สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

OBSERVER

โดย

นายจักรพันธ์ ศรีทอง

นายอัครินทร์ อัครชิโนเรศ

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ.ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ

Thesis
TK225.50
2547

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 61419
วัน,เดือน,ปี 17 ก.ค. 2549

b 11596181
i.....

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์เชิงกล

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2547

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2547

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์เชิงกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่องตัวสังเกตสภาวะของระบบ

ผู้จัดทำ

1. นายจักรพันธ์ ศรีทอง
2. นายอัครินทร์ อัครชิโนเรศ

.....อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผศ.ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ)

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

นายจักรพันธ์ ศรีทอง
นายอัครินทร์ อัครชิโนเรศ

ผศ.ดร.พัลลภ เหล่าเจริญ(อาจารย์ที่ปรึกษา)
ปีการศึกษา 2547

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาหลักการและการออกแบบตัวสังเกตสภาวะของระบบเนื่องจากเกิดปัญหาการควบคุมป้อนกลับสภาวะที่ไม่สามารถตรวจวัดสภาวะได้ หรือตรวจวัดได้เพียงบางสภาวะ โดยการสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบแล้วนำไปควบคุมแบบป้อนกลับ โดยการศึกษาปัญหาต่างๆของการควบคุมดังกล่าว จะเป็นการใช้วิธีประมาณค่าแบบต่างๆเข้ามาเพื่อประมาณค่าสภาวะของระบบ แล้วจึงนำไปสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบ แล้วนำไปใช้ในการควบคุมระบบเพื่อให้ระบบมีประสิทธิภาพ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

OBSERVER

Jakkapun Srithong

Arkrin Arkarachinores

Dr.Pallop Loacharoen(Advisor)

2004

Abstract

This thesis is a study of the basic observer theory for designing state observer .It occurs in state feedback control system problem which we cannot detect real state or observer some state by using state variable. This study is use an approximate state by Galerkin method and use this state for make the state observer. Then can control the system by use the observer for state feedback

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	
สารบัญรูปภาพ	
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมา	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตการทำโครงงาน	1
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงงาน	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการ	3
2.1 ปัญหาของการควบคุมโดยระบบป้อนกลับสภาวะ และความจำเป็นของตัวสังเกตสภาวะ	3
2.2 รูปแบบพื้นฐานของตัวสังเกตสภาวะ	3
2.2.1. ชนิดที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด	3
2.2.2.ชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วน (Reduce Order)	5
2.2.3.ทฤษฎีแยกส่วน (Separation Theorem)	8
2.3 วิธีสร้าง ตัวสังเกตสภาวะ โดยวิธีของโกพิแน็ต (Observer design algorithm of Gopinath)	10
2.4 การป้อนกลับสภาวะ(State Feedback)	11
2.5 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(Finite Element Method)	12
2.6 ระเบียบวิธีเวทเรซิดวล	13
2.7 ทฤษฎีของกาเลอคิน(The Galerkin Method)	14
2.8 ทฤษฎีของ Gram-Schmidt Orthonormalization Process	14
บทที่ 3การทดลองและผลการทดลอง	16
3.1 การทดลองศึกษาการควบคุมป้อนกลับโดยใช้ตัวสังเกตสภาวะของระบบ	16
3.2 การทดลองศึกษาการควบคุมการกระจายค่าตัวแปร (ระบบการกระจายอุณหภูมิบนแท่งตัวนำ)	21
3.2.1 ตัวอย่างปัญหา	23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2.2 การแก้ปัญหา	24
3.2.3ทดลองหาผลเฉลยโดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนท์ (Finite Difference Method)	44
บทที่ 4บทวิจารณ์และสรุป	47
4.1 สรุป	47
4.2 วิจารณ์	47
ภาคผนวก – การโปรแกรมโดย Matlab	
กิตติกรรมประกาศ	
บรรณานุกรม	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1 แสดงสภาวะเมื่อใส่ตัวสังเกตสภาวะของระบบเข้าไป	3
รูปที่ 2.2 แสดงไดอะแกรมแสดงโครงสร้างตังสังเกตแบบที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด	4
รูปที่ 2.3 แสดงระบบเมื่อใช้ตัวสังเกตค่าสภาวะของระบบชนิดรู้ค่าบางส่วน	5
รูปที่ 2. 4 แสดงไดอะแกรมของสภาวะที่ค่าบางส่วน	7
รูปที่ 2.5 ก. แสดงระบบที่สามารถควบคุมได้ ข. แสดงระบบที่สามารถสังเกตได้	8
รูปที่ 2.6 แสดงสภาวะเมื่อใช้ตัวสังเกตสภาวะแบบทฤษฎีแยกส่วน	8
รูปที่ 2.7 แสดงการป้อนกลับสภาวะ	11
รูปที่ 2.8 แสดงโดเมน Ω โดยมี Γ เป็นขอบเขต	12
รูปที่ 2.9 แสดงการแปลงค่าของเวกเตอร์ โดยใช้ทฤษฎีของ Gram-Schmidt	14
รูปที่ 3.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า x และ $\hat{x}$ เมื่อเทียบกับเวลา	19
รูปที่ 3.2 แสดงการป้อนกลับสภาวะโดยใช้ตัวสังเกต	20
รูปที่ 3.3 แสดงกราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรระหว่าง Regulator กับ Observer	21
รูปที่ 3.4 แสดงค่าของ $\hat{p}(t)$ เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง	44
รูปที่ 3.5 แสดงค่าของ $p(t)$ เมื่อเทียบกับเวลา	45
รูปที่ 3.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าของ $p(t)$ และ $\hat{p}(t)$ เมื่อเทียบกับเวลา	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

ระบบควบคุมที่ใช้ในปัจจุบัน (Modern Control System) บางครั้งปัญหาการป้อนกลับสภาวะอันเนื่องมาจากการที่เราไม่สามารถตรวจวัดสภาวะได้ทั้งหมด หรือสามารถตรวจวัดสภาวะได้เพียงบางสภาวะจึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูลอินพุทและเอาท์พุทมาช่วยในการแก้ปัญหาการตรวจสภาวะ โดยการสังเกตสภาวะของระบบ แต่ก็ยังเกิดปัญหาจากสิ่งรบกวนในขั้นตอนการตรวจวัดข้อมูลทั้งสองกับอนุพันธ์หรือแม้แต่การสร้างโมเดลของระบบขึ้นมาประมาณสภาวะ แต่ก็ยังมีปัญหาข้อมูลแรกเริ่มและยังใช้ได้เฉพาะกรณีที่เมตริกซ์ A มีเสถียรภาพ (Stable) ขณะเดียวกันลักษณะเฉพาะของตัวสังเกตไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ซึ่งสามารถขจัดปัญหาหลักดังกล่าวได้ และสามารถนำตัวสังเกตสภาวะของระบบนี้มาใช้เพื่อทำให้การควบคุมระบบมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์

1. สร้างโมเดลเพื่อจำลองเปรียบเทียบและวัดค่าสภาวะของระบบจริง
2. นำข้อมูลอินพุท (Input) และเอาท์พุท (Output) มาช่วยแก้ปัญหาการสังเกตสภาวะและสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบ
3. ตรวจวัดสภาวะของระบบที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้
4. แยกส่วนการควบคุมระบบและสังเกตสภาวะได้
5. ตรวจวัดสภาวะของระบบที่ยังไม่สามารถตรวจวัดได้ แล้วนำมาป้อนกลับสภาวะให้เป็นการควบคุมแบบวงปิด
6. สามารถออกแบบตัวสังเกตโดยการเลือกโพลที่เหมาะสมเพื่อเสถียรภาพของระบบ

1.3 ขอบเขตการทำโครงงาน

1. การสร้างสภาวะสังเกตระบบจริงนั้น จะตรวจวัดสภาวะระบบได้ ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของสภาวะจริงใด ๆ (x_0)
2. สภาวะของระบบจริงนั้นจะต้องสังเกตสภาวะได้ (Observable) ก่อนถึงทำการสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบจริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ทำการศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้วิธีการทางโมเดลคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) และเมตริกซ์ (Matrix)
2. ศึกษาปัญหาต่าง ๆ และนำทฤษฎีดังกล่าวมาใช้โดยการคิดด้วยมือและใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์ (Matlab)
3. วิเคราะห์กราฟโดยพิจารณาจากทฤษฎีแล้วสรุปวิจารณ์ผลการทดลองโดยสอดคล้องกับทฤษฎี

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงงาน

1. การศึกษาทฤษฎีและสามารถทำความเข้าใจด้วยตนเอง
2. เข้าใจวิธีการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์ในเรื่องของ พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) และระเบียบวิธีทางตัวเลขต่าง ๆ (Numerical Method) เช่น Finite Difference Method และ Finite Element Method
3. สามารถวิเคราะห์สภาวะของระบบจริงและสภาวะสังเกตได้จากสมการคณิตศาสตร์
4. รู้จักการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นได้
5. สามารถทำงานร่วมกับผู้ร่วมงานได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและหลักการ

2.1ปัญหาของการควบคุมโดยระบบป้อนกลับสภาวะและความจำเป็นของตัวสังเกตสภาวะ

ในการที่จะทำการป้อนกลับสภาวะนั้น เราจะต้องสามารถทำการวัดหรือสังเกตตัวแปรสภาวะในระบบให้ได้ทั้งหมดก่อนถึงจะสามารถทำการป้อนกลับสภาวะได้ แต่ในทางปฏิบัติแล้วเราไม่สามารถที่จะทำการตรวจวัดสภาวะของระบบได้ทั้งหมด เราจะวัดได้เพียงสัญญาณอินพุทและเอาท์พุทเท่านั้น ดังนั้นเราจึงได้มีความคิดที่จะสร้างตัวสังเกตสภาวะซึ่งเป็นระบบจำลองที่สร้างขึ้นมาเพื่อทดสอบ โดยการนำอินพุทและเอาท์พุทของระบบจริง นำมาป้อนกลับเป็นอินพุทให้กับระบบจำลอง แล้วทำการออกแบบให้ตัวแปรของระบบจำลองให้เท่ากับตัวแปรสภาวะของระบบจริง

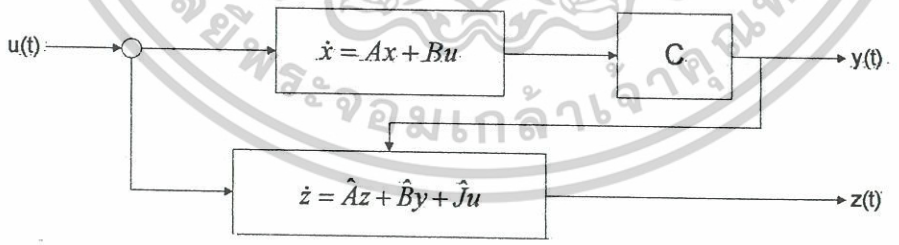
2.2 รูปแบบพื้นฐานของตัวสังเกตสภาวะ

2.2.1. ชนิดที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด

ตัวสังเกตสภาวะชนิดที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด (Identity Observer) คือ การสร้างตัวสังเกตเข้าไปตรวจวัดสภาวะของระบบจริง โดยที่สภาวะของระบบจริงกับตัวสังเกตนี้จะมีค่าใกล้เคียงกันตามทฤษฎีและจึงนำตัวสังเกตสภาวะมาใช้ตรวจวัดการใช้งานแทนสภาวะจริงของระบบ จากสมการสภาวะ

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0 \qquad (2.1)$$

ต้องการตรวจวัดสภาวะของระบบจริงโดยนำอินพุท เอาท์พุทมาสร้างสภาวะใหม่ ดังรูป



รูปที่ 2.1 แสดงสภาวะเมื่อใส่ตัวสังเกตสภาวะของระบบเข้าไป

เมื่อไม่ทราบค่าเริ่มต้น x(0) จากสมการ $\dot{x} = Ax + Bu$ จึงจำเป็นต้องประมาณสภาวะ z(t) ของตัวสังเกต เป็น ค่า Minimum order state observer ได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u \qquad (2.2)$$

เมื่อ $\hat{A} = A - \hat{B}C$

$\hat{J} = B$

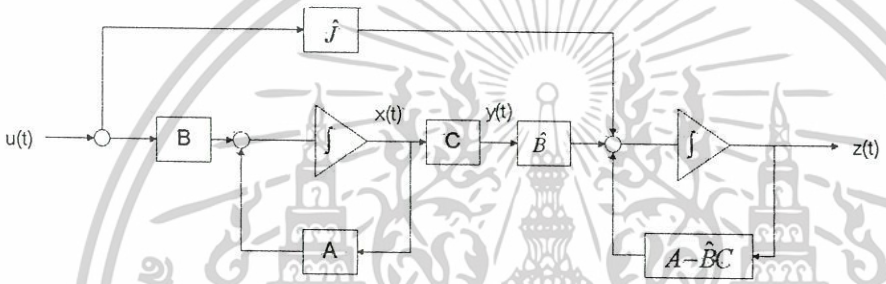
และ $\hat{A}$: Stable

โดยที่

$\hat{A}$ เป็นเมตริกซ์ ที่มีมิติเป็น n x n และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง $(\hat{A} \in R^{n \times n})$

$\hat{B}$ เป็นเมตริกซ์ ที่มีมิติเป็น n x m และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง $(\hat{B} \in R^{n \times m})$ หรือเกนของ ตัวสังเกตสภาวะ (Observer Gain)

$\hat{J}$ เป็นเมตริกซ์ ที่มีมิติเป็น n x r และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง $(\hat{J} \in R^{n \times n})$



รูปที่ 2.2 แสดงไดอะแกรมแสดงโครงสร้างตังสังเกตแบบที่ต้องหาค่าสภาวะทั้งหมด

เมื่อต้องการเปรียบเทียบสภาวะจริงกับสภาวะสังเกต โดยนำสมการที่ (2.2) ลบสมการที่ (2.1) ได้

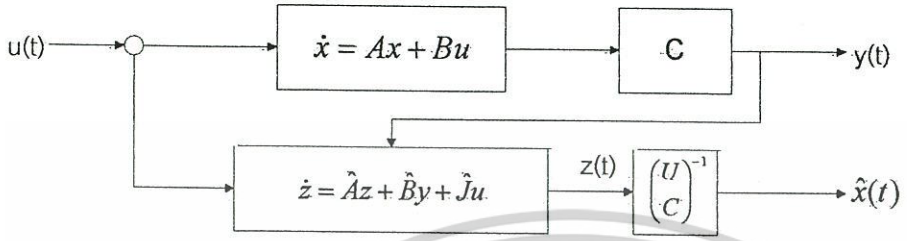
$$\begin{aligned}
\dot{z} - \dot{x} &= (A - \hat{B}C)z + \hat{B}y + \hat{J}u - Ax - Bu \\
&= Az - \hat{B}Cz + ECx + Bu - Ax - Bu \\
&= Az - \hat{B}Cz + \hat{B}Cx - Ax \\
&= (A - \hat{B}C)[z - x] \\
&= \hat{A}[z(t) - x(t)] \\
\therefore z(t) - x(t) &= e^{\hat{A}t}(z_0 - x_0) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 2.3 ปัญหาที่เกิดก็คือ เราไม่ทราบค่าเริ่มต้น x_0 ในพจน์ของ $(z_0 - x_0)$ จึงจำเป็นต้องใช้ค่า $\hat{A}$ ในพจน์ของ $e^{\hat{A}t}$ โดยการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และ $\hat{A}$ จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อค่าส่วนจริงของค่าไอเกน (Eigen values) ของ $\hat{A}$ มีค่าน้อยกว่าศูนย์ (Real $\lambda(\hat{A}) < 0$) ดังนั้นในพจน์ของ $e^{\hat{A}t}(z_0 - x_0)$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ระบบจึงจะมีเสถียรภาพ แล้วนำตัวสังเกตนี้ไปใช้วิเคราะห์ระบบต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2.ชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วน (Reduce Order)

ตัวสังเกตสภาวะชนิดที่รู้ค่าสภาวะบางส่วน คือ การสร้างตัวสังเกตเข้าไปตรวจวัดสภาวะเฉพาะบางส่วนที่เรายังไม่สามารถตรวจวัดได้ในสภาวะ



รูปที่ 2.3 แสดงระบบเมื่อใช้ตัวสังเกตค่าสภาวะของระบบชนิดรู้ค่าบางส่วน

เมื่อไม่สามารถสังเกตสภาวะได้บางสภาวะหรือสังเกตสภาวะได้เพียงบางส่วน ก็ไม่จำเป็นต้องตรวจวัดสภาวะนั้นๆอีก แต่ในสภาวะที่ไม่สามารถสังเกตได้ ต้องทำการลดมิติลงเพื่อทำการสังเกตสภาวะที่ยังไม่สามารถสังเกตสภาวะได้ โดยทำการลดมิติของระบบจริงลงเพื่อทำการสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่า เมื่อเวลามากขึ้นเอาท์พุทกับตัวสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่ามีค่าเข้าใกล้ศูนย์ดังสมการ

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} U \\ C \end{pmatrix} x(t) \text{ เมื่อ } t \to \infty \qquad (2.4)$$

จากสมการเมื่อ z (t) ถูกลดมิติเป็นเวกเตอร์ (vector) ที่มีขนาดมิติเป็น (n-m)x1 แถว โดยที่ $m < n$ และ rank C = m

เมื่อ T เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเป็น (n-m) x n มีความเป็นอิสระเชิงเส้น (Linearly Independent) และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง($T \in R^{(n-m)\times n}$) ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix} \in R^{n\times m} \quad \text{และ} \quad rank \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix} = n \qquad (2.5)$$

และจากคุณสมบัติของแรงค์

$$rank \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix} = n \qquad (2.6)$$

จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow x(t) \qquad (2.7)$$

จากสมการแสดงให้เห็นว่า ถ้า z(t) เข้าใกล้ Ux(t) เมื่อ t มีค่ามากๆ ($z(t) \longrightarrow Ux(t)$; $t \longrightarrow \infty$) แล้ว จะสามารถประมาณค่าของ x(t) จากค่าของ y กับ z ได้ และมิติของ z จะเท่ากับมิติของ Ux(t) และจากสมการ

$$\text{rank}\begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix} = n; U \in R^{(n-m)\times n}$$

จำนวนมิติของ z ประมาณได้จากสภาวะของระบบที่ที่ไม่ทราบค่า โดยที่จะมีค่าเท่ากับ n-m มิติ ซึ่งจะเป็นการลดลำดับลง ซึ่งเมื่อสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวสังเกตที่สามารถตรวจสภาวะได้แล้ว ก็ทำให้ z(t) กับตัวสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่าก็สามารถตรวจวัดสภาวะได้

จากสมการที่ 2.2 เมื่อ $z(0) = z_0$ จะได้เอาท์พุท จากการวัดสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า $\hat{x}(t)$ ดังสมการ

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

และจากสมการที่ (2.7) เป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการลดมิติ และวัดค่าสภาวะเพียงบางส่วนจากสมการที่ (2.3) โดยการเปรียบเทียบสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้ ในส่วนที่ยังไม่ทราบค่า

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - \hat{x}(t)] = 0, \forall_T, \forall_{x_0} \text{ เมื่อ } t \to \infty$$

โดยที่ ตัวสังเกตสภาวะ ประมาณได้จาก

$$z(t) \to Ux(t) \text{ เมื่อ } t \to \infty \qquad (2.9)$$

จากสมการ $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u, z(0) = 0$

แล้วได้ $\hat{x}(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}y(t) \qquad (2.10)$

โดยที่สมการที่ (2.2)และ (2.6) เป็น Reduce Order Observer ของระบบที่สามารถควบคุมได้ ดังนั้นเมื่อเวลามากขึ้นตัวสังเกตกับค่าของตัวสังเกตสภาวะบางส่วนที่ยังไม่ทราบค่ามีค่าเข้าใกล้กันดังสมการที่ (2.7) เมื่อนิยามค่าความผิดพลาด (Error ; ξ) ระหว่าง z(t) กับ Tx(t) โดยที่ $\dot{\xi} = U\dot{x} - \dot{z}$ ถ้าเราหาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= U\dot{x} - \dot{z} \\ &= U(Ax + Bu) - (\hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u) \\ &= UAx + UBu - \hat{A}z - \hat{B}Cx - \hat{J}u \\ &= UAx + UBu - \hat{A}z - \hat{B}Cx - \hat{J}u + \hat{A}Ux - \hat{A}Ux\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \hat{A}(Ux - z) + (UA - \hat{B}C - \hat{A}U)x + (UB - \hat{J})u$$
$$= \hat{A}\xi + (UA - \hat{B}C - \hat{A}U)x + (UB - \hat{J})u$$

