{\infty,(5-2)\} \Rightarrow (s,3)$

ให้ s เป็น s' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.249

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : a

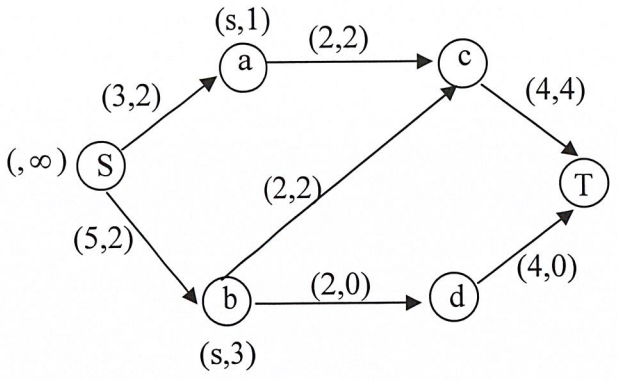
ตรวจสอบด้าน (a,c)

จาก $\min\{1,(2-2)\} = 0$ เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$

จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.250

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : b

ตรวจสอบ (b,c) และ (b,d)

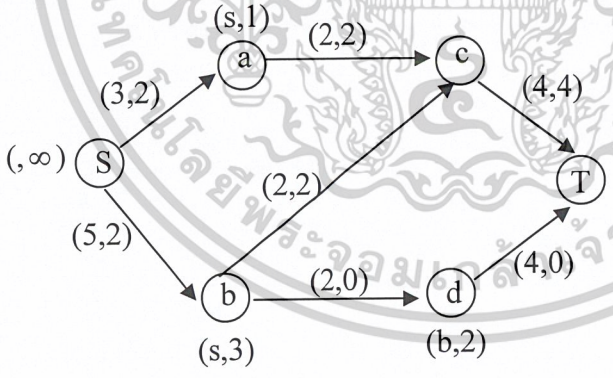
label c ด้วย min {3,(2-2)} = 0

เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$ จะไม่ label ค่าที่ c

และให้ c เป็น c^*

label c ด้วย min {3,(2-0)} = 2 $\Rightarrow$ (b,2)

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.251

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

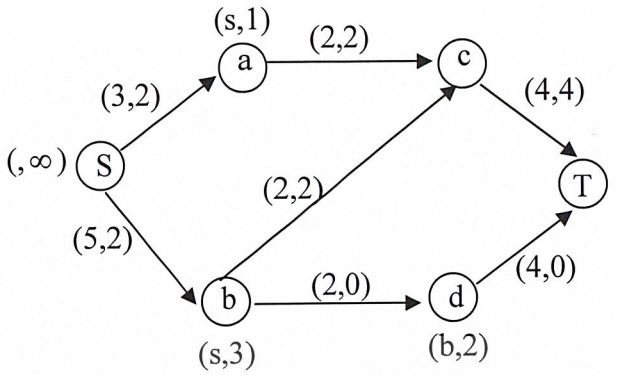
พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : d

ตรวจสอบ (d,T)

label T ด้วย min{2,(4-0)} $\Rightarrow$ (d,2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ d เป็น d' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.252

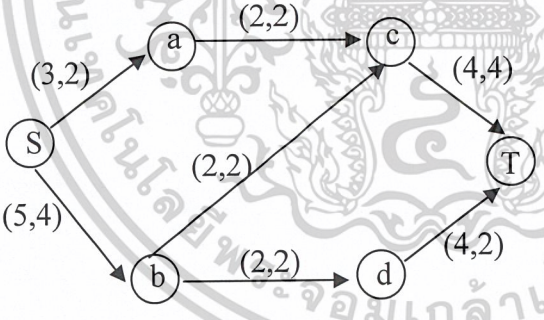
จุดยอด T ถูก label แล้ว

ได้ทางเดิน p:s,b,d,T

เนื่องจากทุกด้านใน p วางทิศในทางที่ควรเป็น สามารถเพิ่มค่า flow ในแต่ละด้านของ p อีก Δ =2

โดย 2 นี้มาจาก label ที่จุดยอด T

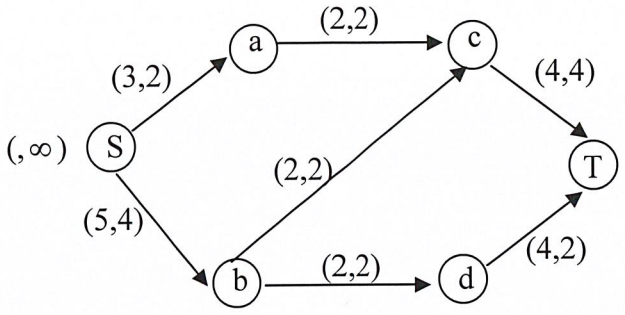
แล้วลบ label ทุกค่าจากจุดยอด



รูปที่ 2.253

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กลับไปทำใหม่ ให้ label จุดยอด s ด้วย $(,\infty)$



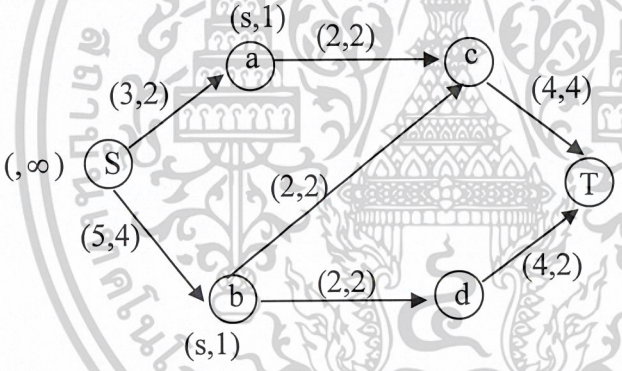
รูปที่ 2.254

s เป็นจุดยอดที่มีอันดับต่ำสุด และยังไม่ถูกตรวจสอบ ตรวจสอบด้าน (s,a) และ (s,b)

label a ด้วย min $\{(\infty,3\text{-}2)\} \Rightarrow (s,1)$

label b ด้วย min $\{(\infty,5\text{-}4)\} \Rightarrow (s,1)$

ให้ s เป็น s' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว



รูปที่ 2.255

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ :a

ตรวจสอบด้าน (a,c)

จาก min $\{1,(2\text{-}2)\} = 0$ เนื่องจาก $F_{ac} = c_{ac} = 2$

จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

ให้ a เป็น a' เมื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : b

ตรวจสอบ (b,c) และ (b,d)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก min {1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{ac} = C_{ac} = 2$

จะไม่ label ค่าที่ c และให้ c เป็น c^*

จาก min {1,(2-2)} = 0 เนื่องจาก $F_{bd} = C_{bd} = 2$

จะไม่ label ค่าที่ d และให้ d เป็น d^*

ให้ b เป็น b' เพื่อแสดงว่าตรวจสอบแล้ว

จุดยอด T ยังไม่ถูก label

พิจารณาจุดยอดอันดับต่อมาที่ยังไม่ถูกตรวจสอบ : T

ซึ่งเป็นจุดสุดท้าย จบ flow คือ 4+2=6

ขั้นตอนการหา maximal flow ชุดหนึ่งใน network

ให้ G เป็น network ที่มี source s , sink T

และความจุ c ความจุดของแต่ละด้านมีค่าเป็น จำนวนเต็มไม่เป็นลบ

เรียงลำดับจุดยอดของ G ดังนี้

$s = (v_1, v_2, ..., v_n)$

1. [ตั้งต้นค่า flow] ให้ $F_{ij} = 0$ สำหรับแต่ละด้าน (v_i, v_j)
2. [label จุดยอด s] label จุดยอด s ด้วย $(, \infty)$
3. [label จุดยอด Tหรือยัง] ถ้าจุดยอด T ได้รับการ label แล้ว ให้ไปขั้นที่6
4. [Next label vertex] เลือกจุดยอด v_i ที่ได้รับการ label แต่ยังไม่ได้รับการตรวจสอบ ที่มี subscript I น้อยที่สุด ถ้าหาไม่ได้ จบ แสดงว่า flow นั้นมีค่าสูงสุดแล้ว ถ้าหาได้ ให้ $v = v_i$
5. [label จุดยอดที่อยู่ประชิด] ถ้า (∞, Δ) เป็น label ของจุดยอด v ตรวจดูแต่ด้านที่อยู่ในรูป (v,w) และ (w,v) เมื่อ w ยังไม่ได้รับการ label โดย w อาจเป็น $v_0, v_1, ..., v_n$ และดำเนินการดังนี้

สำหรับด้านในรูปแบบ (v,w)

ถ้า $F_{vw} < C_{vw}$ ให้ label จุดยอด w ด้วย $(v, \min\{\Delta, (C_{vw}, F_{vw})\})$

ถ้า $F_{vw} = 0$ ไม่ต้อง label จุดยอด w สำหรับด้านในรูปแบบ (w,v)

ถ้า $F_{vw} > 0$ ให้ label จุดยอด w ด้วย $(v, \min\{\Delta, F_{vw}\})$

ถ้า $F_{vw} = 0$ ไม่ต้อง label จุดยอด w กลับไปขั้นที่3

6. [ปรับค่า flow] สมมติ label ของ sink T คือ(r,4)

ให้ $w_0 = T, w_1 = r$ ถ้า label w_i คือ (r', Δ') ก็ให้ $w_{i+1} = r'$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนกระทั่ง $w_k = s$ สำหรับบาง k ที่เป็นจำนวนเต็ม

ขณะนี้จะได้ทางเดิน $p : s = w_k, w_{k-1}, ..., w_1, w_0 = T$

เป็นทางเดินชุดหนึ่งจาก s ไป T

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

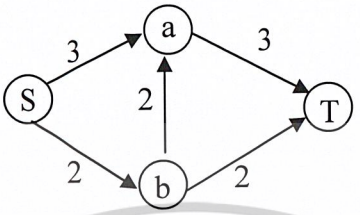
ปรับค่า flow บนด้านใน p ดังนี้

ถ้าด้าน e ใน p วางทิศทางที่ควรเป็นให้เพิ่มค่า flow ในด้าน e นั้นอีก Δ

ถ้าด้าน e ใน p วางทิศในทางที่ไม่ควรเป็น

ให้ลดค่า flow ในด้าน e ลง Δ แล้วลบ label จากทุกจุดยอด ใน network G กลับไปทำขั้นที่2

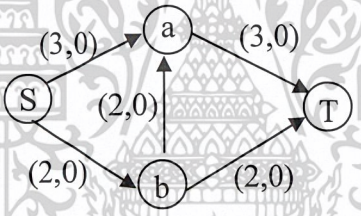
<u>ตัวอย่าง</u> จงหา maximal flow ลง network ดังรูป



รูปที่ 2.256

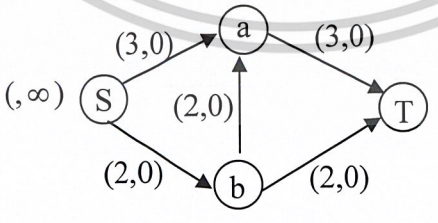
<u>วิธีทำ</u> list อันดับของจุดยอด s,a,b,T

1. $F_{ij} = 0$



รูปที่ 2.257

2. label s ด้วย $(,\infty)$



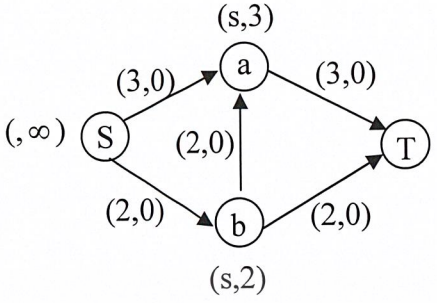
รูปที่ 2.258

3. จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label
4. เลือกจุดยอดที่ได้การ label แต่ยังไม่ได้ตรวจสอบที่มีอันดับต่ำสุดใน list คือ s

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. (s,a) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(3-0)} = 3 ที่ a label (s,3)

(s,b) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(2-0)} = 2 ที่ a label (s,2)



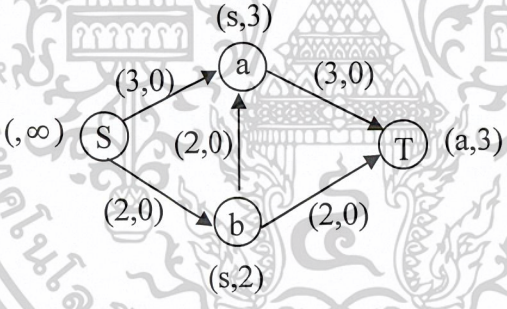
รูปที่ 2.259

ไปที่3

3.จุดยอดT ยังไม่ได้รับการ label

4.เลือก a

5.(a,T) $\Rightarrow$ min{3,(3-0)} = 3 ที่ T label (r,3)



รูปที่ 2.260

ไป ที่3

3.จุดยอด T ได้รับการ label แล้วไปที่6

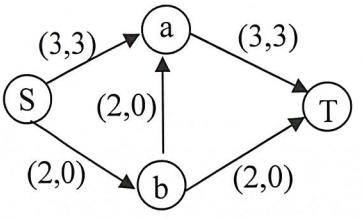
6.label ที่ T คือ (a,3)

w_0 = T,w_1 = a

label ที่ w_1 คือ (3,3) ดังนั้น w_2 = s

จะได้ path p:s,a,T ซึ่งวางทิศในทางที่ควรเป็นปรับค่า flow ใน p โดยเพิ่มทุกด้านอีก 3 แล้ว ลบ label จากทุกจุดยอด

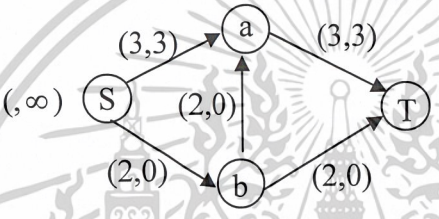
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.261

ไปที่2

2.label s ด้วย $(,\infty)$



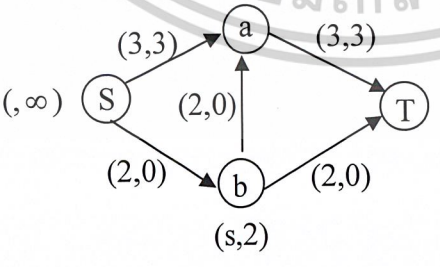
รูปที่ 2.262

3.จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label

4. เลือก s

5. (s,a) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(3-3)} = 0 ที่ a ไม่ label

(s,b) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(2-0)} = 2 ที่ a label (s,2)



รูปที่ 2.263

ไปที่3

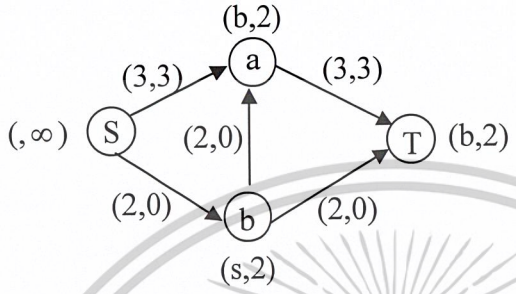
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.จุดยอด Tไม่ได้รับการ label

4.เลือกจุดยอดที่ได้รับการ label แล้ว แต่ยังไม่รักการตรวจสอบ ที่มีอันดับต่ำสุดใน list คือ b

5. (s,a) $\Rightarrow$ min{2,(2-0)} = 2 ที่ a label (b,2)

(s,b) $\Rightarrow$ min{2,(2-0)} = 2 ที่ T label (b,2)



รูปที่ 2.264

ไปที่3

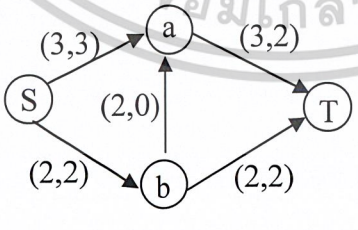
3.จุดยอด Tได้รับการ label ไปที่6

6.label ที่ T คือ (b,2)

w_0 = T,w_1 = b

label ที่ w_1 คือ (s,2) ดังนั้น w_2 = s

จะได้ path p:s,b,T ซึ่งวางทิศในทางที่ควรเป็นปรับค่า flow ใน p โดยเพิ่มทุกด้านอีก 2 แล้วลบ label จากทุกจุดยอด



รูปที่ 2.265

2.lable s ด้วย (,∞)

3.จุดยอด Tไม่ได้รับการ label

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.เลือก s

5. (s,a) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(3-0)} = 3 ที่ a ไม่ label (s,3)

(s,b) $\Rightarrow$ min{ ∞ ,(2-0)} = 2 ที่ b ไม่ label (s,2)

ไปที่3

3.จุดยอด T ยังไม่ได้รับการ label

4.จุดยอดที่ยังไม่ได้ เหลือเพียงจุดเดียวคือ T ซึ่งT เป็น sink ดังนั้น จบค่าของ flow คือ

3+2 = 5

2.9 เชิงวิธีจักหมู่ (Combinative circle)

เมื่อกล่าวถึงเครื่องจักรคำนวณ (computing machine) นั้น เราจะสนใจ ข้อมูลเข้า กรรมวิธีการประมวลข้อมูลและข้อมูลออก โดยไม่กล่าวถึงกลไกทางอิเล็กทรอนิคส์ของเครื่อง

แต่ถ้าจะกล่าวถึง แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical modeling) จะต้องมีหลักการทางคณิตศาสตร์ และ logic gate ซึ่งเป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิคส์ที่ก่อให้เกิดการดำเนินการตามหลักการทางคณิสศาสตร์นั้นๆ

Logic gate นี้ เมื่อกำหนด input หนึ่งหรือมากกว่าจะได้ output ออกมาเพียงแบบเดียว เรียก logic circuit

Logic circuit ที่ใช้ในเครื่องจักรคำนวณนี้ ในบางครั้งอาจมีการส่งสัญญาณ input ถ้าพร้อมกันหลายสายส่วนสายส่งออก output นั้นจะมีเพียงสายเดียวสำหรับแต่ละวงจร ดังนั้นต้องการส่งออกสัญญาณหลายๆสัญญาณพร้อมๆกัน ก็ต้องใช้หลายวงจรต่อกัน เรียก combinatorie circuit วงจรนี้จะมี input เป็น 0หรือ1 และจะให้ output เป็น 0 หรือ 1 เช่นกัน ในการออกแบบวงจรนี้จะต้องใช้ความรู้ในเรื่อง Boolean algebra โดยการดำเนินการของแต่ละวงจร จะนิยามโดย Boolean function ซึ่งจะกำหนดค่าที่แน่นอน สำหรับแต่ละ input

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9.1 Boolean function

Boolean algebra ประกอบด้วย การดำเนินการและกฎต่างๆซึ่งกระทำบนเซต {0,1}

การดำเนินการใน Boolean algebra ที่ใช้มากคือ complementation ,Boolean sum, Boolean product

Complement แทนด้วย - โดย

$$\overline{0}=1 \ , \ \overline{1}=0$$

Boolean sum แทนด้วย + หรือ OR โดย

$$1+1=1,\ 1+0=1,\ 0+1=1,\ 0+0=0$$

Boolean product แทนด้วย หรือ AND โดย

$$1\cdot 1=1,\ 1\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 0\cdot 0=0$$

ตัวอย่าง จงหาค่า $1\cdot 0+\overline{(0+1)}$

วิธีทำ

$$1\cdot 0+\overline{(0+1)} = 0+\overline{1}$$
$$= 0+0$$
$$= 0$$

complement ,Boolean sum ,Boolean product จะสมนัยกับ logical operator -,v, Λ ตามลำดับเมื่อ 0 สมนัยกับ F (false) และ 1 สมนับกับ T (True)

Boolean expressions and Boolean function ให้ $B=\{0,1\}$ ตัวแปร x จะเรียกว่า Boolean variable ถ้ามีค่าจาก B เท่านั้น ฟังก์ชันในรูปแบบ B^n คือเซต $\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid x_i\in B, 1\le i\le n\}$ เรียกว่า Boolean function degree n

เช่น $F(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot x_2+\overline{x}_3$ หรือ $F(x,y,z)=x\cdot y+\overline{z}$

ค่าของ Boolean function แสดงได้ในรูปของตาราง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ Boolean function ที่แทนด้วย $F(x,y,z)=x\cdot y+\overline{z}$

วิธีทำ

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x,y,z)=x\cdot y+\overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

0	0	0	0	1	1

<u>ตัวอย่าง</u> Boolean function $F(x,y)$ มีค่า 1 เมื่อ x=1 และ y=0 สำหรับกรณีอื่นๆของ x และ y จะได้ว่า $F(x,y)$ มีค่า 0 แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

x	y	$F(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Boolean function F และ G ของตัวแปร n ตัว เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ $F(b_1,b_2,...,b_n)=G(b_1,b_2,...,b_n)$ เมื่อ $b_1,b_2,...,b_n$ อยู่ใน B

Boolean expression ที่แตกต่างกัน 2นิพจน์ ที่แทนฟังก์ชันเดียวกัน จะเรียกว่าequivalent เช่น $x\cdot y, x\cdot y+0, x\cdot y\cdot 1$

Complement ของ Boolean function F คือฟังก์ชัน $\overline{F}$ ซึ่ง $\overline{F}(x_1,...,x_n)=F(x_1,...,x_n)$

ให้ F และ G เป็น Boolean function ดีกรี n แล้ว Boolean sum F+G นิยามโดย

$$(F+G)(x_1,x_2,...,x_n)=F(x_1,x_2,...,x_n)+G(x_1,x_2,...,x_n)$$

และ Boolean product F.G นิยามโดย

$$(F\cdot G)(x_1,x_2,...,x_n)=F(x_1,x_2,...,x_n)\cdot G(x_1,x_2,...,x_n)$$

Boolean function ของตัวแปร n ตัว $x_1,x_2,...,x_n$ ซึ่งนิยามบนเซต B = {0,1}คือการกำหนดค่า0 หรือ1 ต่อ combination ที่เป็นไปได้ 2^n ของตัวแปร n ตัว จำนวน 2^n เกิดขึ้น เนื่องจากแต่ละ n ตัวแปร สามารถกำหนดค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น

ปัญหาที่เกิดขึ้นคือ มี Boolean function ที่แตกต่างกันเป็นจำนวนเท่าใด

เนื่องจาก ตัวแปร n ตัวนี้ อาจมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น ในแต่ละตัว ดังนั้นจะได้ combination ที่ต่างกันทั้งหมดจำนวน 2^n และ ในแต่ละตัว ดังนั้นจะได้ combination ที่แตกต่างกัน 2^n ของ n ตัวแปรนี้ สามารถกำหนดค่าเป็น 0 หรือ1 ดังนั้นจะได้ combination ที่แตกต่างกันถึง $(2)^{2^\times}$ แบบมี Boolean function ของ n ตัวแปร แตกต่างกันทั้งหมดจำนวน $(2)^{2^n}$ บนเซต B = {0,1}

จำนวนตัวแปร	2^n	จำนวน Boolean function
1	2	4
2	4	16
3	8	256

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4	16	65536
5	32	4294967296
6	64	18446744073709551616

สัญลักษณ์	ชื่อของฟังก์ชัน	ค่าที่ใส่เข้าไป (x_1, x_2)			
		(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
-	Zero Inconsistency	0	0	0	0
$x_1 \cdot x_2$	AND	0	0	0	1
x_1 / x_2	Inhibit x_2	0	0	1	0
-	Identity	0	1	0	1
$x_1 \oplus x_2$	EXCLUSIVE OR	0	1	1	0
$x_1 + x_2$	OR	0	1	1	1
$\overline{x_1 + x_2}$	NOR	1	0	0	0
$\overline{x_1 \oplus x_2}$	Coincidence	1	0	0	1
x_2'	NOT	1	0	1	0
$x_2 \leq x_1$	Implication	1	1	0	1
$x_1 \uparrow x_2$	NAND	1	1	1	0
-	One Tautology	1	1	1	1

ถ้าจำนวนตัวแปรเท่ากัน 2 แล้ว Boolean function ที่เป็นไปได้มี 16 แบบ [(2^4)โดย $4 = 2^2$]แต่ละแบบมีชื่อและสัญลักษณ์ที่ใช้แตกต่างกันดังตาราง

สรุปทฤษฎีพื้นฐานของ Boolean algebra

Commutative Law

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Associative Law

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Distributive Law

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Tautology Law

$$A \cdot A = A$$

$$A + A = A$$

Negative Law

$$\overline{(A)} = \overline{A}$$

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

Redundance Law

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

Identity Law

$$0 + A = A$$

$$1 \cdot A = A$$

Inverse Law

$$\overline{A} + A = 1$$

$$\overline{A} \cdot A = 0$$

Dominance Law

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

De Morgan's Law

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

2.9.2 Duality

Dual ของ Boolean expression คือการเปลี่ยนระหว่าง Boolean sum และ Boolean product และการเปลี่ยน ระหว่าง 0 และ 1

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา dual ของ $x \cdot (y + 0)$ และ $\overline{x} \cdot 1 + (\overline{y} + z)$

<u>วิธีทำ</u> โดยการเปลี่ยน • เป็น + และ 0 เป็น 1 จะได้ $x + (y \cdot 1)$ และ $(\overline{x} + 0) \cdot (\overline{y} \cdot z)$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9.3 Representing Boolean Functions

ปัญหาในการศึกษา Boolean algebra คือ

- กำหนดค่าของ Boolean function จะหา Boolean expression ที่แทนฟังก์ชันได้อย่างไร
- จะหาเซตที่มีการดำเนินการที่น้อยกว่านี้ ที่ใช้ในการแทน Boolean function อย่างไร

ตัวอย่าง จงหา Boolean expression ที่แทนฟังก์ชัน $F(x,y,z)$ และ $G(x,y,z)$ ที่กำหนดดังตาราง

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

วิธีทำ จากตาราง F เป็น 1 เมื่อ x และ z เป็น 1 กับ y เป็น 0 กรณีอื่นๆ F เป็น 0

พิจารณา x และ z ได้ว่า $x = 1$ และ $z = 1$ แล้ว $x \cdot z = 0$ มี 2 กรณีที่ $x \cdot z = 1$ กรณีแรก $y = 1$ อีกกรณี $y = 0$ แต่กรณี $y = 1$ นั้น $F = 0$ ดังนั้นพิจารณากรณี $y = 0$ ซึ่ง $F = 1$ จะพบว่า $x \cdot \overline{y} \cdot z$ จะได้ 1 ดังนั้น $F(x,y,z) = x \cdot \overline{y} \cdot z$

จากตาราง G เป็น 1 เมื่อ $x = y = 1$ และ $z = 0$

ดังนั้นจะสร้างนิพจน์จากผลบอกของสอง Boolean product ที่แตกต่างกัน จะพบว่า Boolean Product $\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$ หรือ $\overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0}$ มีค่า 1 เช่นกัน ผลบวกของ Boolean product ทั้งสองคือ

$x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$ มีค่า $1 + 1 = 1$

ดังนั้น $G(x,y,z) = x \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $A + B \cdot C \cdot D = (A + B) \cdot (A + C) \cdot (A + D)$

L.H.S $A + B \cdot C \cdot D = (A + B) \cdot (A + C \cdot D)$

$= (A + B) \cdot (A + C) \cdot (A + D)$

$=$ R.H.S โดย Distributire law

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ และ $A \cdot \overline{A} + B = A \cdot B$

วิธีทำ L.H.S. $A + \overline{A} \cdot B = A + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$ Redunance

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= A + B \cdot A + B \cdot \overline{A} \quad \text{Commute}$$
$$= A + B \cdot (A + \overline{A}) \quad \text{Distribute}$$
$$= A + B \cdot 1 \quad \text{Identity}$$
$$= A + B \quad \text{R.H.S}$$

dual เปลี่ยน + เป็น • เปลี่ยน • เป็น +

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B$$
$$A \cdot \overline{A} + B = A \cdot B$$

2.9.4 Form of Boolean function

Boolean function สามารถเขียนในรูปแบบผลบวกของแต่ละแฟกเตอร์ที่เป็นผลคูณ (Sum of Product : SOP) หรือรูปแบบ (Product of Sum : POS)

ตัวอย่าง $f(A,B,C) = \overline{(A+\overline{B})+\overline{(A\cdot\overline{B}\cdot C)}}$

วิธีทำ สามารถทำให้อยู่ในรูปแบบ SOP และ POS ดังนี้

SOP:

$$f(A,B,C) = \overline{(A+\overline{B})+\overline{(A\cdot\overline{B}\cdot C)}} \quad \text{(De Morgan)}$$
$$= \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}} + A\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$= \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

POS:

$$= (\overline{A}\cdot B + A)\cdot(\overline{A}\cdot B + \overline{B})\cdot(\overline{A}\cdot B + C)$$
$$= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})(C+\overline{A}\cdot B) \quad \text{Distribute}$$
$$= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot(C+\overline{A})\cdot(C+B)$$
$$= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)$$

จาก $f(A,B,C) = \overline{(A+\overline{B})+\overline{(A\cdot\overline{B}\cdot C)}}$

SOP $f(A,B,C) = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C$

POS $f(A,B,C) = (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)$

จะพบว่าบางแฟกเตอร์ประกอบด้วย 2 ตัวแปร บางแฟกเตอร์ประกอบด้วย 3 ตัวแปร เท่ากับจำนวนตัวแปรทั้งหมดและสามารถฟังก์ชันในรูป SOP และPOS ที่มีแฟกเตอร์เท่ากับจำนวนตัวแปรดังนี้

SOP: $f(A,B,C) = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C$

$$= \overline{A}\cdot B\cdot 1 + A\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$= \overline{A}\cdot B\cdot(C+\overline{C}) + A\cdot\overline{B}\cdot C$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C$$

POS: $f(A,B,C) = (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)$

$$= (A+B+0)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+0)\cdot(\overline{A}+C+0)\cdot(B+C+0)$$

$$= (A+B+C\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C\overline{C})\cdot(\overline{A}+C+B\overline{B})\cdot(B+C+A\overline{A})$$

$$= (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$
$$\cdot(\overline{A}+C+B)\cdot(\overline{A}+C+\overline{B})\cdot(B+C+A)\cdot(B+C+\overline{A})$$

$$= (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)$$

ในแต่ละแฟกเตอร์ของ SOP และ POS มีตัวแปรเท่ากับจำนวนตัวแปรของฟังก์ชันเรียกรูปแบบนี้ว่า Canonical form แบ่งเป็น 2 แบบ

- Canonical Sum of Product disjunctive form
- Canonical Product of Sum Conjunctive form

Canonical SOP หมายถึง Boolean function ที่มี n ตัวแปร ที่เขียนอยู่ในรูปผลบวกของแต่ละแฟกเตอร์ที่เป็นผลคูณของ n ตัวแปรโดยที่ตัวแปรเหล่านี้ปรากฏในแต่ละแฟกเตอร์เพียงครั้งเดียว ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปปรกติหรือรูปเติมเต็ม (complement) เรียกแฟกเตอร์ผลคูณเหล่านี้ว่า Minterm

$$f(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C$$

$\overline{A}\cdot B\cdot C,\ \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C},\ A\cdot \overline{B}\cdot C$ เป็น minterm ของแต่ละแฟกเตอร์

Canonical POS หมายถึง Boolean function ที่มี n ตัวแปร ที่เขียนอยู่ในรูปผลคูณของแต่ละแฟกเตอร์ที่เป็นผลบวกของ n ตัวแปร โดยที่ตัวแปรเหล่านี้ปรากฏในแต่ละแฟกเตอร์เพียงครั้งเดียว ซึ่งอาจปรากฏอยู่ในรูปปรกติหรือรูปเติมเต็ม เรียกแฟกเตอร์ผลบวกเหล่านี้ว่า maxterm

$$f(A,B,C) = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)$$

แต่ละแฟกเตอร์ $(A+B+C),(A+B+\overline{C}),(\overline{A}+\overline{B}+C),(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}),(\overline{A}+B+C)$ เรียกว่า maxterm

2.9.5 Logic Gate

Gate เป็นอุปกรณ์พื้นฐานในการสร้าง circuit โดยแต่ละแบบของ gate นี้สร้างขึ้นมาเพื่อให้เป็นไปตาม Boolean operator

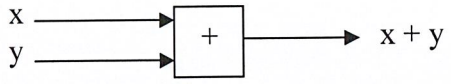
จาก Boolean sum

$1+1=1,\ 1+0=1,\ 0+1=1,\ 0+0=0$

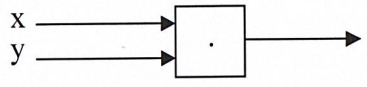
ในแต่ละกรณีคือ ผลบวกของ x และ y ซึ่งมีค่าเป็นสมาชิกในเซต $B=\{0,1\}$

แทนในรูปสัญลักษณ์

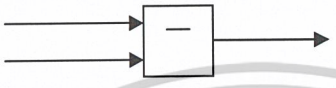
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ในทำนองเดียวกันสำหรับ Boolean product



และ complement



แทนที่จะใช้สัญลักษณ์ ☐ เหมือนกัน แล้วเขียน operator กำกับจะใช้สัญลักษณ์แทนดังนี้

Boolean product แทนด้วย

เรียก AND gate

Boolean sum แทนด้วย

เรียก OR gate

Complement แทนด้วย

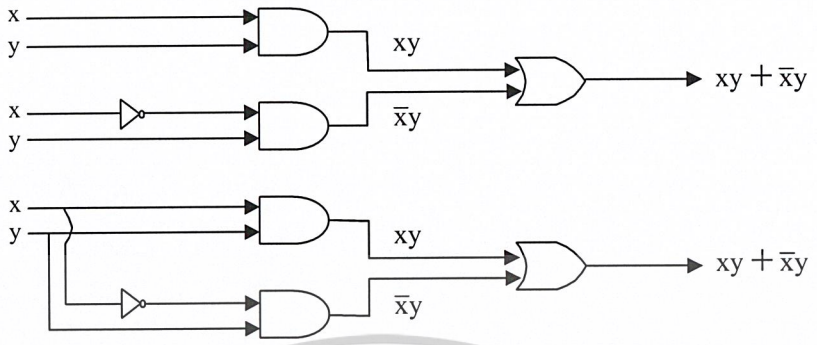
เรียน inverter

2.9.6 Combination of gate

Combinatorial circuit สามารถสร้างโดยการรวม inverter, OR gates และ AND gates โดยบาง gate อาจใช้ input ร่วมกันได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงเขียน logic network ที่ทำให้ output เป็น $xy + \bar{x}y$

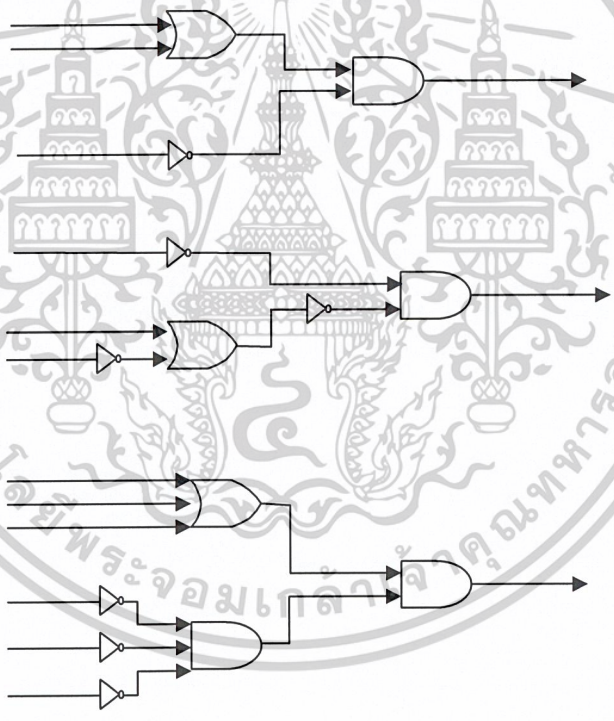


ตัวอย่าง จงเขียน Boolean expression จาก logic network ที่กำหนด

a)

b)

c)



การบวกเลขฐาน2 จำนวน 1 หลัก 2 จำนวน

1	1	0	0
+	+	+	+
1	0	1	0
10	1	1	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะพบว่าการบวกเลขฐานสองนั้นจะได้ผลบวก : s และ ตัวทด : c เขียนเป็นตารางได้ดังนี้

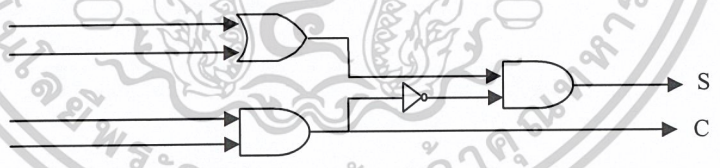
x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

จะพบว่า $s = x\bar{y} + \bar{x}y$

และ $c = xy$

โดยจาก
$$\begin{aligned} s &= x\bar{y} + \bar{x}y \\ &= \bar{x}y + x\bar{y} \\ &= (\bar{x}y + x)\cdot(\bar{x}y + y) \\ &= (x + y)\cdot(\bar{y} + \bar{x}) \\ &= (x + y)\cdot(\bar{x} + \bar{y}) \\ &= (x + y)\cdot\overline{(x\cdot y)} \end{aligned}$$

network ซึ่ง input เป็น x และ y output เป็น s และ c แสดงดังนี้



เรียก half adder

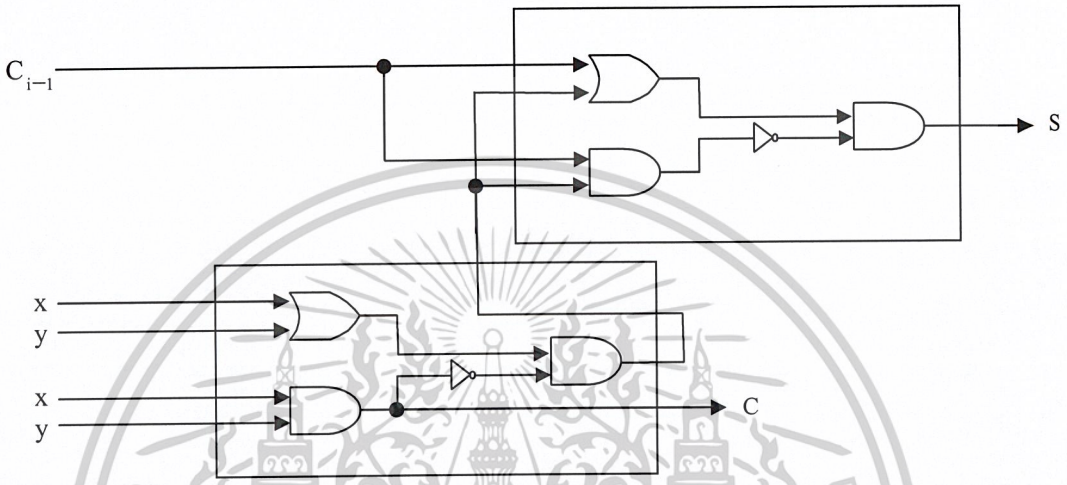
ในการบวกเลข n หลัก 2 จำนวนจะบวกทีละหลักจากขวาไปซ้าย

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

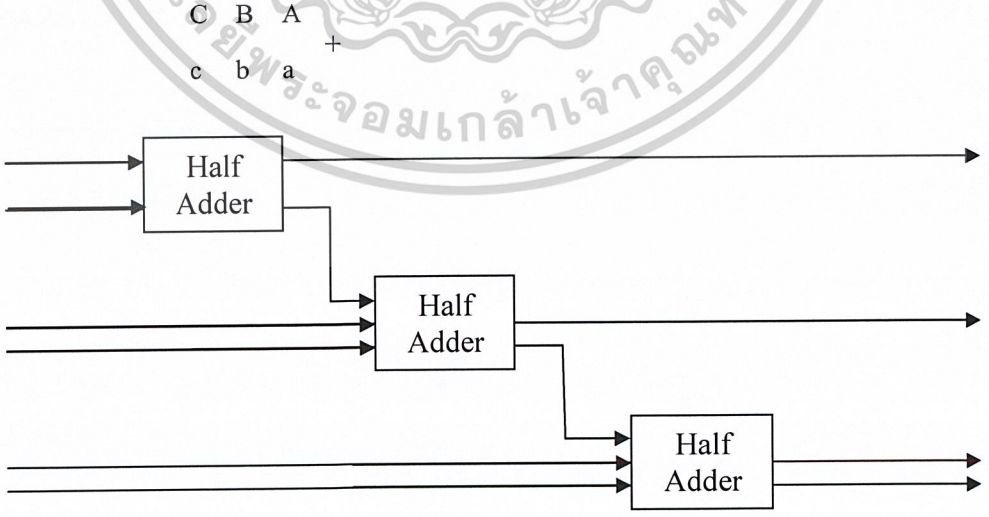
ยกเว้นหลักที่อยู่ขวาสุดหรือหลักแรกแล้วหลักอื่นๆจะบวก x และ y แล้วบวกกับตัวทดด้วย โดยการบวกหลักที่ 2 จะมีตัวทดหรือไม่มีก็ได้ มาจากการบวกหลักที่ 1 หรือการบวกหลักที่ i ต้องบวกตัวทดจากหลักที่ i-1 ด้วย

ดังนั้นการบวกเลขที่มีตัวทดจึงต้องมีการนำ half adder มาต่อกันเป็น full adder ดังนี้



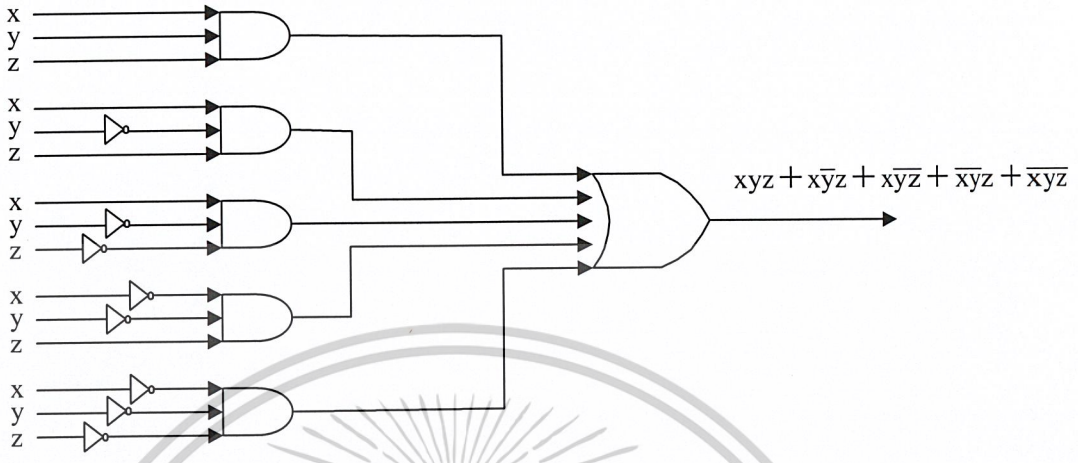
เนื่องจากหลักแรกของการบวกไม่มีเลขทดแน่นอน จึงใช้ half adder ได้ แต่สำหรับหลักต่อๆมาต้องเป็น full adder

สำหรับการบวกเลขฐานสอง จำนวน 2 หลัก 2 จำนวน

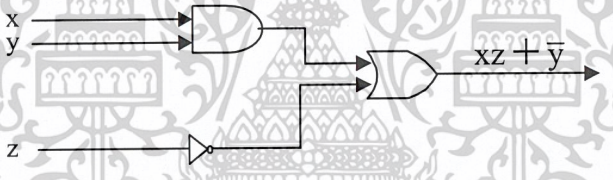


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงเขียน logic network สำหรับ Boolean expression $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$



ตัวอย่าง จงเขียน logic networkสำหรับ Boolean expression $xz + \bar{y}$



$$
\begin{aligned}
x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} &= xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= xzy + zx\bar{y} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= xz(y + \bar{y}) + x\bar{y}(z + \bar{z}) + \bar{x}\bar{y}(z + \bar{z}) \\
&= xz + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\
&= xz + \bar{y}(x + \bar{x}) \\
&= xz + \bar{y}
\end{aligned}
$$

หรือโดยอาศัยหลัก duality

$$
\begin{aligned}
x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} &= xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= x + y + z \cdot x + \bar{y} + z \cdot x + \bar{y} + \bar{z} \cdot \bar{x} + \bar{y} + z \cdot \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \\
&= (x + z) + (y \cdot \bar{y}) \cdot x + \bar{y} + \bar{z} \cdot (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (z - \bar{z})
\end{aligned}
$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= (x+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{x}+\bar{y})$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})+x+\bar{z}\cdot\bar{x}$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})+x+\bar{z}$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})+x+z\cdot x+\bar{z}$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})+x+z\cdot\bar{z}$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})+x$$
$$= (x+z)\cdot(\bar{y})$$
$$= x\cdot z+\bar{y}$$

จะพบว่า $xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ สมมูลกับ $x\cdot z+\bar{y}$

โดย logic gate ใน logic network สำหรับ expression $x\cdot z+\bar{y}$ มีจำนวนน้อยกว่า จำนวนค่าที่ใส่เข้าไปก็น้อยกว่าด้วย โดยมีความหมายเหมือนกันทุกประการแต่มีความยุ่งยากและซับซ้อนของวงจรน้อยกว่า ดังนั้นจึงต้องมีการลดรูปสมการ ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี วิธีการดังตัวอย่างข้างต้นนี้คือวิธีการทางพีชคณิต และ ที่จะกล่าวต่อไปนี้คือ แผนที่คาร์นอฟ(Karnaugh map) และ Quine MeCluskey procedure

2.9.7 แผนที่คาร์นอฟ (Karnaugh map)

การลดรูปฟังก์ชันโดยใช้วิธีนี้ จะเริ่มด้วยการสร้างตารางค่าที่เป็นไปไม่ได้ สำหรับตัวแปร เช่น มีตัวแปร 1 ตัว x โดย x มีค่าได้ 2 ค่าเป็น 0 หรือเป็น 1 ดังนั้นตารางจะมี 1 ช่อง

ค่าที่อยู่ในตารางคือค่าของ x ซึ่งอาจจะเป็น 0 หรือ 1 เพียงค่าหนึ่งค่าใด

เท่านั้น ตารางจึงมีเพียงช่องเดียว

กรณี 2 ตัวแปร x และ y เนื่องจาก x มีค่าได้ 2 ค่า 0 หรือ 1และ y มีค่าได้ 2 ค่า 0 หรือ 1 ดังนั้นตารางจะมี $2^2=4$ ช่อง ค่าที่อยู่บนตารางจะเป็นไปได้ 4 แบบในรูปผลคูณ

	y	$\bar{y}$
x	$x\cdot y$	$x\cdot\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}\cdot y$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดตารางค่าความจริง

x	y	f(x,y)f
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

จะพบว่า f= 1 เมื่อ x=1,y=1 คือ $x \cdot y$ หรือ f= 1 เมื่อ x=0,y=1 คือ $\bar{x} \cdot y$ แล้ว

$f(x,y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot y$

ดังนั้น ในตารางช่องที่เป็น $x \cdot y$ และ $\bar{x} \cdot y$ จะมีค่าเป็น 1 ในขณะที่ช่องอื่นมีค่าเป็นช่องว่าง จะได้แผนที่คาร์นอฟ ดังนี้

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

ตัวอย่าง จงสร้างแผนที่คาร์นอฟสำหรับ $f(x,y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$ และ $g(x,y) = x\bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

f(x,y)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

g(x,y)

ตัวอย่าง Boolean function จาก แผนที่คาร์นอฟ ที่กำหนด

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$		1

$f(x,y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		1

$f(x,y) = x \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y}$

การลดรูปโดย Kmap นี่ถ้า logical-1 อยู่ประชิดกันบนตารางแล้ว minterm จะแทนด้วยตัวแปร 1 ตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

	y	$\bar{y}$
x	(1)	
$\bar{x}$	(1)	

จากตาราง $f(x,y) = y$ หรือ $f(x,y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot y = y \cdot (x + \bar{x}) = y \cdot 1 = y$

ถ้า logical-1 อยู่บนแผนผังเพียง 1 ช่องแล้ว mintrem จะแทนด้วย AND function ของสองตัวแปร

ตัวอย่าง

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$	(1)	

จาก Kmap $f(x,y) = \bar{x} \cdot y$

นิพจน์รวมที่สมนัยกับ logical-1 ของ Kmap จะเท่ากับ OR function ของพจน์ต่างๆซึ่งคลุม logical-1 ทั้งหมดบนตาราง

ตัวอย่าง

	y	$\bar{y}$
x		(1)
$\bar{x}$	(1)	

จาก Kmap $f(x,y) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

$f(x,y)=\bar{y}$

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

$f(x,y)=\bar{x} \rightarrow f(x,y)=\bar{x}+\bar{y}$

กรณี 3 ตัวแปร x,y,z ตารางจะมี $2^3=8$ ช่อง Kmap สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปรแสดงดังนี้

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

การลดรูปของฟังก์ชันสามตัวแปรมีหลักการดังนี้

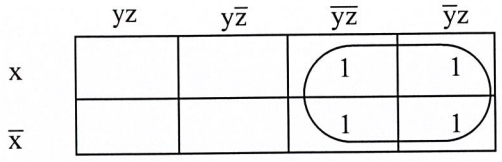
1. กลุ่มของช่อง 4 ช่องอยู่ประชิดกันในลักษณะ 4×1 หรือ 2×2 จะแทนตัวแปร 1 ตัว ที่อยู่ใน 4 ช่องนั้น

ตัวอย่าง

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$				

$f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot\bar{z}+x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}+x\cdot\bar{y}\cdot z=x$

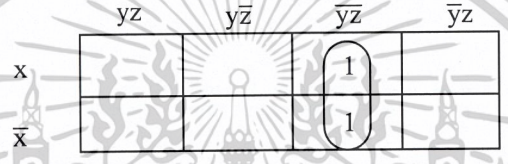
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



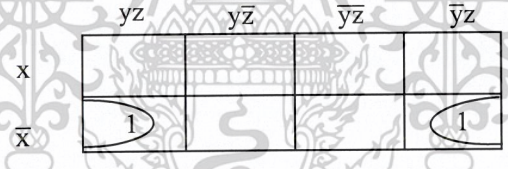
$$f(x,y,z) = x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z = \bar{y}$$

2. กลุ่มของช่อง 2 ช่อง อยู่ประชิดกันในลักษณะ 2×1 หรือ 1×2 จะแทนด้วยพจน์ที่มี 2 ตัวแปรที่อยู่ในทั้ง 2 ช่องนั้น

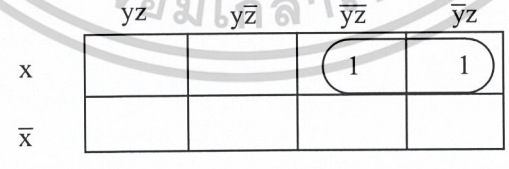
<u>ตัวอย่าง</u>



$$f(x,y,z) = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z}$$



$$f(x,y,z) = \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z = \bar{x} \cdot z$$

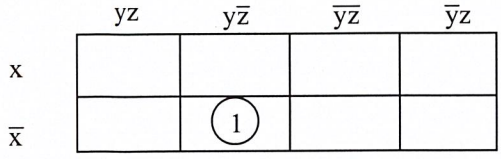


$$f(x,y,z) = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z = x \cdot \bar{y}$$

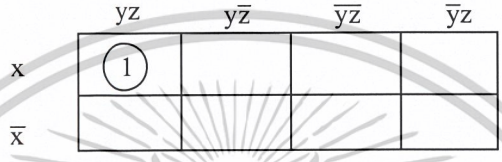
3. ช่อง 1 ช่องจะแทนด้วยพจน์ที่มี 3 ตัวแปร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

