สมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์

GEOMETRIC PROPERTIES OF BISECTOR

พฤทธิวิชญ์ เจริญลาภ
มณฑลี ลิ้มกิจเจริญภรณ์
ศศิกัญญา เทพนิมิตร

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

GEOMETRIC PROPERTIES OF BISECTOR

PHRUETTHIWIT CHAROENLAP

MONTALEE LIMKITCHAROENPORN

SASIKANYA TEPNIMIT

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGT LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2004

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์
	GEOMETRIC PROPERTIES OF BISECTOR
ชื่อนักศึกษา	นายพฤฒธิวิชญ์ เจริญลาภ 44050034
	นางสาวมณฑลี ลิ้มกิจเจริญภรณ์ 44050037
	นางสาวศศิกัญญา เทพนิมิตร 44050046
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ปีการศึกษา 2547

คณะกรรมการ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	ผศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการ	ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์	พันธนี พงศ์
กรรมการและที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการและที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์		
นักศึกษา	นายพฤทธิวิชญ์	เจริญลาภ	44050034
	นางสาวมณฑลี	ลิ้มกิจเจริญภรณ์	44050037
	นางสาวศศิกัญญา	เทพนิมิตร	44050046
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต		
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
ปีการศึกษา	2547		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ภัคคินี	ชิตสกุล	
	รศ.ผ่องพรรณ	รัตนธนาวันต์	

บทคัดย่อ

โครงงานพิเศษเรื่องสมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์ เป็นการศึกษาถึงรูปแบบของไบเซกเตอร์ในกรณีต่าง ๆ บนระนาบ โดยใช้โปรแกรม Matlab 6.1 ช่วยในการคำนวณ ซึ่งจะมีรูปแบบไบเซกเตอร์เป็นเส้นตรงในกรณีที่เป็น จุด – จุด, เส้น – เส้น และวงกลม – วงกลม กรณีที่วงกลมมีขนาดเท่ากัน และจะมีรูปแบบไบเซกเตอร์เป็นพาราโบลาในกรณีที่เป็น จุด – เส้น, จุด – วงกลม, จุด – พาราโบลา และวงกลม – วงกลมกรณีที่วงกลมมีขนาดไม่เท่ากัน

Special Project Title	GEOMETRIC PROPERTIES OF BISECTOR
Student	Mr.Phruetthiwit Charoenlap 44050034
	Miss.Montaree Limkitcharoenporn 44050037
	Miss.Sasikanya Tepnimit 44050046
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2004
Special Project Advisor	Assoc.Prof. Pakkinee Chitsakul
	Assoc.Prof. Pongpan Rattanathanawan

ABSTRACT

The special project is a study on geometrical properties of Bisector on plane using MatLab 6.1. These properties include (1) straight line dividing two points, two lines, and two circles with the same size, (2) parabola dividing, a point and a line a point and a circles, a point and a point, and two circles with different size.

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องสมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์ฉบับนี้ สามารถสำเร็จไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และ รองศาสตราจารย์ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ รวมทั้งยังเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้เป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งทางด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ อีกทั้งเป็นกำลังใจตลอดการทำงานจนสำเร็จลุล่วงได้อย่างดีเยี่ยม รวมทั้งเพื่อน ๆ พี่ ๆ ทุกคนที่มีส่วนร่วมคอยให้ความช่วยเหลือต่าง ๆ ในการจัดทำปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2548

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

เรื่อง หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

การสร้างถนนเพื่อให้ผ่านหมู่บ้านสองแห่งเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน ควรจะสร้างในรูปแบบใด ปัญหาคือต้องการหาทางเดินของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่สองจุดเป็นระยะทางเท่ากัน ซึ่งคือปัญหาไบเซกเตอร์ จากปัญหาทางเดินของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่สองจุดเป็นระยะทางเท่ากันจะมีปัญหาที่ตามมาคือ ถ้ามิใช่จุดกับจุด แต่เป็นกรณีจุดกับเส้น หรือ เส้นกับเส้น แล้วทางเดินจะมีรูปแบบเป็นแบบใด ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตของไบเซกเตอร์

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อศึกษารูปร่างของเส้นไบเซกเตอร์ของรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ

1.2.2 สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวางรูปแบบเส้นตรงเพื่อการคมนาคมและขนส่ง

1.2.3 เพื่อให้ผู้สนใจได้รู้เส้นทางต่าง ๆ ของไบเซกเตอร์

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษเรื่องนี้ศึกษาลักษณะสมบัติทางเรขาคณิตบางประการของการแบ่งครึ่งเชิงตั้งฉากโดยจะมีการพิจารณากรณีที่อยู่บนระนาบ โดยแบ่งเป็น

1.3.1 กำหนดจุดคงที่ 2 จุดจะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดคงที่นี้เท่ากัน

1.3.2 กำหนดจุดคงที่ 1 จุด และเส้นคงที่ 1 เส้นจะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดและเส้นที่กำหนดนี้เท่ากัน

13.3 กำหนดเส้น 2 เส้นคงที่ จะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากเส้น 2 เส้นนี้เท่ากันแบ่งจุดกับจุด และ จุดกับเส้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

จากทางเดินระหว่างวัตถุสองวัตถุซึ่งวัตถุอาจเป็น จุด เส้นตรง หรือเส้นโค้ง สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาการเดินทาง การขนส่ง เช่น การตัดถนน การวางทางรถไฟ การเลือกเส้นทางโคจรของดาวเทียม จรวดสำรวจอวกาศ เป็นต้น

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1.5.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับไบเซคเตอร์

1.5.2 ค้นหาข้อมูลในอินเตอร์เนตและปรึกษาอาจารย์ที่ปรึกษา

1.5.3 จัดทำรูปแบบการนำเสนอ

1.5.4 จัดทำเอกสารประกอบการนำเสนอ

1.5.5 คิดและทำรูปแบบในการนำเสนอ

1.6 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.6.1 กระดาษ A4

1.6.2 Mobile Rack

1.6.3 Hard disk 40.0 GB

1.6.4 คอมพิวเตอร์ Operating “WindowXP” Ram 128 MB

1.6.5 โปรแกรม Visio 5.0

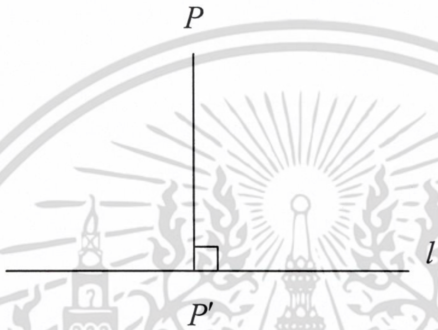
1.6.6 โปรแกรม Matlab 6.1

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

2.1.1 ภาพฉาย (Projection)

1) ภาพฉายของจุด P บนเส้นตรง l คือ จุดตัดของเส้นตรง l กับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และตั้งฉากกับเส้นตรง l



จากรูป P' เป็นโปรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง l

2) ภาพฉายของจุด (x,y) บนแกน X คือ $(x,0)$

ภาพฉายของจุด (x,y) บนแกน Y คือ $(0,y)$

3) ภาพฉายของจุด (a,b) บนเส้นตรง $y = x$ คือ $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

2.1.2 ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$

1) ถ้า $\overline{PQ}$ ขนานแกน X จะได้ $y_1 = y_2$ และ $|\overline{PQ}| = |x_1 - x_2|$

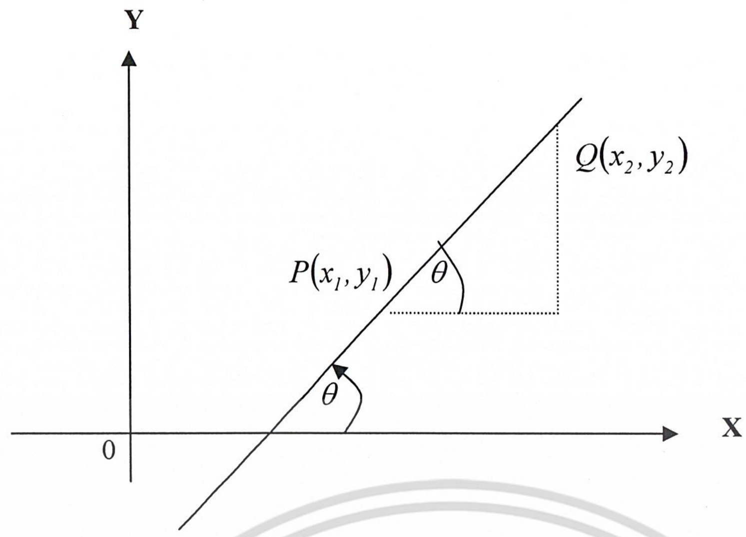
2) ถ้า $\overline{PQ}$ ขนานแกน Y จะได้ $x_1 = x_2$ และ $|\overline{PQ}| = |y_1 - y_2|$

3) $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2.1.3. ความชัน

กำหนดให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$, m เป็นความชันเส้นตรง PQ

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tan\theta$$



เมื่อ θ เป็นมุมเอียงของเส้นตรง วัด θ จากแกน X ด้านบวก ในทิศทวนเข็มนาฬิกาถึงเส้นตรงที่กำหนด และ $0° \leq \theta < 180°$

พิจารณาเส้นตรงตามลักษณะของความชัน

1. เส้นตรงขนานแกน X ความชันเป็นศูนย์ $\theta = 0°$
2. เส้นตรงเอียงทำมุมแหลมกับแกน X ความชันเป็นบวก $0° < \theta < 90°$
3. เส้นตรงขนานกับแกน Y ความชันหาค่าไม่ได้ $\theta = 90°$
4. เส้นตรงเอียงทำมุมป้านกับแกน X ความชันเป็นลบ $90° < \theta < 180°$

ข้อสังเกต

1. เส้นตรงเส้นเดียวกัน ความชันย่อมเท่ากัน
2. เส้นตรงสองเส้น (ไม่ขนานแกน Y) จะขนานกันก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันเท่ากัน
3. เส้นตรงสองเส้น (ไม่ขนานแกน Y) จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเป็น -1

ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ

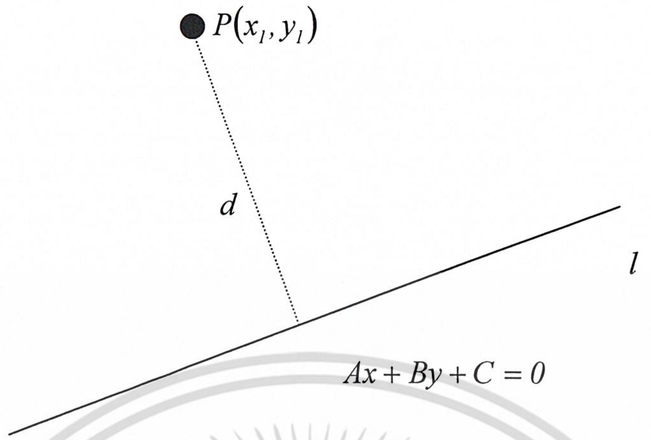
$$l_1 \perp l_2 \quad \leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1$$

เมื่อ l_1 และ l_2 ไม่ขนานแกน Y

2.1.4. ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับจุด

กำหนดสมการเส้นตรง l คือ $Ax + By + C = 0$ และ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรง l

ให้ d เป็นระยะทางจากจุด P ไปยังเส้นตรง l



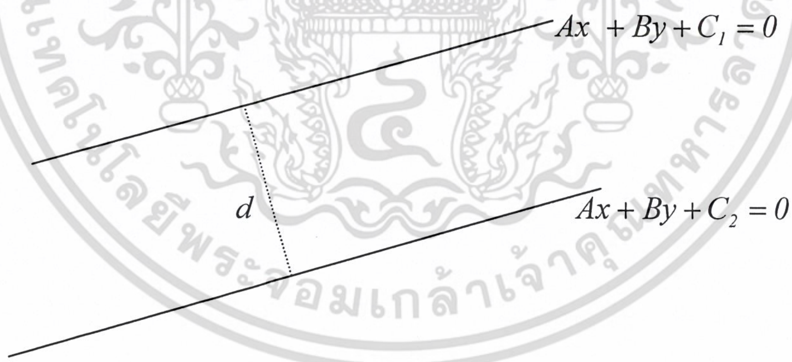
$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.1.5 ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

กำหนด l_1 และ l_2 เป็นเส้นขนาน 2 เส้น

$l_1 \,:\, Ax + By + C_1 = 0$

$l_2 \,:\, Ax + By + C_2 = 0$



ให้ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน l_1 และ l_2 $\quad d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2.2 วงกลม

นิยาม วงกลม (Circle) เป็นเซตของจุดทุกจุดบนพื้นราบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน โดยเรียกจุดคงที่นี้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม (Center) และเรียกระยะห่างเท่ากันนั้นว่า รัศมีของวงกลม (Radius)

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (h,k) รัศมี r หน่วย

มีสมการเป็น $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

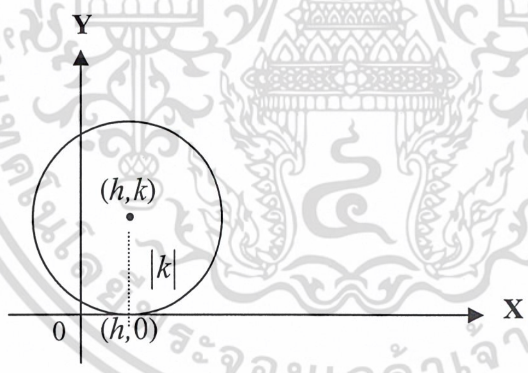
วงกลมมีสมการรูปทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

ความยาวรัศมี $\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$

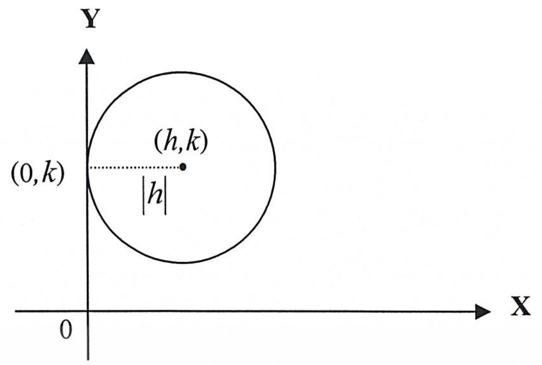
วงกลมกับเส้นสัมผัส

2.2.1 วงกลมสัมผัสแกน X



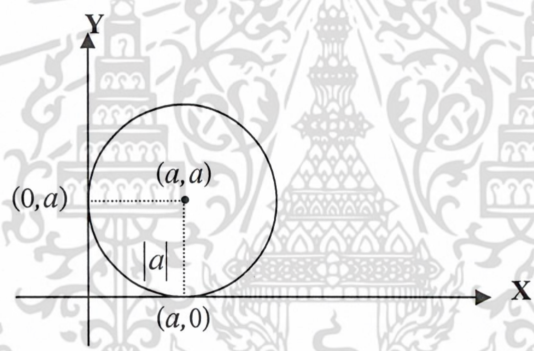
วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) สัมผัสแกน X จะต้องมีรัศมียาว $|k|$ และมีจุด $(h,0)$ เป็นจุดสัมผัส

2.2.2 วงกลมสัมผัสแกน Y



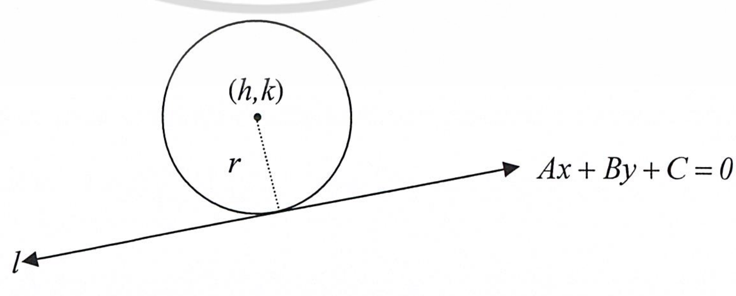
วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) สัมผัสแกน Y จะต้องมีรัศมียาว $|h|$ และมีจุด $(0,k)$ เป็นจุดสัมผัส

2.2.3 วงกลมสัมผัสแกนทั้งสอง



วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (a,a) รัศมียาว $|a|$ จะสัมผัสแกน X ที่ $(a,0)$ และสัมผัสแกน Y ที่ $(0,a)$

2.2.4 วงกลมสัมผัสเส้นตรงที่ไม่ขนานแกน X หรือแกน Y

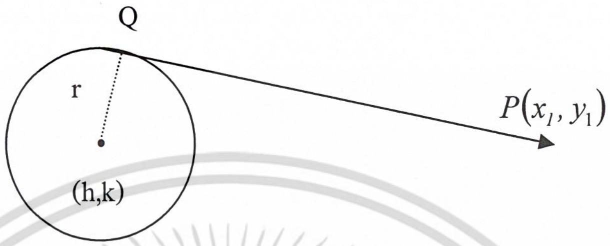


ความยาวรัศมี $(r)=\dfrac{|Ah+Bk+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ มาจาก $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จาก ความชันของเส้นสัมผัส $l = -\dfrac{A}{B}$

จะได้ความชันของเส้นรัศมี $\dfrac{B}{A}$ (เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองตั้งฉากกัน)

ความยาวของเส้นสัมผัส



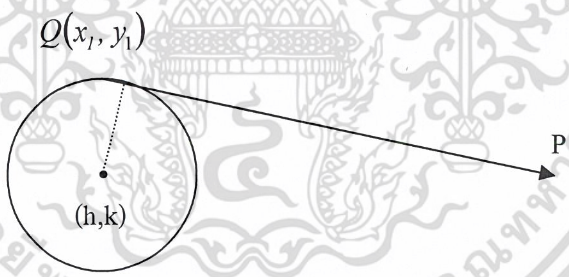
กำหนดให้จุด $P(x_1, y_1)$ และ PQ สัมผัสวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$|PQ| = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$$

หรือ

$$|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

สมการเส้นสัมผัส



กำหนดให้เส้นตรง PQ สัมผัสวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ที่จุด $Q(x_1, y_1)$

สมการเส้นสัมผัส $PQ = (x_1-h)(x-h) + (y_1-k)(y-k) = r^2$

2.3 พาราโบลา

นิยาม พาราโบลา (Parabola) เป็นเซตของจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ โดยเรียกจุดคงที่นี้ว่า จุดโฟกัส (Focus) และเรียกเส้นตรงคงที่นี้ว่า เส้นไดเรกติกซ์ (Directrix)

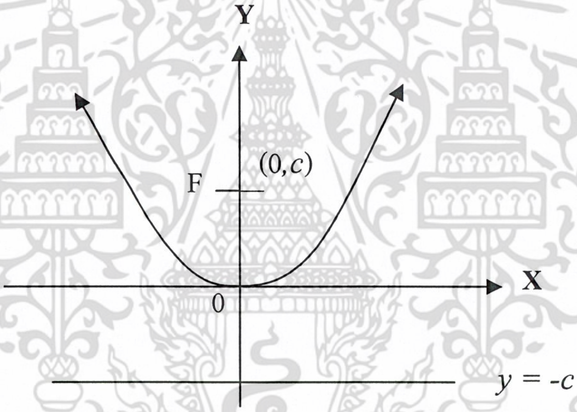
แกนของพาราโบลา (parabola axis) หรือแกนสมมาตร (axis of symmetry) คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดกับจุดโฟกัส

คอร์ดที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนสมมาตร เรียกว่า ลาตัสเรกตัม (Latus Rectum)

สมการพาราโบลา

รูปสมการ เมื่อพาราโบลามีจุดยอดที่จุดเริ่มต้น

$x^2 = 4cy$



พาราโบลารูปหงาย เมื่อ $c > 0$

พาราโบลารูปคว่ำ เมื่อ $c < 0$

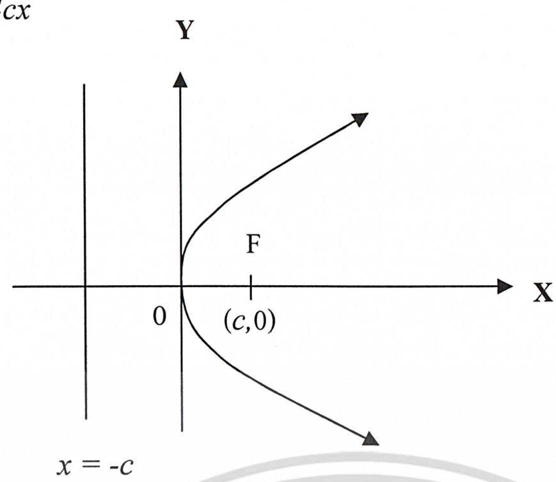
มีจุดยอดที่ $(0,0)$ จุดโฟกัสที่ $(0, c)$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์ $y = -c$

แกนของพาราโบลา $x = 0$ (คือ แกน Y)

ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

$y^2 = 4cx$



พาราโบลารูปเปิดด้านขวา เมื่อ $c > 0$

พาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย เมื่อ $c < 0$

มีจุดยอดที่ $(0,0)$ จุดโฟกัสที่ $(c,0)$

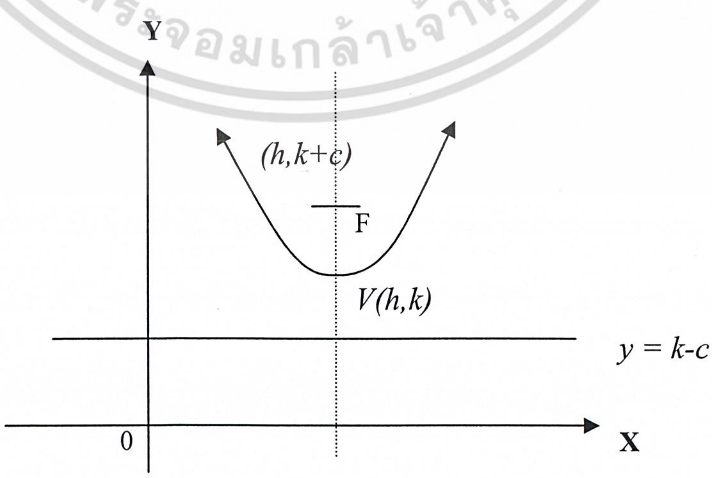
สมการเส้นไดเรกตริกซ์ $x = -c$

แกนของพาราโบลา $y = 0$ (คือ แกน X)

ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

รูปสมการ เมื่อพาราโบลามีจุดยอดที่จุด (h,k) ใด ๆ

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$



พาราโบลารูปหงาย เมื่อ $c > 0$

พาราโบลารูปคว่ำ เมื่อ $c < 0$

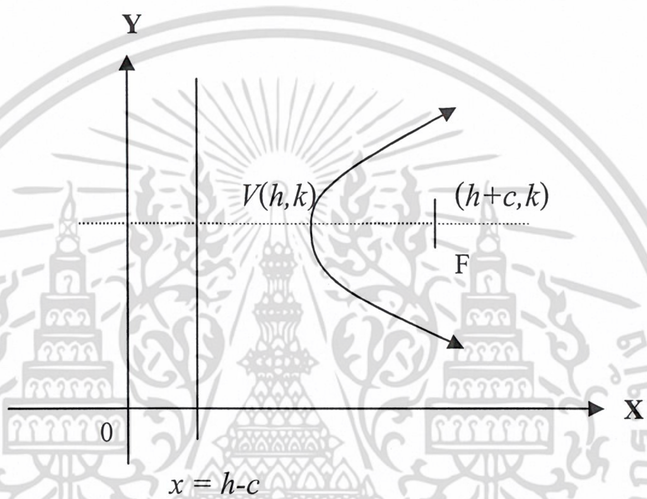
มีจุดยอดที่ (h,k) จุดโฟกัสที่ $(h,k+c)$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์ $y = k - c$

แกนของพาราโบลา $x = h$

ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$



พาราโบลารูปเปิดด้านขวา เมื่อ $c > 0$

พาราโบลารูปเปิดด้านซ้าย เมื่อ $c < 0$

มีจุดยอดที่ (h,k) จุดโฟกัสที่ $(h+c,k)$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์ $x = h - c$