ดังนั้น $\dot{\xi} = \hat{A}\xi + (UA - \hat{B}C - \hat{A}U)x + (UB - \hat{J})u$ (2.11)

ถ้าเวลาเพิ่มขึ้นระบบมีความใกล้เคียงกันก็จะเกิดเงื่อนไขของการลดมิติลงเป็น

i) $UA - \hat{A}U = \hat{B}C$

$\hat{J} = UB$

ii) D เสถียรภาพ

เป็นไปตามทฤษฎี 1

จาก

$$U\dot{x} - \dot{z} = U(Ax + Bu) - (\hat{A}z + \hat{B}y + \hat{J}u)$$
$$= UAx + UBu - \hat{A}z - \hat{B}y - \hat{J}u$$

จากเงื่อนไข i) และ สมการ $\dot{x} = Ax + Bu$ จะได้ว่า

$$U\dot{x} - \dot{z} = \hat{A}(z - Ux)$$

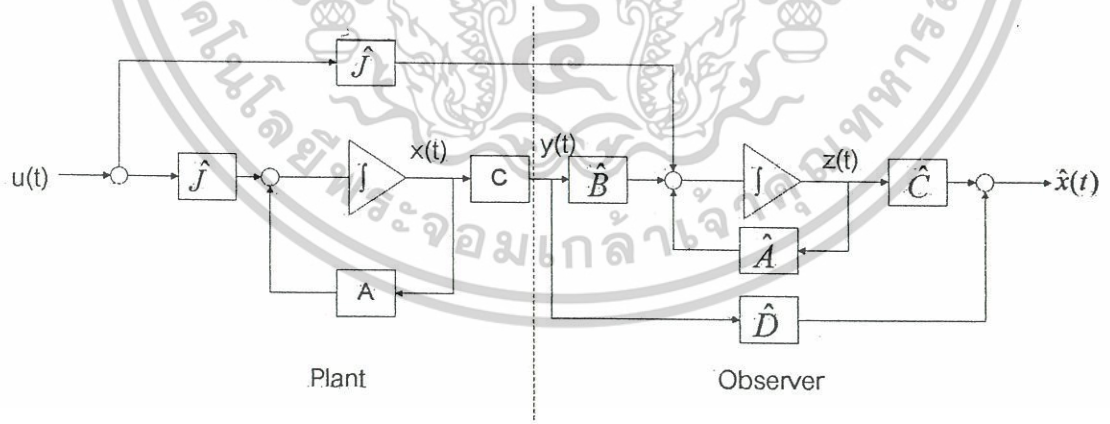
เมื่อแปลงลาปลาซจะได้

$$s(Z(s) - UX(s)) = \hat{A}(Z(s) - UX(s)) + (z_0 - Ux_0)$$
$$(sI_n - \hat{A})(Z(s) - UX(s)) = z_0 - Ux_0$$
$$Z(s) - UX(s) = (sI_n - \hat{A})^{-1}(z_0 - Ux_0)$$

แปลงกลับได้เป็น

$$z(t) = Ux(t) + e^{\hat{A}t}(z_0 - Ux_0) \quad (2.12)$$

; เมื่อ $\hat{A}$ มีเสถียรภาพ (Stability)

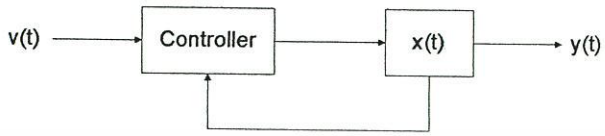


รูปที่ 2. 4 แสดงไดอะแกรมของสภาวะที่ค่าบางส่วน

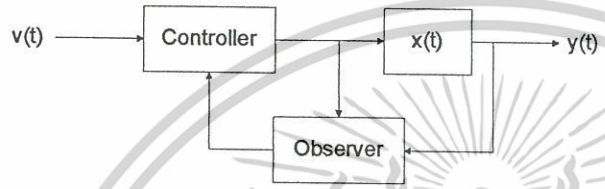
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3.ทฤษฎีแยกส่วน (Separation Theorem)

ทฤษฎีแยกส่วน (Separation Theorem) คือ การควบคุมระบบควบคุมและ ควบคุมการสังเกตสภาวะของระบบ อย่างเป็นอิสระต่อกัน



ก. Controllable

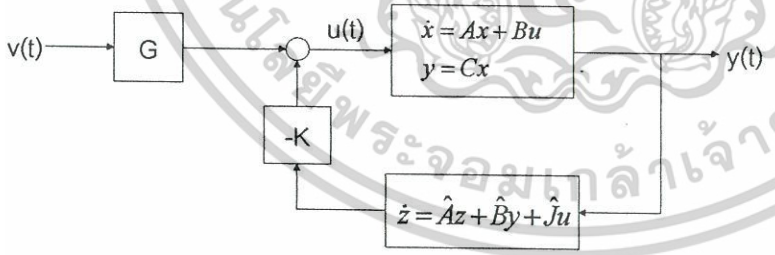


ข. Observable

รูปที่ 2.5 ก. แสดงระบบที่สามารถควบคุมได้ ข. แสดงระบบที่สามารถสังเกตได้

จากระบบควบคุมที่สามารถควบคุมสภาวะของระบบ เมื่อทำการป้อนกลับสภาวะดังรูปที่แสดงให้ดูไปแล้ว จากนั้นนำอินพุทและเอาท์พุทของสภาวะจริงมาสร้างตัวสังเกต แล้วนำตัวสังเกตนี้มาป้อนกลับสภาวะสามารถควบคุมและสังเกตระบบโดย "ทฤษฎีแยกส่วน"

เมื่อ u = Gv – Kx เป็นตัวป้อนกลับสภาวะ (Feedback) ทฤษฎีแยกส่วนนี้ยังทำให้ระบบมีเสถียรภาพทั้งในส่วนของการควบคุมและการสังเกตสภาวะดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.6 แสดงสภาวะเมื่อใช้ตัวสังเกตสภาวะแบบทฤษฎีแยกส่วน

จากสมการที่ (2.1) และ สมการที่ (2.2) เมื่อ $u = Gv - Kx$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{x} = Ax + BGv - BKz$$

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}Cx + BGv - BKz$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมการอนุพันธ์ของสภาวะจริงกับตัวสังเกตสภาวะ จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ \hat{B}C & \hat{A}-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ BG \end{bmatrix} \mathbf{v} \qquad (2.13)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.13) ซึ่งเป็นการควบคุมป้อนกลับโดยตัวสังเกตสภาวะ เมื่อกำหนดให้

$$Q = \begin{bmatrix} A & -BK \\ \hat{B}C & \hat{A}-BK \end{bmatrix}$$

ระบบนี้จะเสถียรภาพเมื่อ $|Q-\lambda I| = 0$

และได้ว่า

$$\begin{vmatrix} A-\lambda I_n & -BK \\ \hat{B}C & \hat{A}-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

หาดีเทอร์มิแนนท์ของ Q โดยใช้วิธีเกาส์ (Gaussian Elimination)

นำแถวที่ 1 ลบแถวที่ 2 ได้

$$\begin{vmatrix} \hat{A}-\lambda I_n & -(\hat{A}-\lambda I_n) \\ \hat{B}C & \hat{A}-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

นำหลักที่ 1 บวกหลักที่2ได้

$$\begin{vmatrix} 0 & -(\hat{A}-\lambda I_n) \\ \hat{B}C+\hat{A}-BK-\lambda I_n & \hat{A}-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{vmatrix} 0 & -(\hat{A}-\lambda I_n) \\ A-BK-\lambda I_n & \hat{A}-BK-\lambda I_n \end{vmatrix} = 0$$

ดังนั้นสามารถหา det Q ได้เป็น

$$\Delta_t(\lambda) = |A-BK-\lambda I_n||(\hat{A}-\lambda I_n)| \qquad (2.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $|A-BK-\lambda I_n|=0$ เป็นส่วนที่สามารถควบคุมได้และสามารถเลือกโพลการป้อนกลับในส่วนการควบคุมได้ และ $|(\hat{A}-\lambda I_n)|=0$ ซึ่งเป็นส่วนที่สามารถสังเกตได้ สามารถเลือกโพลในส่วนของเกนของตัวสังเกตสภาวะได้ และสามารถควบคุมทั้งสองสองอย่างอิสระต่อกัน เมื่อ K และ E มีเสถียรภาพ และค่าลักษณะเฉพาะของ A – BK และ A – EC เป็น Negative Real Part ดังนั้น ทฤษฎีแยกส่วนจะมีเสถียรภาพของระบบทั้งการควบคุมกับการสังเกตเสมอ

2.3วิธีสร้างตัวสังเกตสภาวะโดยวิธีของโกพิแน็ต(Observer design algorithm of Gopinath)

(I) เมื่อรู้ค่าของเมตริก A,B และ C จากสมการสถานะ เริ่มต้นให้หาค่าของ $C^{\#}\hat{I}R^{(n-p)\times n}$ เมื่อ

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}C^{\#}\\C\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n} \qquad (2.15)$$

เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริก (Nonsingular matrix)

(II) ใช้ค่า T จาก (I) มาสร้างระบบเสมือน (equivalent system) ของ (A,B,C) ได้เป็น $(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ โดยที่

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT=\begin{bmatrix}O & I_p\end{bmatrix}$$

(III) ระบบเสมือน $(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ สามารถหาค่าของสภาวะที่ต่ำสุดของตัวสังเกตสภาวะของระบบ(minimum order state observer) $(\hat{\bar{A}},\hat{\bar{B}},\hat{\bar{C}},\hat{\bar{D}},\hat{\bar{J}})$ ได้จาก $\bar{C}$ ใน (II) และเมื่อ $\bar{U}$ เป็นตามสมการที่ (2.6) คือ ($rank\begin{pmatrix}U\\C\end{pmatrix}=n, U\in\mathbb{R}^{(n-p)\times n}$) สามารถเลือก $\bar{U}$ เป็น $\bar{U}=\begin{bmatrix}I_{n-p} & -L\end{bmatrix}$

(IV) เมื่อเลือกค่า $\bar{U}$ ได้แล้วเขียน สมการ ใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{A}} & \hat{\bar{B}}\\ \hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n-p} & -L\end{bmatrix}\bar{A}\\ I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n-p} & -L\\ O & I_p\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11}-L\bar{A}_{21} & \bar{A}_{12}-L\bar{A}_{22}\\ I_{n-p} & O\\ O & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n-p} & L\\ O & I_p\end{bmatrix}$$

ดังนั้นจึงสามารถเขียนได้ว่า

$$\hat{\bar{A}}=\bar{A}_{11}-L\bar{A}_{21} \qquad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\hat{\bar{B}} = \bar{A}_{11}L - L\bar{A}_{21}L + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22} \tag{2.17}$$

$$\left[\hat{\bar{C}}, \hat{\bar{D}}\right] = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ O & I_p \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2 \tag{2.19}$$

และถ้า $\left(\bar{A}, \bar{C}\right)$ ได้แล้ว แล้ว เวคเตอร์แถวข้าง ตัวแรก ของ n-p มีอิสระเชิงเส้น และ

$$rank\begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \bar{C}\bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} O & I_p \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \\ \bar{A}_{21}\bar{A}_{11} + \bar{A}_{22}\bar{A}_{21} & \bar{A}_{21}\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = n$$

จะได้ว่า $\left(\bar{A}_{21}, \bar{A}_{11}\right)$ observable ด้วย ดังนั้นจึงสามารถเลือกค่า L ให้ $\hat{\bar{A}}$ มีค่ารากได้ตามต้องการ

(V) เนื่องจาก $\left(\hat{\bar{A}}, \hat{\bar{B}}, \hat{\bar{C}}, \hat{\bar{D}}, \hat{\bar{J}}\right)$ เป็นตัวสังเกตสภาวะของ $\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\right)$ ซึ่งเอาท์พุท คือ $\hat{x}$ โดยที่ $\hat{x}$ คือ ค่าประมาณของสภาวะ x ใน (A,B,C) เมื่อ $T\hat{x} \to x$ เมื่อ $t \to \infty$ ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ ตัวสังเกตสภาวะของ (A,B,C) เป็น

$$\hat{A} = \hat{\bar{A}}, \hat{B} = \hat{\bar{B}}, \hat{C} = T\hat{\bar{C}}, \hat{D} = T\hat{\bar{D}}, \hat{J} = \hat{\bar{J}}$$

2.4 การป้อนกลับสภาวะ(State Feedback)

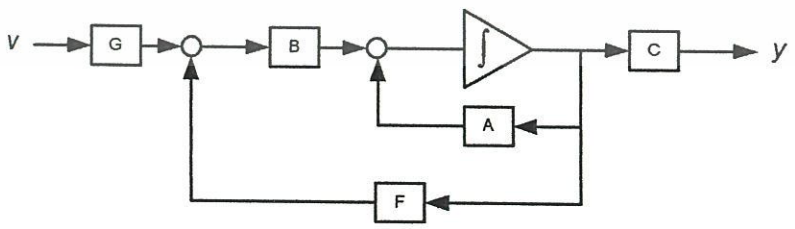
จากสมการสภาวะ $\dot{x} = Ax + Bu$ และ $y = Cx$ เราต้องการทำการป้อนกลับสภาวะของระบบโดยที่ค่าของการป้อนกลับคือ Fx และค่าการป้อนเข้าคือ Gv โดยที่จะกำหนดให้

$$u = Fx + Gv \tag{2.20}$$

ดังนั้นเราจะเขียนสมการสภาวะใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(Fx + Gv) \\ &= (A + BF)x + BGv \\ y &= Cx \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของ *(A,B,C)* จะเปรียบได้กับค่าของ *(A+BF,BG,C)*

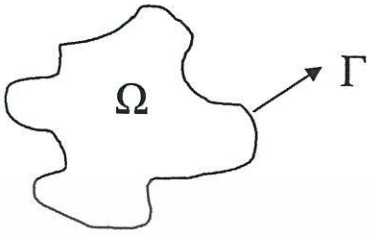


รูปที่ 2.7 แสดงการป้อนกลับสภาวะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์(Finite Element Method)

เป็นวิธีการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์โดยการประมาณค่าของฟังก์ชั่นโดยจะมีรายละเอียดดังนี้



รูปที่ 2.8 แสดงโดเมน Ω โดยมี Γ เป็นขอบเขต

ในปัญหาสมการอนุพันธ์มีความจำเป็นที่จะต้องหาคำตอบให้สอดคล้องกับค่าเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ถ้าหากเราต้องการที่จะประมาณค่าของฟังก์ชั่น Φ ในโดเมน Ω มีขอบเขต Γ ค่าประมาณของฟังก์ชั่น Φ นี้ จะต้องมีค่าเท่ากับค่าของ Φ ที่สอดคล้องกับขอบเขต Γ

ถ้าสามารถหาค่าฟังก์ชั่น ψ ใด ๆ ที่มีค่าบน Γ เท่ากับค่าของฟังก์ชั่น Φ บน Γ นั่นคือ $\psi|_\Gamma = \Phi|_\Gamma$ และถ้าสามารถหาเซตของ independent trial functions $\{N_m; m = 1,2,3,...\}$ โดยที่ $N_m|_\Gamma = 0$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ m เราจะสามารถประมาณค่าของจุดทุก ๆ จุดใน Ω ได้ โดยเราจะประมาณค่าของ Φ โดย

$$\Phi \simeq \hat{\Phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \qquad (2.21)$$

โดย $a_m (m = 1,2,...,M)$ เป็นพารามิเตอร์ที่จะคำนวณเพื่อให้การประมาณค่ามีค่าที่ดีที่สุด และ trial function นี้จะเรียกเป็น Shape หรือ Basis function

ψ และ trial function set นี้จะถูกนิยามขึ้นในลักษณะที่ $\hat{\Phi}|_\Gamma$ มีค่าเท่ากับ $\Phi|_\Gamma$ ไม่ว่าค่าของพารามิเตอร์ a_m จะมีค่าเท่าใด

Trial function set ควรจะเลือกมาในลักษณะที่ความถูกต้องของการประมาณค่าจะเพิ่มขึ้นเมื่อค่าของ M เพิ่มขึ้น ในลักษณะที่ $\psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$ สามารถแสดงฟังก์ชั่นใด ๆ Φ ได้โดยที่ $\Phi|_\Gamma = \psi|_\Gamma$ เมื่อ $M \to \infty$ ซึ่งจะเรียกว่า completeness requirement

การประมาณค่า function เราจำเป็นที่ต้องหาค่าพารามิเตอร์ของ a_m ใน (2.21) โดยจะสามารถทำได้หลาย ๆ วิธี เช่นวิธี Weighted Residual Approximation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 ระเบียบวิธีเวทเรซิดวล

เป็นวิธีการหาค่าของพารามิเตอร์ a_m ในสมการ (2.21) เราจะกำหนดให้ error หรือจะเรียกว่า residual เป็น R_Ω ในการประมาณค่าโดย

$R_\Omega = \Phi - \hat{\Phi}$ โดย R_Ω เป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่งบน Ω

ในความพยายามที่จะลด residual บนทุก ๆ จุดบนโดเมน Ω เราจะพยายามให้อินทิกรัลของ error รอบ Ω ที่ถ่วงน้ำหนักแบบต่าง ๆ กันให้เป็นศูนย์ นั่นคือเราพยายามที่จะทำให้

$$\int_\Omega W_l\left(\Phi - \hat{\Phi}\right)d\Omega \equiv \int W_l R_\Omega d\Omega = 0 \quad ;l = 1,2,...,M \tag{2.22}$$

โดย $\{W_l; l = 1,2,3,...\}$ เป็น เซตของ independent weighting functions

และความต้องการที่จะให้ $\Phi \to \hat{\Phi}$ เมื่อ $M \to \infty$ สามารถแสดงได้ในลักษณะที่ 1 สอดคล้องกับสมการ (2.22) เมื่อ $M \to \infty$ ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $R_\Omega \to \infty$ ที่ทุก ๆ จุดในโดเมนที่ต้องการ

ในการแทนค่า $\hat{\Phi}$ ในสมการที่ (2.22) โดยค่าในสมการที่ (2.21) เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่รู้ค่าเป็น a_m ซึ่งจะเขียนระบบสมการนี้ได้เป็น

$Ka = f$

โดยจะแสดงค่าต่าง ๆ ได้จาก

จากสมการ(1) ; $\Phi \simeq \hat{\Phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$ เมื่อแทนค่าลงในสมการที่(2.22) แล้วจะได้

$$\int_\Omega W_l\left(\Phi - \psi - \sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right)d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega W_l(\Phi - \psi)d\Omega - \int_\Omega W_l \sum_{m=1}^{M} a_m N_m d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega W_l(\Phi - \psi)d\Omega = \int_\Omega W_l \sum_{m=1}^{M} a_m N_m d\Omega$$

ซึ่งจาก $\int_\Omega W_l \sum_{m=1}^{M} a_m N_m d\Omega$ เราจะได้ $\sum_{m=1}^{M} a_m N_m = a_1 N_1 + a_2 N_2 + ... + a_M N_M$

ดังนั้น

$$\int_\Omega W_l \sum_{m=1}^{M} a_m N_m d\Omega = \int_\Omega W_l a_1 N_1 + W_l a_2 N_2 + ... + W_l a_M N_M d\Omega$$

$$\int_\Omega W_l \sum_{m=1}^{M} a_m N_m d\Omega = \left[\int_\Omega W_l N_1 d\Omega \quad \int_\Omega W_l N_2 d\Omega \quad \cdots \quad \int_\Omega W_l N_M d\Omega\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะได้ $K_{lm} = \int_\Omega W_l N_m d\Omega$ โดยที่ $l \geq 1, m < M$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}$$

และ $f_l=\int_\Omega W_l\left(\Phi-\psi\right)d\Omega, 1\le l\le M$

2.7 ทฤษฎีของกาเลอคิน(The Galerkin Method)

เป็นการเลือกใช้ trial function เป็น weighting function เองนั่นคือ

$W_l=N_l$

สำหรับในโดเมน 1-มิติ

$K_{lm}=\int_\Omega N_l N_m dx$

และ $f_l=\int_\Omega N_l\left(\Phi-\psi\right)dx$

ซึ่งในวิธีนี้จะมีข้อดีคือ จะได้ K ที่เป็น Symmetric Matrix

2.8 ทฤษฎีของ Gram-Schmidt Orthonormalization Process

Gram Schmidt Theory เป็นทฤษฎีที่สร้าง Orthonormal Set จาก independent set ที่ไม่ตั้งฉากกัน เช่น เมื่อให้ $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ เราจะสร้าง Orthonormal Set $V=\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_m\}$ จาก W โดยใช้ทฤษฎีของ Gram-Schmidt โดยให้เราพิจารณา W เป็นเซตของเวกเตอร์ จะทำให้เข้าใจได้มากขึ้นคือ เมื่อแปลงค่าของ $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ จะได้เป็นเซตของ $V=\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_m\}$ ที่เป็น ยูนิตเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันดังรูป