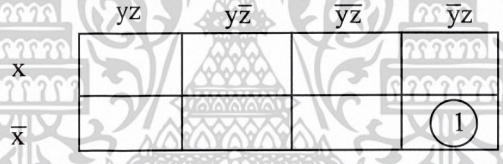
ตัวอย่าง



$f(x,y,z) = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$

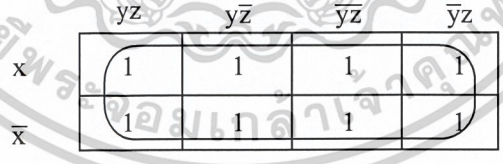


$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$



4. ถ้าทั้ง 8 ช่องเป็น 1 หมดจะแทนด้วย 1

ตัวอย่าง

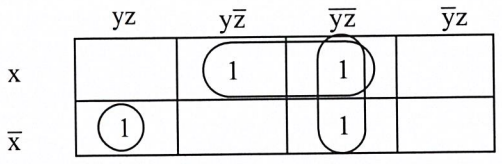


$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z = 1$

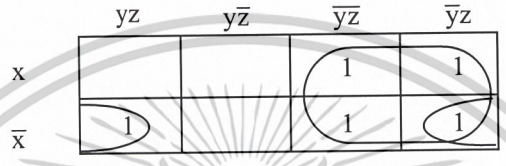
5. ถ้านิพจน์ซึ่งสมนัยกับ logical-1 จากแผนผังคือผลบอกของพจน์ต่างๆจะคลุม logical-1 ทั้งหมดในตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

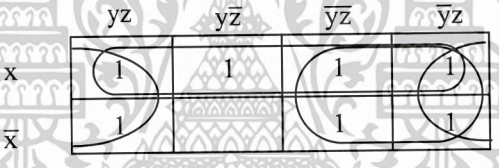
ตัวอย่าง



$$f(x,y,z) = x \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z$$



$$f(x,y,z) = \bar{x} \cdot z + \bar{y}$$



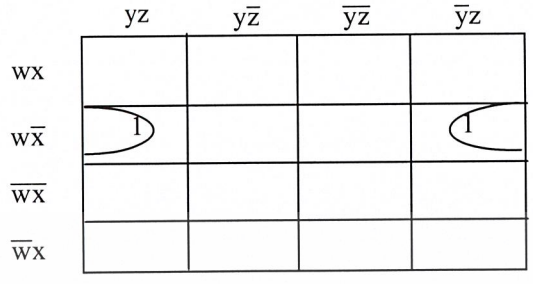
$$f(x,y,z) = z + \bar{y} + x$$

กรณี 4 ตัวแปร w,x,y,z ตารางจะมี $2^4 = 16$ ช่อง Kmap สำหรับฟังก์ชัน 4 ตัวแปรแสดงดังนี้

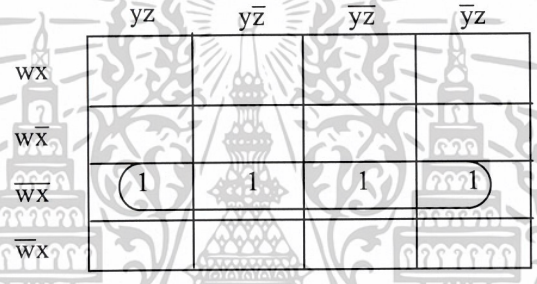
	yz	yz̄	ȳz̄	ȳz
wx	wxyz	wxyz̄	wxȳz̄	wxȳz
wx̄	wx̄yz	wx̄yz̄	wx̄ȳz̄	wx̄ȳz
w̄x̄	w̄x̄yz	w̄x̄yz̄	w̄x̄ȳz̄	w̄x̄ȳz
w̄x	w̄xyz	w̄xyz̄	w̄xȳz̄	w̄xȳz

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

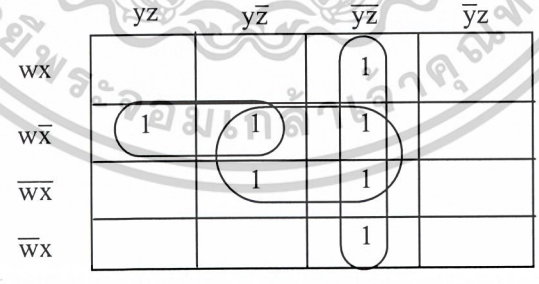
ตัวอย่าง



$$f(w,x,y,z) = w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z = w \cdot \bar{x} \cdot z$$

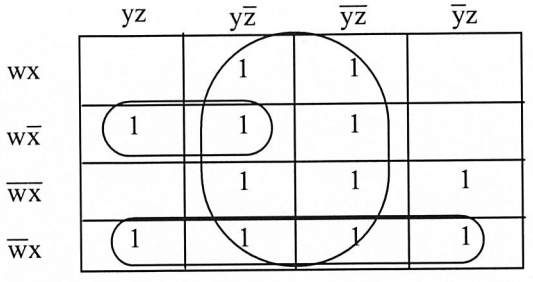


$$f(w,x,y,z) = \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z = \bar{w} \cdot \bar{x}$$



$$f(w,x,y,z) = \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x}y$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



$$f(w,x,y.z) = \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot y + \bar{w} \cdot x$$

- 2 ตัวแปร 4 ช่อง

  4, 2 ช่องแทนค่า 1

  1 ช่องแทนค่า 2 ตัวแปร

- 3 ตัวแปร 8 ช่อง

  8, 4 ช่องแทนค่า 1

  2 ช่องแทนค่า 2 ตัวแปร

  1 ช่องแทนค่า 3 ตัวแปร

- 4 ตัวแปร 16 ช่อง

  16, 8 ช่องแทนค่า 1 ตัวแปร

  4 ช่องแทนค่า 2 ตัวแปร

  2 ช่องแทนค่า 3 ตัวแปร

  1 ช่องแทนค่า 4 ตัวแปร

2.9.8 The Quine – McClusky method

การลดรูปโดย Kmap นั้น เมื่อมีตัวแปรมากกว่า 4 ตัว ค่อนข้างจะยุ่งยาก

ในปี 1950 W.V. Quine และ E.J. McClusky Jr. จึงได้คิดวิธีการลดรูปขึ้นมาเป็น Quine McClusky method ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกเป็นการกำหนด bit string ของ minterm ขั้นตอนที่สองเป็นการพิจารณาการลดรูป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงการลดรูปโดย Q.M method สำหรับข้อมูลดังตารางค่าความจริงที่กำหนด

x	y	z	f
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

จากตารางจะได้ Boolean function $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$

ขั้นตอนที่ 1 จะแทน mintrem ด้วย bit string โดย

bit แรกเป็น 1 ถ้าเป็น x เป็น 0 ถ้าเป็น $\bar{x}$

bit ที่สองเป็น 1 ถ้าเป็น y เป็น 0 ถ้าเป็น $\bar{y}$

bit ที่สามเป็น 1 ถ้าเป็น z เป็น 0 ถ้าเป็น $\bar{z}$

แล้วแบ่งเป็นกลุ่มตามจำนวน 1 ที่ปรากฏคือมี 1 เป็นจำนวน 0,1,2 หรือ 3 ดังตาราง

	Minterm	Bit String	จำนวนของ 1
1	$x \cdot y \cdot z$	111	3
2	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	101	2
3	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	011	2
4	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	001	1
5	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	000	0

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณา 2 Bit string ที่สามารถลดรูปได้จะต้องมีแต่ละ bit ใน Bit String คู่นั้นแตกต่างกัน 1 bit เท่านั้นเช่น Bit string ชุดที่ 1 คือ 111

Bit string ชุดที่ 2 คือ 101

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Bit แรกและ Bit สุดท้ายเหมือนกัน

ดังนั้นจากชุดที่ 1 และ 2 : (1,2) จะได้ 1-1 โดย bit ที่เหมือนกันคงเดิม bit ที่ต่างกันแทนด้วย - เหลือเฉพาะ bit ที่ 1 และ 3 จะได้พจน์ xz สำหรับพจน์อื่นๆ แสดงดังตารางต่อไปนี้

	ชุด	พจน์	String
1	(1,2)	xz	1-1
2	(1,3)	yz	-11
3	(2,4)	$\bar{y}z$	-01
4	(3,4)	$\bar{x}z$	0-1
5	(4,5)	$\overline{xy}$	00-

แล้วจึงทำซ้ำเช่นเดิมอีก โดยพิจารณา bit ใน bit string ที่แตกต่าง 1 bit

	ชุด	พจน์	String
1	(1,4)	z	--1
2	(2,3)	z	--1
3	5	$\overline{xy}$	00-

จะพบว่าชุด 1 และ 2 พจน์และ string เป็นชุดเดียวกันสามารถรวมกันได้

	ชุด	พจน์	String
1	(1,2,3,4)	z	--1
3	5	$\overline{xy}$	00-

ทุก Bit string แตกต่างกันเกิน 1 bit ลดรูปอีกไม่ได้แล้วจะพบว่าเหลือพจน์ z และ $\overline{xy}$ เรียก prime implicant

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม กำหนดฟังก์ชัน F ของตัวปี x ตัว ผลคูณ P เป็น implicant ของ F ก็ต่อเมื่อทุกๆ combination ของค่าของตัวแปร x ตัวสำหรับ P มีค่าเป็น 1 แล้ว F เป็น 1 ด้วย

เช่น ถ้า $a'b'c' = 1$ แล้ว F = 1

ถ้า $ac = 1$ แล้ว F = 1

ดังนั้นพจน์ $a'b'c'$ และ ac เป็น implicant ของ F

นิยาม Prime implicant ของฟังก์ชัน คือจำนวนของ implicant ที่ต่ำที่สุด ที่ไม่สามารถลดรูปได้อีกแล้ว

ขั้นตอนต่อมา คือการสร้าง prime implicant chast โดยหลักคือ minterm แต่ละพจน์และแถวคือ prime implicant ที่ได้จากขั้นตอนก่อนหน้านี้

	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
z					
$\bar{x}\bar{y}$					

ต่อมาพิจารณาในแต่ละหลัก หลักใดมี z ให้ทำเครื่องหมาย X หลัดใดมี $\bar{x}\bar{y}$ ให้ทำเครื่องหมาย X ลงไปจะได้

	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
z	X	X	X	X	
$\bar{x}\bar{y}$				X	X

$$\Rightarrow f(x,y,z) = z + \bar{x}\cdot\bar{y}$$

ตัวอย่าง ถ้าตารางสุดท้ายเป็นดังนี้

	$wxy\bar{z}$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}z$			X		X	X	X
$wy\bar{z}$	X			X			
$w\bar{x}y$		X		X			
$\bar{x}yz$		X				X	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะพบว่าแถวแรกและแถวที่สองไม่มีพจน์ซ้ำกันเลย ดังนั้นต้องมี $\overline{w} \cdot z + w \cdot y \cdot \overline{z}$

ต่อมาพิจารณาแถวที่ 3 เนื่องจากในแถวที่ 3 มีพจน์ $w\bar{x}y$ ซึ่งไม่ซ้ำกันในสองแถวแรกดังนั้นต้องรวมพจน์ $w\bar{x}y$ ถ้าไปด้วยจะได้

$$\overline{w} \cdot z + w \cdot y \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{x} \cdot y$$

ต่อมาพิจารณาแถวที่ 4 จะพบว่าทุดกพจน์ในแถวที่ 4 ซ้ำกันกับบางพจน์ในแถวอื่นๆ ดังนั้นตัดแถวที่ 4 ออกได้ แต่ถ้าเลือกแถวที่ 4 ก็ต้องตัดแถวที่ 3 ออกแล้วจะได้

$$\overline{w} \cdot z + w \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดตารางค่าความจริงจงใช้ Q-M method ลดรูป

w	x	y	z	f(w,x,y,z)
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีทำ

	Minterm	Bit String	จำนวนของ 1
1	$w\bar{x}yz$	1011	3
2	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	1000	1
3	$\bar{w}xy\bar{z}$	0110	2
4	$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	2
5	$\bar{w}\bar{x}yz$	0011	2
6	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	0010	1
7	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	0001	1
8	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0000	0

	Minterm	Bit String	จำนวนของ 1
1	$\bar{w}\bar{x}yz$	1011	3
2	$\bar{w}xy\bar{z}$	0110	2
3	$\bar{w}x\bar{y}z$	0101	2
4	$\bar{w}\bar{x}yz$	0011	2
5	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	1000	1
6	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	0010	1
7	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	0001	1
8	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0000	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	ชุด	พจน์	String
1	(1,4)	$\bar{x}yz$	-011
2	(2,6)	$\bar{w}y\bar{z}$	0-10
3	(3,7)	$\bar{w}yz$	0-01
4	(4,6)	$\bar{w}\bar{x}y$	001-
5	(4,7)	$\bar{w}\bar{x}z$	00-1
6	(5,8)	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	-000
7	(6,8)	$\bar{w}\bar{x}\bar{z}$	00-0
8	(7,8)	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}$	000-

	ชุด	พจน์	String
1	(4,8)	$\bar{w}\bar{x}$	00--
2	(5,7)	$\bar{w}\bar{x}$	00--
3	1	$\bar{x}yz$	-011
4	2	$\bar{w}y\bar{z}$	0-10
5	3	$\bar{w}yz$	0-01
6	6	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	-000

	ชุด	พจน์	String
1	(4,8,7,8)	$\bar{w}\bar{x}$	00--
3	1	$\bar{x}yz$	-011
4	2	$\bar{w}y\bar{z}$	0-10
5	3	$\bar{w}yz$	0-01
6	6	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	-000

ทุก Bit string แตกต่างกันเกิน 1 bit ลดรูปอีกไม่ได้แล้ว สร้าง prime implicant chart ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}yz$	X				X			
$\bar{w}y\bar{z}$			X			X		
$\bar{w}\bar{y}z$				X			X	
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$		X						X
$\bar{w}\bar{x}$					X	X	X	X

$$\Rightarrow f(w,x,y,z)=\bar{x}\cdot y\cdot z+\bar{w}\cdot y\cdot\bar{z}+\bar{w}\cdot\bar{y}\cdot z+\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$$

ขั้นตอนของ Quime-McClusky ซึ่งใช้ลดรูป sum of product expression

1. จากตารางค่าความจริง ให้รวบรวม minterm ทุกพจน์ออกมา
2. จาก minterm ซึ่งมี n ตัวแปร จะแทนด้วย Bit string ที่มีความยาว n โดย

   ถ้า เป็น x จะแทนด้วย 1

   ถ้า เป็น $\bar{x}$ จะแทนด้วย 0
3. จัดกลุ่มให้ Bit string ตามจำนวนของ 1 ที่มีอยู่ในแต่ละ string โดยอาจเรียงจาก bit ที่มีจำนวน 1 จากมากไปน้อยหรือจากน้อยไปมากก็ได้
4. พิจารณา 2 bit string ที่สามารถลดรูปได้ แต่ละ bit ใน bit string คู่นั้นจะแตกต่างกัน 1 bit เท่านั้น

   ถ้า bit ที่ x เป็น 1 เหมือนกันจะแทนด้วย 1

   ถ้า bit ที่ x เป็น 0 เหมือนกันจะแทนด้วย 0

   ถ้า bit ที่ x ต่างกันจะแทนด้วย -

   bit string ใหม่ที่ได้จากขั้นตอนนี้จะมีความยาว n-1
5. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 4 โดย bit string ใหม่ที่ได้จากขั้นตอนนี้จะมีความยาว n-2
6. ทำซ้ำจนกว่าทุก bit string จะแตกต่างกันเกิน 1 bit ลดรูปไม่ได้แล้ว
7. จะได้ prime implicant
8. สร้าง prime implicant chart โดยหลักคือ minterm แถวคือ prime implicant
9. prime implicant ใดอยู่ใน minterm ให้ทำเครื่องหมาย X ลงใน chart
10. ถ้า minterm ใดมี prime implicant เพียงพจน์เดียวแล้ว prime implicant นั้นเรียกว่า essential prime implicant และต้องอยู่ใน minterm sum of product

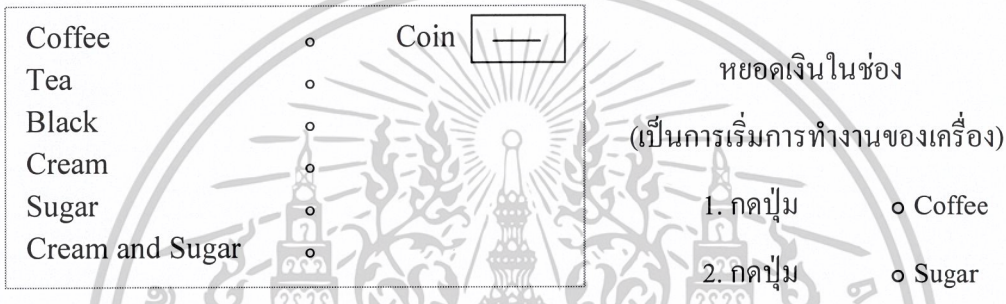
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

11. minterm ที่มี essential prime implicant ปรากฏอยู่สามารถกำจัดออกไปจาก chart ได้
12. prime implicant ที่เหลือถ้าซ้ำกันในแต่ละหลักของ minterm ให้เลือกพจน์ใดพจน์หนึ่งที่คลุมหมดทุกกรณีรวมใน minimum sum of product

2.10 สถานะจำกัดของเครื่องจักร (Finite state machine :FSM)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด เครื่องขายของอัตโนมัติเครื่องหนึ่ง (vending machine) ดังรูป



รูปที่ 2.266

จะเห็นว่าการกระทำนี้ต่อเนื่อง และมีขั้นตอนที่จำกันจำนวนที่แน่นอน

การกระทำดังกล่าวนี้ กระทำแตกต่างกันตามเวลา ให้ $t_0, t_1, t_2, \ldots$ แทนเวลา จะพบว่าการตอบสนองต่อเครื่องจักรต่อ ค่าที่รับ(input) ที่เวลา t_i จะปรากฏที่เวลา t_{i+1} เครื่องจักรจะตอบสนองแต่ละค่าที่รับเข้าไป ใน 2 รูปแบบคือ ได้ ค่าที่แสดงออกมา(output) ที่มองเห็นได้คือเครื่องดื่มตามต้องการหรือไม่ได้อะไรเลย

เมื่อหยอดเงินในช่อง เครื่องจักรจะเปลี่ยนสถานะจาก “ปิด (Off)” มาเป็น “รอคอย (waiting)” เมื่อกดปุ่ม Coffee เครื่องจักรจะเปลี่ยนสถานะจาก “รอยคอย (waiting)” มาเป็น “กาแฟ (Coffee)” การแสดงค่าออกมา ในขั้นตอนนี้ยังไม่มีอะไร เมื่อกดปุ่ม Sugar เครื่องจะเปลี่ยนเป็นสถานะ “กาแฟ-น้ำตาล (coffee-sugar)” และมี การแสดงค่าออกมา เป็น กาแฟใส่น้ำตาล และสุดท้าย เครื่องจักรจะเข้าสู่สถานะ “ปิด (turn off)” เพื่อแสดงสถานะพร้อมสำหรับลูกค้ารายต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สามารถสร้าง ตารางสถานะ (state table) แสดงสถานะของเครื่องจักรดังนี้

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
การรับค่า (Input)	Coin	Coffee bottom	Sugar bottom	-	-
สถานะ (Sate)	off	waiting	Coffee	Coffee sugar	Off
การแสดงค่า(Output)	not thing	not thing	not thing	Coffee with sugar	not thing

รูปที่ 2.267

<u>นิยาม</u> $M = \left[S, I, O, f_\Delta, f_o\right]$ เรียกว่า สถานะจำกัดของเครื่องจักร (finite state machine : FSM) ถ้า

S เป็น เซตจำกัด ของ สถานะ

I เป็น เซตจำกัด ของ การรับค่า

O เป็น เซตจำกัด ของ การแสดงค่าออกมา

f_Δ และ f_o เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f_\Delta : S \times I \to S$ และ $f_o : S \to C$

เครื่องจักรจะเริ่มต้นด้วย การกำหนดสถานะเริ่มต้น s_o

ฟังก์ชัน f_Δ เป็นฟังก์ชันของสถานะต่อไป โดย

$$\text{สถานะ}(t_{i+1}) = f_\Delta(\text{สถานะ}(t_i), \text{การรับค่า}(t_i))$$

ฟังก์ชัน f_o เป็น ฟังก์ชันการแสดงค่าออกมา โดย

$$\text{การแสดงค่า}(t_{i+1}) = f_o(\text{สถานะ}(t_i))$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> สถานะจำกัดของเครื่องจักร (finite state machine) M นิยามโดย

$$S=\{s_0,s_1,s_2\}, I=\{0,1\}, O=\{0,1\}$$

โดยที่ f_Δ และ f_o นิยามตาม ตารางสถานะ ดังนี้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input)		การแสดงค่า (Output)
	0	1	
s_0	s_1	s_0	0
s_1	s_2	s_1	1
s_2	s_2	s_0	1

รูปที่ 2.268

ถ้า ลำดับการรับค่า คือ 01101 จงหา ค่าที่แสดงออกมาจากเครื่องจักร M ที่เริ่มทำงานที่สถานะปัจจุบันเป็น s_0 ซึ่งเมื่อการรับค่า ณ ขณะนั้นเป็น 0 แล้วจะได้ ค่าที่แสดงออกมาเป็น 0

การรับค่าที่ t_0 คือ 0 , สถานะปัจจุบันที่ t_0 คือ s_0 จะได้ สถานะถัดไปที่ t_1 เป็น s_1 ซึ่งสถานะ s_1 มีการแสดงค่าออกมาเป็น 1

การรับค่าที่ t_1 คือ 1 , สถานะปัจจุบันที่ t_1 คือ s_1 จะได้ สถานะถัดไปที่ t_2 เป็น s_1 ซึ่งสถานะ s_1 มีการแสดงค่าออกมาเป็น 1

การรับค่าที่ t_2 คือ 1 , สถานะปัจจุบันที่ t_2 คือ s_1 จะได้ สถานะถัดไปที่ t_3 เป็น s_1 ซึ่งสถานะ s_1 มีการแสดงค่าออกมาเป็น 1

การรับค่าที่ t_3 คือ 0 , สถานะปัจจุบันที่ t_3 คือ s_1 จะได้ สถานะถัดไปที่ t_4 เป็น s_2 ซึ่งสถานะ s_2 มีการแสดงค่าออกมาเป็น 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การรับค่าที่ t_4 คือ 1 , สถานะปัจจุบันที่ t_4 คือ s_2 จะได้ สถานะถัดไปที่ t_5 เป็น s_0 ซึ่งสถานะ s_0 มีการแสดงค่าออกมาเป็น 0

ไม่มี ค่าที่รับครั้งต่อไป ก็ถือว่าสิ้นสุด และสามารถเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
การรับค่า (Input)	0	1	1	0	1	-
สถานะ (State)	s_0	s_1	s_1	s_1	s_2	s_0
การแสดงค่า (Output)	0	1	1	1	1	0

รูปที่ 2.269

ค่าที่รับเข้าไปเป็น 01101 จะได้ ค่าที่แสดงออกมาเป็น 011110

ถ้าค่าที่รับเข้าไปเป็น 1010 จงหา ค่าที่แสดงออกมา

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
การรับค่า (Input)	1	0	1	0	-
สถานะ (State)	s_0	s_0	s_1	s_1	s_2
การแสดงค่า (Output)	0	0	1	1	1

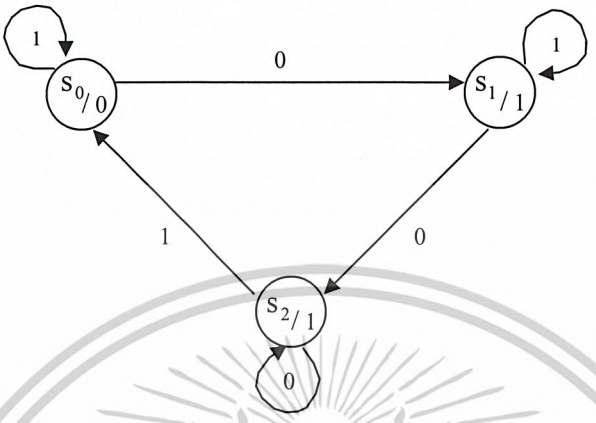
รูปที่ 2.270

ค่าที่รับเข้าไปเป็น 1010 จะได้ ค่าที่แสดงออกมาเป็น 00111

นอกจากการแสดงด้วยตารางข้างต้นแล้ว อาจจะแทนได้ด้วย กราฟเส้นตรง(Directed graph) เรียกว่า กราฟสถานะ (State graph) โดยแต่ละ สถานะของ M ที่ให้ ค่าที่แสดงออกมาแทนด้วย จุด(vertex) ของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟและ สถานะถัดไป คือด้านที่มีทิศทางที่เชื่อมระหว่างจุดยอด จากตางสถานะเราจะได้ กราฟสถานะ ดังนี้



รูปที่ 2.271

ถ้า ค่าที่ได้รับเป็น 11001 จงหาค่าที่แสดงออกมา

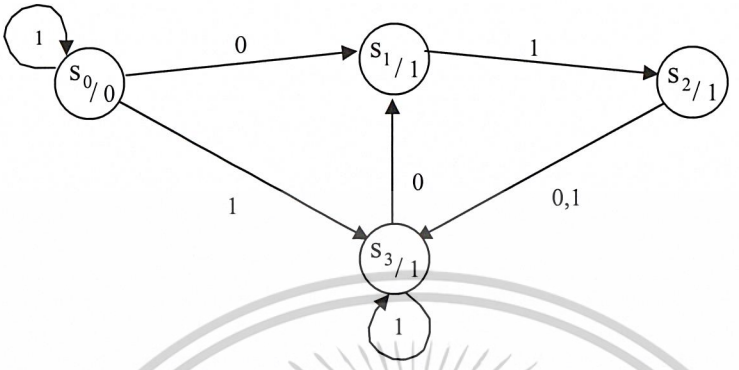
เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
การรับค่า (Input)	1	1	0	0	1	-
สถานะ (State)	S_0	S_0	S_0	S_1	S_2	S_0
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	1	1	0

รูปที่ 2.272

ค่าที่รับเข้าไปเป็น 11001 จะได้ ค่าที่แสดงออกมาเป็น 000110

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จะเขียน ตารางสถานะ ของ เครื่องจักร M จาก กราฟสถานะ ที่กำหนด



รูปที่ 2.273

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input) 0	1	การแสดงค่า (Output)
S_0	S_0	S_3	0
S_1	S_2	S_2	1
S_2	S_3	S_3	1
S_3	S_1	S_3	2

รูปที่ 2.274

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟสถานะ จาก ตารางสถานะ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)			การแสดงค่า (Output)
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	2	
S_0	S_0	S_1	S_1	0
S_1	S_1	S_0	S_0	1

รูปที่ 2.275

รูปที่ 2.276

ถ้ากำหนด ค่าที่ใส่เข้าไปเป็น “2110” จงหา ค่าที่แสดงออกมา

เวลา (Time)	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
การรับค่า (Input)	2	1	1	0	-
สถานะ (State)	S_0	S_1	S_0	S_1	S_1
การแสดงค่า (Output)	0	1	0	1	1

รูปที่ 2.277

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าที่รับเข้าไปเป็น 2110 จะได้ ค่าที่แสดงออกมาเป็น 01011

2.10.1 การบวกเลขฐานสองของเครื่องจักร (Binary adder machine)

สถานะจำกัดของเครื่องจักร (finite state machine) ที่ใช้ในการบวก เลขฐานสอง นั้น ค่าที่ใส่เข้าไปประกอบด้วย ลำดับของคู่ของ binary digit ซึ่งแต่ละรูปแบบคือ 00,01,10 หรือ 11 เป็น digit ที่แทนจำนวนที่จะบวกกันโดยอ่ายจากขวาไปซ้าย รูปแบบของการบวกเลขฐานสองคือ

$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=10$

1. ค่าที่แสดงออกมาเป็น 0 ไม่มีตัวทด ให้เป็นสถานะ s_0
2. ค่าที่แสดงออกมาเป็น 0 มีตัวทด ให้เป็นสถานะ s_1
3. ค่าที่แสดงออกมาเป็น 1 ไม่มีตัวทด ให้เป็นสถานะ s_2
4. ค่าที่แสดงออกมาเป็น 1 มีตัวทด ให้เป็นสถานะ s_3

สถานะปัจจุบัน	สถานะค่าที่ใส่เข้าไป		สถานะต่อไป
s_0 (0ไม่มีตัวทด)	00	$0+0=0$	s_0 (0 ไม่มีตัวทด)
	01	$0+1=1$	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	10	$1+0=1$	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	11	$1+1=10$	s_1 (0 มีตัวทด)
สถานะปัจจุบัน	สถานะค่าที่ใส่เข้าไป		สถานะต่อไป
s_1 (0มีตัวทด)	00	$0+0+1=1$	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	01	$0+1+1=10$	s_1 (0 มีตัวทด)
	10	$1+0+1=10$	s_1 (0 มีตัวทด)
	11	$1+1+1=11$	s_3 (1 มีตัวทด)

รูปที่ 2.278

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน	สถานะค่าที่ใส่เข้าไป		สถานะต่อไป
s_2 (1 ไม่มีตัวทด)	00	0 + 0 = 0	s_0 (0 ไม่มีตัวทด)
	01	0+1=1	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	10	1 + 0 = 1	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	11	1 + 1 = 10	s_1 (0 มีตัวทด)

รูปที่ 2.279

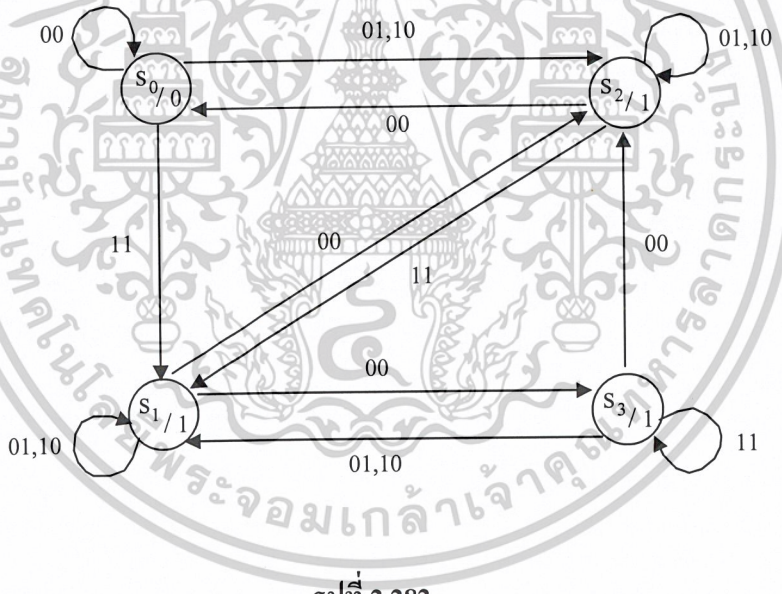
สถานะปัจจุบัน	สถานะค่าที่ใส่เข้าไป		สถานะต่อไป
s_3 (0มีตัวทด)	00	0 + 0 + 1 = 1	s_2 (1 ไม่มีตัวทด)
	01	0 + 1+ 1 = 10	s_1 (0 มีตัวทด)
	10	1 + 0 + 1 = 10	s_1 (0 มีตัวทด)
	11	1 + 1 + 1 = 11	s_3 (1 มีตัวทด)

รูปที่ 2.280

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input)				การแสดงค่า (Output)
	00	01	10	11	
S_0	S_0	S_2	S_2	S_1	0
S_1	S_2	S_1	S_1	S_3	0
S_2	S_0	S_2	S_2	S_1	1
S_3	S_2	S_1	S_1	S_3	1

รูปที่ 2.281



รูปที่ 2.282

<u>ตัวอย่าง</u> จงบวก “011” และ “001”

$$\begin{array}{cccc} \boxed{0} & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

เลข 2 จำนวนบวกกันอ่านจากขวาไปซ้ายคือ 11 , 10 , 00

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3
การรับค่า (Input)	11	10	00	
สถานะ (State)	s_0	s_1	s_1	s_2
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	1

รูปที่ 2.283

ผลลัพธ์ที่ได้ในกรณีบวกเลขอ่านจากขวาไปซ้าย และไม่เอาค่าที่ใส่เข้าไปในเมื่อเป็นสถานะเริ่มต้น ดังนั้น 011 + 001 = 100

<u>ตัวอย่าง</u> จงบวก 01110110 และ 01010101 โดย การบวกเลขฐานสองโดยเครื่องจักร(binary adder machine)

0 1 1 1 0 1 1 0

0 1 0 1 0 1 0 1

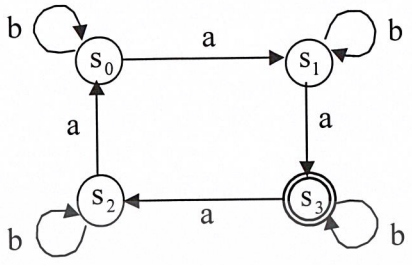
เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
การรับค่า (Input)	01	10	11	00	11	10	11	00	
สถานะ (State)	s_0	s_2	s_2	s_1	s_2	s_1	s_1	s_3	s_2
การแสดงค่า (Output)	0	1	1	0	1	0	0	1	1

รูปที่ 2.284

ผลลัพธ์คือ 11001011

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาหุ่นยนต์ที่แสดงดังกราฟสถานะ



รูปที่ 2.285

วงกลมที่มีลูกศรชี้เข้าแสดง สถานะเริ่มต้น คือ สถานะ s_0 วงกลมซ้อนสองวงแสดง สถานะสิ้นสุด คือ สถานะ s_3 การเปลี่ยนสถานะด้วยด้านที่มีหัวลูกศร

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)	
	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_3	s_1
s_2	s_0	s_2
s_3	s_2	s_3

รูปที่ 2.286

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า ค่าที่ใส่เข้าไป คือ abaa

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
การรับค่า (Input)	a	b	a	a	
สถานะ (State)	s_0	s_1	s_1	s_3	s_2

รูปที่ 2.287

จะพบว่าหุ่นยนต์ไม่หยุดที่สถานะ s_3 ดังนั้นลำดับของ “abaa” ไม่สามารถหาค่าได้สำหรับหุ่นยนต์นี้

ถ้าค่าที่ใส่เข้าไป คือ “aba”

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3
การรับค่า (Input)	a	b	a	
สถานะ (State)	s_0	s_1	s_1	s_3

รูปที่ 2.288

จะพบว่าหุ่นยนต์หยุดที่สถานะ s_3 ดังนั้น หุ่นยนต์ยอมรับได้ในลำดับค่าที่ใส่เข้าไปคือ “aba”

ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปคือ abaaaaa

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

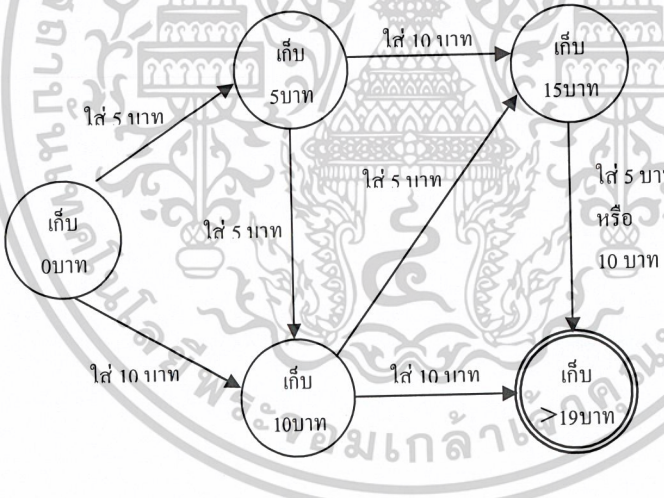
เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
การรับค่า (Input)	a	b	a	a	a	a	a	
สถานะ (State)	s_0	s_1	s_1	s_3	s_2	s_0	s_1	s_3

รูปที่ 2.289

จะพบว่าหุ่นยนต์หยุดที่สถานะ s_3 ดังนั้นหุ่นยนต์ยอมรับได้ในลำดับค่าที่ใส่เข้าไปคือ aba

พิจารณา เครื่องขายของเครื่องหนึ่งซึ่งขายขนม 1 ชิ้นที่มีราคา 20 บาทต่อชิ้น เครื่องจะขอมรับเหรียญ 5 บาท และ10 บาท และจะไม่คืนเงินทอน

เมื่อเครื่องได้รับเงินมากกว่าหรือเท่ากับ 20 บาท เครื่องจะยอมให้กดปุ่มเพื่อให้ขนม 1 ชิ้นออกมา เงินที่เดินจะถูกเก็บเข้าไปในเครื่องและเครื่องจะทำงานต่อไป



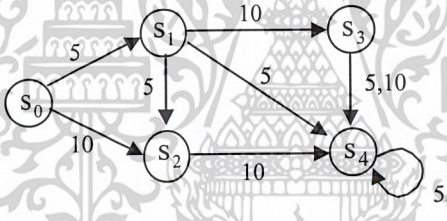
รูปที่ 2.290

วงกลมแต่ละวงแทนแต่ละสถานะของเครื่อง สถานะเริ่มต้นคือ “เครื่องเก็บ 0 บาท” มีลูกศรชี้เข้า สถานะสิ้นสุดคือ “เครื่องเก็บมากกว่า 19 บาท” จะมีวงกลมซ้อนกันเมื่อมาถึงสถานะสิ้นสุดเครื่องพร้อมที่จะปล่อยขนม 1 ชิ้น เมื่อกดปุ่มขนมก็จะออกมาแล้วเครื่องจะกลับไปสถานะพร้อมจะบริการลูกค้าคนต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)	
	5 บาท	10 บาท
เครื่องเก็บ 0 บาท : s_0	s_1	s_2
เครื่องเก็บ 5 บาท : s_1	s_2	s_3
เครื่องเก็บ 10 บาท : s_2	s_3	s_4
เครื่องเก็บ 15 บาท : s_3	s_4	s_4
เครื่องเก็บ >19 บาท : s_4	s_4	s_4

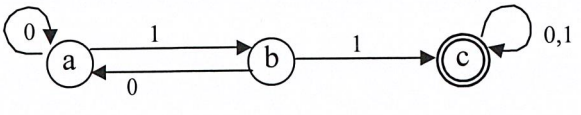
รูปที่ 2.291



รูปที่ 2.292

สถานะจำกัดของเครื่องจักร ที่มีจุดยอมรับเรียกว่า determine …finite state DFM

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา เครื่องจักร ดังรูป



รูปที่ 2.293

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)	
	x=0	x=1
a	a	b
b	a	c
c	c	c

รูปที่ 2.294

ค่าที่จะใส่เข้าไปต่อไปนี้ยอมรับโดย DFA หรือไม่

a) 0101 b) 0001100 c) 1000010

a)

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
การรับค่า (Input)	0	1	0	1	
สถานะ (State)	a	a	b	a	b

รูปที่ 2.295

ค่า “0101” ไม่สามารถยอมรับได้ โดย DFA

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

b)

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
การรับค่า (Input)	0	0	0	1	1	0	0	
สถานะ (State)	a	a	a	a	b	c	c	c

รูปที่ 2.296

ค่า “0001100” สามารถยอมรับได้โดน DFA

c)

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
การรับค่า (Input)	1	0	0	0	0	0	1	0	
สถานะ (State)	a	b	a	a	a	a	a	b	a

รูปที่ 2.297

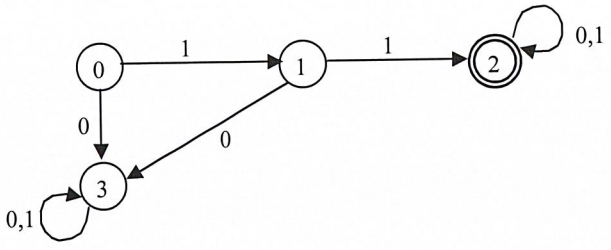
ค่า “10000010” ไม่สามารถยอมรับได้ โดย DFA

DFA ในตัวอย่างนี้จะยอมรับ ค่าที่ใส่เข้าไปที่มี 1 ติดกัน 2 ตัว

เซต ของ ค่าที่ใส่เข้าไป ที่สามารถยอมรับได้โดย DFA เรียกว่า ภาษาที่สามารถยอมรับได้โดย DFA

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จงอธิบาย ภาษาที่สามารถยอมรับได้โดย DFA ดังรูป



รูปที่ 2.298

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)	
	x=0	x=1
0	3	1
1	3	2
2	2	2
3	3	3

รูปที่ 2.299

จะพบว่าถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเริ่มต้นด้วย 0 แล้ว เครื่องจักรจะไปยังสถานะที่ 3 และที่สถานะที่ 3 นี้ไม่ว่าจะใส่ค่าอะไรเข้ามาก็ตามจะอยู่ที่เดิมเสมอ

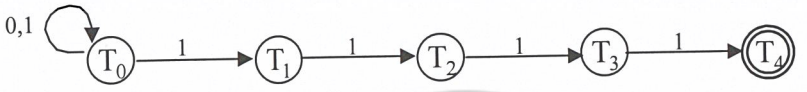
ถ้าค่าที่ใส่เข้ามาเริ่มด้วย 1 แล้วเครื่องจักรจะไปยังสถานะที่ 1 และถ้าค่าที่ใส่เข้ามาตัวต่อมาเป็น 0 เครื่องจักรจะไปยังสถานะที่ 3 แล้วจะอยู่ที่สถานะที่ 3

แต่ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปตัวต่อมาเป็น 1 แล้วจะเคลื่อนจากสถานะที่ 1 ไปยังสถานะที่ 2 และไม่ว่าจะสาค่าอะไรเข้าไปก็คามจะอยู่ที่สถานะที่ 2 ตลอด

ดังนั้น ภาษาที่สามารถยอมรับได้โดย DFA นี้จะต้องเริ่มต้นด้วย ค่าที่มี 1 ติดกันไม่เกิน 2 ตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตัวอย่างที่ผ่านมานี้ กำหนด เครื่องจักรแล้วจะหาว่าเครื่องจักรยอมรับค่าตัวอักขระที่ใส่เข้าไปหรือไม่ในรูปแบบใดๆ แต่ถ้ากำหนดเซตของค่าตัวอักขระแล้วต้องการหาเครื่องจักรที่ยอมรับเซตของอักขระจะเรียกเครื่องจักรนี้ว่า nondeterminite... finite automata : NFA ตัวอักขระจะถูกยอมรับโดย NFA ก็ต่อเมื่อมีทางเดินทางเดียวจากสถานะเริ่มต้นไปที่สถานะสุดท้ายและค่าที่อยู่บนด้านแต่ละด้านในของทางเดินคือ ตัวอักขระพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 2.300

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input) x=0	x=1
T_0	T_0	T_0 , T_1
T_1	-	T_2
T_2	-	T_3
T_3	-	T_4
T_4	-	-

T_0 เป็น สถานะเริ่มต้น , T_4 เป็นสถานะสิ้นสุด

รูปที่ 2.301

ทางเดินจาก T_0 ไปยัง T_4 ต้องประกอบด้วยจำนวนรอบที่วนอยู่บน T_0 ตามด้วย การเดินทางตรงตามลำดับ T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 ไปยัง สถานะสิ้นสุด T_4

รอบที่ T_0 มีค่า 0,1 แสดงว่าทางเดินที่ผ่าน T_0 จะเป็นทางเดินที่เป็น การรวมกันของ 0 และ 1 บนส่วนจองทางเดิน T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 ค่าที่ได้ต้องเป็น “1111” นั้นคือทุกทางเดินจาก T_0 ไปยัง T_4 จะเริ่ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ด้วย 0 และ 1 แล้วต้องจบด้วย 1 สี่ตัวติดกันจึงจะสามารถเดินไปบนทางเดินนี้ได้ เช่น “0101001111” จะได้ทางเดินที่ประกอบด้วยการวนรอบ 6 รอบที่ T_0 แล้วตามด้วยเดินไปตามทาง T_0 T_1 T_2 T_3 T_4

ที่ T_1 ถ้าค่าที่เข้ามาเป็น 0 เนื่องจากไม่มีด้านออกจาก T_1 ที่มีแต่ทางเดินที่เป็น 0 ดังนั้นไม่มี สถานะถัดไป นั้นคือ NFA จะไม่ยอมรับค่าอื่นที่ใส่ตามมา และถ้า NFA อยู่ที่สถานะ T_0 และค่าที่ใส่เข้ามาเป็น 1 เนื่องจาก T_0 ไปยัง T_0 และ T_0 ไปยัง T_1 ซึ่งมีค่าทางเดินเป็น 1 ทั้งคู่ ดังนั้นมี 2 สถานะให้เลือก ที่จะไปยังสถานะถัดไปคือ T_0 และ T_1 แต่ สถานะใดละ

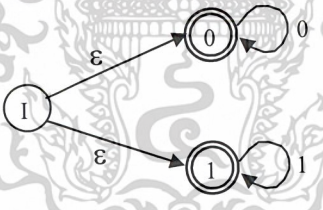
ในการแก้ปัญหานี้ ขึ้นอยู่กับการออกแบบและเงื่อนไขของแต่ละภาษา เช่นอาจมีการคัดลอกทั้งสถานะ T_0 และ T_1 เมื่อมีการใส่ค่าที่เป็น 1 เข้ามาที่ T_0 แล้วดูค่าที่ใส่เข้ามาตัวต่อไป ถ้าเป็น 1 อีกก็คัดลอกทั้ง 2 สถานะต่อไปอีก และถ้าค่าที่ใส่เข้ามาเป็น 1 ติดต่อกัน 4 ตัวก็จะมี สถานะ T_1 ที่คัดลอกไว้ 4 ครั้งและสถานะ T_0 ที่คัดลอกไว้ 4 ครั้ง

ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้คือมี T_1 4 ครั้งก็จะเป็นทางเดิน T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 กรณีอื่นก็จะวงรอบอยู่ที่ T_0 จนกว่าจะพบ 1 ติดต่อกัน 4 ตัว

นอกจากนี้ใน NFA อาจจะมีด้านที่ค่าเป็น ε แทน “ไม่มีทางเดิน”

ε ค่าว่างของด้าน คือสถานะ ที่เกิดขึ้นถึงแม้ไม่มี ค่าที่ใส่เข้าไปหรือ ค่าที่ใส่เข้าไปเป็น ค่าว่าง ที่ไม่มีสัญลักษณ์ ใดๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงอธิบายภาษาที่ยอมรับโดย NFA ดังรูป



รูปที่ 2.302

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)		
	x=0	x=1	x = ε
I	-	-	0,1
0	0	-	-
1	-	1	-

รูปที่ 2.303

<u>วิธีทำ</u> สถานะเริ่มต้นคือ I ซึ่งรับค่าที่ใส่เข้ามาทั้ง 0 และ 1 ดังนั้นมี 2 ทางเดินจาก I คือ จาก I ไป 0 และจาก I ไปยัง 1

ทางเดินจาก I ไปยัง 0 ค่าเป็น ε ตามด้วยจำนวนวนรอบที่สถานะ 0 ซึ่งค่าเป็น 0 ทั้งหมดดังนั้นค่าบนทางเดินนี้จะทำงานที่ค่าที่เข้ามาเป็น 0

ทางเดินจาก I ไป 1 จะทำงานที่ค่าที่ใส่เข้ามาเป็น 1 ดังนั้นภาษาที่ยอมรับโดย NFA จะประกอบด้วยตัวอักขระ

0 , หรือ 0 ทั้งหมดมากว่าหนึ่งตัวขึ้นไป และ 1, หรือ 1 ทั้งหมดมากว่าหนึ่งตัวขึ้นไป

2.10.2 ชนิดของสถานะจำกัดของเครื่องจักร (Types of Finite stat machine)

Mealy machine ค่าที่แสดงออกมาจะแสดงเป็นฟังก์ชันของทั้งค่าที่ใส่เข้าไปและตัวแปรภายในของสถานะ

Moore machine ค่าที่แสดงออกมาจากสถานะเท่านั้นพิจารณาจาก simple synchronous machine ซึ่งมี 2 ค่าที่ต้องใส่เข้าไป และ 1 ค่าที่แสดงออกมา โดยเครื่องจักรจะกำหนดการปรากฏของลำดับของค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 00,01,10,11 แล้ว ค่าที่แสดงออกมาซึ่งเป็น final combination of a detect sequence เป็น 1

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)				การแสดงค่า (Output)
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)				
	00	01	10	11	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

s_1	s_2	0
s_2	s_3	0
s_3	s_4	0
s_4	s_5	0
s_5		1

รูปที่ 2.304

การรับค่า (Input)	00	00	11	10
สถานะ (State)	s_1	s_2	s_3	s_4
สถานะถัดไป(Next)	s_2	s_3	s_4	s_5

รูปที่ 2.305

การรับค่า (Input)	00	00	11	10
สถานะ (State)	s_2	s_3	s_3	s_4
สถานะถัดไป(Next)	s_3	s_3	s_4	s_5

รูปที่ 2.306

การรับค่า (Input)	00	00	11	10
สถานะ (State)	s_4	s_2	s_3	s_4
สถานะถัดไป(Next)	s_2	s_3	s_4	s_5

รูปที่ 2.307

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

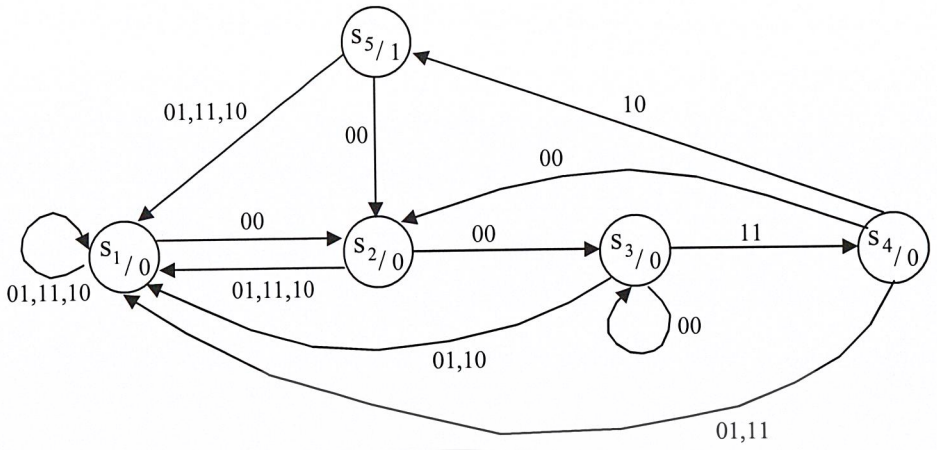
การรับค่า (Input)	00	00	11	10
สถานะ (State)	s_5	s_2	s_3	s_4
สถานะถัดไป(Next)	s_2	s_3	s_4	s_5

รูปที่ 2.308

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input) 00	01	10	11	การแสดงค่า (Output)
s_1	s_2	s_1	s_1	s_1	0
s_2	s_3	s_1	s_1	s_1	0
s_3	s_3	s_1	s_4	s_1	0
s_4	s_2	s_1	s_1	s_5	0
s_5	s_2	s_1	s_1	s_1	1

รูปที่ 2.309

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.310

เรียก Moore model for sequence detector

Mealy model output เป็นฟังก์ชันของค่าที่ใส่เข้าไปและ ค่าตัวแปรสถานะภายใน

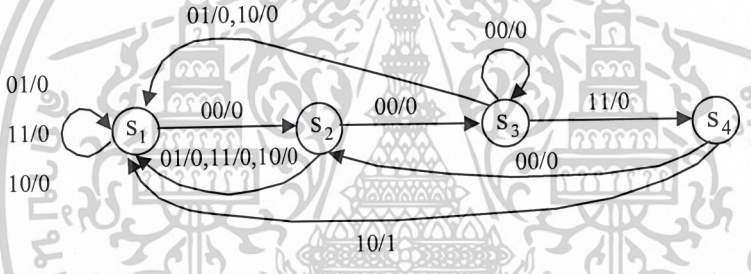
การรับค่า (Input)	00	00	11	10
สถานะ (State)	S_1	S_2	S_3	S_4
สถานะถัดไป(Next)	S_2	S_3	S_4	S_1
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	1