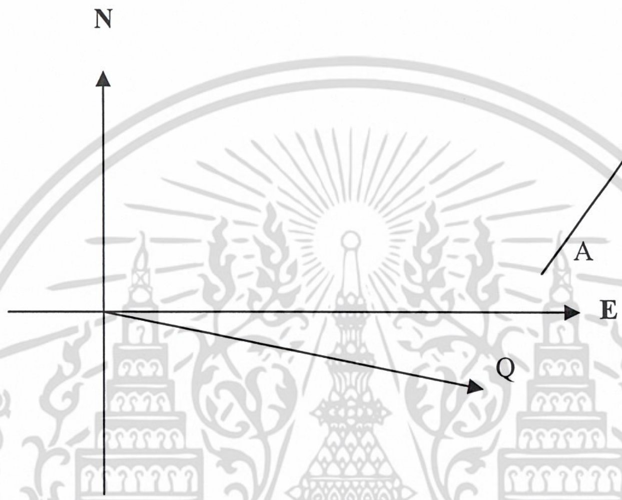
แกนของพาราโบลา $y = k$

ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

2.4 เวกเตอร์

เวกเตอร์ (vector) เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเช่น ความเร็ว ความเร่ง แรง เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีปริมาณอีกชนิดหนึ่งซึ่งมีแต่ขนาดเท่านั้น เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ เช่น พื้นที่ ปริมาตร เวลา อัตราเร็ว อุณหภูมิ เป็นต้น

การเขียนเวกเตอร์ ใช้ส่วนของเส้นตรงโดยความยาวแทนขนาดของเวกเตอร์และมีหัวลูกศรกำกับเพื่อบอกทิศทางของเวกเตอร์นั้น เช่น



$\overrightarrow{AB}$ เป็นสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์เอบี ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A และมีจุดสิ้นสุดที่ B

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ เป็นสัญลักษณ์แทนขนาดของ $\overrightarrow{AB}$

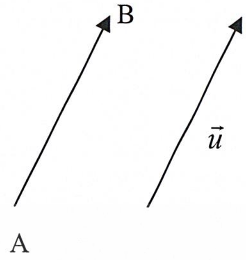
นอกจากนี้ยังมีการใช้ขนาดของมุมเพื่อบอกทิศทางโดยวัดมุมจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา โดยขนาดของมุมอยู่ระหว่าง 0 องศาถึง 360 องศา เขียนในรูป 3 ตัวเลข เรียกระบบนี้ว่า three figure system ถ้าขนาดของมุมน้อยกว่า 100 องศา ต้องเขียน 0 นำหน้าเติมให้ครบ 3 ตัวเลข เช่น 30 องศา ต้องเขียนเป็น 030 องศา

บางครั้งอาจพบสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์เป็นอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กเพียงตัวเดียว เช่น $\vec{u}$, $\vec{v}$ เรียกว่าเวกเตอร์อิสระ เนื่องจากมิได้ระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ใช้ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ แทนขนาดของ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ตามลำดับ

ส่วน $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์จำกัด เนื่องจากมีการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด

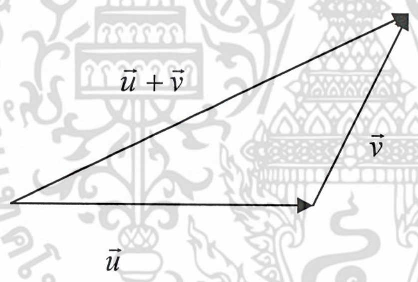
2.4.1 การเท่ากันของเวกเตอร์

การเท่ากันของเวกเตอร์ เวกเตอร์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน เช่น $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ดังนี้

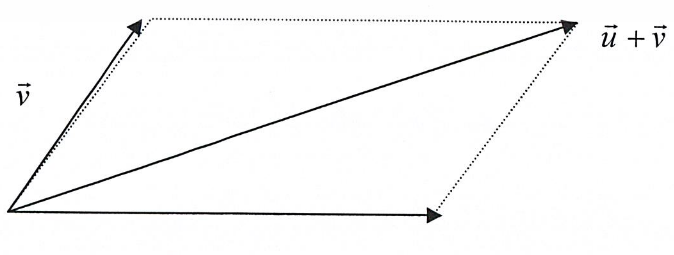


2.4.2 การบวกเวกเตอร์มี 2 แบบ

1) สามเหลี่ยมเวกเตอร์ เมื่อ $\vec{u}$, $\vec{v}$ วิ่งตามกัน จะได้ $\vec{u}+\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นด้านที่เหลือของสามเหลี่ยม เมื่อ $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นด้านสองด้าน โดยมีจุดเริ่มต้นที่เดียวกับจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์แรกและมีจุดสิ้นสุดที่เดียวกับจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์หลัง

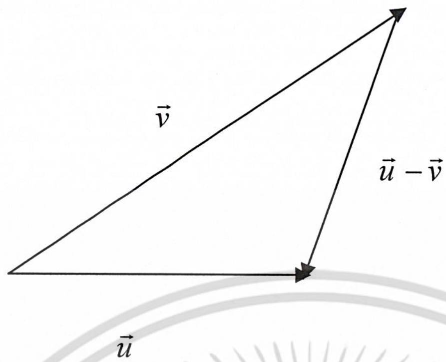


2) สี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อ $\vec{u}$, $\vec{v}$ วิ่งออกจากแหล่งเดียวกัน เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแทน $\vec{u}+\vec{v}$ ดังรูป

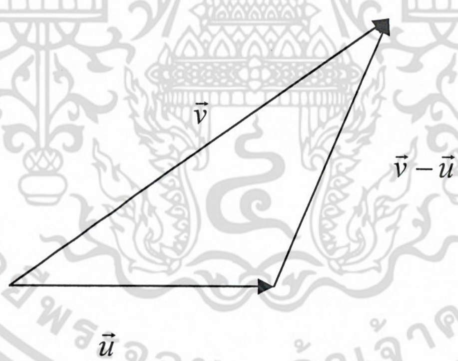


2.4.3 การลบเวกเตอร์

1) $\vec{u} - \vec{v}$



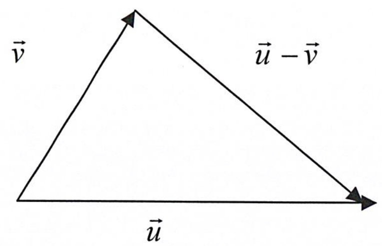
2) $\vec{v} - \vec{u}$



ข้อสังเกต

ก. เวกเตอร์ผลลบจะมีจุดสิ้นสุดเดียวกับเวกเตอร์ตัวตั้ง เมื่อเวกเตอร์ที่กำหนดให้มีจุดเริ่มต้นที่เดียวกัน เช่น $\vec{u} - \vec{v}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่เดียวกับ $\vec{v}$ แต่มีจุดสิ้นสุดเดียวกับ $\vec{u}$

ข. $|\vec{u} - \vec{v}|$ สัมพันธ์กับ $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ จากความรู้เรื่องเรขาคณิต



กรณี $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ จะได้ $|\vec{u}-\vec{v}|+|\vec{v}|>|\vec{u}|$ *then* $|\vec{u}-\vec{v}|>|\vec{u}|-|\vec{v}|$

กรณี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน จะได้ $|\vec{u}-\vec{v}|=|\vec{u}|-|\vec{v}|$ จะได้

2.4.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์

1) ในระบบแกนมุมฉาก 2 มิติ

ให้ $\vec{u}=\vec{x}_1 i+\vec{y}_1 j$ และ $\vec{v}=\vec{x}_2 i+\vec{y}_2 j$

แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$

2) ในระบบแกนมุมฉากสามมิติ

ให้ $\vec{u}=\vec{x}_1 i+\vec{y}_1 j+\vec{z}_1 k$ และ $\vec{v}=\vec{x}_2 i+\vec{y}_2 j+\vec{z}_2 k$

แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

2.4.5 คุณสมบัติอื่นมีดังนี้

1) ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \quad ,0^\circ\le\theta\le 180^\circ$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=0$

3) $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$

4) $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

5) $|\vec{u}-\vec{v}|=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

2.5 ความชันของเส้นโค้ง

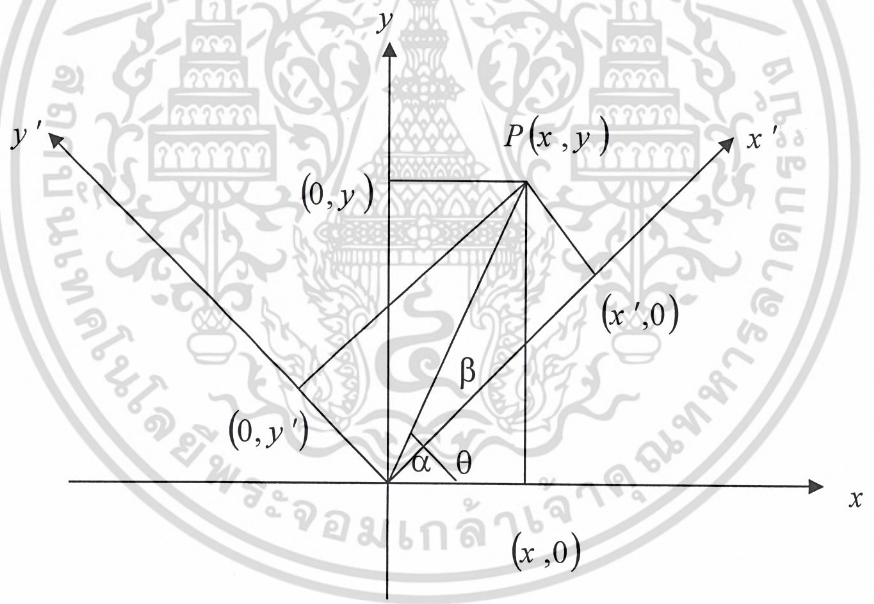
นิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ให้กราฟเป็นเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด ใด ๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

นิยาม ความชันเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P(x,y)$ ใด ๆ ที่อยู่บนเส้นโค้งนี้ คือ ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด P

2.6 การหมุนแกน

นอกจากการย้ายแกนแล้ว การหมุนแกนเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ช่วยให้การเขียนกราฟของฟังก์ชันต่างๆ และการศึกษาแคลคูลัสง่ายและสะดวกขึ้น

ขั้นตอนแรกจะเริ่มที่การหมุนแกน โดยจุดเริ่มยังอยู่จุดเดิม



จากรูป หมุนแกน x และ y ทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆบนระบบแกน x y

โดยที่ $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

บนระบบแกน $x'y'$ จุด $P(x,y)$ จะเป็นจุด $P(x',y')$ โดยที่

$x' = r\cos\beta$

และ $y' = r\sin\beta$

และ $\alpha = \beta + \theta$

$$\cos\alpha = \cos(\beta+\theta) = \cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta$$
$$r\cos\alpha = r\cos\beta\cos\theta - r\sin\beta\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$\sin\alpha = \sin(\beta+\theta) = \sin\beta\cos\theta + \sin\theta\cos\beta$$
$$r\sin\alpha = r\sin\beta\cos\theta + r\sin\theta\cos\beta = y'\cos\theta + x'\sin\theta$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

จากสมการกำลังสองของสองตัวแปร $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ จะได้เป็น

$$A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$$
$$+ D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0$$

$$Ax'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + Ay'^2\sin^2\theta + Bx'^2\cos\theta\sin\theta - By'^2\cos\theta\sin\theta$$
$$- Bx'y'\sin^2\theta + Bx'y'\cos^2\theta + Cx'^2\sin^2\theta + 2Cx'y'\sin\theta\cos\theta + Cy'^2\cos^2\theta + Dx'\cos\theta$$
$$- Dy'\sin\theta + Ex'\sin\theta + Ey'\cos\theta + F = 0$$

$$x'^2\left(A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta\right) + x'y'\left(BC\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - 2(A-C)\cos\theta\sin\theta$$
$$+ y'^2\left(A\cos^2\theta - B\cos\theta\sin\theta + C\cos^2\theta\right) + x'(D\cos\theta + E\sin\theta) + y'(-D\sin\theta + E\cos\theta) + F = 0$$

จะได้ว่า

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ โดยที่

$$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$
$$B' = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(A-C)\sin\theta\cos\theta$$
$$C' = A\cos^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + E\sin\theta$$
$$E' = -D\cos\theta + E\sin\theta$$
$$F' = F$$

บนระนาบ $x'y'$ จะไม่ให้มีพจน์ $x'y'$ ก็ต่อเมื่อ $B'=0$ นั่นคือ

$$B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2(A-C)\sin\theta\cos\theta=0$$

$$B(\cos 2\theta)-(A-C)\sin 2\theta=0$$

$$B(\cos 2\theta)=(A-C)\sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{B}{(A-C)}$$

ดังนั้นจะได้ $\tan 2\theta=\dfrac{B}{(A-C)}$ หรือ $\theta=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{B}{(A-C)}$

ดังนั้น การหมุนแกนในระบบแกน $x'y'$ ไปสู่ระบบแกน xy จะมีมุม $\theta=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{B}{(A-C)}$

2.7 กำลังสองน้อยสุด (Least Squares)

The Least-Squares Parabola

ให้ $y=a+bx+cx^2$ ...(a)

และ $S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+bx_i+cx_i^2))=\min$ โดยที่ $n\geq 3$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+bx_i+cx_i^2))=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-(a+bx_i+cx_i^2))=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c}=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_i-(a+bx_i+cx_i^2))=0$$

ทำการจัดสมการใหม่จะได้

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=a\sum_{i=1}^{n}1+b\sum_{i=1}^{n}x_i+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \qquad ...(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i^3 \qquad ...(2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^4 \qquad ...(3)$$

ทำการแก้สมการหาตัวแปร a, b และ c

เมื่อได้ค่า a, b และ c แล้วนำไปแทนในสมการ (a)

เมื่อแทนแล้วจะได้สมการอยู่ในรูปแบบพาราโบลา

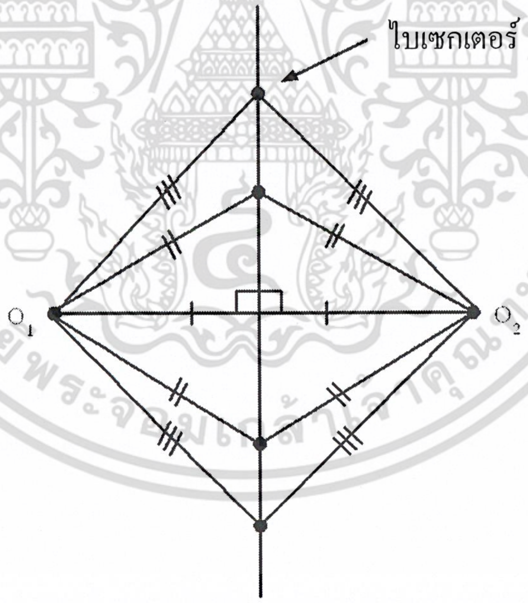
บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

3.1 บทนำ

นิยาม กำหนดให้ O_1 และ O_2 เป็นวัตถุเชิงเรขาคณิตบนระนาบ

เราจะนิยาม ไบเซกเตอร์ B ว่า เป็นตำแหน่งของจุดใด ๆ ที่อยู่ห่างจากวัตถุ O_1 และ O_2 เป็นระยะทางเท่ากัน ซึ่งระยะทางจะวัดจากจุดไบเซกเตอร์ ไปตั้งฉากกับวัตถุทั้งสอง

ดังนั้น ไบเซกเตอร์ B เป็นเซตของจุดศูนย์กลางของพื้นผิวที่สัมผัสทั้ง O_1 และ O_2 ซึ่งวัตถุนั้นอาจจะเป็นจุด เส้นโค้ง หรือเส้นตรง



รูปที่ 3.1 ตัวอย่างรูปแบบ ไบเซกเตอร์ B ของจุด O_1 และ O_2

3.2 รูปแบบไบเซกเตอร์ที่จะศึกษาประกอบด้วย

3.2.1 จุด – จุด

- จุดกับจุด

3.2.2 จุด – เส้นตรง

- จุดกับเส้นตรงขนานกับแกน x
- จุดกับเส้นตรงขนานกับแกน y
- จุดกับเส้นตรงที่ทำมุมใด ๆ กันแกน x ไม่เกิน 180 $^{\circ}$

3.2.3 เส้นตรง – เส้นตรง

- เส้นตรงสองเส้นขนานกัน
- เส้นตรงสองเส้นไม่ขนานกัน

3.2.4 จุด – เส้นโค้ง

- จุดกับวงกลม
- จุดกับพาราโบลา

3.2.5 เส้นโค้ง – เส้นโค้ง

- วงกลมกับวงกลม
  - วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน
  - วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน
  - วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ
  - วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน
  - วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน
  - วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด

3.2.1 จุด – จุด

รูปที่ 3.2 แสดงจุดกับจุด

กำหนด ให้ p และ q เป็นจุดใด ๆ ที่ไม่ใช่จุดเดียวกัน และให้ z เป็นจุดที่อยู่ห่างจาก p และ q เท่ากัน จะได้ระยะทางจาก z ไป q คือ

$$|p-z|^2 = |q-z|^2 \qquad \text{... (a)}$$

จาก เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน (Polarization Identity)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

หรือ $$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$

เพราะฉะนั้นจาก (a) จะได้

$$|p-z|^2 = |p|^2 + |z|^2 - 2(p\cdot z) \qquad (1)$$

$$|q-z|^2 = |q|^2 + |z|^2 - 2(q\cdot z) \qquad (2)$$

เนื่องจาก $|p-z|^2 = |q-z|^2$

$$\therefore\ (1) = (2) \ :\ |p|^2 + |z|^2 - 2(p\cdot z) = |q|^2 + |z|^2 - 2(q\cdot z)$$

$$|q|^2 - |p|^2 = 2(q\cdot z) - 2(p\cdot z)$$

ซึ่งจะได้ว่า $$|q|^2 - |p|^2 = 2(q-p)\cdot z \qquad (3)$$

ซึ่งเราจะนำความรู้ด้านเวกเตอร์มาช่วยในการพิสูจน์

โดยจาก (3) $|q|^2 - |p|^2 = 2(q-p)\cdot z$

จัดสมการใหม่ $\underbrace{2(q-p)}_{N}\cdot z + \underbrace{\left(|p|^2 - |q|^2\right)}_{c} = 0$

จะได้ $N\cdot z + c = 0$

สำหรับเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $N = (a,b)$

$= a\hat{i} + b\hat{j}$

ถ้า z เป็นเวกเตอร์ใด ๆ $Z = (x,y)$

$= x\hat{i} + y\hat{j}$

ถ้า z ตั้งฉากกับ N แล้ว $z\cdot N = 0$

นี่คือ $ax + by = 0$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นสมการเดียวของตัวแปร x และ y

ถ้า $x = -b$ และ $y = a$ $\Rightarrow$ $ax + by = a(-b) + b(a)$

$= -ab + ab$

$= 0$

ถ้า $x = 0$ และ $y = 0$ $\Rightarrow$ $ax + by = a(0) + b(0)$

$= 0$

ดังนั้น $ax + by = 0$ เป็นเส้นที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-b,a)$ นั่นคือ $ax + by$ เป็นเส้นที่ผ่านจุดกำเนิดเส้น มีสมการเป็น $(a,b)\cdot(x,y) = N\cdot z = 0$

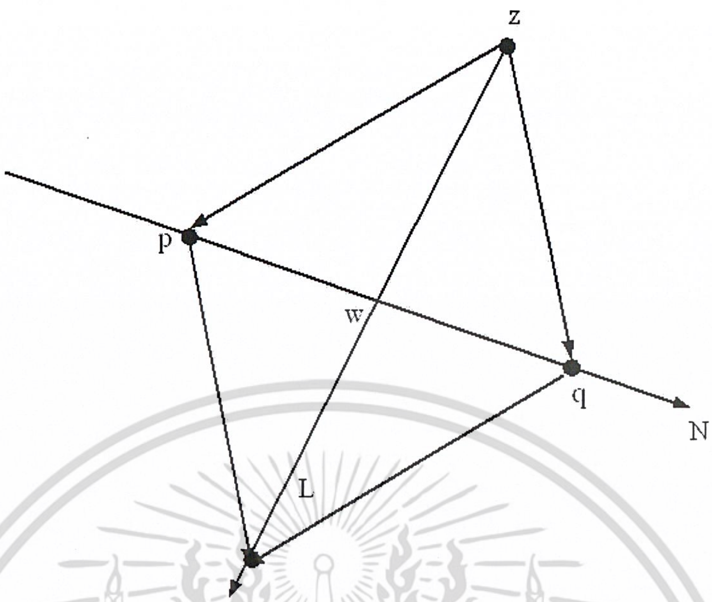
$ax + by = 0$

เส้นตรงใด ๆ คือ $ax + by + c = 0$

สามารถเขียนเป็น $N\cdot z + c = 0$ สำหรับ N ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

สมการของเส้นตรง คือ $N\cdot z + c = 0$ เมื่อ $N \perp z$ ดังนั้น (3) จะเป็นสมการเส้นตรง L ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ q - p

จะพิสูจน์ว่า $N \perp z$



รูปที่ 3.3 แสดง $\vec{u}, \vec{v}, N, L$

ให้ $\vec{u} = z\vec{p}$

$\vec{v} = z\vec{q}$

$N = \vec{u} - \vec{v}$

$L = \vec{u} + \vec{v}$

นั่นคือ ต้องพิสูจน์ว่า $(\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$

แต่เรารู้ว่า เวกเตอร์ $\vec{u} - \vec{v}$ และเวกเตอร์ $\vec{u} + \vec{v}$ จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

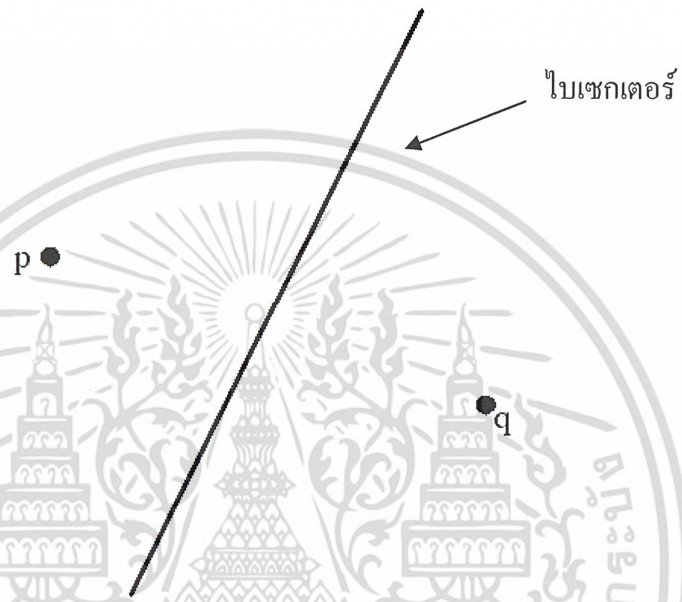
ดังนั้น
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{\bar{v}}$$
$$= |\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - |\vec{v}|^2$$

เมื่อ $\vec{u} = \vec{v}$ ดังนั้น $|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2$

และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ จึงได้ว่า $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