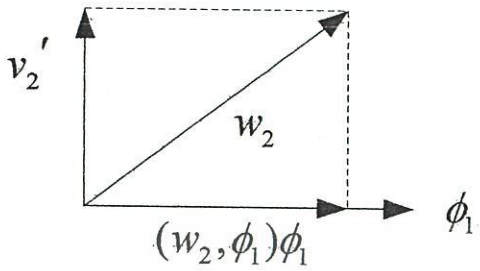
รูปที่ 2.9 แสดงการแปลงค่าของเวกเตอร์ โดยใช้ทฤษฎีของ Gram-Schmidt

<u>ขั้นที่ 1</u> เราจะทำการทำให้ w_1 เป็นยูนิตเวกเตอร์เพื่อใช้เป็นเวกเตอร์อ้างอิงซึ่งจะได้ $\phi_1=\frac{w_1}{\|w_1\|}$ ได้รูปเป็น

$$\longrightarrow \quad \phi_1=\frac{w_1}{\|w_1\|}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขั้นที่2</u> หาค่า ϕ_2 จากโปรเจคชั่นของ w_2 ลง ϕ_1 ดังรูป



$$w_2 = v_2' + (w_2,\phi_1)\phi_1$$

$$v_2' = w_2 - (w_2,\phi_1)\phi_1$$

v_2' เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ ϕ_1 แต่ยังไม่เป็นยูนิตเวกเตอร์ ดังนั้น

$$\phi_2 = \frac{v_2'}{\left\| v_2' \right\|}$$

ซึ่งในการหาค่า ϕ ตัวใดๆ นั้นก็จะใช้หลักการดังที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\phi_{k+1} = \frac{w_{k+1} - (w_{k+1},\phi_1)\phi_1 - (w_{k+1},\phi_2)\phi_2 - \ldots - (w_{k+1},\phi_k)\phi_k}{\left\| w_{k+1} - (w_{k+1},\phi_1)\phi_1 - (w_{k+1},\phi_2)\phi_2 - \ldots - (w_{k+1},\phi_k)\phi_k \right\|}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การทดลองและผลการทดลอง

3.1 การทดลองศึกษาการควบคุมป้อนกลับโดยใช้ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

จากสมการสภาวะของระบบ

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}u(t) \quad ,x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

ต้องการควบคุมระบบ(Regulator)ที่มีโพลเป็น $-5\pm j1,-6$ แต่สามารถตรวจวัดสภาวะได้เพียง 1 ตัวเท่านั้นจึงใช้ ตัวสังเกตสภาวะชนิดที่รู้ค่าสภาวะบางส่วน(Reduce Order Observer) แทนโดยกำหนดให้โพลของตัวสังเกตสภาวะเป็น -7,-8

โดยใช้รูปแบบการลดมิติของโกพิแนธ(Gopinath's Algorithm)เพื่อหาค่าสภาวะที่ยังไม่ทราบค่าและป้อนกลับสภาวะโดยใช้ตัวสังเกตสภาวะตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมตริกซ์ T จาก

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}C^{\#}\\ C\end{bmatrix}$$

สร้างเมตริกซ์ $C^{\#}$ โดยกำหนดให้

$$C^{\#}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ได้

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

และ $rank(T^{-1})=rank(T)=3$

2. แปลงระบบเสมือนโดยหาค่า

$$\overline{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ 2 & -7 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

$$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. กำหนดตัวแปลง $\bar{U}$ โดยที่ $\bar{U} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{2x2} & -L \end{bmatrix}$

ได้ว่า $\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & -l_2 \end{bmatrix}$

4. หาค่าระบบเสมือนจาก

$$\hat{\bar{A}} = \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}$$

$$\hat{\bar{B}} = \bar{A}_{11}L - L\bar{A}_{21}L + \bar{A}_{12} - L\bar{A}_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{C}}, \hat{\bar{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ O & I_p \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}} = \bar{B}_1 - L\bar{B}_2$$

เมื่อค่า

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\hat{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-l_1 & -2+l_1 \\ -2+l_2 & -7+l_2 \end{bmatrix}$$

แล้วได้ว่า

$$\det(\lambda I - \hat{\bar{A}}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1-l_1 & -2+l_1 \\ 2-l_2 & -7+l_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1+l_1 & 2-l_1 \\ -2+l_2 & \lambda+7-l_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1+l_1)(\lambda+7-l_2) - (-2+l_1)(2-l_2)$$

$$= \lambda^2 + (1+l_1+7-l_2)\lambda + (1+l_1)(7-l_2) - (2-l_1)(-2+l_2)$$

$$= \lambda^2 + (8+l_1-l_2)\lambda + (1+l_1)(7-l_2) - (2-l_1)(-2+l_2)$$

เมื่อเลือกโพลของระบบเป็น -7,-8 จะได้

$$\det(\lambda I - \hat{\bar{A}}) = (\lambda+7)(\lambda+8) = \lambda^2 + 15\lambda + 56$$

ดังนั้น

$$\lambda^2 + 15\lambda + 56 = \lambda^2 + (8+l_1-l_2)\lambda + (1+l_1)(7-l_2) - (2-l_1)(-2+l_2)$$

แก้สมการได้

$$L = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
61419

5.ได้ว่า

$$\hat{\bar{A}}=\begin{bmatrix}-13 & 10\\ -3 & -2\end{bmatrix},\hat{\bar{B}}=\begin{bmatrix}-80\\ -33\end{bmatrix},\hat{\bar{C}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\hat{\bar{D}}=\begin{bmatrix}12\\ 5\\ 1\end{bmatrix},\hat{\bar{J}}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix},\bar{U}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -12\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

6. จากสมการการแปลงตัวสังเกตสภาวะจริง

$$\dot{z}(t)=\hat{\bar{A}}z(t)+\hat{\bar{B}}z(t)+\hat{\bar{J}}u(t)$$

ดังนั้น

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-13 & 10\\ -3 & -2\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}-80\\ -33\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

7. จากสมการการตรวจวัดค่าสภาวะที่ยังไม่ทราบค่า

$$\hat{\bar{x}}(t)=\hat{\bar{C}}z(t)+\hat{\bar{D}}y(t)$$

ได้ว่า

$$\hat{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}12\\ 5\\ 1\end{bmatrix}y(t)$$

8. เขียนสมการการสังเกตสภาวะจริงกับสภาวะสังเกตได้เป็น

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ \hat{\bar{B}}C & \hat{\bar{A}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ \hat{\bar{J}}\end{bmatrix}u(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -80 & -13 & 10\\ 0 & 0 & -33 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

9. ทำการป้อนกลับสภาวะโดยใช้ตัวสังเกตสภาวะจาก

$$u=-f\,\hat{x}$$

ใช้ตัวป้อนกลับที่มีค่าโพลเป็น $-5\pm j1,-6$ จากสมการคุณลักษณะของการป้อนกลับสภาวะ $\det(sI-A-BF)=0$

ให้ $F=\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & f_3\end{bmatrix}$

แล้ว

$$A+BF=\begin{bmatrix}2f_1-5 & 2f_2+1 & 2f_3\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\det(sI - A - BF) = s^3 + (-2f_1 + 10)s^2 + (-10f_1 - 4f_2 + 28)s + (f_1 - 8f_2 - 4f_3 + 21) = 0$$

และค่าโพลที่ต้องการคือ $-5 \pm j1, -6$ ดังนั้น

$$(s+5+j)(s+5-j)(s+6) = s^3 + (-2f_1 + 10)s^2 + (-10f_1 - 4f_2 + 28)s + (f_1 - 8f_2 - 4f_3 + 21)$$

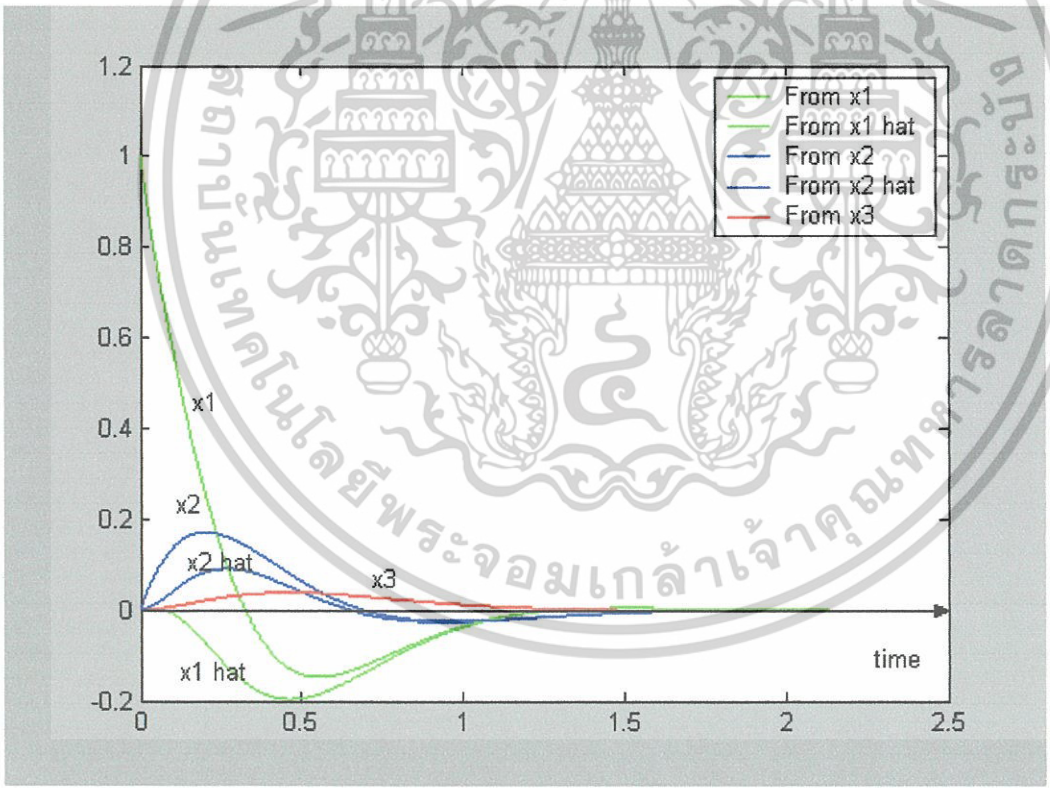
ดังนั้นได้ค่า F เป็น $F = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -20.5 \end{bmatrix}$

10. เมื่อป้อนกลับสภาวะจะได้สมการการป้อนกลับสภาวะจริงซึ่งมีความสัมพันธ์กับสภาวะสังเกตเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF\hat{D}C & BF\hat{C} \\ \hat{B}C + \hat{J}F\hat{D}C & \hat{A} + \hat{J}F\hat{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

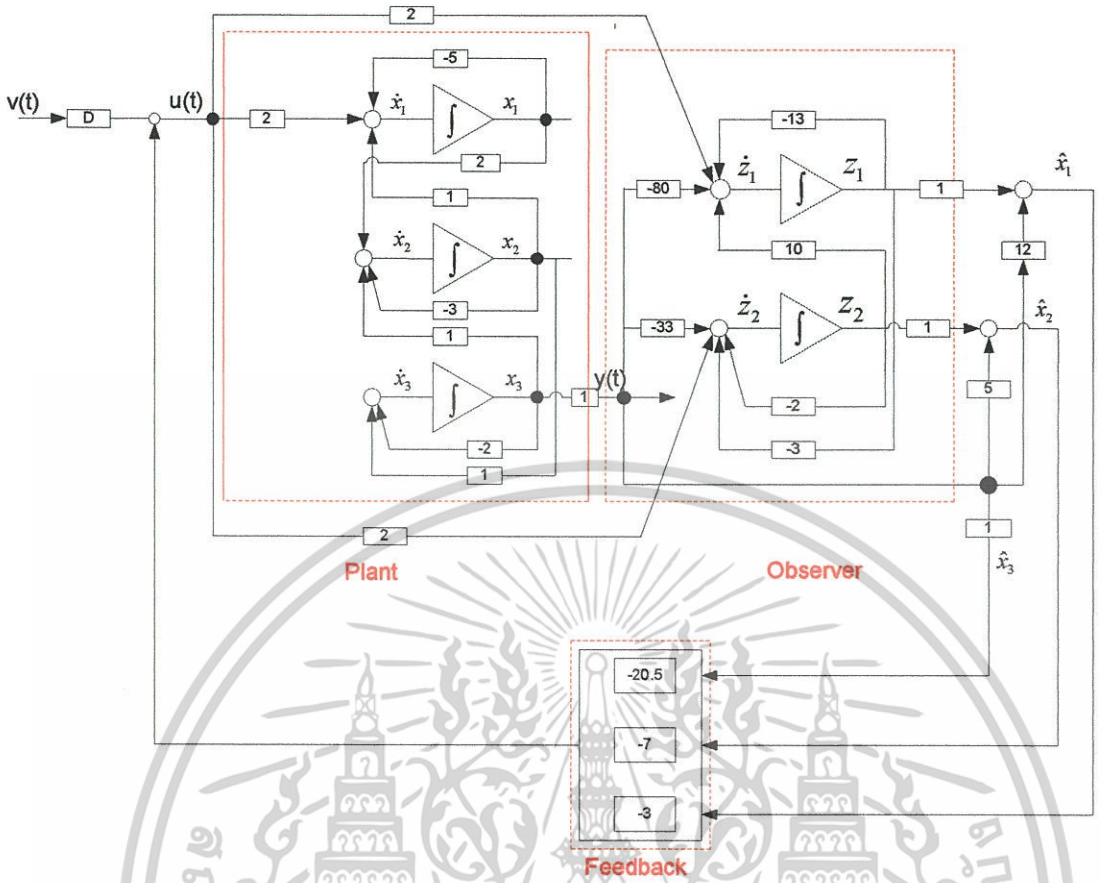
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -163 & -14 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -243 & -27 & 18 \\ 0 & 0 & -196 & -17 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

วาดกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า x และ $\hat{x}$



รูปที่ 3.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า x และ $\hat{x}$ เมื่อเทียบกับเวลา

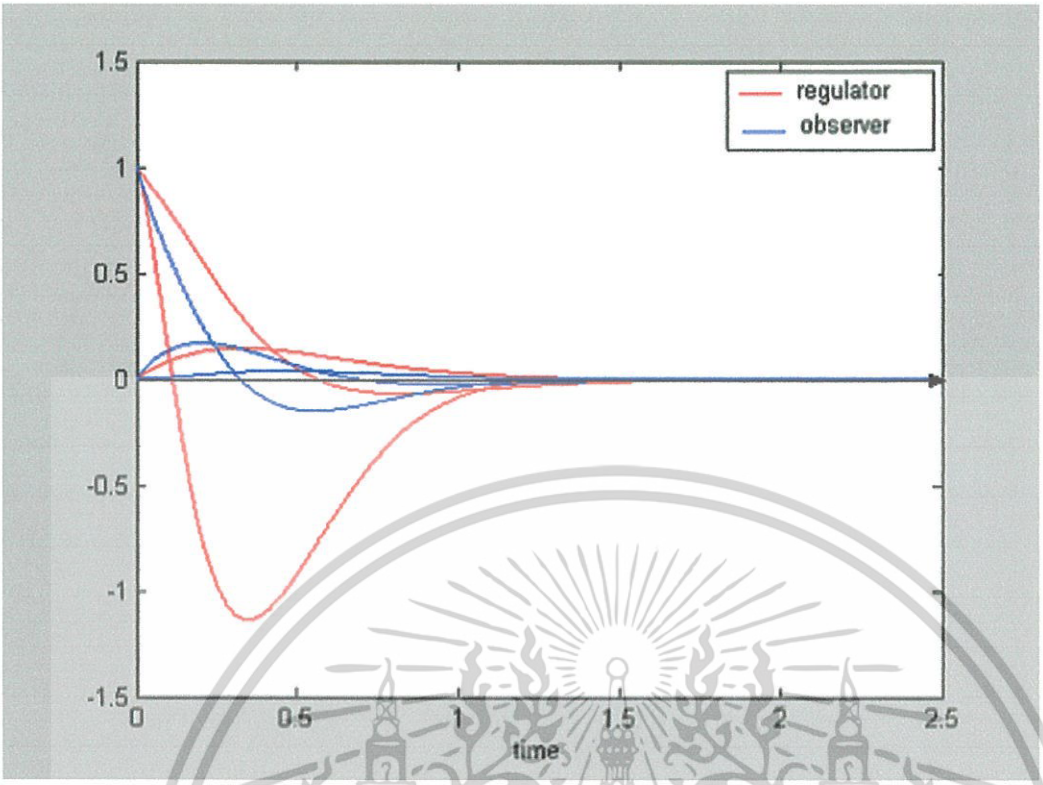
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 แสดงการป้อนกลับสภาวะโดยใช้ตัวสังเกต

และเมื่อนำค่าการเปลี่ยนแปลงสภาวะนี้ไปเปรียบเทียบกับผลจากการควบคุมโดยใช้ Regulator ในปริญญานิพนธ์ ปีการศึกษา 2545 จะเห็นว่ามีค่าใกล้เคียงกันมาก นั่นคือเราสามารถใช้ตัวสังเกตสภาวะเป็นตัวควบคุมระบบได้เหมือนกับ Regulator ตามทฤษฎี นอกจากนั้นยังสามารถนำไปใช้กับระบบที่เราไม่สารถตรวจวัดสภาวะได้ทั้งหมดด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 แสดงกราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรระหว่าง Regulator กับ Observer

3.2 การทดลองศึกษาการควบคุมการกระจายค่าตัวแปร(ระบบการกระจายอุณหภูมิบนแท่งตัวนำ)

จากสมการการกระจายอุณหภูมิบนพื้นผิวของแท่งตัวนำ (Heat Equation) มีสมการตั้งต้นคือ

$$L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+q(x)u=\sum_{j=1}^{m}g_j(x)f_j(t) \qquad (3.1)$$

เมื่อ $f(t)$ คืออินพุทควบคุม โดยเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(x,0)=u_0(x)$$
$$u(0,t)=0, x\in S, t>0$$

ในการหาค่าคำตอบประมาณ $u^n(x,t)$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ Complete sequence function $\phi_1(x),...,\phi_n(x)$, $(\phi_i,\phi_j)=\delta_{ij}$ ซึ่งได้ค่าคำตอบ $u^n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}e_i(t)\phi_i(x)$ เมื่อ $e_i(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาได้จากสมการ

$$(\phi_k, L(u^n)-\sum_{j=1}^{m}g_j f_j)=0 \qquad (3.2)$$

โดยที่ค่าของ $u^n=e_1\phi_1+...+e_n\phi_n$ เมื่อนำค่าของ u^n แทนลงในสมการตั้งต้นได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L(u^n)=\frac{\partial[e_1\phi_1+...+e_n\phi_n]}{\partial t}-\Delta[e_1\phi_1+...+e_n\phi_n]+q(x)[e_1\phi_1+...+e_n\phi_n]$$
$$=\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n-\Delta[e_1\phi_1+...+e_n\phi_n]+q(x)[e_1\phi_1+...+e_n\phi_n]$$

เมื่อแทนค่า ลงใน สมการที่ 3.2 แล้ว

$$(\phi_k,[(\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n)-\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)+q(x)(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)]-\sum_{j=1}^{m}g_jf_j)=0$$

$$(\phi_k,[(\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n))-(\phi_k,\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n))+(\phi_k,q(x)(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n))-(\phi_k,\sum_{j=1}^{m}g_jf_j))=0$$

$$(\phi_k,[(\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n))=(\phi_k,(\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)-q(x)(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n))+(\phi_k,\sum_{j=1}^{m}g_jf_j))$$

พิจารณาที่พจน์ $(\phi_k,[(\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n))$ จะได้ว่า

$$(\phi_k,(\dot{e}_1\phi_1+...+\dot{e}_n\phi_n))=(\phi_k,\dot{e}_1\phi_1)+(\phi_k,\dot{e}_2\phi_2)+...+(\phi_k,\dot{e}_n\phi_n)$$
$$=\dot{e}_1(\phi_k,\phi_1)+\dot{e}_2(\phi_k,\phi_2)+...+\dot{e}_n(\phi_k,\phi_n)$$
$$=\dot{e}_k$$