รูปที่ 2.311

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input)				การแสดงค่า(Output)			
	00	01	10	11	00	01	10	11
S_1	S_2	S_1	S_1	S_1	0	0	0	0
S_2	S_3	S_1	S_1	S_1	0	0	0	0
S_3	S_3	S_1	S_4	S_1	0	0	0	0
S_4	S_2	S_1	S_1	S_5	0	0	0	1

รูปที่ 2.312



รูปที่ 2.313

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดตารางสถานะ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)		
	0	1	
A	B	C	0
B	F	D	0
C	G	E	0
D	H	B	0
E	B	F	1
F	D	H	0
G	E	B	0
H	B	C	1

รูปที่ 2.314

จงหาค่าที่แสดงออกมาเมื่อค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 1122212212

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
การรับค่า (Input)	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2	
สถานะ (State)	A	B	F	H	C	E	B	D	B	F	H
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

รูปที่ 2.315

ค่าที่ใส่เข้าไป 1122212212 จะได้ค่าที่แสดงออกมมาคือ 00010100001

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง กำหนดตารางสถานะ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)		
	1	2	
A	B	C	0
B	C	D	0
C	D	D	0
D	E	B	0
E	B	C	1

รูปที่ 2.316

จงหาค่าที่แสดงออกมาเมื่อค่าที่ใส่เข้าไปคือ 1122212212

เวลา (Time)	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
การรับค่า (Input)	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2	
สถานะ (State)	A	B	F	H	C	E	B	D	B	F	H
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

รูปที่ 2.317

ค่าที่ใส่เข้าไป 1122212212 จะได้ค่าที่แสดงออกมาคือ 00010100001

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.10.3 Equivalent machine

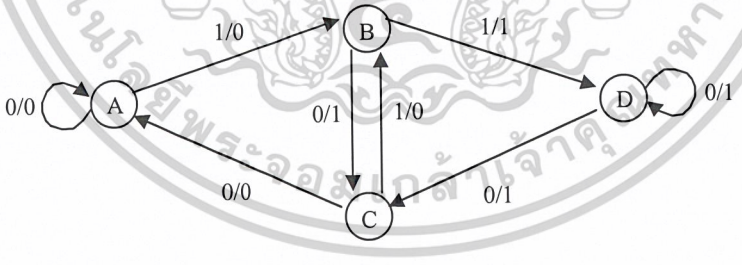
สอง finite state machine จะกล่าวว่าสมมูลกัน ถ้าเริ่มจากสถานะแรกของ FSM นั้นจะได้ลำดับที่เหมือนกันเมื่อให้ลำดับค่าที่ใส่เข้าไปเหมือนกันถึงแม้โครงสร้างภายในจะแตกต่างกัน

ในการศึกษา FSM นี้ไม่ได้กล่าวถึงการสร้าง FSM โดยใช้ electronic devices แต่จะพบว่าถ้า FSM มีสถานะน้อยๆค่าใช้จ่ายในการสร้างก็น้อยด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาตาราสถานะและกราฟสถานะต่อไปนี้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า(Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	A	B	0	0
B	C	D	1	0
C	A	B	0	0
D	C	D	1	1

รูปที่ 2.318



รูปที่ 2.319

พิจารณาสถานะ A และ C จะพบว่าสมมูลกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A	A	B	0	0
B	A	B	0	0

รูปที่ 2.320

พิจารณาสถานะ B และ D จะพบว่าสมมูลกัน

B	C	D	1	1
D	C	D	1	1

รูปที่ 2.321

จาก A และ C ที่สมมูลกันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน คือ {A,C} และแทนด้วย A จาก B และ D ที่สมมูลกันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกันคือ {B,D} และแทนด้วย B แล้วจาก ตารางสถานะสามารถลดรูปดังนี้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า(Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	A	B	0	0
B	C B	D B	1	0
C	A	B	0	0
D	C	D	1	1

รูปที่ 2.322

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า(Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	A	B	0	0
B	C	D	1	0

รูปที่ 2.323

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา FSM ซึ่งตารางสถานะคือ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	B	H	0	0
B	F	D	0	0
C	A	F	0	1
D	A	G	0	1
E	D	B	1	0
F	C	B	1	0
G	D	B	1	0
H	C	A	0	0

รูปที่ 2.324

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดกลุ่มสมมูล $\{A\},\{B\},\{C,D\},\{D,F,G\},\{H\}$ จงสร้าง reduced machine

<u>วิธีทำ</u>

กลุ่มที่สมมูลกัน	แทนด้วย
$\{A\}$	A
$\{B\}$	B
$\{C,D\}$	C
$\{E,F,G\}$	E
$\{H\}$	H

รูปที่ 2.325

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัดสถานะที่สมมูลกันออก คือตัด D และ F และ G แล้วแทนสถานะต่างๆจะได้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	B	H	0	0
B	~~F~~ E	~~D~~ C	0	0
C	A	~~F~~ E	0	1
~~D~~	~~A~~	~~G~~	~~0~~	~~1~~
E	~~D~~ C	B	1	0
~~F~~	~~C~~	~~B~~	~~1~~	~~0~~
~~G~~	~~D~~	~~B~~	~~1~~	~~0~~
H	C	A	0	0

รูปที่ 2.326

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	B	H	0	0
B	E	C	0	0
C	A	E	0	1
E	C	B	1	0
H	C	A	0	0

รูปที่ 2.327

ในการลดรูปสิ่งสำคัญ คือ

1. ค่าที่แสดงออกมาต้องเหมือนกันหรือเท่ากัน
2. สถานะถัดไปอาจจะไม่เท่ากันหรือเหมือนกันแต่ต้องสมมูลกัน

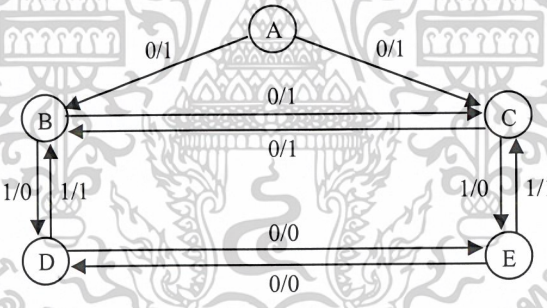
จากตัวอย่าง กำหนดกลุ่มที่สมมูลกันมาให้ ปัญหาต่อไปคือ ถ้าไม่กำหนดจากตารางสถานะจะหากลุ่มที่สมมูลกันได้อย่างไร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงหาสถานะกลุ่มที่สมมูลกัน ของ FSM ดังรูป

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	0
A	B	C	1	0
B	C	D	1	0
C	B	E	1	0
D	E	B	0	1
E	D	C	0	1

รูปที่ 2.328



รูปที่ 2.329

วิธีทำ แบ่งเซตของสถานะ $\{A,B,C,D,E\}$ ออกเป็นเซตย่อยตามที่ค่าที่จะแสดงออกมาที่เหมือนกันในตารางสถานะ

A,B,C มี ค่าที่แสดงออกมาเหมือนกัน

D,E มี ค่าที่แสดงออกมาเหมือนกัน

ดังนั้น $P_1 : \{A,B,C\},\{D,E\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กลุ่มที่สมมูลกัน	แทนด้วย
{A,B,C}	A
{D,E}	D

รูปที่ 2.330

แล้วแทนแต่ละสมาชิกในสถานะถัดไปจะได้ สถานะถัดไปอันแรก โดย

	สถานะถัดไป	
A	~~B~~ A	~~C~~ A
B	~~C~~ A	D
C	~~B~~ A	~~E~~ D
D	~~E~~ D	~~B~~ A
E	D	~~C~~ A

รูปที่ 2.331

I	สถานะถัดไป	
A	A	A
B	A	D
C	A	D
D	D	A
E	D	A

รูปที่ 2.332

จากตารางแสดงสถานะถัดไปครั้งที่ 1 จะเห็นว่า สถานะถัดไปที่สถานะ A,B,C ไม่เหมือนกัน แต่สถานะ A แตกต่างออกไปแสดงว่า ต้องแบ่งเซตย่อยของ {A,B,C} ออกเป็น {A} และ {B,C}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	กลุ่มที่สมมูลกัน	แทนด้วย
ดังนั้น P_2 : {A},{B,C},{D,E}	{A}	A
	{B,C}	B
	{D,E}	D

รูปที่ 2.333

แล้วแทนแต่ละสมาชิดในสถานะถัดไปจะได้ สถานะถัดไปที่ 2 โดย

	สถานะถัดไป	
A	B	~~C~~ B
B	~~C~~ B	D
C	B	~~E~~ D
D	~~E~~ D	B
E	D	~~C~~ B

รูปที่ 2.334

2	สถานะถัดไป	
A	B	B
B	B	D
C	B	D
D	D	B
E	D	B

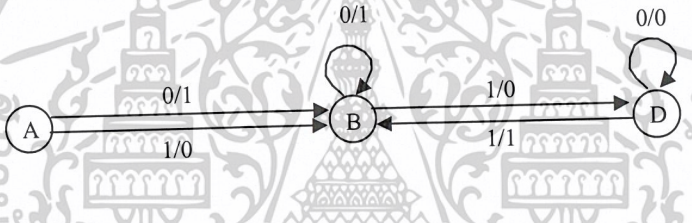
รูปที่ 2.335

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น เซตย่อยของ P_2 เป็นสถานะ equivalence closes และ reduced machine แสดงดังนี้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	0
A	B	B	1	0
B	B	D	1	0
D	D	B	0	1

รูปที่ 2.336



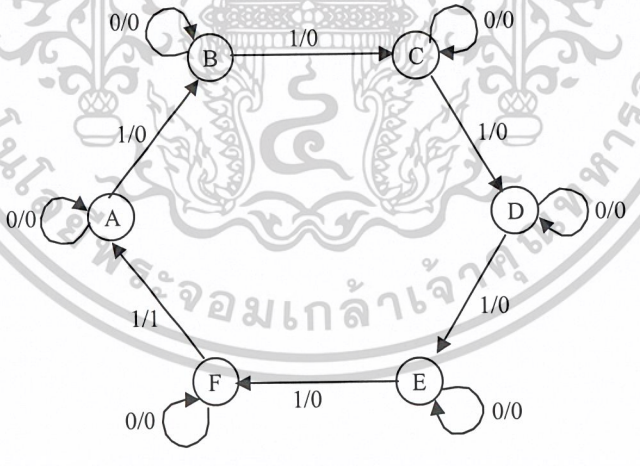
รูปที่ 2.337

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ตัวอย่าง</u> จากสถานะกลุ่มที่สมมูลกันของ FSM ดังรูป

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
A	A	B	0	0
B	B	C	0	0
C	C	D	0	0
D	D	E	0	0
E	E	F	0	0
F	F	A	0	1

รูปที่ 2.338



รูปที่ 2.339

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u> P_1 : $\{A,B,C,D,E\},\{F\}$ $\{A,B,C,D,E\} \equiv A$,$\{F\} \equiv F$

	สถานะถัดไป	
A	A	~~B~~ A
B	~~B~~ A	~~C~~ A
C	~~C~~ A	~~D~~ A
D	~~D~~ A	~~E~~ A
E	~~E~~ A	F
F	F	A

⟹

	สถานะถัดไป	
A	A	A
B	A	A
C	A	A
D	A	A
E	A	F
F	F	A

P_2 : $\{A,B,C,D\},\{E\},\{F\}$ $\{A,B,C,D\} \equiv A$,$\{E\}=E$,$\{F\}=F$

	สถานะถัดไป	
A	A	~~B~~ A
B	~~B~~ A	~~C~~ A
C	~~C~~ A	~~D~~ A
D	~~D~~ A	E
E	E	F
F	F	A

⟹

	สถานะถัดไป	
A	A	A
B	A	A
C	A	A
D	A	E
E	E	F
F	F	A

P_3 : $\{A,B,C\},\{D\},\{E\},\{F\}$

$\{A,B,C\} \equiv A$,$\{D\}=D$,$\{E\}=E$,$\{F\}=F$

	สถานะถัดไป	
A	A	~~B~~ A
B	~~B~~ A	~~C~~ A
C	~~C~~ A	~~D~~ A
D	~~D~~ A	E
E	E	F
F	F	A

⟹

	สถานะถัดไป	
A	A	A
B	A	A
C	A	A
D	A	E
E	E	F
F	F	A

P_4 : $\{A,B\},\{C\},\{D\},\{E\},\{F\}$

$\{A,B\} \equiv A$,$\{C\}=C$,$\{D\}=D$,$\{E\}=E$,$\{F\}=F$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

	สถานะถัดไป	
A	A	~~B~~ A
B	~~B~~ A	~~C~~ A
C	~~C~~ A	~~D~~ A
D	~~D~~ A	E
E	E	F
F	F	A

⟹

	สถานะถัดไป	
A	A	A
B	A	A
C	A	A
D	A	E
E	E	F
F	F	A

P_5 : {A},{B},{C},{D},{E},{F} ไม่มีสองสถานะใดๆสมมูลกันเลย นั้นคือเครื่องจักรที่ออกแบบอย่างดีแล้ว

<u>ตัวอย่าง</u> จงออกแบบ FSM ให้รองรับรูปแบบ 1111 โดยค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 0 หรือ 1 และถ้าค่าที่ใส่เข้ามาเป็น 1 ติดต่อกัน 4 ตัวแล้วจะให้ค่าที่แสดงออกมาเป็น 1 กรณีอื่นๆจะให้ค่าที่แสดงออกมาเป็น 0 หรือ

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x_n = x_{n-1} = x_{n-2} = x_{n-3} = 1 \\ 0 & \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> I คือ {0,1} และ O คือ {0,1} มี 5 สถานะ s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 โดย

s_0 ไม่มี 1

s_1 มี 1 หนึ่งตัว

s_2 มี 1 สองตัว

s_3 มี 1 สามตัว

s_4 มี 1 สี่ตัว

เครื่องจักรจะต้องเริ่มที่สถานะ s_0 เนื่องจากเมื่อเริ่มต้นยังไม่มี 1 เลย จากสถานะ s_0 ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 1 เครื่องจักรจะเคลื่อนไปหนึ่งสถานะ แต่ถ้าค่าที่ใส่เข้ามาเป็น 0 เครื่องจักรจะอยู่ที่สถานะ s_0 ที่เดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การรับค่า (Input)	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
สถานะ (State)	s_0	s_0	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_4	s_4	s_0
สถานะถัดไป (Next)	s_0	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_4	s_4	s_0	s_1
การแสดงค่า (Output)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0

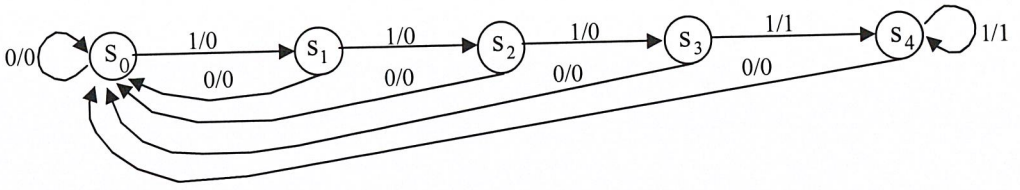
รูปที่ 2.340

ถ้าใส่ข้อมูลมาเป็น 1 ติดต่อกันสถานะของเครื่องจะอยู่ที่ s_4 เรียก s_4 ว่า recognizer state สามารถเขียนตารางสถานะได้และกราฟสถานะได้ดังนี้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state) การรับค่าปัจจุบัน (Present input) 0	1	การแสดงค่า (Output) 0	1
s_0	s_0	s_1	0	0
s_1	s_0	s_2	0	0
s_2	s_0	s_3	0	0
s_3	s_0	s_4	0	1
s_4	s_0	s_4	0	1

รูปที่ 2.341

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.342

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A เป็นเซตของตัวเลข ให้ x เป็นความสัมพันธ์สมมูลไปยัง y ก็ต่อเมื่อ x-y เป็นจำนวนคูณกับ 3 จงแสดงว่าเป็น ความสัมพันธ์สมมูลกันจริง และจงหา กลุ่มที่สมมูลกันของ 0 พร้อมบอกว่ามีทั้งหมดกี่กลุ่มที่สมมูลกัน

<u>วิธีทำ</u> 1. สะท้อน (reflexivity)

เนื่องจาก $x - x = 0$ และ 0 คือ 0 คูณกับ 3 ได้ 0

2. สมมาตร (symmetry)

$x - y$ เป็นจำนวนเท่าของ 3 คือ $x - y = 3n$ แล้ว $y - x = 3(-n)$ เป็นจำนวนคูณกับ 3

3. ถ่ายทอด (transitive)

ถ้า $x - y = 3a$ และ $y - z = 3b$ แล้ว $x - z = (x - y) + (y - z) = 3a + 3b = 3(a + b)$ ซึ่งเป็นจำนวนคูณกับ 3

$x - y$ เป็นจำนวนคูณกับ 3 เป็น ความสัมพันธ์สมมูลกัน และ

กลุ่มที่สมมูลกันของ 0 คือ $x - 0$ เป็นจำนวนคูณเท่ากับ 3

หรือ $C(0) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, ...\}$ จะเห็นได้ว่า 1 ไม่อยู่ใน $C(0)$

กลุ่มที่สมมูลกันของ 1 คือ $x - 1$ เป็นจำนวนคูณเท่ากับ 3

หรือ $x = 1 + 3a$

หรือ $C(1) = \{..., -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, ...\}$

กลุ่มที่สมมูลกันของ 2 คือ $x - 2$ เป็นจำนวนคูณเท่ากับ 3

หรือ $x = 2 + 3a$

หรือ $C(2) = \{..., -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$

จะเห็นได้ว่า $C(119) = C(2)$ เพราะว่า $119 \in C(2)$ โดย $2 - 119 = -117 = 3(-39)$ ไม่มีกลุ่มที่สมมูลกันอื่นๆอีกแล้วเพราะทุกๆจำนวนเต็มอาจจะอยู่ใน $C(0)$, $C(1)$ หรือ $C(2)$ กลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง ดังนั้นมี 3 กลุ่มที่สมมูลกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สองจำนวนเต็ม x และ y จะเรียกว่า Congruent mod 3 ถ้าผลต่าง x - y เป็นจำนวนคูณกับ 3 จะพบว่าทุกจำนวนเต็มเป็น Congruent กับ 0,1,2 หรือ n mod 3 โดย

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
n mod 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...

ในความเป็นจริง n mod 3 ก็คือ เศษที่เกิดจากการนำ 3 มาหาร n นั้นเอง

ต้องการออกแบบ FSM ที่เป็น mod 3 counter

ค่าที่ใส่เข้าไป คือ $\{0,1\}$ ค่าที่จะแสดงออกมาคือ $\{0,1,2\}$ ค่าของเศษ

สถานะคือ s_0, s_1, s_2 โดย

s_0 คือ $\{0,3,6,9,12,...\}$ จำนวนที่หาร 3 แล้วเหลือเศษ 0

s_1 คือ $\{1,4,7,10,13,...\}$ จำนวนที่หาร 3 แล้วเหลือเศษ 1

s_2 คือ $\{2,5,8,11,14,...\}$ จำนวนที่หาร 3 แล้วเหลือเศษ 2

ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 1 ที่ s_0 แล้ว s_0 จะเปลี่ยนเป็น สถานะ s_1 ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 0 แล้วให้สถานะคงเดิม

ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 1 ที่ s_1 แล้ว s_1 จะเปลี่ยนเป็น สถานะ s_2 ถ้าค่าที่ใส่เข้าไปเป็น 0 แล้วให้สถานะคงเดิม

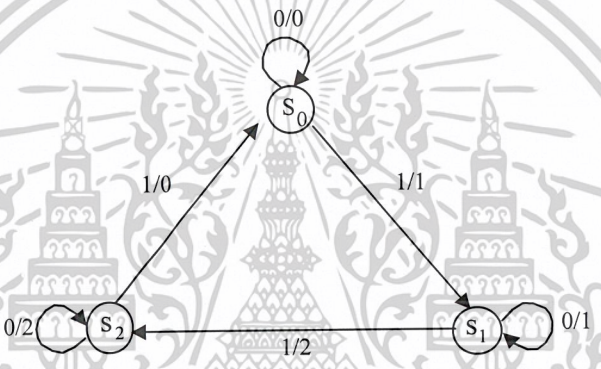
การรับค่า (Input)	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
สถานะ (State)	s_0	s_0	s_1	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_0	s_1	s_2	s_2	s_2
สถานะถัดไป (Next)	s_0	s_1	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_0	s_1	s_2	s_2	s_2	s_0
การแสดงค่า (Output)	0	1	2	2	0	1	2	0	0	1	2	2	2	0

รูปที่ 2.343

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะปัจจุบัน (Present state)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า (Output)	
	การรับค่าปัจจุบัน (Present input)			
	0	1	0	1
s_0	s_0	s_1	0	1
s_1	s_1	s_2	1	2
s_2	s_2	s_0	2	0

รูปที่ 2.344



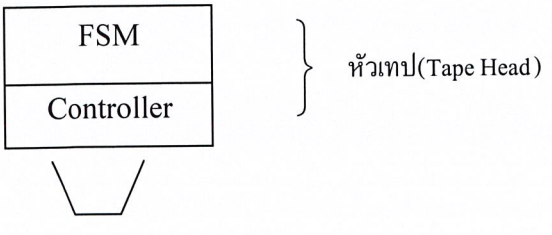
รูปที่ 2.345

2.10.4 Turing machines

เป็น computing machine ซึ่งมีหน่วยความจำไม่จำกัด ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1. "อ่าน / เขียน" หัวเทป
2. เนื้อเทป ซึ่งแบ่งเป็นตาราง โดยความยาวของ เนื้อเทป นี้ไม่จำกัดคือยาวเท่าไรก็กได้พอที่จะทำการคำนวณได้จนจบ

โดย ที่หัวเทปจะปรกอบด้วย FSM และ ตัวควบคุมเทป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

...	b	b	b	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	b	b	b	b	b	b	b	b	b	...

รูปที่ 2.346

แต่ละตารางบนเทปจะเขียนสัญลักษณ์ต่างๆลงไปได้โดย สัญลักษณ์อาจเป็น 0,1 หรือ b (ช่องว่าง) Turing machine ควบคุมการทำงานโดย นาฬิกา

ณ เวลาใดๆ ที่กำหนด หัวเทปจะอ่านสัญลักษณ์ที่ได้เขียนไว้แล้วบนตารางบนเทป จากรูปข้างบน ค่าที่อ่านคือ 1 สัญลักษณ์ที่อ่านเข้ามานี้ คือค่าที่จะใส่เข้าไปใน FSM จะเปลี่ยนสถานะ และจะให้ค่าที่จะแสดงผลออกมา ซึ่งจะเขียนลงบนเทปโดยการลบสัญลักษณ์ตัวเก่าที่อยู่บนเทปแล้วเขียนสัญลักษณ์ใหม่ลงไป

ในขณะเดียวกันตัวควบคุมก็จะมีกระบวนการบนเทปได้ 1 ใน 3 แบบต่อไปนี้

1. ไปบนตารางทางขวา
2. ไปบนตารางทางซ้าย
3. ให้เครื่องจักรหยุด (แสดงการสิ้นสุด)

ดังนั้นหัวเทปสามารถเคลื่อนไปได้ทั้ง 2 ทิศทาง ในทำนองเดียวกันกับ FSM , Turing machine สามารถอธิบายได้ด้วยตารางสถานะ ซึ่งจะแสดงการตอบสนองของเครื่องจักร เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ที่จะใส่เข้าไป ณ สถานะ ที่กำหนด

ตารางสถานะของ Turing machine จะประกอบด้วย “สถานะถัดไป” “การแสดงผล” “กระบวนการ”

สถานะ(State)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า(Output)		กระบวนการ(Operation)	
	x = 1	x = b	x = 1	x = b	x = 1	x = b
A	A	A	B	B	R	H

รูปที่ 2.347

เมื่อ H = หยุด , R = ไปทางขวา , b = ค่าว่าง

Turing machine ที่อธิบายตารางนี้มีเพียงสถานะเดียวเรียก สถานะ A

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

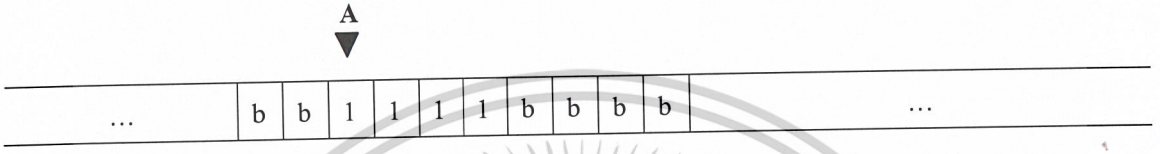
มีสองสัญลักษณ์ คือ x = 1 และ x = b

ถ้าเครื่องจักรอ่าน 1 จะเขียน b (หรือลบ 1 นั้นเอง) แล้วเคลื่อนไปทางขวาภายใต้กระบวนการ x =1

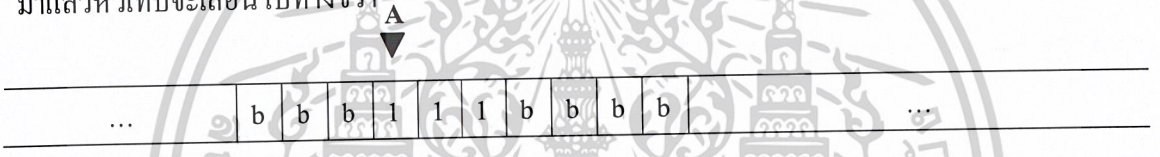
ถ้าเครื่องจักรอ่าน b จะเขียน b (ไม่เปลี่ยนข้อมูลบนเทป) แล้วเคลื่อนหยุดภายใต้กระบวนการ x = b

เพื่อที่จะให้เข้าใจการทำงานของเครื่องจักรได้ชัดเจน พิจารณาเทปดังรูป ซึ่งหัวเทปอยู่ที่ 1 ตัวที่อยู่ซ้ายสุด

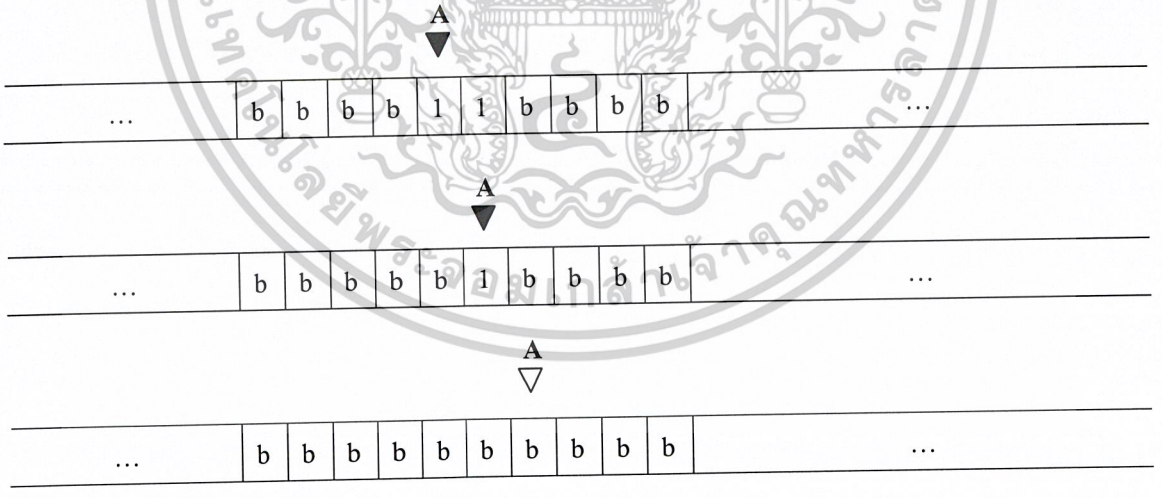
▼ อ่าน ▽ หยุดการทำงาน



หัวเทปจะอ่าน 1 และจากตารางสถานะ เครื่องจักรจะพิมพ์ b ลงไปในเทป ณ ตำแหน่งที่อ่าน 1 ขึ้นมาแล้วหัวเทปจะเลื่อนไปทางขวา



แล้วเครื่องจักรจะทำซ้ำ อ่าน 1 ลบ 1 แล้วเลื่อนไปทางขวา



เมื่อ 1 ตัวสุดท้ายถูกลบไปแล้ว จากตารางสถานะเมื่ออ่านพบ b เครื่องจะหยุดทำงาน

นอกจากจะใช้ตารางสถานะอธิบายในการทำงานของ Turing machine แล้วอาจใช้โปรแกรมแบบรายการ (Program listing) อธิบายโดย การรวมของสถานะและค่าที่ใส่เข้ามา ตามด้วย สถานะถัดไป ,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแสดงผล และ กระบวนการ ที่สมนัยหรือ (สถานะ) (ค่าที่ใส่) : (สถานะถัดไป) (การแสดงผล) (กระบวนการ)

สถานะ(State)	สถานะถัดไป (Next state)		การแสดงค่า(Output)		กระบวนการ (Operation)	
	x = 1	x = b	x = 1	x = b	x = 1	x = b
A	A	A	B	B	R	H

รูปที่ 2.348

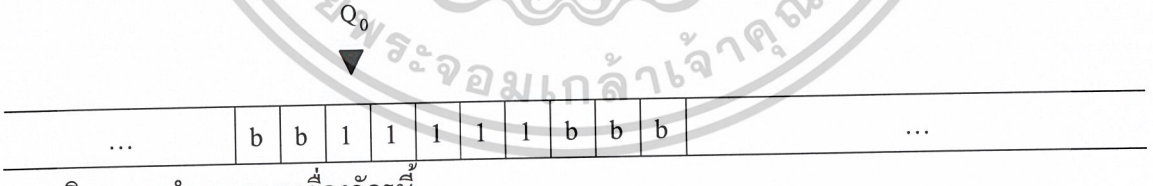
จะได้ โปรแกรมแบบรายการ

1. A1 : AbR
2. Ab : AbH

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด โปรแกรมแบบรายการ สำหรับ Turing machine ดังนี้

1. $Q_0 1$: $Q_1 1R$
2. $Q_1 1$: $Q_0 1R$
3. $Q_0 b$: Q_0 "EVEN"H
4. $Q_1 b$: Q_1"Odd"H

เครื่องจักรเริ่มที่สถานะ Q_0 โดยอ่านคำที่ 1 ที่อยู่ซ้ายสุด



จงอธิบายการทำงานของเครื่องจักรนี้

<u>วิธีทำ</u> เครื่องจักรมี 2 สถานะ Q_0 และ Q_1

มีสองค่าสัญลักษณ์ที่ใส่เข้ามา คือ 1 และ 0

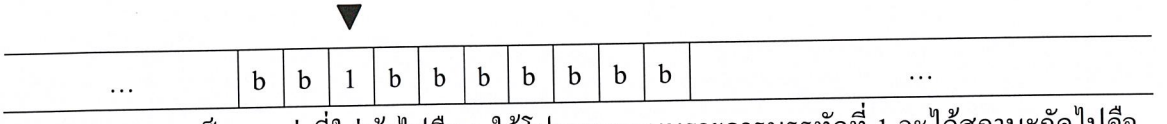
มีสามค่าสัญลักษณ์ที่จะแสดงผล คือ 1 , “Even” ,”Odd”

หลังจากที่เครื่องจักรพิมพ์ “Even” หรือ “Odd” แล้วเครื่องจะหยุด พิจารณากรณีต่างๆดังนี้

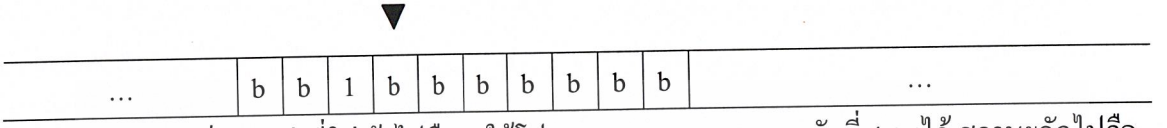
กรณีที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

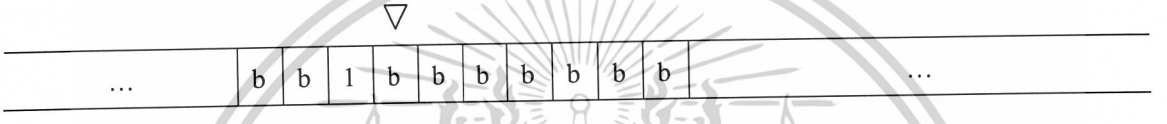
บน เทปมี 1 เขียนอยู่หนึ่งตัว



สถานะเป็น Q_0 ค่าที่ใส่เข้าไปคือ 1 ใช้โปรแกรมแบบรายการบรรทัดที่ 1 จะได้สถานะถัดไปคือ Q_1 ค่าที่จะแสดงคือ 1 และเคลื่อนไปทางขวา

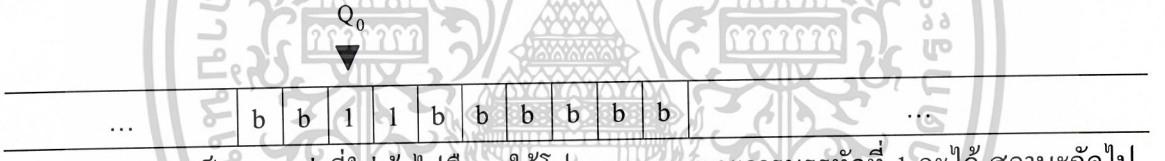


สถานะเป็น Q_1 ค่าที่ใส่เข้าไปคือ b ใช้โปรแกรมแบบรายการบรรทัดที่ 4 จะได้ สถานะถัดไปคือ Q_1 ค่าที่แสดงออกมาเป็น “Odd” แล้วหยุดการทำงาน

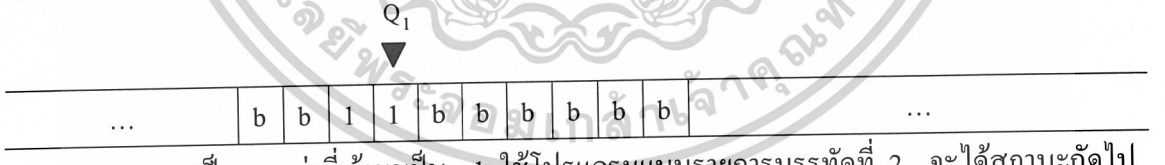


กรณีที่ 2

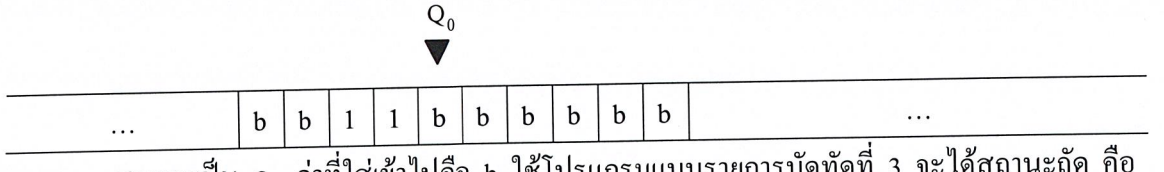
บนเทปมีค่า 1 อยู่ 2 ตัว



สถานะเป็น Q_0 ค่าที่ใส่เข้าไปคือ 1 ใช้โปรแกรมแบบรายการบรรทัดที่ 1 จะได้ สถานะถัดไป คือ Q_1 ค่าที่แสดงออกมาเป็น 1 และเคลื่อนไปทางขวา

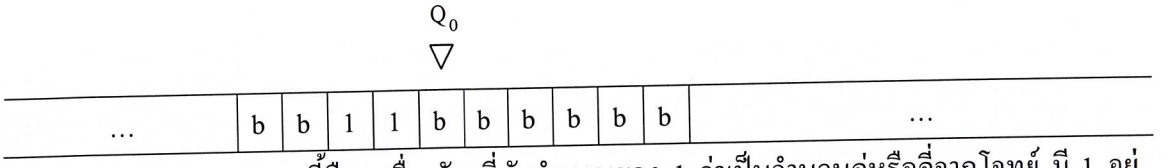


สถานะเป็น Q_1 ค่าที่เข้ามาเป็น 1 ใช้โปรแกรมแบบรายการบรรทัดที่ 2 จะได้สถานะถัดไป เป็น Q_0 ค่าที่แสดงออกเป็น 1 และเคลื่อนไปทางขวา



สถานะเป็น Q_0 ค่าที่ใส่เข้าไปคือ b ใช้โปรแกรมแบบรายการบัดทัดที่ 3 จะได้สถานะถัด คือ Q_0 ค่าที่แสดงออกมาเป็น “Even” แล้วหยุดการทำงาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Turing machine นี้คือ เครื่องจักรที่นับจำนวนของ 1 ว่าเป็นจำนวนคู่หรือคี่จากโจทย์ มี 1 อยู่ทั้งหมด 5 ตัวเพราะฉะนั้นสุดท้ายจะได้ค่า “Odd”

<u>ตัวอย่าง</u> จงออกแบบ Turing machine เมื่อกำหนดเทป ที่มีข้อมูลที่เป็น 1 อยู่ 1 ตัวจงหาข้อมูลที่เป็น 1 นี้ และเมื่ออ่าน 1 ขึ้นมาแล้วให้หัวเทปหยุด ณ ช่องที่มีสัญลักษณ์1

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ไม่ได้กำหนดว่า 1 อยู่ทางซ้าย หรือ ทางขวาของหัวเทป

ดังนั้นการค้นหาต้องไปทางซ้ายก่อน ถ้าไม่พบก็ต้องกลับมาที่เดิมแล้วไปทางขวา ตารางใดถูกค้นหาไปแล้วให้ทำเครื่องหมาย x ไว้ลงไป

Turing machine มี 2 สถานะ คือ

สถานะ A ค้นไปทางซ้าย ; L สถานะ B ค้นไปทางขวา ; R

ถ้าพบ ช่องว่าง ให้เปลี่ยนทิศทางการค้นหาและทำเครื่องหมาย x ลงในตาราง

1. Ab : BXR
2. Bb : AXL

สำหรับตารางที่ทำเครื่องหมายแล้วให้เลื่อนไปค้นหาตารางต่อไปที่ยังไม่ได้ทำเครื่องหมายในทิศทางเดิม

3. AX : AXL
4. BX : BXR

ถ้าพบตารางที่มี 1 ก็จะหยุด

5. A1 : A1H
6. B1 : B1H

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11 (ระบบเชิงพีชคณิต)Algebraic systems

นิยาม ถ้า A และ B เป็น set แล้ว intersection ของ A และ B แทนด้วย $A \cap B$ คือเซตซึ่งสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน A และ B ทั้งสองเซต

นิยาม ถ้า A และ B เป็น set แล้ว union ของ A และ B แทนด้วย $A \cap B$ คือเซตซึ่งสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน A หรือ B หรือ อยู่ในทั้งสองเซต

ตัวอย่าง ถ้า $A = \{1, \infty, 10, r, 37\pi\}$ และ $B = \{-1, 1, -3, s, r, 4/3\}$ แล้ว

$$A \cap B = \{1, r\}$$

$$A \cup B = \{-1, 1, -3, 10, 4/3, 37\pi, r, s, \infty\}$$

นิยาม set T จะเรียกว่า subset ของ set S ถ้าทุกๆสมาชิกของ T เป็นสมาชิกของ S เขียนแทนด้วย $T \subseteq S$ หรือ $S \supseteq T$

empty set แทนด้วย ϕ คือเซตที่ไม่มีสมาชิกและจะเป็น subset ของทุกเซต

ถ้า $x \in S$ แล้ว subset ของ S ที่มีสมาชิกเป็น x แทนด้วย $\{x\}$ ในความเป็นจริง $\{x\} \subseteq S$ และ $x \in S$ นั้น equivalent กัน

set ใดๆ S จะเป็น subset กับตัวเอง

subset ของ set S ซึ่งไม่ใช่ ϕ หรือ S จะเรียกว่า proper subset ของ S ถ้า S ประกอบด้วย T โดย $T \neq S$ จะแทนด้วย $S \subset T$

นิยาม binary operation จาก S ไป T คือ function จากคู่อันดับ (s_1, s_2) ของสมาชิกใน S ไป T ถ้า T = S binary operation จะเรียกว่า closed

ตัวอย่าง การบวกเป็น closed binary operation บน Z^+ โดย $Z^+ = \{1,2,3,\ldots\}$ = จำนวนเต็มบวกทั้งหมด เนื่องจาก ผลบวกของสองจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง การลบไม่เป็น closed binary operation บน Z^+ ถึงแม้ว่าทั้ง 5 และ 7 อยู่ใน Z^+ แต่ 5-7 = -2 ซึ่ง –2 นี้ ไม่ใช่จำนวนบวก ไม่อยู่ใน Z^+

ตัวอย่าง ก ารลบเป็น closed binary operation บน Z ซึ่ง $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ = จำนวนเต็มทั้งหมด เนื่องจาก ผลต่างของสองจำนวนเต็ม เป็นจำนวนเต็ม

Z^+	=	$\{1,2,3,\ldots\}$	=	all positive integers
Z	=	$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	=	all integers
Q	=	$\{a/b \mid a,b \in Z, b \neq 0\}$	=	all the rational numbers
Q^+	=	all positive rational numbers		
R	=	the set of all real numbers		
R^+	=	all positive real numbers		

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง การคูณเป็น closed binary operation บนเซตใดๆ Z^+,Z,Q,Q^+,R^+ และ R

นิยาม ให้ S เป็น set และ $\bullet$ แทน binary operation บน S แล้ว $\bullet$ เป็น associative ถ้าสำหรับทุก $x,y,z \in S$

$$(x \bullet y) \bullet z \quad = \quad x \bullet (y \bullet z)$$

ถ้า $\bullet$ เป็น associative บน S แล้ว สามารถเขียนนิพจน์เป็น $x \bullet y \bullet z$ โดยไม่ต้องมีวงเล็บก็ได้

นิยาม ให้ S เป็น set และ $\bullet$ แทน binary operation บน S แล้ว $\bullet$ เป็น commutative ถ้าสำหรับทุก $x,y \in S$

$$x \bullet y \quad = \quad y \bullet x$$

นิยาม ให้ S เป็น set และ $\bullet$ แทน binary operation บน S แล้ว $i \in S$ เป็น identity element ถ้าสำหรับทุก $x \in S$

$$x \bullet i \quad = \quad i \bullet x \quad = \quad x$$

ตัวอย่าง การลบบน Z ไม่เป็น commutative เนื่องจาก 3-1 ไม่เท่ากับ 1-3 และไม่เป็น associative เนื่องจาก (7-3)-1 ไม่เท่ากับ 7-(3-1)

ตัวอย่าง การบวกเป็น commutative เนื่องจาก a+b เท่ากับ b+a และเป็น associative เนื่องจาก (a+b)+c เท่ากับ a+(b+c) บน Z หรือ Q หรือ R

ตัวอย่าง กำหนดเซต R = all real numbers

นิยาม $\bullet$ เป็น operator โดย $a \bullet b = 5ab$

แล้ว $\bullet$ เป็น associative เนื่องจาก

$(a \bullet b) \bullet c = (5ab) \bullet c = 5(5ab)c = 25abc$

และ $a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (5bc) = 5a(5bc) = 25abc$

และ $\bullet$ เป็น commutative เนื่องจาก

$a \bullet b = 5ab = 5ba = b \bullet a$

ตัวอย่าง กำหนดเซต R และให้ $a*b = a^3 + b^3$

แล้ว $a*b = a^3 + b^3 = b^3 + a^3 = b*a$ ดังนั้น * เป็น commutative

$a*(b*c) = a*(b^3 + c^3) = a^3+(b^3 + c^3)^3$ และ

$(a*b)*c = (a^3 + b^3)*c = (a^3 + b^3)^3+ c^3$

จะพบว่า $a*(b*c) \neq (a*b)*c$ ดังนั้น * ไม่เป็น associative

นิยาม $[S,\bullet]$ เป็น monoid ถ้า S เป็น nonempty set และ $\bullet$ เป็น binary operation บน S และถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

a) operation $\bullet$ เป็น associative

b) มี identity element $i \in S$ ซึ่ง

$x \bullet i = i \bullet x = x$ สำหรับทุก $x \in S$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม [S,•] เป็น semigroup ถ้า S เป็น nonempty set และ • เป็น binary operation บน S และ • เป็น associative

Semigroup [S,•] ซึ่ง • เป็น commutative เรียกว่า commutative semigroup

โดยทั่วไปแล้ว ทุกๆ structure ที่เป็น monoid จะเป็น semigroup ด้วย

ตัวอย่าง พิจารณา [{a,b,c},•] ซึ่ง • นิยามดังนี้

•	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

เป็น semigroup หรือไม่

วิธีทำ ถ้า • เป็น associative แล้ว [S,•] เป็น semigroup สำหรับ ทุก x,y,z ∈ {a,b,c}

x • y ∈ {a,b,c} และ y • z ∈ {a,b,c} แล้ว สามารถ แสดงว่า (x • y) • z = x • (y • z) โดย ตารางได้ดังนี้

x เป็นได้ 3 กรณี a หรือ b หรือ c

ในทำนองเดียวกัน y และ z ก็เป็นได้ 3 กรณีเช่นกัน ดังนั้น แบบที่แตกต่างกัน หรือ กรณีทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $3^3 = 27$

Set {a,b,c} เป็น closed set เมื่อเทียบกับ • เนื่องจากมีสมาชิกครบทุกตัวบนตาราง และสมาชิกบนตารางเป็น a,b หรือ c เท่านั้น

	x	y	z	a • (y • z)	(x • y) • z
1	a	a	a	a • a = a	a • a = a
2	a	a	b	a • a = a	a • b = a
3	a	a	c	a • a = a	a • c = a
4	a	b	a	a • b = a	a • a = a
5	a	b	b	a • b = a	a • b = a
6	a	b	c	a • b = a	a • c = a
7	a	c	a	a • c = a	a • a = a
8	a	c	b	a • c = a	a • b = a
9	a	c	c	a • c = a	a • c = a
10	b	a	a	b • a = b	b • a = b
11	b	a	b	b • a = b	b • b = b

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

12	b	a	c	$b \bullet a = b$	$b \bullet c = b$
13	b	b	a	$b \bullet b = b$	$b \bullet a = b$
14	b	b	b	$b \bullet b = b$	$b \bullet b = b$
15	b	b	c	$b \bullet b = b$	$b \bullet c = b$
16	b	c	a	$b \bullet c = b$	$b \bullet a = b$
17	b	c	b	$b \bullet c = b$	$b \bullet b = b$
18	b	c	c	$b \bullet c = b$	$b \bullet c = b$
19	c	a	a	$c \bullet a = c$	$c \bullet a = c$
20	c	a	b	$c \bullet a = c$	$c \bullet b = c$
21	c	a	c	$c \bullet a = c$	$c \bullet c = c$
22	c	b	a	$c \bullet b = c$	$c \bullet a = c$
23	c	b	b	$c \bullet b = c$	$c \bullet b = c$
24	c	b	c	$c \bullet b = c$	$c \bullet c = c$
25	c	c	a	$c \bullet c = c$	$c \bullet a = c$
26	c	c	b	$c \bullet c = c$	$c \bullet b = c$
27	c	c	c	$c \bullet c = c$	$c \bullet c = c$

ดังนั้น $[\{a,b,c\}, \bullet]$ เป็น semigroup

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา $[\{a,b,c\}, *]$ ซึ่ง $*$ นิยามดังนี้

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	b	a

เป็น semigroup หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> set {a,b,c} เป็น close set เมื่อเทียบกับ $*$ สำหรับ $x,y,z \in \{a,b,c\}$ ต้องการเสดงว่า $x*(y*z) = (x*y)*z$ โดย

$$x*(y*z) = b*(b*c)$$
$$= b*b$$
$$= a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $(x*y)*z = (b*b)*c$

$= a*c$

$= c$

จะพบว่า $x*(y*z) \neq (x*y)*z$ ดังนั้น $[\{a,b,c\},*]$ ไม่เป็น semtgroup

ตัวอย่าง พิจารณา set {a,b,c} ซึ่งมีสมาชิกเป็น letters 2 ตัว a และ b ต้องการหา word ที่สามารถ generate จาก {a,b}

นิยามของ word แบบ recusively คือ letter หรือ letter แล้วตามด้วย word ดังนั้นสมาชิกตัวแรกใน set จะเป็นสมาชิกตัวแรกใน word โดยสมาชิกของ word จะเริ่มด้วย one letter และ word จะยาวขึ้นเรื่อยๆ

a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,aba,abb,

baa,bba,bbb,aaaa,aaab,aaba,aabb,…

concatenation คือ การเชื่อม word 2 word โดยการนำตัวอักษรใน word ที่สองไปต่อท้ายตัวอักษรใน word แรก

concatenation ของ word 2 word ที่ใช้ letters ใน set{a,b} จะมีเฉพาะ letter a หรือ b เท่านั้น ดังนั้น word over set {a,b} is closed under concatenation

concatenation aabb และ abbaba คือ

(aabb)(abbaba) = aabbabbaba

(aba)[(aaba)(aabb)] = (aba)(aabaaabb)

= abaaabaaabb

[(aba)(aaba)](aabb) = (abaaaba)(aabb)

= abaaabaaabb

ดังนั้น set ของ words ซึ่ง generared จาก {a,b} ภายใต้ operation concatenation เป็น semigroup

ตัวอย่าง จงพิจารณา $[Z,*]$ ซึ่ง $*$ นิยามโดย $x*y = x+y-1$ เมื่อ $x,y \in Z$ เป็น monoid หรือไม่

วิธีทำ monoid ต้องแสดง associative และหา idenitiy พิจารณา

$(x*y)*z = (x+y-1)*z$

$= (x+y-1)+z-1$

$= x+y+z-2$

$= x-1+(y+z-1)$

$= x+(y+z-1)-1$

$= x+(y*z)-1$

$= x*(y*z)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น * เป็น associative

ต่อไปจะหา identity

$x * 1 = x+1-1 = x$

และ $1 * x = 1+x-1 = x$

จะได้ $x * 1 = 1 * x = x$

ดังนั้น 1 เป็น identity element

นั่นคือ [Z, *] เป็น monoid

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา[Z, •]ซึ่ง • นิยามโดย $x \bullet y = xy+1$ เมื่อ $x,y \in Z$ เป็น monoid หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> สำหรับสมาชิกใดๆ x ให้ y เป็น identity ของ x

นั่นคือ $x \bullet y = xy+1 = x$

และ $y \bullet x = yx+1 = x$

จะพบว่า $xy+1 = x$ จะได้ $xy = x-1$

$y = 1-1/x$

y ไม่ใช่จำนวนเต็ม

ดังนั้น [Z, •]ไม่เป็น monoid เนื่องจากไม่มี identity ของ •

<u>นิยาม</u> [S, •] เป็น group ถ้า S เป็น nonempty set และ • เป็น binary operation บน S และเงื่อนไขต่อไปนี้ เป็นจริง

a) Closure สำหรับ $a,b \in S$ แล้ว $a \bullet b \in S$ ด้วย

b) Associativity สำหรับ $a,b,c \in S$

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

c) Identity มี identity element $i \in S$ ซึ่ง

$x \bullet i = i \bullet x = x$

สำหรับทุก $x \in S$

ถ้า group operation เป็น addition + จะใช้ 0 เป็น identity : $a+0 = 0+a = a$

ถ้า group operation เป็น addition + จะใช้ 0 เป็น identity : $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

d) Inverse แต่ละ $x \in S$ มี inverse element x^{-1} ใน S ซึ่ง $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = i$