เพราะฉะนั้น $\vec{u} - \vec{v} \perp \vec{u} + \vec{v}$ หรือ $N \perp z$

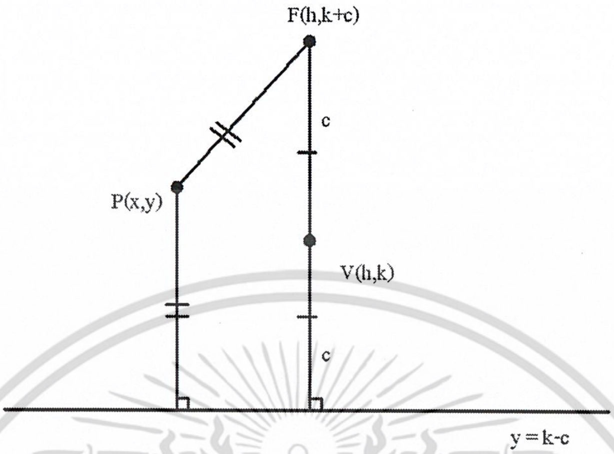
∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง จุด – จุด คือ เส้นตรงที่มีระยะห่างจากจุดทั้ง 2 เท่ากัน และตั้งฉากกับ $\overrightarrow{pq}$



รูปที่ 3.4 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับจุด

3.2.2 จุด – เส้นตรง

3.2.2.1 ในแนวขนานกับแกน x



รูปที่ 3.5 แสดงจุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

กำหนด ให้จุด F และเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ซึ่งมีระยะทางจากจุด F ถึงเส้นตรง $y = k - c$ เป็น $2c$ โดยมีจุด V เป็นจุดที่ห่างจากจุด F และเส้นตรง $y = k - c$ เป็นระยะทางเท่ากัน

และให้จุด P เป็นจุดใด ๆ ที่ห่างจากจุด F และเส้นตรง $y = k - c$ เป็นระยะทางเท่ากัน จะได้

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-(k+c))^2} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$
$$|y-(k-c)| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างจะได้

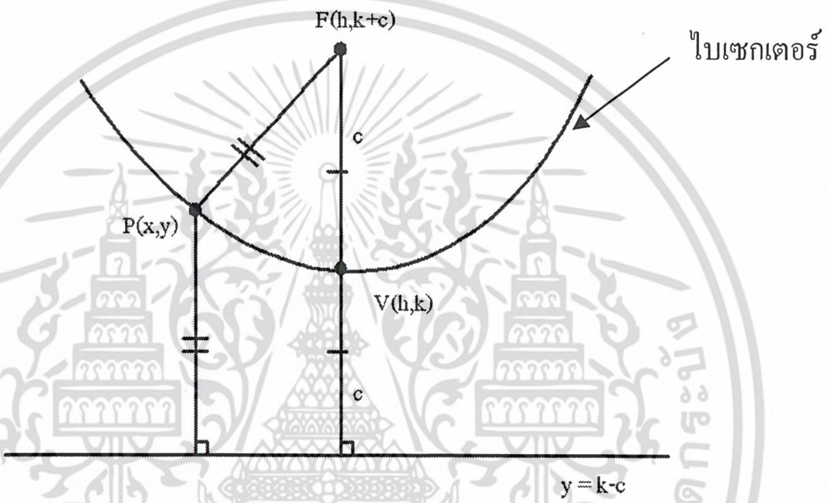
$$(y-(k-c))^2 = (x-h)^2 + (y-(k+c))^2$$
$$y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2 = (x-h)^2 + \left(y^2 - 2y(k+c) + (k+c)^2\right)$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$-2y(k-c) + 2y(k+c) + (k-c)^2 - (k+c)^2 = (x-h)^2$$
$$-2yk + 2yc + 2yk + 2yc + (k-c)^2 - (k+c)^2 = (x-h)^2$$
$$4yc + (k-c)^2 - (k+c)^2 = (x-h)^2$$
$$4yc + k^2 - 2kc + c^2 - (k^2 + 2kc + c^2) = (x-h)^2$$
$$4yc - 4kc = (x-h)^2$$
$$4c(y-k) = (x-h)^2$$

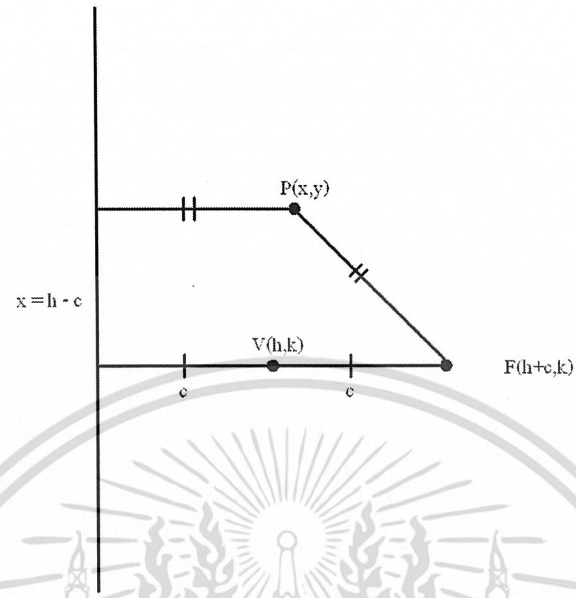
ซึ่งจะเห็นว่าสมการจัดอยู่ในรูปของสมการพาราโบลาหงาย $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ที่มีจุดยอดอยู่จุด (h,k)

$\therefore$ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง จุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน x คือ พาราโบลาหงาย ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $V(h,k)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h,k+c)$



รูปที่ 3.6 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

3.2.2.2 ในแนวขนานกับแกน y



รูปที่ 3.7 แสดงจุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

กำหนด ให้จุด F และเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ซึ่งมีระยะทางจากจุด F ถึงเส้นตรง $x = h - c$ เป็น $2c$ โดยมีจุด V เป็นจุดที่ห่างจากจุด F และเส้นตรง $x = h - c$ เป็นระยะทางเท่ากัน

ให้จุด P เป็นจุดใด ๆ ที่ห่างจากจุด F และเส้นตรง $x = h - c$ เป็นระยะทางเท่ากันและระยะทางจากจุด P ไปเส้นตรง L เท่ากับระยะทางจากจุด P ไปจุด F

จะได้

$$\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

$$|x-(h-c)| = \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างจะได้

$$(x-(h-c))^2 = (x-(h+c))^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2 = \left(x^2-2x(h+c)+(h+c)^2\right)+(y-k)^2$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$-2x(h-c)+2x(h+c)+(h-c)^2-(h+c)^2 = (y-k)^2$$

$$-2xh+2xc+2xh+2xc+(h-c)^2-(h+c)^2 = (y-k)^2$$

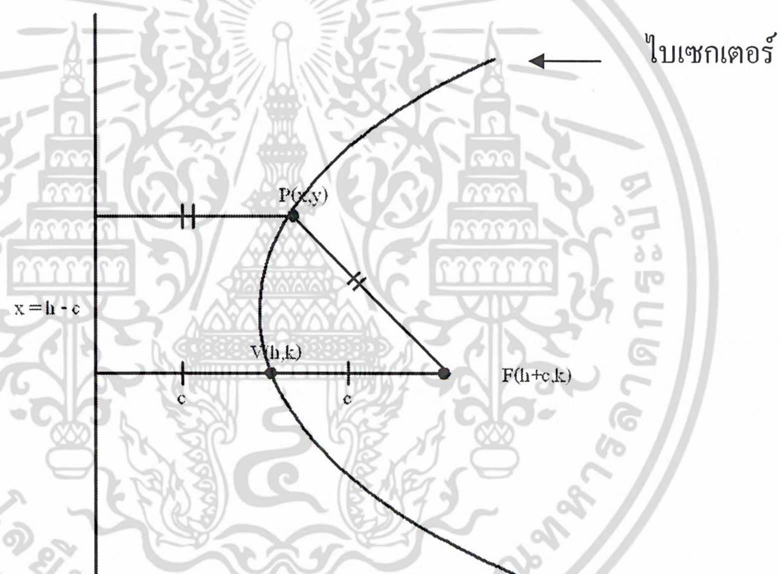
$$4xc+(h-c)^2-(h+c)^2 = (y-k)^2$$

$$4xc+h^2-2hc+c^2-\left(h^2+2hc+c^2\right) = (y-k)^2$$

$$4xc - 4hc = (y-k)^2$$
$$4c(x-h) = (y-k)^2$$

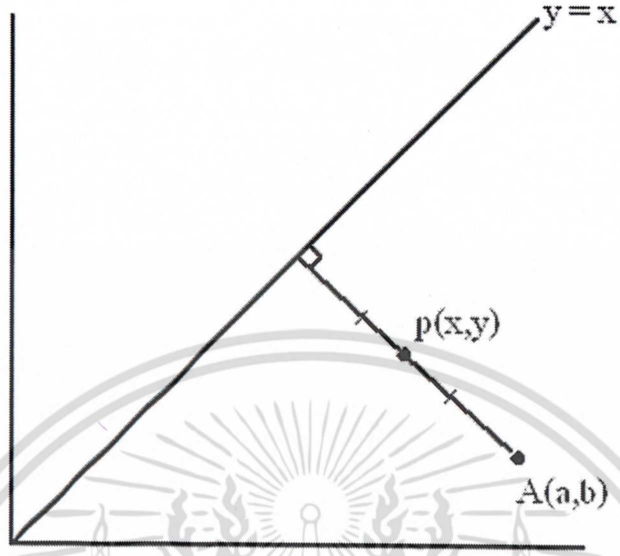
ซึ่งจะเห็นว่าสมการจัดอยู่ในรูปของสมการพาราโบลาเปิดขวา $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ที่มีจุดยอดอยู่จุด (h,k)

$\therefore$ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง จุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน y คือ พาราโบลาเปิดขวาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $V(h,k)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h+c,k)$



รูปที่ 3.8 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

3.2.2.3 จุดกับเส้นตรงที่ทำมุมใด ๆ กับแกน x ไม่เกิน 180 °



รูปที่ 3.9 แสดงจุดกับเส้นตรงที่ทำมุมใด ๆ กับแกน x ไม่เกิน 180 °

กำหนด ให้ $y = x$ เป็นสมการเส้นตรง โดยมีจุด $p(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างเส้นตรง $y = x$ และจุด $A(a,b)$

พิสูจน์

เนื่องจากระยะทางจากจุด p ไปยังเส้นตรง $y = x$ เท่ากับ p ไปยังจุด A

ดังนั้น จะได้
$$\frac{|x-y|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้
$$\frac{(x-y)^2}{2} = (x-a)^2+(y-b)^2$$
$$\frac{x^2-2xy+y^2}{2} = x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2$$
$$x^2-2xy+y^2 = 2\left(x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\right)$$
$$x^2-4xa+2a^2+y^2-4yb+2b^2+2xy=0$$

จัดรูปสมการแล้วจะได้ $\underbrace{1}_{D}x^2 + \underbrace{2}_{E}xy + \underbrace{1}_{F}y^2 \underbrace{-4a}_{G}x \underbrace{-4b}_{H}y + \underbrace{2a^2 + 2b^2}_{I} = 0$

ดังนั้น สมการจะอยู่ในรูป $Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I = 0$ ซึ่งเป็นสมการกำลังสองของสองตัวแปรของเรขาคณิตวิเคราะห์ในภาคตัดกรวย ซึ่งจะเป็นกราฟที่หมุนแกน

กำหนดให้ สมการ $D'x'^2 + E'x'y' + F'y'^2 + G'x' + H'y' + I' = 0$ บนระนาบ $x'y'$

โดยที่ $D' = D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$E' = E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta$

$F' = D\cos^2\theta - E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$G' = G\cos\theta + H\sin\theta$

$H' = -G\cos\theta + H\sin\theta$

$I' = I$

บนระนาบ $x'y'$ จะไม่ให้มีพจน์ $x'y'$ ก็ต่อเมื่อ $E' = 0$ นั่นคือ

$$E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$E(\cos 2\theta) - (D-F)\sin 2\theta = 0$$

$$E(\cos 2\theta) = (D-F)\sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{E}{(D-F)}$$

ดังนั้นจะได้ $\tan 2\theta = \frac{E}{(D-F)}$ หรือ $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{E}{(D-F)}$

ดังนั้น การหมุนแกนในระบบแกน $x'y'$ ไปสู่ระบบแกน xy จะมีมุม $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{E}{(D-F)}$

พิจารณาสมการ

$$\underbrace{1}_{D}x^2 + \underbrace{2}_{E}xy + \underbrace{1}_{F}y^2 \underbrace{-4a}_{G}x \underbrace{-4b}_{H}y + \underbrace{2a^2 + 2b^2}_{I} = 0$$

จาก

$$\tan 2\theta = \frac{E}{(D-F)} = \frac{2}{1-1} = \infty$$

$$\therefore \quad 2\theta = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ$$

ดังนั้น $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$D' = D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$$F' = D\cos^2\theta - E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$$
$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$G' = G\cos\theta + H\sin\theta$$
$$= \frac{-4a}{\sqrt{2}} + \frac{-4b}{\sqrt{2}}$$

$$H' = -G\cos\theta + H\sin\theta$$
$$= \frac{4a}{\sqrt{2}} - \frac{4b}{\sqrt{2}}$$

$$I' = I = 2a^2 + 2b^2$$

จะได้สมการในระบบแกน $x'y'$ เป็น

$$2x'^2 + \left(-\frac{4a}{\sqrt{2}} - \frac{4b}{\sqrt{2}}\right)x' + \left(\frac{4a}{\sqrt{2}} - \frac{4b}{\sqrt{2}}\right)y' + 2a^2 + 2b^2 = 0$$

นำ 2 หารตลอดสมการ จะได้

$$x'^2 + 2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)x' + \left(\sqrt{2}a - \sqrt{2}b\right)y' + a^2 + b^2 = 0$$

$$x'^2 - 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)x' + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)y' - a^2 - b^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\left(x' - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)y' - a^2 - b^2 + \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}$$

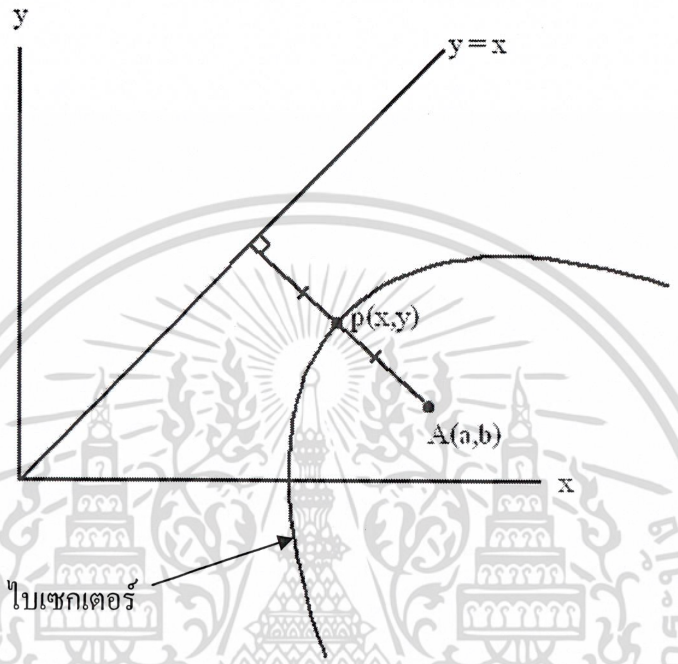
$$\left(x' - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)y' - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + ab$$

$$= \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)y' - \left(\frac{\sqrt{2}b}{2} - \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)y' - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)\left(y' - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}b - \sqrt{2}a\right)\right)$$

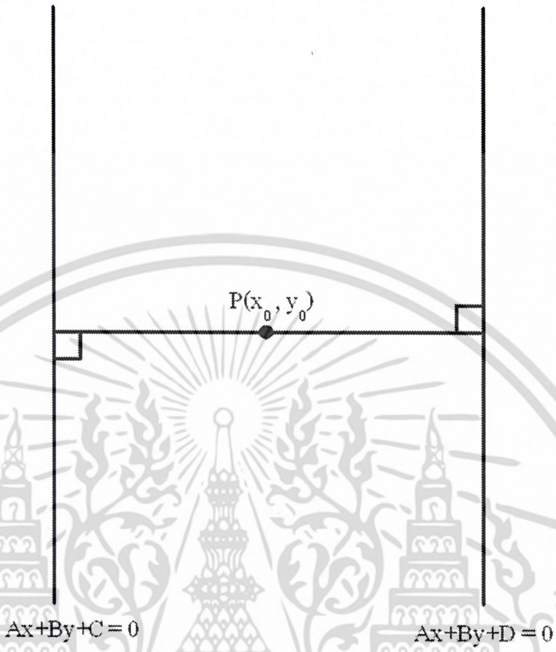
$\therefore$ จะเห็นว่าสมการข้างต้นอยู่ในรูปของสมการพาราโบลาแบบคว่ำ ที่มีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์และมีจุด $A(a,b)$ เป็นจุดโฟกัส



รูปที่ 3.10 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับเส้นตรงที่ทำมุมใด ๆ กับแกน x ไม่เกิน 180 °

3.2.3 เส้นตรง – เส้นตรง

3.2.3.1 เส้นตรงกับเส้นตรงที่ขนานกัน



รูปที่ 3.11 แสดงเส้นกับเส้นที่ขนานกัน

<u>กำหนด</u> ให้เส้นตรง 2 เส้นขนานกัน และให้มีจุด $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดที่ห่างจากเส้นตรงทั้ง 2 เส้นเป็นระยะทางเท่ากัน โดยการหาระยะทางจากจุด $P(x_0, y_0)$ ไปยังเส้นตรงทั้ง2 เส้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นตรงทั้ง 2 เส้นด้วย โดยสมการเส้นตรงทั้งสองเส้นมีสมการดังนี้ $Ax + By + c = 0$ และ $Ax + By + d = 0$ (เส้นตรงทั้ง 2 เส้นจะมีความชันเท่ากันเพราะเป็นเส้นตรงขนานกัน) ซึ่ง A, B, C, D เป็นจำนวนจริงใด และ A, B จะเท่ากับ 0 พร้อมกันทั้งสองค่าไม่ได้

<u>พิสูจน์</u> จุด $P(x_0, y_0)$ ห่างจากเส้นตรง 2 เส้นเป็นระยะทางเท่ากัน โดยใช้สูตรการหาระยะทางจากจุดถึงเส้นจะได้

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2} = \frac{(Ax_0 + By_0 + D)^2}{A^2 + B^2}$$

นำ $A^2 + B^2$ คูณตลอดทั้งสองข้าง จะได้

$$(Ax_0 + By_0)^2 + 2(Ax_0 + By_0)C + C^2 = (Ax_0 + By_0)^2 + 2(Ax_0 + By_0)D + D^2$$

จัดสมการใหม่จะได้

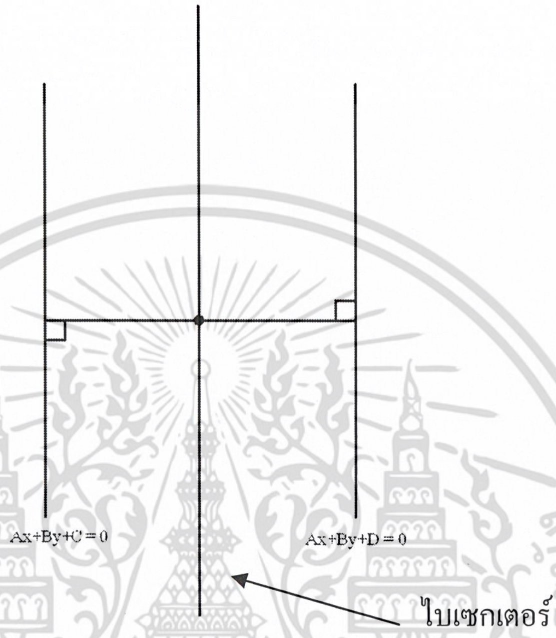
$$\begin{aligned} 2(Ax_0 + By_0)C - 2(Ax_0 + By_0)D + C^2 - D^2 &= 0 \\ 2(Ax_0 + By_0)(C - D) + C^2 - D^2 &= 0 \\ 2A(C - D)x_0 + 2B(C - D)y_0 + C^2 - D^2 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการที่คล้ายกับสมการเส้นตรง คือ

$$\underbrace{2A(C - D)}_{\downarrow}x_0 + \underbrace{2B(C - D)}_{\downarrow}y_0 + \underbrace{C^2 - D^2}_{\downarrow} = 0$$

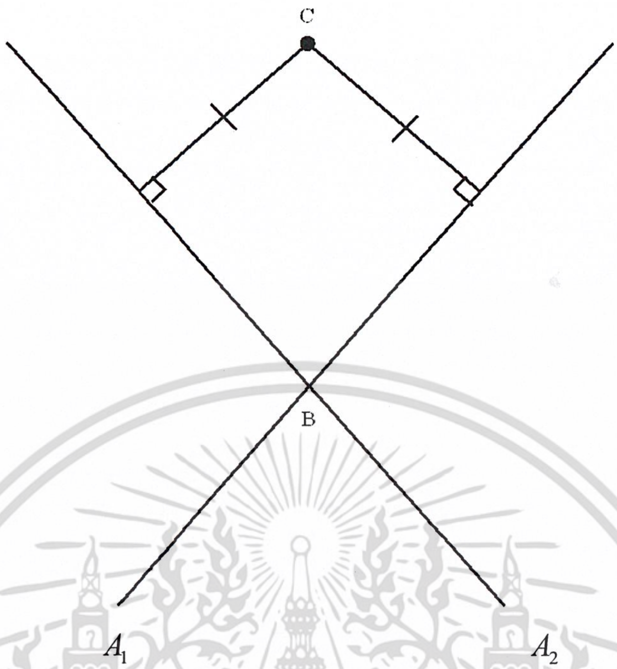
$$Ex + Fy + G = 0$$

∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง เส้นตรงกับเส้นตรงที่ขนานกัน คือ เส้นตรงที่มีระยะห่างจากเส้นตรงทั้งสองเท่ากันและขนานกับเส้นตรงทั้งสองด้วย



รูปที่ 3.12 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

3.2.3.2 เส้นตรงกับเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน

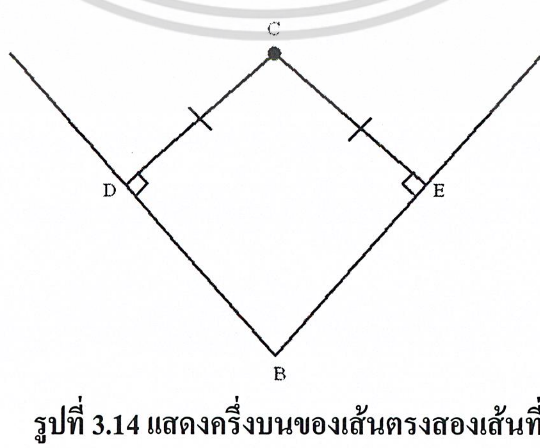


รูปที่ 3.13 แสดงเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

กำหนด ให้เส้นตรง A_1 และเส้นตรง A_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน ดังนั้นเส้นตรงทั้ง 2 เส้น จะตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง ให้เป็นจุด B

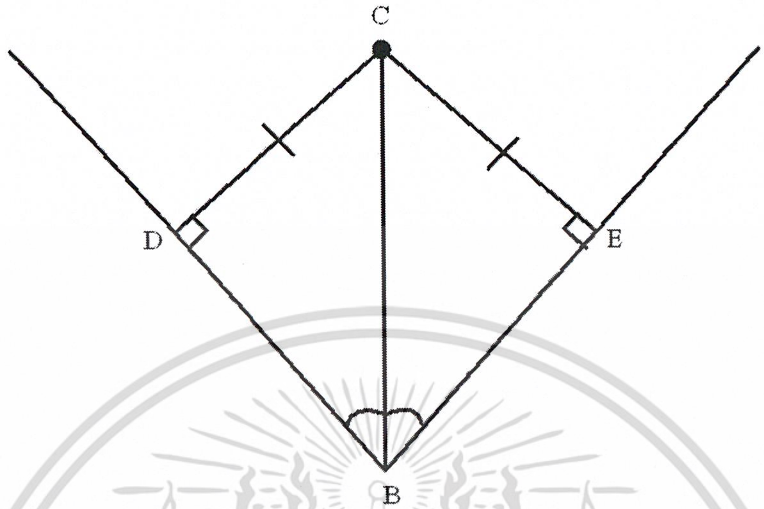
และให้ C เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ห่างจากเส้นตรง A_1 และเส้นตรง A_2 เป็นระยะทางเท่ากัน