พิจารณาที่พจน์ $(\phi_k,(\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)-q(x)(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n))+(\phi_k,\sum_{j=1}^{m}g_jf_j))$ ได้ว่า

$$\because e_1\phi_1+...+e_n\phi_n=(e_i,\phi_i),i=1,2,...n$$
$$\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)=(e_1\Delta\phi_1+...+e_n\Delta\phi_n)=(e_i,\Delta\phi_i)$$
$$\therefore(\phi_k,(\Delta(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n)-q(x)(e_1\phi_1+...+e_n\phi_n))=\sum_{i=1}^{n}(\phi_k\Delta\phi_i-q(x)\phi_i)e_i$$

ดังนั้น $\dot{e}_k=\sum_{i=1}^{n}(\phi_k\Delta\phi_i-q(x)\phi_i)e_i+(\phi_k,\sum_{j=1}^{m}g_jf_j))$

$$e_k(0)=(\phi_k,u_0),k=1\to n$$

กำหนดให้ $|u^n-u|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$

เมื่อเราใส่ตัวสังเกตสภาวะเข้าไปจะได้เราสามารถตรวจวัดเอาท์พุทได้เป็น

$$y_j(t)=(u(x,t),w_j(x)),j=1\to r$$

โดยที่ $w_1(x),...,w_r(x)$ เป็นฟังชั่นที่มีอิทธิพลต่อการคำนวณ

เมื่อใช้ค่าเอาท์พุทนี้ไปประมาณค่าสภาวะของกระบวนการในรูปของฟังก์ชั่น

$$p_i(t)=(u(x,t),\rho_i(x)),i=1,...,l$$

เมื่อ $(w_1,...,w_r)\xrightarrow[Schmidt]{}(\phi_i(x))$

จากค่าคำตอบประมาณซึ่งลู่เข้าหาค่าคำตอบจริงซึ่งเอาท์พุทคือ

$$y_j(t)=(u(x,t),w_j(x))$$
$$=\lim_{n\to\infty}(u^n(x,t),w_j(x))$$
$$=\sum e_i(t)(\phi_i(x),w_j(x)),j=1,...,r$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือเราจะได้ระบบไดนามิกส์ของระบบลดรูปเป็น

$$\dot{x} = Ax + Bf, x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

เมื่อ

$$x(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{bmatrix}, \; x_0 = \begin{bmatrix} (u_0, \phi_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ (u_0, \phi_m) \end{bmatrix}, \; f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(t) \end{bmatrix}, \; y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r(t) \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ki}), a_{ki} = (\phi_k, \Delta\phi_i - q\phi_i)$

$B = (b_{ki}), b_{ki} = (\phi_k, g_j)$

$C = (c_{ji}), c_{ji} = (\phi_i, w_j)$

เมื่อ $k = 1,..,n; j = 1,..,m; i = 1,..,n$

เมื่อ (A, C) : Observable เราสามารถสร้างตัวสังเกตสภาวะ โดยวิธีลดรูปได้เป็น

$$\dot{z} = Fz + Gy + wBf, z(0) = z_0$$

$$\hat{x} = Hz + Jy$$

3.2.1 ตัวอย่างปัญหา

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2x^2 - 4x - 2\right)u + \left(4x - 4x^2\right)f(t), \; 0 < x < 1$$

$$, \; t > 0$$

โดยมี initial condition เป็น $u(x,0) = 0, \; 0 < x < 1$

และมี boundary condition เป็น $u(0,t) = u(1,t) = 0, \; t > 0$

ทำการตรวจวัดโดยใช้เซ็นเซอร์ 3 ตัวซึ่งมีฟังก์ชั่นเป็น

$$w_1(w) = \begin{cases} \gamma(x - \frac{1}{3}), \frac{1}{12} < x < \frac{7}{12} \\ 0 \qquad\qquad \text{any} \end{cases}$$

$$w_2(w) = \begin{cases} \gamma(x - \frac{1}{2}), \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 \qquad\qquad \text{any} \end{cases}$$

$$w_3(w) = \begin{cases} \gamma(x - \frac{2}{3}), \frac{5}{12} < x < \frac{11}{12} \\ 0 \qquad\qquad \text{any} \end{cases}$$

เมื่อ $\gamma(x) = e^{-\frac{1}{1-16x^2}}$

ซึ่งค่าเอาท์พุทคือ

$$y_j(t) = (u(\bullet, t), w_j), j = 1,2,3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กำหนดให้ $p(t)=(u(x,t),\cos\frac{\pi}{2}x)$ และn = 5 ค่าโพลของตัวสังเกตสภาวะเป็น -20 และ-30 และ $(w_1,w_2,w_3,\sin\pi x,\sin 2\pi x,...)\rightarrow\{\phi_i\}_i^{\infty}$

3.2.2 การแก้ปัญหา

เริ่มจากการประมาณค่า $u(x,t)$ โดยที่ $u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}e_i(t)\phi_i(x)$ เมื่อค่าของ $y_j(t)=(u(x,t),w_j(x))=\sum e_i(t)(\phi_i(x),w_j(x))$ ทำการหาค่าของ $\phi_i(x)$ โดยวิธี Schmidt-Orthogonal ได้ดังนี้

$$v_1(x)=\omega_1(x)\Rightarrow\phi_1(x)=\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|}$$

$$\begin{aligned}v_2(x)&=\omega_2(x)-(\omega_2(x),\phi_1(x))\phi_1(x)\\&=\omega_2(x)-(\omega_2(x),\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|})\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|}\\&=\omega_2(x)-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|^2}(\omega_2(x),\omega_1(x))\omega_1(x)\end{aligned}$$

$$\phi_2(x)=\frac{v_2(x)}{\|v_2(x)\|}$$

$$\|v_2(x)\|=[(\omega_2(x)-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|^2}(\omega_2(x),\omega_1(x))\omega_1(x)),(\omega_2(x)-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|^2}(\omega_2(x),\omega_1(x))\omega_1(x))]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v_2(x)\|=[(\omega_2(x),\omega_2(x))-\frac{(\omega_2(x),\omega_1(x))^2}{(\omega_1(x),\omega_1(x))}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_2(x)=\frac{\omega_2(x)-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|^2}(\omega_2(x),\omega_1(x))\omega_1(x)}{[(\omega_2(x),\omega_2(x))-\frac{(\omega_2(x),\omega_1(x))^2}{(\omega_1(x),\omega_1(x))}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$let\quad a=\frac{1}{[(\omega_2(x),\omega_2(x))-\frac{(\omega_2(x),\omega_1(x))^2}{(\omega_1(x),\omega_1(x))}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$b=\frac{\frac{1}{\|\omega_1(x)\|^2}(\omega_2(x),\omega_1(x))\omega_1(x)}{[(\omega_2(x),\omega_2(x))-\frac{(\omega_2(x),\omega_1(x))^2}{(\omega_1(x),\omega_1(x))}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore\phi_2(x)=a\omega_2(x)-b\omega_1(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_3(x)=\omega_3(x)-(\omega_3(x),\phi_2(x))\phi_2(x)-(\omega_3(x),\phi_1(x))\phi_1(x)$$
$$=\omega_3(x)-(\omega_3(x),a\omega_2(x)-b\omega_1(x))\phi_2(x)-(\omega_3(x),\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|})\phi_1(x)$$
$$=\omega_3(x)-[a(\omega_2(x),\omega_3(x))-b(\omega_3(x),\omega_1(x))](a\omega_2(x)-b\omega_1(x))-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|}(\omega_3(x),\omega_1(x))\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|}$$

$let\ f=\|v_3(x)\|$

$$\phi_3(x)=\frac{v_3(x)}{\|v_3(x)\|}=\frac{\omega_3(x)-ac\omega_2(x)+(bc-d)\omega_1(x)}{f}$$

$let\ g=\frac{1}{f},h=\frac{ac}{f},k=bc-d$

$$\therefore\phi_3(x)=g\omega_3(x)-h\omega_2(x)+k\omega_1(x)$$

$$v_4(x)=\omega_4(x)-(\omega_4(x),\phi_3(x))\phi_3(x)-(\omega_4(x),\phi_2(x))\phi_2(x)-(\omega_4(x),\phi_1(x))\phi_1(x)$$
$$=\omega_4(x)-(\omega_4(x),g\omega_3(x)-h\omega_2(x)+k\omega_1(x))\phi_3(x)-(\omega_4(x),a\omega_2(x)-b\omega_1(x))\phi_2(x)$$
$$-(\omega_4(x),\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|})\phi_1(x)$$
$$=\omega_4(x)-[g(\omega_4(x),\omega_3(x))-h(\omega_3(x),\omega_2(x))+k(\omega_4(x),\omega_1(x))](g\omega_3(x)-h\omega_2(x)+k\omega_1(x))$$
$$-[a(\omega_4(x),\omega_2(x))-b(\omega_4(x),\omega_1(x))](a\omega_2(x)-b\omega_1(x))-\frac{1}{\|\omega_1(x)\|}(\omega_4(x),\omega_1(x))\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|}$$

$let\ m=g(\omega_4(x),\omega_3(x))-h(\omega_3(x),\omega_2(x))+k(\omega_4(x),\omega_1(x))$
$n=a(\omega_4(x),\omega_2(x))-b(\omega_4(x),\omega_1(x))$
$$p=\frac{(\omega_4(x),\omega_1(x))}{(\omega_1(x),\omega_1(x))}$$

$$v_4(x)=\omega_4(x)-mg\omega_3(x)+mh\omega_2(x)-mk\omega_1(x)-na\omega_2(x)+nb\omega_1(x)-p\omega_1(x)$$

$let\ q=mg,r=mh-na,s=mk-nb+p$

$$\therefore v_4(x)=\omega_4(x)-q\omega_3(x)+r\omega_2(x)-s\omega_1(x)$$

$$\|v_4(x)\|=(v_4(x),v_4(x))^{\frac{1}{2}}$$
$$=(\omega_4(x)-q\omega_3(x)+r\omega_2(x)-s\omega_1(x),\omega_4(x)-q\omega_3(x)+r\omega_2(x)-s\omega_1(x))^{\frac{1}{2}}$$
$$=[(\omega_4(x),\omega_4(x))-2q(\omega_4(x),\omega_3(x))+2r(\omega_4(x),\omega_2(x))-2s(\omega_4(x),\omega_1(x))$$
$$+q^2(\omega_3(x),\omega_3(x))-2qr(\omega_3(x),\omega_2(x))+2qs(\omega_3(x),\omega_1(x))-2rs(\omega_2(x),\omega_1(x))$$
$$+s^2(\omega_1(x),\omega_1(x))+r^2(\omega_2(x),\omega_2(x))]^{\frac{1}{2}}$$

$let\ \|v_4(x)\|=\alpha$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi_4(x)=\frac{v_4(x)}{\|v_4(x)\|}$$

$$=\frac{\omega_4(x)-q\omega_3(x)+r\omega_2(x)-s\omega_1(x)}{\alpha}$$

$$let\quad \beta=\frac{1}{\alpha},\gamma=\frac{q}{\alpha},\theta=\frac{r}{\alpha},\psi\frac{s}{\alpha}$$

$$\phi_4(x)=\beta\omega_4(x)-\gamma\omega_3(x)+\theta\omega_2(x)-\psi\omega_1(x)$$

$$v_5(x)=\omega_5(x)-(\omega_5(x),\phi_4(x))\phi_4(x)-(\omega_5(x),\phi_3(x))\phi_3(x)-(\omega_5(x),\phi_2(x))\phi_2(x)-(\omega_5(x),\phi_1(x))\phi_1(x)$$

$$=\omega_5(x)-(\omega_5(x),\beta\omega_4(x)-\gamma\omega_3(x)+\theta\omega_2(x)-\psi\omega_1(x))\phi_4(x)-(\omega_5(x),g\omega_3(x)$$

$$-h\omega_2(x)+k\omega_1(x))\phi_3(x)-(\omega_5(x),a\omega_2(x)-b\omega_1(x))\phi_2(x)-(\omega_5(x),\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|})\phi_1(x)$$

$$=\omega_5(x)-[\beta(\omega_5(x),\omega_4(x))-\gamma(\omega_5(x),\omega_3(x))+\theta(\omega_5(x),\omega_2(x))-\psi(\omega_5(x),\omega_1(x))]\phi_4(x)$$

$$-[g(\omega_5(x),\omega_3(x))-h(\omega_5(x),\omega_2(x))+k(\omega_5(x),\omega_1(x))]\phi_3(x)-[a(\omega_5(x),\omega_2(x))$$

$$-b(\omega_5(x),\omega_2(x))]\phi_2(x)-\frac{\omega_1(x)}{\|\omega_1(x)\|}(\omega_5(x),\omega_1(x))\phi_1(x)$$

$$let\quad \eta=[\beta(\omega_5(x),\omega_4(x))-\gamma(\omega_5(x),\omega_3(x))+\theta(\omega_5(x),\omega_2(x))-\psi(\omega_5(x),\omega_1(x))]$$

$$\mu=[g(\omega_5(x),\omega_3(x))-h(\omega_5(x),\omega_2(x))+k(\omega_5(x),\omega_1(x))]$$

$$\rho=[a(\omega_5(x),\omega_2(x))-b(\omega_5(x),\omega_2(x))]$$

$$\delta=\frac{(\omega_5(x),\omega_1(x)}{(\omega_1(x),\omega_1(x)}$$

$$v_5(x)=\omega_5(x)-\eta\phi_4-\mu\phi_3-\rho\phi_2-\delta\omega_1(x)$$

$$=\omega_5(x)-\eta(\beta\omega_4(x)-\gamma\omega_3(x)+\theta\omega_2(x)-\psi\omega_1(x))-\mu(g\omega_3(x)-h\omega_2(x)+k\omega_1(x))$$

$$-\rho(a\omega_2(x)-b\omega_1(x))-\delta\omega_1(x)$$

$$=\omega_5(x)-\eta\beta\omega_4(x)+\eta\gamma\omega_3(x)-\eta\theta\omega_2(x)+\eta\psi\omega_1(x)-\mu g\omega_3(x)+\mu h\omega_2(x)$$

$$-\mu k\omega_1(x)-\rho a\omega_2(x)+\rho b\omega_1(x)-\delta\omega_1(x)$$

$$=\omega_5(x)-(\eta\beta)\omega_4(x)+(\eta\gamma-\mu g)\omega_3(x)-(\eta\theta-\mu h+\rho a)\omega_2(x)+(\eta\psi-\mu k+\rho b-\delta)\omega_1(x)$$

$$let\quad \tau=\eta\beta$$

$$\lambda=\eta\gamma-\mu g$$

$$\varepsilon=\eta\theta-\mu h+\rho a$$

$$\sigma=\eta\psi-\mu k+\rho b-\delta$$

$$\therefore v_5(x)=\omega_5(x)-\tau\omega_4(x)+\lambda\omega_3(x)-\varepsilon\omega_2(x)+\sigma\omega_1(x)$$

$$\|v_5(x)\|=(v_5(x),v_5(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$=\zeta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\phi_5(x)=\frac{v_5(x)}{\|v_5(x)\|}=\frac{\omega_5(x)-\tau\omega_4(x)+\lambda\omega_3(x)-\varepsilon\omega_2(x)+\sigma\omega_1(x)}{\zeta}$$

ทำการแทนค่าโดยกำหนด

$$a=\lim_{x\to 1/12}x \quad b=\lim_{x\to 7/12}x \quad c=\lim_{x\to 3/12}x \quad d=\lim_{x\to 9/12}x \quad e=\lim_{x\to 5/12}x \quad f=\lim_{x\to 11/12}x$$

เมื่อ

$$v_1=w_1$$

$$\|v_1\|=(\int_a^b v_1^{\,2}dx)^2$$

$$=0.1824$$

$$\phi_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$=\frac{w_1}{0.1824}=5.4825w_1$$

$$v_2=w_2-\phi_1(\int_c^b w_2\phi_1 dx)$$

$$=w_2-\phi_1(0.0184)(5.4825)$$

$$=w_2-(0.0184(5.4825)^2)w_1$$

$$=w_2-0.5531w_1$$

$$\|v_2\|=(\int_D v_2^{\,2}dx)^{\frac{1}{2}},\ D:\ \text{Domain of squre integrable}$$

$$=[\int_D(w_2^{\,2}dx-2(0.5531)w_2w_1+(0.553^2)w_1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\int_c^d w_2^{\,2}dx-1.1062\int_c^b w_2w_1dx+0.3059\int w_1^{\,2}dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[0.0333-1.1062(0.0184)+0.3059(0.0333)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=0.1521$$

$$\phi_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$$

$$=6.5746w_2-3.636w_1$$

$$v_3=w_3-\phi_2[\int_D w_3\phi_2dx]-\phi_1[\int_D w_3\phi_1dx]$$

$$=w_3-\phi_2[\int_D w_3(6.5746w_2-3.6364w_1)dx]-\phi_1[\int_D w_3(5.4825w_1)dx]$$

$$=w_3-\phi_2[6.5746\int_e^d w_3w_2dx-3.6364\int_e^b w_3w_1)dx]-5.4825\phi_1\int_D w_3w_1dx]$$

$$=w_3-\phi_2[6.5746(0.0184)-3.6364(0.0019)]-\phi_1 5.4825(0.0019)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= w_3 - 0.1141\phi_2 - 0.0104\phi_1$$
$$= w_3 - 0.1141(6.5746w_2 - 3.636w_1) - 0.0104(5.4825w_1)$$
$$= w_3 - 0.7502w_2 - 0.3579w_1$$

$$\|v_3\| = (\int_D {v_3}^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D (w_3 - 0.7502w_2 - 0.3579w_1)^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D ({w_3}^2 - 1.5007w_3w_2 - 0.7158w_3w_1 + 0.5628{w_2}^2 - 0.537w_2w_1 + 0.1281{w_1}^2)dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_e^f {w_3}^2 dx - 1.5007\int_e^d w_3w_2 dx + 0.7158\int_e^b w_3w_1 dx + 0.5628\int_c^d {w_2}^2 dx$$
$$-0.537\int_c^b w_2w_1 dx + 0.1281\int_c^b {w_1}^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [0.0333 - 1.5004(0.0184) + 0.7158(0.0019) + 0.5628(0.0333)$$
$$-0.537(0.0184) + 0.128(0.0333)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.1421$$

$$\phi_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

$$= 7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1$$

$$v_4 = w_4 - \phi_3[\int_D w_4\phi_3 dx] - \phi_2[\int_D w_4\phi_2 dx] - \phi_1[\int_D w_4\phi_1 dx]$$

$$= w_4 - \phi_3[\int_D w_4(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)dx] - \phi_2[\int_D w_4(6.5746w_2 - 3.6364w_1)dx]$$
$$-\phi_1[\int_D w_4(5.4825w_1)dx]$$

$$= w_4 - \phi_3[(7.0373\int_e^f w_4w_3 dx - 5.2794\int_c^d w_4w_2 dx + 2.5186\int_a^b w_4w_1 dx] - \phi_2[6.5746\int_c^d w_4w_2 dx$$
$$-3.6364\int_a^b w_4w_1 dx] - \phi_1[5.4825\int_a^b w_4w_1 dx]$$

$$= w_4 - \phi_3[(7.0373(0.915) - 5.2794(0.1057) + 2.5186(0.0915)] - \phi_2[6.5746(0.1057)$$
$$-3.6364(0.0915)] - \phi_1[5.4825(0.09415)]$$

$$= w_4 - \phi_3 0.3163 - \phi_2 0.3622 - \phi_1 0.5016$$

$$= w_4 - (7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)0.3163 - (6.5746w_2 - 3.6364w_1)0.3622 - (5.4825w_1)0.5016$$

$$= w_4 - 2.2259w_3 - 0.7114w_2 - 2.2295w_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\|v_4\| = [\int_D v_4^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D (w_4 - 2.2259w_3 - 0.7114w_2 - 2.2295w_1)^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D (w_4^2 - 4.4518w_4w_3 - 1.4228w_4w_2 - 4.459w_4w_1 + 4.9546w_3^2 + 3.167w_3w_2$$

$$+9.9253w_3w_1 + 0.5061w_2^2 + 3.1721w_2w_1 + 4.9707w_1^2)dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_0^1 w_4^2 dx - 4.4518\int_e^f w_4w_3 dx - 1.4228\int_c^d w_4w_2 dx - 4.459\int_a^b w_4w_1 dx + 4.9546\int_e^f w_3^2 dx$$