สำหรับ additive operation

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

inverse element ของ a คือ –a

สำหรับ multiplicative operation

$a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = i$

inverse element ของ a คือ a^{-1}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

group ที่มีสมาชิกจำนวนจำกัดเรียก finite group กรณีอื่นๆ เรียก infinite group

จำนวนของสมาชิกใน finite group เรียก order ของ group

group $[S, \bullet]$ ซึ่ง $\bullet$ เป็น commutative เรียก commutative group หรือ abelian group

ตัวอย่าง $[Z,+]$ เป็น group เนื่องจาก + เป็น associative และ closed บน Z

เนื่องจาก $0+x = x+0 = x$ ดังนั้น 0 เป็น identity ของ $[Z,+]$

นอกจากนี้ $x+(-x) = (-x)+x = 0$ ดังนั้น $x^{-1} = -x$

ตัวอย่าง $[Z^+,\bullet]$ เมื่อ $\bullet$ เป็น ordinary multiplication เป็น group หรือไม่

วิธีทำ $\bullet$ เป็น closed และ associative บน Z^+

เนื่องจาก $x\bullet 1 = 1\bullet x = x$ สำหรับ x ใดๆ ใน Z^+

ดังนั้น 1 เป็น identity

$5 \in Z^+$ inverse ของ 5 คือ 1/5 เนื่องจาก $5\bullet 1/5 = 1$ แต่ 1/5 ไม่อยู่ใน Z^+

ดังนั้น $[Z^+,\bullet]$ ไม่เป็น group

พิจารณา modular arithmetic จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้ $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

addition modulo 5 แทนด้วย $+_5$

addition modulo 5 บน Z_5 นิยามโดย

$$x +_5 y = r$$

เมื่อ r เป็นเศษที่เกิดจาก x+y ถูกหารด้วย 5

เช่น $1 +_5 2 = 3$

$3 +_5 4 = 2$

multiplication modulo 5 แทนด้วย $\bullet_5$

multiplication modulo 5 บน Z_5 นิยามโดย

$$x \bullet_5 y = r$$

เมื่อ r เป็นเศษที่เกิดจาก $x\bullet y$ ถูกหารด้วย 5

เช่น $2 \bullet_5 3 = 1$

$3 \bullet_5 4 = 2$

ตาราง modulo 5 addition และ modulo 5 multiplication แสดงดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11.1 Coding Theory

บทประยุกต์ของ group ที่น่าสนใจ คือ การเข้ารหัสข่าวสาร สำหรับการส่งข่าวสาร (encoding messages for transmission) โดยที่ message เป็น string ของ bit 0 หรือ 1 message จะเป็นสมาชิกใน B^m สำหรับบาง m

Error อยจเกิดขึ้นในการส่งข่าวสารได้ ถ้าส่งข่าวสารผ่านอุปกรณ์ ที่มีความบกพร่อง หรือมีการรบกวน (interfereuse)

เพื่อแก้ไข error นี้ รูปแบบที่ง่ายที่สุดจะใช้ certain reduntance coding schemes เพื่อ detect หรือ correct error ที่เกิดขึ้น

แทนที่จะส่งข่าวสารโดยตรง จะแทรกเครื่องเปลี่ยนรหัส (encoder) และเครื่องแปลงรหัสกลับ (decoder) ที่ปลายทั้งคู่ของเครื่องส่ง (sending) และเครื่องรับ (receiving)

กำหนด binary message $a \in B^m$ ตัวเปลี่ยนรหัสจะเปลี่ยน a เป็น binary string อีกชุดหนึ่ง $a' \in B^n$ แล้วส่งรหัสที่เปลี่ยนนี้ไป และตัวแปลรหัสกลับจะสร้าง message a คืนมา

2.11.2 Error – Detecting codes

สมมติต้องการส่ง message ที่เป็น single binary digit 1 หรือ 0 เราจะป้องกันความผิดพลาดได้อย่างไร วิธีหนึ่งที่จะทำได้คือ ส่งจ่าวสารมากกว่าหนึ่งครั้ง เช่น

message 0 อาจเปลี่ยนรหัสเป็น 000 และส่งรหัสนี้ไป

message 1 อาจเปลี่ยนรหัสเป็น 111 และส่งรหัสนี้ไป

รหัสที่มี 3-tuple ทั้งคู่นี้เป็น word ที่ถูกต้อง

code คือ 0 -> 000

1 -> 111

ในกรณีนี้ถ้าไม่มีความผิดพลาดในการส่ง เมื่อส่ง 0 จะได้รับ 0

สมมติว่ามี error ในการส่ง แทนที่จะได้รับ 000 เพื่อมา decode กลับได้รับ 001 แต่เนื่องจากใน code นี้มีเพียง 000 และ 111 เท่านั้น ดังนั้น word 001 จึงไม่ใช่คำที่ถูกต้อง นั่นคือมี transmission error

ถ้าได้รับ 011,101 หรือ 110 ก็เช่นเดียวกัน คำที่ได้รับเหล่านี้ไม่ใช่คำที่ถูกต้อง

โอกาสเดียวที่จะถูกหลอกได้คือ ได้รับ 111 เมื่อควรจะได้รับ 000 (หรือได้รับ 000 เมื่อควรจะได้รับ 111)

receive 101 มี error คำที่ถูกอาจจะเป็น 000 หรือ 111 ก็ได้ ถ้าเป็น 000 มี error 2 bit แต่ถ้าเป็น 111 มี error bit เดียว

เนื่องจากรหัสนี้สามารถจะ detect combination ของหนึ่งหรือลอง bit error จึงเรียกว่า double-error detecting code

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11.3 Error-Correcting Codes

สมมติว่าไม่ต้องการเพียงแค่ detect error แต่ต้องการ correct error ด้วย จะทำอย่างไร

จากตัวอย่างข้างต้น code คือ 0 -> 000

1 -> 111

เมื่อ receive 001 เพื่อนำมา decode รู้ทันทีว่ามี transmission error แต่ไม่รู้ว่าเป็น single หรือ double error

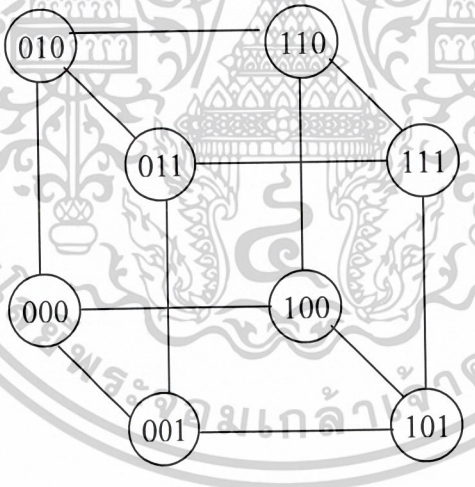
receive 001 มี error ถ้าคำที่ถูกเป็น 000 มี single error แต่ถ้าคำที่ถูกเป็น 111 มี double error

ถ้าสมมติว่ามี one error เกิดได้มากกว่า two error ดังนั้น receive 001 แล้วคำที่ถูกคือ 000 ซึ่งจะ decode เป็น 0 วิธีนี้คือลดความน่าจะเป็นของความผิดพลาดใน decoding decision เรียกว่า maximum likelihood estimation method

เมื่อใช้วิธีนี้กับ encoding scheme เราสามารถจะ correct single error แต่ incorrectly decode double error ชนิดของ code นี้คือ single-error correcting code

โดยวิธีนี้ decode จะแปล 3-tuple ที่ได้รับเป็น code word ที่เป็นไปได้ที่อยู่ใกล้ที่สุด

กราฟของ 3-tuple ที่เป็นไปได้ทั้งหมดแสดงดังรูป



รูปที่ 2.349

จุดยอดของกราฟแทน 3-tuple ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ด้าน 1 ด้านเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุด ถ้า code ที่สมนัยกับจุดยอดนั้นแตกต่างกันเพียง 1 พิกัด

จำนวนพิกัดที่แตกต่างกันใน 2 ชุดของ n-tuple เรียก hamming distance ระหว่าง n-tuple เช่น 110 และ 010 พิกัดแตกต่างกัน 1 พิกัด hamming distance คือ 1

000 และ 110 hamming distance คือ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

000 และ 111 hamming distance คือ 3

code 000 ถูกเชื่อมด้วย parh ที่มี length 1 ไปยัง code 100,010 และ 001 hamming distance ระหว่าง 000 และ code เหล่านี้ (100,010 และ 001) คือ 1

เนื่องจาก 100,010 และ 001 อยู่ใกล้ 000 มากที่สุด ดังนั้นทั้งสามคำนี้จะ decodes เป็น 000

hamming distance ระหว่าง 000 และ 111 คือ 3 ซึ่งเป็น code ที่อยู่ไกลที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ในระบบนี้

ในการออกแบบรหัสในระบบนี้ที่ดีคือ จะต้องหา subset ของ n-tuple code word อื่นๆมากๆ

2.11.4 Parity Check code

เลือกจำนวนเต็ม $n > m$ และกำหนด function $e : B^m \rightarrow B^n$

โดย function e เรียกว่า (m.n) encoding function คือการแทนทุกๆ word ใน B^m เป็น word ใน B^n

ถ้า $b \in B^m$ แล้ว e(b) เรียกว่า code word ที่แทน b โดยการเติม 0 หรือ 1 เพื่อจะ detect หรือ correct error ที่เกิดขึ้นใน transmission channel เช่น

encoding function $e : B^m \rightarrow B^{m+1}$ เรียกว่า parity (m,m+1) check code ถ้า

$b = b_1b_2b_3 \ldots b_m \in B^m$ นิยามโดย $e(b) = b_1b_2b_3 \ldots b_mb_{m+1}$

เมื่อ $b_{m+1} =$ 0 ถ้าจำนวน 1 ใน b เป็นจำนวนคู่

1 ถ้าจำนวน 1 ใน b เป็นจำนวนคี่

จะพบว่า b_{m+1} เป็น 0 ก็ต่อเมื่อ จำนวนของ 1 ใน b เป็นจำนวนคู่ นั่นคือทุกๆ code word e(b) จะมีจำนวนของ 1 เป็นจำนวนคู่ เรียก even parity check code

single error ในการส่ง code word คือการ receive word ที่มี จำนวนของ 1 เป็นจำนวนคี่

เมื่อ m = 3 จะได้ encoding function ดังนี้

e(000) = 0000

e(001) = 0011

e(010) = 0101

e(011) = 0110

e(100) = 1001

e(101) = 1010

e(110) = 1100

e(111) = 1111

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า b = 111 แล้วจะส่ง x = e(b) = 1111

- ถ้า receive x = 1101 ซึ่งจำนวนของ 1 เป็น 3 จะพบว่ามี error เกิดขึ้น
- ถ้า receive x = 1100 ซึ่งจำนวนของ 1 เป็น 2 จะไม่พบ error แต่จริงๆแล้วไม่ถูกต้อง

ทั้งนี้เพราะ encoding function ไม่สามารถจะ detect กรณี even number of error

ถึงแม้วิธีนี้จะมีปัญหาอยู่บ้านง แต่ก็เป็นวิธีที่ยังใช้กันอยู่ในปัจจุบัน

2.11.5 Group codes

group codes คือ code ซึ่ง m-tuple words มาจาก group เมื่อเทียบกับ operation $\oplus$ ซึ่งหมายถึง addition modulo 2 (หรือ exclusiveor นั่นเอง)

เมื่อ B = {0,1}

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

เป็น group ซึ่ง 1. close

2. associative

$(0 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0$

$0 \oplus (1 \oplus 1) = 0 \oplus 0 = 0$

3. $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$

identity คือ 0

4. $0 \oplus 0 = 0$

$1 \oplus 1 = 0$

inverse ของ 0 คือ 0 และของ 1 คือ 1

ถ้า $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ และ $x = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$

แล้ว $x + y = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, x_3 \oplus y_3, \ldots, x_n \oplus y_n)$

เช่น $101 \oplus 110 = 011$

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา (1,3) encoding function

$e : B \rightarrow B^3$ ถ้า $b = b_1 \in B$

$e(b) = e(b_1) = b_1 b_1 b_1$

นั่นคือ encoding function e จะเป็นการซ้ำแต่ละคำใน B 3 ครั้ง ดังนั้น code คือ

0 -> 000

1 -> 111

เป็น group code ซึ่ง identity คือ 000 เนื่องจาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$000 \oplus 000 = 000$

$111 \oplus 000 = 111$

inverse คือตัวเอง เนื่องจาก $000 \oplus 000 = 000$

$111 \oplus 111 = 000$

ถ้า b = 111 แล้ว e(011) = 011011011 เป็น code word สมมติว่ามี error ทำให้ code word 011011011 ได้รับเป็น 011111011 (ผิดไป 1 bit) ซึ่งไม่ใช่ code word ดังนั้น จะ detect error ได้

ให้ x,y เป็น word ใน B^m แล้ว Hamming distance $\delta(x,y)$ ระหว่าง x และ y คือ weight $|x \oplus y|$ของ $x \oplus y$ โดย weight ของ code word คือ จำนวนของ 1 ใน word นั้นหรือ distance ระหว่าง $x = x_1x_2x_3\ldots x_m$ และ $y = y_1y_2y_3\ldots y_m$ คือจำนวนของ x_i ซึ่ง $x_i \neq y_i$ หรือ จำนวนของตำแหน่งใน x และ y ที่แตกต่างกัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา distance ระหว่าง x และ y

x = 110110 , y = 000101

$x \oplus y = 110110 \oplus 000101 = 110011$

$|x \oplus y| = 4$

x = 001100 , y = 010110

x + y = 001100 + 010110 = 011010

$|x \oplus y| = 3$

minimum distance ของ group code คือ minimum weight ของ non zero code word ทั้งหมด

สามารถจะใช้ hamming distance ในการพิจารณาว่ามี error เท่าใดที่ code สามารถ detect และ correct

Properties of the distance function

ให้ x,y,z เป็นสมาชิกใน B^m แล้ว

a) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

b) $\delta(x,y) \geq 0$

c) $\delta(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

d) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

จะพิสูจน์เฉพาะ d) สำหรับ a และ b ใน B^m

$|a \oplus b| \leq |a| + |b|$

ถ้า $a \in B^m$ แล้ว a + a = 0 เป็น identity element ใน B^m ดังนั้น

$\delta(x,y) = |x \oplus y| = |x \oplus 0 \oplus y| = |x \oplus z \oplus z \oplus y|$

$\leq |x \oplus z| + |z \oplus y|$

$= \delta(x,z) + \delta(z,y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

minimum distance ของ encoding function

$e : B^m \rightarrow B^n$ คือ ค่าต่ำสุดของ distance ระหว่างคู่ของ code word ที่แตกต่างกัน นั่นคือ

$\min \{ \delta (e(x),e(y)) \mid x,y \in B^m \}$

Ex พิจารณา (2,5) encoding function e ซึ่ง

e(00) = 00000

e(10) = 00111

e(01) = 01110

e(11) = 11111

minimum distance คือ 2 ซึ่งหาได้จาก

$00000 \oplus 00111 = 00111 \Rightarrow 3$

$00000 \oplus 01110 = 01110 \Rightarrow 3$

$00000 \oplus 11111 = 11111 \Rightarrow 5$

$00111 \oplus 01110 = 01001 \Rightarrow 2$

$00111 \oplus 11111 = 11000 \Rightarrow 2$

$01110 \oplus 11111 = 10001 \Rightarrow 2$

(m,n) encoding function $e : B^m \rightarrow B^n$ สามารถ detect k error หรือน้อยกว่า ก็ต่อเมื่อ minimum distance มีค่าน้อยที่สุด k+1

สมมติ e เป็น (m.n) encoding function และ d เป็น maximum likelihood decoding function associated with e แล้ว (e,d) สามารถ correct k error หรือน้อยกว่า ก็ต่อเมื่อ minimum distance มีค่าน้อยที่สุด 2k+1

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ผ่านมา code 0 -> 000

1 -> 111

detect 2 error แต่ correct 1 error

minimum distance 000 + 111 = 111 => 3

จาก k+1 = 3 => k = 2

ดังนั้น code สามารถ detect 2 error

จาก 2k + 1 = 3 => k = (3-1)/2 = 1

ดังนั้น code สามารถ correct 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11.6 Decoding

สำหรับ code ใดๆ ปัญหา decoding คือ การหา code word ที่อยู่ใกล้ที่สุดใน n-tuple ที่ต้องการ decode

สำหรับ single error correcting code พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด code {000,111}

สมมติ receive 3-tuple 010

010 ⊕ 000 = 010 => weight 1

010 ⊕ 111 = 101 => weight 2

เลือก minimum weight 1 คือ 010 นำไป + กับ receive word 010 0twfh

010 ⊕ 010 = 000

ดังนั้น receive 010 จะ decode เป็น 000 ถ้า receive 3-tuple 110

110 ⊕ 000 = 110 => weight 2

110 ⊕ 111 = 001 => weight 1

110 ⊕ 001 = 111

ดังนั้น receive 110 จะ decode เป็น 111

กำหนด word เป็น 0 encode เป็น 000

word เป็น 1 encode เป็น 111

ถ้า receive 3-bit pattern ต่อไปนี้ 000,001,010,100 จะ decode เป็น code word 0

ถ้า receive 3-bit pattern ต่อไปนี้ 111,110,101,011 จะ decode เป็น code word 1

หรือ 0 -> 000 001 010 100 -> 0

1 -> 111 110 101 011 -> 1

ตัวอย่าง กำหนด code ต่อไปนี้ ใช้ encode 2-bit message

00 -> 00000

01 -> 01110

10 -> 10101

11 -> 11011

หา minimum distance

00000 ⊕ 01110 = 01110 => 3

00000 ⊕ 10101 = 10101 => 4

00000 ⊕ 11011 = 11011 => 4

01110 ⊕ 10101 = 11011 => 3

01110 ⊕ 11011 = 10101 => 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$10101 \oplus 11011 = 01110 \Rightarrow 3$

$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$

$2k + 1 = 3 \Rightarrow k = 1$

code นี้สามารถ detect 2 error และ correct 1 error เรียก 1 correcting code

ถ้า receive 00110

$00110 \oplus 00000 = 00110 \Rightarrow 2$

$00110 \oplus 01110 = 01000 \Rightarrow 1$

$00110 \oplus 10101 = 10011 \Rightarrow 3$

$00110 \oplus 11011 = 11101 \Rightarrow 4$

เลือก 01000

$00110 \oplus 01000 = 01110$ ซึ่งจะ decode เป็น 01

สามารถสร้าง decoding table เพื่อใช้ decode 5 bit pattern ที่ได้รับดังนี้

00 -> 00000 10000 01000 00100 00010 00001 -> 00

01 -> 01110 11110 00110 01010 01100 01111 -> 01

10 -> 10101 00101 11101 10001 10111 10100 -> 10

11 -> 11011 01011 10011 10111 11001 11010 -> 11

จากตารางมีข้อมูลอยู่ 24 5-bit pattern ซึ่งรูปแบบของ 5-bit pattern ที่แตกต่างกันคือ $2^3 = 32$ ชุด ขาดไป 8 word

00011

00111

01001

01101

10010

10110

11000

11100

ซึ่งเป็น double error หรือมากกว่า ไม่สามารถ correct ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.11.7 Crypotology

เนื่องจากคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทต่อการใช้งานในสังคมปัจจุบันมากขึ้น ข้อมูลข่าวสารที่เก็บอยู่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ หรือการส่งข้อมูลระหว่างคอมพิวเตอร์ เป็นเรื่องสำคัญที่บางครั้งจะต้องปกปิดข้อมูลเป็นความลับ

coding และ decoding ข้อมูลข่าวสารที่ต้องการปกปิดเป็นความลับ เรียกว่า crypotology

การเข้ารหัสลับ (encryption) เป็นวิธีการป้องกันข้อมูลแบบหนึ่งที่มีการแปลงเปลี่ยนข้อมูลเดิมเป็นข้อมูลชุดใหม่ ซึ่งข้อมูลชุดใหม่นี้จะยากต่อการตีความสำหรับบุคคลธรรมดาทั่วไป ผู้ทำการเข้ารหัสลับจะเป็นผู้ทำการถอดรหัส (decryption) เปลี่ยนข้อมูลเข้ารหัสไปเป็นข้อมูลเดิมปรกติ บุคคลที่ทำหน้าที่เข้ารหัสลับและทำการถอดรหัสลับจะเรียกว่า cryptographter แต่บุคคลภายนอกที่พยายามจะแกะเข้าไปถอดรหัสลับโดยไม่ได้รับอนุญาตจะเรียกว่า cryptanalysis

ในการส่งข้อมูลข่าวสารจากผู้ส่งไปตามสายส่ง เพื่อไปยังผู้รับหากมีบุคคลภายนอกมาทำการขัดขวางหรือทำการโจรกรรมข้อมูลข่าวสารนั้น สามารถทำได้หลายวิธี

1. interruption : การขัดจังหวะตัดขาดข้อมูลเพื่อไม่ให้ข้อมูลไปถึงผู้รับ เช่น การตัดสายส่ง
2. interception : การสกัดดักข้อมูลขโมยดูหรือแอบฟังข้อมูลข่าวสารนั้น
3. modification : การดัดแปลงข้อมูลยึดและแปรเปลี่ยนข้อมูลข่าวสารนั้น
4. fabrication : การสอดแทรกข้อมูลเสมือนมาจากผู้ส่ง

ข้อมูลข่าวสารปกติ (plain text) เขียนย่อว่า p จะเป็นการจัดเรียงต่อกันของตัวอักษรต่างๆ $P = [p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n]$ และข้อมูลที่ผ่านการเข้ารหัสลับ (cipher text) จะเขียนได้เป็น $C = [c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n]$ ขั้นตอนการเข้ารหัสลับก็คือการแปลงระหว่างข้อมูลปกติไปเป็นข้อมูลเข้ารหัสลับ เขียนแทนด้วยสมการได้เป็น $C = E(p)$ ขณะเดียวกันขั้นตอนการถอดรหัสลับจะเขียนเป็นสมการได้โดย $P = D(c)$ และระบบการสร้างรหัสลับ จะเขียนเป็นสมการรวมได้เป็น $P = D(E(p))$

การเข้ารหัสลับแบบแทนที่อย่างง่าย

การเข้ารหัสลับแบบแทนที่อย่างง่าย จะเป็นการใช้ตารางเพื่อแทนที่ตัวอักษรตัวอื่น บางครั้งจะเรียกว่าการเข้ารหัสลับแบบตัวอักษรเดียว (mouoalphabetic cipher) ตัวอย่างเช่น การเข้ารหัสลับแบบซีซาร์ (Caesar cipher) ตามชื่อของ จูเลียต ซีซาร์ ที่เริ่มคิดการเข้ารหัสลับด้วยการแปลงตัวอักศรเลื่อนไปอีกเป็นจำนวนตำแหน่งที่คงที่ซีซาร์ใช้การเลื่อนไปอีก 3 ตำแหน่ง อาจเขียนสมการได้เป็น

$$C_i = E(p_i) = p_i + 3$$

โดย C_i เป็นตัวอักษรข้อมูลเข้ารหัสลับ

p_i เป็นตัวอักษรข้อมูลเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอักศรข้อมูลเดิม : ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

ตัวอักศรข้อมูลเข้ารหัสลับ : defghijklmnopqrstuvwxyzabc

ข่าวสาร : MICROCOMPUTER MAGAZINE

เมื่อเข้ารหัสจะได้ : plfurfrpsxwhu pdjdclqh

ในรูปทั่วไปของรหัสนี้คือ

$$C_i = E(p_i) = p_i + s$$

เมื่อ s เป็นจำนวนตำแหน่งที่จะเลื่อน ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม และ $1 \leq s \leq 26$

การเข้ารหัสลับแบบแทนที่ตัวอักษรเดียว

วิธีนี้จะจัดตำแหน่งของตัวอักษรจาก A ถึง Z โดยจะเริ่มจาก 0 ที่ A ไปถึง 25 ที่ Z

0 12 25

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

กำหนดขั้นตอนการแทนที่ด้วยฟังก์ชัน

$$\pi(i) = (3*i) \bmod 26$$

ถ้าต้องการหาว่า ตัวอักษร M จะแทนด้วยตัวอักษรใดจะเริ่มด้วยการ หาว่า M อยู่ที่ตำแหน่งที่เท่าไร ในที่นี้ตำแหน่งของ M คือ 12 ดังนั้น i = 12

$$\pi(12) = (3*12) \bmod 26$$
$$= 36 \bmod 26$$
$$= 10$$

ได้ผลลัพธ์เป็น 10 ต่อมากลับไปดูว่าตำแหน่งที่ 10 คือ ตัว k ดังนั้น จะแทน M ด้วย k

0 25

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

r d g j m p s v y b e h k n q t w z c f i l o r u x

การเข้ารหัสลับแบบการแทนที่หลายตัวอักษร

ใช้ขั้นตอนการเข้ารหัสลับสองชุดแยกจากกัน เช่น ชุดแรกเป็นการเข้ารหัสลับที่ตำแกน่งคี่ของข้อมูลปกติเดิม และชุดที่สองเป็นการเข้ารหัสลับที่ตำแหน่งคู่ของข้อมูลปกติเดิม

กำหนด $\pi_1(a) = (3*a) \bmod 26$

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

a d g h m p s v y b e h k n q t w z c f i l o r u x

กำหนด $\pi_2(a) = ((5*a)+13) \bmod 26$

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

n s x c h m r w b g l q v a f k p u z e g o t y d i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ใช้การเข้ารหัสลับที่ตำแหน่งคี่ด้วย $\pi_1(a)$

และการเข้ารหัสลับที่ตำแหน่งคู่ด้วย $\pi_2(a)$

ข้อมูลเดิม TREATY IMPOSSIBLE

ข้อมูลเข้ารหัส f umnf d yv t f cz ys h h

การเข้ารหัสลับแบบการแทนที่ที่มีกุญแจมาช่วยกำหนดขั้นตอน

โดยการเติมคำว่า key ลงไปก่อน แล้วตามด้วยการเตอมอักษรอื่นๆ

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

k e y a b c d f g h i j l mno p q r s t u v w x z

นอกจากการเข้ารหัสที่กล่าวมาแล้ว ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการเข้ารหัสและถอดรหัสที่ใช้ความรู้ในเรื่อง เมทริกซ์ดังนี้

- กำหนดกฎซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตของสัญลักษณ์ (ตัวอักษรและช่องว่าง) กับเซตของจำนวนเต็ม
- Nonsingular matrix A

โดยทั่วไปอาจใช้เลขจำนวนเต็มบวก 27 ตัวแรกแทนตัวอักษรและช่องว่าง (หรือสัญลักษณ์แสดงการแบ่งคำ)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

space a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

แล้วตัวเลขที่สมนัยกับข้อความ

SEND THE DOCUMENT TODAY

คือ 19 5 14 4 0 20 8 5 0 4 15 3 21 13 5 14 20 0 20 15 4 1 25

ผู้เข้ารหัสต้องการเข้ารหัสข้อความนี้โดย nonsingular matrix A และผู้ที่รับข้อความนี้ต้องถอดรหัส โดย (unique) matrix A^{-1}

จากข้อมูลตัวเลข 23 ตัว จะนำมาเขียนเป็นเมทริกซ์ขนาด 3x8 ดังนี้ (ข้อมูลมี 23 ตัว สมาชิกของเมทริกซ์ขนาด 3x8 มี 24 ตัว ดังนั้นเติม 0 เข้าไปข้างท้าย)

$$n = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

จากตัวเลขทั้ง 23 ตัวที่ได้ นำมาเขียนเป็นเมทริกซ์ M ขนาด m x n ดังนั้น M เป็นเมทริกซ์ของข้อมูล เนื่องจากไม่มีเลขจำนวนเต็มสองตัวใดๆ คูณกันได้ 23 ดังนั้นต้องพิจารณาเลขจำนวนเต็มบวกตัวต่อไปคือ 24 โดย

24 $= 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

= 12 x 2 = 8 x 3 = 6 x 4

จะเลือก M ขนาดใดให้พิจารณาจากเมทริกซ์เข้ารหัส A โดยต้องเลือกหรือสร้างให้มีสมบัติดังนี้

- A เป็น nonsingular
- A มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น
- A^{-1}มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น

ดังนั้น ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด n x n ถ้า det A $\neq 0$ แล้ว

A^{-1} = (1/det A) adj A

กรณี 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = a_{22}$, $c_{12} = a_{21}$, $c_{21} = a_{12}$, $c_{22} = a_{11}$

$$\text{adjA} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

กรณี 3 x 3 nonsingular matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, c_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, c_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

และต่อ ๆ ไป หลังจากหา adj A แล้ว

ถ้า A มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มแล้ว cofactor c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22} เป็นจำนวนเต็มด้วย

เพื่อที่ A^{-1} จะมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม ต้องเลือก A เพื่อให้ A มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มซึ่ง det A = ±1

เลือก

$$\text{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

det A = (-1)(3)(5)-(-1)(4)(4)-(0)(2)(5)+(0)(4)(2)+(-1)(2)(4)-(-1)(3)(2)

= -15+16-8+6 = -1

$$c_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-1, c_{12}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2, c_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=2$$

$$c_{21}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=4, c_{22}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-3, c_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=3, c_{32}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2, c_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}+(-1) & -(2) & +(2)\\ -(4) & +(-3) & -(-4)\\ +(3) & -(-2) & +(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ -2 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

ให้ B เป็นเมทริกซ์เข้ารหัส โดย

B = AM

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5\\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14\\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5\\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52\\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66\end{bmatrix}$$

แล้วข้อมูลที่เข้ารหัสแล้ว และจะส่งไปคือ

-39 -5 -24 -19 -4 -21 -33 -5 118 22 153 77 79 83 131 52 138 26 188 95 104 97 161 66

เมื่อได้รับข้อมูลชุดนี้ ต้องนำมาเขียนเป็นเมทริกซ์ B จาก AM = B แล้ว $M = A^{-1}B$

$$M=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ -2 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5\\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52\\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5\\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14\\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

19 5 14 4 0 20 8 5 0 4 15 3 21 13 5 14 20 0 20 15 4 1 25 0

SEND_THE_DOCUMENT_TODAY_

นอกจากการจัดเมทริกซ์ M ขนาด 3 x 8 แบบแถวดังกล่าวมาแล้ว สามารถจัด M เป็นแบบหลักดังนี้

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 & 4 & 21 & 14 & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & 13 & 20 & 15 & 25 \\ 14 & 20 & 0 & 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้แทนที่จะส่งข้อมูลที่เข้ารหัสเป็นตัวเลขแล้ว อาจส่งเป็นตัวอักษร จากเมทริกซ์ B เปลี่ยนเป็น B' โดย integer modulo 27

จาก $M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 3 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

แล้ว $B = \begin{bmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{bmatrix}$

ได้ $B' = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 21 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 23 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

15 22 20 8 23 6 21 22 10 22 18 23 25 2 23 25 3 26 26 14 23 16 26

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL

ในการถอดรหัสสามารถทำได้โดย

คำนวณ แล้วเขียนผลที่ได้โดย modulo 27

interger modulo 27

สำหรับจำนวนเต็ม a และ b เขียน a = b(mod 27) ถ้า b เป็นเศษที่เกิดจากการหาร a ด้วย 27 โดย $0 \leq b < 27$ เช่น

33 = 6 (mod 27) 28 = 1 (mod 27) 27 = 0 (mod 27)

สำหรับจำนวนเต็มลบ

จาก 27 = 0 (mod 27)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $27 = 25 + 2 = 0 \pmod{27}$

แล้ว $-25 = 2 \pmod{27}$ และ $-2 = 25 \pmod{27}$

จาก $54 = 0 \pmod{27}$

และ $54 = 30 + 24 = 0 \pmod{27}$

แล้ว $-30 = 24 \pmod{27}$

แต่ $-24 \neq 30 \pmod{27}$ เพราะ $30 > 27$

จาก $27 = 24 + 3 = 0 \pmod{27}$

แล้ว $-24 = 3 \pmod{27}$ และ $-3 = 24 \pmod{27}$

การใช้ตัวเลขจำนวนเต็มบวก 27 ตัวแรก แทนตัวอักษรและช่องว่างนี้มี 27! แบบที่แตกต่างกัน

ถ้าเลือก A ขนาด 2 x 2 แล้ว M ต้องมีขนาด 2 x 12 เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } M = \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 2 & 0 & 24 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{แล้ว } B = AM = \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ใช้ } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{แล้ว } M = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

19 5 14 4 0 20 8 5 0 4 15 3 21 13 5 14 20 0 20 15 4 1 25 0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่3
การออกแบบระบบและหลักการที่เกี่ยวข้อง

3.1 การออกแบบระบบ

3.1.1 ออกแบบระบบเป็น 6 ส่วนประกอบด้วย

3.1.1.1 Home page

3.1.1.2 Learning page

3.1.1.3 Test page

3.1.1.4 Webboard page

3.1.1.5 Guest book page

3.1.1.6 Download page

3.1.2 ศึกษาความรู้เกี่ยวกับโปรแกรม macromedia Flash MX 2004 และการเขียน Home page ด้วยภาษา HTML

3.1.3 ทำการทดสอบและพัฒนา Home page ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

3.2 ระบบงาน

การทำงานของระบบนั้นแบ่งออกเป็น 6 ส่วน

3.2.1 Home page หน้า Home page ประกอบด้วย

3.2.1.1 Learning สามารถ link ไปยังหน้า Learning page ได้

3.2.1.2 Download สามารถ link ไปยังหน้า Download page ได้

3.2.1.3 Webboard สามารถ link ไปยังหน้า Webboard page ได้

3.2.1.4 Guest book สามารถ link ไปยังหน้า Guest book page ได้

3.2.1.5 About เป็นหน้า Home page ที่แสดงข้อมูลเกี่ยวกับสารสนเทศกับ e-learning โดยแสดงเป็น text

3.2.1.6 Kmit'l เราสามารถ link ไปยัง www.kmitl.ac.th เพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติมได้เกี่ยวกับ web ได้

3.2.1.7 Hotmail เราสามารถ link ไปยัง www.hotmail.com เพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติมได้เกี่ยวกับ web ได้

3.2.1.8 Google เราสามารถ link ไปยัง www.google.co.th เพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติมได้เกี่ยวกับ web ได้

3.2.1.9 Sanook เราสามารถ link ไปยัง www.sanook.comเพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติมได้เกี่ยวกับ web ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1.10 Pramool เราสามารถ link ไปยัง www.pramool.com เพื่อหาข้อมูลเพิ่มเติมได้เกี่ยวกับ web ได้

3.2.1.11 Learning page หน้า Home page ที่แสดงบทเรียนทั้ง10 บท ซึ่งประกอบด้วย

- บทที่1 Relations จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่2 Graph จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่3 Graph coloring จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่4 Trees จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่5 Tree traversal จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่ 6 Shortest path problemsจะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่7 Network flows จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่8 Combinative circle จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่9 Finite state machine จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- บทที่10 Algebraic system จะแสดงการเรียนการสอนโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

3.2.2 Test page

เป็นหน้า Home page ที่แสดงแบบฝึกหัดทั้ง10บทรวมทั้งแบบทดสอบประจำเทอม ประกอบด้วย

- แบบฝึกหัดบทที่1 Relations พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน
- แบบฝึกหัดบทที่2 Graph พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program Flash mx 2004 เป็นสื่อการสอน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- แบบฝึกหัดบทที่3 Graph coloring พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่4 Trees พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program Flash mx 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่5 Tree traversal พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่ 6 Shortest path problemsพร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่7 Network flows พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่8 Combinative circle พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่9 Finite state machine พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- แบบฝึกหัดบทที่10 Algebraic system พร้อมเฉลยจะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

แบบฝึกหัดประจำเทอม ประกอบด้วย

- midteam จะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

- Final จะแสดงโดยใช้ program macromedia Flash MX 2004 เป็นสื่อการสอน

3.2.3 Webboard page

เป็นหน้าที่ผู้ใช้สามารถเข้าไป ถาม-ตอบและสนทนา ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดีสครีตและปัญหาคณิตศาสตร์ทั่วไป

3.2.4 Guest book page

หน้าที่ให้ผู้ใช้สามารถให้คำเสนอแนะหรือติชมเกี่ยวกับ website

3.2.6 Download page

ผู้เรียนสามารถเข้าไป download เนื้อหาต่างๆออกมาได้

3.3 แผนงานและการพัฒนาระบบ

3.3.1 รวมรวบเนื้อหาและจัดพิมพ์

3.3.2 นำเนื้อหาที่จัดพิมพ์แล้วไปพัฒนาโดยโปรแกรม macromedia Flash MX 2004

3.3.3 ออกแบบหน้าจอการ link ของ website

3.3.4 พัฒนาและเพิ่มเติมรูปแบบใน website ให้สามารถใช้งานได้อย่างสะดวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

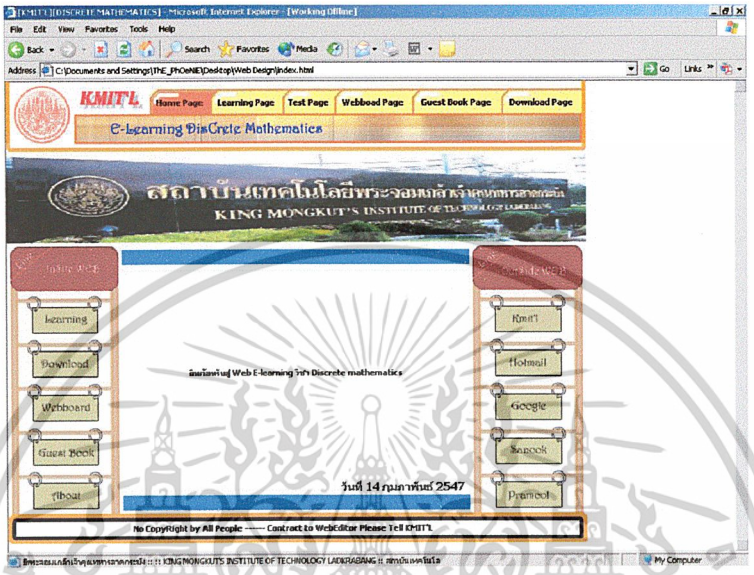
3.3.5 ทำการเก็บข้อมูลและข้อบกพร่องต่างๆทั้งจากผู้ใช้และผู้ออกแบบเพื่อนำมาพัฒนาให้ดีขึ้นต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่4

ผลการทดลอง

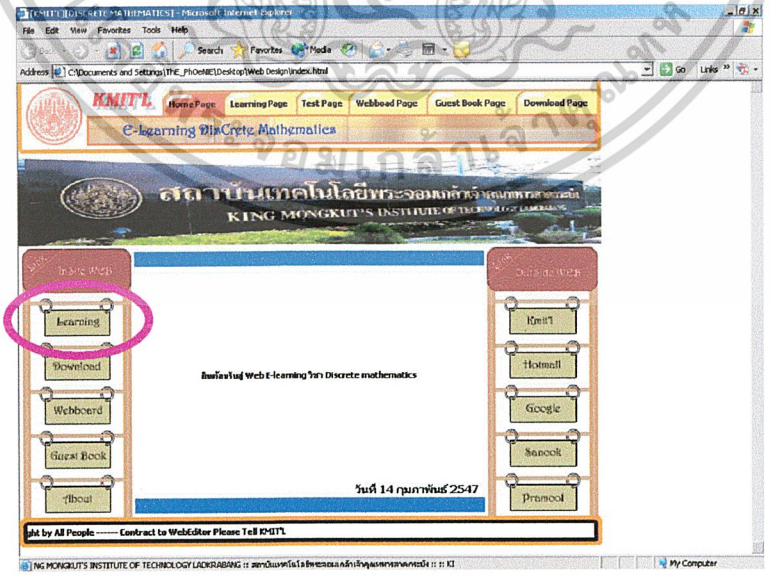
4.1 หน้า Home page



รูป 4.1 แสดงหน้าจอแรกของหน้า web

- เมื่อเข้า web จะแสดงหน้าจอของ Home page ดังรูป 4.1

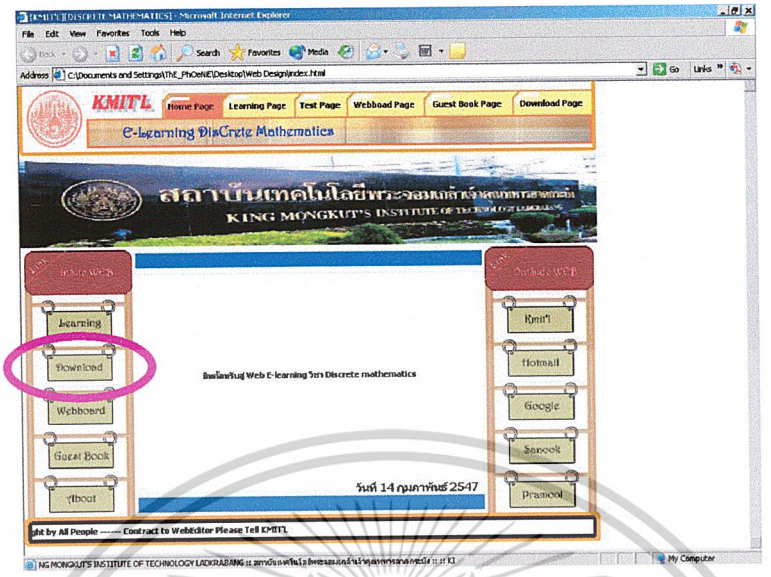
4.1.1 ปุ่ม Learning ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อหาหน้า learning page ได้



รูป 4.2 แสดงหน้าจอรูป Learning

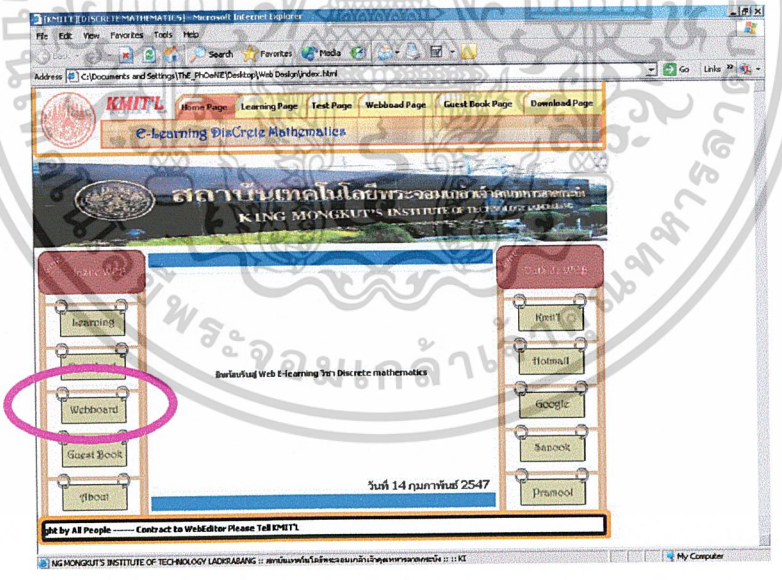
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 ปุ่ม Download ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อหาหน้า Download page ได้



รูป 4.3 แสดงหน้าจอรูป Download

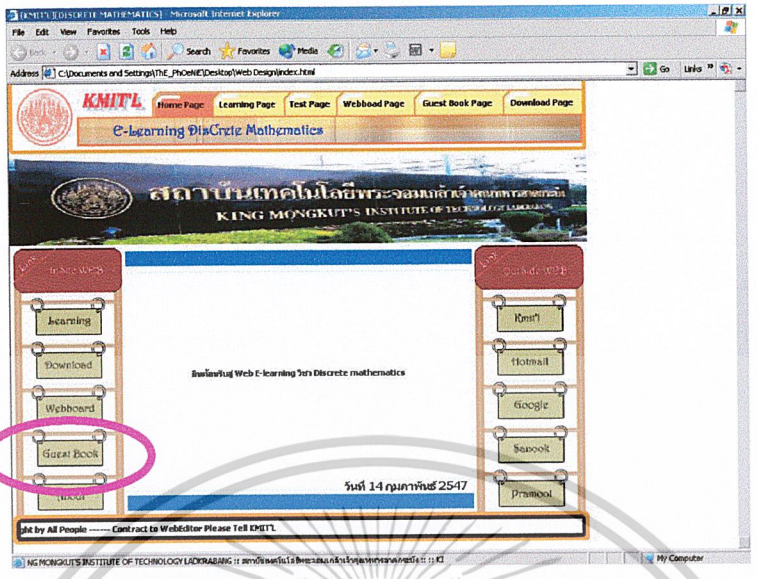
4.1.3 ปุ่ม Webboard ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อหาหน้า Webboard page ได้



รูป 4.4 แสดงหน้าจอรูป Webboard

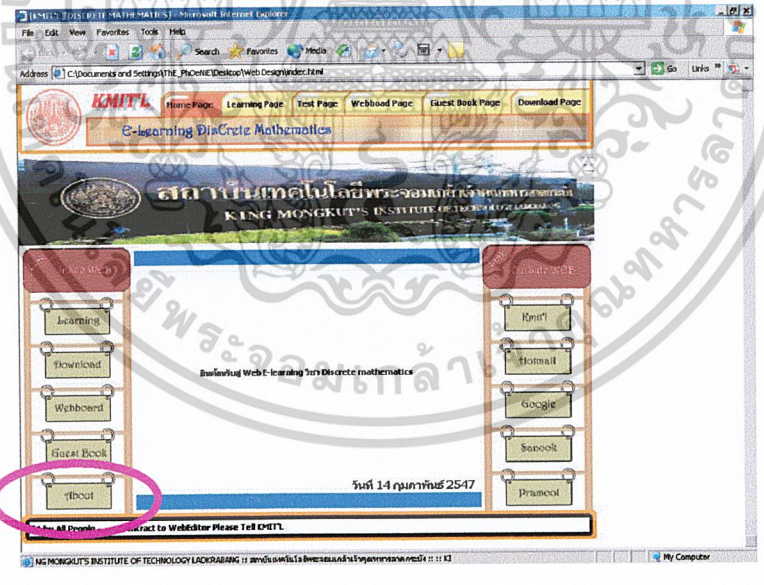
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4 ปุ่ม Guest Book ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อหาหน้า Guest Book Page ได้



รูป 4.5 แสดงหน้าจอรูปGuest book

4.1.5 ปุ่ม About ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อดูข้อมูลเกี่ยวกับสารสนเทศและ e-learning ได้

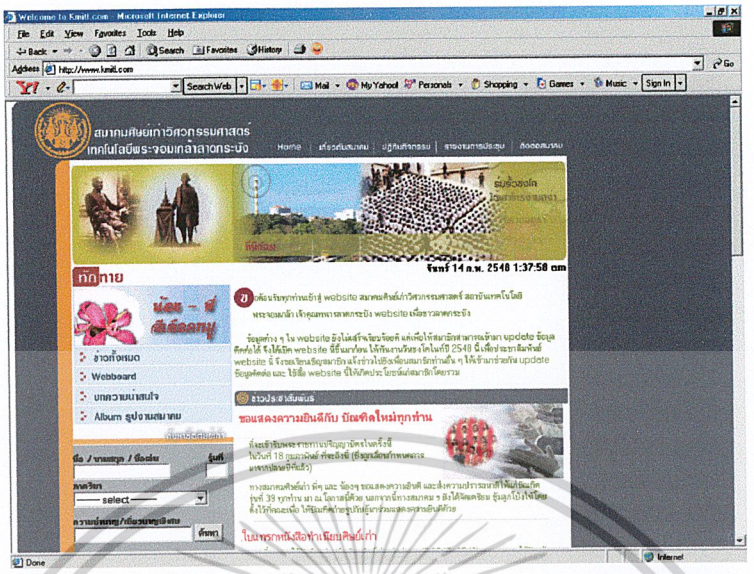


รูป 4.6 แสดงหน้าจอรูป About

- เมื่อคลิกรูป About จะแสดงหน้าจอสารสนเทศและ e-learning เป็น text html

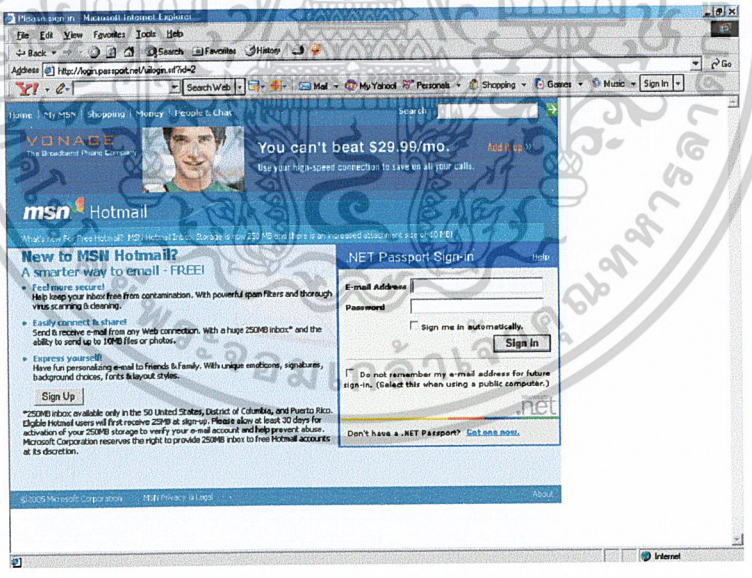
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.6 ปุ่ม Kmitl ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยัง web www.kmitl.ac.th ดังรูป4.7



รูป 4.7 แสดงหน้าจอ www.kmitl

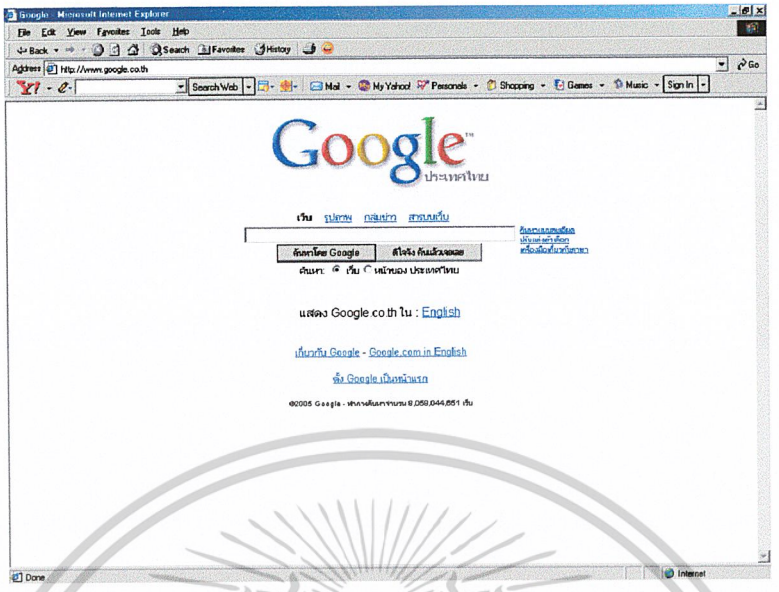
4.1.7 ปุ่ม Hotmail ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยัง web www.hotmail.com ดังรูป4.8



รูป 4.8 แสดงหน้าจอ www.hotmail.com

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.8ปุ่ม Google ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยัง web www.google.co.th ดังรูป 4.9



รูป 4.9 แสดงหน้าจอ www.google.co.th

4.1.9 ปุ่ม Sanook ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยัง web www.sanook.com ดังรูป 4.10