คิดที่ครึ่งบน



รูปที่ 3.14 แสดงครึ่งบนของเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน

ให้ D และ E เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง A_1 และเส้นตรง A_2 ตามลำดับ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด C เป็นระยะทางเท่ากัน ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด CB ดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 แสดงเส้นเชื่อม CB

จะเห็นได้ว่าเกิดสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้น 2 รูป คือ สามเหลี่ยม CDB และสามเหลี่ยม CEB

ให้มุม CBD = θ_1 และ มุม CBE = θ_2

จากทฤษฎีบทปีทากอรัส

ที่สามเหลี่ยม CDB : $CB^2 = CD^2 + DB^2$ (1)

ที่สามเหลี่ยม CEB : $CB^2 = CE^2 + EB^2$ (2)

จาก (1) และ (2) ดังนั้นจะได้ว่า

$$CD^2 + DB^2 = CE^2 + EB^2$$

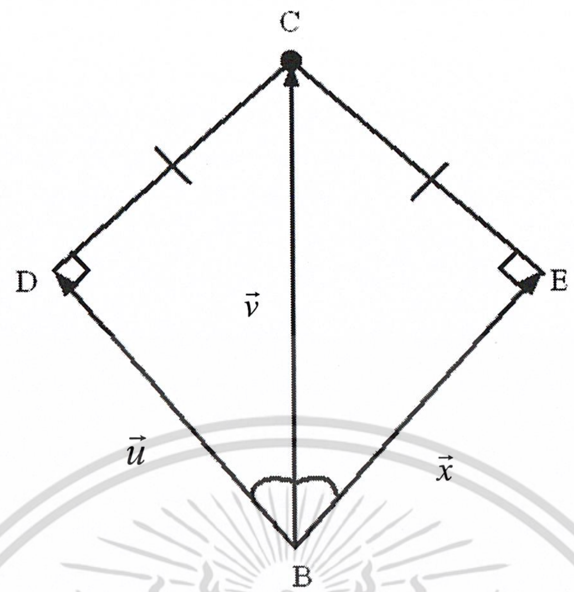
แต่ CD = CE

ดังนั้น $DB^2 = \mathrm{EB}^2$

นั่นคือ DB = EB

ดังนั้น จึงได้ว่า $\Delta CDB \cong \Delta\mathrm{CEB}$ แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน

$$\therefore \theta_1 = \theta_2$$



รูปที่ 3.16 แสดงเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$

ซึ่งเราจะนำความรู้ทางเวกเตอร์มาช่วยในการพิสูจน์

โดยกำหนดให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$

$\vec{v} = b\hat{i} + a\hat{j}$

$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j}$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{x} = |\vec{u}||\vec{x}|\cos\theta_1$

และ $\vec{v} \cdot \vec{x} = |\vec{v}||\vec{x}|\cos\theta_2$

$$\therefore \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{|\vec{u}||\vec{x}|} = \cos\theta_1$$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{|\vec{v}||\vec{x}|} = \cos\theta_2$$

เนื่องจาก มุม θ_1 และ θ_2 มีขนาดเท่ากัน

ดังนั้น $cos\,\theta_1$ และ $cos\,\theta_2$ จะมีค่าเท่ากันด้วย

$$\therefore \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{|\vec{u}||\vec{x}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{|\vec{v}||\vec{x}|}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{x})\,|\vec{v}|\,|\vec{x}| = (\vec{v} \cdot \vec{x})\,|\vec{u}|\,|\vec{x}|$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{x})\,|\vec{v}| \quad = \quad (\vec{v}\cdot\vec{x})\,|\vec{u}|$$

ทำการยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$(\vec{u}\cdot\vec{x})^2\,|\vec{v}|^2 = (\vec{v}\cdot\vec{x})^2\,|\vec{u}|^2$$

เนื่องจาก $|\vec{v}| = |\vec{u}|$ จะได้

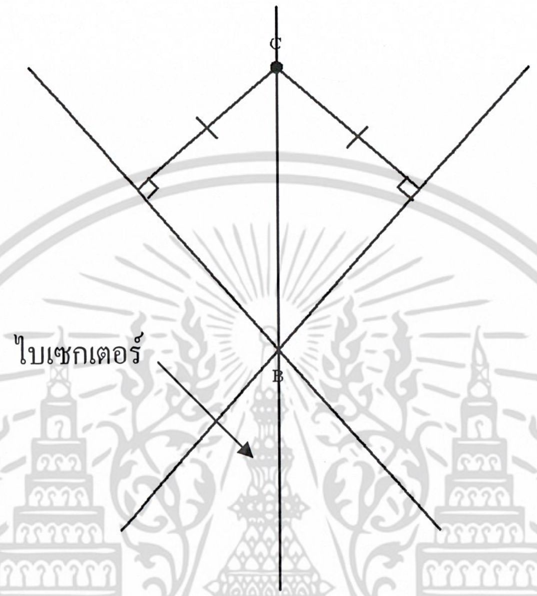
$$(\vec{u}\cdot\vec{x})^2 = (\vec{v}\cdot\vec{x})^2$$
$$(\vec{u}\cdot\vec{x})(\vec{u}\cdot\vec{x}) = (\vec{v}\cdot\vec{x})(\vec{v}\cdot\vec{x})$$

ทำการแทนค่า $\vec{u},\vec{v},\vec{x}$ จะได้

$$(ax+by)(ax+by) = (bx+ay)(bx+ay)$$
$$a^2b^2 + 2abxy + b^2y^2 = b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2$$
$$a^2b^2 + b^2y^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$
$$(a^2-b^2)x^2 + (b^2-a^2)y^2 = 0$$
$$(a^2-b^2)x^2 = -(b^2-a^2)y^2$$
$$x^2 = y^2$$

จะได้ $y = \pm x$ หรือ $x = \pm y$
ซึ่งมีรูปแบบตรงกับสมการเส้นตรง $ax+by+c=0$

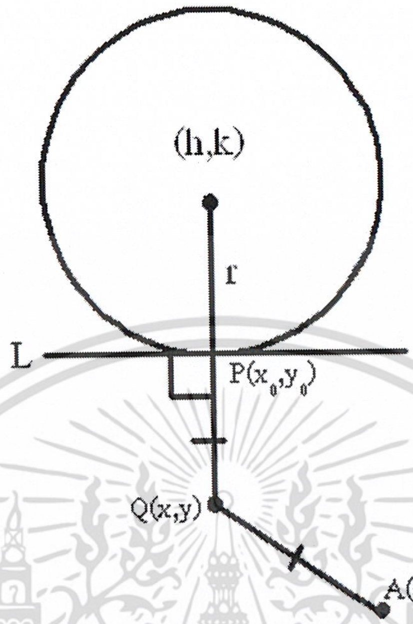
∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง เส้นตรงกับเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน คือ เส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง และมีระยะทางไปยังเส้นตรงทั้งสองเท่ากันและตั้งฉาก



รูปที่ 3.17 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

3.2.4 จุด – เส้นโค้ง

3.2.4.1 จุดกับวงกลม



รูปที่ 3.18 แสดงจุดกับวงกลม

กำหนด ให้ วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) มีรัศมี r และมีเส้นสัมผัสวงกลม L ซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่จุด $P(x_0, y_0)$ มีจุด $Q(x, y)$ เป็นจุดที่มีระยะห่างจากจุด $A(a,b)$ และเส้นสัมผัสวงกลม L เท่ากัน

(เวลาวัดระยะห่างจากจุด $Q(x, y)$ จะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม L)

พิสูจน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x_0 จากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $P(x_0, y_0)$ หมายถึงเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเป็น $f'(x_0)$

จากสมการวงกลมดังนั้นจะได้ $f(x) = (x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2 = 0$

จากความชันเส้นสัมผัสวงกลมคือ $f'(x_0)$

$$\frac{d}{dx}\left((x-h)^2+(y-k)^2-r^2\right)=0$$
$$2(x-h)+2(y-k)\frac{dy}{dx}=0$$
$$2(y-k)\frac{dy}{dx}=-2(x-h)$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-h)}{(y-k)}$$

ในที่นี้ต้องการหา $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x_0,y_0) จะได้

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุด $(x_0,y_0)=-\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}=m$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x_0,y_0) คือ

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$=-\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}(x-x_0) \qquad (1)$$
$$(y-y_0)(y_0-k)+(x_0-h)(x-x_0)=0$$
$$y(y_0-k)-y_0(y_0-k)+x(x_0-h)-x_0(x_0-h)=0$$
$$x\underbrace{(x_0-h)}_{A}+y\underbrace{(y_0-k)}_{B}\underbrace{-y_0(y_0-k)-x_0(x_0-h)}_{C}=0$$

ให้ $A=(x_0-h)$, $B=(y_0-k), C=-y_0(y_0-k)-x_0(x_0-h)$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูป $Ax+By+C=0$

$\therefore \quad C=-y_0B-x_0A$

จากระยะทางที่เท่ากันของจุด $Q(x,y)$ ไปยังเส้นสัมผัสวงกลม L กับระยะทางจากจุด $Q(x,y)$ ไปยังจุด $A(a,b)$ จะเป็นดังนี้

$$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2} = (x-a)^2+(y-b)^2 \qquad (2)$$

จากสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ และมีจุด (x_0,y_0) อยู่บนวงกลม ดังนั้นสมการวงกลมเป็น $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$

แต่ $A=(x_0-h),\ B=(y_0-k)$

$\therefore\ A^2+B^2=r^2$ และ $C=-y_0B-x_0A$ นำทั้งสองค่าแทนลงในสมการที่ (2)

จะได้

$$\frac{(Ax+By-y_0B-x_0A)^2}{r^2} = (x-a)^2+(y-b)^2$$

$$\frac{(A(x-x_0)+B(y-y_0))^2}{r^2} = (x-a)^2+(y-b)^2$$

$$\frac{A^2(x-x_0)^2+2AB(x-x_0)(y-y_0)+B^2(y-y_0)^2}{r^2} = (x-a)^2+(y-b)^2$$

$$A^2(x-x_0)^2+2AB(x-x_0)(y-y_0)+B^2(y-y_0)^2 = r^2\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$A^2(x^2-2xx_0+x_0^2)-r^2(x^2-2xa+a^2)+2AB(xy-x_0y-xy_0+x_0y_0)$$
$$+B^2(y^2-2yy_0+y_0^2)-r^2(y^2-2yb+b^2)=0$$

$$(A^2-r^2)x^2-2x(A^2x_0-ar^2)+A^2{x_0}^2-r^2a^2+2ABxy-2ABx_0y-2ABxy_0$$
$$+2ABx_0y_0+(B^2-r^2)y^2-2y(B^2y_0-r^2b)+B^2y_0^2-r^2b^2=0$$

$$\underbrace{(A^2-r^2)}_{D}x^2+\underbrace{(2AB)}_{E}xy+\underbrace{(B^2-r^2)}_{F}y^2+\underbrace{\left(-2(A^2x_0-ar^2+ABy_0)\right)}_{G}x$$
$$+\underbrace{\left(-2(B^2y_0-r^2b+ABx_0)\right)}_{H}y+\underbrace{\left(A^2{x_0}^2-r^2a^2+2ABx_0y_0+B^2y_0^2-r^2b^2\right)}_{I}=0$$

กำหนดให้ $D=(A^2-r^2)$

$E=2AB$

$F=B^2-r^2$

$G=-2(A^2x_0-ar^2+ABy_0)$

$H=-2(B^2y_0-r^2b+ABx_0)$

$I=\left(A^2{x_0}^2-r^2a^2+2ABx_0y_0+B^2y_0^2-r^2b^2\right)$

ดังนั้น สมการจะอยู่ในรูป $Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I = 0$ ซึ่งเป็นสมการกำลังสองของสองตัวแปรของเรขาคณิตวิเคราะห์ในภาคตัดกรวย ซึ่งจะเป็นกราฟที่หมุนแกน
กำหนดให้ สมการ $D'x'^2 + E'x'y' + F'y'^2 + G'x' + H'y' + I' = 0$ บนระนาบ $x'y'$

โดยที่ $D' = D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$$E' = E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta$$

$$F' = D\cos^2\theta - E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$$

$$G' = G\cos\theta + H\sin\theta$$

$$H' = -G\cos\theta + H\sin\theta$$

$$I' = I$$

บนระนาบ $x'y'$ จะไม่ให้มีพจน์ $x'y'$ ก็ต่อเมื่อ $E' = 0$ นั่นคือ

$$E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$E(\cos 2\theta) - (D-F)\sin 2\theta = 0$$

$$E(\cos 2\theta) = (D-F)\sin 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{E}{(D-F)}$$

ดังนั้นจะได้ $\tan 2\theta = \dfrac{E}{(D-F)}$ หรือ $\theta = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{E}{(D-F)}$

ดังนั้น การหมุนแกนในระบบแกน $x'y'$ ไปสู่ระบบแกน xy จะมีมุม $\theta = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{E}{(D-F)}$

พิจารณาสมการ

$$\underbrace{(A^2 - r^2)}_{D}x^2 + \underbrace{(2AB)}_{E}xy + \underbrace{(B^2 - r^2)}_{F}y^2 + \underbrace{(-2(A^2x_0 - ar^2 + ABy_0))}_{G}x$$
$$+ \underbrace{(-2(B^2y_0 - r^2b + ABx_0))}_{H}y + \underbrace{(A^2x_0{}^2 - r^2a^2 + 2ABx_0y_0 + B^2y_0^2 - r^2b^2)}_{I} = 0$$

จาก $\tan 2\theta = \dfrac{E}{(D-F)} = \dfrac{2AB}{A^2 - r^2 - B^2 + r^2} = \dfrac{2AB}{A^2 - B^2}$

$$\sec^2 2\theta = 1+\tan^2 2\theta = 1+\left(\frac{2AB}{A^2-B^2}\right)^2$$

$$= \frac{A^4-2A^2B^2+B^4+4A^2B^2}{A^4-2A^2B^2+B^4}$$

$$= \frac{A^4+2A^2B^2+B^4}{A^4-2A^2B^2+B^4}$$

$$= \frac{(A^2+B^2)^2}{(A^2-B^2)^2}$$

$\therefore \quad \sec 2\theta = \dfrac{A^2+B^2}{A^2-B^2} = \dfrac{r^2}{A^2-B^2}$ และ $\cos 2\theta = \dfrac{A^2-B^2}{r^2}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\cos 2\theta}}{2} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{A^2-B^2}{r^2}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{r^2-A^2+B^2}{r^2}}}{2}$$

จาก $\therefore \ A^2+B^2=r^2$ ดังนั้น $B^2=r^2-A^2$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2B^2}}{2r} = \frac{B}{\sqrt{2}\,r}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}}{2} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{A^2-B^2}{r^2}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{r^2+A^2-B^2}{r^2}}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2A^2}}{2r} = \frac{A}{\sqrt{2}\,r}$$

จาก $D' = D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$$\therefore \quad D' = \left(A^2-r^2\right)\frac{A^2}{2r^2} + \left(2AB\right)\frac{AB}{2r^2} + \left(B^2-r^2\right)\frac{B^2}{2r^2}$$

$$= \left(A^2-A^2-B^2\right)\frac{A^2}{2r^2} + \left(2AB\right)\frac{AB}{2r^2} + \left(B^2-A^2-B^2\right)\frac{B^2}{2r^2}$$

$$= -\frac{A^2B^2}{2r^2} + \frac{A^2B^2}{r^2} - \frac{A^2B^2}{2r^2}$$

$$= 0$$

จาก $E' = E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore \quad E' = 2AB\left(\frac{A^2}{2}-\frac{B^2}{2}\right) - 2\left(A^2-r^2-B^2+r^2\right)\frac{AB}{2}$$

$$= AB\left(A^2-B^2\right) - AB\left(A^2-B^2\right)$$

$$= 0$$

จาก $F' = D\cos^2\theta - E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$$\therefore\quad F' = \left(A^2 - r^2\right)\frac{A^2}{2r^2} - \left(2AB\right)\frac{AB}{2r^2} + \left(B^2 - r^2\right)\frac{B^2}{2r^2}$$

$$= \left(A^2 - A^2 - B^2\right)\frac{A^2}{2r^2} - \left(2AB\right)\frac{AB}{2r^2} + \left(B^2 - A^2 - B^2\right)\frac{B^2}{2r^2}$$

$$= -\frac{A^2B^2}{2r^2} - \frac{A^2B^2}{r^2} - \frac{A^2B^2}{2r^2}$$

$$= -\frac{2}{r^2}A^2B^2$$

จาก $G' = G\cos\theta + H\sin\theta$

$$\therefore\quad G' = -2\left(A^2x_0 - ar^2 + ABy_0\right)\frac{A}{\sqrt{2}r} - 2\left(B^2y_0 - r^2b + ABx_0\right)\frac{B}{\sqrt{2}r}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{r}\left(A^3x_0 - Aar^2 + A^2By_0 + B^3y_0 - Br^2b + AB^2x_0\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{r}\left(A^3x_0 + AB^2x_0 - Aar^2 - Br^2b + A^2By_0 + B^3y_0\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{r}\left(Ax_0\left(A^2 + B^2\right) - r^2\left(Aa + Bb\right) + By_0\left(A^2 + B^2\right)\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{r}\left(r^2Ax_0 - r^2\left(Aa + Bb\right) + r^2By_0\right)$$

$$= -\sqrt{2}\left(r\left(Ax_0 - Aa - Bb + By_0\right)\right)$$

$$= -\sqrt{2}r\left(A(x_0 - a) + B(y_0 - b)\right)$$

จาก $H' = -G\cos\theta + H\sin\theta$

$$\therefore\quad H' = 2\left(A^2x_0 - ar^2 + ABy_0\right)\frac{A}{\sqrt{2}r} - 2\left(B^2y_0 - r^2b + ABx_0\right)\frac{B}{\sqrt{2}r}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(A^3x_0 - Aar^2 + A^2By_0 - B^3y_0 + Br^2b - AB^2x_0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(A^3x_0 - AB^2x_0 - Aar^2 + Br^2b + A^2By_0 - B^3y_0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(Ax_0\left(A^2 - B^2\right) - r^2\left(Aa - Bb\right) + By_0\left(A^2 - B^2\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\left(A^2 - B^2\right)\left(Ax_0 + By_0\right) - r^2\left(Aa + Bb\right)\right)$$

จาก $\quad I' = I$

$$\therefore \quad I = A^2{x_0}^2 - r^2a^2 + 2ABx_0y_0 + B^2y_0^2 - r^2b^2$$

$$= A^2{x_0}^2 + 2ABx_0y_0 + B^2y_0^2 - r^2a^2 - r^2b^2$$

$$= (Ax_0 + By_0)^2 - r^2(a^2 - b^2)$$

จะได้สมการในระบบแกน $x'y'$ เป็น

$$\frac{\left(-2A^2B^2\right)}{r^2}y'^2 + \left(-\sqrt{2}r\left(A(x_0 - a) + B(y_0 - b)\right)\right)x'$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\left(\left(A^2 - B^2\right)\left(Ax_0 + By_0\right) - r^2\left(Aa + Bb\right)\right)\right)y' + \left(\left(Ax_0 + By_0\right)^2 - r^2(a^2 - b^2)\right) = 0$$

นำ $\dfrac{-2A^2B^2}{r^2}$ หารตลอดทั้งสองข้าง

$$y'^2 - \frac{r\left(\left(A^2 - B^2\right)\left(Ax_0 + By_0\right) - r^2\left(Aa + Bb\right)\right)}{\sqrt{2}A^2B^2}y' + \frac{r^2\left(r^2(a^2 - b^2) - \left(Ax_0 + By_0\right)^2\right)}{2A^2B^2}$$

$$= -\frac{r^2\left(r^2\left(A(x_0 - a) + B(y_0 - b)\right)\right)x'}{\sqrt{2}A^2B^2}$$

ให้
$$J = \frac{r\left(\left(A^2 - B^2\right)\left(Ax_0 + By_0\right) - r^2\left(Aa + Bb\right)\right)}{\sqrt{2}A^2B^2}$$

$$K = \frac{r^2\left(r^2(a^2 - b^2) - \left(Ax_0 + By_0\right)^2\right)}{2A^2B^2}$$

$$4L = \frac{r^2\left(r^2\left(A(x_0 - a) + B(y_0 - b)\right)\right)}{\sqrt{2}A^2B^2}$$

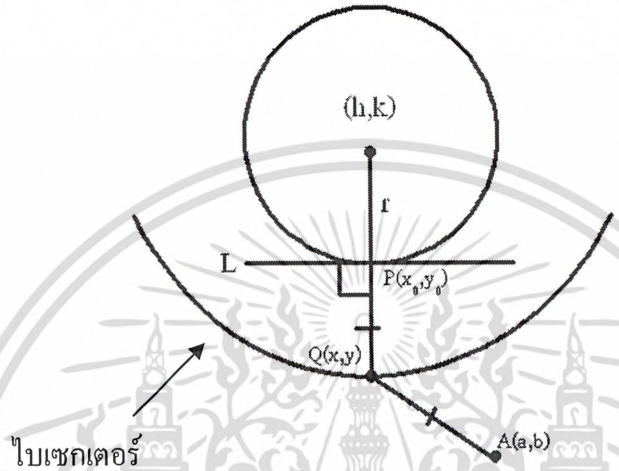
ดังนั้นจะได้สมการเป็น $\quad y'^2 - Jy' + K^2 \quad = \quad -4Lx'$

ให้ $\quad J = 2M \quad$ ดังนั้น $\quad y'^2 - 2My' + M^2 \quad = \quad 4Lx' - K^2 - M^2$

$$\therefore \quad (y' - M)^2 \quad = \quad -4L\left(x' - \frac{\left(K^2 + M^2\right)}{4}\right)$$

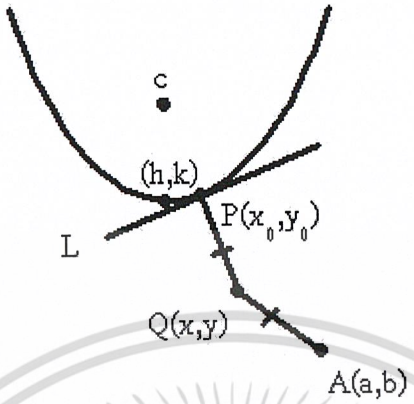
จะเห็นว่าสมการจะอยู่ในรูปพาราโบลา $\quad (y - u)^2 \quad = \quad -4c(x - v) \quad$ เมื่อ u , v เป็นจุดยอดของพาราโบลา

$\therefore$ ไบเซกเตอร์ระหว่าง จุดกับเส้นโค้ง คือ พาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่ $Q(x, y)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $P(x_0, y_0)$



รูปที่ 3.19 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับวงกลม

3.2.4.2 จุดกับพาราโบลา



รูปที่ 3.20 แสดงจุดกับพาราโบลา

กำหนด ให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ (h,k) มีจุดโฟกัส c และมีเส้นสัมผัสพาราโบลา L ซึ่งสัมผัสกับพาราโบลาที่จุด $P(x_0, y_0)$ มีจุด $Q(x, y)$ เป็นจุดที่มีระยะห่างจากจุด $A(a,b)$ เท่ากัน และเส้นสัมผัสพาราโบลา L เท่ากัน

(เวลาวัดระยะห่างจากจุด $Q(x, y)$ จะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสพาราโบลา L)

พิสูจน์

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด x_0 จากเส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด $P(x_0, y_0)$ หมายถึงเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเป็น $f'(x_0)$