$$+3.167\int_e^d w_3w_2 dx + 9.9253\int_e^b w_3w_1 dx + 0.5061\int_c^d w_2^2 dx + 3.1721\int_c^b w_2w_1 dx + 4.9707\int_a^b w_1^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [0.5 - 4.4518(0.0915) - 1.4228(0.1057) - 4.459(0.0915) + 4.9546(0.0333)$$

$$+3.167(0.0184) + 9.9253(0.0019) + 0.5061(0.0333) + 3.1721(0.0184) + 4.97070.0333]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.1309$$

$$\phi_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|}$$

$$= 7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1$$

$$v_5 = w_5 - \phi_4[\int_D w_5\phi_4 dx] - \phi_3[\int_D w_5\phi_3 dx] - \phi_2[\int_D w_5\phi_2 dx] - \phi_1[\int_D w_5\phi_1 dx$$

$$= w_5 - \phi_4[\int_D w_5(7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)dx]$$

$$-\phi_3[\int_D w_5(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)dx]$$

$$-\phi_2[\int_D w_5(6.5746w_2 - 3.636w_1)dx] - \phi_1[\int_D w_5(5.4825w_1)dx]$$

$$= w_5 - \phi_4[7.6394\int_0^1 w_5w_4 dx - 17.0046\int_e^f w_5w_3 dx - 5.4347\int_c^d w_5w_2 dx - 17.0321\int_a^b w_5w_1 dx]$$

$$-\phi_3[7.0373\int_e^f w_5w_3 dx - 5.2794\int_c^d w_5w_2 dx + 2.5186\int_a^b w_5w_1 dx]$$

$$-\phi_2[6.5746\int_c^d w_5w_2 dx - 3.636\int_a^b w_5w_1 dx] - \phi_1[(5.4825\int_a^b w_5w_1 dx]$$

$$= w_5 - \phi_4[7.6394(0) - 17.0046(-0.0768) - 5.4347(0) - 17.0321(0.0786)]$$

$$-\phi_3[7.0373(-0.0786) - 5.2794(0) + 2.5186(0.0786)]$$

$$-\phi_2[6.5746(0) - 3.636(0.0786)] - \phi_1[(5.4825(0.0786)]$$

$$= w_5 + 0.3552\phi_3 + 0.2858\phi_2 - 0.4309\phi_1$$

$$= w_5 + 0.3552(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1) + 0.2858(6.5746w_2 - 3.636w_1) - 0.4309(5.4825w_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= w_5 + 2.4996w_3 - 2.5071w_1$$

$$\|v_5\| = [\int_D v_5^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D (w_5 + 2.4996w_3 - 2.5071w_1)^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_D (w_5^2 + 4.9992w_5w_3 - 5.0142w_5w_1 + 6.248w_3^2 - 12.5335w_3w_1 + 6.2856w_1^2)dx]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [\int_0^1 w_5^2 dx + 4.9992\int_e^f w_5w_3dx - 5.0142\int_a^b w_5w_1dx + 6.248\int_e^f w_3^2dx - 12.5335\int_e^b w_3w_1dx + 6.2856\int_a^b w_1^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [0.5 + 4.9992(-0.0786) - 5.0142(0.0786) + 6.248(0.0333) - 12.5335(0.0019) + 6.2856(0.0333)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.3263$$

$$\phi_5 = \frac{v_5}{\|v_5\|}$$

$$= 3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1$$

ดังนั้นได้ค่าของ $\phi_i(x)$ เป็นดังนี้

$$\phi_1 = 5.4825w_1$$

$$\phi_2 = 6.5746w_2 - 3.636w_1$$

$$\phi_3 = 7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1$$

$$\phi_4 = 7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1$$

$$\phi_5 = 3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1$$

จาก

$$A = (a_{ki}), a_{ki} = (\phi_k, \Delta\phi_i - q\phi_i)$$

$$B = (b_{ki}), b_{ki} = (\phi_k, g_j)$$

$$C = (c_{ji}), c_{ji} = (\phi_i, w_j)$$

เราสามารถหาค่า A B C ที่ x = 0.5 ได้

$$A(1,1) = \int_D \phi_1(\Delta\phi_1 - q\phi_1)dx$$

$$= \int_D \phi_1\Delta\phi_1 dx - \int_D \phi_1 q\phi_1)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= 30.0578\int_a^b w_1 \Delta w_1)dx - 30.057\int_a^b q{w_1}^2)dx$$

$$= -46.1482$$

$$A(1,2) = \int_D \phi_1(\Delta\phi_2 - q\phi_2)dx$$

$$= \int_D \phi_1\Delta\phi_2 - \int_D \phi_1 q\phi_2)dx$$

$$= \int_D 5.4825w_1(6.5746\Delta w_2 - 3.6364\Delta w_1)dx - \int_D 5.4825w_1(6.5746w_2 - 3.6364w_1)q$$

$$= 36.0452\int_c^b w_1\Delta w_2 dx - 19.9366\int_a^b w_1\Delta w_1 dx - 36.0452\int_c^b w_1 w_2 q dx + 19.9366\int_a^b {w_1}^2 q dx$$

$$= 33.8215$$

$$A(1,3) = \int_D \phi_1(\Delta\phi_3 - q\phi_3)dx$$

$$= \int_D \phi_1\Delta\phi_3 dx - \int_D \phi_1 q\phi_3 dx$$

$$= \int_D 5.4825w_1(7.0373\Delta w_3 - 5.2794\Delta w_2 + 2.5186\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D 5.4825w_1 q(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)dx$$

$$= 4.6178$$

$$A(1,4) = \int_D \phi_1(\Delta\phi_4 - q\phi_4)dx$$

$$= \int_D \phi_1\Delta\phi_4 dx - \int_D \phi_1 q\phi_4 dx$$

$$= \int_D 5.4825w_1(7.6394\Delta w_4 - 17.0046\Delta w_3 - 5.4347\Delta w_2 - 17.0321\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D 5.4825w_1 q(7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)dx$$

$$= 46.4980$$

$$A(1,5) = \int_D \phi_1(\Delta\phi_5 - q\phi_5)dx$$

$$= \int_D \phi_1\Delta\phi_5 dx - \int_D \phi_1 q\phi_5 dx$$

$$= \int_D 5.4825w_1(3.0647\Delta w_5 + 7.6604\Delta w_3 - 7.6834\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D 5.4825w_1 q(3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)dx$$

$$= 47.3896$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(2,1) = \int_D \phi_2(\Delta\phi_1 - q\phi_1)dx$$

$$= \int_D \phi_2\Delta\phi_1 dx - \int_D \phi_2 q\phi_1)dx$$

$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(5.4825\Delta w_1)dx - \int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(5.4825qw_1)dx$$

$$= 33.8215$$

$$A(2,2) = \int_D \phi_2(\Delta\phi_2 - q\phi_2)dx$$

$$= \int_D \phi_2\Delta\phi_2 - \int_D \phi_2 q\phi_2)dx$$

$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(6.5746\Delta w_2 - 3.6364\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(6.5746w_2 - 3.6364w_1)qdx$$

$$= -90.0513$$

$$A(2,3) = \int_D \phi_2(\Delta\phi_3 - q\phi_3)dx$$

$$= \int_D \phi_2\Delta\phi_3 dx - \int_D \phi_2 q\phi_3 dx$$

$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(7.0373\Delta w_3 - 5.2794\Delta w_2 + 2.5186\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)q(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)dx$$

$$= 55.6618$$

$$A(2,4) = \int_D \phi_2(\Delta\phi_4 - q\phi_4)dx$$

$$= \int_D \phi_2\Delta\phi_4 dx - \int_D \phi_2 q\phi_4 dx$$

$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)(7.6394\Delta w_4 - 17.0046\Delta w_3 - 5.4347\Delta w_2 - 17.0321\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (6.5746w_2 - 3.636w_1)q(7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)dx$$

$$= -30.8417$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(2,5)=\int_D \phi_2(\Delta\phi_5-q\phi_5)dx$$

$$=\int_D \phi_2\Delta\phi_5 dx-\int_D \phi_2 q\phi_5 dx$$

$$=\int_D (6.5746w_2-3.636w_1)(3.0647\Delta w_5+7.6604\Delta w_3-7.6834\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (6.5746w_2-3.636w_1)q(3.0647w_5+7.6604w_3-7.6834w_1)dx$$

$$=-31.3435$$

$$A(3,1)=\int_D \phi_3(\Delta\phi_1-q\phi_1)dx$$

$$=\int_D \phi_3\Delta\phi_1 dx-\int_D \phi_3 q\phi_1)dx$$

$$=\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(5.4825\Delta w_1)dx$$

$$-\int_a^b (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(5.4825qw_1)dx$$

$$=4.6184$$

$$A(3,2)=\int_D \phi_3(\Delta\phi_2-q\phi_2)dx$$

$$=\int_D \phi_3\Delta\phi_2-\int_D \phi_3 q\phi_2)dx$$

$$=\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(6.5746\Delta w_2-3.6364\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(6.5746w_2-3.6364w_1)qdx$$

$$=64.8607$$

$$A(3,3)=\int_D \phi_3(\Delta\phi_3-q\phi_3)dx$$

$$=\int_D \phi_3\Delta\phi_3 dx-\int_D \phi_3 q\phi_3 dx$$

$$=\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(7.0373\Delta w_3-5.2794\Delta w_2+2.5186\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)q(7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)dx$$

$$=-110.7999$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(3,4)=\int_D \phi_3(\Delta\phi_4-q\phi_4)dx$$

$$=\int_D \phi_3\Delta\phi_4 dx-\int_D \phi_3 q\phi_4 dx$$

$$=\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)(7.6394\Delta w_4-17.0046\Delta w_3-5.4347\Delta w_2-17.0321\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (7.0373w_3-5.2794w_2+2.5186w_1)q(7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)dx$$

$$=80.3947$$

$$A(3,5)=\int_D \phi_3(\Delta\phi_5-q\phi_5)dx$$

$$=\int_D \phi_3\Delta\phi_5 dx-\int_D \phi_3 q\phi_5 dx$$

$$=\int_D (6.5746w_2-3.636w_1)(3.0647\Delta w_5+7.6604\Delta w_3-7.6834\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (6.5746w_2-3.636w_1)q(3.0647w_5+7.6604w_3-7.6834w_1)dx$$

$$=-31.3435$$

$$A(4,1)=\int_D \phi_4(\Delta\phi_1-q\phi_1)dx$$

$$=\int_D \phi_4\Delta\phi_1 dx-\int_D \phi_4 q\phi_1)dx$$

$$=\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(5.4825\Delta w_1)dx$$

$$-\int_a^b (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(5.4825qw_1)dx$$

$$=46.2983$$

$$A(4,2)=\int_D \phi_4(\Delta\phi_2-q\phi_2)dx$$

$$=\int_D \phi_4\Delta\phi_2-\int_D \phi_4 q\phi_2)dx$$

$$=\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(6.5746\Delta w_2-3.6364\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(6.5746w_2-3.6364w_1)qdx$$

$$=-76.2016$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$A(4,3)=\int_D \phi_4(\Delta\phi_3-q\phi_3)dx$$
$$=\int_D \phi_4\Delta\phi_3 dx-\int_D \phi_4 q\phi_3 dx$$
$$=\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(7.0373\Delta w_3-5.2794\Delta w_2$$

$$+2.5186\Delta w_1)dx-\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)q(7.0373w_3$$
$$-5.2794w_2+2.5186w_1)dx$$
$$=-51.3161$$

$$A(4,4)=\int_D \phi_4(\Delta\phi_4-q\phi_4)dx$$
$$=\int_D \phi_4\Delta\phi_4 dx-\int_D \phi_4 q\phi_4 dx$$
$$=\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(7.6394\Delta w_4-17.0046\Delta w_3$$
$$-5.4347\Delta w_2-17.0321\Delta w_1)dx-\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)q(7.6394w_4$$
$$-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)dx$$
$$=-293.0353$$

$$A(4,5)=\int_D \phi_4(\Delta\phi_5-q\phi_5)dx$$
$$=\int_D \phi_4\Delta\phi_5 dx-\int_D \phi_4 q\phi_5 dx$$
$$=\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)(3.0647\Delta w_5+7.6604\Delta w_3$$
$$-7.6834\Delta w_1)dx-\int_D (7.6394w_4-17.0046w_3-5.4347w_2-17.0321w_1)q(3.0647w_5$$
$$+7.6604w_3-7.6834w_1)dx$$
$$=-0.2130$$

$$A(5,1)=\int_D \phi_5(\Delta\phi_1-q\phi_1)dx$$
$$=\int_D \phi_5\Delta\phi_1 dx-\int_D \phi_5 q\phi_1)dx$$
$$=\int_D (3.0647w_5+7.6604w_3-7.6834w_1)(5.4825\Delta w_1)dx$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)(5.4825qw_1)dx$$

$$= 47.3895$$

$$A(5,2) = \int_D \phi_5(\Delta\phi_2 - q\phi_2)dx$$

$$= \int_D \phi_5\Delta\phi_2 - \int_D \phi_5 q\phi_2)dx$$

$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)(6.5746\Delta w_2 - 3.6364\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)(6.5746w_2 - 3.6364w_1)qdx$$

$$= 25.3636$$

$$A(5,3) = \int_D \phi_5(\Delta\phi_3 - q\phi_3)dx$$

$$= \int_D \phi_5\Delta\phi_3 dx - \int_D \phi_5 q\phi_3 dx$$

$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)(7.0373\Delta w_3 - 5.2794\Delta w_2 + 2.5186\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)q(7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)dx$$

$$= -40.0708$$

$$A(5,4) = \int_D \phi_5(\Delta\phi_4 - q\phi_4)dx$$

$$= \int_D \phi_5\Delta\phi_4 dx - \int_D \phi_5 q\phi_4 dx$$

$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)(7.6394\Delta w_4 - 17.0046\Delta w_3 - 5.4347\Delta w_2 - 17.0321\Delta w_1)dx$$

$$-\int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)q(7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)dx$$

$$= 195.8940$$

$$A(5,5) = \int_D \phi_5(\Delta\phi_5 - q\phi_5)dx$$

$$= \int_D \phi_5\Delta\phi_5 dx - \int_D \phi_5 q\phi_5 dx$$

$$= \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)(3.0647\Delta w_5 + 7.6604\Delta w_3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-7.6834\Delta w_1)dx - \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)q(3.0647w_5$$

$$+7.6604w_3 - 7.6834w_1)dx$$

$$= -168.9478$$

$$B(1,1) = \int_D \phi_1 g dx$$

$$= \int_a^b 5.4825 w_1 g dx$$

$$= 5.4825 \int_a^b w_1 g dx$$

$$= 0.5169$$

$$B(2,1) = \int_D \phi_2 g dx$$

$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.6364w_1) g dx$$

$$= 6.5746 \int_c^d w_2 g dx - 3.6364 \int_a^b w_1 g dx$$

$$= 0.3581$$

$$B(3,1) = \int_D \phi_3 g dx$$

$$= \int_D (7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1) g dx$$

$$= 7.0373 \int_e^f w_3 g dx - 5.2794 \int_c^d w_2 g dx + 2.5186 \int_a^b w_1 g dx$$

$$= 0.3381$$

$$B(4,1) = \int_D \phi_4 g dx$$

$$= \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1) g dx$$

$$= 7.6394 \int_0^1 w_4 g dx - 17.0046 \int_e^f w_3 g dx - 5.4347 \int_c^d w_2 g dx - 17.0321 \int_a^b w_1 g dx$$

$$= 0.1538$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B(5,1) = \int_D \phi_5 g dx$$
$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1) g dx$$
$$= 3.0647\int_0^1 w_5 g dx + 7.6604\int_e^f w_3 g dx - 7.6834\int_a^b w_1 g dx$$
$$= -0.0022$$

$$C(1,1) = \int_D (\phi_1 \times w_1) dx$$
$$= \int_a^b (5.4825w_1) w_1 dx$$
$$= 5.4825\int_a^b w_1^2 dx$$
$$= 0.1824$$

$$C(1,2) = \int_D (\phi_2 \times w_1) dx$$
$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.6364w_1) w_1 dx$$
$$= 6.5746\int_c^b w_1 w_2 dx - 3.6364\int_a^b w_1^2 dx$$
$$= 0.0001$$

$$C(1,3) = \int_D (\phi_3 \times w_1) dx$$
$$= \int_D (7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1) w_1 dx$$
$$= 7.0373\int_e^b w_3 w_1 dx - 5.2794\int_c^b w_1 w_2 dx + 2.5186\int_a^b w_1^2 dx$$
$$= 0.0002$$

$$C(1,4) = \int_D (\phi_4 \times w_1) dx$$
$$= \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1) w_1 dx$$
$$= 7.6394\int_a^b w_4 w_1 dx - 17.0046\int_e^b w_3 w_1 dx - 5.4347\int_c^b w_1 w_2 dx - 17.0321\int_a^b w_1^2 dx$$
$$= -0.0007$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(1,5) = \int_D (\phi_5 \times w_1)dx$$
$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)w_1 dx$$
$$= 3.0647\int_a^b w_5 w_1 dx + 7.66.4\int_e^b w_3 w_1 dx - 7.6834\int_a^b w_1^2 dx$$
$$= 0.0002$$

$$C(2,1) = \int_D (\phi_1 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (5.4825w_1)w_2 dx$$
$$= 5.4825\int_c^b w_1 w_2 dx$$
$$= 0.1010$$

$$C(2,2) = \int_D (\phi_2 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.6364w_1)w_2 dx$$
$$= 6.5746\int_c^d w_2^2 dx - 3.6364\int_c^b w_1 w_2 dx$$
$$= 0.1518$$

$$C(2,3) = \int_D (\phi_3 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)w_2 dx$$
$$= 7.0373\int_e^d w_3 w_2 dx - 5.2794\int_c^d w_2^2 dx + 2.5186\int_c^b w_1 w_2 dx$$
$$= 0.0004$$

$$C(2,4) = \int_D (\phi_4 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)w_2 dx$$
$$= 7.6394\int_c^d w_4 w_2 dx - 17.0046\int_e^d w_3 w_2 dx - 5.4347\int_c^d w_2^2 dx - 17.0321\int_c^b w_1 w_2 dx$$
$$= -0.0005$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(2,5) = \int_D (\phi_5 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)w_2 dx$$
$$= 3.0647\int_c^d w_5 w_2 dx + 7.66.4\int_e^d w_3 w_2 dx - 7.6834\int_c^b w_1 w_2 dx$$
$$= -0.0004$$

$$C(3,1) = \int_D (\phi_1 \times w_3)dx$$
$$= \int_D (5.4825w_1)w_3 dx$$
$$= 5.4825\int_e^b w_1 w_2 dx$$
$$= 0.0107$$

$$C(3,2) = \int_D (\phi_3 \times w_2)dx$$
$$= \int_D (6.5746w_2 - 3.6364w_1)w_3 dx$$
$$= 6.5746\int_e^d w_2 w_3 dx - 3.6364\int_e^b w_1 w_3 dx$$
$$= 0.1140$$

$$C(3,3) = \int_D (\phi_3 \times w_3)dx$$
$$= \int_D (7.0373w_3 - 5.2794w_2 + 2.5186w_1)w_3 dx$$
$$= 7.0373\int_e^f w_3^2 dx - 5.2794\int_e^d w_2 w_3 dx + 2.5186\int_e^b w_1 w_3 dx$$
$$= 0.1418$$

$$C(3,4) = \int_D (\phi_4 \times w_3)dx$$
$$= \int_D (7.6394w_4 - 17.0046w_3 - 5.4347w_2 - 17.0321w_1)w_3 dx$$
$$= 7.6394\int_e^f w_4 w_2 dx - 17.0046\int_e^f w_3 w_2 dx - 5.4347\int_e^d w_2^2 dx - 17.0321\int_e^b w_1 w_2 dx$$
$$= 0.0001$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(3,5) = \int_D (\phi_5 \times w_3)dx$$
$$= \int_D (3.0647w_5 + 7.6604w_3 - 7.6834w_1)w_3 dx$$
$$= 3.0647\int_e^f w_5 w_3 dx + 7.66.4\int_e^f w_3^2 dx - 7.6834\int_e^b w_1 w_3 dx$$
$$= -0.0010$$