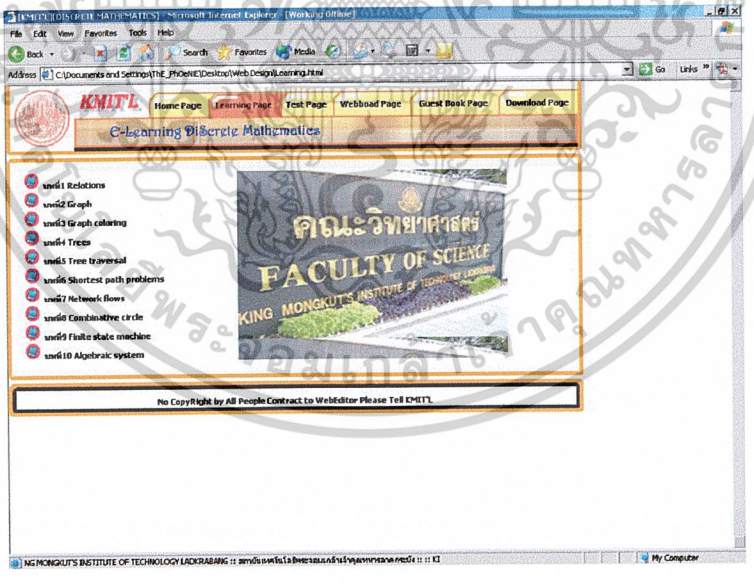
รูป 4.10 หน้าจอแสดง www.sanook.com

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.10 ปุ่ม Pra mool ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยัง web www.pramool.com ดังรูป 4.11

รูป 4.11 แสดงหน้าจอ www.pramool.com

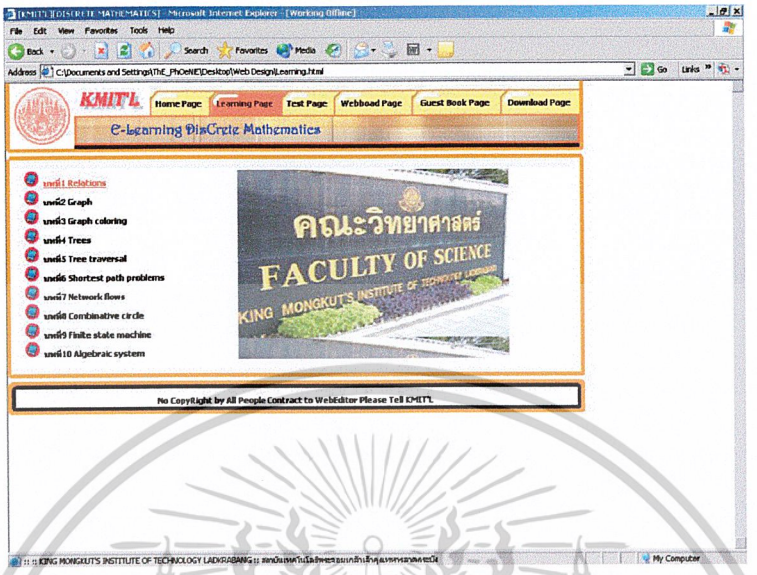
4.2 หน้า Learning page



รูป 4.12 แสดงหน้าจอ Learning page

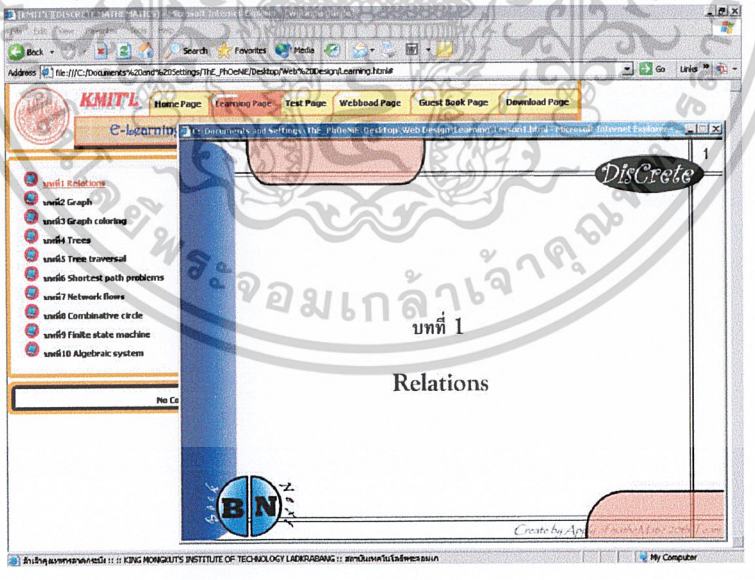
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.1 บทที่1 Relations ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 1



รูปที่ 4.13 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 1

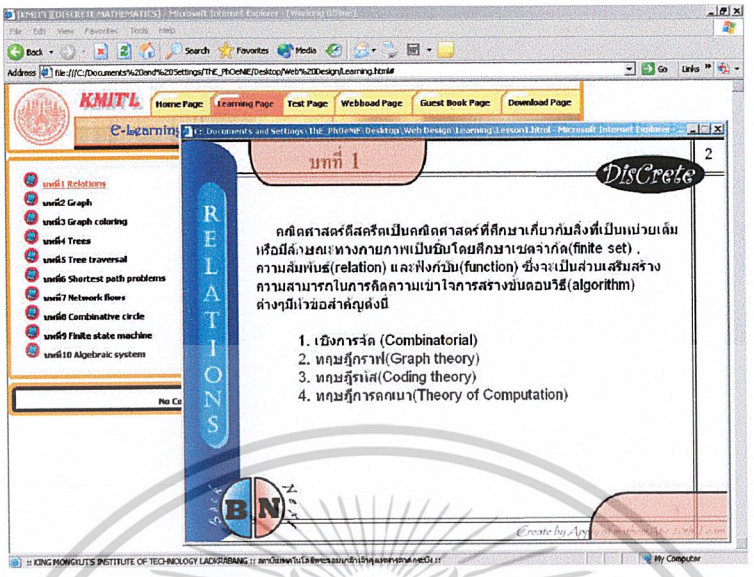
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่1 Relations จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่1 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.14



รูป 4.14 แสดงหน้าจอ popup บทที่1 Relations

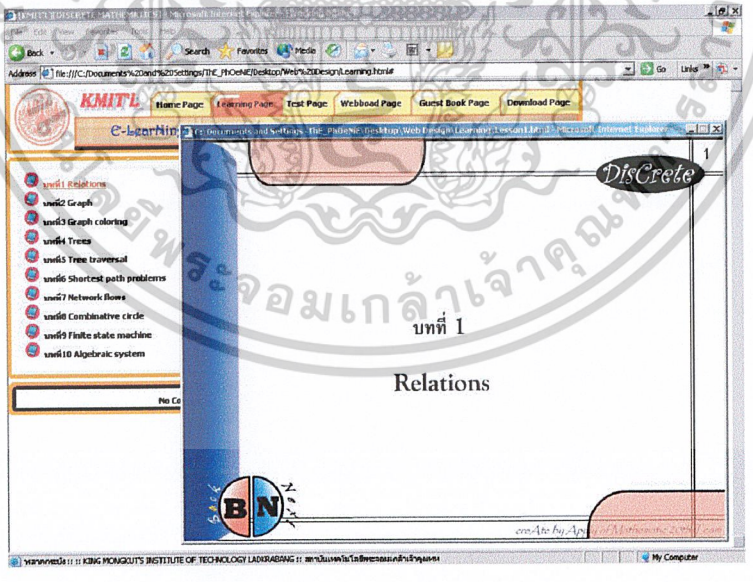
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.15



รูป 4.15 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่1

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.16

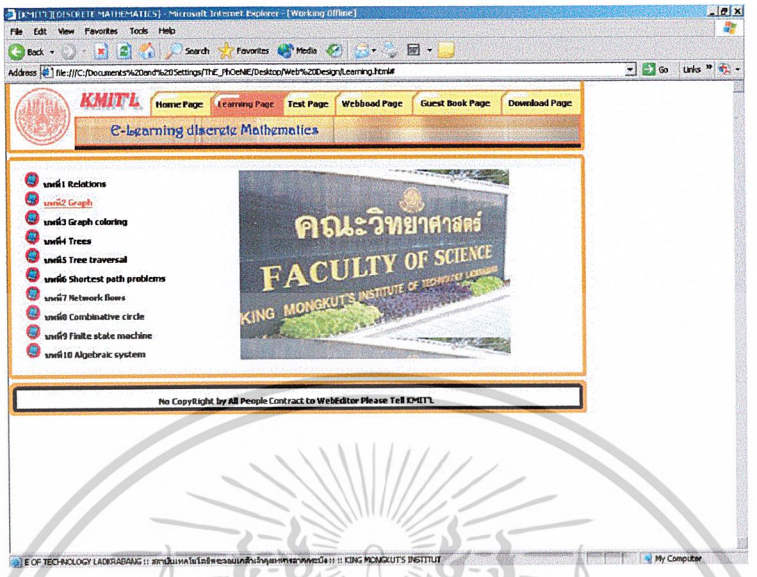


รูป 4.16 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่1

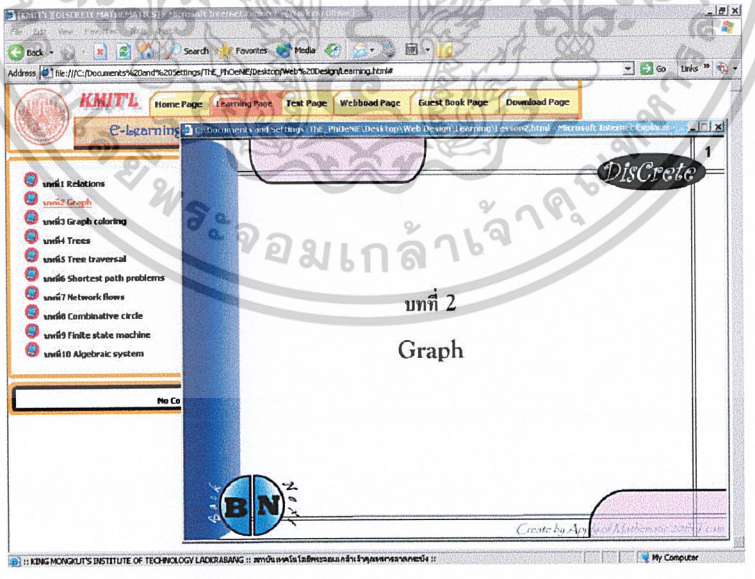
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.2 บทที่2 Graph ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 2



รูปที่ 4.17 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 2

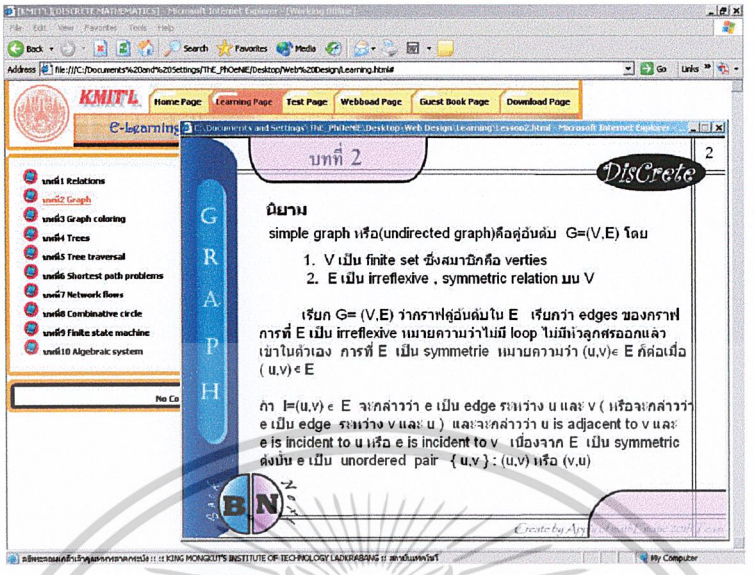
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่2 Graph จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที2 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.18



รูป 4.18 แสดงหน้าจอ popup บทที่2 Graph

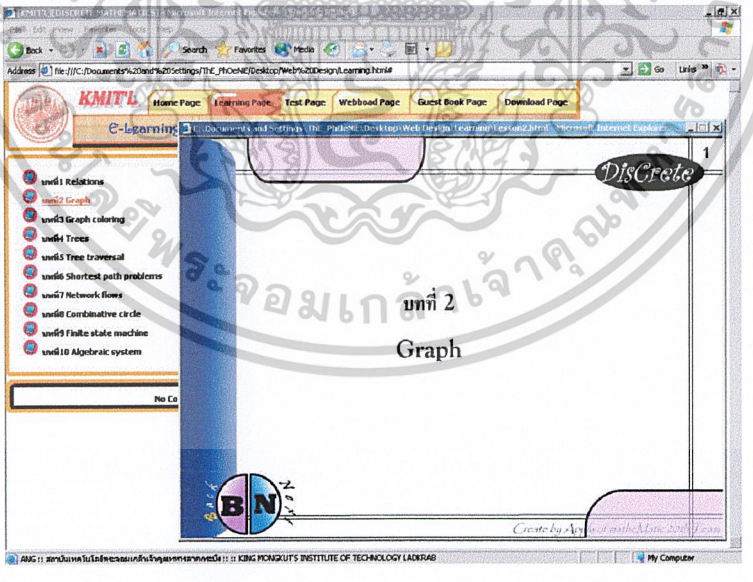
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.19



รูป 4.19 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่2

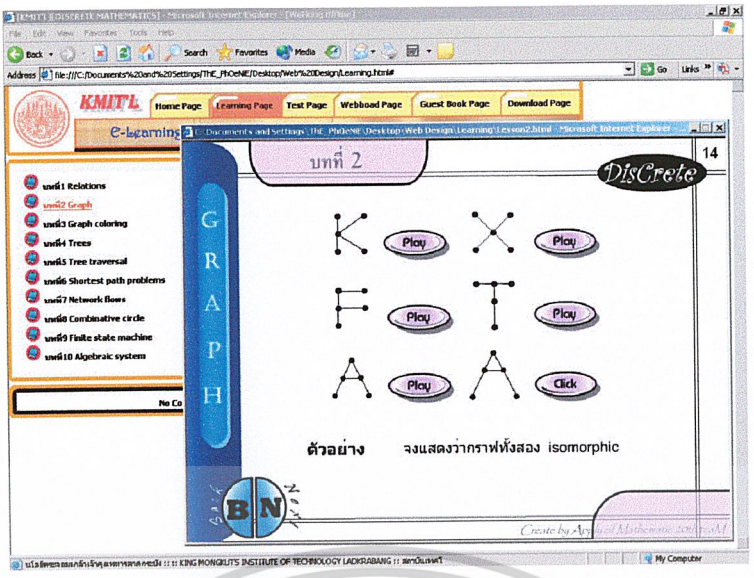
- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.20



รูป 4.20 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

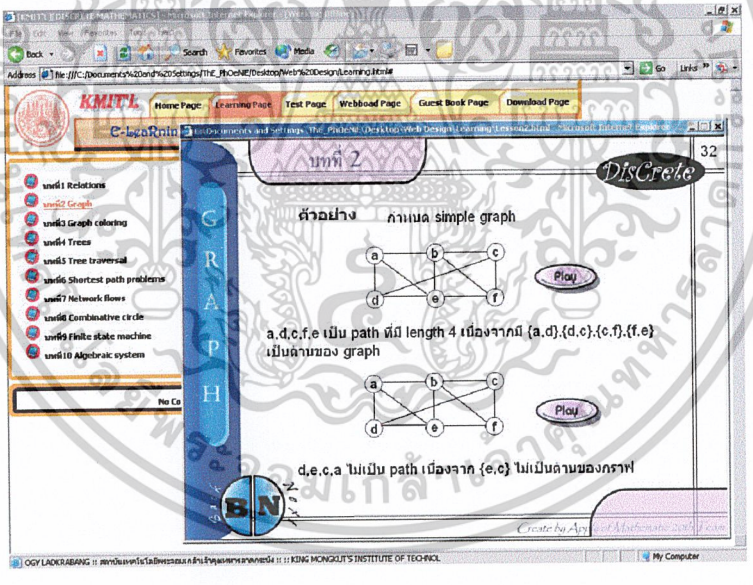
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.21 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม play

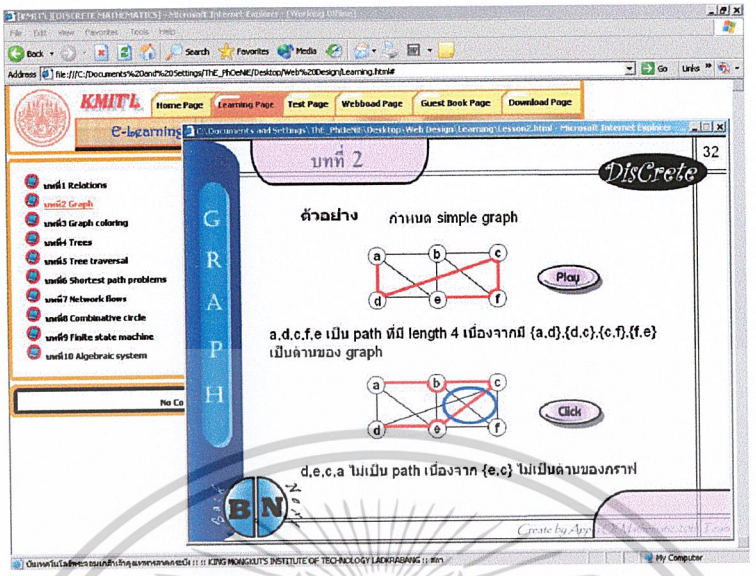
- เมื่อคลิกปุ่ม play จะเกิดการเคลื่อนไหวของรูปภาพ



รูป 4.22 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม play

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิกปุ่ม play จะเกิดการเคลื่อนไหวของรูปภาพดังรูป 4.23

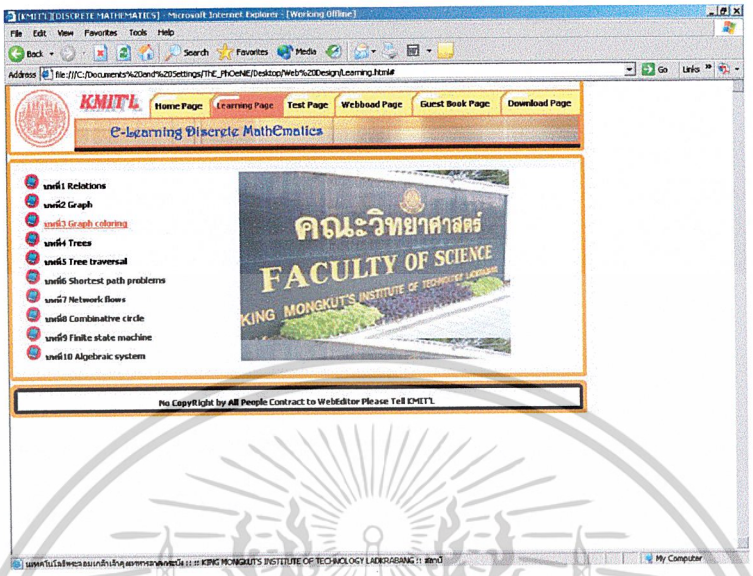


รูป 4.23 แสดงหน้าจอรูปที่เกิดจากการคลิกปุ่ม play

- เมื่อคลิกปุ่ม play จะเกิดการเคลื่อนไหวโดยการลากเส้นสีแดงตามทางเดินของเส้นและจะเกิดวงกลมสีน้ำเงินเพื่อแสดงให้เห็นว่าเป็นทางเดินที่ผิด

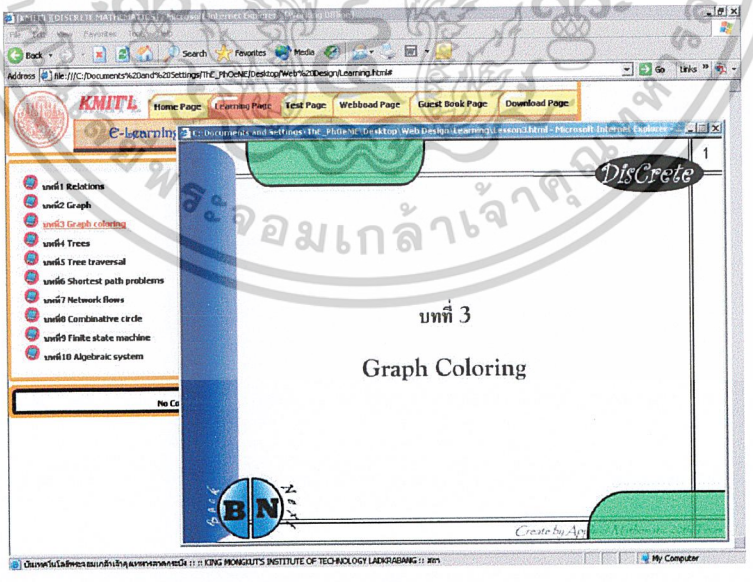
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.3บทที่3 Graph Coloring ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 3



รูปที่ 4.24 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 3

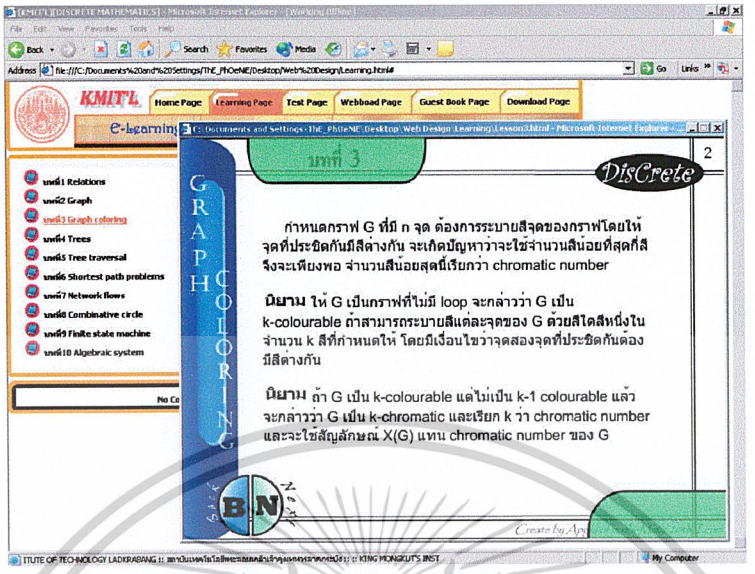
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่3 Graph coloring จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่3 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.24



รูปที่ 4.25 แสดงหน้าจอ popup บทที่3 Graph coloring

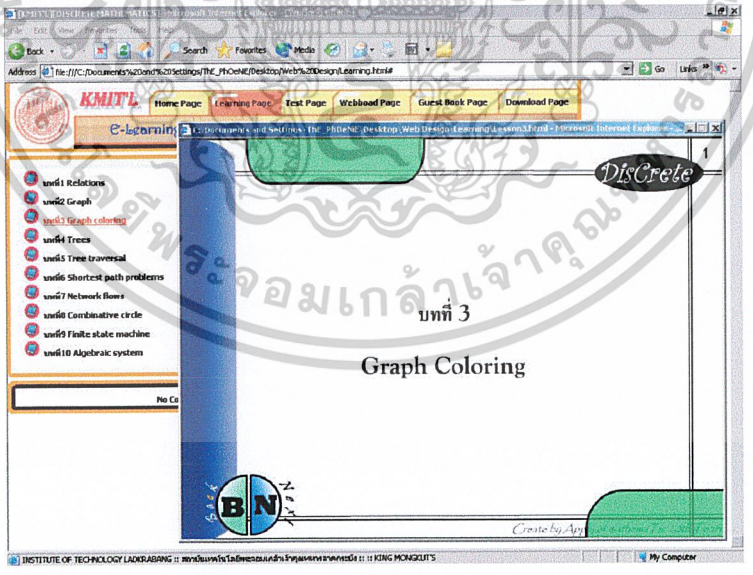
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.25



รูป 4.26แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่3

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.26

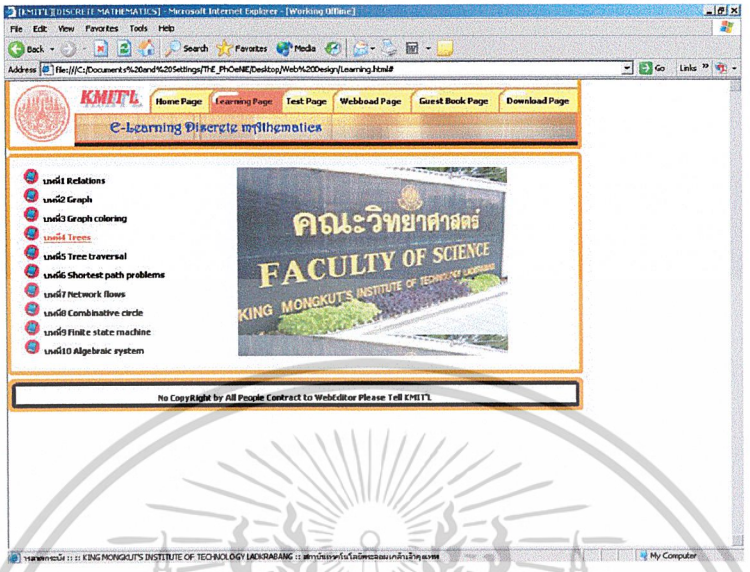


รูป 4.27 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่3

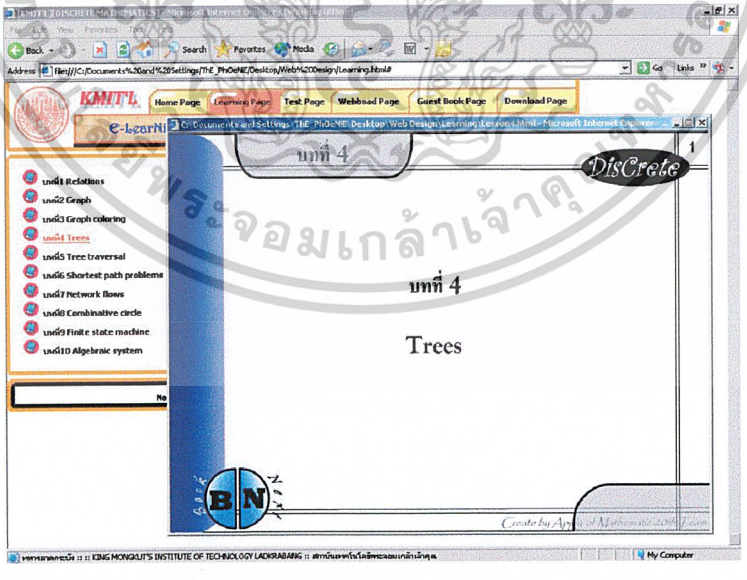
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.4 บทที่4 Trees ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 4



รูปที่ 4.28 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 4

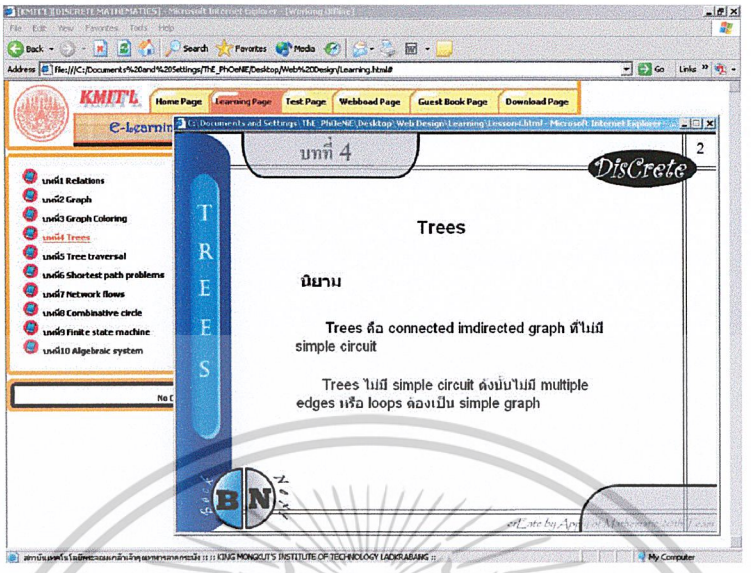
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่4 Trees จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่4 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.28



รูปที่ 4.29 แสดงหน้าจอ popup บทที่4 Trees

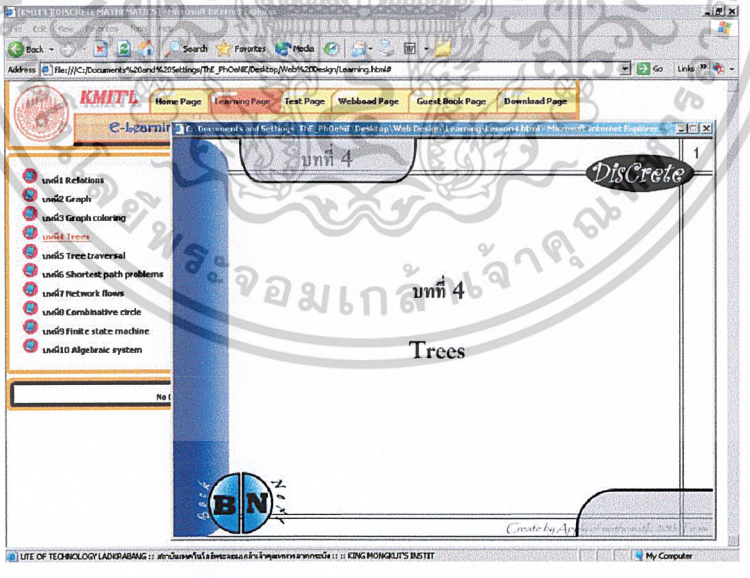
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.29



รูป 4.30 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่4

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.30

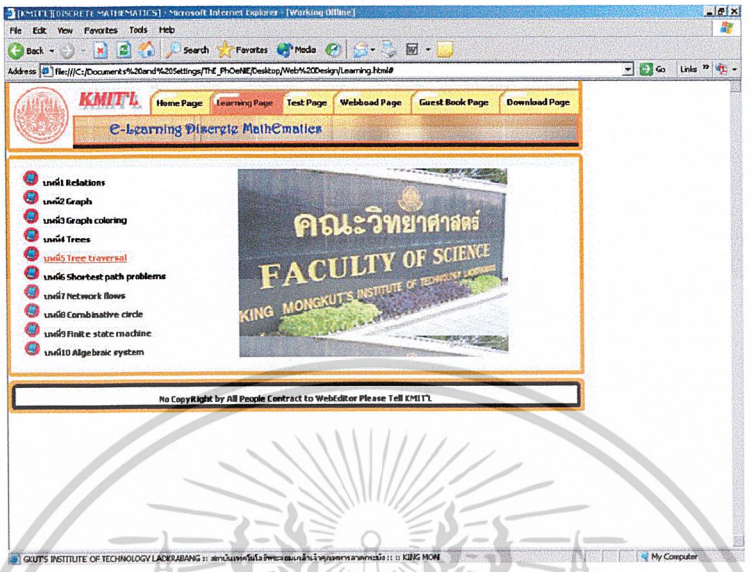


รูป 4.31 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่4

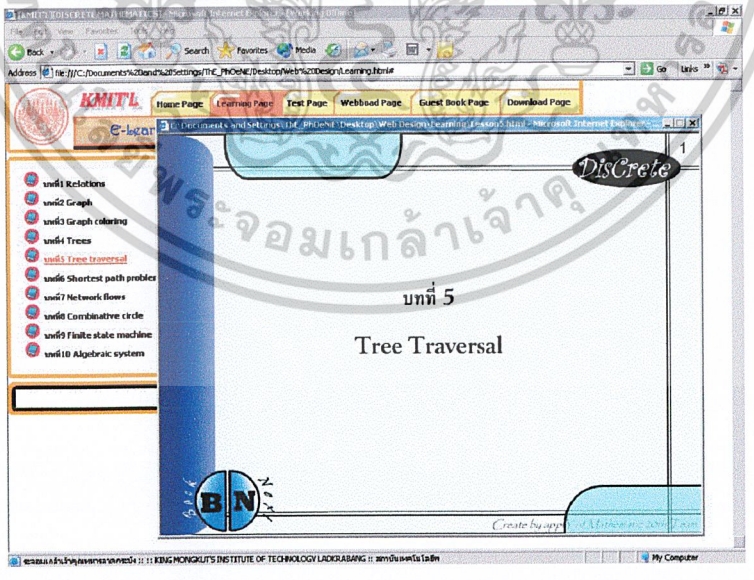
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.5 บทที่ 5 Tree traversal ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 5



รูปที่ 4.32 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 5

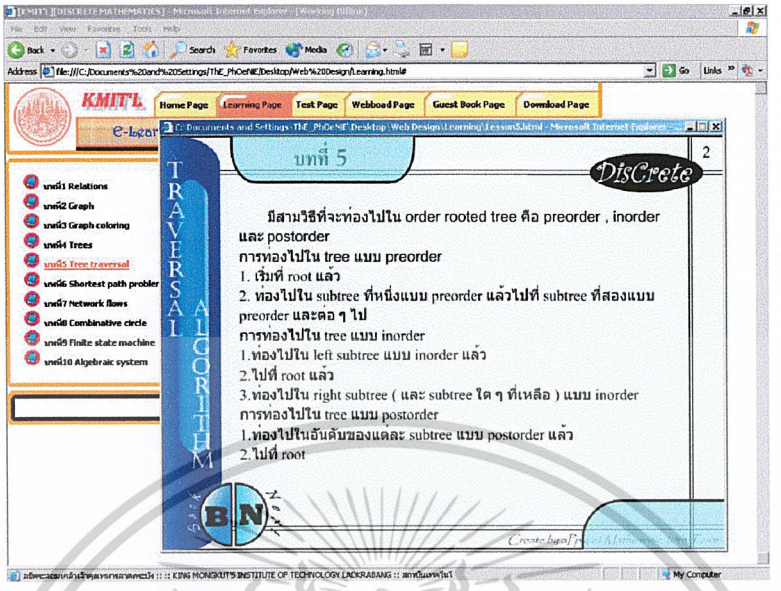
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่5 tree traversal จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่5 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.32



รูป 4.33 แสดงหน้าจอ popup บทที่5 tree traversal

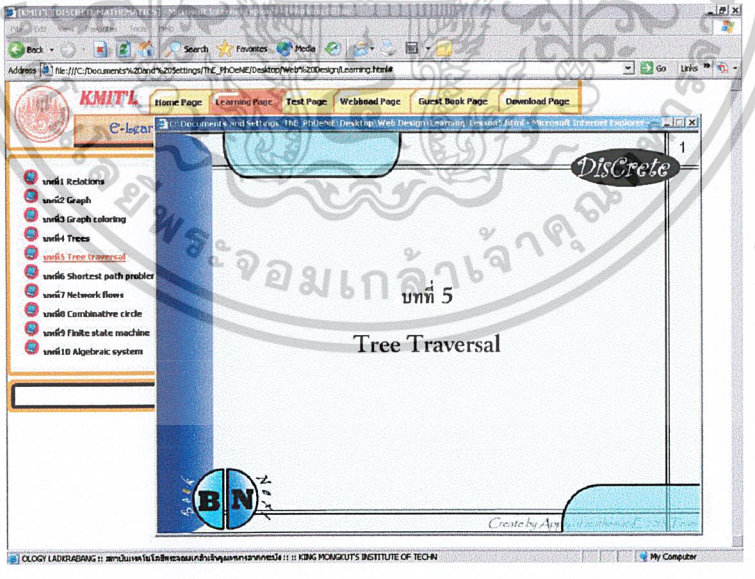
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.33



รูป 4.34 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่5

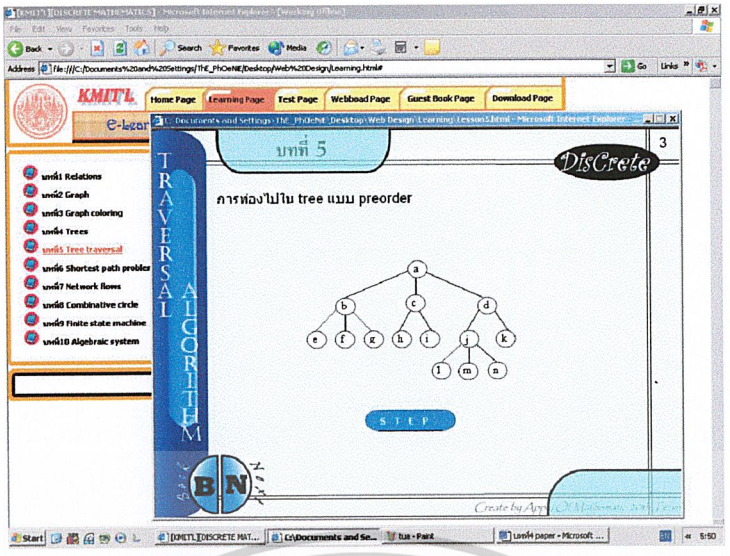
- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับ ไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.34



รูป 4.35 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

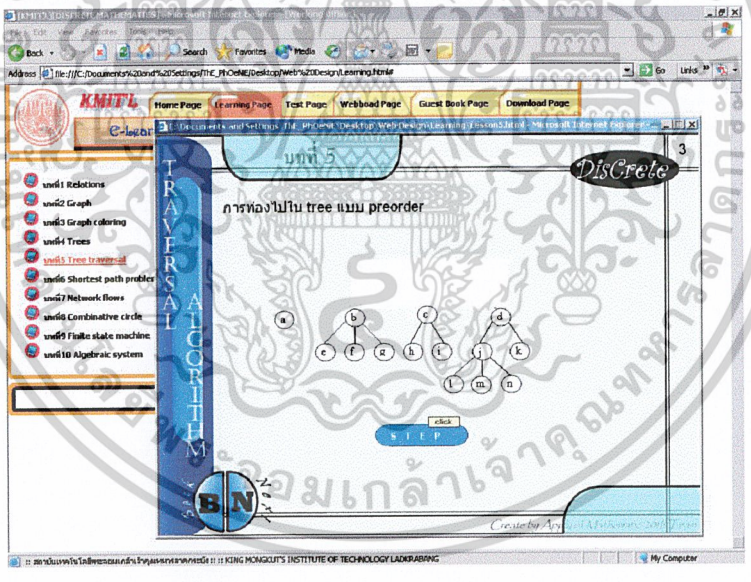
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.36 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป

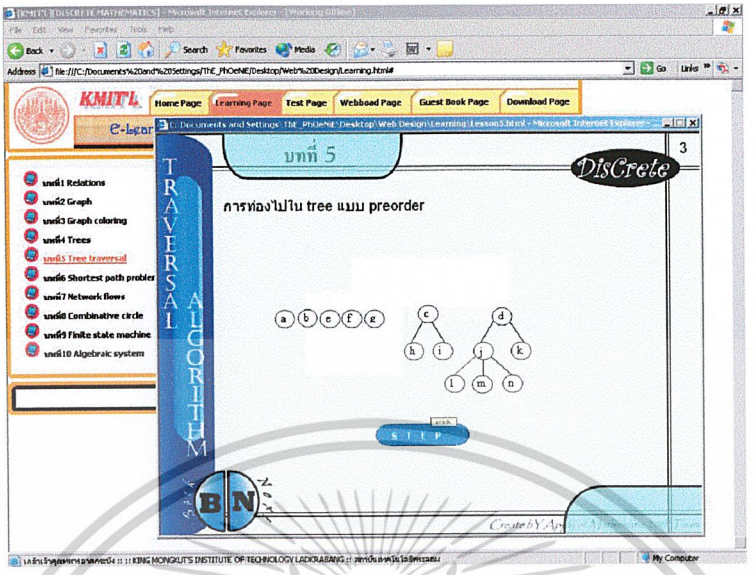
- เมื่อคลิกปุ่ม step จะแสดงการจัดเรียงตัวของลำดับตัวอักษรดังรูป 4.36



รูป 4.37 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป

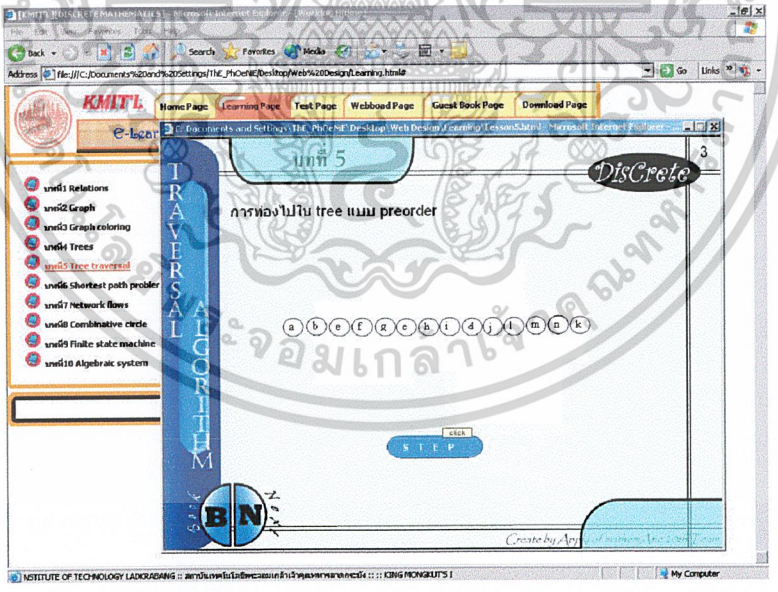
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิกปุ่ม step จะแสดงการจัดเรียงตัวของลำดับตัวอักษรดังรูป 4.37



รูป 4.38 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป

- เมื่อคลิกปุ่ม step จะแสดงการจัดเรียงตัวของลำดับตัวอักษรดังรูป 4.38 ต่อไปจนครบ

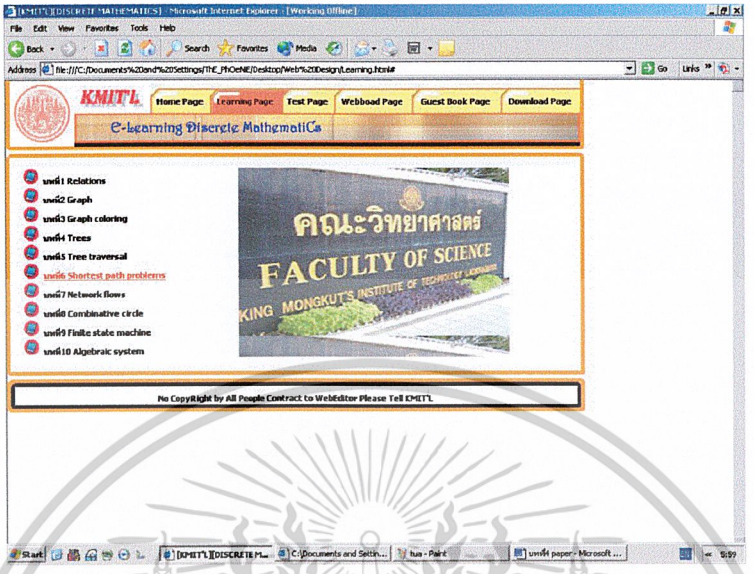


รูป 4.39 แสดงหน้าจอการแสดง step ของรูป

- เมื่อคลิกปุ่ม step จะแสดงการจัดเรียงตัวของลำดับตัวอักษรจนครบดังรูป

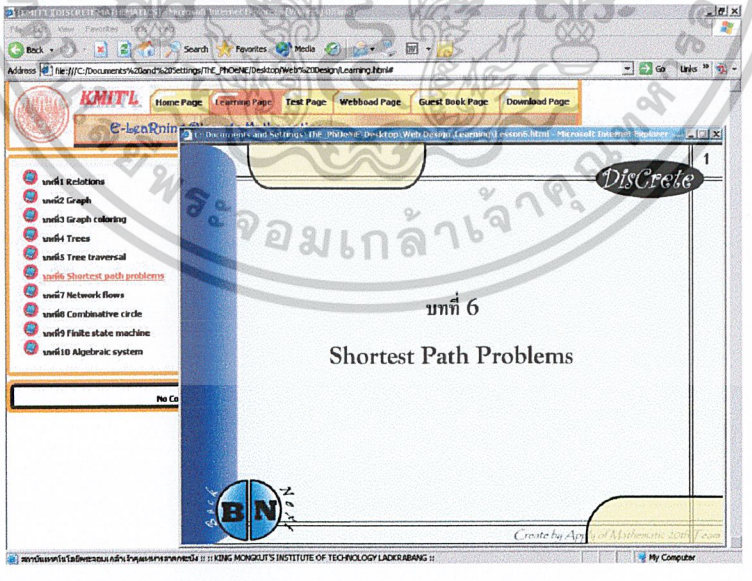
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.6 บทที่ 6 Shortest path problems ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 6



รูปที่ 4.40 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 6

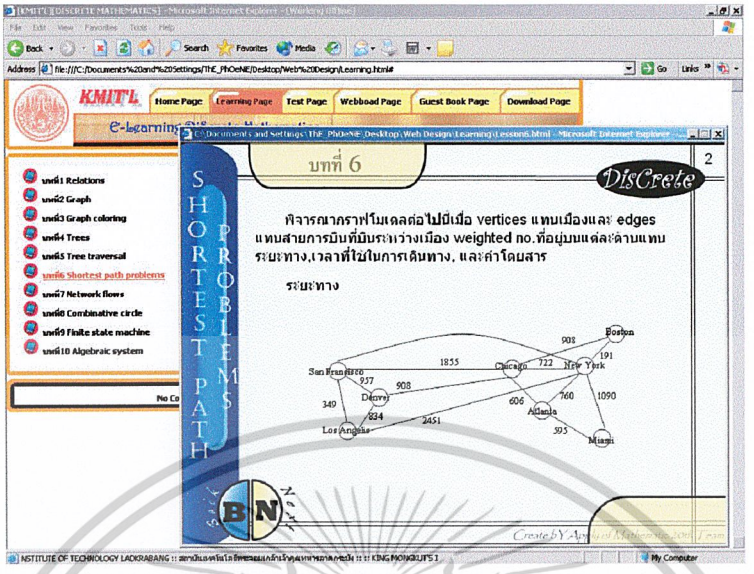
- เมื่อทำการคลิกที่ บทที่6 Shortest path problems จะ link ไปยัง หน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่6 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.40



รูป 4.41 แสดงหน้าจอ popup บทที่6 tree traversal

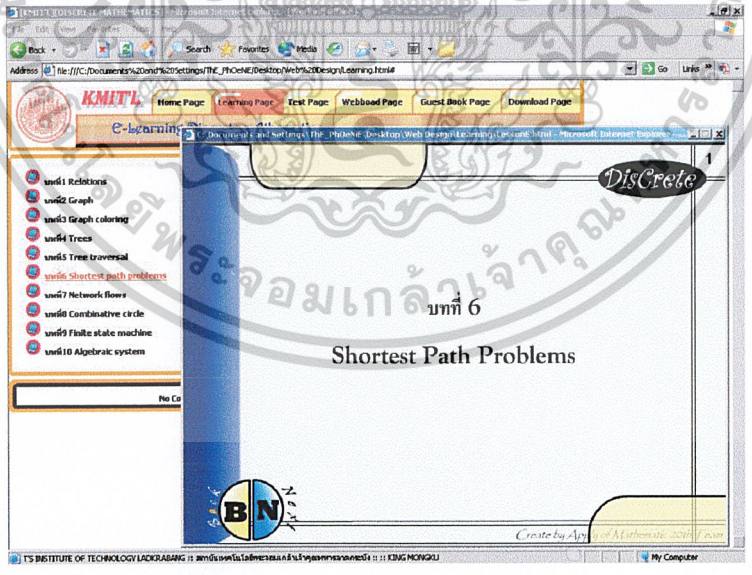
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.33



รูป 4.42 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่6

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.34

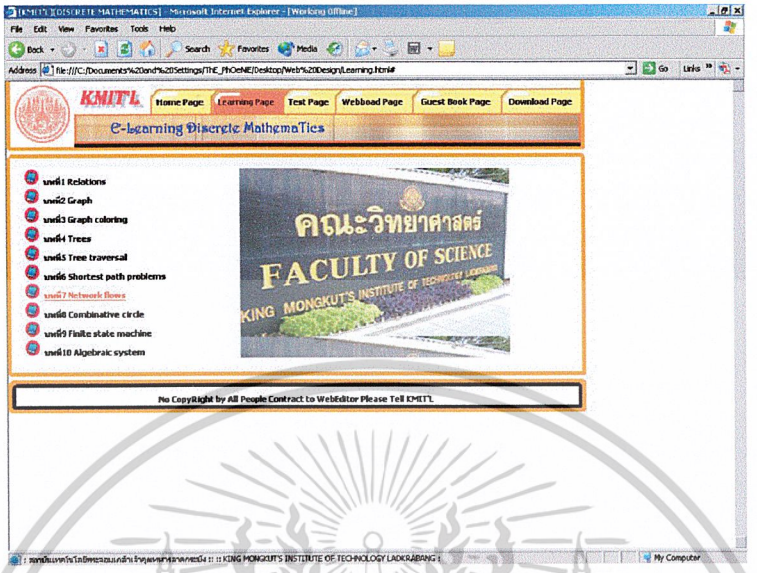


รูป 4.43 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

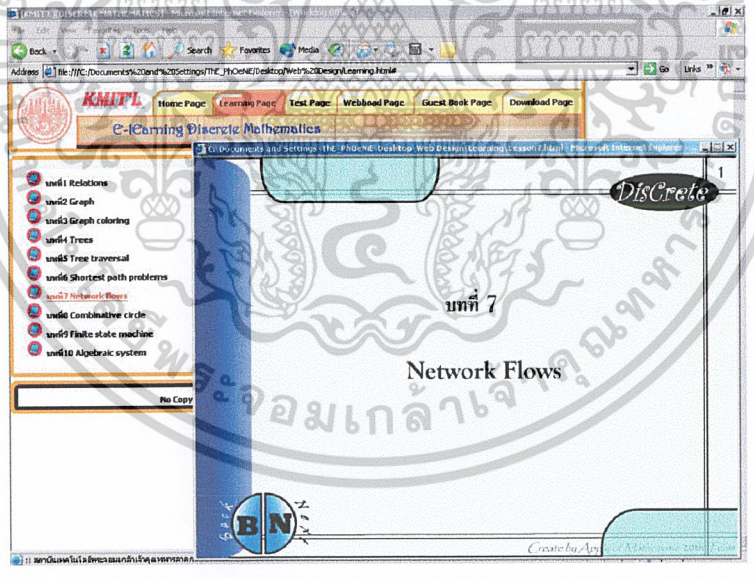
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.7 บทที่ 7 Network flows ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 7



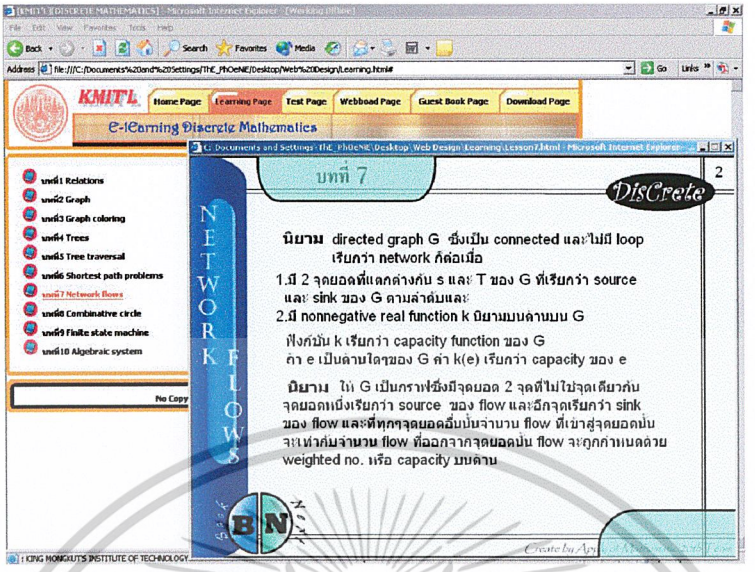
รูปที่ 4.44 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 7