จากสมการพาราโบลา ดังนั้นจะได้ $f(x) \;=\; (x-h)^2 - 4c(y-k)$

จากความชันเส้นสัมผัสพาราโบลา $f'(x_0)$

$$\frac{d}{dx}\left[(x-h)^2 - 4c(y-k)\right] = 0$$

$$2(x-h) - 4c\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-h)}{4c}$$

$$= \frac{x-h}{2c}$$

ในที่นี้ต้องการหา $\frac{dy}{dx}$ ณ จุด (x_0, y_0) จะได้

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{(x_0-h)}{2c}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสพาราโบลา ณ จุด (x_0, y_0) $= \dfrac{(x_0 - h)}{2c} = m$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (x_0, y_0) คือ

$$
\begin{aligned}
(y - y_0) &= m(x - x_0) \\
&= \frac{(x_0 - h)}{2c}(x - x_0) \\
2c(y - y_0) &= (x_0 - h)(x - x_0) \\
2cy - 2cy_0 &= x(x_0 - h) - x_0(x_0 - h)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\underbrace{x(x_0 - h)}_{A} + \underbrace{(-2c)}_{B}y + \underbrace{(-x_0(x_0 - h) + 2cy_0)}_{C} = 0$

ให้ $A = x_0 - h, \quad B = -2c, \quad C = -x_0(x_0 - h) + 2cy_0$

ดังนั้นสมการอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$

$$\therefore C = -y_0 B - x_0 A$$

จากระยะทางที่เท่ากันของจุด $Q(x, y)$ ไปยังเส้นสัมผัสพาราโบลา L กับระยะทางจากจุด $Q(x, y)$ ไปยังจุด $A(a, b)$ ดังนี้

$$\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{(Ax + By + C)^2}{A^2 + B^2} = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

นำค่า $C = -y_0 B - x_0 A$ แทนลงไปในสมการข้างต้น

จะได้ $$\frac{(A(x - x_0) + B(y - y_0))^2}{A^2 + B^2} = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$A^2(x - x_0)^2 + 2AB(x - x_0)(y - y_0) + B^2(y - y_0)^2 = (A^2 + B^2)\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&A^2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + 2AB(xy - yx_0 - xy_0 + x_0 y_0) + B^2(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) \\
&= (A^2 + B^2)(x^2 - 2ax + a^2) + (A^2 + B^2)(y^2 - 2by + b^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A^2(x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + 2AB(xy - yx_0 - xy_0 + x_0 y_0) + B^2(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) \\
&-(A^2 + B^2)(x^2 - 2ax + a^2) - (A^2 + B^2)(y^2 - 2by + b^2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A^2 - A^2 - B^2)x^2 + 2ABxy + (B^2 - A^2 - B^2)y^2 \\
&+ \left(-2A^2 x_0 - 2ABy_0 + 2a(A^2 + B^2)\right)x + \left(-2ABx_0 - 2B^2 y_0 + 2b(A^2 + B^2)\right)y \\
&+ A^2 x_0^2 + 2ABx_0 y_0 + B^2 y_0^2 - a^2(A^2 + B^2) - b^2(A^2 + B^2) = 0
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{-B^2}_{D}x^2+\underbrace{2AB}_{E}xy+\underbrace{\left(-A^2\right)}_{F}y^2+\underbrace{\left(-2A^2x_0-2ABy_0+2a\left(A^2+B^2\right)\right)}_{G}x+\underbrace{\left(-2ABx_0-2B^2y_0+2b\left(A^2+B^2\right)\right)}_{H}y$$
$$+\underbrace{A^2x_0^2+2ABx_0y_0+B^2y_0^2-a^2\left(A^2+B^2\right)-b^2\left(A^2+B^2\right)}_{I}=0$$

$$\underbrace{-B^2}_{D}x^2+\underbrace{2AB}_{E}xy+\underbrace{\left(-A^2\right)}_{F}y^2+\underbrace{\left(-2A^2x_0-2ABy_0+2a\left(A^2+B^2\right)\right)}_{G}x+\underbrace{\left(-2ABx_0-2B^2y_0+2b\left(A^2+B^2\right)\right)}_{H}y$$
$$+\underbrace{\left(Ax_0+By_0\right)^2+\left(A^2+B^2\right)\left(-a^2-b^2\right)}_{I}=0$$

ดังนั้น สมการจะอยู่ในรูป $Dx^2+Exy+Fy^2+Gx+Hy+I=0$ ซึ่งเป็นสมการกำลังสองของสองตัวแปรของเรขาคณิตวิเคราะห์ในภาคตัดกรวย ซึ่งจะเป็นกราฟที่หมุนแกน

กำหนดให้ สมการ $D'x'^2+E'x'y'+F'y'^2+G'x'+H'y'+I'=0$ บนระนาบ $x'y'$

โดยที่ $D'=D\cos^2\theta+E\sin\theta\cos\theta+F\sin^2\theta$

$E'=E(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2(D-F)\sin\theta\cos\theta$

$F'=D\cos^2\theta-E\sin\theta\cos\theta+F\sin^2\theta$

$G'=G\cos\theta+H\sin\theta$

$H'=-G\cos\theta+H\sin\theta$

$I'=I$

เป็นการทำบนระนาบ $x'y'$ จะไม่ให้มีพจน์ $x'y'$ ก็ต่อเมื่อ $E'=0$ นั่นคือ

จาก $\tan 2\theta=\dfrac{E}{(D-F)}=\dfrac{2AB}{A^2-B^2}=\dfrac{2AB}{A^2-B^2}$

$$\sec^2 2\theta = 1+\tan^2 2\theta = 1+\left(\frac{2AB}{A^2-B^2}\right)^2$$
$$= \frac{A^4-2A^2B^2+B^4+4A^2B^2}{A^4-2A^2B^2+B^4}$$
$$= \frac{A^4+2A^2B^2+B^4}{A^4-2A^2B^2+B^4}$$
$$= \frac{(A^2+B^2)^2}{(A^2-B^2)^2}$$

$\therefore \quad \sec 2\theta = \dfrac{A^2+B^2}{A^2-B^2}$ และ $\cos 2\theta = \dfrac{A^2-B^2}{A^2+B^2}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\cos 2\theta}}{2} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{A^2+B^2-A^2+B^2}{A^2+B^2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2B^2}{A^2+B^2}}}{2} = \sqrt{\frac{2B^2}{4\left(A^2+B^2\right)}} = \sqrt{\frac{B^2}{2\left(A^2+B^2\right)}} = \frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}}{2} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{A^2+B^2+A^2-B^2}{A^2+B^2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2A^2}{A^2+B^2}}}{2} = \sqrt{\frac{2A^2}{4\left(A^2+B^2\right)}} = \sqrt{\frac{A^2}{2\left(A^2+B^2\right)}} = \frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

จาก $D' = D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$$D' = -B^2\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2 + 2AB\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right) - A^2\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(-A^2B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)} + \frac{2A^2B^2}{2\left(A^2+B^2\right)} + \frac{\left(-A^2B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)} = 0$$

จาก $E' = E(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2(D-F)\sin\theta\cos\theta$

$$E' = 2AB\left[\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2 - \left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2\right] - 2\left(A^2-B^2\right)\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)$$

$$= \left(\frac{2AB\left(A^2-B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)}\right) - \left(\frac{2AB\left(A^2-B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)}\right) = 0$$

จาก $F' = D\cos^2\theta - E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta$

$$F' = -B^2\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2 - 2AB\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right) - A^2\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(-A^2B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)} + \frac{\left(-2A^2B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)} + \frac{\left(-A^2B^2\right)}{2\left(A^2+B^2\right)} = \frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}$$

จาก $G' = G\cos\theta + H\sin\theta$

$$G' = \left(-2A^2x_0 - 2ABy_0 + 2a\left(A^2+B^2\right)\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)$$

$$+\left(-2ABx_0 - 2B^2y_0 + 2b\left(A^2+B^2\right)\right)\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)$$

$$= \frac{-2A^3x_0 - 2A^2By_0 + 2aA\left(A^2+B^2\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}} + \frac{\left(-2AB^2x_0 - 2B^3y_0 + 2bB\left(A^2+B^2\right)\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$= \frac{-2Ax_0\left(A^2+B^2\right) - 2By_0\left(A^2+B^2\right) + 2\left(A^2+B^2\right)\left(aA+bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$= \frac{-2\left(A^2+B^2\right)\left(Ax_0+By_0-\left(aA+bB\right)\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$= -\left(Ax_0+By_0-\left(aA+bB\right)\right)\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}$$

จาก $H' = -G\cos\theta + H\sin\theta$

$$H' = \left(2A^2x_0 + 2ABy_0 - 2a\left(A^2+B^2\right)\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)$$

$$+\left(-2ABx_0 - 2B^2y_0 + 2b\left(A^2+B^2\right)\right)\left(\frac{B}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)$$

$$= \frac{2A^3x_0 + 2A^2By_0 - 2aA\left(A^2+B^2\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}} + \frac{\left(-2AB^2x_0 - 2B^3y_0 + 2bB\left(A^2+B^2\right)\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$= \frac{2Ax_0\left(A^2-B^2\right) + 2By_0\left(A^2-B^2\right) - 2\left(A^2+B^2\right)\left(aA-bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

$$= \frac{2\left(A^2-B^2\right)\left(2Ax_0+2By_0\right) - 2\left(A^2+B^2\right)\left(aA-bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}$$

จาก $I' = I$

$$I' = \left(Ax_0+By_0\right)^2 + \left(A^2+B^2\right)\left(-a^2-b^2\right)$$

จะได้สมการในระบบแกน $x'y'$ เป็น

$$\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)y'^2+\left(-\left(Ax_0+By_0-\left(aA+bB\right)\right)\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}\right)x'$$
$$+\left(\frac{2\left(A^2-B^2\right)\left(2Ax_0+2By_0\right)-2\left(A^2+B^2\right)\left(aA-bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)y'+\left(Ax_0+By_0\right)^2+\left(A^2+B^2\right)\left(-a^2-b^2\right)=0$$

นำ $\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)$ หารตลอดทั้งสมการ จะได้

$$y'^2+\frac{\left(-\left(Ax_0+By_0-\left(aA+bB\right)\right)\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}\right)}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}x'$$
$$+\frac{\left(\frac{2\left(A^2-B^2\right)\left(2Ax_0+2By_0\right)-2\left(A^2+B^2\right)\left(aA-bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}y'$$
$$+\frac{\left(Ax_0+By_0\right)^2}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}+\frac{\left(A^2+B^2\right)\left(-a^2-b^2\right)}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}=0$$

$$y'^2-\frac{\left(\frac{2\left(A^2-B^2\right)\left(2Ax_0+2By_0\right)-2\left(A^2+B^2\right)\left(aA-bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}\right)}{\left(\frac{2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}y'$$
$$+\frac{\left(Ax_0+By_0\right)^2}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}+\frac{\left(A^2+B^2\right)\left(-a^2-b^2\right)}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}=-\frac{\left(Ax_0+By_0-\left(aA+bB\right)\right)\sqrt{2\left(A^2+B^2\right)}}{\left(\frac{2A^2B^2}{\left(A^2+B^2\right)}\right)}x'$$

เนื่องจาก A, B, a, b, x_0, y_0 เป็นค่าคงที่
ดังนั้น ให้

$$J = \frac{\left(\frac{2\left(A^2 - B^2\right)\left(2Ax_0 + 2By_0\right) - 2\left(A^2 + B^2\right)\left(aA - bB\right)}{\sqrt{2\left(A^2 + B^2\right)}}\right)}{\left(\frac{2A^2B^2}{\left(A^2 + B^2\right)}\right)}$$

$$K = \frac{\left(Ax_0 + By_0\right)^2}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2 + B^2\right)}\right)} + \frac{\left(A^2 + B^2\right)\left(-a^2 - b^2\right)}{\left(\frac{-2A^2B^2}{\left(A^2 + B^2\right)}\right)}$$

$$4\mathrm{L} = \frac{\left(Ax_0 + By_0 - \left(aA + bB\right)\right)\sqrt{2\left(A^2 + B^2\right)}}{\left(\frac{2A^2B^2}{\left(A^2 + B^2\right)}\right)} x'$$

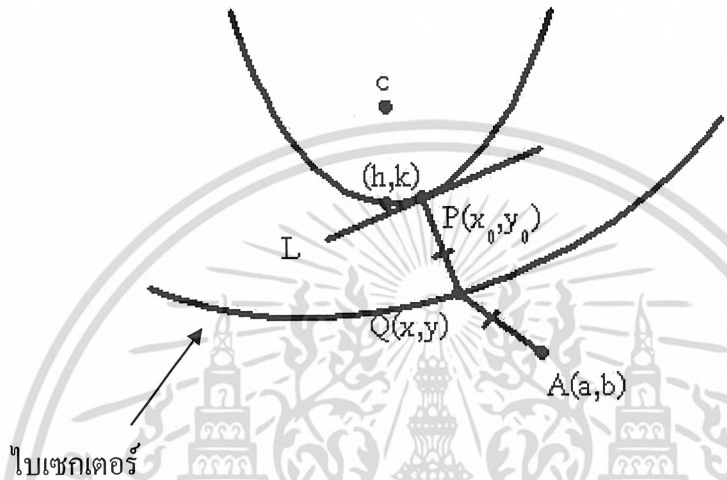
ดังนั้นจะได้สมการเป็น $y'^2 - Jy' + K \;=\; -4Lx'$

ให้ $J = 2M$ ดังนั้น $y'^2 - 2My' + M^2 \;=\; 4Lx' - K - M^2$

$$\therefore \quad \left(y' - M\right)^2 \;=\; -4L\left(x' - \frac{\left(K + M^2\right)}{4}\right)$$

จะเห็นว่าสมการจะอยู่ในรูปพาราโบลา $(y-u)^2 \;=\; -4c(x-v)$ เมื่อ u , v เป็นจุดยอดของพาราโบลา

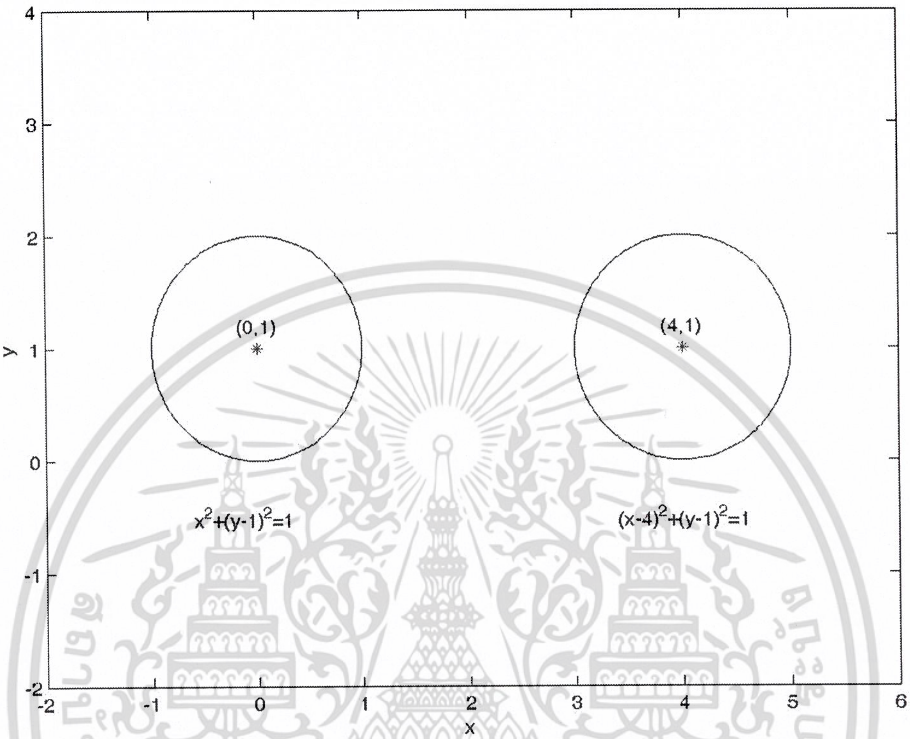
∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่าง จุดกับพาราโบลา คือ พาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่ $Q(x,y)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $P(x_0,y_0)$



รูปที่ 3.21 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของจุดกับพาราโบลา

3.2.5.1.1 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน)



รูปที่ 3.22 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

กำหนด วงกลม 2 วง ที่มีรัศมีเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน ให้เป็น

<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $x^2+(y-1)^2 \ = \ 1$

<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-4)^2+(y-1)^2 \ = \ 1$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

เราจะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์จำนวน 3 จุด เพื่อให้ทราบว่าเส้นไบเซกเตอร์มีลักษณะเป็นอย่างไร

ความชันเส้นสัมผัสวงกลม

จากความชันเส้นสัมผัสวงกลม (m) คือ differential ของสมการวงกลม ที่จุด (x , y) ใด ๆ

<u>วงกลม 1</u>

$$\frac{d}{dx}(x^2 + (y-1)^2 - 1) = 0$$

$$2x + 2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2(y\text{-}1)} = \frac{-x}{y\text{-}1}$$

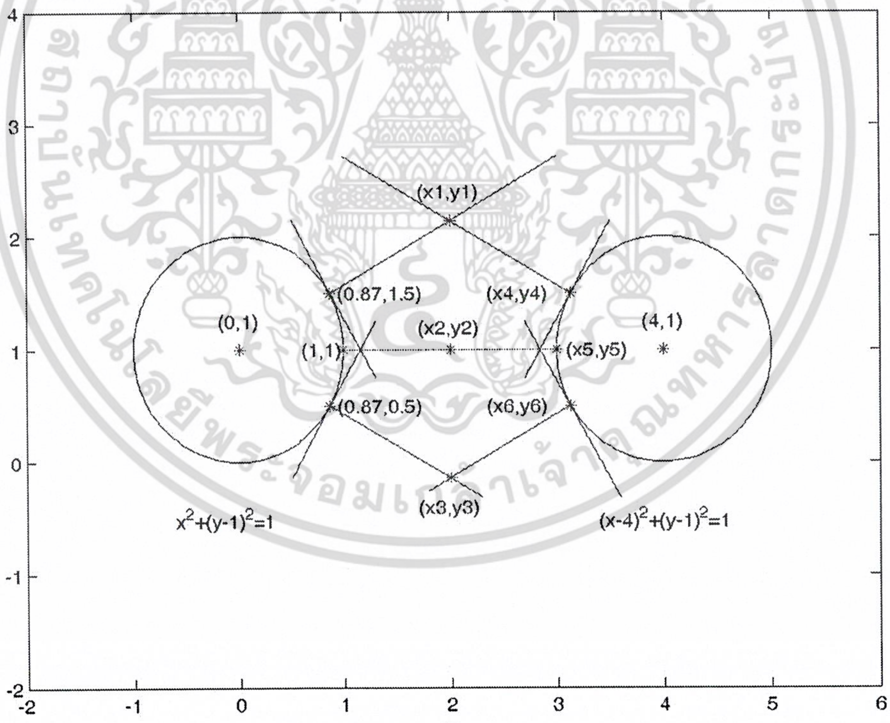
<u>วงกลม 2</u>

$$\frac{d}{dx}((x-4)^2 + (y-1)^2 - 1) = 0$$

$$2(x-4) + 2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x\text{-}4)}{y\text{-}1}$$

จะทำการกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา 3 จุด เพื่อทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ของแต่ละจุด โดยจุดที่กำหนดขึ้นมานี้ คือ จุด (0.87 , 1.5) , (1 , 1) , (0.87 , 0.5)



รูปที่ 3.23 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

จุดที่ 1 (0.87 , 1.5)

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x_1 , y_1)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x_1 , y_1) จะต้องอยู่ห่างจากจุด $(0.87 , 1.5)$ และจุด (x_4 , y_4) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่วงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน นั่นคือมีรัศมีเท่ากัน ดังนั้นจะได้ว่าจุด $(0 , 1)$ และจุด $(4 , 1)$ จะต้องอยู่ห่างจากจุด (x_1 , y_1) เป็นระยะทางเท่ากัน

ทำการหาจุด (x_1 , y_1)

$$\sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 1)^2} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x_1^{\ 2} + (y_1 - 1)^2 = (x_1 - 4)^2 + (y_1 - 1)$$

$$x_1^{\ 2} = (x_1 - 4)^2$$

$$x_1^{\ 2} = x_1^{\ 2} - 8x_1 + 16$$

$$8x_1 = 16$$

$$x_1 = 2$$

และที่จุด (0.87 , 1.5) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-x}{y\text{-}1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{-0.87}{1.5\text{-}1} = \dfrac{-0.87}{0.5} = -1.74$

จากสมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y - y_1}{x\text{-}x_1}$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $-1.74 = \dfrac{y - 1.5}{x\text{-}0.87}$

$$-1.74\,x + 1.52 = y\text{-}1.5$$

$$y = -1.74x + 3.02$$

และเส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อค่าความชันของแต่ละเส้นคูณกันเท่ากับ -1

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $m = \dfrac{y\text{-}1}{x}$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีความชันเป็น

$$m = \frac{1.5\text{-}1}{0.87} = \frac{0.5}{0.87} = 0.57$$

$$8x_2 = 16$$

$$x_2 = 2$$

และที่จุด (1 , 1) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \frac{-x}{y-1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

ดังนั้นเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุด (1 , 1) จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน y และมีสมการเป็น $x = 1$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสจะมีสมการเป็น $y = 1$

และจะได้ว่า $y_2 = 1$ ด้วยเนื่องจากจุด (x_2 , y_2) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส $y = 1$

และจะหาค่า (x_5 , y_5) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_5 , y_5) เท่ากับ

$$y-1 = 0(x-2)$$

$$y = 1$$

จะเห็นได้ว่าสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_5 , y_5) และจุด (1 , 1) เป็นสมการเดียวกัน ดังนั้น $y_5 = 1$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_5 , y_5)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_5 , y_5) คือ

$$y = 1$$

และ $$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$$

นำ $y = 1$ แทนลงในสมการ $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$

จะได้ค่า $x = 3, 5$

$$\therefore\ x_5 = 3\ ,\ y_5 = 1$$

$\therefore$ **จุด** (x_2 , y_2) **คือ (2 , 1)**

จุดที่ 3 (0.87 , 0.5)

ทำการหาจุด (x_3 , y_3) ***เช่นเดียวกับการหาจุด*** (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2)

ดังนั้นจะได้

$$\sqrt{(x_3-0)^2 + (y_3-1)^2} = \sqrt{(x_3-4)^2 + (y_3-1)^2}$$

$$x_3^{\ 2} = (x_3\text{-}4)^2$$

$$x_3^{\ 2} = x_3^{\ 2} - 8x_3 + 16$$

$$8x_3 = 16$$

$$x_3 = 2$$

และที่จุด (0.87 , 0.5) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-x}{y\text{-}1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{-0.87}{0.5\text{-}1} = \dfrac{-0.87}{-0.5} = 1.74$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $1.74 = \dfrac{y-1.5}{x\text{-}0.87}$

$$1.74\,x - 1.51 = y\text{-}0.5$$

$$y = 1.74x - 1.01$$

และเส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อค่าความชันของแต่ละเส้นคูณกันเท่ากับ -1

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $m = \dfrac{y\text{-}1}{x}$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีความชันเป็น

$$m = \frac{0.5\text{-}1}{0.87} = \frac{-0.5}{0.87} = -0.57$$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น

$$-0.57 = \frac{y\text{-}1.5}{x\text{-}0.87}$$

$$-0.57\,x + 0.5 = y\text{-}1.5$$

$$y = -0.57x + 1$$

และเพราะจุด (x_3 , y_3) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น เมื่อ $x_3 = 2$ จะหาค่า y_3 ได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

จากสมการ $y = -0.57x + 1$

$$\therefore\ y = -0.57(2) + 1$$

$$= -1.14 + 1$$

$$= -0.14$$

และจะหาค่า (x_6 , y_6) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_6 , y_6) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