ดังนั้นสามารถเขียน A,B,C ในรูปเมตริกได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix} -46.1482 & 33.8215 & 4.6178 & 46.2980 & 47.3896 \\ 33.8215 & -90.0513 & 55.6618 & -30.8417 & -31.3435 \\ 4.6184 & 64.8607 & -110.7999 & 80.3947 & -39.1534 \\ 46.2983 & -76.2016 & -51.3161 & -293.0350 & -0.2130 \\ 47.3895 & 25.3636 & 195.8940 & 195.894 & -168.9478 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5169 \\ 0.3581 \\ 0.3381 \\ 0.1538 \\ -0.0022 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1824 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0007 & 0.0002 \\ 0.1010 & 0.1508 & 0.0004 & -0.0005 & -0.0004 \\ 0.0107 & 0.1140 & 0.1418 & 0.0001 & -0.0010 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการในรูปของ

$$\dot{x} = Ax + Bf, x(0) = x_0$$

เมื่อได้สมการสภาวะแล้วจึงนำค่าที่ได้ไปสร้างตัวสังเกตสภาวะชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วน (Reduce Order Observer) ได้เมื่อค่าโพลเป็น -20,-30 ตามขั้นตอนดังนี้

1. สร้างเมตริก T จาก

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C^{\#} \\ C \end{bmatrix}$$

กำหนดเมตริกซ์ $C^{\#}$ เป็น

$$C^{\#} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.1824 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0007 & 0.0002 \\ 0.1010 & 0.1518 & 0.0004 & -0.0005 & -0.0004 \\ 0.0107 & 0.1140 & 0.1418 & 0.0001 & -0.0010 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมตริกซ์ T จึงมีค่าเป็น

$$T=\begin{bmatrix} 0.0040 & -0.0012 & 5.5056 & -0.0306 & -0.0004 \\ 0.0009 & 0.0036 & -3.6798 & 6.6146 & -0.0371 \\ -0.0020 & 0.0044 & 2.4845 & -5.2736 & 7.0320 \\ 0.9991 & -0.0036 & 3.6798 & -6.6146 & 0.0371 \\ -0.0020 & 0.9968 & -7.9901 & 5.3042 & -7.0317 \end{bmatrix}$$

2. แปลงระบบให้เป็นระบบเสมือนโดยทำการหาค่า

$$\bar{A}=T^{-1}AT$$

$$=\begin{bmatrix} -0.3234 & -0.0310 & 0.1240 & 0.8499 & 0.2466 \\ 0.3230 & -0.1616 & 1.6836 & -1.3946 & 0.1090 \\ 0.0087 & 0.0086 & -0.1039 & 0.0249 & -0.0543 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0617 & -0.1147 & 0.0625 \\ 0.0082 & -0.0085 & 0.0990 & -0.05448 & -0.0055 \end{bmatrix}\times 10^{3}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5119 \\ 0.8528 \\ 0.0943 \\ 0.1066 \\ 0.0943 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. กำหนดตัวแปลง $\bar{U}$ เมื่อ $\bar{U}=\begin{bmatrix} I_{n-p} & -L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{2x2} & -L \end{bmatrix}$ ได้

$$\bar{U}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_{11} & -l_{12} & -l_{13} \\ 0 & 1 & -l_{21} & -l_{22} & -l_{23} \end{bmatrix}$$

4. หาค่าของระบบเสมือนของตัวสังเกตสภาวะ ได้

$$\hat{\bar{A}}=\bar{A}_{11}-L\bar{A}_{21}$$

$$\hat{\bar{B}}=\bar{A}_{11}L-L\bar{A}_{21}+\bar{A}_{12}-L\bar{A}_{22}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{C}} & \hat{\bar{D}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n-p} & L\\ 0 & I_p\end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}}=\bar{B}_1-L\bar{B}_2$$

เมื่อค่า

$$\bar{A}_{11}=\begin{bmatrix}-323.3651 & -30.9704\\ 323.0461 & -161.5520\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{12}=\begin{bmatrix}124.0252 & 849.8743 & 246.5736\\ 1683.5801 & -1394.6281 & 108.9855\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21}=\begin{bmatrix}8.6597 & 8.5726\\ 0.0754 & 0.0885\\ 8.1778 & -8.4976\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22}=\begin{bmatrix}-103.8753 & 24.9418 & -54.3474\\ 61.7059 & -114.6728 & 62.4678\\ 99.0345 & -54.7630 & -5.5172\end{bmatrix}$$

ทำการแก้สมการได้ค่า L เป็น

$$L=\begin{bmatrix}-19.7029 & 0 & -16.2322\\ 11.6173 & 0 & 27.2009\end{bmatrix}$$

5. ได้ค่าสภาวะของระบบเสมือนของตัวสังเกตสภาวะเป็นดังนี้

$$\hat{\bar{A}}=\begin{bmatrix}-20 & 0\\ 0 & -30\end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{B}}=\begin{bmatrix}78.9620 & 452.3763 & -589.1776\\ -151.9955 & -194.7807 & 74.4406\end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{C}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\hat{\bar{D}}=\begin{bmatrix}-19.7029 & 0 & -16.2322\\ 11.6173 & 0 & 27.2009\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{J}}=\begin{bmatrix}3.9006\\ -2.8079\end{bmatrix},\bar{U}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 19.7129 & 0 & 16.2322\\ 0 & 1 & -11.6173 & 0 & -27.2009\end{bmatrix}$$

6. จากสมการการแปลงตัวสังเกตสภาวะจริง

$$\dot{z}(t)=\hat{\bar{A}}z(t)+\hat{\bar{B}}z(t)+\hat{\bar{J}}u(t)$$

ได้ว่า

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-20 & 0\\ 0 & -30\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}78.9620 & 452.3763 & -589.1776\\ -151.9955 & -194.7807 & 74.4406\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}3.9006\\ -2.8079\end{bmatrix}u(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. จากสมการการตรวจวัดของระบบซึ่งยังไม่ทราบค่า

$$\hat{x}(t) = \hat{\bar{C}}z(t) + \hat{\bar{D}}y(t)$$

ได้ว่า

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -19.7029 & 0 & -16.2322 \\ 11.6173 & 0 & 27.2009 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y(t)$$

8. เราจึงสามารถหาค่าของ $\hat{p}(t)$ จากสมการ

$$\hat{p}_i''(t) = \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_i(t)(\phi_j(x), \rho_i(x)), i = 1,..,l$$

เมื่อค่าของ $\rho_i(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ จึงสามารถวาดรูปแสดงการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{p}(t)$ ได้ดังรูป

รูปที่ 3.4 แสดงค่าของ $\hat{p}(t)$ เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง

3.2.3ทดลองหาผลเฉลยโดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนท์(Finite Difference Method)

เพื่อนำค่าที่ได้มาทำการเปรียบเทียบกับวิธีก่อนหน้านี้โดยทำดังนี้

จาก $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2x^2 - 4x - 2\right)u + \left(4x - 4x^2\right)f(t)$, $0 < x < 1, t > 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยมี initial condition เป็น $u(x,0)=0 \quad , 0<x<1$

และมี boundary condition เป็น $u(0,t)=u(1,t)=0 \quad , t>0$

ทำการจัดรูปสมการเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(2+4x-2x^2\right)u=\left(4x-4x^2\right)f(t)$$

โดยจากระเบียบวิธีของ Finite Difference Method

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} \text{ โดย } t=n\Delta t$$

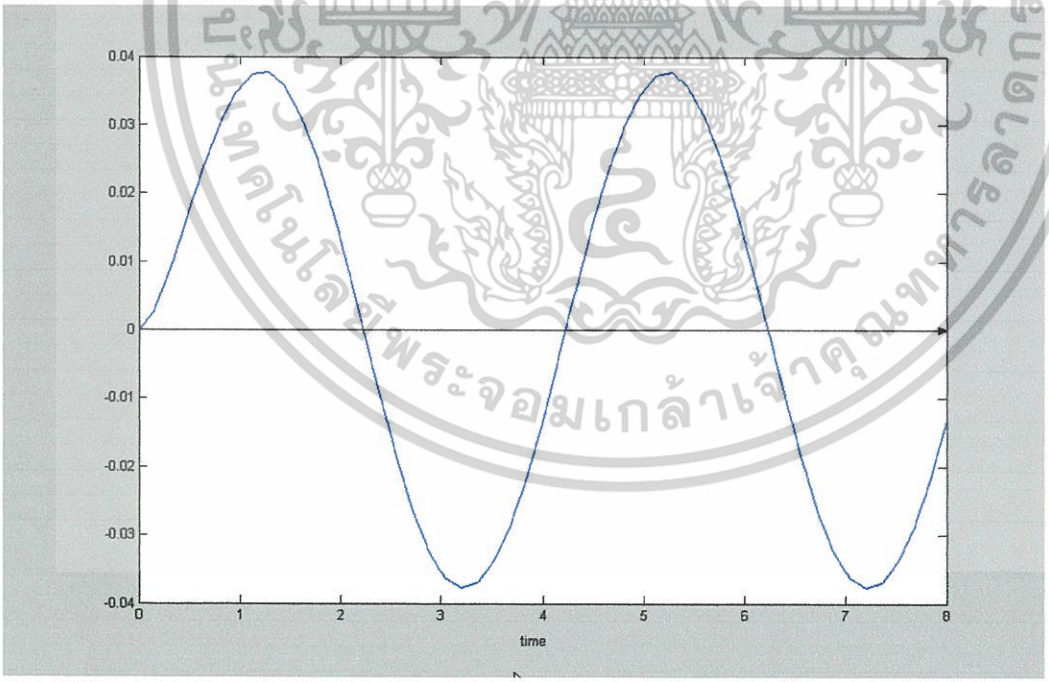
และ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \text{ โดย } x=i\Delta x$$

แทนค่าลงในสมการที่โจทย์กำหนดจะได้

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}-\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}+\left(2+4x-2x^2\right)u_i^n=\left(4x-4x^2\right)f(t)$$

$$\therefore u_i^{n+1}=u_i^n+\left(\frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}-\left(2+4x-2x^2\right)u_i^n+\left(4x-4x^2\right)f(t)\right)\Delta t$$

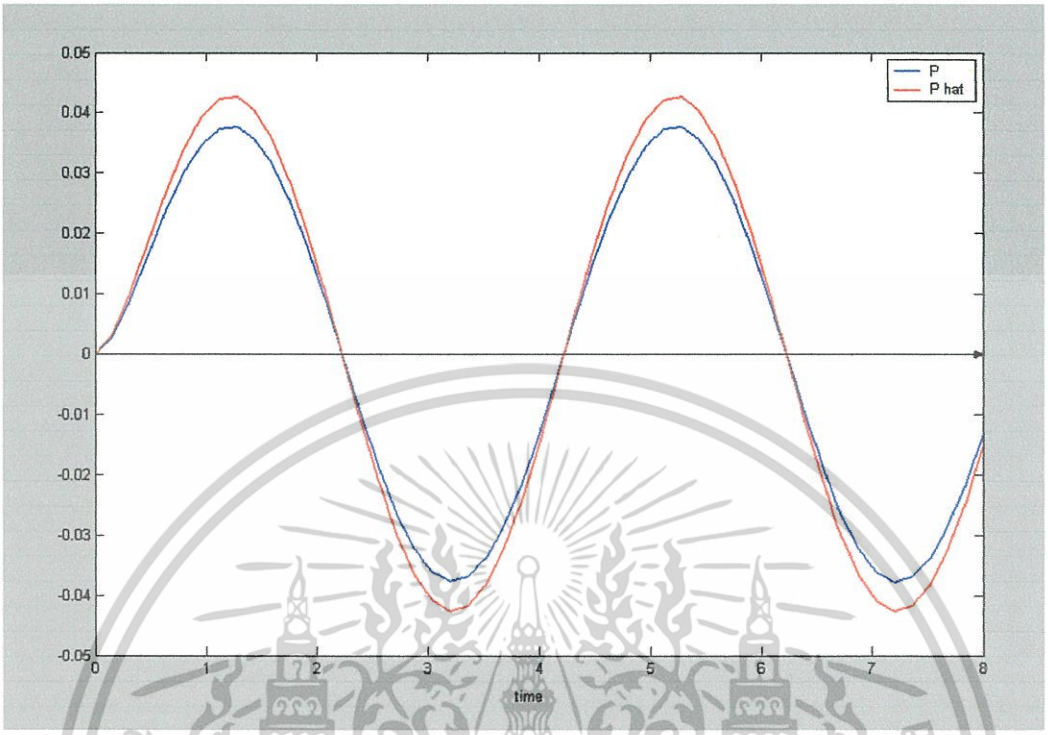
หาค่า $u(x,t)$ โดยทำการเขียนโปรแกรมแล้วทำการหาค่า $p(t)$ จากสมการ $p_i^n(t)=(u(x,t),\rho(x))$ แล้วนำมาพลอตกราฟ $p(t)$ ออกมาได้ดังรูป(โปรแกรมดูได้ที่ภาคผนวก)



รูปที่ 3.5 แสดงค่าของ $p(t)$ เมื่อเทียบกับเวลา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกราฟ $p(t)$ และ $\hat{p}(t)$ ทั้ง 2 รูปนำมาวาดเปรียบเทียบกันใหม่ได้เป็น



รูปที่ 3.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าของ $p(t)$ และ $\hat{p}(t)$ เมื่อเทียบกับเวลา

จะเห็นได้ว่ากราฟที่ได้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันแต่ค่าไม่เท่ากัน ทั้งนี้เกิดมาจากการที่กราฟทั้ง 2 รูปนี้ได้มาจากการประมาณค่าทั้งคู่จึงเป็นไปไม่ได้เลยที่กราฟจะมีค่าเท่ากัน แต่เมื่อพิจาณาถึงค่าความผิดพลาด $\left|\frac{p-\hat{p}}{p}\right| = \left|\frac{0.038-0.043}{0.038}\right| = 0.1316$ จะเห็นว่าเกิดขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้นเราจึงสามารถสรุปได้ว่าน่าจะสามารถสร้างตัวสังเกตสภาวะของระบบขึ้นมาจากการประมาณค่าที่ได้ทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
บทวิจารณ์และสรุป

4.1 สรุป

จากการศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบตัวสังเกตสภาวะ ได้พบข้อสังเกตหลายอย่างเกี่ยวกับตัวสังเกตสภาวะ ซึ่งสามารถกล่าวโดยสรุปว่า

1. ค่าสภาวะของระบบจะถูกสังเกตได้ก็ต้องนำข้อมูลของ อินพุท และ เอาท์พุท มาทำการสร้างสภาวะใหม่ โดยมาจากการสังเกตค่าสภาวะจริง

2. การสังเกตสภาวะใดๆก็ตาม จะเกิดปัญหาข้อมูลของสภาวะแรกเริ่มของข้อมูลเสมอ เราจึงต้องทำการกำหนดค่าเริ่มแรกให้แก่ระบบก่อน แต่ค่าเริ่มแรกของตัวสังเกตสภาวะนั้นเราจะสามารถกำหนดให้มีค่าเท่าไหร่ก็ได้ เพื่อให้ใกล้เคียงกับค่าแรกเริ่มของระบบจริง

3. ค่าของตัวสังเกตสภาวะของระบบนั้นจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าสภาวะจริงของระบบจนสามารถเปรียบได้ว่าเป็นค่าเดียวกันเมื่อเวลามากขึ้น (เมื่อระบบเข้าสู่สภาวะคงที่) เราจึงสามารถใช้ตัวสังเกตสภาวะของระบบในการป้อนกลับค่าสภาวะต่อไป

4. การที่จะใช้ตัวสังเกตสภาวะชนิดที่รู้ค่าสภาวะทั้งหมดนั้น เมื่อสภาวะจริงๆของระบบนั้นยังไม่ได้ถูกตรวจวัดค่าหรือไม่ได้ถูกพิจารณามาก่อน ดังนั้นจึงใช้ตัวสังเกตสภาวะชนิดรู้ค่าทั้งหมดมาทำการตรวจวัดระบบ ดังกล่าว

5. การที่ระบบสามารถตรวจวัดค่าได้เพียงบางสภาวะ เมื่อต้องการตรวจวัดค่าสภาวะที่เหลือก็ใช้ตัวสังเกตชนิดรู้ค่าบางส่วน

6. เมื่อทำการสังเกตค่าสภาวะชนิดรู้ค่าสภาวะบางส่วนได้แล้ว จากนั้นนำตัวสังเกตค่าสภาวะตัวนี้มาใช้ป้อนกลับค่าสภาวะ จะได้ผลตอบสนองเชิงเวลาเหมือนกับการควบคุมโดยใช้เรคกูเลเตอร์

7. ระบบควบคุมใดๆก็ตามหากสามารถควบคุมและสังเกตได้ ระบบดังกล่าวนั้นสามารถแยกส่วนการควบคุมได้โดยการกำหนดค่าโพลทั้งการควบคุม และการสังเกต โดยที่การกระทำทั้งสองอย่างนี้จะมีเสถียรภาพเสมอ

4.2 วิจารณ์

ในการคำนวณในเรื่องการศึกษาการกระจายค่าของความร้อนนั้นจะเป็นการประมาณค่าทั้งหมดดังนั้นจึงได้ใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนในการหาค่าซึ่งก็เป็นการประมาณค่าตัวแปรมาเช่นกัน ดังนั้นค่าที่ได้จึงเป็นค่าที่ประมาณมาไม่ใช่ค่าที่แท้จริง แต่เมื่อได้นำมาลองทำการเปรียบเทียบกันดู

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แล้วพบว่าค่าที่ได้มาจากการวาดกราฟค่า $p(t)$ และ $\hat{p}(t)$ มีค่าไปในแนวทางเดียวกันและเมื่อพิจาณาถึงค่าความผิดพลาด $\left|\frac{p-\hat{p}}{p}\right| = \left|\frac{0.038-0.043}{0.038}\right| = 0.1316$ จะเห็นว่าเกิดขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้นจึงจะสรุปว่าการสร้างตัวสังเกตค่าสภาวะของระบบโดยการประมาณค่าโดยวิธีของกาเลอคินที่เกี่ยวข้องกับค่า Complete Sequence นั้นสามารถนำมาใช้ในการสร้างตัวสังเกตค่าสภาวะของระบบได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

การโปรแกรมโดย MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาค่าและวาดกราฟในการแก้ปัญหา