รูป 4.45 แสดงหน้าจอ popup บทที่7 Network flows

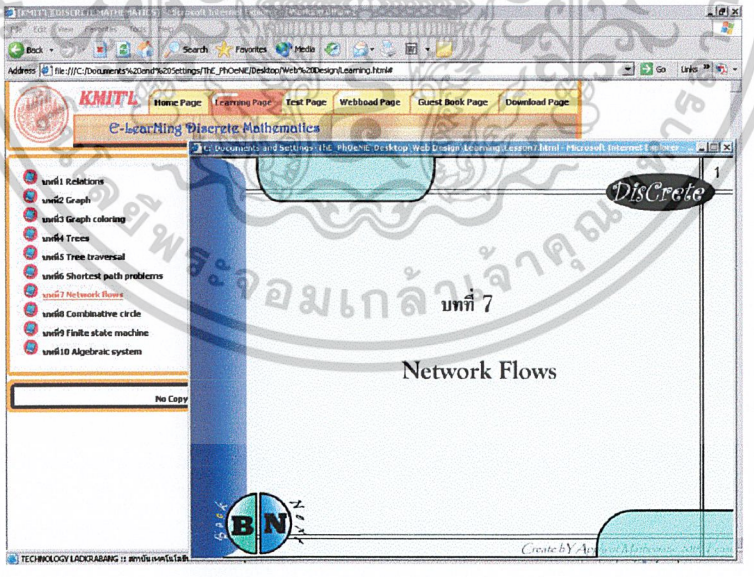
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.37



รูป 4.46 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่7

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.38

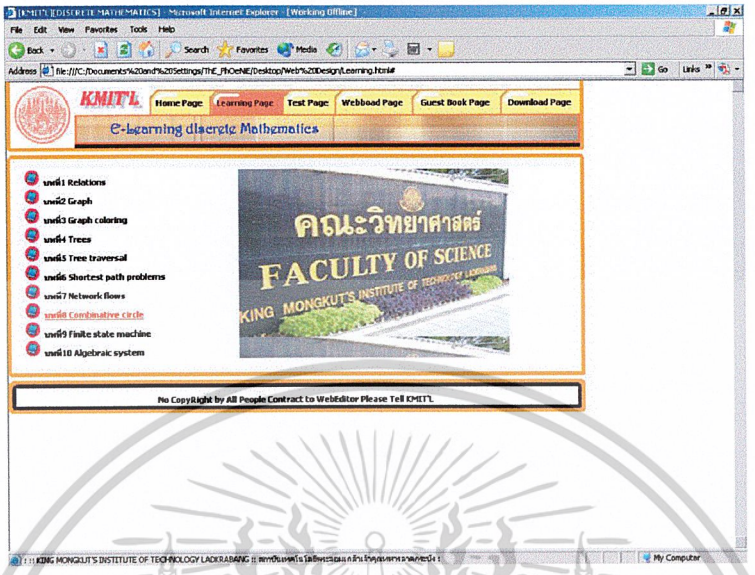


รูป 4.47 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

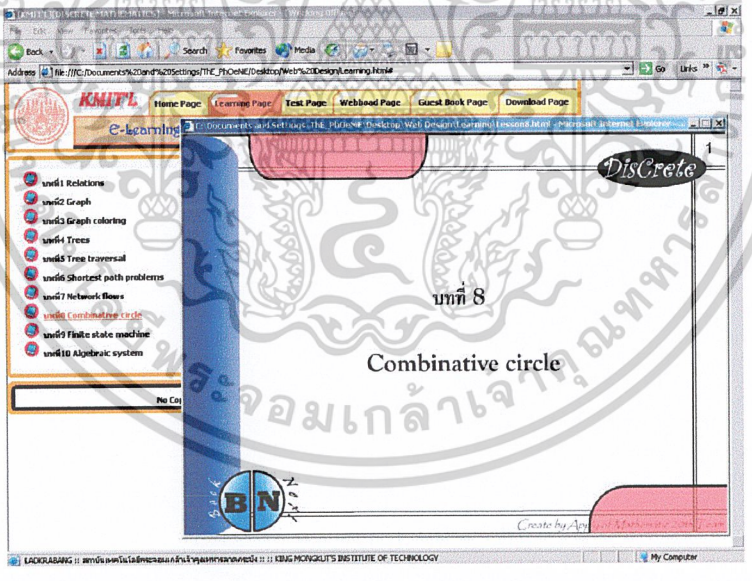
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.8 บทที่ 8 Combinative circle ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 8



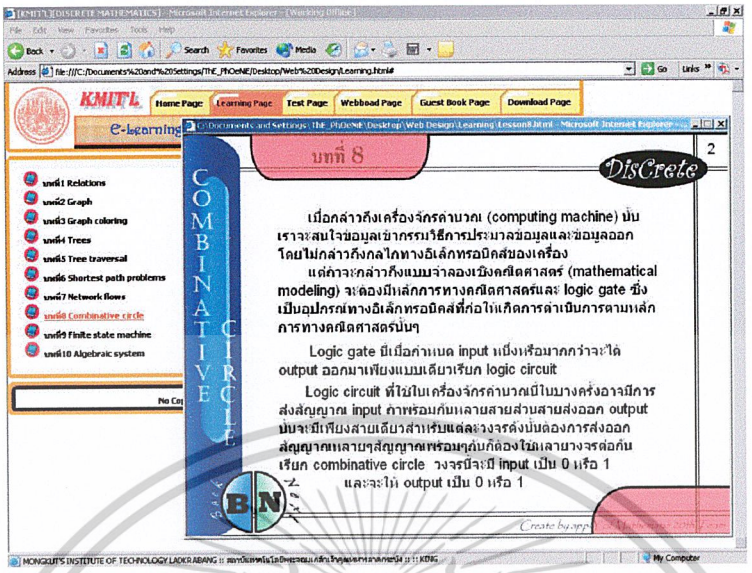
รูปที่ 4.48 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 8



รูป 4.49 แสดงหน้าจอ popup บทที่8 Combinative circle

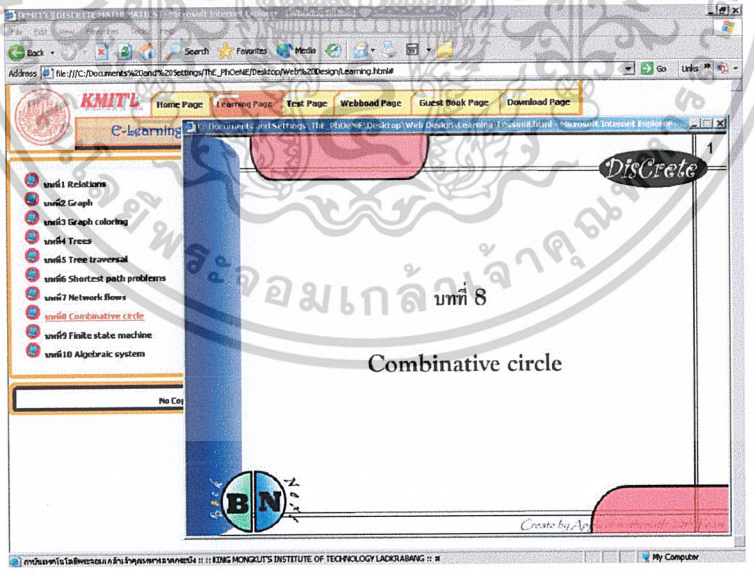
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.41



รูป 4.50 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่8

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.42

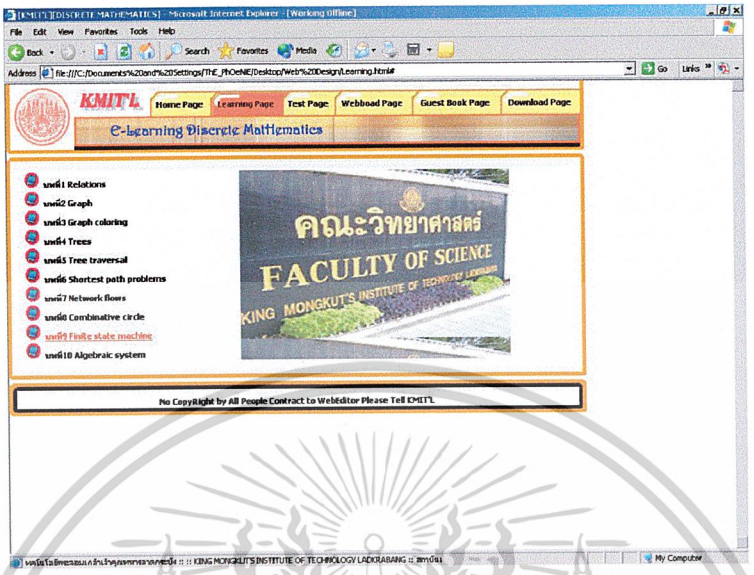


รูป 4.51 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

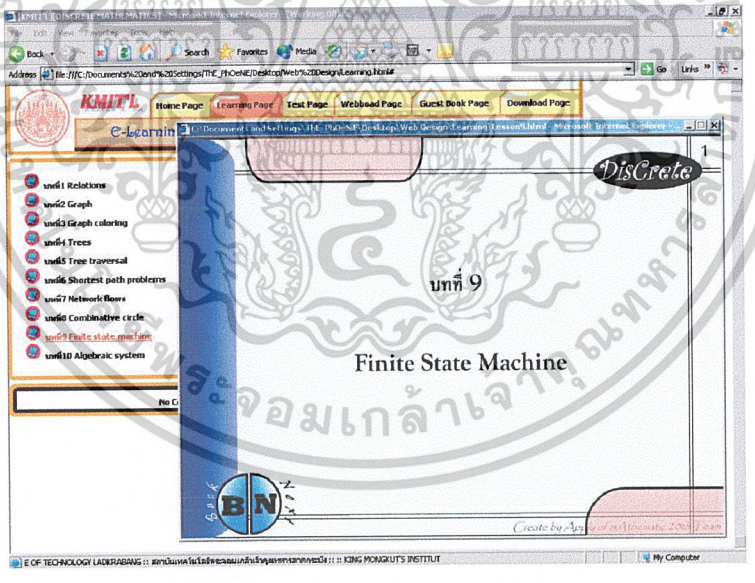
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.8 บทที่ 9 Finite state machine ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 9



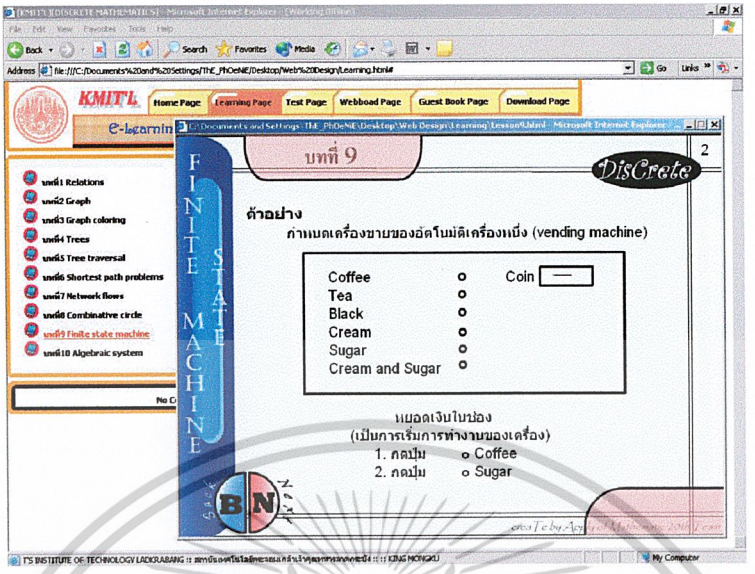
รูปที่ 4.52 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 9



รูป 4.53 แสดงหน้าจอ popup บทที่9 Finite state machine

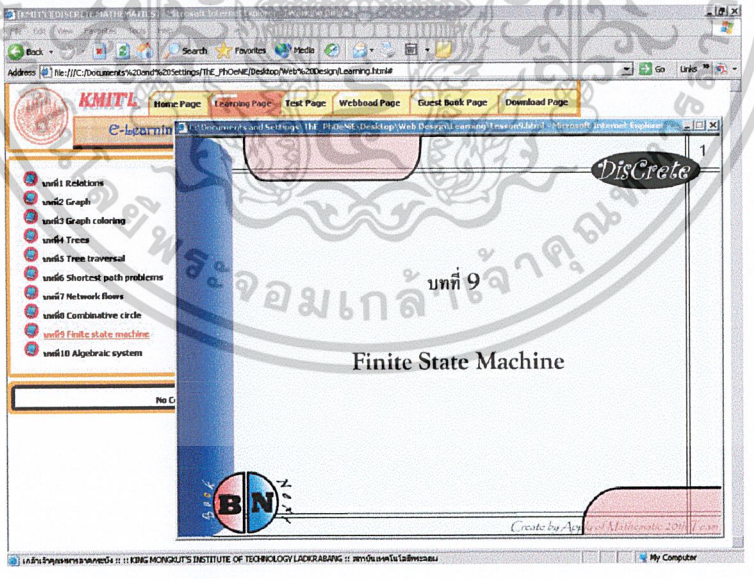
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.45



รูป 4.54 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่9

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.46

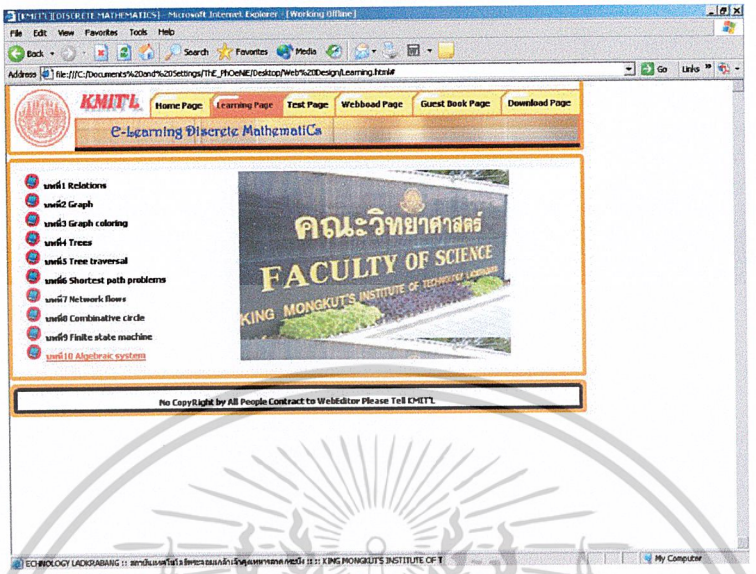


รูป 4.55 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

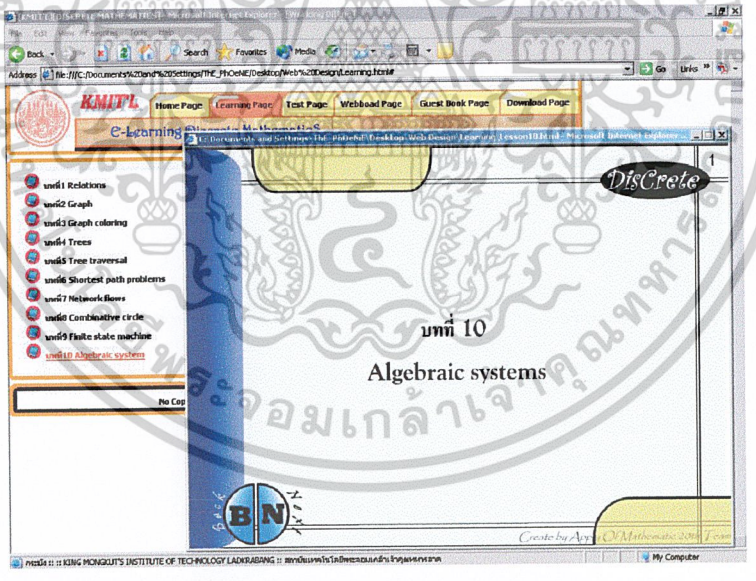
- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2.8 บทที่ 10 Algebraic state machine ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 10



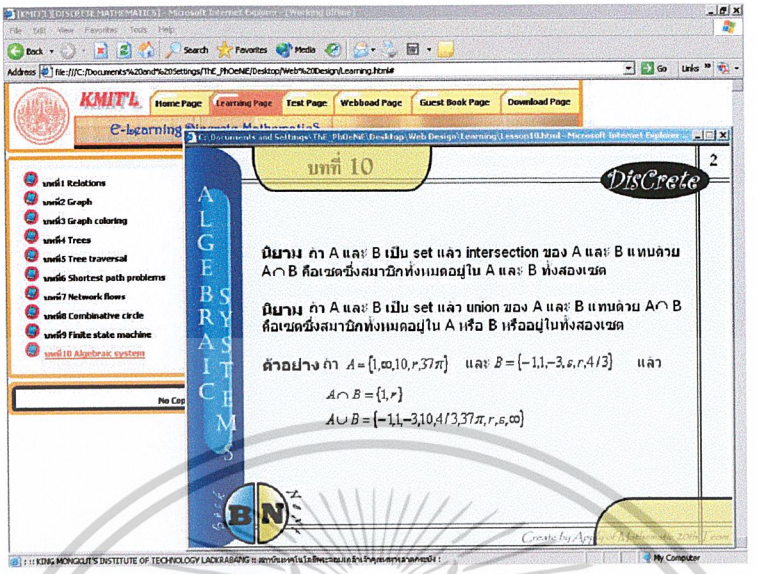
รูปที่ 4.56 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าเนื้อหาการเรียนการสอนบทที่ 10



รูป 4.57 แสดงหน้าจอ popup บทที่10 Algebraic system

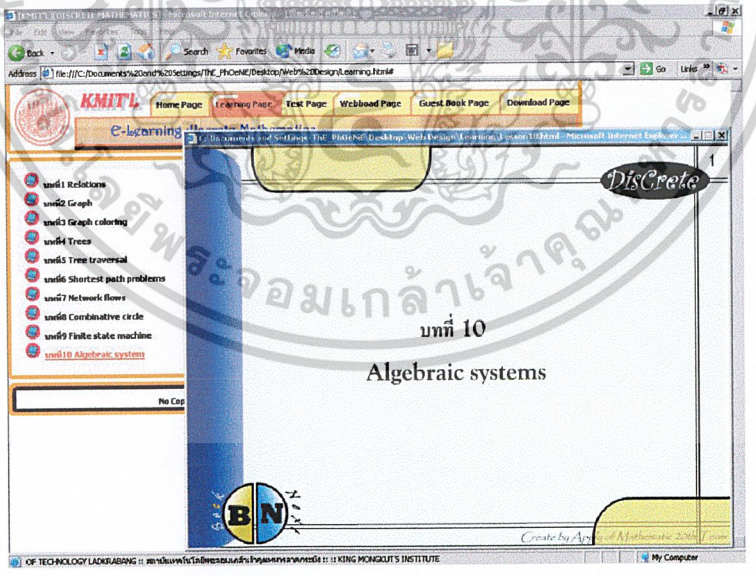
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก N(next) จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.49



รูป 4.58 แสดงหน้าจอบทเรียนของบทที่10

- เมื่อคลิก N(next) ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก B(back) จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.50

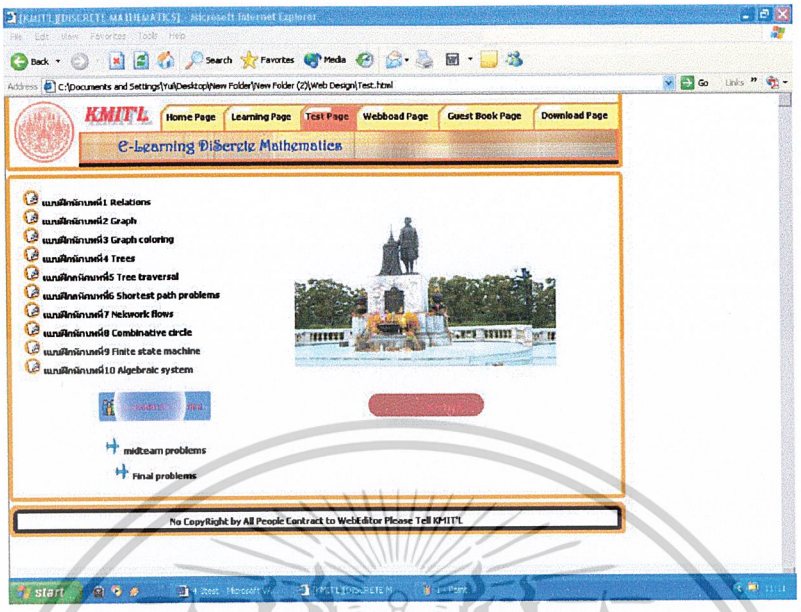


รูป 4.59 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม B(back)

- เมื่อคลิกปุ่ม B(back) จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของบทที่10

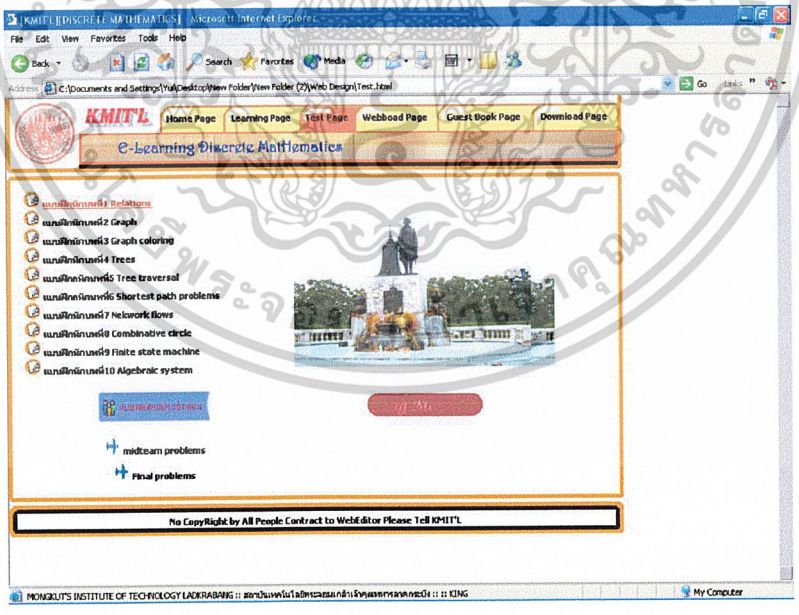
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 หน้า Test page



รูป 4.60 แสดงหน้าจอ Test page

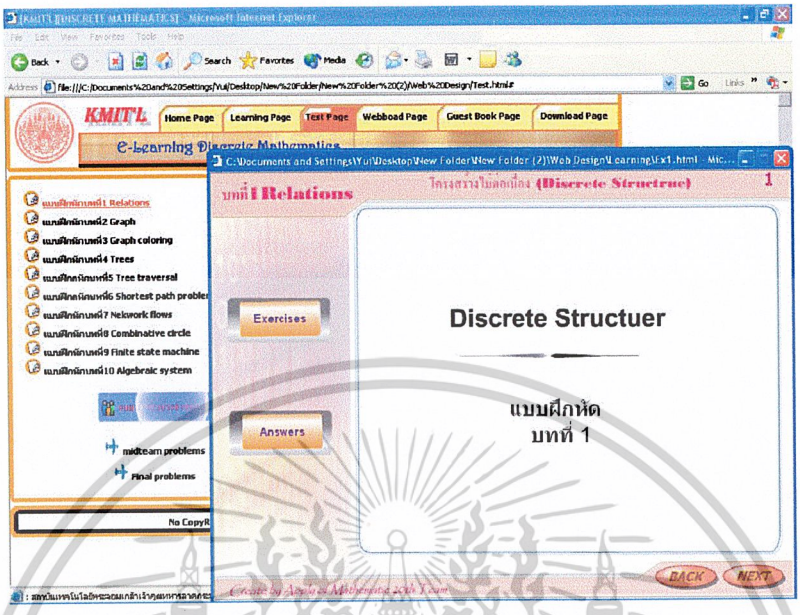
4.3.1 บทที่1 Relations ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่1



รูปที่ 4.61 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่1

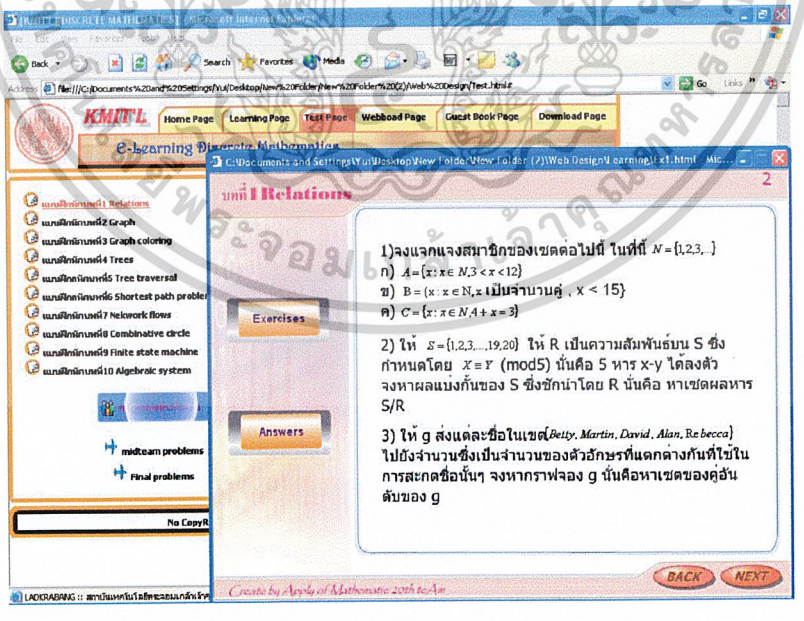
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่1 Relations จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่1 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.53



รูป 4.62 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่1 Relations

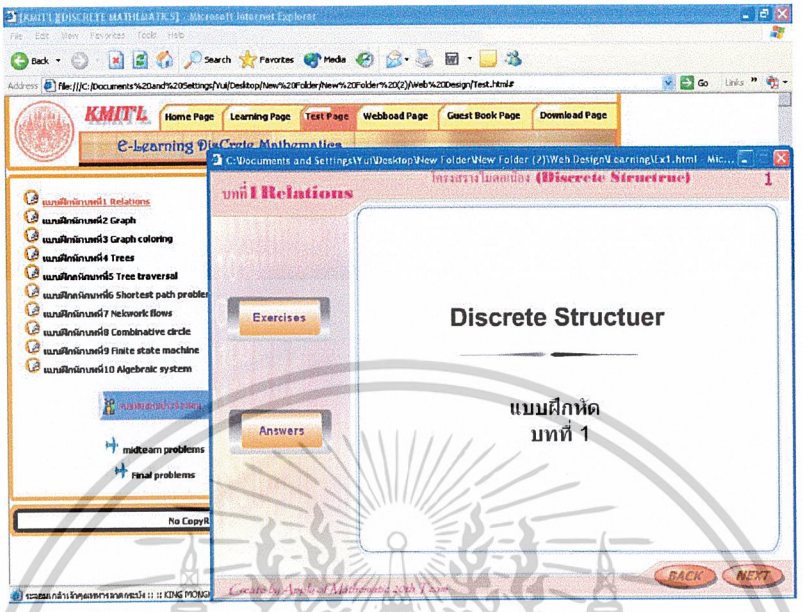
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.54



รูป 4.63 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่1

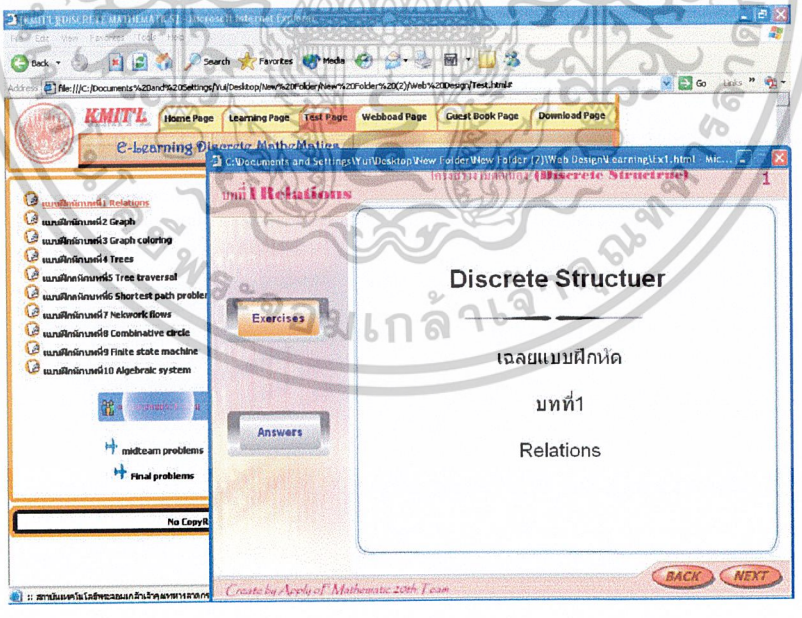
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.55



รูป 4.64 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

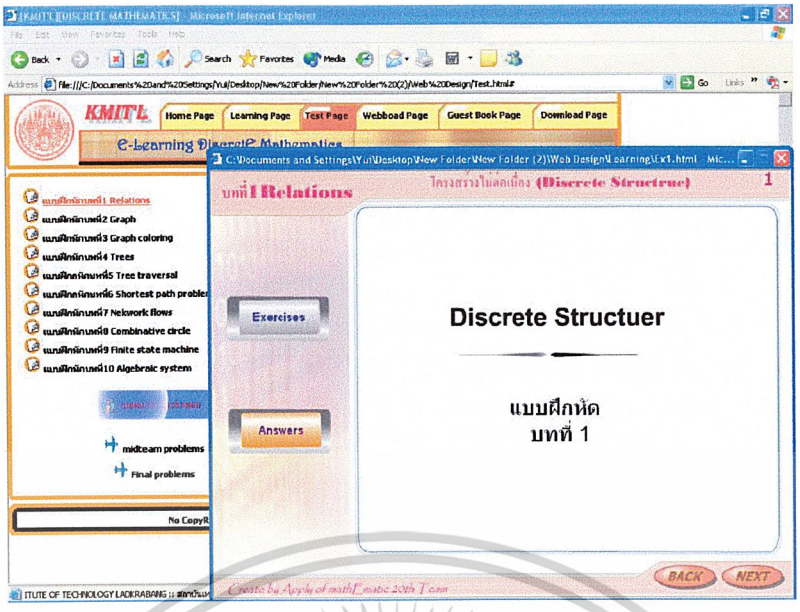
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่1



รูป 4.65 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่1 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่1 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.56

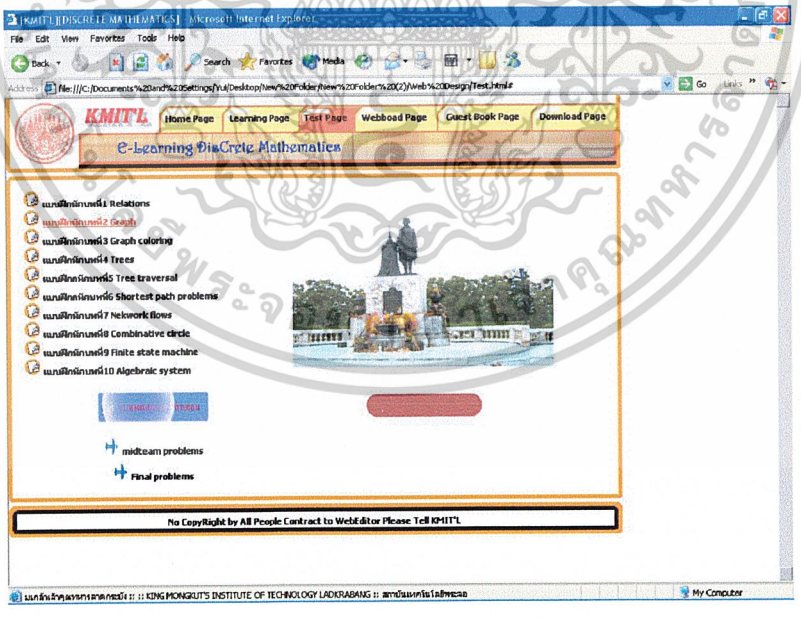
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.66 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่1 ดังรูป 4.57

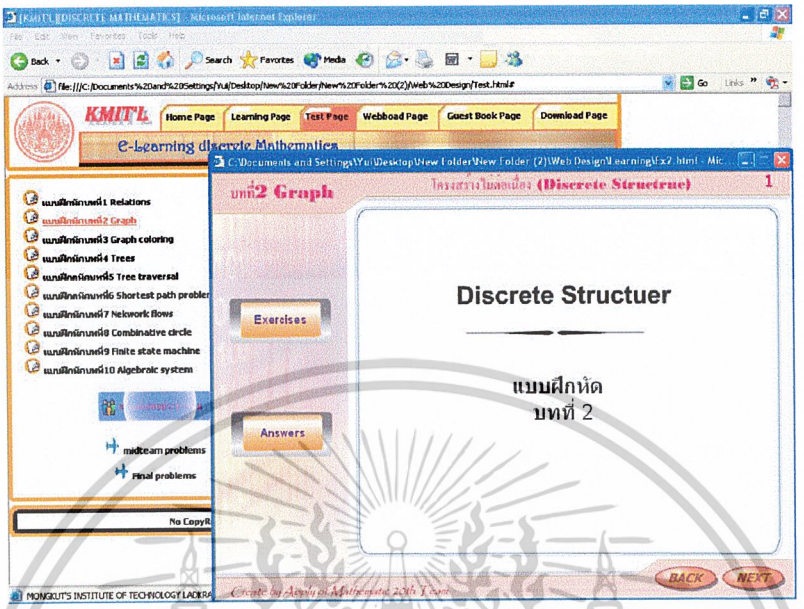
4.3.2 บทที่2 Graph ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่2



รูปที่ 4.67 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่2

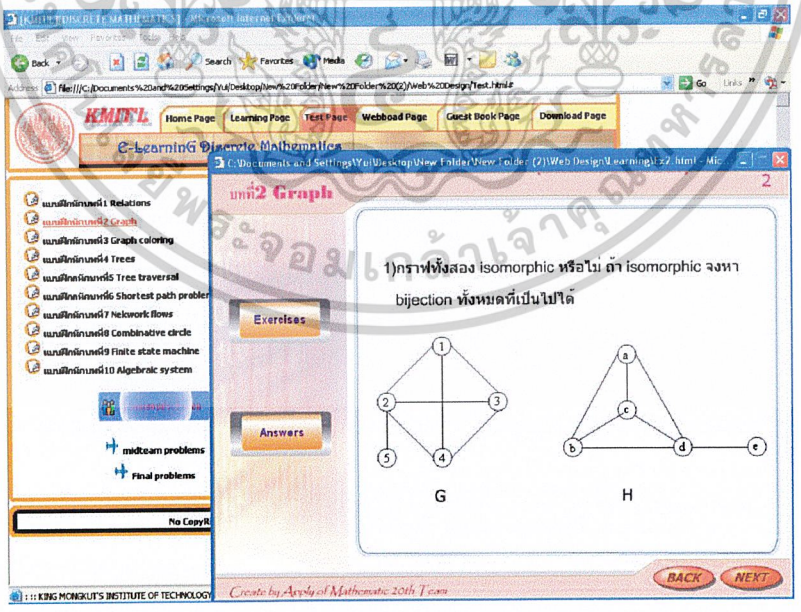
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่2 Graph จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่2 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.59



รูป 4.68 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่2 Graph

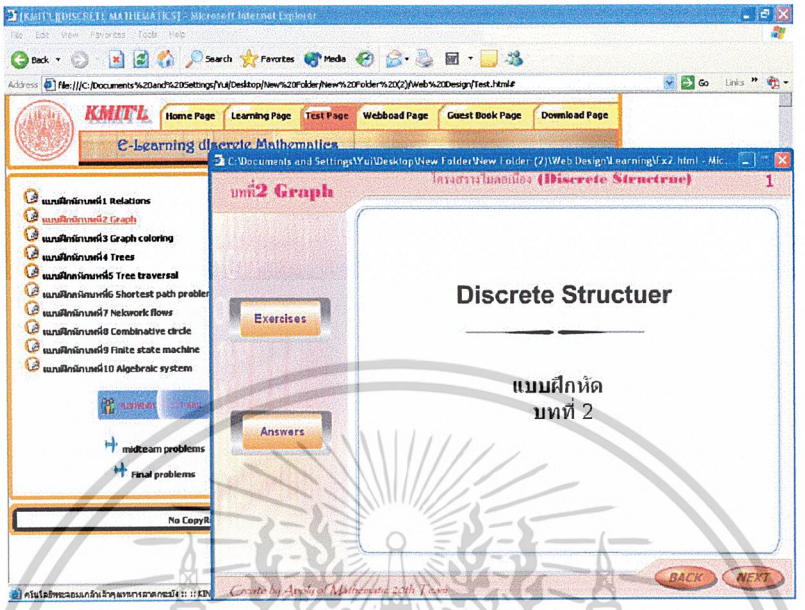
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.60



รูป 4.69 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่2

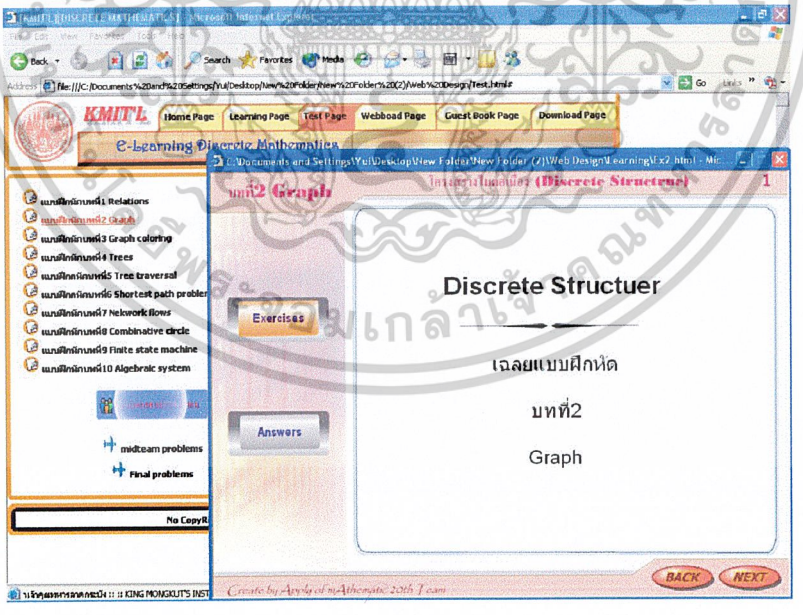
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.61
-



รูป 4.70 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

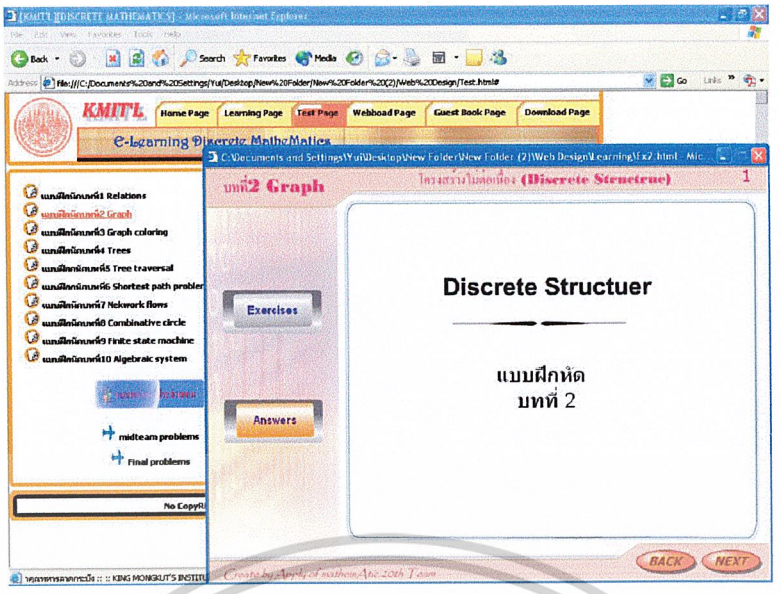
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่2



รูป 4.71 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่2 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่2 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.62

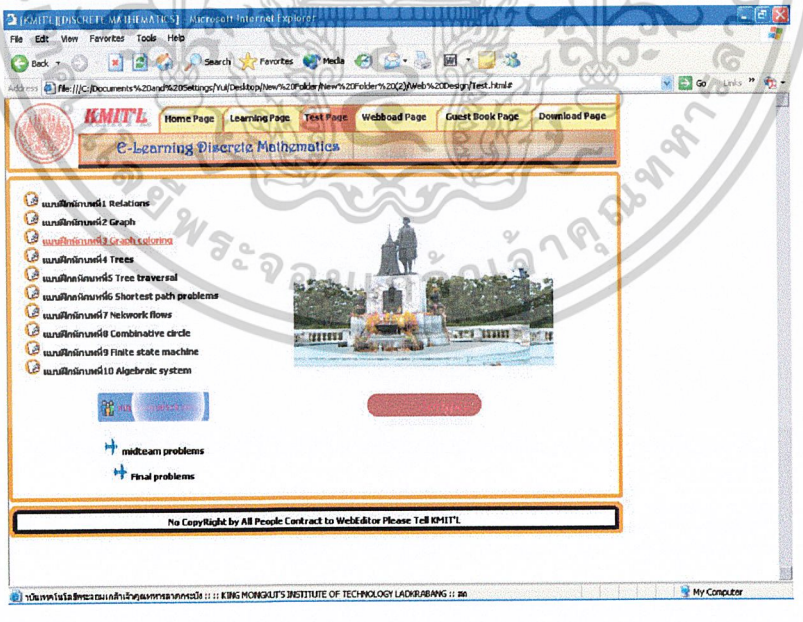
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.72 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่2 ดังรูป 4.63

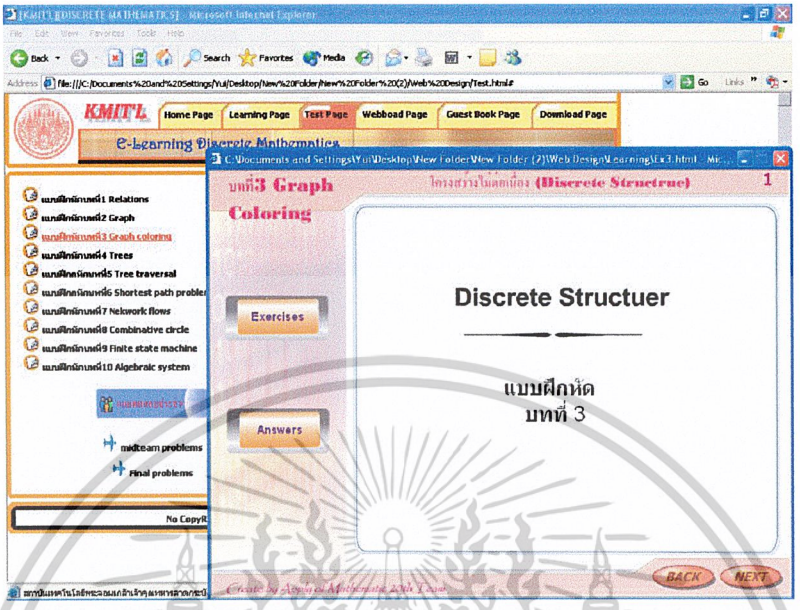
4.3.3 บทที่3 Graph coloring ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่3



รูปที่ 4.73 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่3

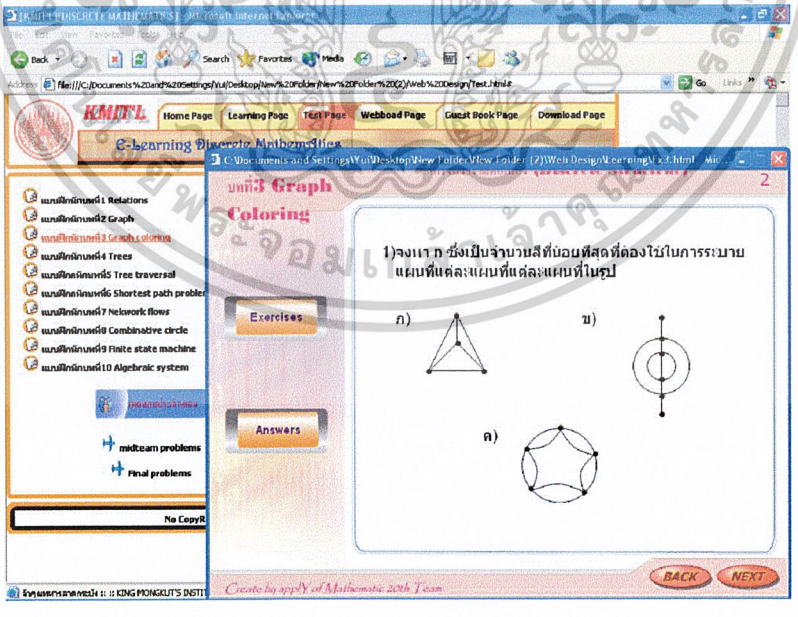
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่3 Graph coloring จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่3 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.65



รูป 4.74 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่3 Graph coloring

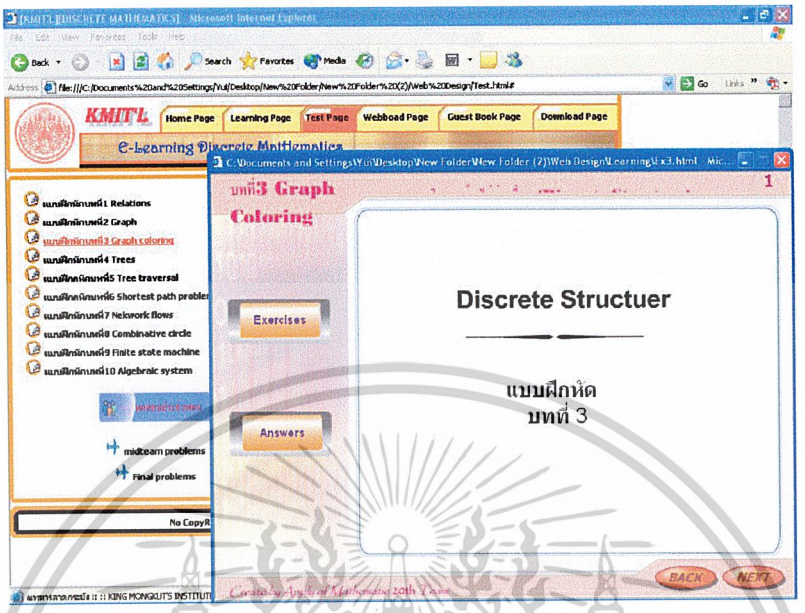
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.66



รูป 4.75 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่3

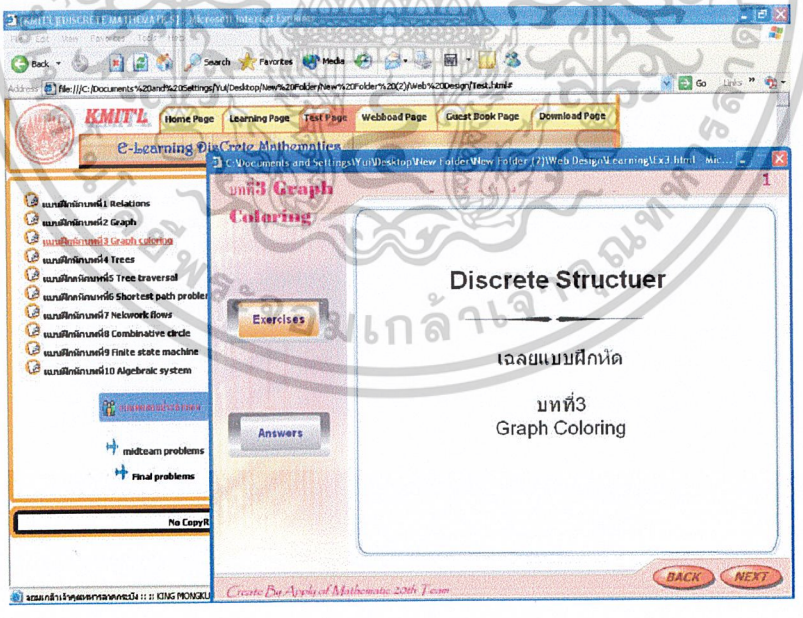
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.67



รูป 4.76 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

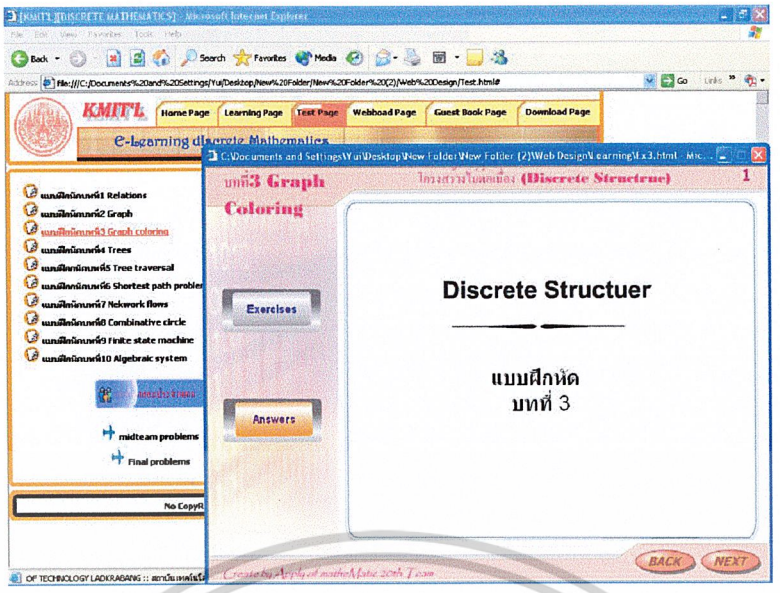
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่3



รูป 4.77 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่3 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่3 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.68

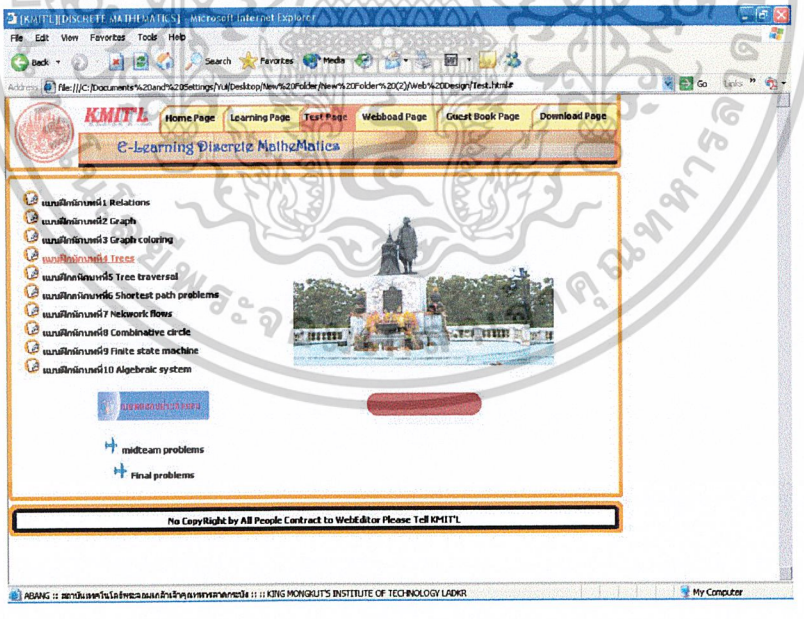
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.78 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับ ไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่3 ดังรูป 4.69