แทนค่าลงในสมการ $y + 0.14 = \dfrac{1 + 0.14}{4 - 2}(x - 2)$

$$y + 0.14 = 0.57(x - 2)$$

$$y = 0.57x - 1.28$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_6 , y_6)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_6 , y_6) คือ

$$y = 0.57x - 1.28$$

และ $$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$$

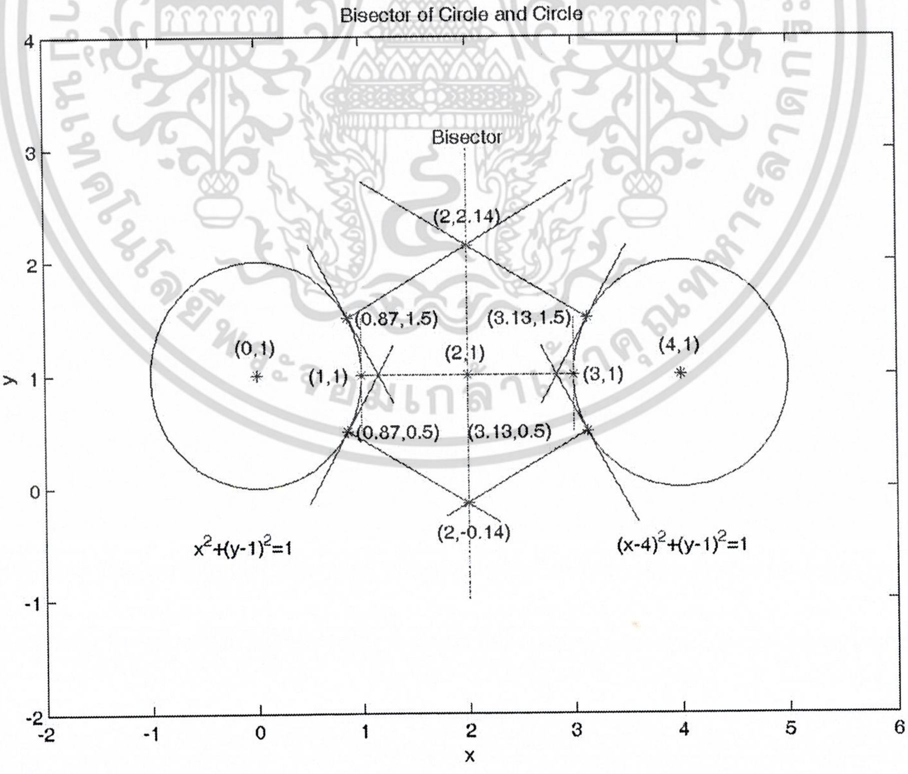
ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 3.13 y = 0.5

$$\therefore \ x_6 = 3.13 \ , \ y_6 = 0.5$$

$\therefore$ **จุด (x_3 , y_3) คือ (2 , -0.14)**

ดังนั้นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ทั้ง 3 จุดที่ได้ คือ (2 , 2.14) , (2 , 1) และ (2 , -0.14) จะเห็นได้ว่าจุดทั้งหมดมีค่า x = 2 เท่ากันทุกจุด ดังนั้นไบเซกเตอร์นี้จะมีสมการเป็น x = 2

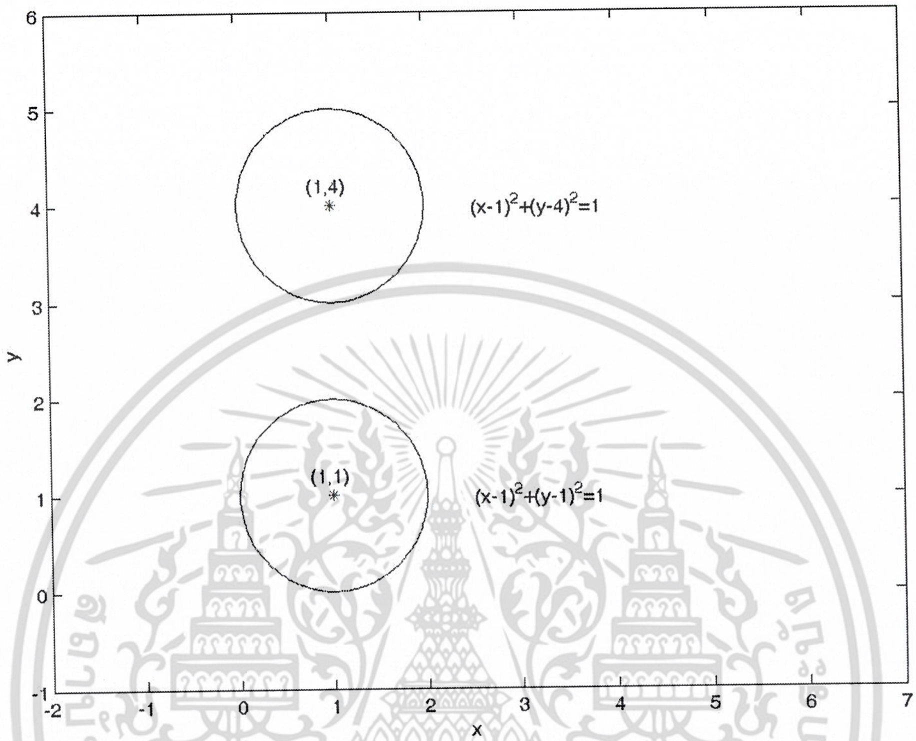
$\therefore$ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน คือ เส้นตรงที่ขนานกันแกน y ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง และอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน



รูปที่ 3.24 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

3.2.5.1.2 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน)



รูปที่ 3.25 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

กำหนด วงกลม 2 วง ที่มีรัศมีเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน ให้เป็น

<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-4)^2 = 1$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,4)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

เราจะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์จำนวน 3 จุด เพื่อให้ทราบว่าเส้นไบเซกเตอร์มีลักษณะเป็นอย่างไร

ความชันเส้นสัมผัสวงกลม

จากความชันเส้นสัมผัสวงกลม (m) คือ differential ของสมการวงกลม ที่จุด (x , y) ใด ๆ

<u>วงกลม 1</u>

$$\frac{d}{dx}((x-1)^2+(y-1)^2-1) = 0$$

$$2(x-1)+2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \; m = \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x\text{-}1)}{2(y\text{-}1)} = \frac{-(x\text{-}1)}{y\text{-}1}$$

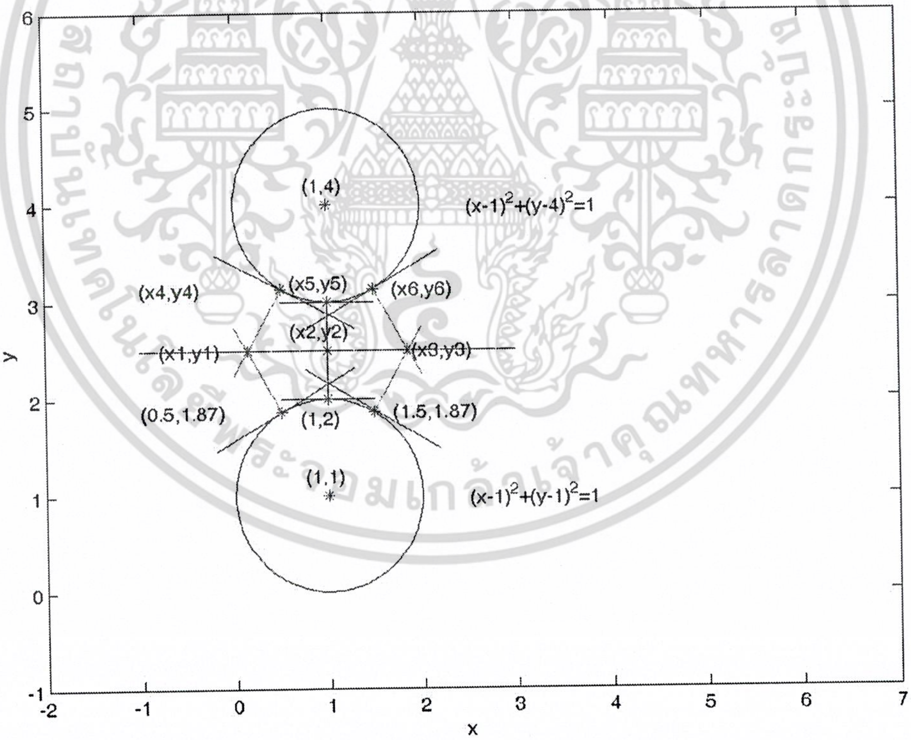
<u>วงกลม 2</u>

$$\frac{d}{dx}((x-1)^2+(y-4)^2-1) = 0$$

$$2(x-1)+2(y-4)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \; m = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x\text{-}1)}{y\text{-}4}$$

จะทำการกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา 3 จุด เพื่อทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ของแต่ละจุด โดยจุดที่กำหนดขึ้นมานี้ คือ จุด (0.5 , 1.87) , (2 , 1) , (1.5 , 1.87)



รูปที่ 3.26 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

จุดที่ 1 (0.5 , 1.87)

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x_1 , y_1)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x_1 , y_1) จะต้องอยู่ห่างจากจุด $(0.5 , 1.87)$ และจุด (x_4 , y_4) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่วงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน นั่นคือมีรัศมีเท่ากัน ดังนั้นจะได้ว่าจุด $(1,1)$ และจุด $(1,4)$ จะต้องอยู่ห่างจากจุด (x_1 , y_1) เป็นระยะทางเท่ากัน

ทำการหาจุด (x_1 , y_1)

$$\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2} = \sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-4)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x_1\text{-}1)^2+(y_1-1)^2 = (x_1\text{-}1)^2+(y_1-4)^2$$

$$(y_1\text{-}1)^2 = (y_1\text{-}4)^2$$

$$y_1^{\;2}-2y_1+1 = y_1^{\;2}-8y_1+16$$

$$6y_1 = 15$$

$$y_1 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

และที่จุด (0.5 , 1.87) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-(x\text{-}1)}{y\text{-}1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{-(0.5-1)}{1.87-1} = \dfrac{0.5}{0.87} = 0.57$

จากสมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y-y_1}{x\text{-}x_1}$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $0.57 = \dfrac{y-1.87}{x\text{-}0.5}$

$$0.57\,x-0.29 = y\text{-}1.87$$

$$y = 0.57x+1.58$$

และเส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อค่าความชันของแต่ละเส้นคูณกันเท่ากับ -1

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $m = \dfrac{y\text{-}1}{x\text{-}1}$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีความชันเป็น

$$m = \frac{1.87\text{-}1}{0.5\text{-}1} = \frac{0.87}{-0.5} = -1.74$$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น

$$-1.74 = \frac{y\text{-}1.87}{x\text{-}0.5}$$

$$-1.74\,x + 0.87 = y\text{-}1.87$$

$$y = -1.74x + 2.74$$

และเพราะจุด (x_1 , y_1) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น เมื่อ $y_1 = \frac{5}{2}$ จะหาค่า x_1 ได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

จากสมการ $y = -1.74x + 2.74$

$$\therefore\ 2.5 = -1.74x + 2.74$$

$$x = \frac{2.5\text{-}2.74}{\text{-}1.74}$$

$$= \frac{-0.24}{-1.74} = 0.14$$

และจะหาค่า (x_4 , y_4) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_4 , y_4) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

แทนค่าลงในสมการ $y - 2.5 = \frac{4 - 2.5}{1 - 0.14}(x - 0.14)$

$$y - 2.5 = 1.74(x - 0.14)$$

$$y = 1.74x + 2.25$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_4 , y_4)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_4 , y_4) คือ

$$y = 1.74x + 2.25$$

และ $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$

ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 0.5 y = 3.13

$$\therefore\ x_4 = 0.5 ,\ y_4 = 3.13$$

$\therefore$ **จุด** (x_1 , y_1) **คือ (0.14 , 2.5)**

จุดที่ 2 (1, 2)

ทำการหาจุด (x_2 , y_2) ***เช่นเดียวกับการหาจุด*** (x_1 , y_1)

ดังนั้นจะได้

$$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2} = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 4)^2}$$

$$(x_2\text{-}1)^2+(y_2-1)^2 \;=\; (x_2\text{-}1)^2+(y_2-4)^2$$

$$(y_2 - 1)^2 = (y_2 - 4)^2$$

$$y_2^{\,2}-2y_2+1= y_2^{\,2}-8y_2+16$$

$$6y_2 = 15$$

$$y_2 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

และที่จุด (1, 2) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-(x\text{-}1)}{y\text{-}1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{0}{2\text{-}1} = \dfrac{0}{1} = 0$

ดังนั้นเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุด (1, 2) จะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และมีสมการเป็น $y = 2$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสจะมีสมการเป็น $x = 1$

และจะได้ว่า $x_2 = 1$ ด้วยเนื่องจากจุด (x_2 , y_2) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส $x = 1$

และจะหาค่า (x_5 , y_5) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_5 , y_5) เท่ากับ $x = 1$

จะเห็นได้ว่าสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_5 , y_5) และจุด (1 , 1) เป็นสมการเดียวกัน ดังนั้น $x_5 = 1$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_5 , y_5)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_5 , y_5) คือ $x = 1$

และ $(x-1)^2+(y-4)^2 = 1$

นำ $x = 1$ แทนลงในสมการ $(x-1)^2+(y-4)^2 = 1$

จะได้ค่า $y = 3 , 5$

$$\therefore\; x_4 = 1 , y_4 = 3$$

$\therefore$ จุด (x_2 , y_2) คือ (1 , 2.5)

จุดที่ 3 (1.5 , 1.87)

ทำการหาจุด (x_3 , y_3) ***เช่นเดียวกับการหาจุด*** (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2) ดังนั้นจะได้

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-1)^2} = \sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-4)^2}$$

$$(x_3\text{-}1)^2+(y_3-1)^2 = (x_3\text{-}1)^2+(y_3-4)^2$$

$$(y_3\text{-}1)^2 = (y_3\text{-}4)^2$$

$$y_3^2-2y_3+1 = y_3^2-8y_3+16$$

$$6y_3 = 15$$

$$y_3 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

และที่จุด (1.5 , 1.87) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \frac{-(x\text{-}1)}{y\text{-}1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \frac{-(1.5-1)}{1.87-1} = \frac{-0.5}{0.87} = -0.57$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $-0.57 = \frac{y-1.87}{x\text{-}1.5}$

$$-0.57\,x+0.87 = y\text{-}1.87$$

$$y = -0.57x+2.74$$

และเส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อค่าความชันของแต่ละเส้นคูณกันเท่ากับ -1

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $m = \frac{y\text{-}1}{x\text{-}1}$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีความชันเป็น

$$m = \frac{1.87\text{-}1}{1.5\text{-}1} = \frac{0.87}{0.5} = 1.74$$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น

$$1.74 = \frac{y\text{-}1.87}{x\text{-}1.5}$$

$$1.74\,x-2.61 = y\text{-}1.87$$

$$y = 1.74x-0.74$$

และเพราะจุด (x_3 , y_3) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น เมื่อ $y_3 = 2.5$ จะหาค่า x_3 ได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

จากสมการ $y = 1.74x-0.74$

$$\therefore\ 2.5 = 1.74x-0.74$$

$$x = \frac{2.5+0.74}{1.74}$$

$$= \frac{3.24}{1.74} = 1.86$$

และจะหาค่า (x_6 , y_6) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_6 , y_6) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

แทนค่าลงในสมการ $$y - 2.5 = \frac{4 - 2.5}{1 - 1.86}(x - 1.86)$$

$$y - 2.5 = -1.74(x - 1.86)$$

$$y = -1.74x + 5.74$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_6 , y_6)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_6 , y_6) คือ

$$y = -1.74x + 5.74$$

และ $$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$$

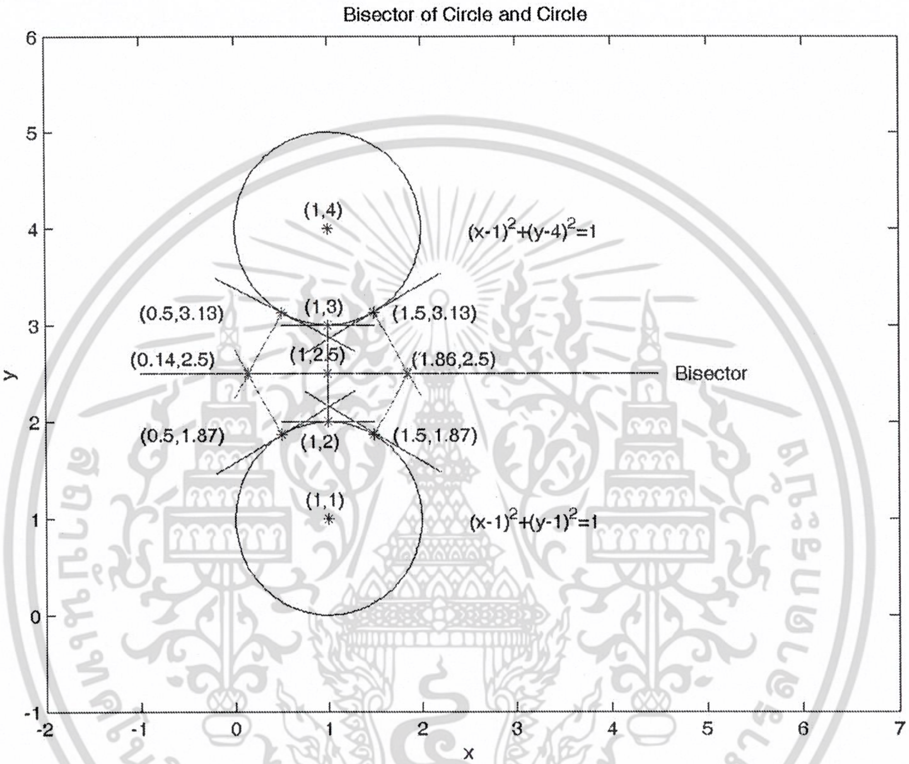
ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 1.5 y = 3.13

$$\therefore \; x_6 = 1.5 \; , \; y_6 = 3.13$$

$\therefore$ **จุด (x_3 , y_3) คือ (1.86 , 2.5)**

ดังนั้นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ทั้ง 3 จุดที่ได้ คือ (0.14 , 2.5) , (1 , 2.5) และ (1.86 , 2.5) จะเห็นได้ว่าจุดทั้งหมดมีค่า y = 2.5 เท่ากันทุกจุด ดังนั้นไบเซกเตอร์นี้จะมีสมการเป็น y = 2.5

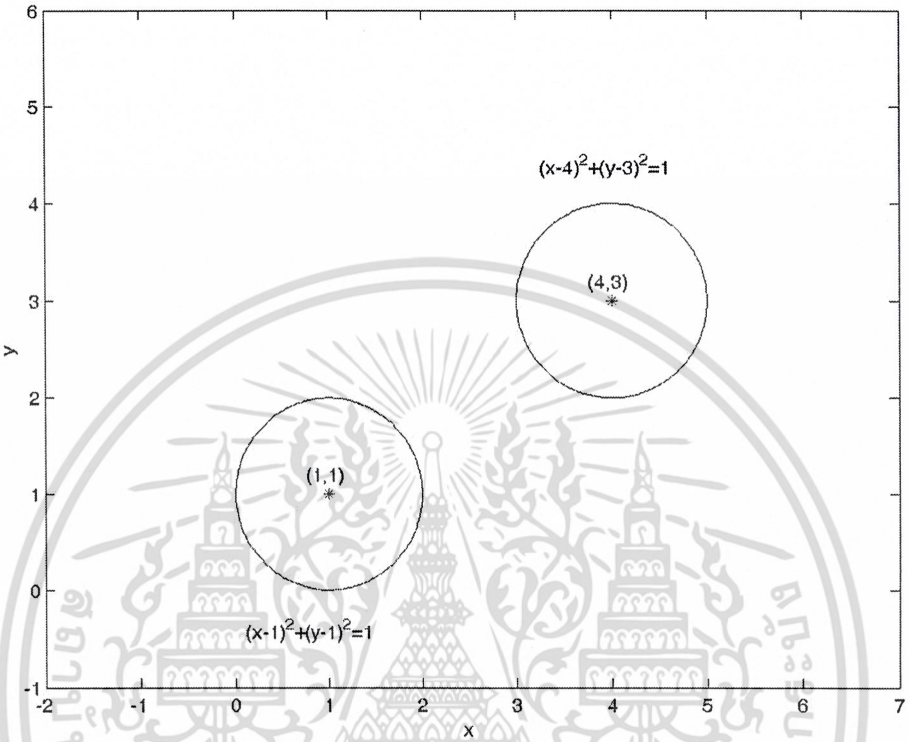
∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน คือ เส้นตรงที่ขนานกันแกน x ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง และอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน



รูปที่ 3.27 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

3.2.5.1.3 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ)



รูปที่ 3.28 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

กำหนด วงกลม 2 วง ที่มีรัศมีเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน ให้เป็น

<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-4)^2+(y-3)^2 = 1$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,3)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

เราจะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์จำนวน 3 จุด เพื่อให้ทราบว่าเส้นไบเซกเตอร์มีลักษณะเป็นอย่างไร

ความชันเส้นสัมผัสวงกลม

จากความชันเส้นสัมผัสวงกลม (m) คือ differential ของสมการวงกลม ที่จุด (x , y) ใด ๆ

<u>วงกลม 1</u>

$$\frac{d}{dx}((x-1)^2+(y-1)^2-1) = 0$$

$$2(x-1)+2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} = \frac{-(x-1)}{y-1}$$

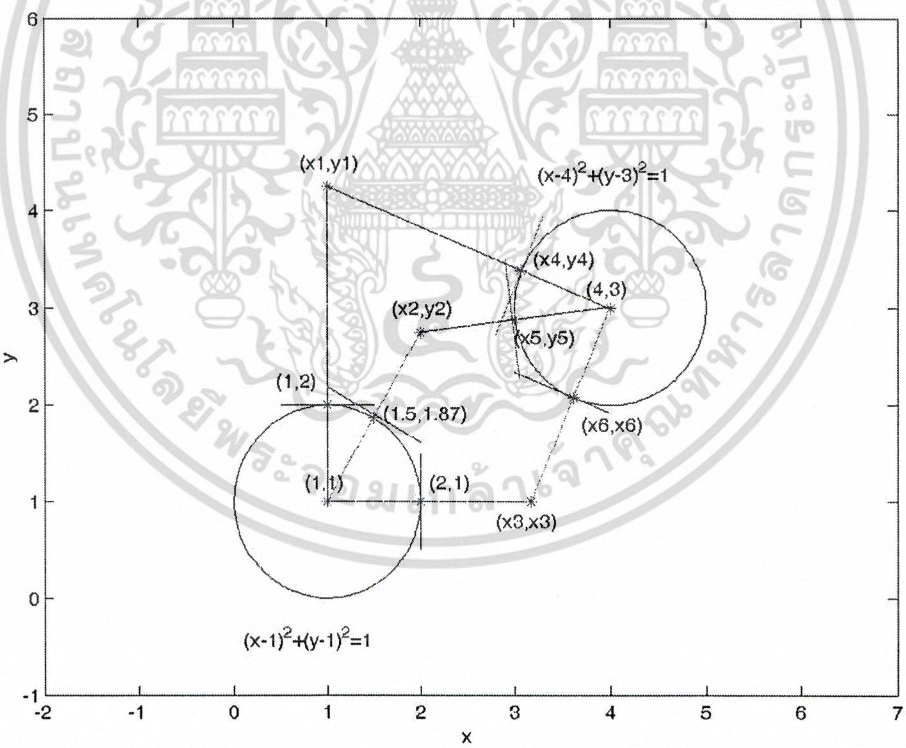
<u>วงกลม 2</u>

$$\frac{d}{dx}((x-4)^2+(y-3)^2-1) = 0$$

$$2(x-4)+2(y-3)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-4)}{y-3}$$

จะทำการกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา 3 จุด เพื่อทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ของแต่ละจุด โดยจุดที่กำหนดขึ้นมานี้ คือ จุด (1 , 2) , (1.5 , 1.87) , (2 , 1)



รูปที่ 3.29 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

จุดที่ 1 (1 , 2)

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x_1 , y_1)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x_1 , y_1) จะต้องอยู่ห่างจากจุด (1,2) และจุด (x_4 , y_4) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่วงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน นั่นคือมีรัศมีเท่ากัน ดังนั้นจะได้ว่าจุด (1,1) และจุด (4,3) จะต้องอยู่ห่างจากจุด (x_1 , y_1) เป็นระยะทางเท่ากัน