1. โปรแกรมที่ใช้ในการทดลองศึกษาการควบคุมป้อนกลับโดยใช้ออบเซอร์เวอร์

```
clear all
A = [-5 1 0 ; 2 -3 1 ; 0 1 -2];
B = [2 0 0 ]';
C = [0 0 1];
X0 = [1 0 0]';
Z0 = [0 0]';
XZ0 = [1 0 0 0 0]';

Cs = [1 1 1 ; 1 0 1];

Tinv = [1 1 1 ; 1 0 1 ; 0 0 1];
T = inv(Tinv);
DetT = det(T);

Ab = Tinv*A*T;
Bb = Tinv*B;
Cb = C*T;
Ab11 = [Ab(1,1) Ab(1,2) ; Ab(2,1) Ab(2,2)];
Ab21 = [Ab(3,1) Ab(3,2)];
Ab12 = [Ab(1,3) ; Ab(2,3)];
Ab22 = [Ab(3,3)];
Bb1 = [Bb(1) ; Bb(2)];
Bb2 = [Bb(3)];

L = [12 ; 5];
Abh = [-13 10 ; -3 -2]
Bbh = Ab11*L - L*Ab21*L + Ab12 - L*Ab22
Cbh = [1 0 ; 0 1 ; 0 0 ]
Dbh = [12 ; 5 ; 1]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
Jbh = Bb1 - L*Bb2


Ah = Abh;
Bh = Bbh;
Ch = T*Cbh;
Dh = T*Dbh;
Jh = Jbh;


%  [Xdot Zdot]' = [-5 1 0 0 0 0 ; 2 -3 1 0 0 ; 0 1 -2 0 0 ; 0 0 -80 -13 10 ; 0 0 -33 -3 -2]*[X Z]' + [2
0 0 2 2]'*u
%  from State feedback
%  Characteristic Equation of Feedback is " det(SI - A - BF) * det(SI - Ah) = 0 "
%  det(SI - Ah = ? We don't care.
%  So If F = [f1 f2 f3]
%  A + BF = [(2f1 - 5) (2f2 +1) 2f3 ; 2 -3 1 ; 0 1 -2 ]
%  So det(SI - A - BF) = s^3 + (-2f1 + 10)s^2 + (-10f1 - 4f2 + 28)s + (f1 - 8f2 - 4f3 + 21) = 0
%  And the desired poles are (s + 5 + j)(s + 5 - j)(s + 6) = 0
%  That is s^3 + 16s^2 + 86s + 156 = 0
%  So -2f1 + 10 = 16          ==>    f1 = -3
%     -10f1 - 4f2 + 28 = 86    ==>    f2 = -7
%     f1 - 8f2 - 4f3 + 21 = 156  ==>    f3 = -20.5


F = [-3 -7 -20.5];


%  [Xdot Zdot]' = [(A + BFDhC) BFCh ; (BhC + JhFDhC) (Ah + JhFCh)]*[X Z]


XdotZdot11 = (A + B*F*Dh*C);
XdotZdot12 = B*F*Ch;
XdotZdot21 = (Bh*C + Jh*F*Dh*C);
XdotZdot22 = (Ah + Jh*F*Ch);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
XdotZdot = [XdotZdot11(1,1) XdotZdot11(1,2) XdotZdot11(1,3) XdotZdot12(1,1)
XdotZdot12(1,2) ; XdotZdot11(2,1) XdotZdot11(2,2) XdotZdot11(2,3) XdotZdot12(2,1)
XdotZdot12(2,2) ; XdotZdot11(3,1) XdotZdot11(3,2) XdotZdot11(3,3) XdotZdot12(3,1)
XdotZdot12(3,2); XdotZdot21(1,1) XdotZdot21(1,2) XdotZdot21(1,3) XdotZdot22(1,1)
XdotZdot22(1,2) ; XdotZdot21(2,1) XdotZdot21(2,2) XdotZdot21(2,3) XdotZdot22(2,1)
XdotZdot22(2,2)]
% Solve for X and Z from This Equation using initial condition " X0 = [1 0 0] and Z0 = [0 0] "
s = sym('s');

eAt = vpa(simple(ilaplace((s*eye(5) - XdotZdot)^-1)));
eAtXZ0 = eAt*XZ0;

for T = 1 : 2501
   t = (T-1)/1000;
   X1(T) = eval(eAtXZ0(1));
   X2(T) = eval(eAtXZ0(2));
   X3(T) = eval(eAtXZ0(3));
   Y(T) = C*[X1(T) X2(T) X3(T)]';
   Z1(T) = eval(eAtXZ0(4));
   Z2(T) = eval(eAtXZ0(5));
   Xh1(T) = Ch(1,1)*Z1(T) + Ch(1,2)*Z2(T) + Dh(1)*Y(T);
   Xh2(T) = Ch(2,1)*Z1(T) + Ch(2,2)*Z2(T) + Dh(2)*Y(T);
   Xh3(T) = Ch(3,1)*Z1(T) + Ch(3,2)*Z2(T) + Dh(3)*Y(T);
end
t = 0 : 0.001 : 2.5;
figure
plot(t,X1,'g',t,Xh1,'g',t,X2,'b',t,Xh2,'b',t,X3,'r',t,Xh3,'r')
legend('From x1','From x1 hat','From x2','From x2 hat','From x3');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าต่างๆระบบการกระจายอุณหภูมิบนแท่งตัวนำโดยการใช้ตัวสังเกตสภาวะของระบบ

```
clear all
xp = 0.7;
x = sym('x');

%-----------------------------------------------------------------%
a = 1/12 + 0.0000001/12;
b = 7/12 - 0.0000001/12;
c = 3/12 + 0.0000001/12;
d = 9/12 - 0.0000001/12;
e = 5/12 + 0.0000001/12;
f =  11/12 - 0.0000001/12;

nw1 = ['exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2)))'];
nw2 = ['exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2)))'];
nw3 = ['exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2)))'];
nw4 = ['sin(pi*x)'];
nw5 = ['sin(2*pi*x)'];

x = sym('x');
n1 = quad('(exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2)))).^2',a,b);
n2 = quad('(exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2)))).^2',c,d);
n3 = quad('(exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2)))).^2',e,f);
n4 = quad('(sin(pi*x)).^2',0,1);
n5 = quad('(sin(2*pi*x)).^2',0,1);
n12 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2))).*exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2)))',c,b);
n13 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2))).*exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2)))',e,b);
n14 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2))).*sin(pi*x)',a,b);
n15 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/3).^2))).*sin(2*pi*x)',a,b);
n23 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2))).*exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2)))',e,d);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
n24 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2))).*sin(pi*x)',c,d);
n25 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 1/2).^2))).*sin(2*pi*x)',c,d);
n34 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2))).*sin(pi*x)',e,f);
n35 = quad('exp(-1./(1-(16.*(x - 2/3).^2))).*sin(2*pi*x)',e,f);
n45 = quad('sin(pi*x).*sin(2*pi*x)',0,1);

nf1 = ['(5.4825*',nw1,')'];
nf2 = ['(6.5746*',nw2,' - 3.6364*',nw1,')'];
nf3 = ['(7.0373*',nw3,' - 5.2794*',nw2,' + 2.5186*',nw1,')'];
nf4 = ['(7.6394*',nw4,' - 17.0046*',nw3,' - 5.4347*',nw2,' - 17.0321*',nw1,')'];
nf5 = ['(3.0647*',nw5,' + 7.6604*',nw3,' - 7.6834*',nw1,')'];

dw1 = ['(((20736*x.^4 - 27648*x.^3 + 13824*x.^2 - 3072*x + 229).*',nw1,')./(55296.*((x -
7/12).^4).*((x - 1/12).^4)))'];
dw2 = ['(((24576*x.^4 - 49152*x.^3 + 36864*x.^2 - 12288*x + 1504).*',nw2,')./(((16*x.^2 -
16*x + 3)).^4))'];
dw3 = ['(((20736*x.^4 - 55296*x.^3 + 55296*x.^2 - 24576*x + 4069).*',nw3,')./(55296.*((x -
5/12).^4).*((x - 11/12).^4)))'];
dw4 = ['((-1)*(pi^2)*sin(pi*x))'];
dw5 = ['((-4)*(pi^2)*sin(2*pi*x))'];
q = ['(2*(x.^2) - 4*x - 2)'];
g = ['((4*x) - (4*(x.^2)))'];

wd11 = [nw1,'.*',dw1];
wd12 = [nw1,'.*',dw2];
wd13 = [nw1,'.*',dw3];
wd14 = [nw1,'.*',dw4];
wd15 = [nw1,'.*',dw5];

wd21 = [nw2,'.*',dw1];
wd22 = [nw2,'.*',dw2];
wd23 = [nw2,'.*',dw3];
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
wd24 = [nw2,'.*',dw4];
wd25 = [nw2,'.*',dw5];

wd31 = [nw3,'.*',dw1];
wd32 = [nw3,'.*',dw2];
wd33 = [nw3,'.*',dw3];
wd34 = [nw3,'.*',dw4];
wd35 = [nw3,'.*',dw5];

wd41 = [nw4,'.*',dw1];
wd42 = [nw4,'.*',dw2];
wd43 = [nw4,'.*',dw3];
wd44 = [nw4,'.*',dw4];
wd45 = [nw4,'.*',dw5];

wd51 = [nw5,'.*',dw1];
wd52 = [nw5,'.*',dw2];
wd53 = [nw5,'.*',dw3];
wd54 = [nw5,'.*',dw4];
wd55 = [nw5,'.*',dw5];

wq11 = [nw1,'.*',q,'.*',nw1];
wq12 = [nw1,'.*',q,'.*',nw2];
wq13 = [nw1,'.*',q,'.*',nw3];
wq14 = [nw1,'.*',q,'.*',nw4];
wq15 = [nw1,'.*',q,'.*',nw5];

wq21 = [nw2,'.*',q,'.*',nw1];
wq22 = [nw2,'.*',q,'.*',nw2];
wq23 = [nw2,'.*',q,'.*',nw3];
wq24 = [nw2,'.*',q,'.*',nw4];
wq25 = [nw2,'.*',q,'.*',nw5];
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
wq31 = [nw3,'.*',q,'.*',nw1];
wq32 = [nw3,'.*',q,'.*',nw2];
wq33 = [nw3,'.*',q,'.*',nw3];
wq34 = [nw3,'.*',q,'.*',nw4];
wq35 = [nw3,'.*',q,'.*',nw5];

wq41 = [nw4,'.*',q,'.*',nw1];
wq42 = [nw4,'.*',q,'.*',nw2];
wq43 = [nw4,'.*',q,'.*',nw3];
wq44 = [nw4,'.*',q,'.*',nw4];
wq45 = [nw4,'.*',q,'.*',nw5];

wq51 = [nw5,'.*',q,'.*',nw1];
wq52 = [nw5,'.*',q,'.*',nw2];
wq53 = [nw5,'.*',q,'.*',nw3];
wq54 = [nw5,'.*',q,'.*',nw4];
wq55 = [nw5,'.*',q,'.*',nw5];

A(1,1) = 30.0578*quad(wd11,a,b) - 30.0578*quad(wq11,a,b);
A(1,2) = 36.0452*quad(wd12,c,b) - 19.9366*quad(wd11,a,b) - 36.0452*quad(wq12,c,b) +
19.9366*quad(wq11,a,b);
A(1,3) = 38.5812*quad(wd13,e,b) - 28.9443*quad(wd12,c,b) + 13.8082*quad(wd11,a,b) -
38.5812*quad(wq13,e,b) + 28.9443*quad(wq12,c,b) - 13.8082*quad(wq11,a,b);
A(1,4) = 41.883*quad(wd14,a,b) - 93.2277*quad(wd13,e,b) - 29.7957*quad(wd12,c,b) -
93.3785*quad(wd11,a,b) - 41.883*quad(wq14,a,b) + 93.277*quad(wq13,e,b) +
29.7959*quad(wq12,c,b) + 93.3785*quad(wq11,a,b);
A(1,5) = 16.8022*quad(wd15,a,b) + 41.9981*quad(wd13,e,b) - 42.1242*quad(wd11,a,b) -
16.8022*quad(wq15,a,b) - 41.9981*quad(wq13,e,b) + 42.1242*quad(wq11,a,b);

A(2,1) = 36.0452*quad(wd21,c,b) - 19.9366*quad(wd11,a,b) - 36.0452*quad(wq21,c,b) +
19.9366*quad(wq11,a,b);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A(2,2) = 43.2254*quad(wd22,c,d) - 22.17*quad(wd21,c,b) - 22.117*quad(wd12,c,b) + 13.2234*quad(wd11,a,b) - 43.2254*quad(wq22,c,d) + 44.234*quad(wq21,c,b) - 13.2234*quad(wq11,a,b);

A(2,3) = 46.2674*quad(wd23,e,d) - 34.7099*quad(wd22,c,d) + 16.5588*quad(wd21,c,b) - 25.5904*quad(wd13,e,b) + 19.198*quad(wd12,c,b) - 9.1586*quad(wd11,a,b) - 46.2674*quad(wq23,e,d) + 34.7099*quad(wq22,c,d) - 35.7568*quad(wq12,c,b) + 25.5904*quad(wq13,e,b) + 9.1586*quad(wq11,a,b);

A(2,4) = 50.226*quad(wd24,c,d) - 111.7984*quad(wd23,e,d) - 35.731*quad(wd22,c,d) - 111.9792*quad(wd21,c,b) - 27.7799*quad(wd14,a,b) + 61.8355*quad(wd13,e,b) + 19.7627*quad(wd12,c,b) + 61.9355*quad(wd11,a,b) - 50.266*quad(wq24,c,d) + 111.7984*quad(wq23,e,d) + 35.731*quad(wq22,c,d) + 92.2165*quad(wq21,c,b) + 27.799*quad(wq14,a,b) - 61.8355*quad(wq13,e,b) - 61.9355*quad(wq11,a,b);

A(2,5) = -11.1565*quad(wd15,a,b) + 27.9399*quad(wd11,a,b) - 27.8563*quad(wd13,e,b) + 20.1492*quad(wd25,c,d) - 50.5153*quad(wd21,c,b) + 50.3641*quad(wd23,e,d) + 11.1565*quad(wq15,a,b) - 27.9399*quad(wq11,a,b) + 27.8563*quad(wq13,e,b) - 20.1492*quad(wq25,c,d) + 50.5153*quad(wq21,c,b) - 50.3641*quad(wq23,e,d);

A(3,1) = 13.8082*quad(wd11,a,b) - 28.9443*quad(wd21,c,b) + 38.582*quad(wd31,e,b) - 13.8082*quad(wq11,a,b) + 28.9443*quad(wq12,c,b) - 38.582*quad(wq13,e,b);

A(3,2) = -9.1586*quad(wd11,a,b) + 16.558*quad(wd12,c,b) + 19.198*quad(wd21,c,b) - 34.7099*quad(wd22,c,d) - 25.5904*quad(wd21,e,b) + 46.2674*quad(wd32,e,d) + 9.1586*quad(wq11,a,b) - 35.7568*quad(wq12,c,b) + 34.7099*quad(wq22,c,d) - 46.2674*quad(wq23,e,d) + 25.5904*quad(wq13,e,b);

A(3,3) = 6.3433*quad(wd11,a,b) - 13.2967*quad(wd12,c,b) + 17.7241*quad(wd13,e,b) - 13.2967*quad(wd21,c,b) + 27.8721*quad(wd22,c,d) - 37.1527*quad(wd23,e,d) + 17.7241*quad(wd31,e,b) - 37.1527*quad(wd32,e,d) + 49.5236*quad(wd33,e,f) - 6.3433*quad(wq11,a,b) + 26.5934*quad(wq12,c,b) - 35.4482*quad(wq13,e,b) - 27.8721*quad(wq22,c,d) + 79.3054*quad(wq23,e,d) - 49.5236*quad(wq33,e,f);

A(3,4) = 19.2406*quad(wd14,a,b) - 42.897*quad(wd11,a,b) - 13.6878*quad(wd12,c,b) - 42.8278*quad(wd13,e,b) - 40.3314*quad(wd24,c,d) + 89.9193*quad(wd21,c,b) + 28.692*quad(wd22,c,d) + 89.7741*quad(wd23,e,d) + 53.7607*quad(wd34,e,f) - 119.86*quad(wd31,e,b) - 38.2456*quad(wd32,e,d) - 119.6665*quad(wd33,e,f) -

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

19.2406*quad(wq14,a,b) + 42.897*quad(wq11,a,b) - 76.2315*quad(wq12,c,b) + 162.6878*quad(wq13,e,b) + 40.3314*quad(wq24,c,d) - 28.692*quad(wq22,c,d) - 51.5285*quad(wq23,e,d) - 53.7307*quad(wq34,e,f) + 119.6665*quad(wq33,e,f);

A(3,5) = 7.7188*quad(wd15,a,b) - 19.3594*quad(wd11,a,b) + 19.2935*quad(wd13,e,b) - 16.1798*quad(wd25,c,d) + 40.5637*quad(wd21,c,b) - 40.4423*quad(wd23,e,d) + 21.5672*quad(wd35,e,f) - 54.0704*quad(wd31,e,b) + 53.9085*quad(wd33,e,f) - 7.7188*quad(wq15,a,b) + 19.3544*quad(wq11,a,b) - 19.2935*quad(wq13,e,b) + 16.1798*quad(wq25,c,d) - 40.5637*quad(wq12,c,b) + 40.4423*quad(wq23,e,d) - 21.5672*quad(wq35,e,f) + 54.0704*quad(wq13,e,b) - 53.9085*quad(wq33,e,f);

A(4,1) = -93.3785*quad(wd11,a,b) - 29.7957*quad(wd21,c,b) - 93.2277*quad(wd31,e,b) + 41.883*quad(wd41,a,b) + 93.3785*quad(wq11,a,b) + 29.79598*quad(wq12,c,b) + 93.2277*quad(wq13,e,b) - 41.883*quad(wq14,a,b);

A(4,2) = 61.9355*quad(wd11,a,b) - 111.9792*quad(wd12,c,b) + 19.7627*quad(wd21,c,b) - 35.731*quad(wd22,c,d) + 61.8355*quad(wd31,e,b) - 111.7984*quad(wd32,e,d) - 27.7799*quad(wd31,e,b) + 50.226*quad(wd42,c,d) - 61.9355*quad(wq11,a,b) + 92.2102*quad(wq12,c,b) + 35.731*quad(wq22,c,d) - 61.8355*quad(wq13,e,b) + 111.7984*quad(wq23,e,d) + 27.7799*quad(wq14,a,b) - 50.226*quad(wq24,c,d);

A(4,3) = 42.897*quad(wd11,a,b) + 89.9193*quad(wd12,c,b) - 119.86*quad(wd13,e,b) - 13.6878*quad(wd21,c,b) + 28.692*quad(wd22,c,d) - 38.2456*quad(wd23,e,d) - 42.8278*quad(wd31,e,b) + 89.7741*quad(wd32,e,d) - 119.6665*quad(wd33,e,f) + 19.2406*quad(wd41,a,b) - 40.3314*quad(wd42,c,d) + 53.7607*quad(wd43,e,f) - 42.897*quad(wq11,a,b) - 76.2315*quad(wq12,c,b) + 162.6878*quad(wq13,e,b) - 51.5285*quad(wq23,e,d) - 28.692*quad(wq22,c,d) + 119.6665*quad(wq33,e,f) - 19.2406*quad(wq14,a,b) + 40.3314*quad(wq24,c,d) - 53.7602*quad(wq34,e,f);

A(4,4) = -130.115*quad(wd14,a,b) + 290.0924*quad(wd11,a,b) + 92.5644*quad(wd12,c,b) + 289.624*quad(wd13,e,b) - 41.5178*quad(wd24,c,d) + 92.5644*quad(wd21,c,b) + 29.536*quad(wd22,c,d) + 92.4149*quad(wd23,e,d) - 129.9049*quad(wd34,e,f) + 289.624*quad(wd31,e,b) + 92.4149*quad(wd32,e,d) + 289.1564*quad(wd33,e,f) + 58.3604*quad(wd44,0,1) - 130.115*quad(wd41,a,b) - 41.5178*quad(wd42,c,d) - 129.9049*quad(wd43,e,f) + 260.23*quad(wq14,a,b) - 290.0924*quad(wq11,a,b) - 185.1288*quad(wq12,c,b) - 576.248*quad(wq13,e,b) + 83.0356*quad(wq24,c,d) -

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

29.536*quad(wq22,c,d) - 184.8298*quad(wq23,e,d) - 289.1564*quad(wq33,e,f) - 58.3604*quad(wq44,0,1) + 259.8098*quad(wq34,e,f);

A(4,5) = -52.1983*quad(wd15,a,b) + 130.8644*quad(wd11,a,b) - 130.4727*quad(wd13,e,b) - 16.6557*quad(wd25,c,d) + 71.757*quad(wd21,c,b) - 41.632*quad(wd23,e,d) - 52.114*quad(wd35,e,f) + 130.6531*quad(wd31,e,b) - 130.262*quad(wd33,e,f) + 23.4124*quad(wd45,0,1) - 58.6966*quad(wd41,a,b) + 58.5209*quad(wd43,e,f) + 52.1983*quad(wq15,a,b) - 130.8644*quad(wq11,a,b) + 130.4729*quad(wq13,e,b) + 16.6557*quad(wq25,c,d) - 41.757*quad(wq12,c,b) + 41.632*quad(wq23,e,d) + 52.114*quad(wq35,e,f) - 130.6531*quad(wq13,e,b) + 130.262*quad(wq33,e,f) - 23.4124*quad(wq45,0,1) + 58.6966*quad(wq14,a,b) - 58.5209*quad(wq34,e,f);

A(5,1) = -42.1242*quad(wd11,a,b) + 41.9981*quad(wd31,e,b) + 16.8022*quad(wd51,a,b) + 42.1242*quad(wq11,a,b) - 41.9981*quad(wq31,e,b) - 16.8022*quad(wq15,a,b);

A(5,2) = 27.9399*quad(wd11,a,b) - 50.5153*quad(wd12,c,b) - 27.8563*quad(wd31,e,b) + 50.364*quad(wd32,e,d) - 11.1445*quad(wd51,a,b) + 20.1492*quad(wd53,e,f) - 27.9399*quad(wq11,a,b) + 50.5153*quad(wq12,c,b) + 27.8563*quad(wq13,e,b) - 50.364*quad(wq23,e,d) + 11.1445*quad(wq15,a,b) - 20.1492*quad(wq35,e,f);

A(5,3) = -19.3514*quad(wd11,a,b) + 40.5637*quad(wd12,c,b) - 54.0704*quad(wd13,e,b) + 19.2935*quad(wd31,e,b) - 40.4423*quad(wd32,e,d) + 53.9085*quad(wd33,e,f) + 7.7188*quad(wd51,a,b) - 16.1798*quad(wd52,c,d) + 21.5672*quad(wd53,e,f) + 19.3514*quad(wq11,a,b) - 40.5637*quad(wq12,c,b) + 34.7769*quad(wq23,e,b) + 40.4423*quad(wq23,e,d) - 53.9085*quad(wq33,e,f) - 7.7188*quad(wq15,a,b) + 16.1798*quad(wq25,c,d) - 21.5672*quad(wq35,e,f);