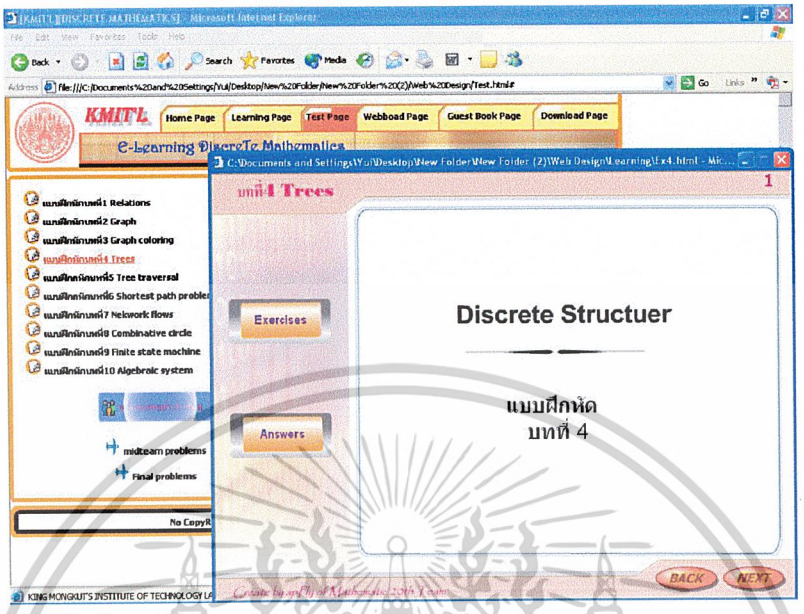
4.3.3 บทที่3 Tree ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่4



รูปที่ 4.79 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่4

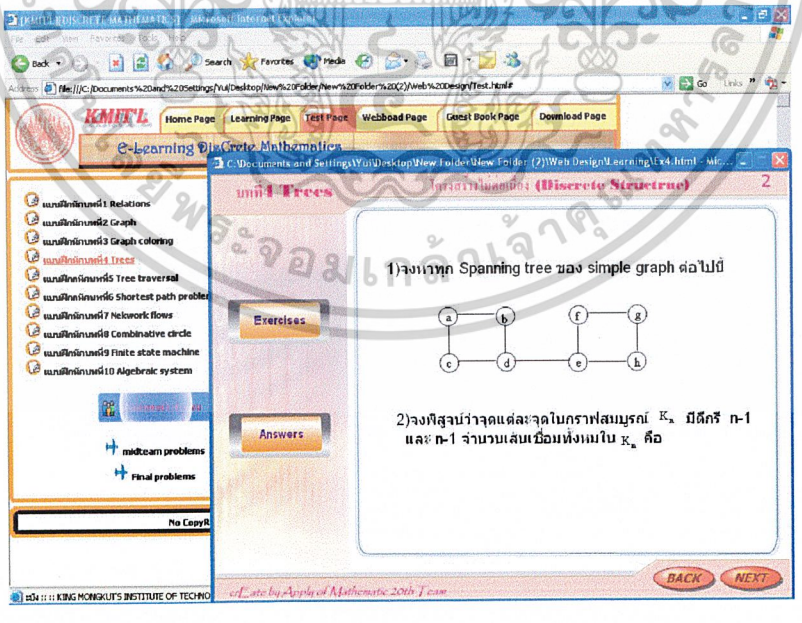
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่4 Tree จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่4 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.71



รูป 4.80 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่4 Tree

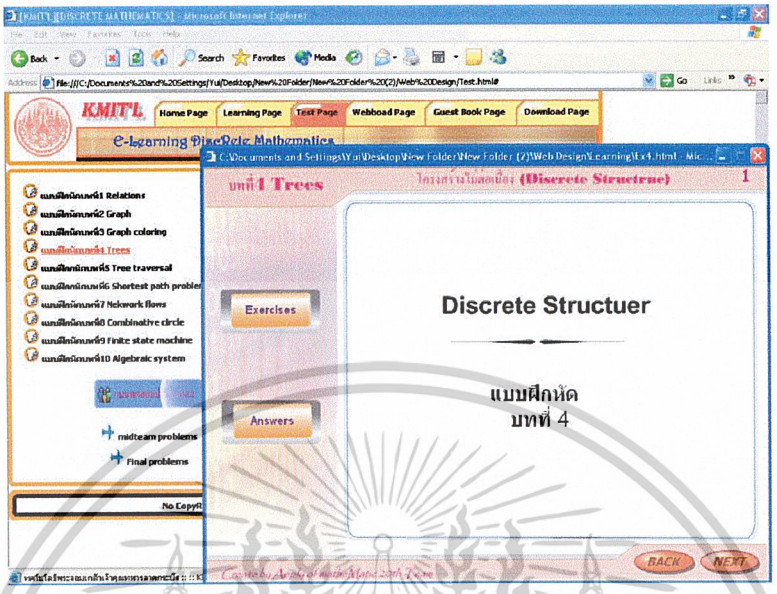
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.72



รูป 4.81 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่4

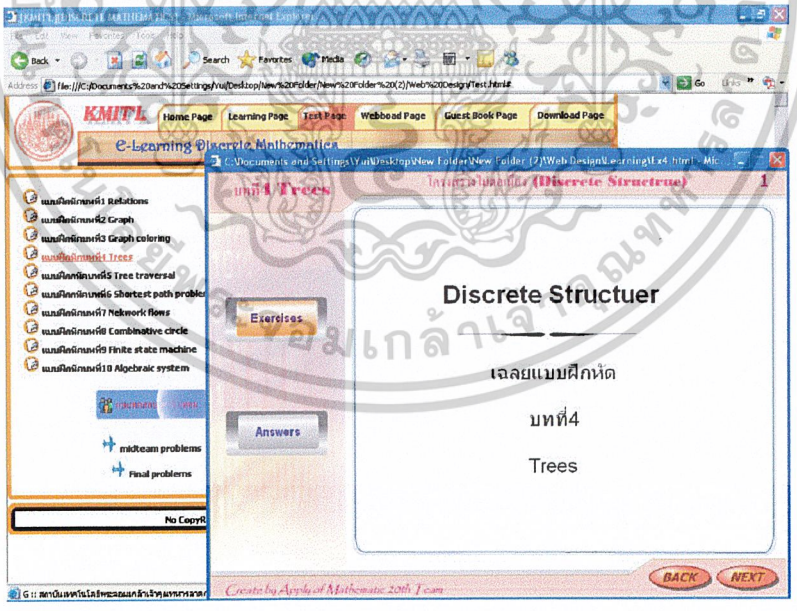
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.73



รูป 4.82 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

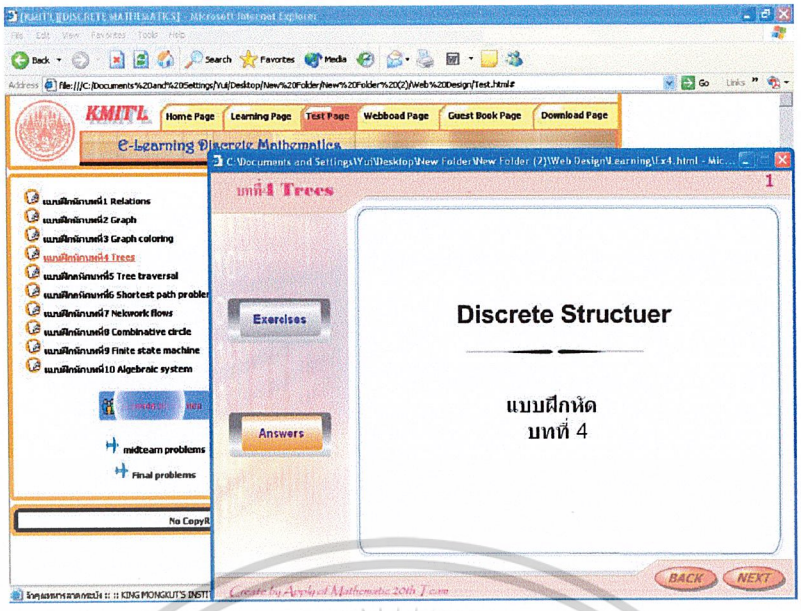
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่4



รูป 4.83 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่4 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่4 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.74

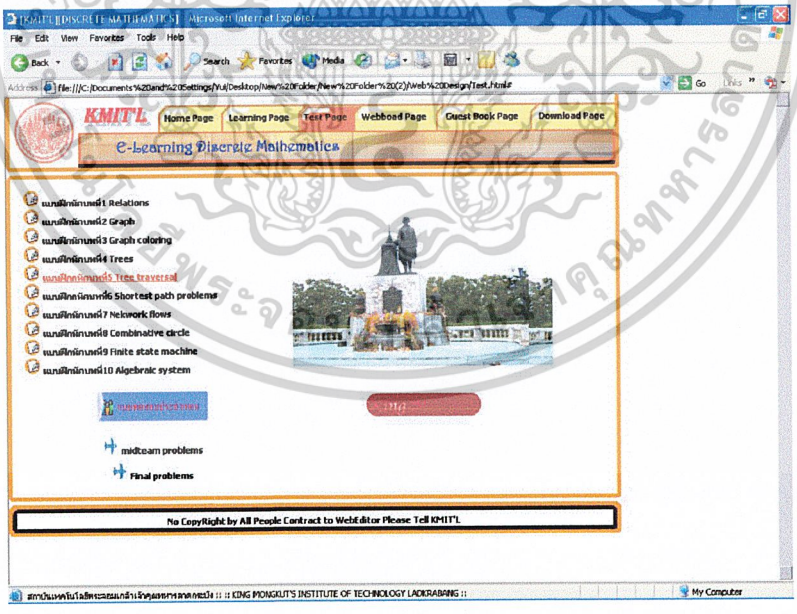
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.84 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่4 ดังรูป 4.75

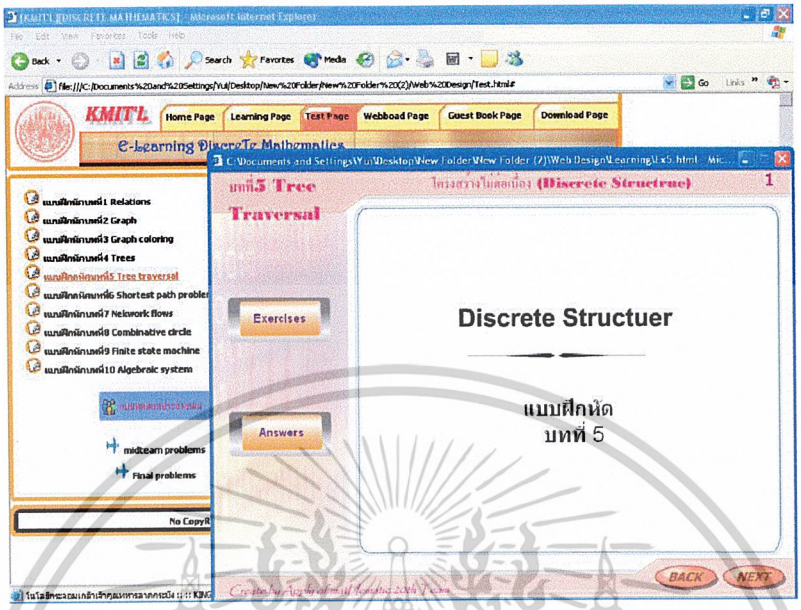
4.3.3 บทที่5 Tree traversal ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่5



รูปที่ 4.85 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่5

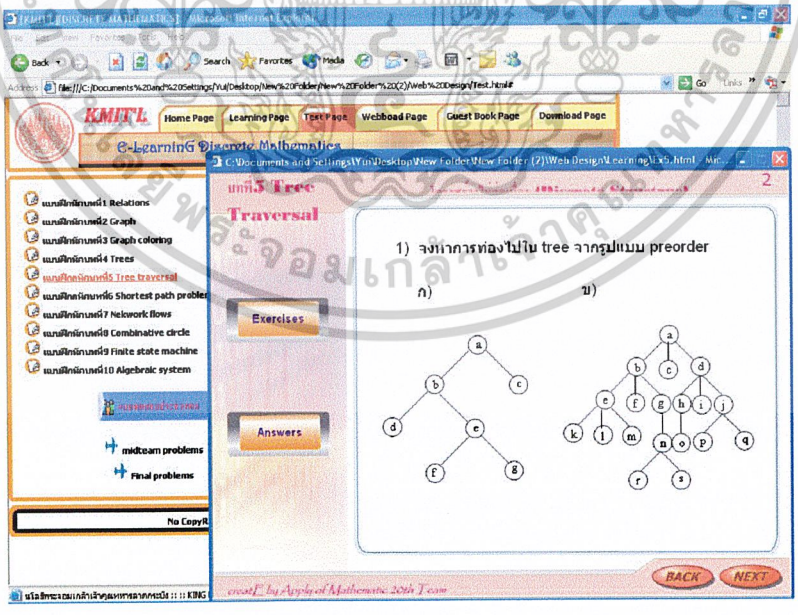
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่5 Tree traversal จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่5 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.77



รูป 4.86 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่5 Tree traversal

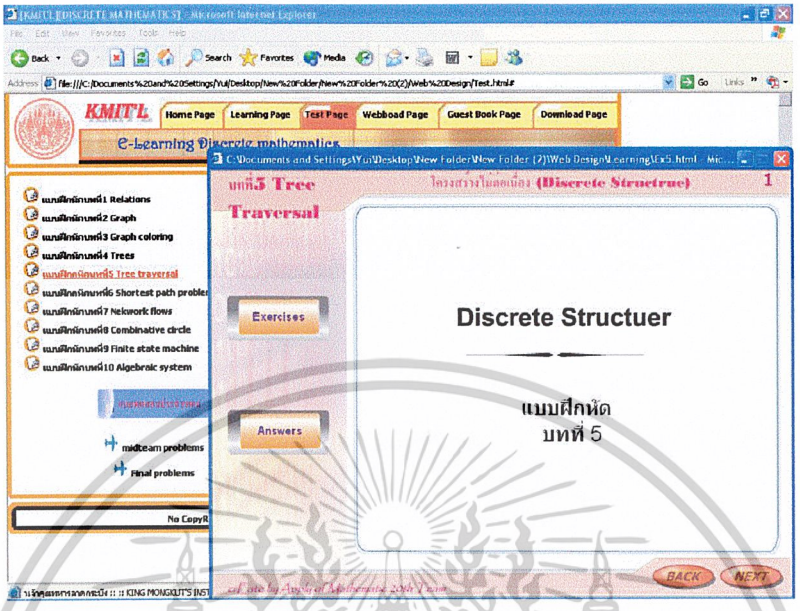
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.78



รูป 4.87 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่5

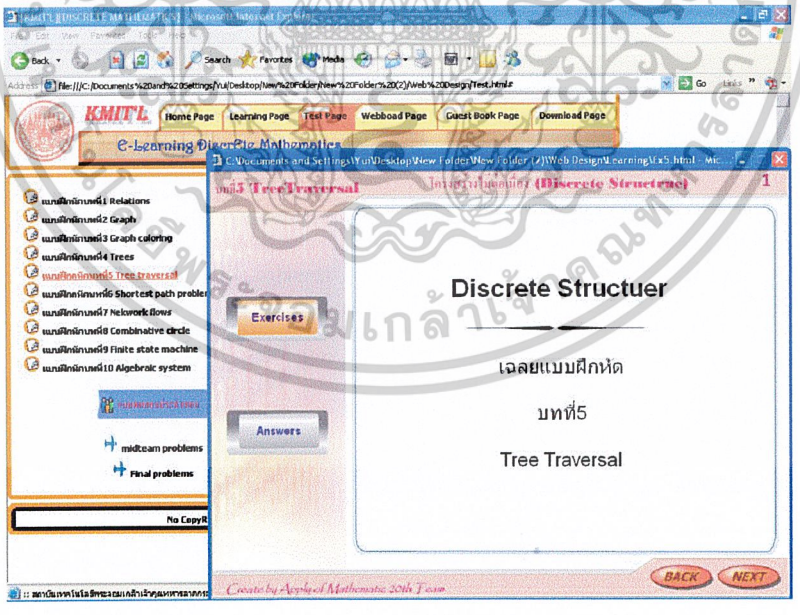
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.79



รูป 4.88 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

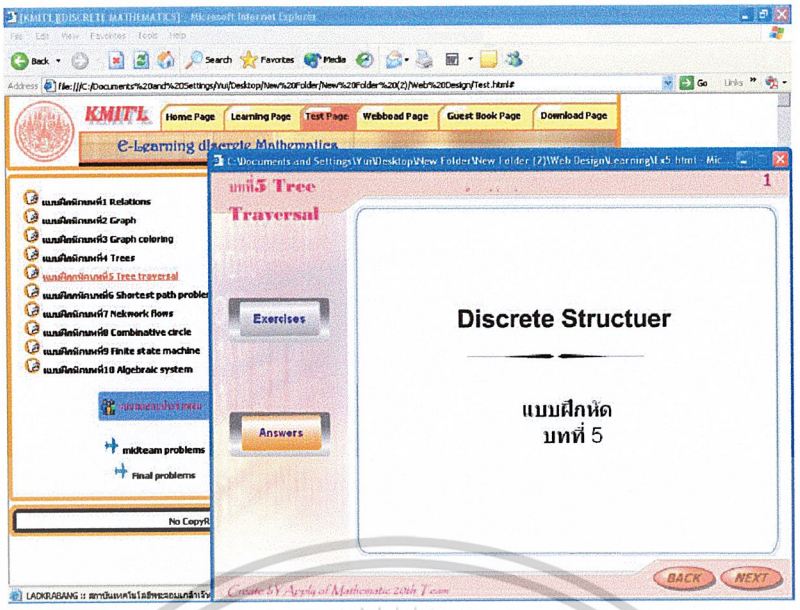
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่5



รูป 4.89 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่5 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่5 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.80

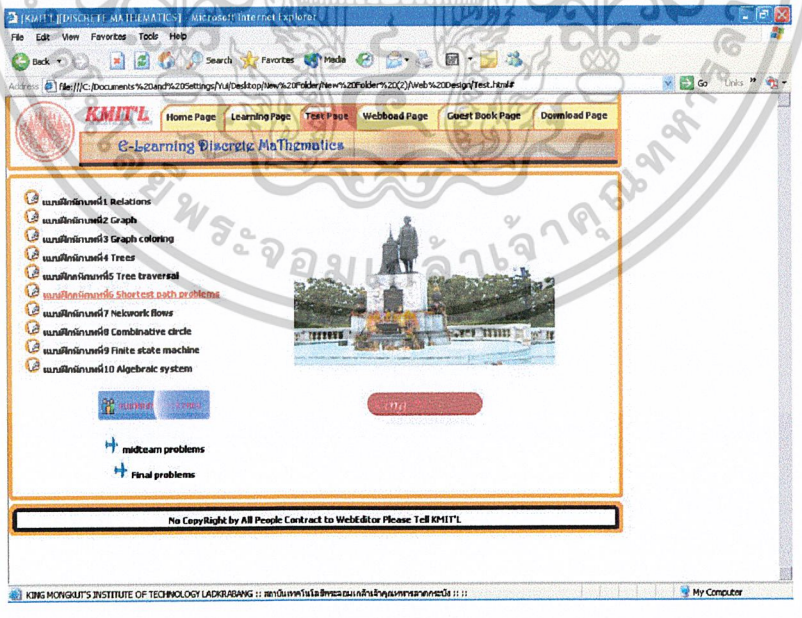
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.90 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่5 ดังรูป 4.81

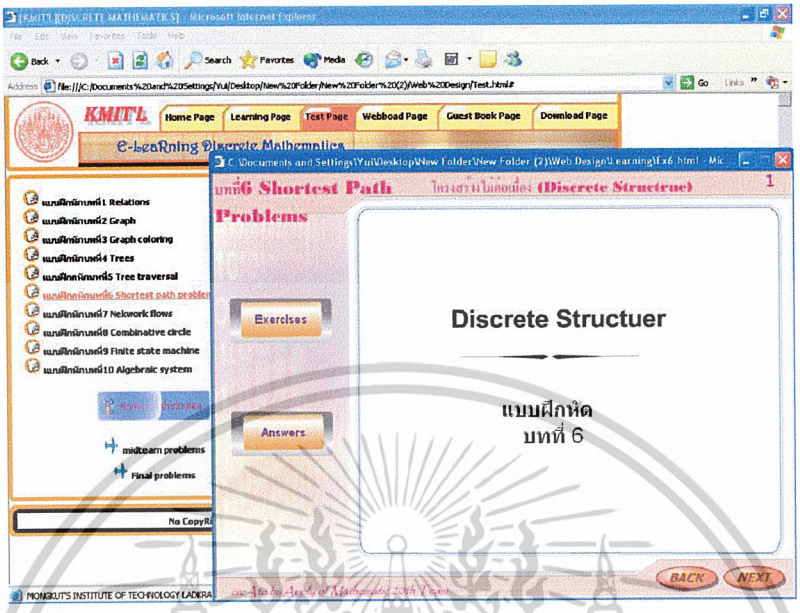
4.3.3 บทที่6 Shortest path problems ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่6



รูปที่ 4.91 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่6

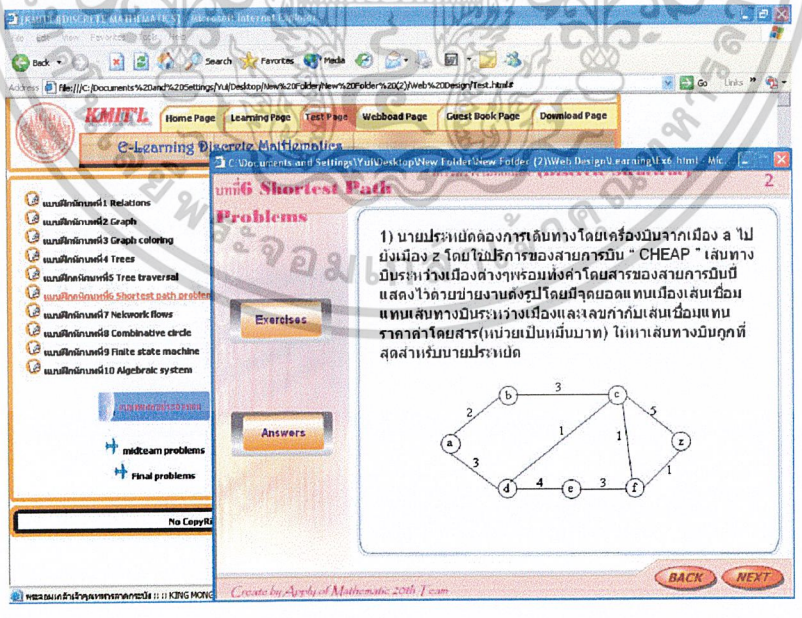
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่6 Shortest path problems จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่6 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.83



รูป 4.92 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่6 Shortest path problems

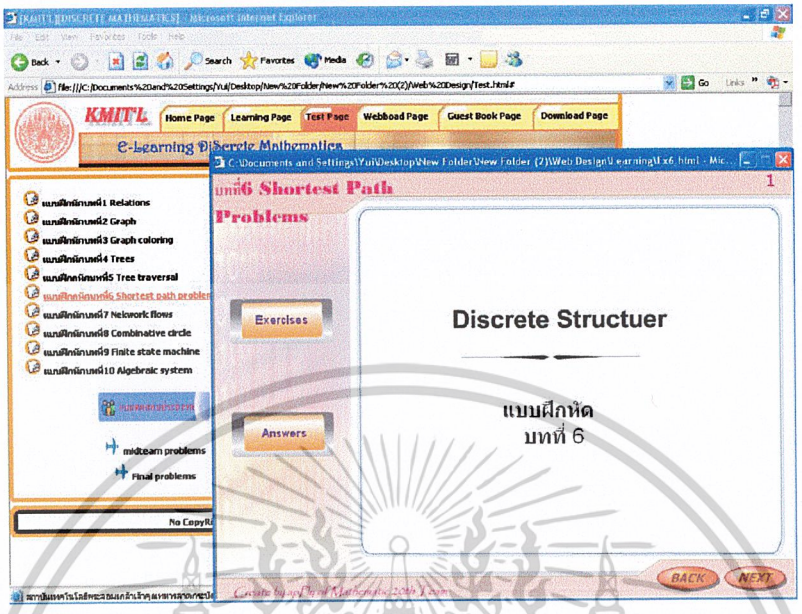
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.84



รูป 4.93 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่6

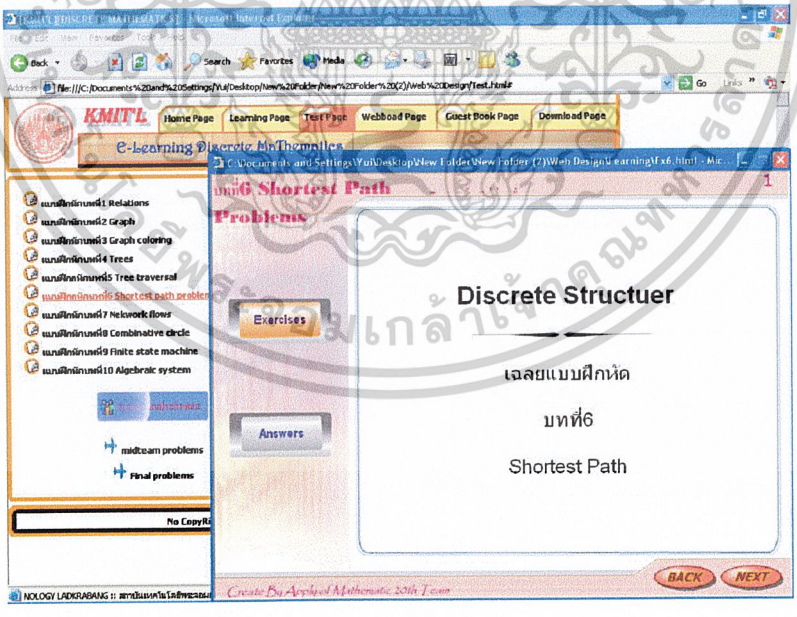
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.85



รูป 4.94 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

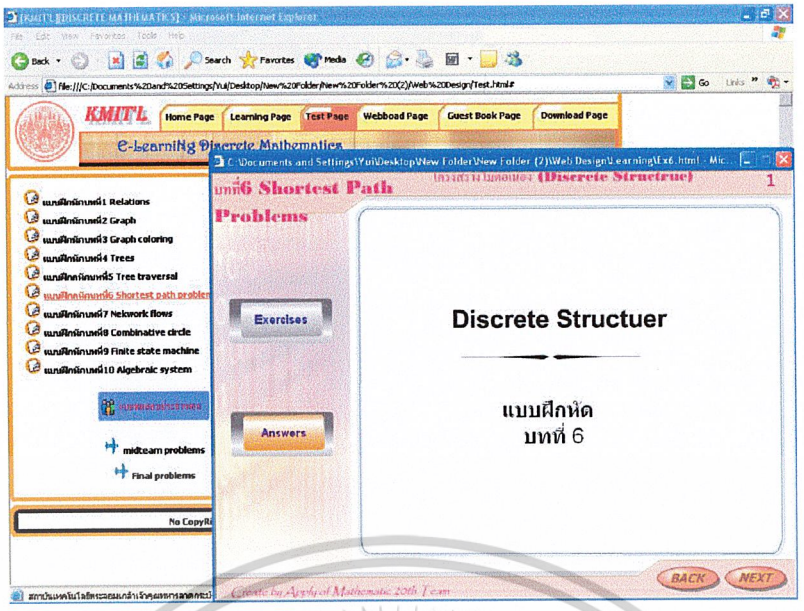
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่6



รูป 4.95 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่6 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่6 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.86

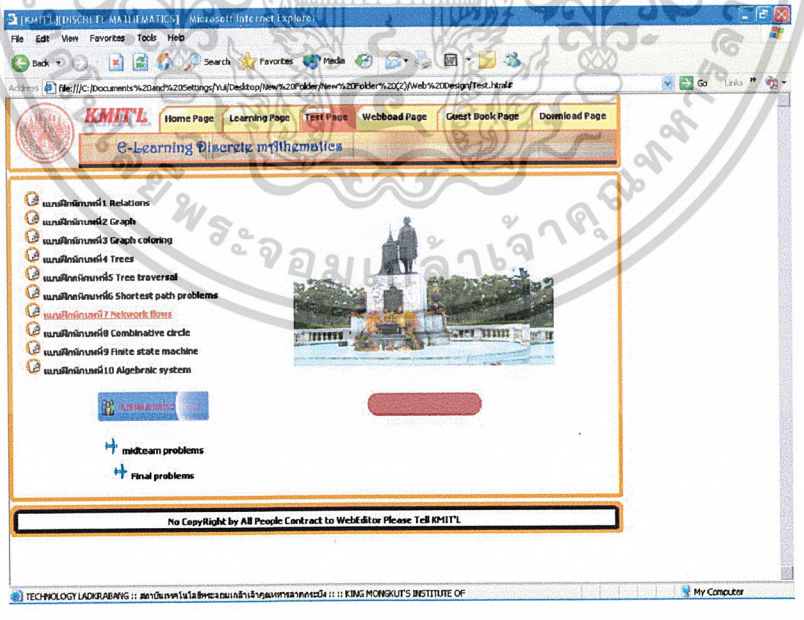
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.96 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่6 ดังรูป 4.87

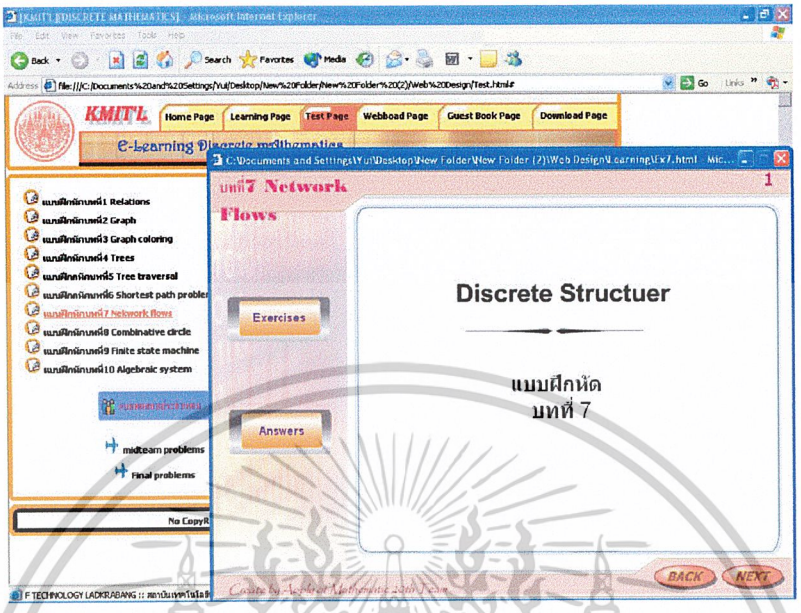
4.3.3 บทที่7 Network flows ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่ 7



รูปที่ 4.97 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่7

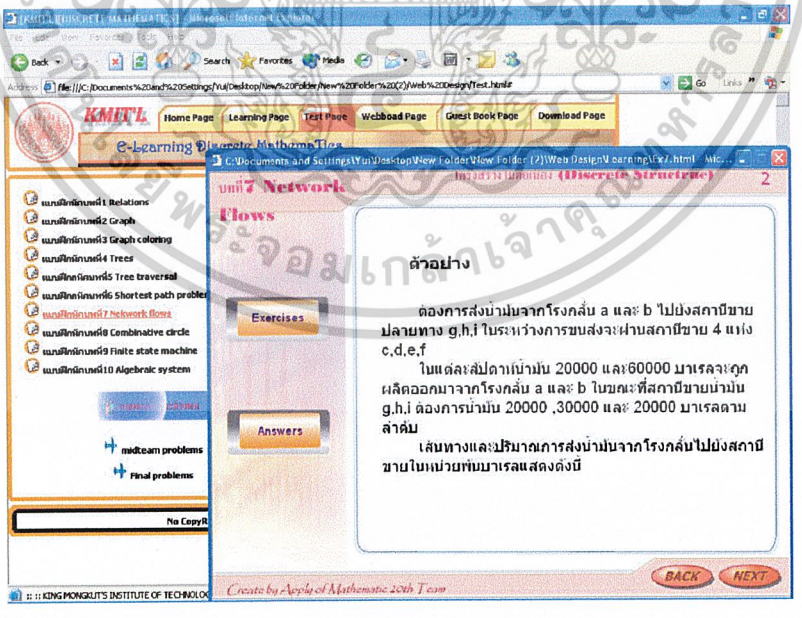
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่7 Network flows จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่7 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.89



รูป 4.98 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่7 Network flows

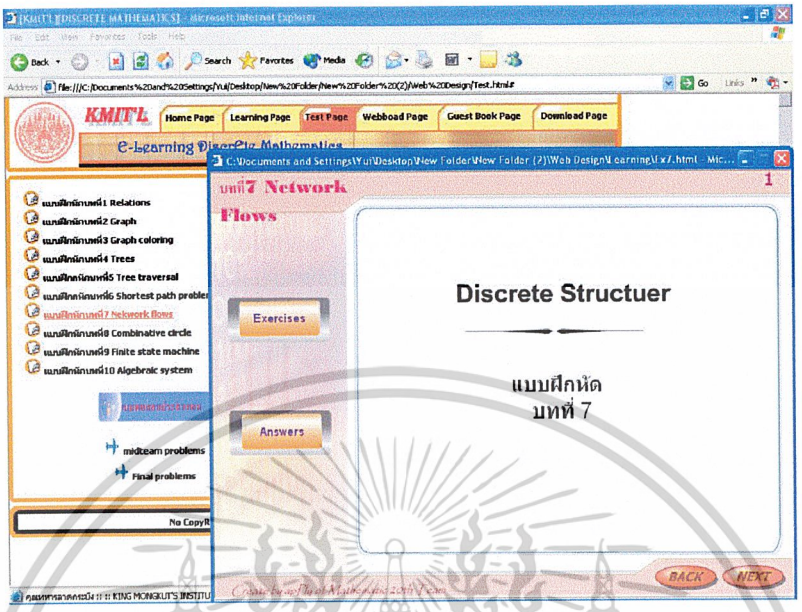
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.90



รูป 4.99 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่7

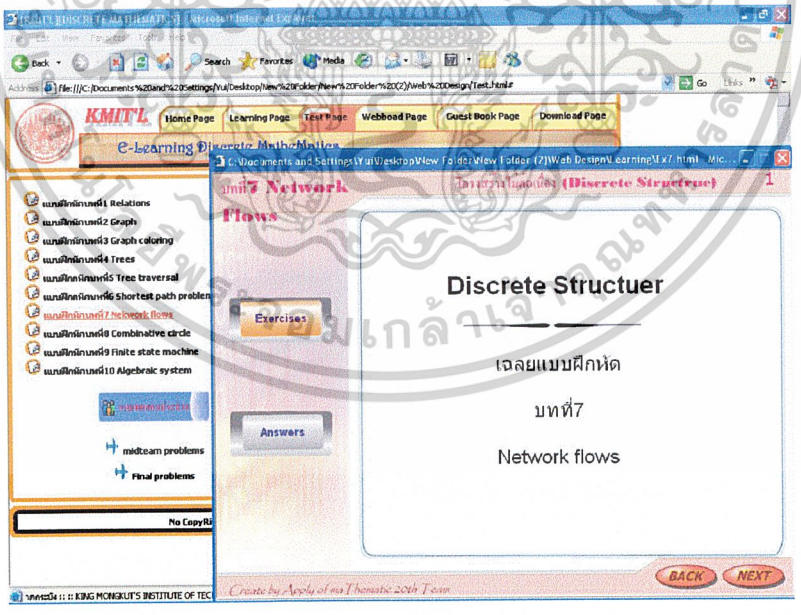
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.91



รูป 4.100 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

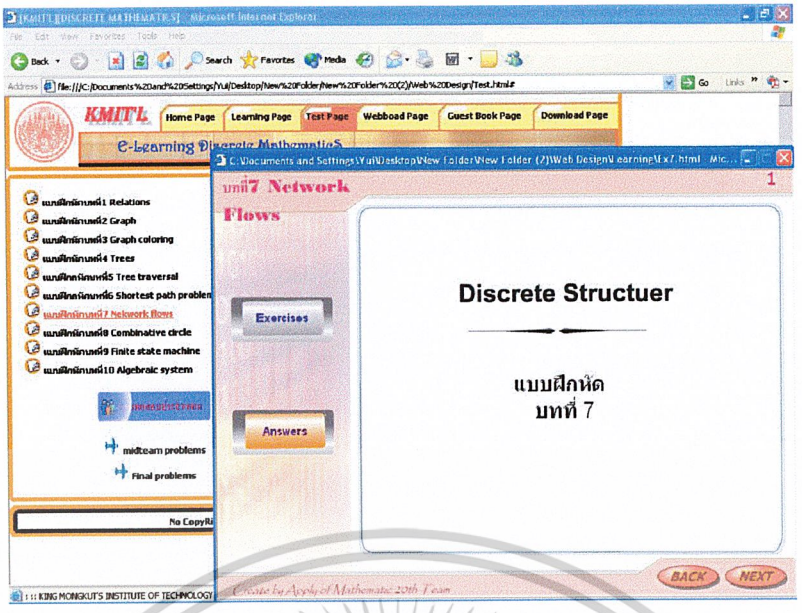
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่7



รูป 4.101 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่7 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่7 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.98

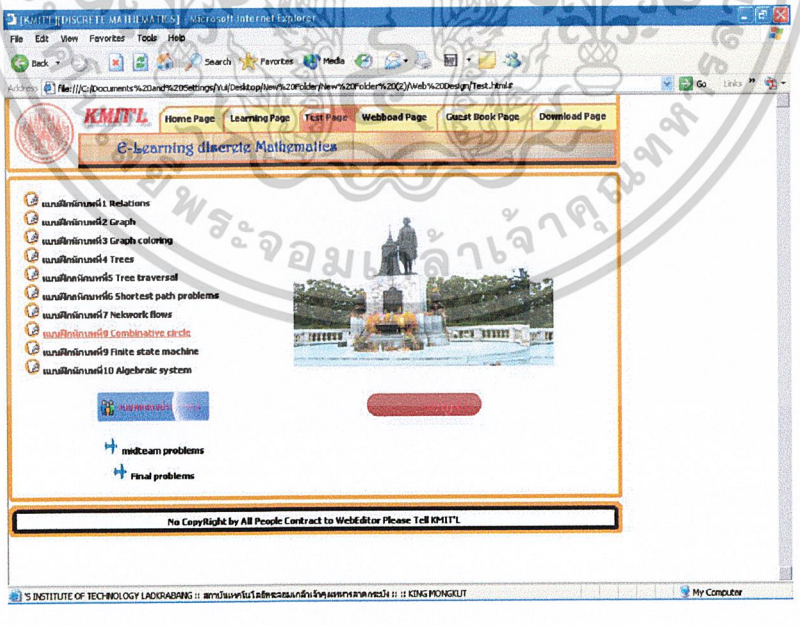
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.102 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่7 ดังรูป 4.99

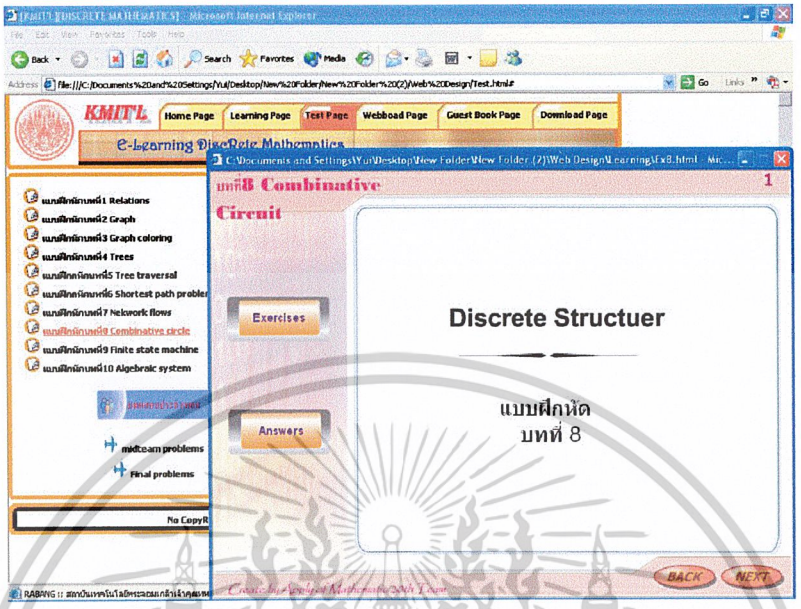
4.3.3 บทที่8 Combinative circle ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่8



รูปที่ 4.103 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่8

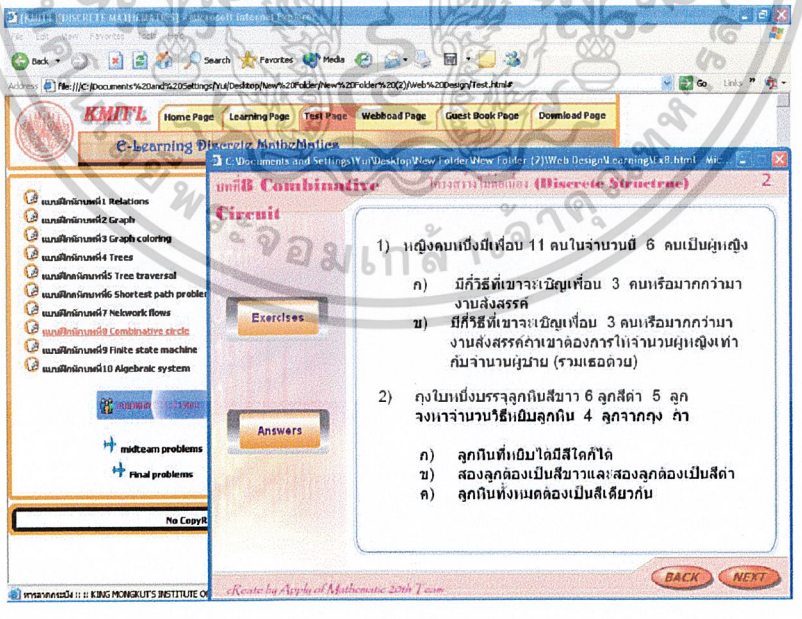
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่8 Combinative circle จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่8 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.101



รูป 4.104 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่8 Combinative circle

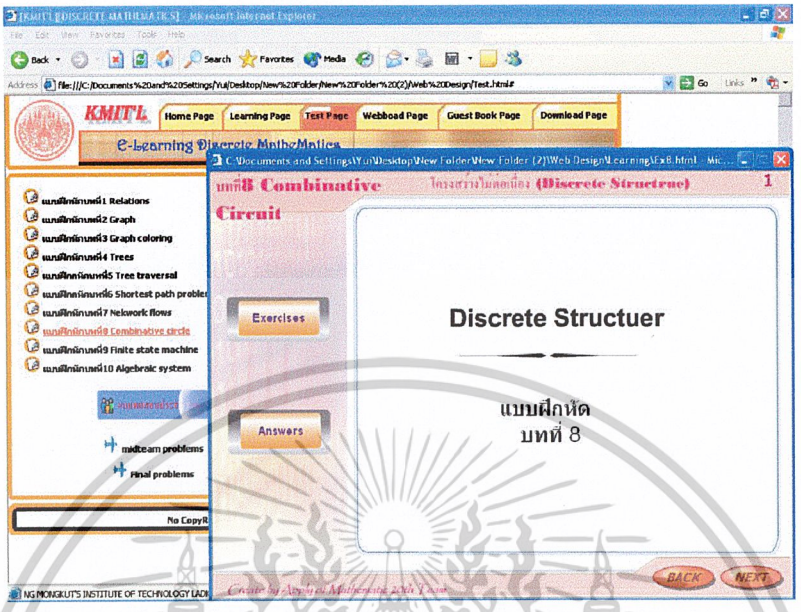
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.102



รูป 4.105 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่8

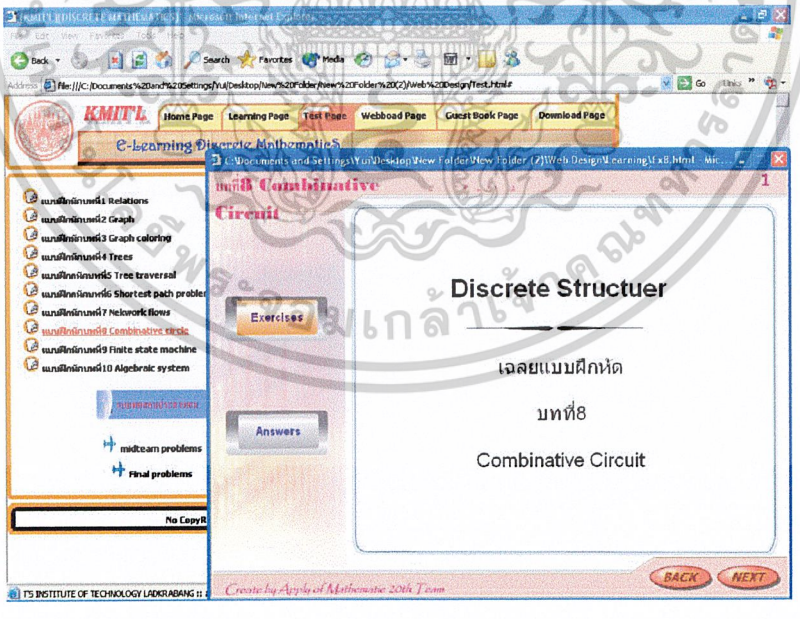
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.103



รูป 4.106 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

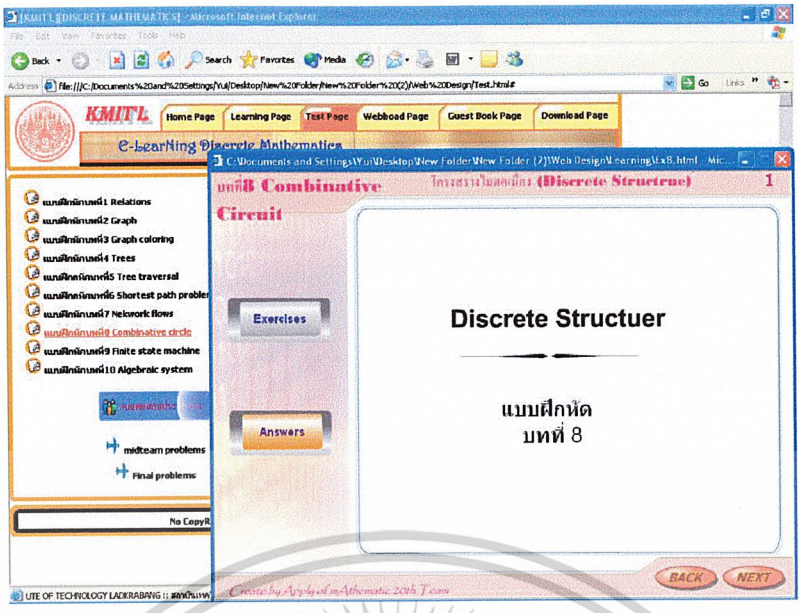
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่8



รูป 4.107 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่8 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่8 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.104

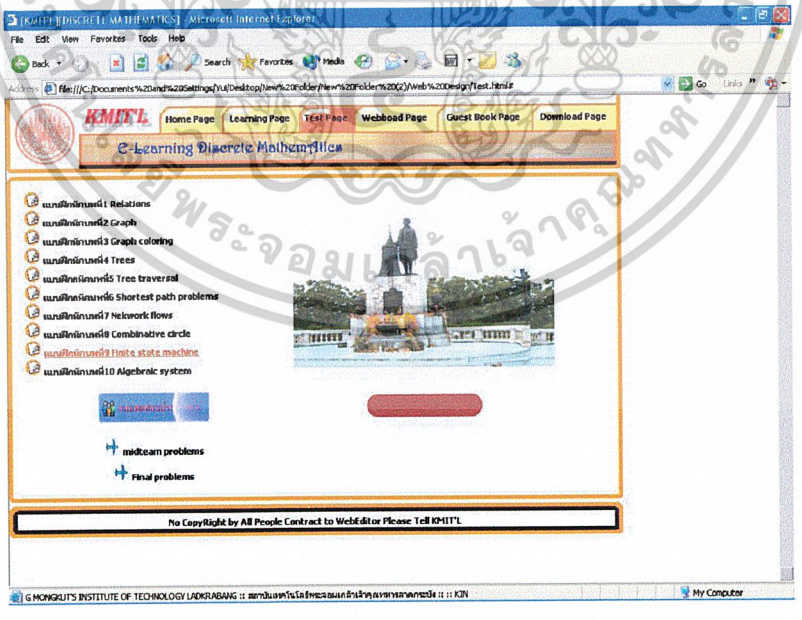
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.108 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่8 ดังรูป 4.105

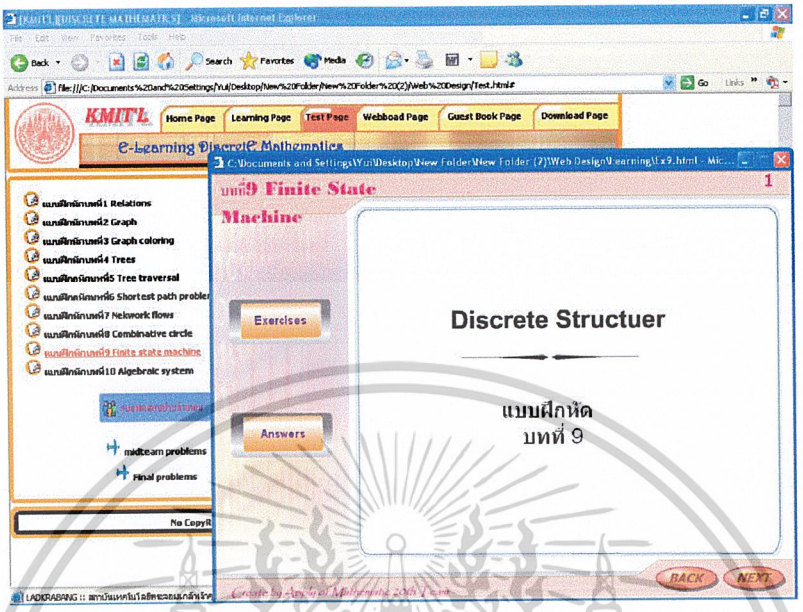
4.3.3 บทที่9 Finite state machine ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่9