ทำการหาจุด (x_1 , y_1)

ที่จุด (1 , 2) เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น x = 1 และเพราะ x_1 อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น $x_1 = 1$ ด้วย

$$\sqrt{(1-1)^2 + (y_1 - 1)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (y_1 - 3)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(1-1)^2 + (y_1 - 1)^2 = (1-4)^2 + (y_1 - 3)^2$$

$$y_1{}^2 - 2y_1 + 1 = 9 + y_1^2 - 6y_1 + 16$$

$$-2y_1 + 6y_1 = 9 + 9 + 1$$

$$4y_1 = 17$$

$$y_1 = 4.25$$

และที่จุด (1 , 2) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-(x-1)}{y-1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{1-1}{2-1} = \dfrac{0}{1} = 0$

จากสมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $0 = \dfrac{y-2}{x-1}$

$$y = 2$$

และ สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $x = 1$

และเพราะจุด (x_1 , y_1) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น เมื่อ $y_1 = 4.25$ จะหาค่า x_1 ได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1

และจะหาค่า (x_4, y_4) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_4, y_4) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

แทนค่าลงในสมการ $$y - 4.25 = \frac{3 - 4.25}{4 - 1}(x - 1)$$

$$y - 4.25 = -0.42(x - 1)$$

$$y = -0.42x + 4.67$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_4, y_4)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_4, y_4) คือ

$$y = -0.42x + 4.67$$

และ $$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$$

ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 3.07 y = 3.38

$$\therefore \; x_4 = 3.07 \; , \; y_4 = 3.38$$

$\therefore$ **จุด (x_1, y_1) คือ (1 , 4.25)**

จุดที่ 2 (1.5 , 1.87)

ทำการหาจุด (x_2, y_2) ***เช่นเดียวกับการหาจุด*** (x_1, y_1)

$$\sqrt{(x_2-1)^2 + (y_2-1)^2} = \sqrt{(x_2-4)^2 + (y_2-3)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = (x_2 - 4)^2 + (y_2 - 3)^2$$

$$x_2{}^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 - 2y_2 + 1 = x_2^2 - 8x_2 + 16 + y_2^2 - 6y_2 + 9$$

$$-2x_2 + 8x_2 - 2y_2 + 6y_2 = 16 + 9 - 1 - 1$$

$$6x_2 + 4y_2 = 23 \qquad (1)$$

และที่จุด (1.5 , 1.87) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \dfrac{-(x-1)}{y-1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \dfrac{-(1.5-1)}{1.87-1} = \dfrac{-0.5}{0.87} = -0.57$

จากสมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ $$-0.57 = \frac{y - 1.87}{x - 1.5}$$

$$-0.57x + 0.89 = y - 1.87$$

$$y = -0.57x + 2.76$$

และเส้นตรงสองเส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อค่าความชันของแต่ละเส้นคูณกันเท่ากับ -1

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $m = \dfrac{y-1}{x-1}$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีความชันเป็น

$$m = \frac{1.87 - 1}{1.5 - 1} = \frac{0.87}{0.5} = 1.74$$

$\therefore$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น

$$1.74 = \frac{y-1.87}{x-1.5}$$

$$-1.74\,x - 2.61 = y\text{-}1.87$$

$$y = -1.74x - 0.74 \qquad (2)$$

และเพราะจุด (x_1 , y_1) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น จากสมการ (1) และ (2) ทำการหาค่า x_2 และค่า y_2 โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า $x_2 = 2$ และ $y_2 = 2.75$

และจะหาค่า (x_5 , y_5) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_5 , y_5) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

แทนค่าลงในสมการ $y - 2.75 = \dfrac{3 - 2.75}{4 - 2}(x - 2)$

$$y - 2.75 = 0.13(x-2)$$

$$y = 0.13x + 2.49$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_5 , y_5)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_5 , y_5) คือ

$$y = 0.13x + 2.49$$

และ $$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$$

ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 3 y = 2.88

$$\therefore \; x_5 = 3 \; , \; y_5 = 2.88$$

$\therefore$ **จุด** (x_2 , y_2) **คือ (2 , 2.75)**

จุดที่ 3 (2, 1)

ทำการหาจุด (x_3, y_3) ***เช่นเดียวกับการหาจุด*** (x_1, y_1) ***และ*** (x_2, y_2)

ที่จุด (2 ,1) เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะมีสมการเป็น y = 1 และเพราะ y_3 อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น $y_3 = 1$ ด้วย

$$\sqrt{(x_3 - 1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(x_3 - 4)^2 + (1-3)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x_3 - 1)^2 + (1-1)^2 = (x_3 - 4)^2 + (1-3)^2$$
$$x_3{}^2 - 2x_3 + 1 = x_3{}^2 - 8x_3 + 16 + 4$$
$$-2x_3 + 8x_3 = 16 + 4 - 1$$
$$6x_3 = 19$$
$$x_3 = 3.17$$

และที่จุด (2 , 1) นี้จะมีความชันเส้นสัมผัส คือ $m = \frac{-(x-1)}{y-1}$

แทนค่าลงในสมการ จะได้ $m = \frac{-(2-1)}{1-1} = \frac{-1}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส คือ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน y ซึ่งมีค่าเท่ากับ x = 2

และ สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม คือ $y = 1$

และเพราะจุด (x_3, y_3) อยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น เมื่อ $x_3 = 3.17$ จะหาค่า y_3 ได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1

และจะหาค่า (x_6, y_6) ได้

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุด (x_6, y_6) เท่ากับ

จากสมการเส้นตรง $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

แทนค่าลงในสมการ $y - 1 = \frac{3-1}{4-3.17}(x - 3.17)$

$$y - 1 = 2.41(x - 3.17)$$
$$y = 2.41x - 6.64$$

และสมการด้านบนจะตัดกับวงกลมที่จุด (x_6, y_6)

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการที่ตัดกันที่จุด (x_6, y_6) คือ

$$y = 2.41x - 6.64$$

และ $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$

ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab ซึ่งได้ค่า x = 3.62 และ y = 2.08

$$\therefore\ x_6 = 3.62\ ,\ y_6 = 2.08$$

$\therefore$ **จุด** $(x_3\,, y_3)$ **คือ (3.17 , 1)**

ดังนั้นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ทั้ง 3 จุดที่ได้ คือ (1 , 4.25) , (2 , 2.75) และ (3.17 , 1)
ความชันที่จุด (1 , 4.25) และ (2 , 2.75)

$$m = \frac{4.25\text{-}2.75}{1\text{-}2} = \frac{1.5}{-1} = -1.5$$

ความชันที่จุด (1 , 4.25) และ (3.17 , 1)

$$m = \frac{4.25\text{-}1}{1\text{-}3.17} = \frac{3.25}{-2.17} = -1.5$$

ความชันที่จุด (2 , 2.75) และ (3.17 , 1)

$$m = \frac{2.75\text{-}1}{2\text{-}3.17} = \frac{1.75}{-1.17} = -1.5$$

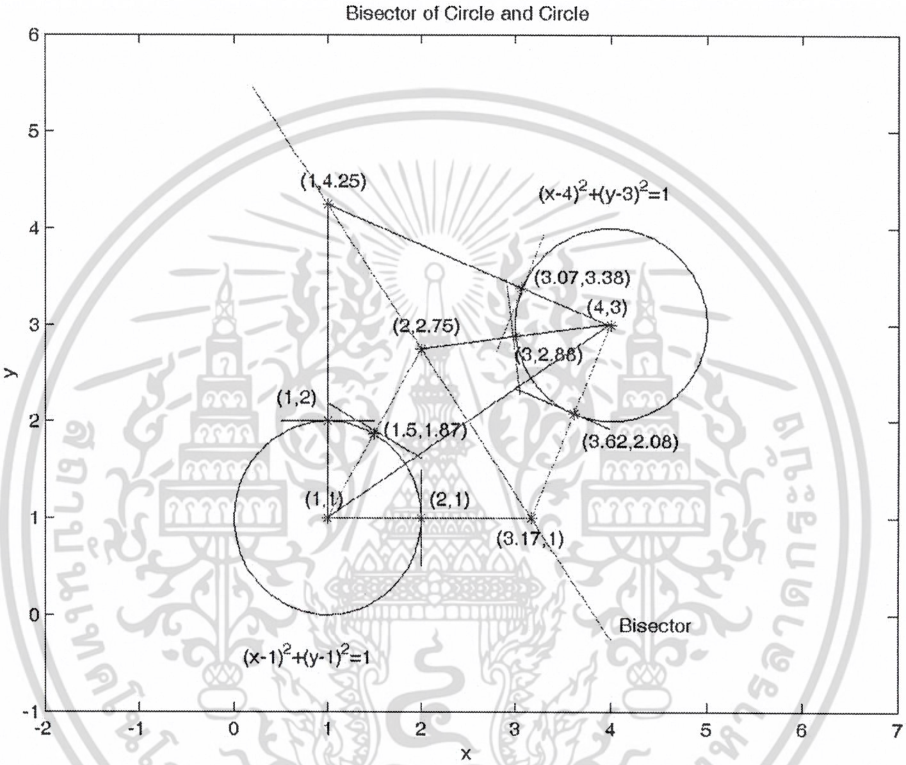
จะเห็นได้ว่าที่แต่ละจุดมีความชันเท่ากัน นั่นแสดงว่า จุดทั้ง 3 จุดนั้น อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และมีสมการเป็น

$$-1.5 = \frac{y-4.25}{x-1}$$

$$-1.5\,x+1.5 = y-4.25$$

$$y = -1.5x+5.75$$

∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x , y) ใด ๆ คือ เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง และอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน



รูปที่ 3.30 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

3.2.5.1.4 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน)

กำหนด วงกลม 2 วง ซึ่งมีรัศมีไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน ให้เป็น

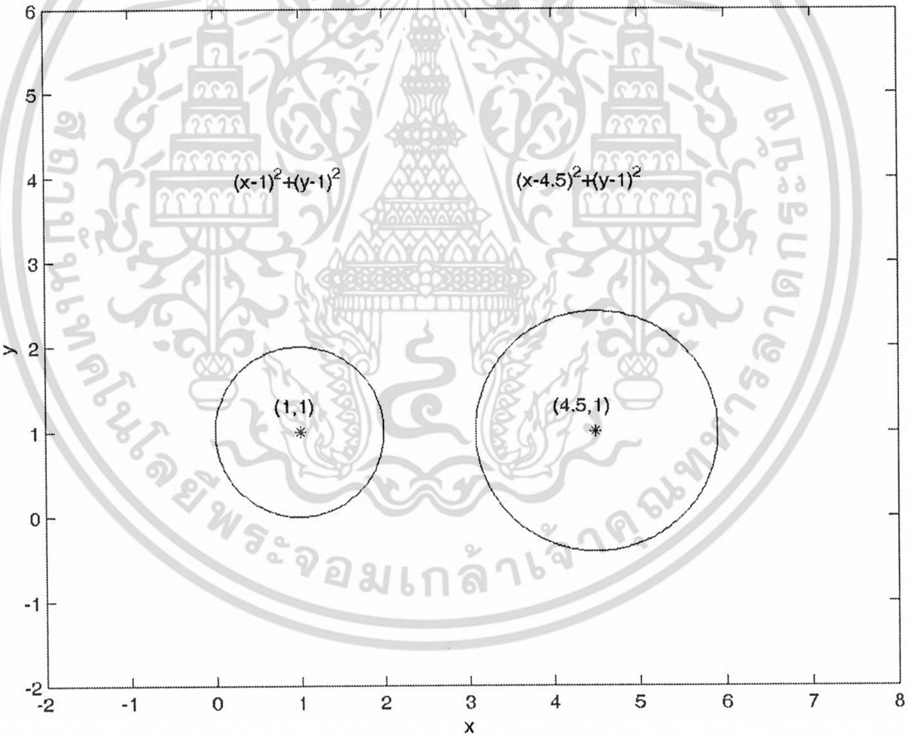
<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-4.5)^2+(y-1)^2 = 2$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

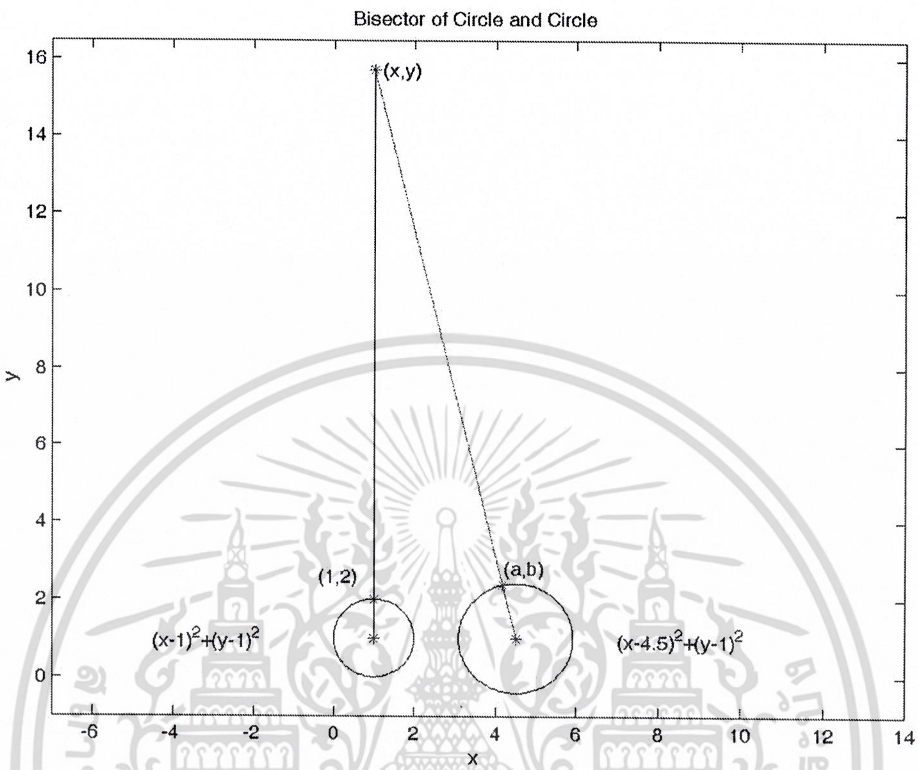
วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4.5 ,1) มีรัศมีเท่ากับ 1.41

จะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ โดยกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา ดังนี้



รูปที่ 3.31 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

จุดที่ 1 (1 , 2)



รูปที่ 3.32 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีไม่ขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x, y)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x, y) จะต้องอยู่ห่างจากจุด (1,2) และจุด (a, b) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่เราไม่ทราบว่าจุด (a, b) มีค่าเป็นเท่าใด ดังนั้นจึงต้องทำการหาระยะทางจากจุด (x, y) ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมแทน แต่เนื่องจากวงกลมทั้งสองมีขนาดไม่เท่ากัน จึงต้องลบค่ารัศมีของแต่ละวงกลมออกจากระยะทางที่หาทั้งหมด ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (y-1)^2} - 1.41 \qquad (1)$$

เนื่องจากเราทราบว่าจุดบนเส้นไบเซกเตอร์จะต้องอยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุด (1,2) ด้วยเช่นกัน
ดังนั้น จะทำการหาสมการเส้นตรงเส้นนี้

ความชันเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้

ดังนั้น สมการเส้นตรงเส้นนี้ คือ $x = 1$ (2)

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้

$$\sqrt{(y-1)^2} - 1 = \sqrt{(-3.5)^2 + (y-1)^2} - 1.41 \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และ (3) ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab

$\therefore$ **จุด (x,y) คือ (1 , 15.73)**

ขั้นตอนการหาจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ ((x,y)) เมื่อกำหนดจุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1

1. ทำการหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1
2. นำสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ไปแทนลงในสมการ
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (y-1)^2} - 1.41$
3. ทำการหาค่า (x,y) จากสมการในขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 ซึ่งค่า (x,y) ที่ได้นี้ จะเป็นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์

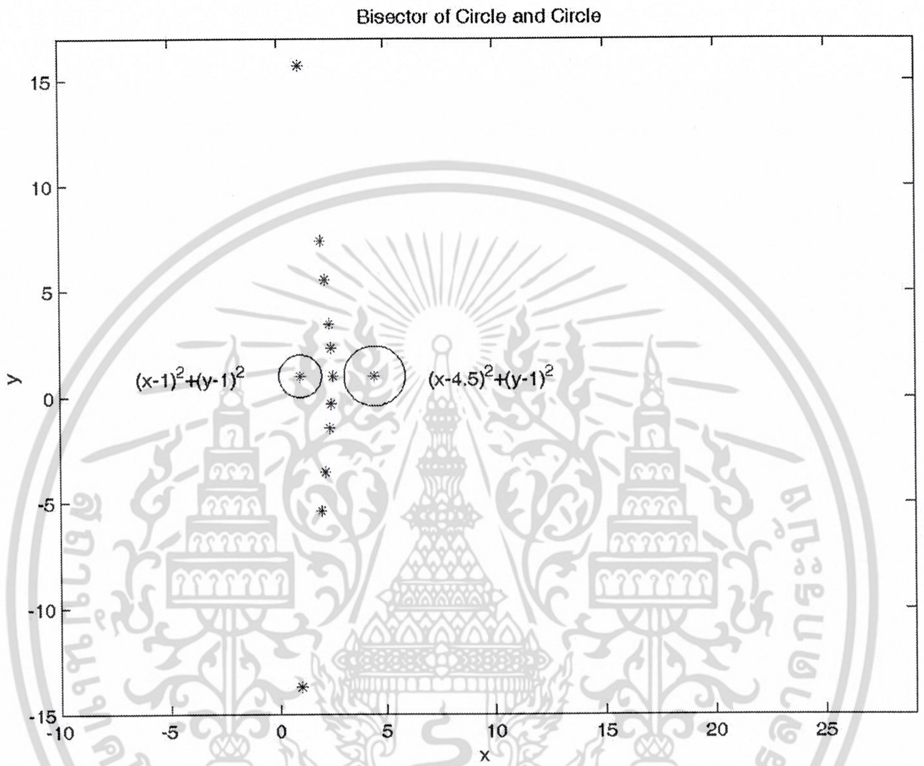
ดังนั้นเมื่อเรากำหนดจุดใด ๆบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา จะได้จุด (x,y) ดังนี้

จุดที่ 2 (1.15 , 1.99) ได้ค่า (x,y) = (1.97 , 7.39)
จุดที่ 3 (1.25 , 1.97) ได้ค่า (x,y) = (2.17 , 5.56)
จุดที่ 4 (1.50 , 1.87) ได้ค่า (x,y) = (2.40 , 3.43)
จุดที่ 5 (1.75 , 1.66) ได้ค่า (x,y) = (2.49 , 2.31)
จุดที่ 6 (2 , 1) ได้ค่า (x,y) = (2.55 , 1)
จุดที่ 7 (1.75 , 0.34) ได้ค่า (x,y) = (2.49 , - 0.31)
จุดที่ 8 (1.50 , 0.13) ได้ค่า (x,y) = (2.40 , -1.43)
จุดที่ 9 (1.25 , 0.03) ได้ค่า (x,y) = (2.17 , - 3.56)

จุดที่ 10 (1.15 , 0.01) ได้ค่า $(x, y) = (1.97, 5.39)$

จุดที่ 11 (1 , 0) ได้ค่า $(x, y) = (1, -13.73)$

จากนั้นนำจุดที่ได้ทั้งหมดไปพลอตกราฟ ซึ่งจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.33 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน

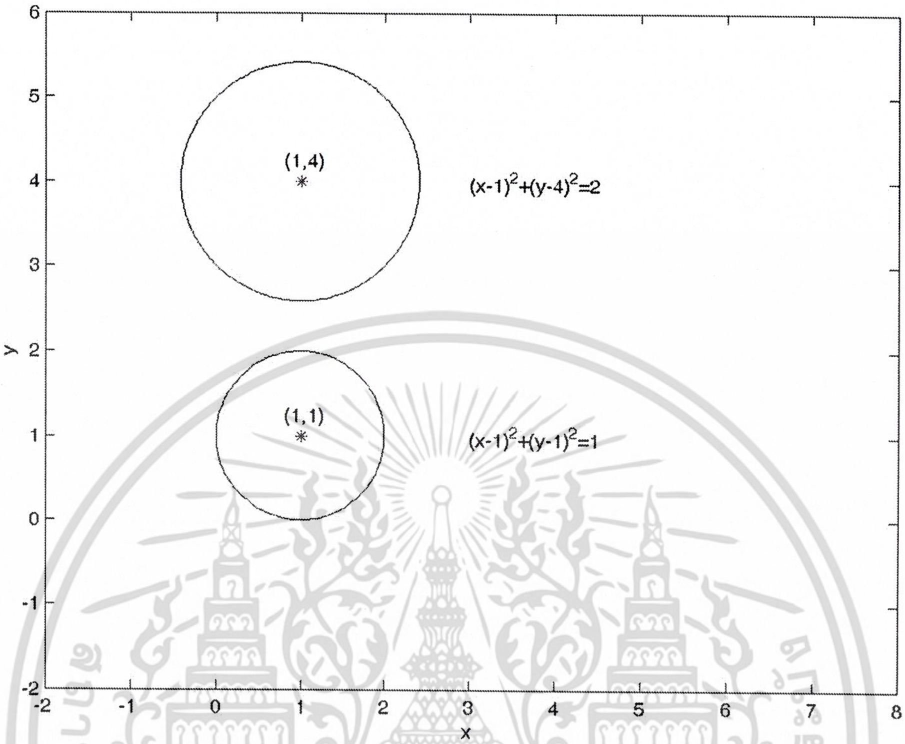
จากนั้นโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square) จะได้สมการ คือ

$x = -0.5599 + 0.861y - 0.4944y^2$

$\therefore$ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีไม่เท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน คือ เส้นโค้งพาราโบลา ซึ่งมีสมการเป็น $x = -0.5599 + 0.861y - 0.4944y^2$

3.2.5.1.5 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน)



รูปที่ 3.34 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

กำหนด วงกลม 2 วง ซึ่งมีรัศมีไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน ให้เป็น

<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-1)^2 \;=\; 1$

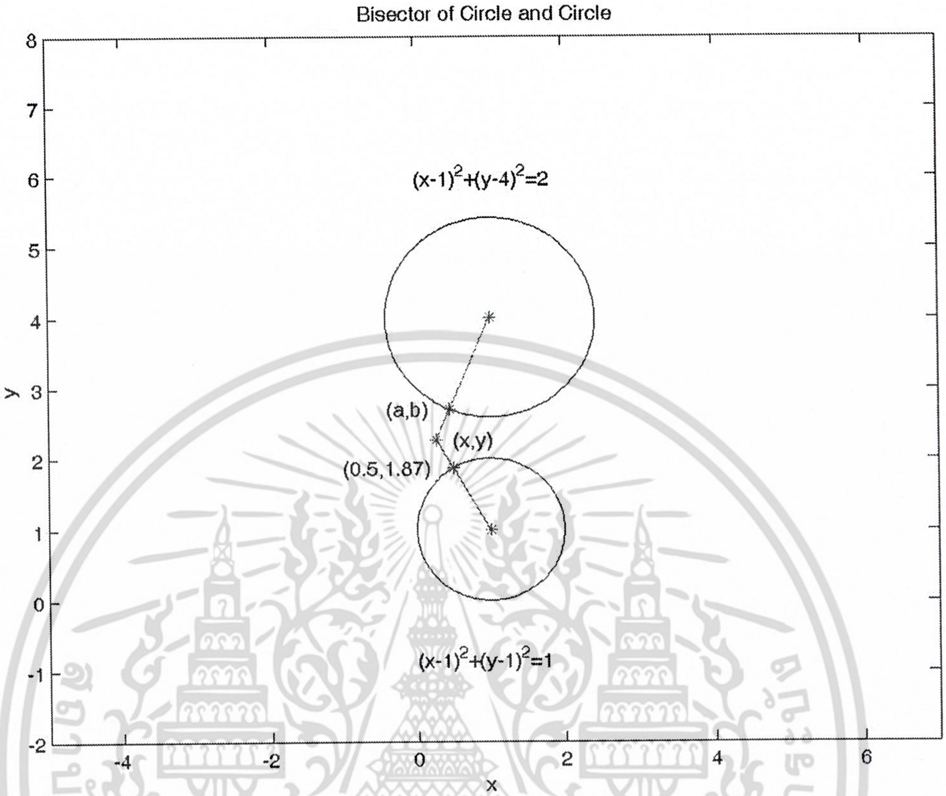
<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-4)^2 \;=\; 2$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1,4) มีรัศมีเท่ากับ 1.41

จะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ โดยกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา ดังนี้

จุดที่ 1 (0.5 , 1.87)



รูปที่ 3.35 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีไม่ขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x, y)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x, y) จะต้องอยู่ห่างจากจุด $(0.5, 1.87)$ และจุด (a, b) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่เราไม่ทราบว่าจุด (a, b) มีค่าเป็นเท่าใด ดังนั้นจึงต้องทำการหาระยะทางจากจุด (x, y) ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมแทน แต่เนื่องจากวงกลมทั้งสองมีขนาดไม่เท่ากัน จึงต้องลบค่ารัศมีของแต่ละวงกลมออกจากระยะทางที่หาทั้งหมด ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - 1.41 \qquad (1)$$

เนื่องจากเราทราบว่าจุดบนเส้นไบเซกเตอร์จะต้องอยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุด (1,2) ด้วยเช่นกัน
ดังนั้น จะทำการหาสมการเส้นตรงเส้นนี้

ความชันเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1.87-1}{0.5-1} = \dfrac{0.87}{-0.5} = -1.74$

สมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

แทนค่า $-1.74 = \dfrac{y-1.87}{x-0.5}$

$$y = -1.74x + 2.74$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงเส้นนี้ คือ $y = -1.74x + 2.74$ (2)

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-1.74x+2.74-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-1)^2 + (-1.74x+2.74-4)^2} - 1.41$$
$$\sqrt{(x-1)^2 + (-1.74x+1.74)^2} - 1 = \sqrt{(x-1)^2 + (-1.74x-1.26)^2} - 1.41$$
$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 3.03x^2 - 6.06x + 3.03} - 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 3.03x^2 + 4.38x + 1.59} - 1.4$$
$$\sqrt{4.03x^2 - 8.06x + 4.03} - 1 = \sqrt{4.03x^2 + 2.38x - 2.59} - 1.41 \quad (3)$$

จากสมการ (1) และ (3) ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab

$\therefore$ **จุด (x, y) คือ (0.27 , 2.27)**

ขั้นตอนการหาจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ ((x, y)) เมื่อกำหนดจุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1

1. ทำการหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1
2. นำสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ไปแทนลงในสมการ
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - 1.41$
3. ทำการหาค่า (x, y) จากสมการในขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 ซึ่งค่า (x, y) ที่ได้นี้ จะเป็นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์

ดังนั้นเมื่อเรากำหนดจุดใด ๆบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา จะได้จุด (x, y) ดังนี้

จุดที่ 2 (0.3 , 1.71) ได้ค่า $(x, y) = (-0.22, 2.23)$

จุดที่ 3 (0.75 , 1.97) ได้ค่า $(x, y) = (0.67, 2.29)$

จุดที่ 4 (1 , 2) ได้ค่า $(x, y) = (1, 2.3)$

จุดที่ 5 (1.25 , 1.97) ได้ค่า $(x, y) = (1.33, 2.29)$

จุดที่ 6 (1.50 , 1.87) ได้ค่า $(x, y) = (1.73, 2.27)$

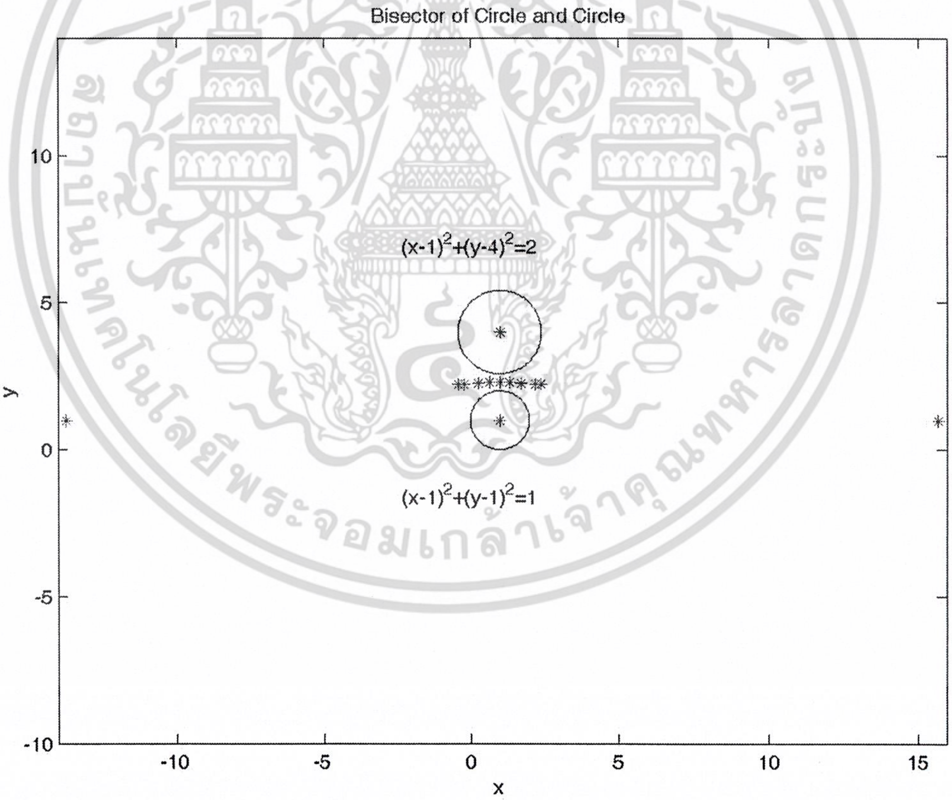
จุดที่ 7 (1.70 , 1.71) ได้ค่า $(x, y) = (2.22, 2.23)$

จุดที่ 8 (1.75 , 1.66) ได้ค่า $(x, y) = (2.39, 2.22)$

จุดที่ 9 (0 , 1) ได้ค่า $(x, y) = (-13.73, 1)$

จุดที่ 10 (2 , 1) ได้ค่า $(x, y) = (15.73, 1)$

จากนั้นนำจุดที่ได้ทั้งหมดไปพลอตกราฟ ซึ่งจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.36 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน

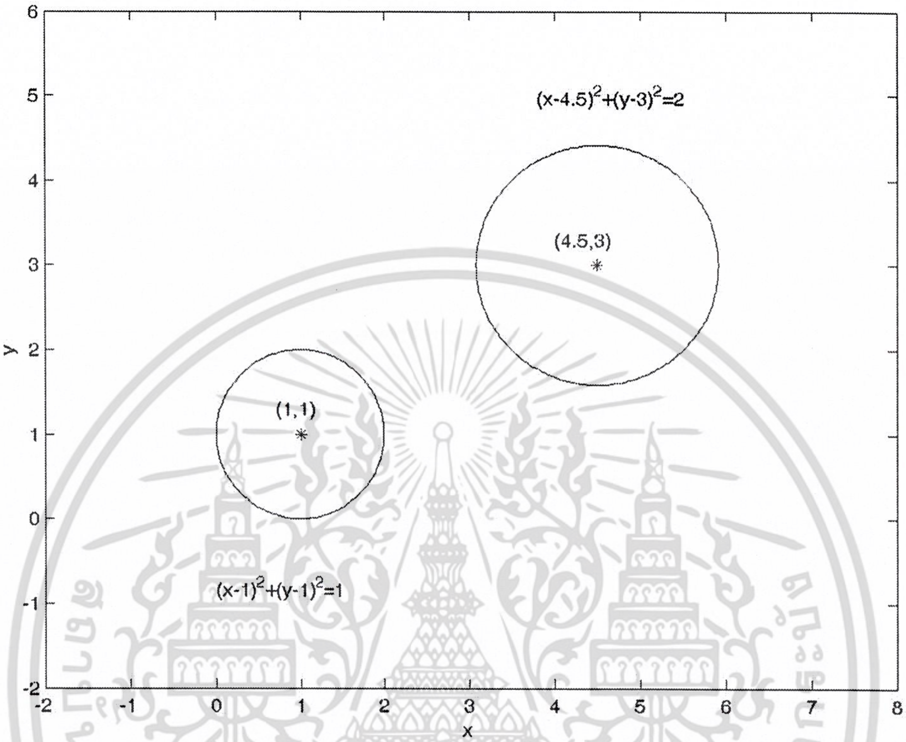
จากนั้นโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square) จะได้สมการ คือ

$$x = -0.1769 - 16.744y + 7.5166y^2$$

$\therefore$ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีไม่เท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน คือ เส้นโค้งพาราโบลา และมีสมการเป็น $x = -0.1769 - 16.744y + 7.5166y^2$

3.2.5.1.6 วงกลม – วงกลม

(วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด)



รูปที่ 3.37 แสดงวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากันและมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

กำหนด วงกลม 2 วง ซึ่งมีรัศมีไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ ให้เป็น

<u>วงกลมที่ 1</u> มีสมการเป็น $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$

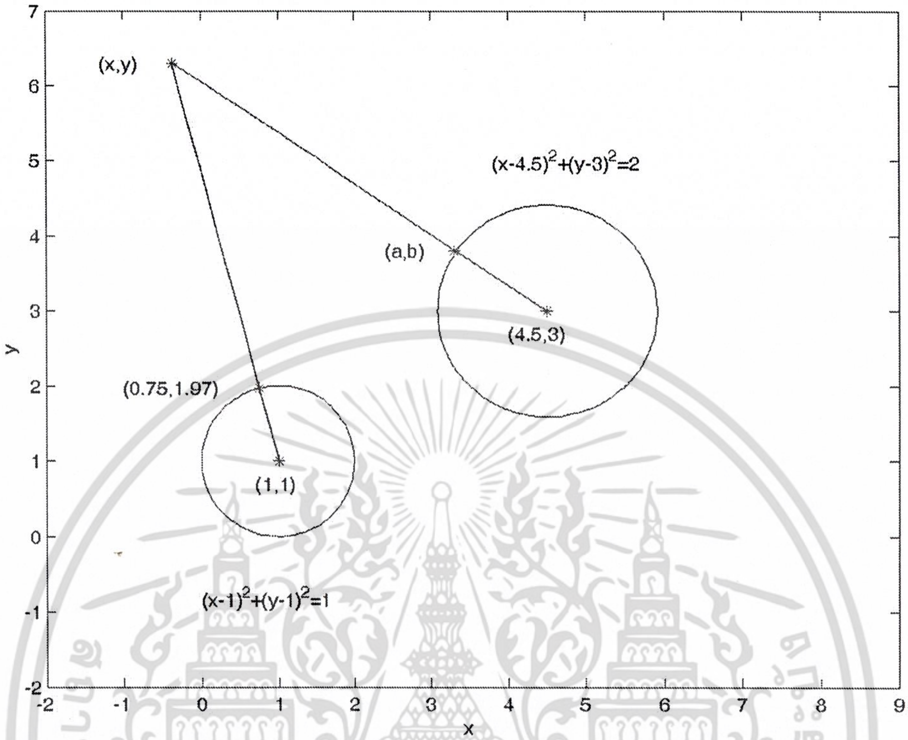
<u>วงกลมที่ 2</u> มีสมการเป็น $(x-4.5)^2+(y-3)^2 = 2$

ดังนั้น วงกลมที่ 1 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,1)$ มีรัศมีเท่ากับ 1

วงกลมที่ 2 จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4.5,3)$ มีรัศมีเท่ากับ 1.41

จะทำการหาจุดที่อยู่บนเส้นไบเซกเตอร์ โดยกำหนดจุดบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา ดังนี้

จุดที่ 1 (0.75 , 1.97)



รูปที่ 3.38 แสดงการหาจุดไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีไม่ขนาดเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

จากรูปจะทำการหาจุดที่มีระยะห่างจากวงกลมที่ 2 เป็นระยะทางเท่ากัน แทนจุดที่ต้องการหาด้วย (x, y)

จากนิยามไบเซกเตอร์ จุด (x, y) จะต้องอยู่ห่างจากจุด $(0.75, 1.97)$ และจุด (a, b) เป็นระยะทางเท่ากัน และระยะทางนั้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม และเนื่องจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลมจะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ แต่เราไม่ทราบว่าจุด (a, b) มีค่าเป็นเท่าใด ดังนั้นจึงต้องทำการหาระยะทางจากจุด (x, y) ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมแทน แต่เนื่องจากวงกลมทั้งสองมีขนาดไม่เท่ากัน จึงต้องลบค่ารัศมีของแต่ละวงกลมออกจากระยะทางที่หาทั้งหมด ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (y-3)^2} - 1.41 \qquad (1)$$

เนื่องจากเราทราบว่าจุดบนเส้นไบเซกเตอร์จะต้องอยู่บนสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุด $(0.75, 1.97)$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น จะทำการหาสมการเส้นตรงเส้นนี้

ความชันเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1.97-1}{0.75-1} = \dfrac{0.97}{-0.25} = -3.88$

สมการเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

แทนค่า $-3.88 = \dfrac{y-1.97}{x-0.75}$

$y = -3.88x + 4.88$

ดังนั้น สมการเส้นตรงเส้นนี้ คือ $y = -3.88x + 4.88$ (2)

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-3.88x+4.88-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (-3.88x+4.88-3)^2} - 1.41$$
$$\sqrt{(x-1)^2 + (-3.88x+3.88)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (-3.88x+1.88)^2} - 1.41$$
$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 15.05x^2 - 30.1x + 15.05} - 1 = \sqrt{x^2 - 9x + 20.25 + 15.05x^2 - 30.1x + 15.05} - 1.41$$
$$\sqrt{16.05\mathrm{x}^2 - 32.1x + 16.05} - 1 = \sqrt{16.05\mathrm{x}^2 - 23.58x + 23.78} - 1.41 \quad (3)$$

จากสมการ (1) และ (3) ทำการหาค่า x และค่า y โดยใช้โปรแกรม Matlab

$\therefore$ **จุด** (x, y) **คือ (-0.36 , 6.29)**

ขั้นตอนการหาจุดบนเส้นไบเซกเตอร์ ((x, y)) เมื่อกำหนดจุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1

1. ทำการหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส และผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม ณ จุดใด ๆ บนวงกลมที่ 1

2. นำสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ไปแทนลงในสมการ

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - 1 = \sqrt{(x-4.5)^2 + (y-3)^2} - 1.41$$

3. ทำการหาค่า (x, y) จากสมการในขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 ซึ่งค่า (x, y) ที่ได้นี้ จะเป็นจุดบนเส้นไบเซกเตอร์

ดังนั้นเมื่อเรากำหนดจุดใด ๆบนวงกลมที่ 1 ขึ้นมา จะได้จุด (x,y) ดังนี้

จุดที่ 2 (1 , 2) ได้ค่า $(x,y) = (1, 4.34)$

จุดที่ 3 (1.25 , 1.97) ได้ค่า $(x,y) = (1.62, 3.42)$

จุดที่ 4 (1.50 , 1.87) ได้ค่า $(x,y) = (2.03, 2.79)$

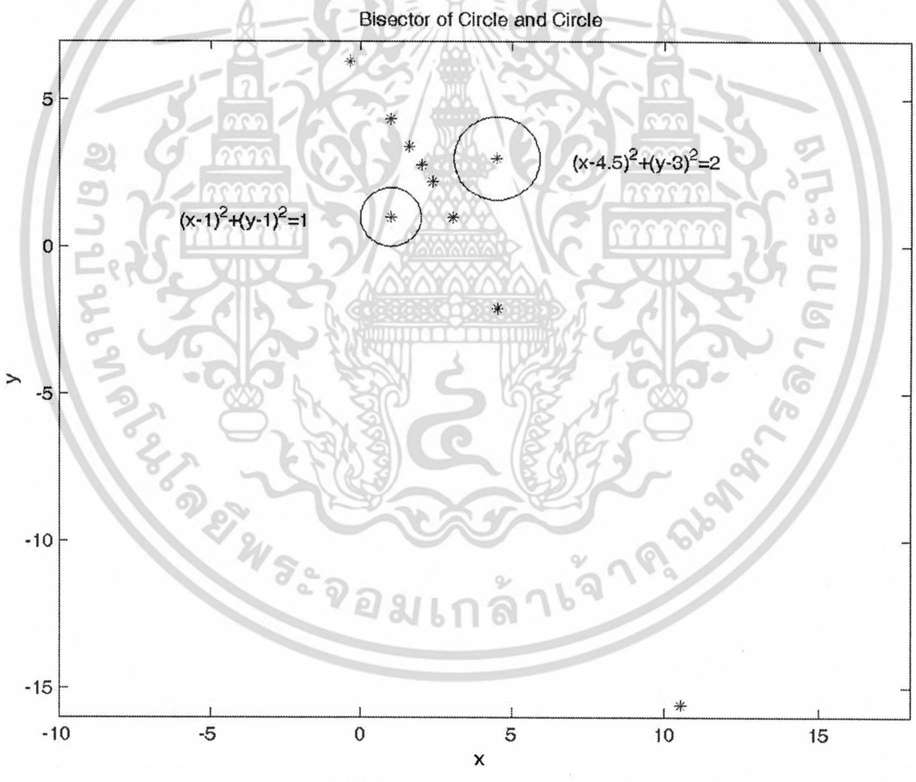
จุดที่ 5 (1.75 , 1.66) ได้ค่า $(x,y) = (2.39, 1.66)$

จุดที่ 6 (2 , 1) ได้ค่า $(x,y) = (3.06, 1)$

จุดที่ 7 (1.75 , 0.34) ได้ค่า $(x,y) = (4.52, -2.1)$

จุดที่ 8 (1.50 , 0.13) ได้ค่า $(x,y) = (10.54, -15.6)$

จากนั้นนำจุดที่ได้ทั้งหมดไปพลอตกราฟ ซึ่งจะได้ดังรูป



รูปที่ 3.39 แสดงรูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมกับวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ

จากนั้นโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square) จะได้สมการ คือ

$$x = -0.2811 + 1.7193y - 0.2879y^2$$

∴ ไบเซกเตอร์ ระหว่างวงกลม 2 วงกลมที่มีรัศมีไม่เท่ากัน และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ คือ เส้นโค้งพาราโบลา ซึ่งมีสมการเป็น $x = -0.2811 + 1.7193y - 0.2879y^2$

บทที่ 4
การอภิปรายผล

ผลของการศึกษารูปแบบไบเซกเตอร์

1. จุด - จุด
   - *จุดกับจุด*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**เส้นตรง**
2. จุด - เส้นตรง
   - *จุดกับเส้นตรงขนานกับแกน x*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**พาราโบลา**
   - *จุดกับเส้นตรงขนานกับแกน y*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**พาราโบลา**
   - *จุดกับเส้นตรงที่ทำมุมใด ๆ กันแกน x ไม่เกิน 180°*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**พาราโบลา**
3. เส้นตรง - เส้นตรง
   - *เส้นตรงสองเส้นขนานกัน*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**เส้นตรง**
   - *เส้นตรงสองเส้นไม่ขนานกัน*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**เส้นตรง**
4. จุด - เส้นโค้ง
   - *จุดกับวงกลม*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**พาราโบลา**
   - *จุดกับพาราโบลา*
     ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**พาราโบลา**
5. เส้นโค้ง - เส้นโค้ง
   - *วงกลมกับวงกลม*
     - *วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน*
       ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**เส้นตรง**
     - *วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน*
       ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**เส้นตรง**

- *วงกลมขนาดเท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด ๆ* ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**<u>เส้นตรง</u>**
- *วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง y เดียวกัน* ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**<u>เส้นโค้ง</u>**
- *วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง x เดียวกัน* ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**<u>เส้นโค้ง</u>**
- *วงกลมขนาดไม่เท่ากัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y) ใด* ซึ่งมีรูปแบบของไบเซกเตอร์เป็น**<u>เส้นโค้ง</u>**

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

ผลที่ได้จากการศึกษารูปแบบของเส้นไบเซกเตอร์ของรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ บนระนาบ ซึ่งได้แบ่งรูปแบบการศึกษาออกเป็นดังนี้

1. กำหนดจุดคงที่ 2 จุดจะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดคงที่นี้เท่ากัน
2. กำหนดจุดคงที่ 1 จุด และเส้นคงที่ 1 เส้นจะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดและเส้นที่กำหนดนี้เท่ากัน
3. กำหนดเส้น 2 เส้นคงที่ จะหาทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากเส้น 2 เส้นนี้เท่ากันแบ่งจุดกับจุด และ จุดกับเส้น

ซึ่งเราสามารถหาเส้นไบเซกเตอร์ให้อยู่ในรูปทั่วไปทางเรขาคณิตได้ แต่เราไม่สามารถหาเส้นไปเซกเตอร์ของวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ แต่เราจะหารูปแบบไบเซกเตอร์ของวงกลมโดยการกำหนดจุดลงไปบนกราฟและดูว่ามีรูปแบบไบเซกเตอร์เป็นเช่นไร

ข้อเสนอแนะ

1. ผู้จัดทำมีความเห็นว่าน่าจะได้ศึกษาและเขียนโปรแกรมในการหาเส้นไบเซกเตอร์เพื่อที่จะได้ไม่ต้องคิดเองด้วยมือและเพื่อให้ได้รูปแบบที่แน่นอนไม่ว่ารูปทรงเรขาคณิตจะเป็นอะไรก็ตาม
2. ผู้จัดทำมีความเห็นว่าน่าจะศึกษารูปแบบของเส้นไบเซกเตอร์ของรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ บนระนาบเพื่อเกิดประโยชน์ในการวิจัยในระดับสูงขึ้น

บรรณานุกรม

กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และ ยุพิน จิรสุขานนท์.**Short cut to Mathematics สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

ดำรง ทิพย์โยธา.2546.**คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad Mathematica MATLAB Maple**. พิมพ์ครั้งที่ 1.กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์วิทยาลัย

ไมตรี โพธิ์สุข.2529.**การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**.โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

มนัส สังวรศิลป์ และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล.2543.**คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์**. พิมพ์ครั้งที่ 2.กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ อินโฟเพรส

http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html

http://web1.dara.ac.th/wimweb/math41

http://www.efunda.com/math/leastsquares/lstsqrzrwtxy1d.cfm

http://www.geometrie.tuwien.ac.at/peternell/bisector.pdf

ภาคผนวก

การพิสูจน์เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน

(Polarization Identity)

การพิสูจน์เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน(Polarization Identity)

จาก Polarization Identity

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2) \text{ หรือ } \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ .....(1)

$\|a-b\|^2 = (a-b)\cdot(a-b)$ .....(2)

นำสมการ (1)+(2) จะได้

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= (a+b)\cdot(a+b) + (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b + a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b\\ &= 2(a\cdot a) + 2(b\cdot b)\\ &= 2\|\mathrm{a}\|^2 + 2\|b\|^2 \quad .....(3)\end{aligned}$$

นำสมการ (1)-(2) จะได้

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 &= (a+b)\cdot(a+b) - (a-b)\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b - a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ &= 2(b\cdot a) + 2(a\cdot b)\\ &= 4(a\cdot b) \quad .....(4)\end{aligned}$$

นำสมการ (3)-(4) จะได้

$$2\|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 - 4a\cdot b$$

ทำการหาร 2 ตลอดสมการจะได้

$$\therefore \quad \|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a \cdot b$$

หรือ $\bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{2}(\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \|a-b\|^2)$