A(5,4) = -58.6966*quad(wd14,a,b) + 130.8644*quad(wd11,a,b) + 41.757*quad(wd12,c,b) + 130.6531*quad(wd13,e,b) + 58.5209*quad(wd35,e,f) - 130.4772*quad(wd31,e,b) - 41.632*quad(wd32,e,d) - 130.262*quad(wd33,e,f) + 23.4125*quad(wd54,0,1) - 52.1983*quad(wd51,a,b) - 16.6557*quad(wd52,c,d) - 52.114*quad(wd53,e,f) + 58.6966*quad(wq14,a,b) - 130.8644*quad(wq11,a,b) - 41.757*quad(wq12,c,b) - 0.1804*quad(wq13,e,b) - 6.4069*quad(wq35,e,f) + 41.632*quad(wq23,e,d) + 130.262*quad(wq33,e,f) - 23.4125*quad(wq45,0,1) + 52.1983*quad(wq15,a,b) + 16.6557*quad(wq25,c,d);

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
A(5,5) = -23.5473*quad(wd15,a,b) + 59.0346*quad(wd11,a,b) - 58.8579*quad(wd13,e,b) +
23.4768*quad(wd35,e,f) - 58.8579*quad(wd31,e,b) + 58.6817*quad(wd33,e,f) +
9.3924*quad(wd55,0,1) - 23.5473*quad(wd51,a,b) + 23.4768*quad(wd53,e,f) +
47.0946*quad(wq15,a,b) - 59.0346*quad(wq11,a,b) + 117.7158*quad(wq13,e,b) -
46.9536*quad(wq35,e,f) - 58.6817*quad(wq33,e,f) - 9.3924*quad(wq55,0,1);

eig(A)
%    ---
%    B(k,j) = (fek,g)
fg1 = ['(',nw1,'.*',g,')'];
fg2 = ['(',nw2,'.*',g,')'];
fg3 = ['(',nw3,'.*',g,')'];
fg4 = ['(',nw4,'.*',g,')'];
fg5 = ['(',nw5,'.*',g,')'];

B(1,1) = 5.4825*quad(fg1,a,b);
B(2,1) = 6.5746*quad(fg2,c,d) - 3.6364*quad(fg1,a,b);
B(3,1) = 7.0373*quad(fg3,e,f) - 5.2794*quad(fg2,c,d) + 2.5186*quad(fg1,a,b);
B(4,1) = 7.6394*quad(fg4,0,1) - 17.0046*quad(fg3,e,f) - 5.4347*quad(fg2,c,d) -
17.0321*quad(fg1,a,b);
B(5,1) = 3.0647*quad(fg5,0,1) + 7.6604*quad(fg3,e,f) - 7.6834*quad(fg1,a,b);

%    ---
%    C(j,i) = (fei,wj)

fw11 = [nw1,'.*',nw1];
fw12 = [nw2,'.*',nw1];
fw13 = [nw3,'.*',nw1];
fw14 = [nw4,'.*',nw1];
fw15 = [nw5,'.*',nw1];

fw21 = [nw1,'.*',nw2];
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
fw22 = [nw2,'.*',nw2];
fw23 = [nw3,'.*',nw2];
fw24 = [nw4,'.*',nw2];
fw25 = [nw5,'.*',nw2];

fw31 = [nw1,'.*',nw3];
fw32 = [nw2,'.*',nw3];
fw33 = [nw3,'.*',nw3];
fw34 = [nw4,'.*',nw3];
fw35 = [nw5,'.*',nw3];

C(1,1) = 5.4825*quad(fw11,a,b);
C(1,2) = 6.5746*quad(fw12,c,b) - 3.6364*quad(fw11,a,b);
C(1,3) = 7.0373*quad(fw13,e,b) - 5.2794*quad(fw12,c,b) + 2.5186*quad(fw11,a,b);
C(1,4) = 7.6394*quad(fw14,a,b) - 17.0046*quad(fw13,e,b) - 5.4347*quad(fw12,c,b) -
17.0321*quad(fw11,a,b);
C(1,5) = 3.0647*quad(fw15,a,b) + 7.6604*quad(fw13,e,b) - 7.6834*quad(fw11,a,b);

C(2,1) = 5.4825*quad(fw21,c,b);
C(2,2) = 6.5746*quad(fw22,c,d) - 3.6364*quad(fw21,c,b);
C(2,3) = 7.0373*quad(fw23,e,d) - 5.2794*quad(fw22,c,d) + 2.5186*quad(fw21,c,b);
C(2,4) = 7.6394*quad(fw24,c,d) - 17.0046*quad(fw23,e,d) - 5.4347*quad(fw22,c,d) -
17.0321*quad(fw21,c,b);
C(2,5) = 3.0647*quad(fw25,c,d) + 7.6604*quad(fw23,e,d) - 7.6834*quad(fw21,c,b);

C(3,1) = 5.4825*quad(fw31,e,b);
C(3,2) = 6.5746*quad(fw32,e,d) - 3.6364*quad(fw31,e,b);
C(3,3) = 7.0373*quad(fw33,e,f) - 5.2794*quad(fw32,e,d) + 2.5186*quad(fw31,e,b);
C(3,4) = 7.6394*quad(fw34,e,f) - 17.0046*quad(fw33,e,f) - 5.4347*quad(fw32,e,d) -
17.0321*quad(fw31,e,b);
C(3,5) = 3.0647*quad(fw35,e,f) + 7.6604*quad(fw33,e,f) - 7.6834*quad(fw31,e,b);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
Cs = [0 1 0 1 0 ; 1 0 1 0 1];

%     Finding T and T inverse
%     ---
for i = 1 : 2
   for j = 1 : 5
      Tinv(i,j) = Cs(i,j);
   end
end
for i = 3 : 5
   for j = 1 : 5
      Tinv(i,j) = C(i-2,j);
   end
end

if det(Tinv) == 0
   ('T inverse is Singular Matrix')
   return
end
T = Tinv^(-1);
%     ---

%     Finding Ab
%     ---
Ab = Tinv * A * T;
for i = 1 : 2
   for j = 1 : 2
      Ab11(i,j) = Ab(i,j);
   end
end
for i = 1 : 2
   for j = 3 : 5
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
      Ab12(i,j-2) = Ab(i,j);
      Ab21(j-2,i) = Ab(j,i);
   end
end
for i = 3 : 5
   for j = 3 : 5
      Ab22(i-2,j-2) = Ab(i,j);
   end
end
%     ---

%     Finding Bb
%     ---
Bb = Tinv * B;
for i = 1 : 2
   Bb1(i,1) = Bb(i,1);
end
for i = 1 : 3
   Bb2(i,1) = Bb(i+2,1);
end
%     ---

%     Finding Cb
%     ---
Cb = C * T;
%     ---
%     L = [l11 l12 l13 ; l21 l22 l23]
Abh = [-20 0 ; 0 -30];
%     Determine value of L from the desired poles. That is ...
L = [ -19.70291606 0  -16.23220888 ; 11.61730903 0 27.20092066];
%[22.232 0 6.0319 ; 10.0389 0 -28.0426];
Bbh = Ab11*L - L*Ab21*L + Ab12 - L*Ab22;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
Cbh = [1 0 ; 0 1 ; 0 0 ; 0 0 ; 0 0];
Dbh = [L(1,1) L(1,2) L(1,3) ; L(2,1) L(2,2) L(2,3) ; 1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1];
Jbh = Bb1 - L*Bb2;

Ah = Abh;
Bh = Bbh;
Ch = T*Cbh;
Dh = T*Dbh;
Jh = Jbh;

digits(5);
s = sym('s');
dtA = vpa(simple(ilaplace(inv(s*eye(5)-A))));
eAB = simple(dtA*B);
dtAh = vpa(simple(ilaplace(inv(s*eye(2)-Ah))));

if xp < (1/12)
    w1 = 0;
  elseif xp > (7/12)
    w1 = 0;
  else
    w1 = exp(-1 / (1 - (16 * (xp - 1/3)^2)));
  end

  if xp < (3/12)
    w2 = 0;
  elseif xp > (9/12)
    w2 = 0;
  else
    w2 = exp(-1 / (1 - (16 * (xp - 1/2)^2)));
  end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    if xp < (5/12)
       w3 = 0;
    elseif xp > (11/12)
       w3 = 0;
    else
       w3 = exp(-1 / (1 - (16 * (xp - 2/3)^2)));
    end

       w4 = sin (pi * xp);
       w5 = sin (2 * pi * xp);

fe1 = 5.4825*w1;
fe2 = 6.5746*w2 - 3.6364*w1;
fe3 = 7.0373*w3 - 5.2794*w2 + 2.5186*w1;
fe4 = 7.6394*w4 - 17.0046*w3 - 5.4347*w2 - 17.0321*w1;
fe5 = 3.0647*w5 + 7.6604*w3 - 7.6834*w1;
for t = 1 : 801
    x = (t-1)/100;
    T = num2str(x)

    eABx11 = ['0.4208*exp(-14.548*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
    eABx12 = ['0.1217*exp(-22.924*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
    eABx13 = ['- 0.0572*exp(-261.23*(',T,'-x)).*cos(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
    eABx14 = ['- 0.0803*exp(-261.23*(',T,'-x)).*sin(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
    eABx15 = ['0.0316*exp(-149.05*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
    eABT11(t) = quad(eABx11,0,x);
    eABT12(t) = quad(eABx12,0,x);
    eABT13(t) = quad(eABx13,0,x);
    eABT14(t) = quad(eABx14,0,x);
    eABT15(t) = quad(eABx15,0,x);
    eT1(t) = eABT11(t) + eABT12(t) + eABT13(t) + eABT14(t) + eABT15(t);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
eABx21 = ['0.2283*exp(-14.548*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx22 = ['0.2195*exp(-22.924*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx23 = ['0.0439*exp(-261.23*(',T,'-x)).*cos(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx24 = ['- 0.0128*exp(-261.23*(',T,'-x)).*sin(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx25 = ['- 0.1336*exp(-149.05*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABT21(t) = quad(eABx21,0,x);
eABT22(t) = quad(eABx22,0,x);
eABT23(t) = quad(eABx23,0,x);
eABT24(t) = quad(eABx24,0,x);
eABT25(t) = quad(eABx25,0,x);
eT2(t) = eABT21(t) + eABT22(t) + eABT23(t) + eABT24(t) + eABT25(t);

eABx31 = ['0.2769*exp(-261.23*(',T,'-x)).*sin(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx32 = ['0.1288*exp(-22.924*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx33 = ['- 0.0351*exp(-261.23*(',T,'-x)).*cos(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx34 = ['0.1305*exp(-149.05*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx35 = ['0.1139*exp(-14.548*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABT31(t) = quad(eABx31,0,x);
eABT32(t) = quad(eABx32,0,x);
eABT33(t) = quad(eABx33,0,x);
eABT34(t) = quad(eABx34,0,x);
eABT35(t) = quad(eABx35,0,x);
eT3(t) = eABT31(t) + eABT32(t) + eABT33(t) + eABT34(t) + eABT35(t);

eABx41 = ['- 0.0136*exp(-14.548*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx42 = ['- 0.0655*exp(-22.924*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx43 = ['0.1985*exp(-261.23*(',T,'-x)).*cos(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx44 = ['- 0.1875*exp(-261.23*(',T,'-x)).*sin(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx45 = ['0.0344*exp(-149.05*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABT41(t) = quad(eABx41,0,x);
eABT42(t) = quad(eABx42,0,x);
eABT43(t) = quad(eABx43,0,x);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
eABT44(t) = quad(eABx44,0,x);
eABT45(t) = quad(eABx45,0,x);
eT4(t) = eABT41(t) + eABT42(t) + eABT43(t) + eABT44(t) + eABT45(t);

eABx51 = ['0.1199*exp(-14.548*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx52 = ['- 0.0456*exp(-22.924*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx53 = ['- 0.057*exp(-261.23*(',T,'-x)).*cos(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx54 = ['0.5976*exp(-261.23*(',T,'-x)).*sin(55.959*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABx55 = ['- 0.0195*exp(-149.05*(',T,'-x)).*sin(x*pi./2)'];
eABT51(t) = quad(eABx51,0,x);
eABT52(t) = quad(eABx52,0,x);
eABT53(t) = quad(eABx53,0,x);
eABT54(t) = quad(eABx54,0,x);
eABT55(t) = quad(eABx55,0,x);
eT5(t) = eABT51(t) + eABT52(t) + eABT53(t) + eABT54(t) + eABT55(t);

U(t) = fe1*eT1(t) + fe2*eT2(t) + fe3*eT3(t) + fe4*eT4(t) + fe5*eT5(t);

Ux = num2str(U(t));
Px = [Ux,'*cos(pi*x./2)'];
P(t) = quad(Px,0,1);

Y1(t) = C(1,1)*eT1(t) + C(1,2)*eT2(t) + C(1,3)*eT3(t) + C(1,4)*eT4(t) + C(1,5)*eT5(t);
Y2(t) = C(2,1)*eT1(t) + C(2,2)*eT2(t) + C(2,3)*eT3(t) + C(2,4)*eT4(t) + C(2,5)*eT5(t);
Y3(t) = C(3,1)*eT1(t) + C(3,2)*eT2(t) + C(3,3)*eT3(t) + C(3,4)*eT4(t) + C(3,5)*eT5(t);

Y = [Y1(t) Y2(t) Y3(t)]';
BhY = Bh * Y;
BhY1 = BhY(1,1);
BhY2 = BhY(2,1);
BhY1x = num2str(BhY1);
BhY2x = num2str(BhY2);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    Jhx1 = num2str(Jh(1,1));
    Jhx2 = num2str(Jh(2,1));
    Jhf1 = [Jhx1,'.*sin(pi*x./2)'];
    Jhf2 = [Jhx2,'.*sin(pi*x./2)'];

    BhyJhf1 = ['(',BhY1x,'+',Jhf1,')'];
    BhyJhf2 = ['(',BhY2x,'+',Jhf2,')'];

    eAhtBhyJhfx1 = ['exp(-20*(',T,'-x)).*',BhyJhf1];
    eAhtBhyJhfx2 = ['exp(-30*(',T,'-x)).*',BhyJhf2];
    Z1(t) = quad(eAhtBhyJhfx1,0,x);
    Z2(t) = quad(eAhtBhyJhfx2,0,x);
    eTh1(t) = Ch(1,1)*Z1(t) + Ch(1,2)*Z2(t) + Dh(1,1)*Y1(t) + Dh(1,2)*Y2(t) + Dh(1,3)*Y3(t);
    eTh2(t) = Ch(2,1)*Z1(t) + Ch(2,2)*Z2(t) + Dh(2,1)*Y1(t) + Dh(2,2)*Y2(t) + Dh(2,3)*Y3(t);
    eTh3(t) = Ch(3,1)*Z1(t) + Ch(3,2)*Z2(t) + Dh(3,1)*Y1(t) + Dh(3,2)*Y2(t) + Dh(3,3)*Y3(t);
    eTh4(t) = Ch(4,1)*Z1(t) + Ch(4,2)*Z2(t) + Dh(4,1)*Y1(t) + Dh(4,2)*Y2(t) + Dh(4,3)*Y3(t);
    eTh5(t) = Ch(5,1)*Z1(t) + Ch(5,2)*Z2(t) + Dh(5,1)*Y1(t) + Dh(5,2)*Y2(t) + Dh(5,3)*Y3(t);

    Uh(t) = fe1*eTh1(t) + fe2*eTh2(t) + fe3*eTh3(t) + fe4*eTh4(t) + fe5*eTh5(t);

    Uhx = num2str(Uh(t));
    Phx = [Uhx,'*cos(pi*x./2)'];
    Ph(t) = quad(Phx,0,1);

end
T = 0 : 0.01 : 8;
figure
plot(T,eTh1,T,eT1)
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาค่าคำตอบโดยวิธี Finite Difference

```
function pdex3
%  This problem arises in transistor theory. It is used in [1] to illustrate
%  solution of PDEs with series. In the form expected by PDEPE, the single PDE
%  is
%
%  [1] .*  D_ [u] =  D_ [   d*Du/Dx   ] +  [ -(eta/L)*Du/Dx ]
%         Dt       Dx
%  ---      ---      ------------      ----------------
%   c        u        f(x,t,u,Du/Dx)     s(x,t,u,Du/Dx)
%
%  Here d and eta are physical constants. The equation is to hold on an
%  interval 0 <= x <= L for times t >= 0. For the problem at hand, L = 1.
%  The initial condition
%
%    u(x,0) = 0
%
%  involves another physical constant K. The left bc is u(0,t) = 0:
%
%    [u]   +    [0] .* [      Du/Dx        ] = [0]
%
%    ---         ---   ----------------------   ---
%   p(0,t,u)     q(0,t)       f(0,t,u,Du/Dx)     0
%
%  The right bc is u(L,t) = 0:
%
%    [u]   +    [0] .* [      Du/Dx        ] = [0]
%
%    ---         ---   ----------------------   ---
%   p(L,t,u)     q(L,t)       f(L,t,u,Du/Dx)     0
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
L = 1;
d = 0.1;
eta = 10;
K = d;
I_p = 1;

m = 0;
x = linspace(0,L,82);
t = linspace(0,8,102);
sol = pdepe(m,@pdex3pde,@pdex3ic,@pdex3bc,x,t,[],L,K,d,eta);
u = sol(:,:,1);

%lo=cos(pi*x/2);

% dxxx=u(8,:);
% for i=1:82
%     ppp(i)=(dxxx(i)*lo(i));
% end
% figure
% plot(x,ppp)

%find p(t)
 figure
 dyyy=u(:,41)*cos(pi*0.25);
 plot(t,dyyy)

figure;
surf(x,t,u);
title('Numerical solution computed with 41 mesh points.');
xlabel('Distance x');
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
ylabel('Time t');

nt = length(t);
I = zeros(1,nt);
seriesI = zeros(1,nt);
iok = 2:nt;
for j = iok
 % At time t(j), compute Du/Dx at x = 0.
 [dummy,I(j)] = pdeval(m,x,u(j,:),0);
 seriesI(j) = serex3(t(j),L,d,eta,I_p);
end
% I(t) = (I_p*d/K)*Du(0,t)/Dx
I = (I_p*d/K)*I;


%find u(x,t)
figure;
plot(t(iok),I(iok));


% --------------------------------------------------------------

function [c,f,s] = pdex3pde(x,t,u,DuDx,L,K,d,eta)
c = 1;
f = d*DuDx;
s = sin(pi*t/2)*(4*x-4*x*x)+(2*x*x-4*x-2)*u;

% --------------------------------------------------------------

function u0 = pdex3ic(x,L,K,d,eta)
u0 = 0;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
% --------------------------------------------------------------------

function [pl,ql,pr,qr] = pdex3bc(xl,ul,xr,ur,t,L,K,d,eta)
pl = ul;
ql = 0;
pr = ur;
qr = 0;

% --------------------------------------------------------------------

function It = serex3(t,L,d,eta,I_p)
%  Approximate I(t) by 40 terms of a series expansion.

It = 0;
for n = 1:40
 temp = (n*pi)^2 + 0.25*eta^2;
 It = It + ((n*pi)^2 / temp)* exp(-(d/L^2)*temp*t);
end
It = 2*I_p*((1 - exp(-eta))/eta)*It;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ ดร. พัลลภ เหล่าเจริญ ที่ท่านกรุณาเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในการทำโครงงานตัวสังเกตสภาวะของระบบนี้ และได้มาช่วยแนะนำและชี้แนวทางให้พวกเราได้รู้จักคิดแก้ปัญหาต่างๆ ในโครงงานนี้ มาตั้งแต่ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2547 จนกระทั่งจบภาคเรียนที่ 2 ทั้งยังช่วยแนะนำตำราที่ช่วยให้โครงงานนี้มีความสมบูรณ์แบบมากขึ้น

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2548

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

Katsuhisa Furuta,Akira Sano,Derek Atherton . **State Variable Methods in Automatic Control**: Tokyo Institute Technology, Keiro University Yokohama,Sussex University U.K.; Chichester:John Wiley

Brogan, W.L.,**Modern Control Theory** .Upper Sassle River, NJ:Prentice Hall,1985

Chi-Tsong Chen, **Linear System Theory and Design** ,Oxford University Press 1999

Erwin Kreyszig, **Advanced Engineering Mathetics,**Processor of Mathematics Ohio State University Columbus Ohio; Chichester:John Wiley & Sons

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้