รูปที่ 4.109 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่9

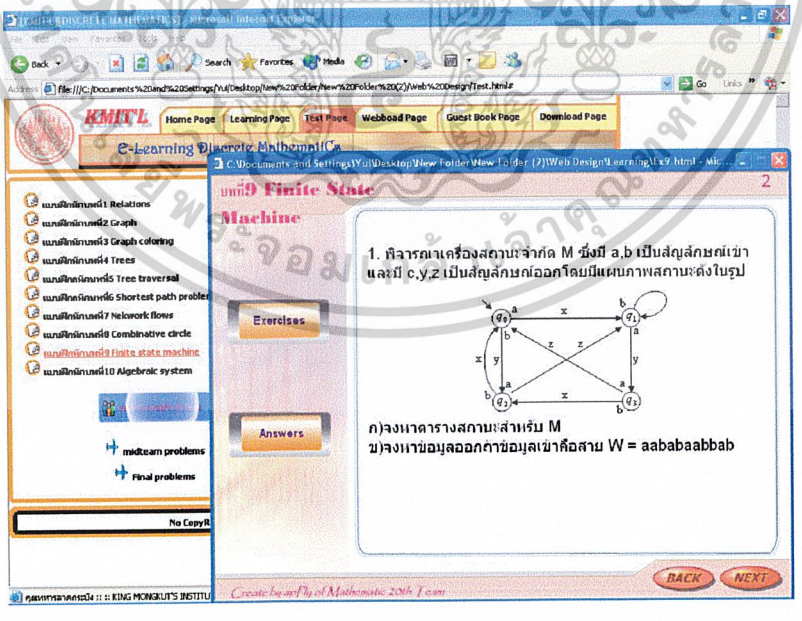
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่9 Finite state machine จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่9 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.107



รูป 4.110 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่9 Finite state machine

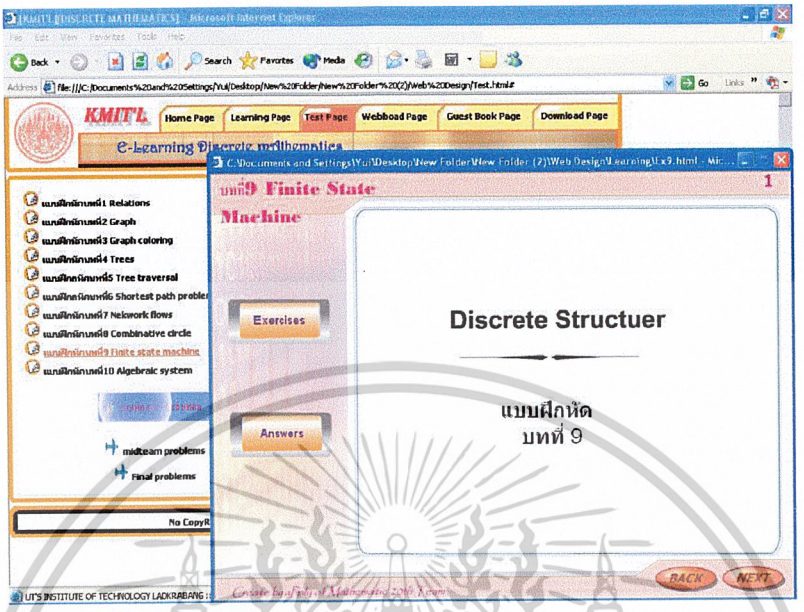
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.108



รูป 4.111 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่9

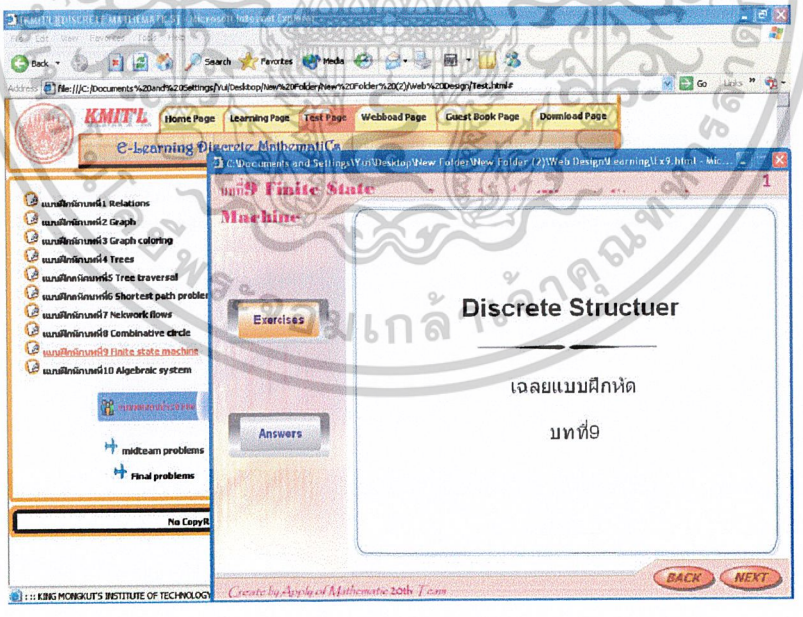
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.109



รูป 4.112 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

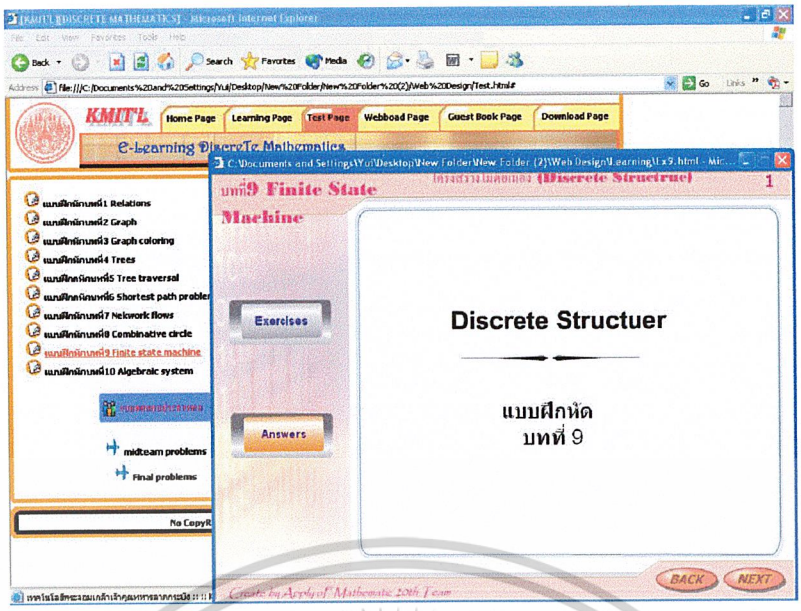
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่9



รูป 4.113 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่9 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่9 ซึ่งแสดงให้ดู ดังรูป 4.110

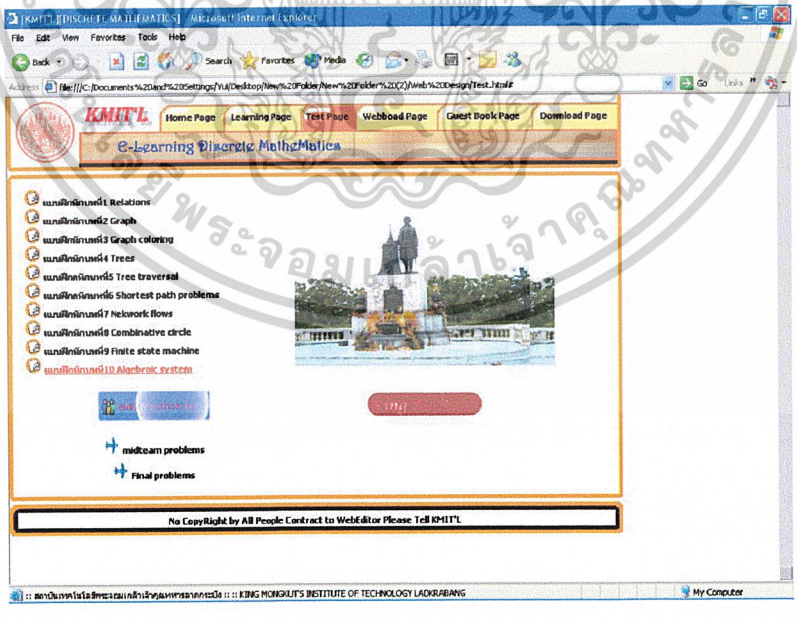
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.114 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่9 ดังรูป 4.111

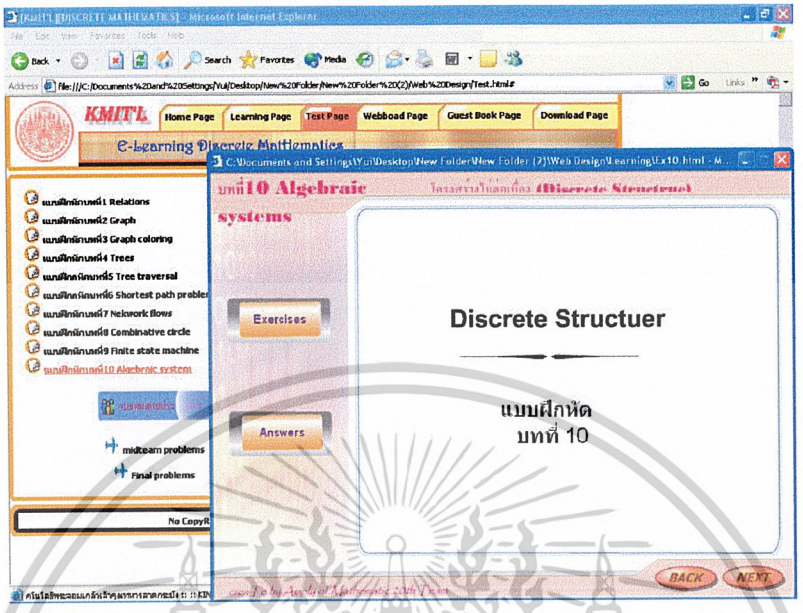
4.3.3 บทที่10 Algebraic system ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่10



รูปที่ 4.115 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าแบบฝึกหัดบทที่10

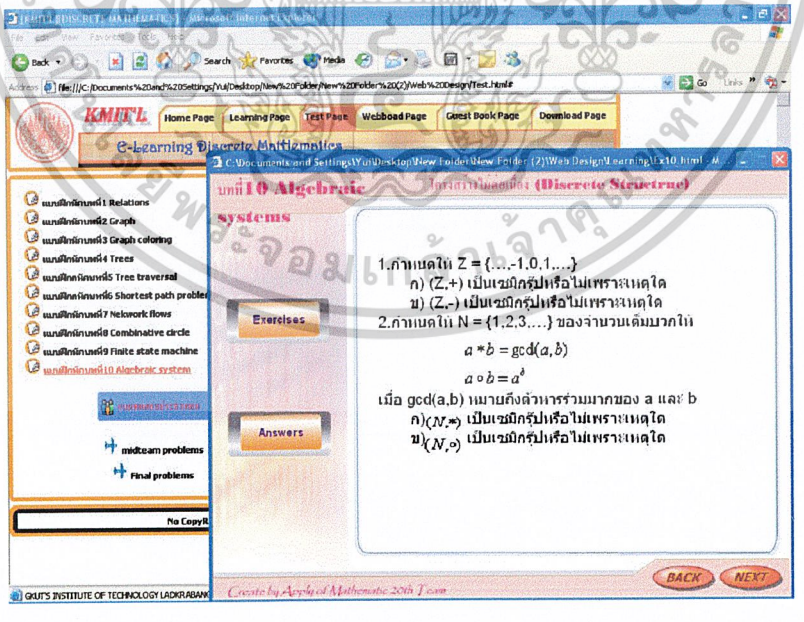
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ แบบฝึกหัดบทที่10 Algebraic system จะ link ไปยังหน้าแสดงแบบฝึกหัดของบทที่10 ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.113



รูป 4.116 แสดงหน้าจอ popup แบบฝึกหัดบทที่10 Algebraic system

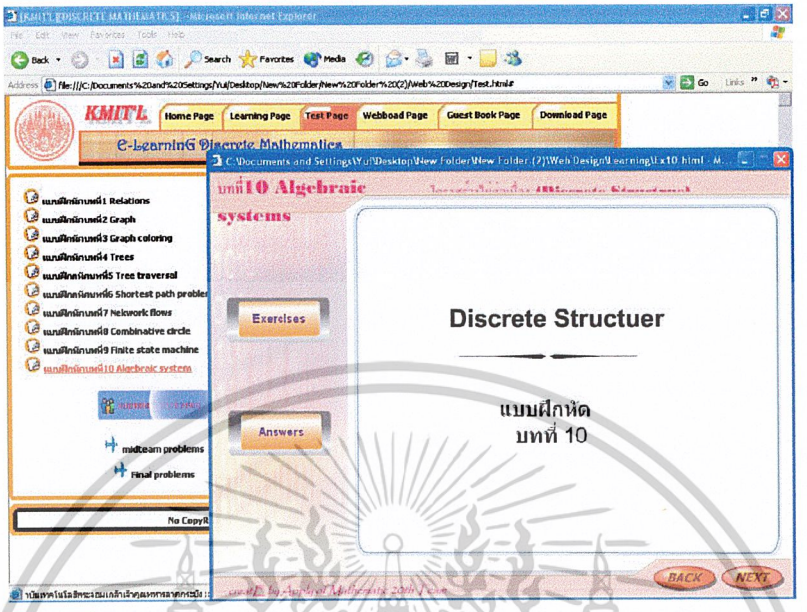
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.114



รูป 4.117 แสดงหน้าจอแบบฝึกหัดของบทที่10

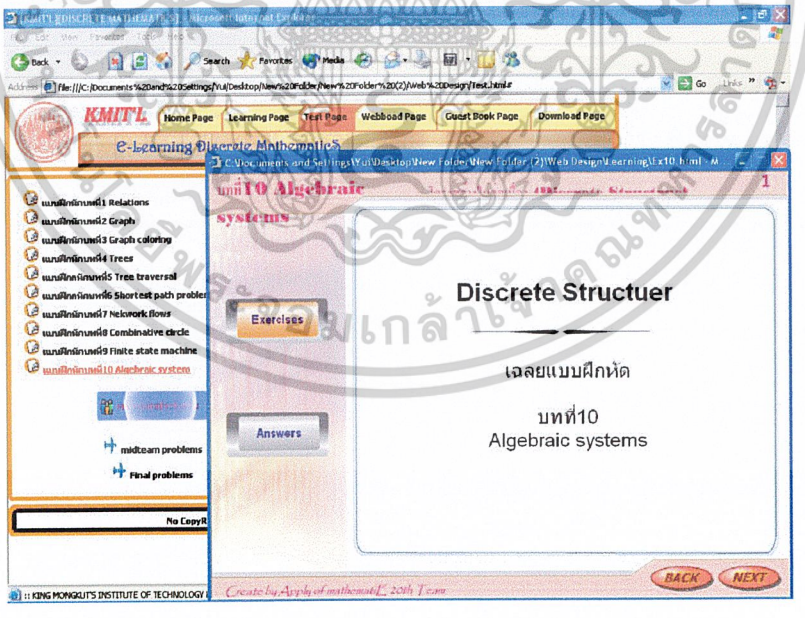
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.115



รูป 4.118 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

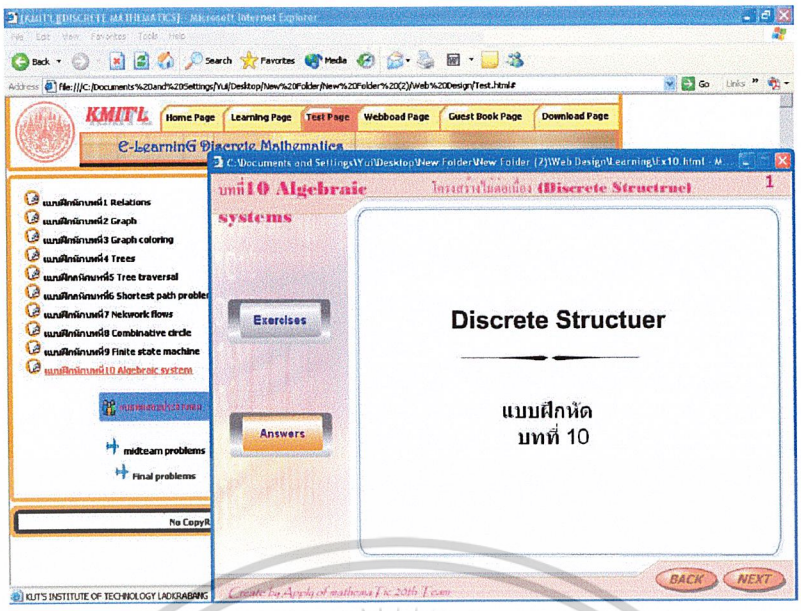
- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของแบบฝึกหัดบทที่10



รูป 4.119 แสดงหน้าจอเฉลยแบบฝึกหัดบทที่10 เมื่อคลิกปุ่ม Answers

- เมื่อคลิก Answers จะ link ไปยัง หน้าแสดงเฉลยแบบฝึกหัดบทที่10 ซึ่งแสดงให้ดูดังรูป 4.116

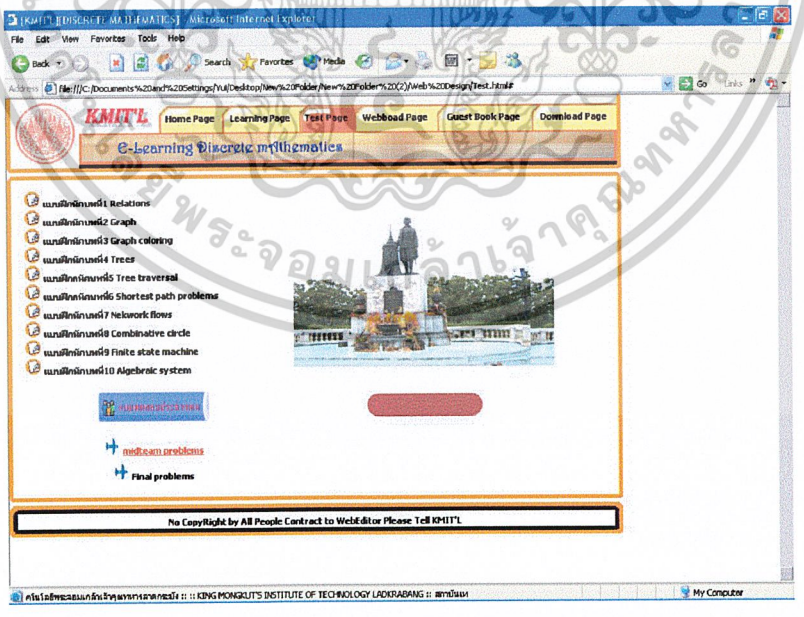
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูป 4.120 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม Exercises

- เมื่อคลิก Exercises จะทำการย้อนกลับไปหน้าแบบฝึกหัดบทที่10 ดังรูป 4.117

4.3.3 แบบทดสอบวัดผล Midterm ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงข้อสอบ Midterm



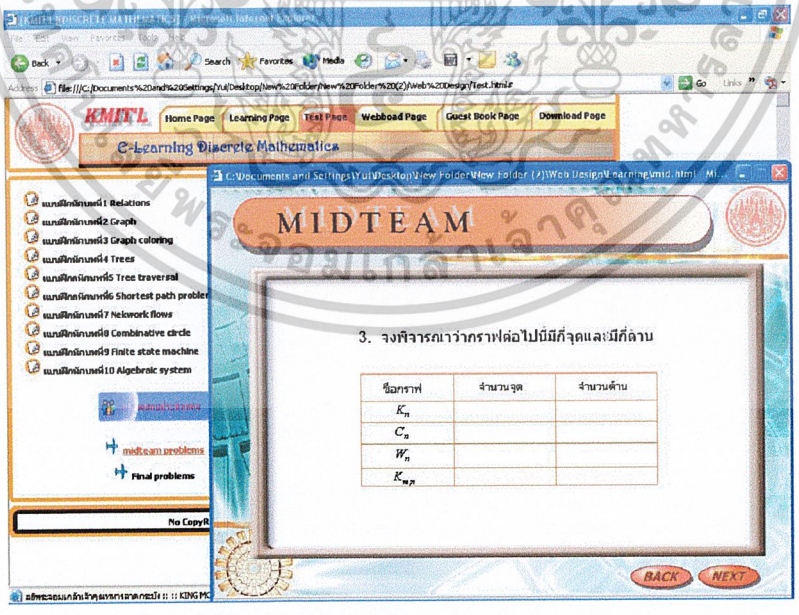
รูปที่ 4.121 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าข้อสอบ Midterm

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อทำการคลิกที่ Midterm problems จะ link ไปยัง หน้าแสดงข้อสอบ Midterm ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.119

รูป 4.122 แสดงหน้าจอ popup ข้อสอบ Midterm

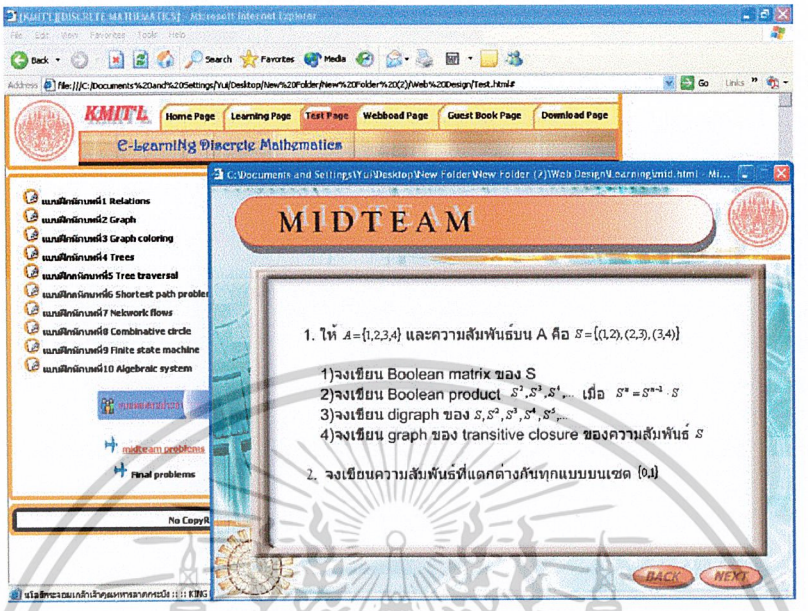
- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.120



รูป 4.123 แสดงหน้าจอของข้อสอบ Midterm

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.121

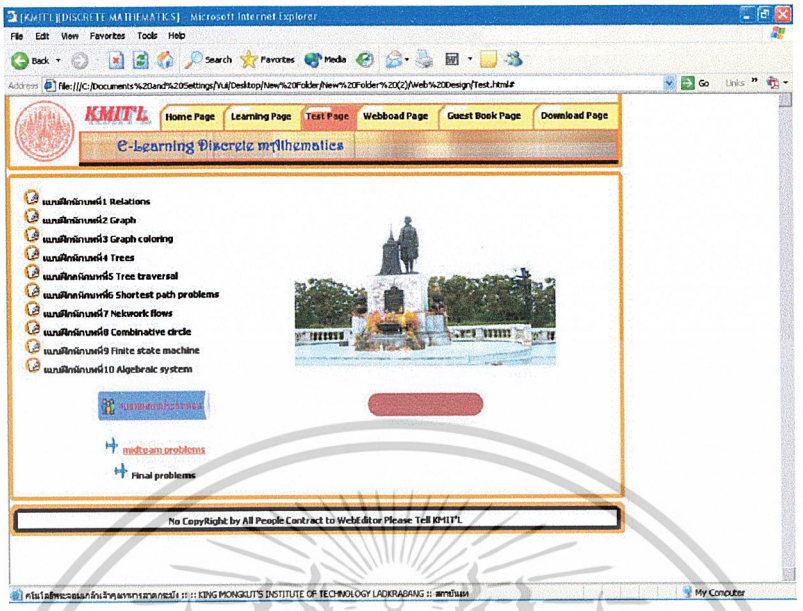


รูป 4.124 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของข้อสอบ Midterm

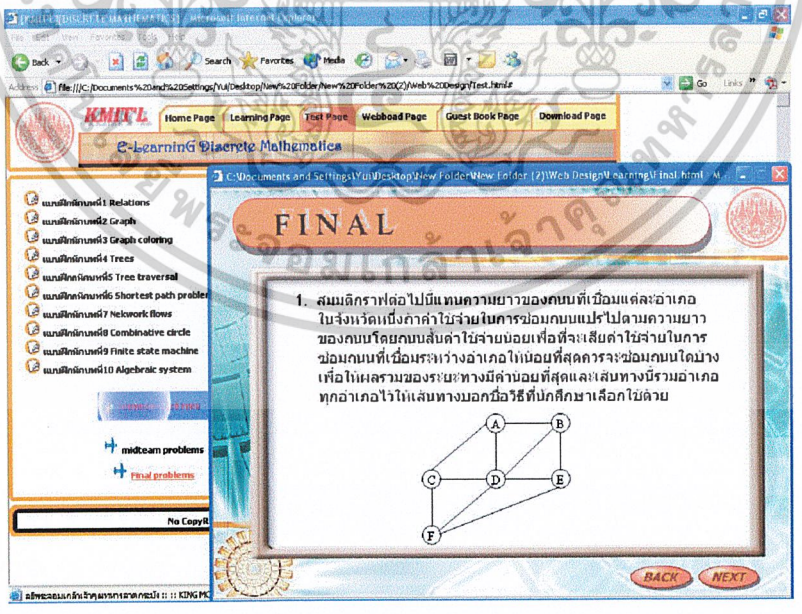
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.3 แบบทดสอบวัดผล Final ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ link ไปยังหน้าแสดงข้อสอบ Final



รูปที่ 4.125 แสดงหน้าจอการ link ไปยังหน้าข้อสอบ Final

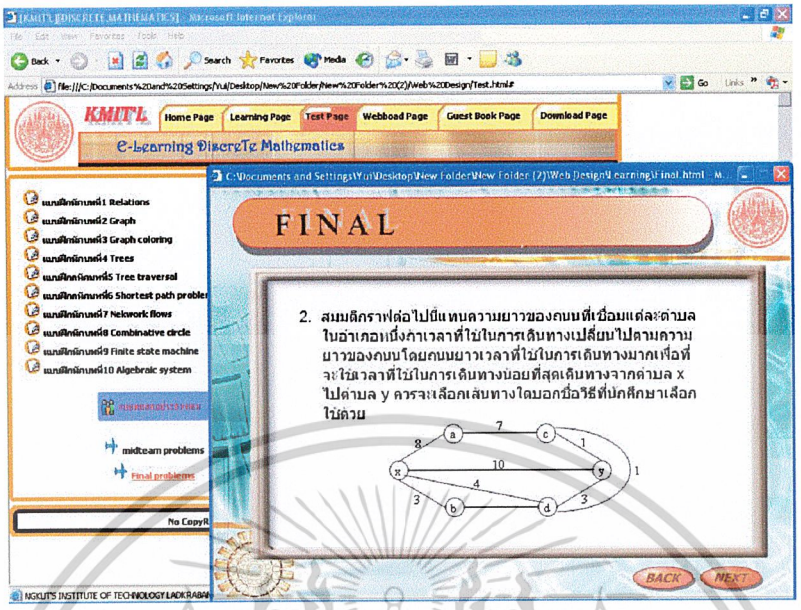
- เมื่อทำการคลิกที่ Final problems จะ link ไปยัง หน้าแสดงข้อสอบ Final ซึ่งแสดงให้ดูเป็น popup ดังรูป 4.123



รูป 4.126 แสดงหน้าจอ popup ข้อสอบ Final

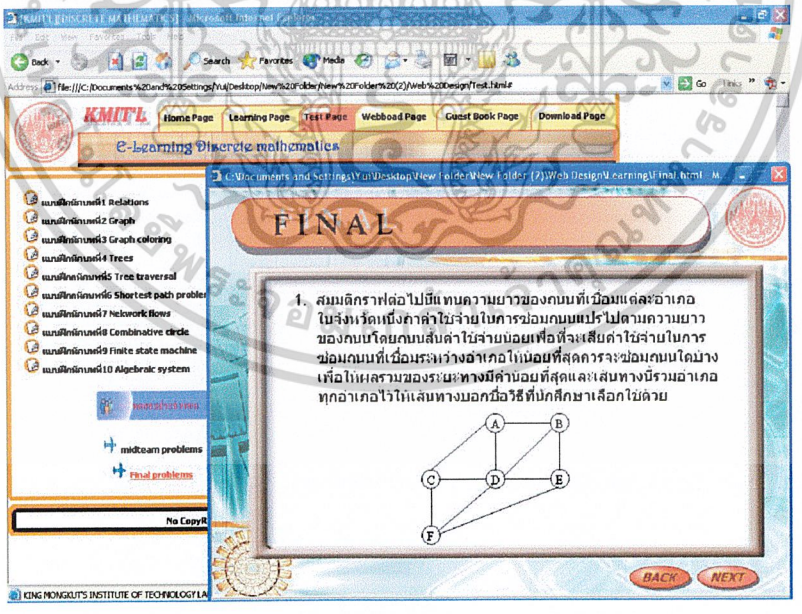
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เมื่อคลิก NEXT จะทำการเปลี่ยนหน้า ดังรูปที่ 4.124



รูป 4.127 แสดงหน้าจอของข้อสอบ Final

- เมื่อคลิก NEXT ไปเรื่อยๆจะทำการเปลี่ยนหน้าต่อไปจนจบ
- เมื่อคลิก BACK จะทำการย้อนกลับไปหน้าที่แล้วดังรูป 4.125

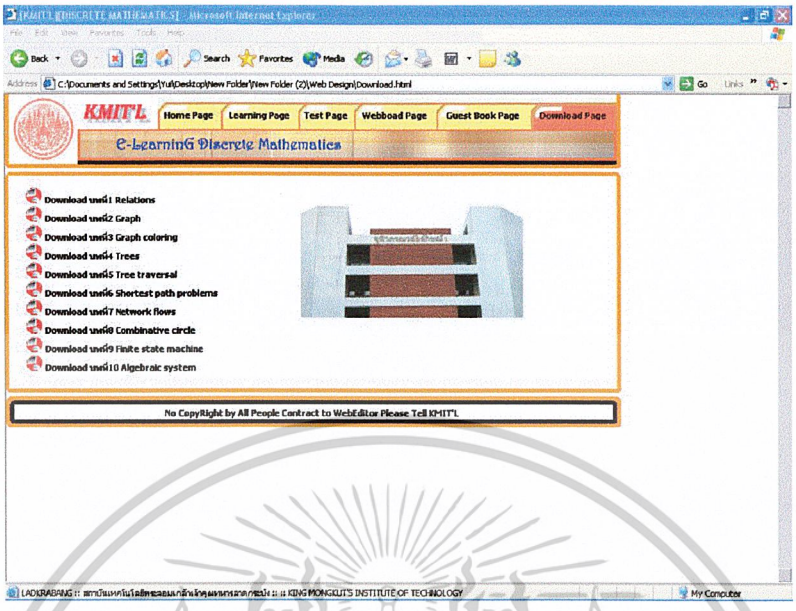


รูป 4.128 แสดงหน้าจอการคลิกปุ่ม BACK

- เมื่อคลิกปุ่ม BACK จะย้อนกลับมาหน้าที่แล้วของข้อสอบ Final

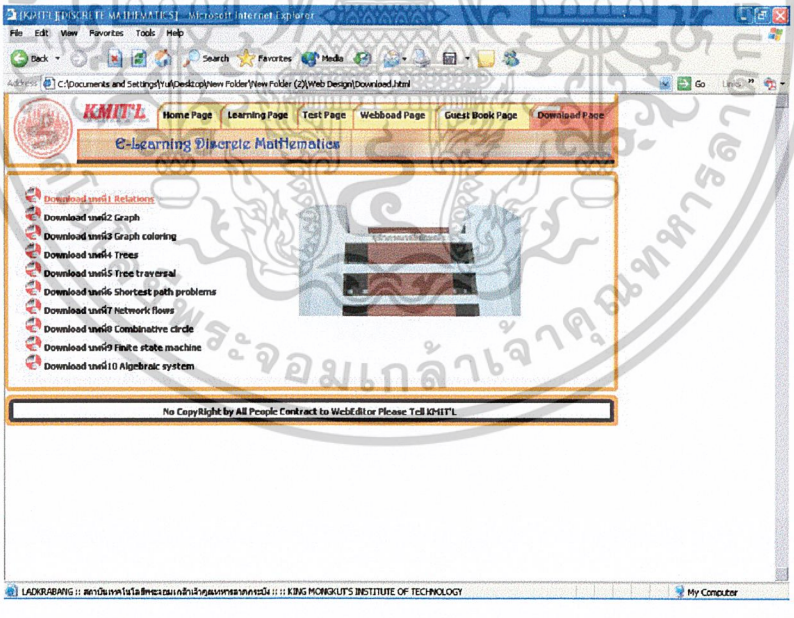
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 Download page



รูป 4.129

4.6.1 บทที่1 Relations ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่ 1

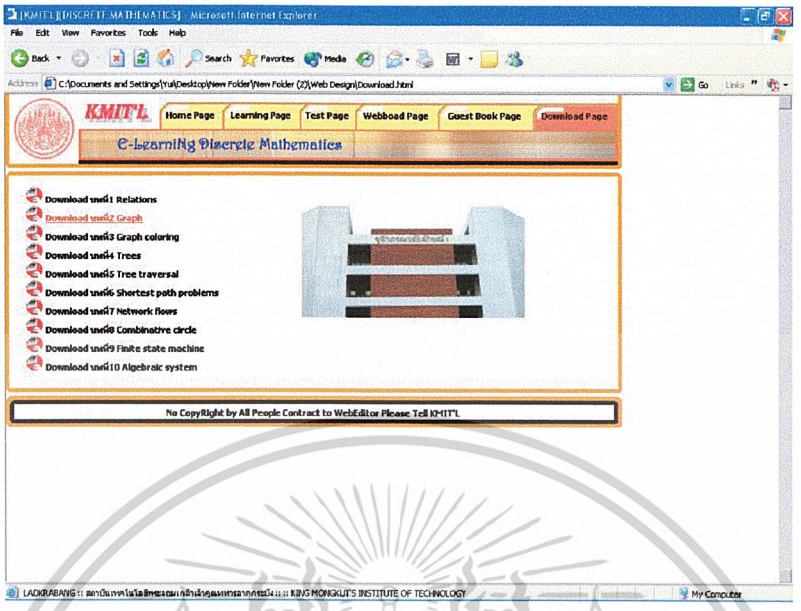


รูปที่ 4.130 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่ 1

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่1 Relations จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่1 ดังรูป 4.127

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.2 บทที่2 Graph ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่2

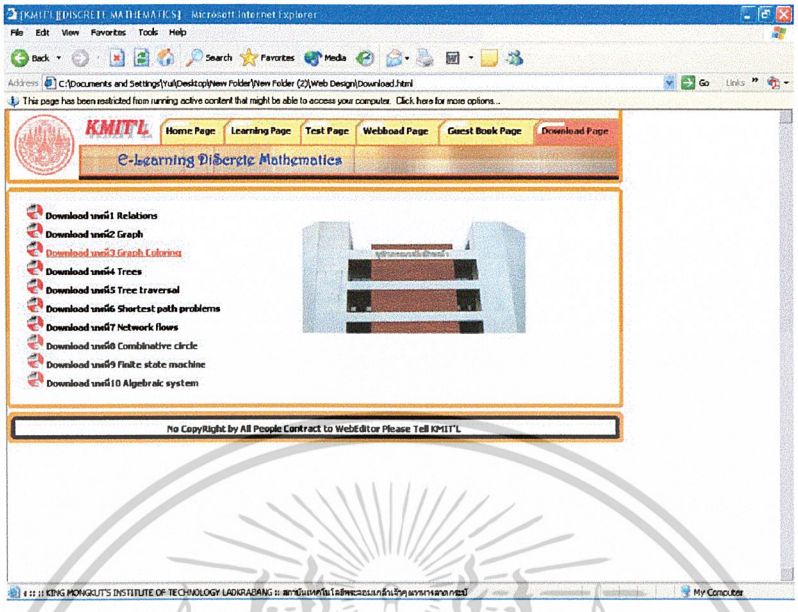


รูปที่ 4.131 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่2

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่2 Graph จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่2 ดังรูป 4.128

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.3 บทที่3 Graph coloring ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่3

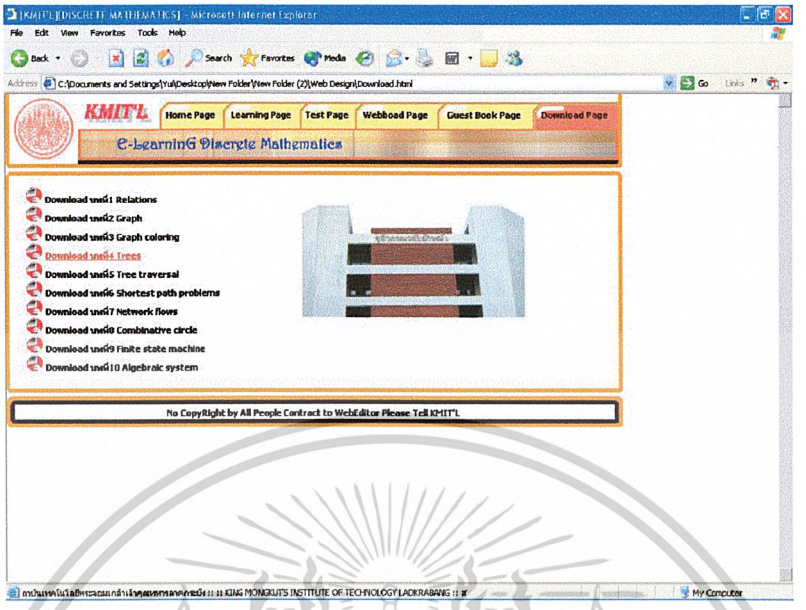


รูปที่ 4.132 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่3

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่3 Graph coloring จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่3 ดังรูป 4.129

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.4 บทที่4 Trees ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่4

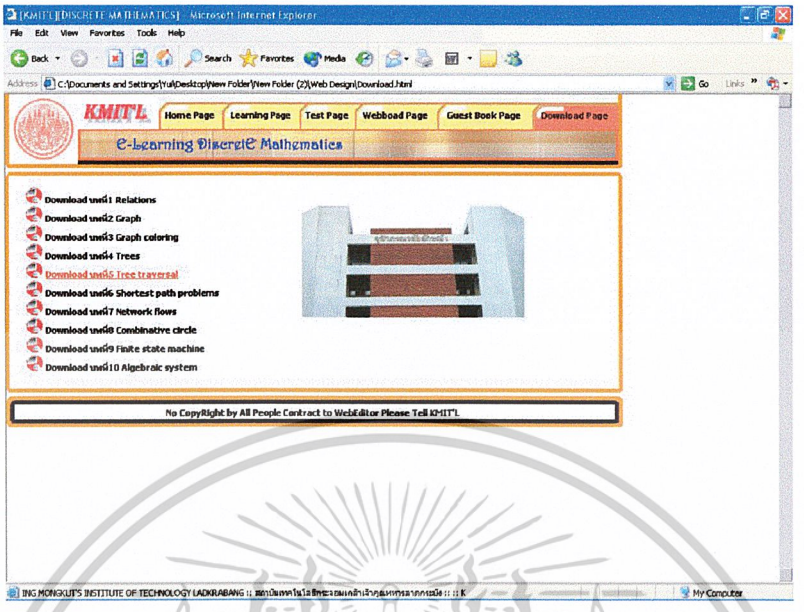


รูปที่ 4.133 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่4

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่4 Trees จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่4 ดังรูป 4.130

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.5 บทที่5 Tree traversal ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่5

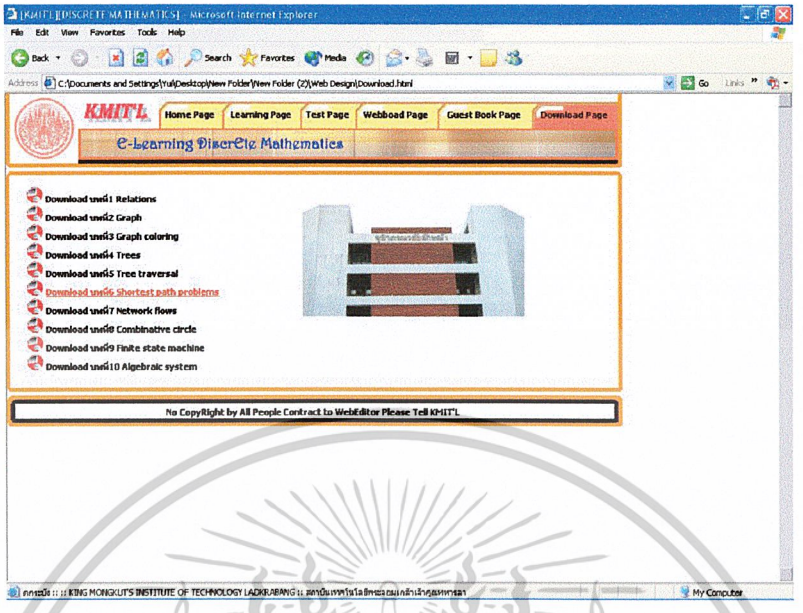


รูปที่ 4.134 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่5

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่5 Tree traversal จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่5 ดังรูป 4.131

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.6 บทที่6 Shortest path problems ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่6

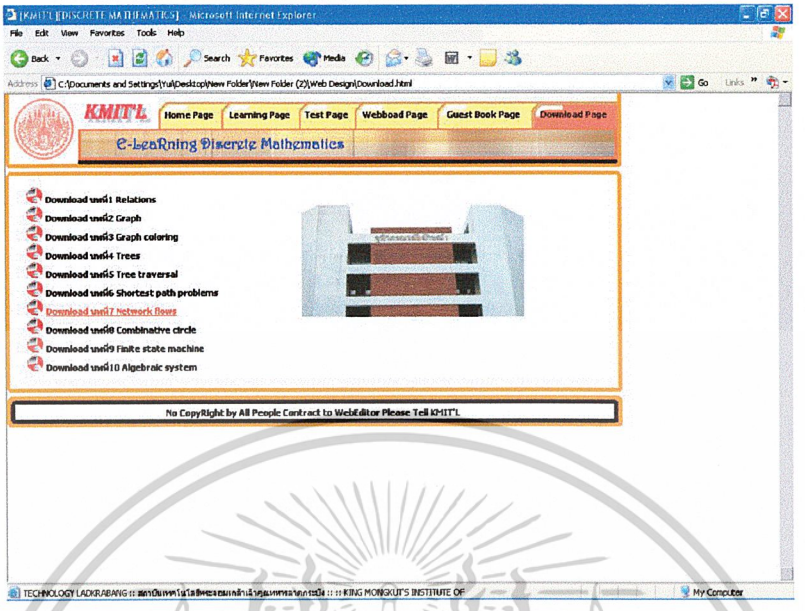


รูปที่ 4.135 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่6

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่6 Shortest path problem จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่6 ดังรูป 4.132

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.7 บทที่7 Network flows ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่7

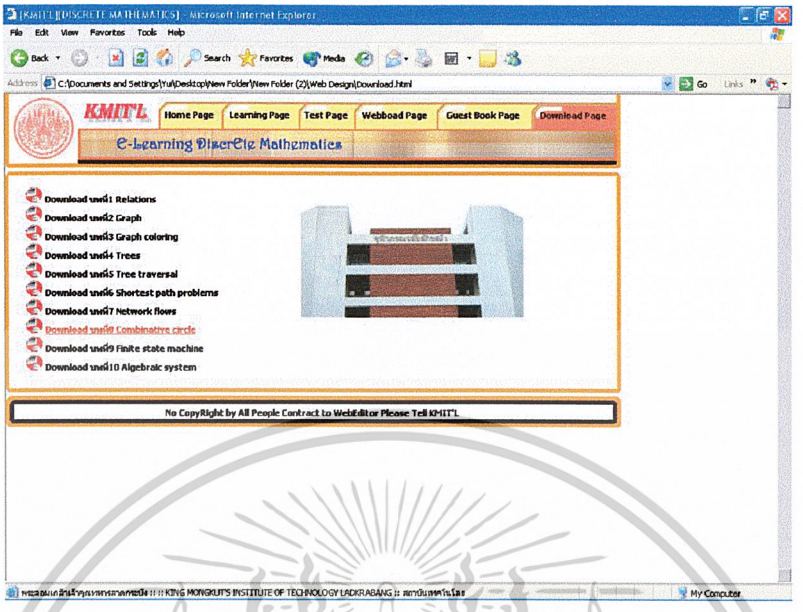


รูปที่ 4.136 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่7

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่7 Network flows จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่7 ดังรูป 4.133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.8 บทที่8 Combinative circle ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่8

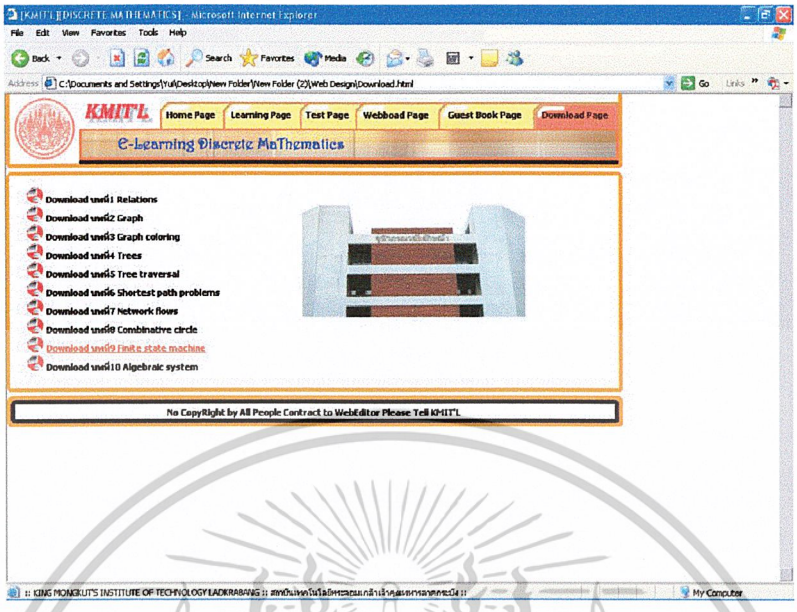


รูปที่ 4.137 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่8

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่1 Combinative circle จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่8 ดังรูป 4.134

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.9 บทที่9 Finite state machine ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่9

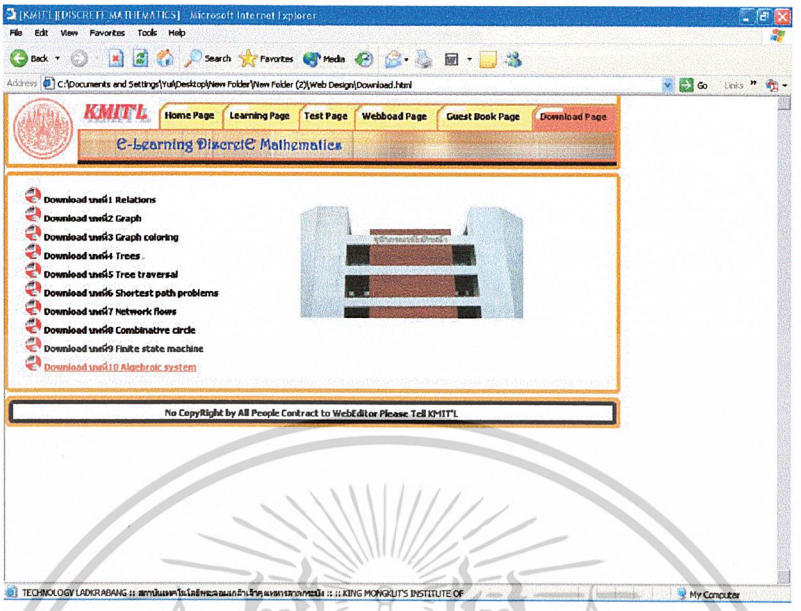


รูปที่ 4.138 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่9

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่9 Finite state machine จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่9 ดังรูป 4.135

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6.10 บทที่10 Algebraic system ซึ่งสามารถคลิกเข้าไปเพื่อ download เนื้อหาการเรียนบทที่10



รูปที่ 4.139 แสดงหน้าจอการ download เนื้อหาการเรียนบทที่10

- เมื่อทำการคลิกที่ Download บทที่10 Algebraic system จะ download เนื้อหาการเรียนการสอนบทที่10 ดังรูป 4.136

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

5.1 ผลการจัดทำปัญหาพิเศษ

ปัญหาโครงงานพิเศษฉบับนี้ได้ทำการสร้างเว็บไซต์ สื่อการเรียนการสอนเรื่องคณิตศาสตร์เรื่องคณิตศาสตร์ดีสครีตโดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

5.1.1 การจัดทำเนื้อหาและตัวอย่างและแบบทดสอบ

การนำเสนอเนื้อหาและตัวอย่างสามารถอธิบายให้เข้าใจ และศึกษาด้วยตัวเองพอสมควร การทำแบบทดสอบประจำเทอมสามารถประเมินความเข้าใจของผู้เรียนได้

5.1.2 การพัฒนาเว็บไซต์

พัฒนาเว็บไซต์โดยใช้ภาษา HTML พื้นฐานและโปรแกรม Macromedia Flash MX2004

5.2 สรุปผล

ผลการวิจัยเว็บไซต์การเรียนการสอนเรื่องคณิตศาสตร์ดีสครีตสามารถสรุปโดยสังเขปได้ดังนี้

5.2.1 สามารถควบคุมการแสดงผลโดยเมาส์(Mouse)

5.2.2 สามารถแสดงการเคลื่อนไหวของรูปภาพในเนื้อหาเพื่อช่วยในความเข้าใจบทเรียน

5.2.3 สามารถ ถาม-ตอบ ปัญหาของผู้ใช้ได้

5.2.4 สามารถ download เนื้อหาที่ใช้ในการสอนไปอ่านได้

5.2.5 สามารถพัฒนาหรือแก้ไขเว็บไซต์ได้เร็วเนื่องจากมีการติชมจากผู้ใช้ได้

5.3 ข้อจำกัดของเว็บไซต์

5.3.1 ยังไม่สามารถทำเกี่ยวระบบสมาชิกได้

5.3.2 ไม่สามารถตรวจเช็คได้ว่าผู้ใช้เรียนถึงเนื้อหาส่วนใดแล้ว

5.3.3 ไม่สามารถทำการเรียนได้ถ้าหากไม่มีการเชื่อมโยงอินเตอร์เน็ตหรือเครือข่าย

5.3.4 ยังไม่สามารถส่งข้อความถึงผู้จัดทำเว็บไซต์ได้โดยตรง

5.3.5 ไม่สามารถตรวจสอบได้ว่าผู้ใช้ทำการโกงข้อสอบหรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

ทวีชัย หงส์สุมาลย์ และสงวนชัย สุวรรณชีวะศิริ. 2547. **อินไซท์ ASP.NET**. กรุงเทพฯ : โปรวิชั่น.

พิพัฒน์ คูณคงทรัพย์. 2547. **Flash MX 2004 Workshop**. พิมพ์ครั้งที่ 1. นนทบุรี : ไอดีซี อินโป ดิสทริบิวเตอร์ เซนเตอร์.

สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. 2544. **ภินทนคณิตศาสตร์**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : ด่านสุทธาการพิมพ์.

สมพร สูตินันท์โอภาส,(ผู้รวบรวม)2539. **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ คณิตศาสตร์ดิสครีต**. กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

สุธี พงศาสกุลชัย. 2547. **คัมภีร์ Flash MX 2004**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : เคทีพี คอมพ์ แอนด์ คอนซัลท์.

อฒิพัฒน์ (Zac) เจี่ย และณัฐธัญ จันทร์จำรัส,(ผู้รวบรวม) 2546. **Macromedia FLASH MX Actionscripting**. กรุงเทพฯ : ฟิวเจอร์วิว.

รศ. ภัคคินี ชิตสกุล. **เอกสารประกอบการเรียนการสอน**.

Kenneth H. Rosen. 1999. **Discrete mathematics and its applications**. 4th ed. New York : McGraw – Hill.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้